

CBPF-MO-001/88

INTRODUCTION AUX CORDES ET AUX SUPERCORDES*

par

Michel RAUSCH DE TRAUBENBERG^{1,2}

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

¹Institut National de Physique Nucléaire
et de Physique des Particules
et Université Louis Pasteur, Strasbourg

²Adresse Postale: Centre de Recherches Nucléaires - PTHE
F67037 Strasbourg Cedex - France

*Série des cours et conférence sur la Physique des Hautes Energies

Les documents ayant servi de base à l'élaboration de ces notes sont le mémoire de D.E.A. et le rapport de fin d'études que Michel a effectué à la Division de Physique Théorique des Hautes Energies pour l'obtention de son Diplôme d'Ingénieur à l'Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg.

A une époque où la mise en application technologique des résultats de laboratoire est souhaitée, son exemple prouve qu'inversement, un passage par une école d'ingénieurs peut conduire à la Physique théorique.

Strasbourg, Décembre 1987

N. Fleury

SOMMAIRE.

Résumé.

Introduction. 1

1^{ère} Partie : Les cordes.

- Pourquoi les cordes? 9

- Corde de Nambu-Corde relativiste.

1 Action - Lagrangien. 14

2 Equations du mouvement. 15

3 Solutions covariantes des équations du mouvement. 18

4 Variables indépendantes. 19

5 Cordes fermées : anneaux. 20

- Formalisme Hamiltonien. Quantification canonique de la corde.

1 Procédure de Dirac. 24

2 Exemple de la particule ponctuelle. 24

3 Quantification de la corde. 25

4 Covariance de la théorie - Absence de fantôme. 27

5 Cordes fermées. 28

- Cordes en interaction.

1 La matrice S 31

2 Diagrammes de Feynmann. 32

- Cordes munies d'un spin.

1 Formulation du modèle. 35

2 Formalisme Lagrangien covariant. 35

3 Formulation dans un système Minkowskien. 36

4 Invariance. 37

5 Solution des équations du mouvement. 39

6 Quantification covariante. 39

7 Contraintes et spectre des états. 41

2^{ème} Partie : Supersymétrie-Supergravité.

- La supersymétrie. 45

- Algèbre de la supersymétrie.

1 Extension du groupe de Lie. 47

2 Approche alternative : symétrie fermion-boson. 48

3 Conséquences de la supersymétrie. 49

- Champs supersymétriques.

1 Modèle de Wess-Zumino. 51

2 Super Q.E.D.	52
3 Super Yang-Mills.	53
4 Formulation "off shell".	54
- Supergravité.	
1 Principaux résultats de relativité générale.	57
2 Champ de spin 3/2 : équation de Rarita-Schwinger.	58
3 Supergravité.	59
4 Equations non linéaires.	60
- Superespace.	
1 Superespace $N = 1$	61
2 Superchamps.	61
3 Propriétés géométriques.	62
3 ^{ème} Partie : Supercordes.	
- Des cordes aux supercordes.	65
- Supersymétrie à deux dimensions-Supercordes.	
1 Supersymétrie sur la surface d'univers.	67
2 Supercordes.	68
3 Couplage des supercordes à la supergravité.	68
4 Supercordes : nouveau formalisme.	70
5 Equations du mouvement. Quantification.	71
6 Spectre des états.	72
7 Cordes fermées.	72
- Interaction de supercordes.	
1 Cordes ouvertes.	75
2 Emission d'une corde fermée.	76
3 Amplitude de diffusion.	77
4 Supercordes et renormalisation.	78
- Compactification des dimensions spatiales - Théories limites.	
1 Fermions chiraux.	79
2 Compactification des dimensions.	80
3 Modification des équations du mouvement.	80
4 Théories limites.	82
- Cordes hétérotiques.	
1 Construction du modèle.	85
2 Compactification des dimensions internes.	88
3 Spectre des états.	89
4 Représentation fermionique.	89
- Conclusion.	91

- Annexe 1.	
I Calcul tensoriel.	
1 Vecteurs - Covecteurs.93
2 Tenseurs.94
3 Base locale.94
4 Métrique.94
II Calcul spinoriel.	
1 Spineurs de $E_{2\nu+1}, E_{2\nu}$95
2 Matrice associée à un vecteur.95
3 Spineurs d'ordre 2.96
4 Loi de transformation.96
III Théorie de jauge de Yang-Mills.	
1 Dérivée covariante de jauge.97
2 Forme de courbure - Equations du mouvement.98
3 Conséquences physiques.98
IV Formalisme tétraédrique.	
1 Champ de Vierbien.99
2 Champs fondamentaux en relativité générale.99
V Géométrie Riemannienne.	
1 Equation du mouvement d'une particule libre. Géodésique métrique.100
2 Transport de parallèle. Dérivée covariante.100
3 Courbure.101
- Annexe 2.	
1 Indices.103
2 Métriques.103
3 Matrices de Dirac.104
4 Champs de Vierbein.104
- Annexe 3.	
1 Du modèle superstandard aux supercordes.105
2 Supercordes : un espoir d'obtenir la théorie ultime?106
- Annexe 4. Supermembranes et au-delà.	
1 Supermembranes.107
2 Supermembranes - Supercordes.108
3 Au-delà des supermembranes.109
- Remerciements	
- Références	

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous nous intéressons à la théorie des cordes, dont le modèle primitif tend à rendre compte du phénomène hadronique de la dualité. On étudie ensuite une extension du modèle qui décrit les cordes fermées et les cordes munies d'un spin.

Nous nous attachons ensuite à la supersymétrie qui permet la formulation d'une "superthéorie" de la matière, des champs et de la gravitation.

Nous utilisons alors la supersymétrie pour obtenir la théorie des supercordes puis la théorie des cordes hétérotiques, dont le but est une tentative d'unification des forces fondamentales et de la matière.

Introduction

L'idéal des physiciens est de pouvoir décrire en une théorie unique plusieurs théories apparemment différentes. Les grands progrès de la physique sont caractérisés par ces unifications. Einstein lui-même a tenté, à la fin de sa carrière, d'unifier la gravitation et l'électromagnétisme, mais en vain.

La physique des particules quant à elle n'échappe pas à la règle; les théoriciens aimeraient pouvoir obtenir une théorie où les quatre forces fondamentales ne seraient que différents aspects d'une unique entité. Une première étape en vue de "l'unification finale" a été réalisée par le modèle Salam-Wienberg où les interactions faibles et électromagnétiques (Q.E.D.) se réduisent à l'interaction électrofaible décrite par le groupe de jauge $SU(2) \otimes U(1)$ (1967-1968). Ultérieurement, on découvrit que les interactions fortes, Q.C.D., pouvaient se déduire de la symétrie de jauge $SU(3)$. Certains physiciens ont tenté de généraliser le concept de groupe de jauge pour arriver au modèle des théories grand-unifiées GUT (qui unifieraient les forces électrofaibles et fortes ($SU(5)$, $SO(10)$, E_6)).

Expérimentalement, le modèle de Salam-Weinberg a été confirmé par la découverte des bosons intermédiaires (CERN, 1983). La Q.C.D., n'est que partiellement établie mais se trouve aussi renforcée par l'expérience. Par contre, bien que la GUT explique certains faits expérimentaux (charge des quarks $\pm 1/3, \pm 2/3 \dots$), elle ne reste que purement hypothétique. Aucun monopole magnétique n'a été découvert jusqu'à présent. Les monopoles sont-ils sujets à un confinement analogue à celui des quarks? La désintégration du proton ($p \rightarrow e^+ + \pi^0$) n'a toujours pas été mise en évidence, ce que se proposait de faire l'expérience de Fréjus ($10^{32 \pm 1}$ ans de demi-vie). Il semble alors que $SU(5)$ doive être abandonné. Il reste donc $SO(10)$ ou E_6 , ou peut-être même un autre groupe? Quel groupe de symétrie doit-on choisir?

La physique des hautes énergies repose donc sur le modèle standard $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ où interactions fortes et électrofaibles ne sont pas couplées. Cette dernière engendre par brisure de symétrie (mécanisme de Higgs) l'interaction électromagnétique et l'interaction faible. 't Hooft (1971), a montré qu'une théorie à la Yang-Mills, où les bosons de jauge (tels que W^\pm, Z^0) acquièrent une masse par brisure spontanée de symétrie, est renormalisable. Le secteur de la matière, quant à lui, est décrit par des fermions chiraux ("left", L et "right", R).

			couleur	isospin faible	hyper charge	charge e	masse MeV
$(\nu_e^-)_L$	$(\nu_\mu^-)_L$	$(\nu_\tau^-)_L$	1	$+\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	-1	0 -1	0 - 0 - 0 0,51-106-1784
e_R^-	μ_R^-	τ_R^-	1	0 0	-2	-1	
$(\begin{smallmatrix} U_R & U_D & U_i \\ d_R & d_B & d_i \end{smallmatrix})_L$	$(\begin{smallmatrix} C_R & C_D & C_i \\ S_R & S_D & S_i \end{smallmatrix})_L$	$(\begin{smallmatrix} t_R & t_D & t_i \\ b_R & b_D & b_i \end{smallmatrix})_L$	3	$+\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	1/3	2/3 -1/3	350-1500->4.10 ⁴ 350-500-5.10 ³
$(U_R U_B U_G)_R$	$(C_R C_B C_G)_R$	$(t_R t_B t_G)_R$	3	0	4/3	2/3	
$(d_R d_B d_G)_R$	$(S_R S_B S_G)_R$	$(b_R b_B b_G)_R$	3	0	-2/3	-1/3	

Un des problèmes majeurs du modèle standard est de pouvoir incorporer de façon cohérente la gravitation dans le schéma unificateur. La difficulté réside dans la quantification de la gravitation. De plus le traitement de la gravitation en tant que champ de jauge n'est pas rigoureusement identique aux trois interactions précédentes (groupe de jauge continu (*Diff*(1,3)). Ajoutés à cette difficulté, et bien que le modèle standard soit bien adapté pour décrire les processus aux énergies actuellement disponibles, certains éléments demeurent inexplicés :

- Pourquoi la théorie a-t-elle besoin de 25 particules fondamentales (6 quarks*, 6 leptons, 3 bosons intermédiaires, 8 gluons et le boson de Higgs**)? Ne serait-ce pas plus simple s'il y avait moins de particules élémentaires?
- Pourquoi y a-t-il trois générations successives de quarks et de leptons (tableau)?
- Existe-t-il plus de trois familles?

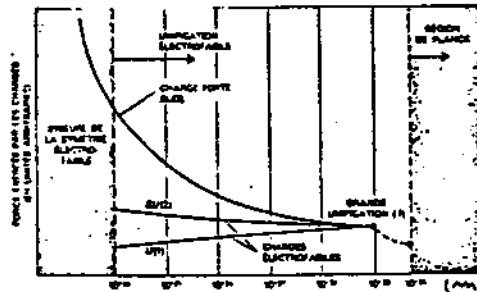
* le quark top (*t*) n'a pas encore été découvert

** le boson de Higgs, la seule particule scalaire, n'a toujours pas été mis en évidence

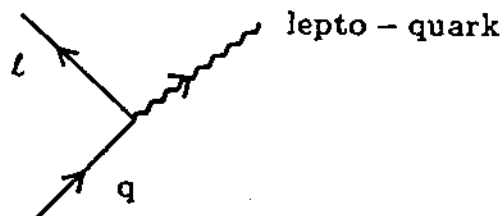
- Pourquoi les quarks et les leptons présentent-ils des similarités?
- Pourquoi la matière est-elle chirale? Autrement dit, pourquoi l'interaction faible viole-t-elle la parité?
- Pourquoi y a-t-il un tel écart de masse entre les différentes familles leptoniques, alors que d'après l'universalité des interactions faibles, e^- et μ^- devraient avoir la même masse?
- Pourquoi la symétrie $SU(2)$ est-elle légèrement brisée pour les familles (ν_e) et (u) alors qu'il n'en est pas ainsi pour les suivantes?
- Le neutrino a-t-il une masse? Dans ce cas, on devrait observer des neutrinos droitiers!
- Quel est l'origine du potentiel scalaire responsable du mécanisme de Higgs?
- etc...

Afin de chercher à apporter une réponse à ces diverses questions, plusieurs solutions sont envisagées.

La première, à l'instar de la GUT, tente de rechercher certaines symétries de jauge pour obtenir l'interaction grand-unifiée et donc de relier les constantes de couplage des interactions faibles - électromagnétiques et fortes. Pour concevoir une telle physique, il faut faire un saut de 13 ordres de grandeurs!!



De plus, dans de tels modèles les nombres baryoniques (B) et leptoniques (L) ne sont plus conservés, seul $B-L$ est une quantité invariante. En effet, on débouche sur la transition d'un quark en lepton par l'intermédiaire de nouvelles particules, les lepto-quarks :



En outre, il apparaît de nouveaux bosons de Higgs, responsables de la brisure de symétrie.

Dans la lignée des théories de jauge, on construit des théories de jauge étendues où, par exemple, on enrichit le secteur électrofaible ($SU(2) \otimes U(1)$) qui devient $(SU(2) \otimes$

$U(1) \otimes U(1)$ avec apparition d'un nouveau courant neutre dû à un boson Z' pouvant se coupler avec le photon ou le Z^0 . On peut encore considérer $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)$ qui permet de restaurer la conservation de la parité en créant des fermions miroirs analogues aux 3 générations (tableau) mais de chiralité opposée $\left(\begin{pmatrix} \nu_i \\ l_i \end{pmatrix}_R, l_L \right)$. Les bosons de jauge seraient alors $W_R^\pm, W_L^\pm, Z_R^0, Z_L^0$ dont une certaine combinaison linéaire donnerait W^\pm et Z^0 . De même, le secteur fort peut être enrichi : $SU(4) \otimes SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$, où $SU(4)$ serait le groupe de jauge de l'interaction de technicouleur, véhiculée par 15 bosons de jauge. Les technifermions subiraient une telle interaction; cette physique serait analogue à la physique hadronique mais dans le domaine du TeV.

Il existe une autre alternative qui consiste à considérer certaines particules dites élémentaires comme composites. Ainsi, par exemple, certains auteurs considèrent que les bosons W^\pm, Z^0 sont composés d'objets plus fondamentaux (problème analogue aux pions π^\pm et π^0 dans les années 50); l'interaction fondamentale serait l'hypercouleur dont l'interaction faible serait un résidu; tout comme l'interaction entre nucléons est un résidu de l'interaction entre quarks et la force de Van der Waals est un résidu de l'interaction électromagnétique.

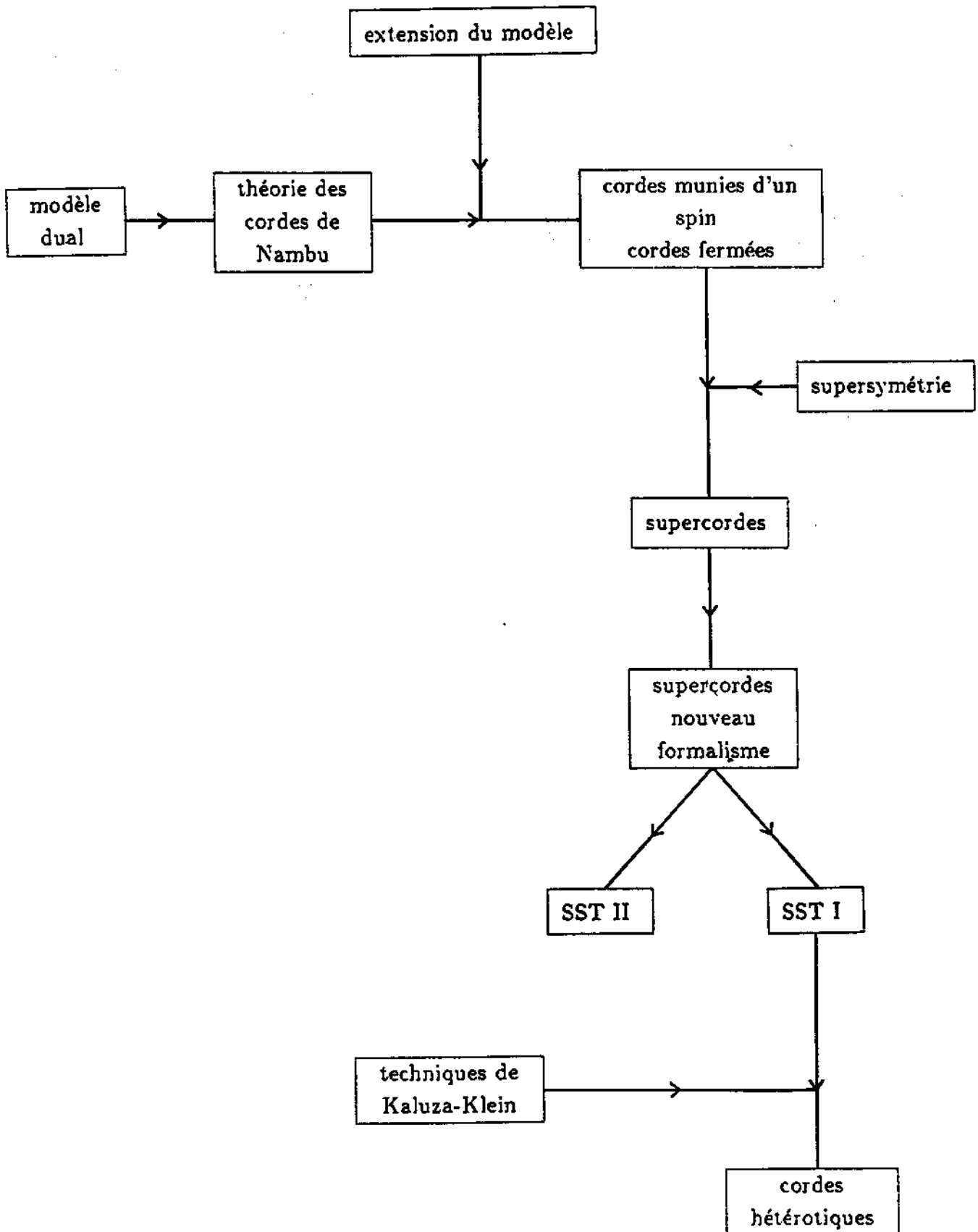
On peut trouver des modèles encore plus drastiques, où l'on considère les leptons et les quarks eux-mêmes comme composés, c'est le modèle des richons, haplons, préons Certains d'entre eux rendent compte du fait que les leptons sont singulets de couleur (ils ne subissent donc pas l'interaction forte) et les quarks triplets de couleur. Les différentes générations s'expliqueraient comme des résonances. Mais, dans ce cas, ne devrait-on pas avoir des leptons de spin 3/2?

Une autre alternative consiste à vouloir une symétrie fermion-boson; on débouche alors sur la notion de supersymétrie et de partenaire supersymétrique. On peut ainsi construire des théories de jauge supersymétriques et la supergravité; nous en reparlerons ultérieurement. C'est une théorie qui permet de coupler les quatre forces fondamentales et la matière.

On peut, si on le désire, à partir de la supersymétrie, obtenir la théorie des supercordes. C'est une théorie prometteuse et qui permet de coupler de façon élégante les quatre forces fondamentales et la matière.

Nous nous intéressons plus particulièrement aux deux dernières alternatives.

Dans la première partie, nous introduirons la notion de corde, théorie issue du modèle dual. Dans un second temps, nous nous intéresserons à la supersymétrie puis nous étudierons les théories de jauge supersymétriques et la supergravité. Enfin, nous verrons comment, à partir du modèle des cordes et de la supersymétrie, on peut introduire la notion de supercorde. Nous donnerons alors le modèle le plus prometteur pour l'Unification qui est la corde hétérotique. Pour conclure, nous allons donner le schéma de "construction" de la théorie.



1^{ière} Partie:

LES CORDES

Pourquoi les cordes?

La théorie des cordes a été introduite par Nambu en 1970 pour expliquer le phénomène de la dualité.

La diffusion de leptons chargés sur des hadrons conduit à trois régimes différents.

- (1) : la diffusion élastique
- (2) : la région des résonances
- (3) : la région uniforme

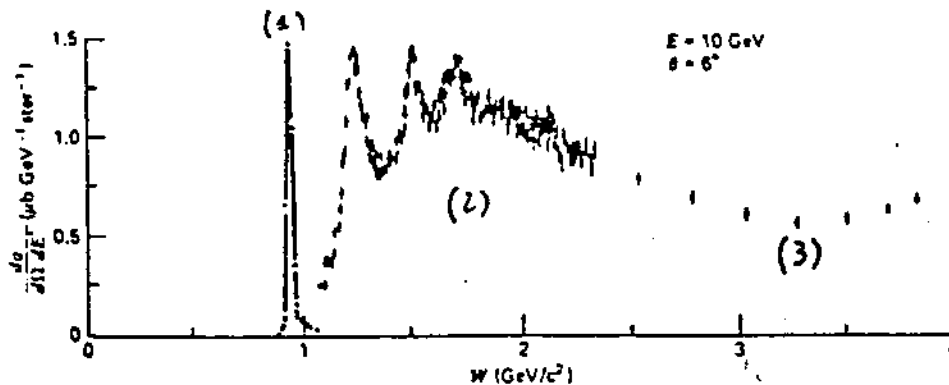


Fig. 1 : Diffusion de leptons chargés sur des hadrons

Nous ne nous intéresserons qu'à la diffusion inélastique (2) et (3); la région des résonances (2) peut-être décrite par la méthode des déphasages en ondes partielles. La région uniforme (3), appelée modèle de Regge, décrit des mécanismes dans le domaine des hautes énergies par un processus d'échange. On peut se demander s'il existe des mécanismes où les deux effets agiraient simultanément, ce qui nous conduit à des termes d'interférence. Expérimentalement ceci n'est pas observé. On arrive alors à la dualité, qui, pour des interactions fortes, prédit que les deux mécanismes sont équivalents mais pas superposables : l'amplitude de diffusion pourra être décrite soit en termes de résonances dans la voie directe, soit en termes d'échanges dans la voie croisée. La dualité est la complémentarité de ces deux descriptions.

Il est important de noter que la dualité n'est pas la théorie fondamentale de l'interaction de couleur; elle n'est qu'une approximation de la Q.C.D. qui reste la théorie fondamentale de l'interaction forte. Pour rendre compte de la dualité G. Veneziano proposa une formule et ensuite Nambu montra qu'en considérant les hadrons comme des cordes on retrouve la formule de Veneziano; il supposait en outre que les harmoniques de la corde correspondaient aux hadrons observés.

mésion ($q\bar{q}$)baryons ($q q q$)

Fig. 2 : Sac de quarks

Les quarks occupent alors les extrémités de la corde, celle-ci constituant la "glue". Il est important de remarquer que ceci n'est qu'un effet moyenné car les hadrons et les mésons sont composés d'une infinité de constituants (gluons, quarks de la mer, quarks de valence) et qu'en moyenne il émerge trois quarks de valence pour les baryons et deux pour les mésons (fonction de structure).

Si l'on considère un méson ($q\bar{q}$) et qu'on essaye de séparer le quark de l'antiquark, on rallonge la corde et l'on crée un potentiel en kr (potentiel typique de la Q.C.D.). De plus, si l'on considère une corde "rigide" en rotation, on lui confère un moment cinétique orbital et par un calcul simple, on explique la courbe des résonances $\Delta \dots$ (trajectoires de Regge).

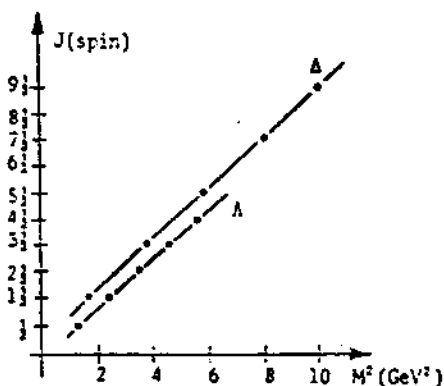


Fig. 3 : Trajectoires de Regge

Comme nous le verrons, certains physiciens ont imaginé une extension du modèle initial, ainsi la corde de Ramond permet une description des fermions (l'état fondamental est une particule de spin $1/2$ et sans masse), tandis que pour Neveu et Schwarz la corde est bosonique (l'état fondamental est une particule de spin 1 non massive). Sherk a montré que dans une certaine limite ($\alpha' \rightarrow 0$) on retrouve la théorie de Yang-Mills, la corde bosonique devient donc importante pour la description des champs de jauge.

De plus si l'on considère les cordes fermées on montre que l'état fondamental est une particule non massive de spin 2 ; ce qui fait que ce type de corde devient un candidat possible

pour décrire la gravitation (le graviton apparaissant naturellement dans la théorie). Sherk a montré que dans la même limite que précédemment ($\alpha' \rightarrow 0$), on retrouve la relativité générale.

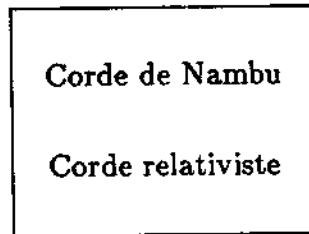
Si l'on applique aux cordes les techniques de la supersymétrie, on débouche sur la notion de supercordes, (du modèle de Ramond - Neveu - Schwarz (R-N-S)). C'est une théorie qui offre la perspective d'incorporer aux forces électromagnétiques, faibles et fortes, la gravitation de manière élégante. Peut-être que nous pourrons enfin quantifier la gravitation et déboucher sur la théorie des forces superunifiées?

La première partie de ce travail est consacrée à l'étude des cordes; dans un premier temps nous étudierons la théorie des cordes relativistes où il n'y a pas de difficulté. Par contre, dès que l'on procède à la quantification des cordes (procédure canonique), il apparaît d'une part des tachyons (particules superlumineuses) et d'autre part des dimensions spatiales supplémentaires. Nous verrons lors de l'étude des cordes en interaction que les tachyons seront absorbés par le propagateur de la corde; l'interaction est alors considérée comme un échange, coupage et épissures de cordes.

Le dernier chapitre de la première partie sera consacré à l'étude des cordes fermioniques et bosoniques (modèle R.N.S.).

Il faut enfin noter que les états de la corde sont une superposition de modes normaux (analogues aux harmoniques des phénomènes ondulatoires); la masse de la corde est alors une fonction du nombre d'harmoniques, ce qui par quantification permet l'introduction d'opérateurs de création et d'annihilation.

Pour conclure, nous pouvons rajouter que dans la théorie des cordes, où l'on considère les particules comme ayant un degré de liberté interne supplémentaire, la mesure d'une observable est moyennée sur la variable interne ce qui fait que de telles particules nous apparaissent comme ponctuelles. En fait, nous observons des effets moyennés sur la "longueur" de la corde car son extension spatiale est inférieure aux dimensions que nous pouvons sonder dans l'état actuel de la technique ($\Delta X, \Delta P \gtrsim \hbar/2$). C'est la raison supposée pour laquelle les particules nous apparaissent comme ponctuelles.



Depuis la relativité restreinte, l'obtention des équations du mouvement a été guidée par le principe de relativité (on parle alors d'équations covariantes).

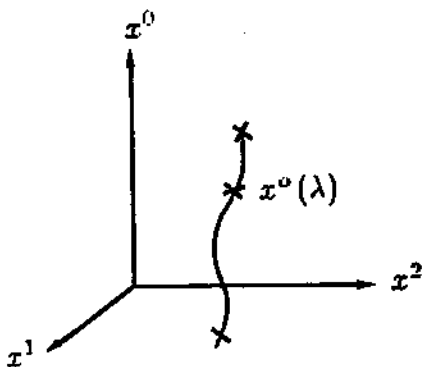
De plus, la mécanique analytique a été généralisée à la théorie des champs et à la relativité; c'est le principe des "moindres actions" qui va engendrer les équations du mouvement. Le problème consiste donc à rechercher un Lagrangien qui nous donne d'une part les bonnes équations du mouvement, d'autre part une densité d'énergie (ou Hamiltonien) définie positive.

Il est généralement admis de considérer les particules élémentaires comme ponctuelles, les équations du mouvement étant obtenues (pour une particule libre) en extrémalisant l'action :

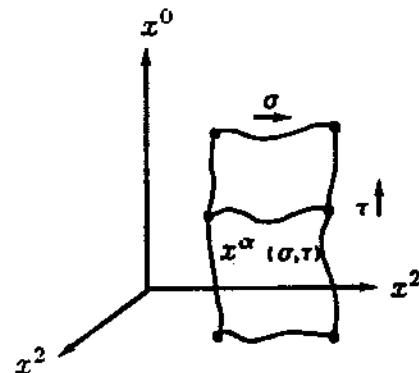
$$S = -m \int_P^Q (\dot{x} \cdot \dot{x})^{1/2} d\lambda ;$$

ce qui revient à prendre le plus court chemin entre les points, P et Q représentant les positions extrêmes de la particule.

Nambu, en 1970, pour rendre compte de certaines propriétés des hadrons (particules subissant l'interaction forte), a été amené à réviser la notion de baryons ou de mésons; il considérait que la particule disposait d'un degré de liberté interne, représentant une corde. Les équations du mouvement sont alors obtenues en extrémalisant la surface comprise entre les deux positions extrêmes de la corde.



trajectoire d'une particule ponctuelle : ligne d'univers. La position sur la ligne d'univers est donnée par un paramètre λ : $x^\alpha(\lambda)$



trajectoire d'une corde : surface d'univers. La position sur la surface d'univers est donnée par deux paramètres σ et τ : $x^\alpha(\sigma, \tau)$.

Fig. 4 : Diagrammes d'espace-temps pour une particule et une corde

1 Action - Lagrangien.

Dans la suite du texte nous prendrons le système d'unité suivant : $\hbar=c=1$.

De plus, dans le cas particulier de la relativité restreinte, la métrique $g_{\mu\nu}$ est notée $\eta_{\alpha\beta}$ et vaut :

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ métrique de Minkowsky}$$

En vue de construire le Lagrangien de la corde, il est nécessaire d'introduire les paramètres décrivant l'évolution de la corde.

Le premier noté τ ou ξ^0 est une variable qui décrit l'évolution de la corde au cours du temps, alors que le second σ ou ξ^1 est la variable interne décrivant l'extension spatiale de la corde. Comme on suppose que la corde est finie, on peut choisir σ telle que $\sigma \in [0, \pi]$, 0 et π représentant ses deux extrémités.



Fig.5 : Extension spatiale de la corde

Dans le cas de la particule ponctuelle, les équations du mouvement sont obtenues en extrémalisant la longueur :

$$S = -m \int_P^Q \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda \quad (1.1)$$

le postulat variationnel conduit à :

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0 \quad (1.2)$$

dans le cas de la relativité générale (annexe 1) et à :

$$\ddot{x}^\alpha = 0 \quad (1.3)$$

dans le cas de la relativité restreinte.

Pour les cordes, le problème consiste donc à exprimer la surface élémentaire balayée au cours du temps. Pour ce faire, introduisons une "métrique" sur la surface d'univers que nous notons : $h_{\xi\xi}$.

$$h_{\sigma\sigma} = \eta_{\alpha\beta} \partial_\sigma x^\alpha \partial_\sigma x^\beta = \partial_\sigma x^\alpha \partial_\sigma x_\alpha$$

$$h_{\sigma\tau} = h_{\tau\sigma} = \eta_{\alpha\beta} \partial_\sigma x^\alpha \partial_\tau x^\beta = \partial_\sigma x^\alpha \partial_\tau x_\alpha.$$

$$h_{\tau\tau} = \eta_{\alpha\beta} \partial_\tau x^\alpha \partial_\tau x^\beta = \partial_\tau x^\alpha \partial_\tau x_\alpha.$$

que l'on peut exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} h_{\xi\zeta} &= \eta_{\alpha\beta} \partial_{\xi} x^{\alpha} \partial_{\zeta} x^{\beta} \\ &= \partial_{\xi} x^{\alpha} \partial_{\zeta} x_{\alpha}. \end{aligned}$$

l'élément de surface est alors donné par :

$$\frac{d^2 S}{d\xi^2} = \sqrt{-\det(h_{\xi\zeta})} = \sqrt{-h}$$

un calcul simple conduit à :

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{-h} \\ L &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \left((\dot{x}x')^2 - (\dot{x})^2 (x')^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (I.4)$$

ce qui permet d'introduire l'action :

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{\pi} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\sigma d\tau \left((\dot{x}x')^2 - (\dot{x})^2 (x')^2 \right)^{1/2} \quad (I.5)$$

Nous avons introduit les notations suivantes :

$$\dot{x}^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \quad ; \quad x'^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{d\sigma}$$

Nambu est le premier (1970) à avoir postulé un tel Lagrangien.⁽¹⁾

La constante α' est fournie par l'expérience, c'est la constante de Regge⁽²⁾, c'est la pente des courbes universelles représentant le carré de la masse en fonction du spin; nous en reparlerons ultérieurement.

Il est important de noter que l'action est invariante lors d'une transformation de Lorentz (principe de relativité) et lors d'une reparamétrisation de la surface d'univers.

2 Equations du mouvement.

Ayant défini le Lagrangien (I.4) de la corde nous sommes en mesure de déterminer les équations du mouvement. Nous allons faire explicitement les calculs en utilisant le postulat variationnel. Considérons une trajectoire voisine de x^{α} définie par $x^{\alpha} + \varepsilon y^{\alpha}$, ε étant un paramètre arbitraire infinitésimal. Nous imposons que pour chaque surface d'univers associée à ε , on ait :

$$y^{\alpha}(\tau = \tau_1, \sigma) = y^{\alpha}(\tau = \tau_2, \sigma) = 0, \quad (I.6)$$

ce qui revient à dire que chaque trajectoire passe par les positions extrêmes de la corde.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta S}{\delta \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{S(\varepsilon) - S(\varepsilon = 0)}{\varepsilon} \right) \\
&= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int d\sigma d\tau L(\dot{x}^\alpha + \varepsilon \dot{y}^\alpha, x'^\alpha + \varepsilon y'^\alpha) - L(\dot{x}^\alpha, x'^\alpha) \right] \\
&= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \dot{y}^\alpha + \frac{\partial L}{\partial x'^\alpha} y'^\alpha \right) \\
&= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \left[- \int d\sigma d\tau \left(\partial_\sigma \frac{\partial L}{\partial x'^\alpha} + \partial_\tau \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) y^\alpha \right. \\
&\quad \left. + \int d\sigma d\tau \partial_\sigma \left[y^\alpha \frac{\partial L}{\partial x'^\alpha} \right] + \int d\sigma d\tau \partial_\tau \left[y^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right] \right]
\end{aligned}$$

En utilisant les conditions aux limites (I.6), on obtient les équations du mouvement :

$$\partial_\sigma \frac{\partial L}{\partial x'^\alpha} + \partial_\tau \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = 0 \quad (I.7)$$

les conditions de bord :

$$\frac{\partial L}{\partial x'^\alpha} = 0 \quad \text{pour } \sigma = 0, \pi \quad (I.8)$$

On ne peut pas résoudre telles quelles les équations du mouvement car on ne peut pas exprimer de solutions analytiques. Avant de rechercher des solutions, revenons aux problèmes des symétries.

La covariance de la théorie, ou le principe de la relativité conduit à l'invariance de l'action (donc des équations du mouvement), pour les transformations de Poincaré. Celles-ci sont de deux types, les translations d'espace-temps (autrement dit les lois physiques ne dépendent pas de l'instant et du lieu de l'observation) et les rotations généralisées de l'espace de Minkowski (rotation spatiale et translation à vitesse constante selon les trois axes). D'après le théorème de Noether⁽³⁾, ces invariances conduisent à des quantités (ou charges) conservées.

Le même phénomène existe pour des particules ponctuelles et conduit alors à la conservation de l'énergie ou de l'impulsion (translation d'espace-temps) et à la conservation du moment cinétique (rotation).

Impulsion de la corde. Invariance par translation.

L'impulsion de la corde est donnée par le Lagrangien (moments conjugués) :

$$\begin{aligned} p^{\alpha,\tau} &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{x'^\alpha(x'\dot{x}) - \dot{x}^\alpha(x')^2}{\sqrt{(x'\dot{x})^2 - (x')^2(\dot{x})^2}} \\ p^{\alpha,\sigma} &= -\frac{\partial L}{\partial x'_\alpha} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\dot{x}^\alpha(x'\dot{x}) - x'^\alpha(\dot{x})^2}{\sqrt{(x'\dot{x})^2 - (x')^2(\dot{x})^2}} \end{aligned} \quad (I.9)$$

Les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme :

$$\partial_\sigma p^{\alpha,\sigma} + \partial_\tau p^{\alpha,\tau} = 0$$

ou bien :

$$\partial_\xi p^{\alpha,\xi} = 0. \quad (I.10)$$

Ce qui nous donne le quadrimoment total de la corde :

$$p^\alpha = - \int_0^\pi p^{\alpha,\tau} d\sigma \quad (I.11)$$

qui est conservé (théorème de Noether) :

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = 0 \quad (I.12)$$

On peut comprendre p^α en s'imaginant que chaque "point" de la corde se comporte comme une particule ponctuelle, ce qui conduit alors aux équations (I.11 et I.12).

Moment angulaire - Invariance par rotation.

L'invariance par translation a conduit à la notion d'impulsion, on définit de même le tenseur orbital de la corde :

$$\begin{aligned} M^{\alpha\beta,\tau} &= p^{\alpha,\tau} x^\beta - p^{\beta,\tau} x^\alpha \\ M^{\alpha\beta,\sigma} &= p^{\alpha,\sigma} x^\beta - p^{\beta,\sigma} x^\alpha \end{aligned} \quad (I.13)$$

et l'invariant pour les transformations de Lorentz conduit à :

$$\partial_\sigma M^{\alpha\beta,\sigma} + \partial_\tau M^{\alpha\beta,\tau} = 0$$

soit :

$$\partial_\xi M^{\alpha\beta,\xi} = 0 \quad (I.14)$$

résultat équivalent aux équations du mouvement (I.7). Enfin, on obtient le moment orbital conservé :

$$M^{\alpha\beta} = \int_0^\pi M^{\alpha\beta,\tau} d\sigma \quad (I.15)$$

$$\frac{dM^{\alpha\beta}}{d\tau} = 0 \quad (I.16)$$

Il est primordial de relever les identités suivantes :

$$\left. \begin{aligned} P^{\alpha,\tau} x'_\alpha &= 0 & (P^\tau)^2 + \frac{(x')^2}{4\pi\alpha'} &= 0 \\ P^{\alpha,\sigma} \dot{x}_\alpha &= 0 & (P^\sigma)^2 + \frac{(\dot{x})^2}{4\pi\alpha'} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (I.17)$$

Les relations (I.17) s'établissent sans difficultés, elles ont en outre une conséquence très importante : (I.17 b) et la relation de bord (I.8) imposent :

$$\dot{x}^2 = 0 \text{ pour } \sigma = 0, \pi$$

autrement dit les bouts de la corde se déplacent à la vitesse de la lumière.

3 Solutions covariantes des équations du mouvement.

Comme nous l'avons dit, les solutions de l'équation (I.7) ne s'expriment pas analytiquement. Or, depuis le début, nous avons gardé l'arbitraire du choix de σ et τ i.e. nous n'avons pas fixé de jauge particulière. Nous imposons donc au système de coordonnées σ, τ d'être diagonal pour pouvoir linéariser le Lagrangien. Pour ce faire nous fixons $h_{\xi\xi}$:

$$h_{\xi\xi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\dot{x}^2 = 1 : \text{vecteur genre temps}$$

$$x'^2 = -1 : \text{vecteur genre espace.}$$

Ce qui nous donne les équations de contraintes fixant la jauge du cône de lumière :

$$\begin{cases} \dot{x}^2 + x'^2 = 0 \\ \dot{x}x' = 0 \end{cases} \quad (I.18)$$

Munies des conditions de jauge (I.18), les quantités calculées précédemment s'expriment sans problème :

$$\begin{cases} L = \frac{1}{2\pi\alpha'} (\dot{x}^2 - x'^2) \\ P^{\alpha,\tau} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{x}^\alpha & M^{\alpha\beta,\tau} = \frac{1}{2\pi\alpha'} (\dot{x}^\alpha x'^\beta - \dot{x}^\beta x'^\alpha) \\ P^{\alpha,\sigma} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} x'^\alpha & M^{\alpha\beta,\sigma} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} (x'^\alpha x'^\beta - x'^\beta x'^\alpha) \end{cases} \quad (I.19)$$

et les équations du mouvement deviennent :

$$\begin{cases} \ddot{x}^\alpha - x''^\alpha = 0 \\ \partial_\xi \partial^\xi x^\alpha = 0 \\ \square x^\alpha = 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

On reconnaît alors l'équation des ondes, la solution va s'exprimer comme la superposition d'une onde régressive et d'une onde progressive :

$$x^\alpha(\sigma, \tau) = x^\alpha(\sigma - \tau) + x^\alpha(\sigma + \tau).$$

On va donc pouvoir exprimer $x^\alpha(\sigma, \tau)$ en onde normales. Après un calcul simple⁽⁴⁾ on obtient :

$$x^\alpha(\sigma, \tau) = q_0^\alpha + P^\alpha \cdot \tau + i \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n^\alpha e^{-in\tau} \frac{\cos n\sigma}{n}. \quad (1.21)$$

Les paramètres α_n^α s'interpréteront ultérieurement lorsque nous étudierons la quantification de la corde. On remarque une similitude de la solution (1.21) et du problème des harmoniques pour les cordes vibrantes. L'état de la corde $x^\alpha = q_0^\alpha + \alpha_0^\alpha \cdot \tau$ s'interprétera comme l'état fondamental, alors que chaque fois que nous rajoutons "une harmonique" nous créons un nouvel état excité de la corde. Lors du calcul en modes normaux, nous n'avons pas tenu compte des contraintes imposées par le choix de la jauge (1.18). On peut montrer que ces contraintes peuvent s'exprimer comme une infinité de conditions initiales⁽⁴⁾ :

$$L_n = \frac{1}{4\alpha'^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-m} \cdot \alpha_m = 0 \quad (1.22)$$

Equations qui auront leur importance par la suite; notamment lors de la quantification de la corde.

4 Variables indépendantes.

Nous sommes en présence d'un système muni de contraintes (1.22), le but de ce paragraphe est de rechercher les variables indépendantes. Pour ce faire, nous nous plaçons dans un système de coordonnées transverses (le formalisme perd alors sa covariance).

Cela revient à se donner une direction de propagation n telle que $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Il apparaît alors 3 types de coordonnées : les coordonnées transverses (perpendiculaires à n), les coordonnées longitudinales (suivant n^3) et les coordonnées temporelles (suivant n^0). Notons alors :

$$u^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (u^0 \pm u^3) \text{ coordonnées du cône de lumière}$$

$u^{\mu} = u^1, u^2$ coordonnées transverses.

Ce qui nous permet de déduire les variables indépendantes :

$$\begin{cases} x^{\mu} & \text{décrit le mouvement} \\ P^+ & \text{définit le système de coordonnées} \\ q^- & \text{constante d'intégration} \end{cases} \quad (I.23)$$

Muni de ce système de coordonnées, on peut alors montrer que dans un système de coordonnées quelconque, on avait :

$$M^2 = -\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n^{\alpha} \alpha_{-n, \alpha} \quad (I.24a)$$

relation qui ne nous montre pas que le carré de la masse est positive; dans le système de coordonnées transverses (I. 24 a) devient :

$$M^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n^{\mu} \alpha_{n, \mu} \quad (I.24b)$$

qui est bien positif.

De plus nous avons une relation fondamentale, si l'on note J le spin de la corde (partie orbitale + partie intrinsèque); on aboutit à l'inégalité :

$$J \leq \alpha' M^2 \quad (I.25)$$

L'égalité est obtenue pour une corde "rigide" en rotation et permet donc de rendre compte des trajectoires de Regge et d'expliquer les diverses résonances hadroniques (Δ, Λ, \dots).

On peut, pour conclure, faire une comparaison avec la Q.E.D.; on montre, en utilisant une transformation de jauge astucieuse, que le photon ne peut avoir qu'une polarisation transverse, résultat dû au fait que la masse du photon est nulle. De la même façon, pour une corde, seuls les états vibratoires perpendiculaires à la direction de propagation ont un sens physique et contribuent directement aux observables.

Déjà de façon non quantique (I.24) nous montre que lorsque l'on excite la corde on lui confère de la masse. Le résultat apparaîtra de façon flagrante lors de la quantification (les opérateurs α_{-n}, α_n s'interpréteront comme des opérateurs "d'annihilation" et de "création" d'états excités).

5 Corde fermée.

Nous pouvons généraliser l'idée de Nambu en considérant un anneau ou une corde fermée. La condition de bord (I.8) est alors remplacée par la condition de périodicité :

$$x^{\alpha}(\tau, \sigma) = x^{\alpha}(\tau, \sigma + \pi) \quad (I.26)$$

tous les résultats précédents sont transposables et l'on obtient la solution :

$$x^\alpha(\sigma, \tau) = q_0^\alpha + p^\alpha \cdot \tau + i \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{-2in\tau}}{n} (\alpha_n^\alpha \cos 2n\sigma + \tilde{\alpha}_n^\alpha \sin 2n\sigma)$$

que nous préférons mettre sous la forme :

$$x^\alpha(\sigma, \tau) = q_0^\alpha + p^\alpha \cdot \tau + \frac{i}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\alpha_n^\alpha e^{-2in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^\alpha e^{-2in(\tau+\sigma)}}{n} \quad (I.27)$$

Dans ce cas, nous obtenons deux séries de variables indépendantes, α_n et $\tilde{\alpha}_n$, où les états excités seront obtenus sous l'action de α_n et $\tilde{\alpha}_n$ (double espace de Fock). Nous rajouterons que pour la théorie des cordes le formalisme est rigoureusement le même (qu'elle soit ouverte ou fermée), seules les conditions aux limites changent (I.8 ou I.26); le traitement restant le même.

Formalisme hamiltonien

Quantification canonique de la corde

Nous allons appliquer à la corde libre la procédure de la quantification canonique; pour ce faire, nous devons introduire l'Hamiltonien à partir du Lagrangien. Ce formalisme a déjà été employé avec succès :

- lors de la première quantification qui consiste à considérer les variables de position, d'impulsion... en tant qu'opérateurs; on aboutit alors à l'équation de Schrödinger (équation non relativiste) ou à celle de Klein-Gordon, Dirac... (équations relativistes).
- lors de la seconde quantification (théorie quantique des champs), les variables de champ qui étaient perçues comme des densités de probabilité, sont à leur tour perçues comme des opérateurs; elles deviennent alors des opérateurs d'annihilation et de création de particules. Cette étape nécessaire découle de l'introduction d'une vitesse limite c dans les inégalités de Heisenberg; introduction qui nous fait perdre la notion de fonction d'onde aussi bien dans l'espace des impulsions que dans l'espace de configuration.

Le principe directeur qui a conduit les physiciens à l'obtention d'équations quantiques est le principe de correspondance :

- (i) variable \rightarrow opérateur
- (ii) { crochet de Poisson } $\rightarrow \frac{1}{i\hbar}$ [commutateur].

Les opérateurs agissent alors sur l'espace des états ou espace de Hilbert; les fonctions d'état (vecteurs de Hilbert) caractérisant l'état du système.

Dans le cas des cordes, le problème est plus ardu car nous sommes en présence de contraintes (I.22); le problème a déjà été résolu par Dirac (1950-1958). En effet, si l'on tente d'explicitier l'Hamiltonien :

$$H = P_\alpha^{\prime\tau} \partial_\tau x^\alpha - L$$

il est nécessaire d'exprimer L en fonction de x^α , et $x^{\prime\alpha}$, $P^{\alpha,\tau}$ ce qui est impossible à cause des relations (I.17 b).

1 Procédure de Dirac.

Dirac a montré que pour un système de contraintes,

$$\phi_i(q^\alpha, P_\alpha) = 0 \quad (\text{II.1})$$

l'Hamiltonien du système :

$$H_0 = P_\alpha q^\alpha - L$$

peut-être remplacé par :

$$H = H_0 + v^i \phi_i \quad (\text{II.2})$$

où l'on conserve l'arbitraire du choix des v^i , ce qui est équivalent à l'arbitraire de la jauge.

On remarquera la similitude d'un tel traitement avec la méthode des "multiplicateurs" de Lagrange.

Les équations du mouvement sont alors données par :

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (\text{II.3})$$

Ensuite, nous quantifions le système et appliquons les contraintes (II.1) sur les états physiques.

2 Exemple de la particule ponctuelle.

Avant de quantifier les cordes, nous allons montrer que l'application de la procédure de Dirac, dans le cas d'une particule ponctuelle, conduit à l'équation de Klein-Gordon.

Le Lagrangien d'une particule ponctuelle est donné par :

$$L = -m(\dot{x}^2)^{1/2} \quad (\text{II.4})$$

ce qui conduit à l'impulsion :

$$P_\alpha = -\frac{m\dot{x}^\alpha}{(\dot{x}^2)} \quad (\text{II.5})$$

et à l'équation du mouvement :

$$\dot{P}_\alpha = 0$$

Si nous nous proposons de calculer l'Hamiltonien, la contrainte :

$$\begin{cases} P_\alpha P^\alpha = +m^2 \\ \phi = P^2 - m^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

rend l'Hamiltonien nul.

Nous considérons alors l'Hamiltonien :

$$H = v(P^2 - m^2) \quad (\text{II.7})$$

et par quantification, on obtient :

$$(\square + m^2)|\Psi\rangle = 0 \quad (\text{II.8})$$

qui est l'équation de Klein-Gordon.

3 Quantification de la corde.

Avant de procéder à la quantification de la corde proprement dite, il est nécessaire de réexprimer les contraintes (I.17 a) sous une autre forme. Si l'on prolonge la définition de $\sigma \in [0, \pi]$ sur $[-\pi, \pi]$ par :

$$\begin{aligned} P^{\alpha, \tau}(-\sigma) &= P^{\alpha, \tau}(\sigma) \\ x'^{\alpha}(-\sigma) &= -x'^{\alpha}(\sigma) \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

les contraintes (I.17 a) deviennent alors^(4,5) :

$$L_n = \frac{\pi \alpha'}{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma (P^{\alpha} - \frac{1}{2\pi \alpha'} x'^{\alpha})^2 e^{-in(\sigma+\tau)} = 0 \quad (\text{II.10})$$

Ce qui permet donc de construire l'Hamiltonien :

$$H = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v^n L_n \quad (\text{II.11})$$

$H = L_0$ redonne les équations⁽⁴⁾ ($H = L_0$ correspond à la jauge orthogonale) :

$$\begin{cases} \ddot{x}^{\alpha} - x''^{\alpha} = 0 \\ \dot{x}x' = 0 & \dot{x}^2 + x'^2 = 0 \end{cases}$$

En appliquant le principe de correspondance, les crochets de Poisson⁽⁴⁾ nous amènent à postuler :

$$[\alpha_n^{\alpha}, \alpha_m^{\beta}] = 2in\alpha' \eta^{\alpha\beta} \delta_{n,-m}$$

$$[x^{\alpha}(\tau, \sigma), P^{\beta, \tau}(\tau, \sigma')] = -\eta^{\alpha\beta} \delta(\sigma - \sigma')$$

Les états physiques de la corde sont construits et détruits à l'aide de α_{-n} et α_n (formalisme de l'oscillateur). On voit apparaître un concept nouveau : la particule ponctuelle est considérée comme un quantum d'excitation de la corde, au même titre qu'une note de musique correspond à une vibration de la corde de guitare par exemple.

Un état quelconque de la corde est donc donné par :

$$\prod_{\alpha=0}^{D-1} \prod_n (\alpha_{-n}^\alpha)^{\lambda_{n,\alpha}} |0\rangle \quad (\text{II.12})$$

Au même titre, α_n^α désexcite la corde ($|0\rangle =$ vide). Il est nécessaire, pour éliminer certaines divergences (énergie du vide infinie), de réécrire les opérateurs en produit normal ($: \cdot :$) qui consiste à écrire les opérateurs d'absorption à droite des opérateurs d'annihilation :

$$: a_n^\dagger a_n : := a_n a_n^\dagger := a_n^\dagger a_n$$

La contrainte (II-10) devient alors l'opérateur :

$$L_n = \frac{\pi\alpha'}{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma : (P^\alpha - \frac{1}{2\pi\alpha'} x'^\alpha)^2 : e^{-in\sigma} \quad (\text{II.13})$$

ce qui nous permet de considérer comme état physique les états satisfaisants :

$$(L_n - \alpha(0)\delta_{n0})|\Psi\rangle = 0 \quad (\text{II.14})$$

(Formalisme de Gupta et Bleuler⁽⁶⁾).

Il faut noter que l'on peut obtenir une autre expression de $L_n^{(4)}$:

$$L_n = -\frac{1}{4\alpha'} \sum_{m \in \mathbb{Z}} : \alpha_{n-m}^\alpha \alpha_{m,\alpha} : \quad (\text{II.15a})$$

qui se réduit à (dans la jauge transverse) :

$$L_n = \frac{1}{2\alpha'} \sum_{m \in \mathbb{Z}} : \alpha_{n-m}^{\prime\prime} \alpha_{m,\prime\prime} : \quad (\text{II.15b})$$

Le formalisme de Gupta et Bleuler a été employé la première fois en Q.E.D. Il consiste à exprimer une contrainte $F = 0$ (F étant un opérateur) sous une forme plus faible $\langle \Psi_1 | F | \Psi_2 \rangle = 0$ (élément de matrice de $F = 0$). On peut se demander d'où vient la constante $\alpha(0)$; elle provient du fait que L_0 n'est pas défini de manière unique en théorie classique (elle apparaît à cause du produit normal).

L'algèbre des opérateurs L_n est différente de celle des crochets de Poisson $\{L_n, L_m\} = i(m-n)L_{n+m}$, à cause du produit normal :

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{D}{12}n(n^2-1)\delta_{m,-n} \quad (\text{II.16})$$

La constante D est la dimension de l'espace-temps; nous verrons en effet que $D \neq 4$, tout ceci pour préserver un des principes directeurs de la formulation d'une théorie : l'obtention d'équations covariantes.

4 Covariance de la théorie - Absence de fantômes.

Maintenant que nous avons quantifié les cordes, il est nécessaire de s'assurer de la cohérence de la théorie. Le premier problème provient du fait que la métrique $\eta_{\alpha\beta}$ n'est pas définie-positive. Il est donc important de s'assurer que la théorie ne contient pas de fantômes (états de norme négative $\langle F|F \rangle < 0$), ce qui serait en contradiction avec le sens physique des états accessibles. Dans une démonstration longue et difficile ⁽⁴⁾, Scherk montre que la théorie est libre de fantômes dans un espace de dimension $D = 26$. Le second problème est de s'assurer de la covariance de la quantification dans une jauge transverse *; le point de départ sont les relations de commutation canoniques des générateurs du groupe de Poincaré (P^α translations et $M^{\alpha\beta}$ rotations) :

$$\left\{ \begin{array}{l} [P^\alpha, P^\beta] = 0 \\ [P^\alpha, M^{\beta\gamma}] = i(\eta^{\alpha\beta} P^\gamma - \eta^{\alpha\gamma} P^\beta) \\ [M^{\alpha\beta}, M^{\gamma\delta}] = i(\eta^{\beta\gamma} M^{\alpha\delta} - \eta^{\alpha\gamma} M^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\delta} M^{\beta\gamma} - \eta^{\beta\delta} M^{\alpha\gamma}) \end{array} \right. \quad (\text{II.17})$$

Dans le cas de la jauge transverse en remarquant que :

$$\eta_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} + \\ 2 \\ 3 \\ - \end{array} \right\} ; \text{transverse}$$

on montre que $[M^{\tilde{m}}, M^{\tilde{m}}] = 0$. Après un calcul long et fastidieux⁽⁴⁾, on obtient :

$$\begin{aligned} [M^{\tilde{m}}, M^{\tilde{m}}] &= \frac{1}{2P^+} \sum_{m=1} m \left(1 - \frac{1}{24}(D-2) + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{24}(D-2) - \alpha(0) \right) \right) \\ &\quad \times (\alpha_{-m}^{\tilde{m}} \alpha_m^{\tilde{m}} - \alpha_{-m}^{\tilde{m}} \alpha_m^{\tilde{m}}). \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

La théorie est donc non covariante, sauf si l'on prend $D = 26$ et $\alpha(0) = 1$.

La condition $\alpha(0) = 1$ se comprend aisément, car on sait que pour un méson non massif, seuls les états transverse sont permis (cf. le cas du photon). Par contre le résultat $D = 26$ ne semble pas avoir de signification physique. On verra tout de même une interprétation dans la troisième partie consacrée aux supercordes.

Par contre, la contrainte $\alpha(0) = +1$ impose l'existence de tachyons :

$$(L_0 - 1)|\Psi\rangle = 0$$

* La jauge transverse joue un rôle important car elle contient les variables indépendantes.

de plus la condition de masse nous donne (chap.I) :

$$L_0|\Psi\rangle = -\alpha' M^2|\Psi\rangle$$

Donc l'état fondamental est tel que :

$$\alpha' M^2 = -1$$

$M^2 < 0$: nous sommes en présence de tachyons! Pour plus de renseignements sur la conséquence physique (causalité) de l'existence des tachyons, on peut consulter⁽⁷⁾, où il est dit "... aucun raisonnement n'a pu conclure de manière définitive que l'existence des tachyons contredit le principe de causalité".

Deux possibilités sont ouvertes si l'on désire éliminer le tachyon de la théorie :

- refaire une théorie sans tachyon
- espérer que l'interaction entre cordes élimine les tachyons.

En fait nous montrerons que le propagateur de la corde absorbe le tachyon.

Il faut enfin noter que la relation :

$$J = \alpha(0) + \alpha' M^2 \quad (\text{II.19})$$

rend compte de l'existence de particules non massives de spin 1, résultat que nous interpréterons ultérieurement.

5 Cordes fermées.

Si l'on applique le procédé développé dans le cas de la corde fermée, il apparaît alors par quantification deux séries d'opérateurs : α_n et $\tilde{\alpha}_n$.

Nous avons alors d'une part les conditions de jauge :

$$L_n|\Psi\rangle = \tilde{L}_n|\Psi\rangle = 0 \quad n \geq 1$$

$$(L_0 - \tilde{L}_0)|\Psi\rangle = 0 \quad (\text{II.20})$$

et la condition de masse :

$$(L_0 - \tilde{L}_0 - \alpha(0))|\Psi\rangle = 0$$

les états physiques sont construits en appliquant simultanément α_n et $\tilde{\alpha}_n$ (double espace de Fock) :

$$\prod_{\alpha=1}^{D-1} \prod_n^{\infty} (\alpha_{-n}^{\alpha} \tilde{\alpha}_{-n}^{\alpha})^{\lambda_n, \alpha} |0\rangle$$

La théorie est sans fantôme si $D = 26$ et $\alpha(0) = 2$, elle est en outre sans tachyon. L'état fondamental de la corde fermée est une particule non massive de spin 2; la théorie inclut donc le graviton.

Le graviton apparaît donc naturellement dans la théorie des cordes et nous verrons l'importance que cela peut avoir lors de l'étude des supercordes : peut-être les supercordes nous permettront-elles de déboucher sur la théorie unifiée des interactions fondamentales? Enfin, nous pouvons remarquer que les cordes fermées jouent un rôle essentiel dans la théorie des cordes (lors de l'étude des cordes en interaction); en effet, les cordes interagissent entre elles par échange, collage et coupage de morceaux de corde. L'importance des cordes fermées provient du fait qu'elles ne possèdent aucun nombre quantique : une corde ouverte peut se fermer et une corde fermée peut s'ouvrir. On peut citer à titre d'exemple la self-interaction d'une corde .

Cordes en interaction

Dans cette partie consacrée aux cordes en interaction, nous ne nous intéresserons qu'à la construction des diagrammes de Feynman. On ne considérera pas le calcul explicite d'amplitudes de diffusion, ni l'étude de boucles, ni les corrections radiatives, ni la renormalisation. Nous reviendrons partiellement sur le sujet lors de l'étude de supercordes en interaction. Pour des calculs plus précis, on pourra, si on le désire, se reporter à la référence (4).

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des cordes libres. En théorie des champs, on choisit la représentation de l'interaction pour étudier leurs interactions; la formule de Dyson permet, en utilisant le théorème de Wick, de développer la matrice S en série perturbative. On débouche alors sur une représentation graphique ou diagramme de Feynman, l'interaction étant alors due à l'échange d'une particule virtuelle décrite par un propagateur. On peut comprendre l'émission d'une telle particule, car au moment de l'interaction, les inégalités de Heisenberg conduisent à une incertitude sur la masse si grande que l'on perd la notion de particules ($\Delta m > m$).

1 La matrice S .

Puisque l'on ne peut rien "dire" au moment de l'interaction, on ne s'intéressera qu'aux états initiaux $|i\rangle$ ($t = -\infty$) et aux états finaux $|f\rangle$ ($t = +\infty$). Les états $|i\rangle$ et $|f\rangle$ sont alors à considérer comme libres et la seule chose observable est la transition entre les états finaux et initiaux; description permise grâce à la matrice S .

Considérons n particules libres : $|P_1 \cdots P_n, in\rangle = |\alpha, in\rangle$; et m particules libres caractérisant l'état final : $|P'_1 \cdots P'_m, out\rangle = |\beta, out\rangle$ la matrice S est alors l'amplitude de probabilité d'obtenir $|\beta, out\rangle$ à partir de $|\alpha, in\rangle$:

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, out | \alpha, in \rangle \quad (\text{III.1})$$

expression que l'on peut réécrire sous la forme :

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, in | S | \alpha, in \rangle \quad (\text{III.2})$$

La matrice S ainsi définie est unitaire ($SS^+ = S^+S = 1$), propriété qui traduit la conservation de la probabilité : partant d'un état initial $|\alpha, in\rangle$, la somme des probabilités correspondant à toutes les voies de sortie $|\beta, out\rangle$ donne 1. On peut montrer que l'on a :

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^m P'_i \right) \prod_{i=1}^m \sqrt{\frac{1}{2V P_i^0}} T_N(P_i \cdots P_m) \quad (\text{III.3})$$

où T_N représente l'amplitude de diffusion. L'amplitude de diffusion T_N contient tous les renseignements concernant l'interaction. On voit donc l'importance de l'étude de la diffusion de particules tant en physique des hautes énergies qu'en physique nucléaire : en

effet, nous avons là un outil permettant de vérifier ou d'infirmer une théorie ou encore un moyen d'obtenir des renseignements sur le potentiel d'interaction.

2 Diagrammes de Feynman.

Pour construire le propagateur de la corde, nous allons partir du propagateur d'une particule scalaire dans l'espace des impulsions :

$$S_F(p^2) = -\frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{m^2 - p^2 - i\epsilon} \quad (\text{III.4})$$

En rappelant la condition de masse d'une corde :

$$L_0 - 1 = \alpha'(M^2 - p^2) \quad (\text{III.5})$$

on déduit le propagateur de la corde :

$$D_F(p^2) = \frac{-i\alpha'}{(2\pi)^D} \frac{1}{L_0 - 1 - i\epsilon} \quad (\text{III.6})$$

où nous avons introduit explicitement D , la dimension de l'espace-temps. Nous obtenons alors deux représentations graphiques pour le propagateur (III.6). La première tient compte des deux extrémités de la corde :



Fig. 6 : Propagateur de la corde

La corde elle-même décrit au cours de son évolution la surface comprise entre les deux trajectoires des bords. On peut de façon plus schématique oublier l'extension spatiale de la corde et représenter le propagateur de la corde par une simple ligne :



Fig. 7 : Propagateur simplifié

Etant donné qu'un mode spécifique de la corde s'apparente à une particule ponctuelle (corde = superposition infinie de modes quantiques), on peut considérer que le diagramme suivant décrit l'émission d'une particule ponctuelle :



Fig. 8 : Emission d'une particule ponctuelle

Il faut donc introduire une constante de couplage g , constante décrivant les interactions entre cordes. De plus, nous devons introduire un opérateur représentant la probabilité d'émission d'un état d'impulsion P_i au vertex :

$$v(P_i) = i \frac{g}{\sqrt{2\alpha'}} (2\pi)^D V(P_i) \quad (\text{III.7})$$

$V(P_i)$ s'exprimant en fonction de l'impulsion et des opérateurs α_n et α_{-n} .

Munis de ces définitions, nous sommes en mesure d'exprimer l'amplitude de probabilité associée au diagramme en arbre (pas de boucle).



Fig. 9 : Interaction entre cordes

$\langle 0, P_1 |$, et $|0, P_N \rangle$ états scalaires fondamentaux entrants (à gauche et à droite).

$$B_N = g^{N-2} \langle 0, P_1 | V(P_2) \frac{1}{L_0 - 1} V(P_3) \frac{1}{L_0 - 1} \dots \frac{1}{L_0 - 1} V(P_{N-1}) |0, P_N \rangle \quad (\text{III.8})$$

Pour $N = 4$, on retrouve⁽⁴⁾ la formule de Veneziano proposée indépendamment de la Q.C.D. pour rendre compte de la dualité.

Enfin, il est important de noter que nous ne pouvons pas émettre de fantômes⁽⁴⁾ (états de norme négative), résultats que nous pouvons établir en utilisant les identités de Ward ($L_n |\Psi \rangle = (L_0 + n - 1) |\Psi \rangle = 0$). Si de plus l'on introduit l'opérateur :

$$W_n = L_0 - L_n + n - 1 \quad (\text{III.9})$$

on peut montrer que les tachyons sont absorbés par le propagateur de la corde.

Revenons à l'émission d'un mode spécifique, que l'on assimile à une particule ponctuelle : celle-ci est due au coupage d'une corde en deux. On voit que l'interaction consiste donc en un échange, un coupage ou un collage de bouts de corde; ceci peut se comprendre si on garde en mémoire le fait que l'interaction entre cordes est locale. On peut enfin remarquer qu'en théorie des champs, on doit rajouter au Lagrangien un terme supplémentaire pour étudier les interactions (champ de jauge). Avec la notion de corde on n'a plus besoin de procéder de la sorte, du fait de la nature même des équations (non linéarité des équations au niveau des conditions de jauge).

Cordes munies d'un spin

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que la corde de Nambu dont l'état fondamental est un scalaire. Une telle description des particules a été introduite pour rendre compte de la dualité. Ramond d'une part⁽⁸⁾, Neveu et Schwarz d'autre part⁽⁹⁾ ont été amenés à rajouter un degré de liberté supplémentaire au modèle initial pour rendre compte des mésons (ou plus généralement des bosons de jauge comme nous le verrons dans la 3^{ème} partie) et des fermions. L'idée consiste donc à adjoindre un champ de spineur et, suivant les conditions de périodicité, on se trouve dans le secteur de Ramond ou dans celui de Neveu-Schwarz.

1 Formulation du modèle.

La corde de Nambu a été définie par X^α , vecteur de Lorentz dans l'espace-temps et scalaire de Lorentz sur la surface d'univers (X^α indépendant de la paramétrisation ξ^0 et ξ^1). Pour obtenir une corde munie d'un spin, on désirerait définir une grandeur Ψ^α , vecteur d'espace-temps et spineur sur la surface d'univers. Or on sait que la définition d'un spineur en relativité générale est délicate^(3,10) : on est obligé de définir un champ de "Vierbein" (voir Annexe 1).

De façon analogue, en définissant un champ de "Zweibein", nous pouvons définir Ψ . Le problème est dû au fait que nous allons définir le Lagrangien relatif à un système (ξ^0, ξ^1) quelconque en vue d'obtenir un formalisme covariant.

2 Formalisme Lagrangien covariant.⁽¹¹⁾

Introduisons les grandeurs fondamentales de la théorie :

- X^α : champ de vecteur définissant la position de la corde dans l'espace-temps.
- $\Psi^{\alpha a'} = \begin{pmatrix} \Psi_1^{\alpha a'} \\ \Psi_2^{\alpha a'} \end{pmatrix}$ champ de spineur ; tel que $[\Psi(\xi), \Psi(\xi')]_+ = 0$.
- $e_{\underline{\xi}}^{\xi}$: champ de Zweibein.

Le Lagrangien est alors donné par :

$$L = -\frac{1}{2\alpha'} \sqrt{-g} \quad (\text{IV.1})$$

et les équations du mouvement sont obtenues en faisant varier X^α et $\Psi^{\alpha a'}$:

$$\begin{aligned} \partial_\xi \left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \left(2g_{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial(\partial_\xi \Psi)} - g_{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial(\partial_\xi \Psi)} - g_{22} \frac{\partial g_{11}}{\partial(\partial_\xi \Psi)} \right) \right] \\ - \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(2g_{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial \Psi} - g_{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial \Psi} - g_{22} \frac{\partial g_{11}}{\partial \Psi} \right) = 0. \\ \partial_\xi \left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \left(2g_{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial(\partial_\xi X)} - g_{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial(\partial_\xi X)} - g_{22} \frac{\partial g_{11}}{\partial(\partial_\xi X)} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

La paramétrisation, nous est donnée par le tenseur métrique :

$$g_{\xi\xi} = \frac{i}{4} \left[\bar{\Psi} e_{\xi}^{\xi} \rho_{\xi} \overrightarrow{\partial}_{\xi} \Psi + \bar{\Psi} e_{\xi}^{\xi} \rho_{\xi} \overleftarrow{\partial}_{\xi} \Psi \right] + \frac{1}{2} \partial_{\xi} X \cdot \partial_{\xi} X \quad (\text{IV.3})$$

Enfin, pour fixer de manière unique le modèle, on introduit deux conditions supplémentaires :

$$g_{\xi\xi} = \lambda(\xi) e_{\xi}^{\xi} e_{\xi}^{\xi} \eta_{\xi\xi} \quad (\text{IV.4})$$

$$\partial_{\xi} e_{\xi}^{\xi} \rho^{\xi} \Psi = 0 \quad (\text{IV.5})$$

La première (IV.4) résulte de la définition du champ de Zweibein et (IV.5) est la condition dite de superjauge.

Explicitons nos notations :

pour les indices se reporter à l'annexe II; ρ sont les matrices de Dirac sur la surface d'univers :

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pour leur construction voir l'annexe I.

$$\bar{\Psi} = {}^t \Psi \rho^1$$

Enfin $a \overrightarrow{\partial} b = a \partial b - (\partial a) b$.

3 Formulation dans un système Minkowskien.

Dans le système de coordonnées (ξ^0, ξ^1) qui linéarise les équations, nous rappelons :

- les équations du mouvement :

$$\bar{X}^{\alpha} - X''^{\alpha} = 0 \quad (\text{IV.6})$$

- les équations fixant la jauge :

$$\dot{X}^2 + X'^2 = 0$$

$$\dot{X} X' = 0$$

que l'on peut récrire :

$$\partial_{\xi} X \cdot \partial_{\xi} X + \frac{i}{4} \bar{\Psi} (\rho_{\xi} \partial_{\xi} + \rho_{\xi} \partial_{\xi}) \Psi = \lambda(\xi) \eta_{\xi\xi} \quad (\text{IV.7})$$

Ces équations redonnent quand $\Psi = 0$ les équations de jauge de la corde de Nambu. On peut ensuite remarquer la similitude de (IV.7) et (IV.4) en utilisant l'expression de $g_{\xi\xi}$ donnée par (IV.3).

- les équations de bord :

$$\partial_1 X^\alpha = 0 \quad \xi^1 = 0, \pi \quad (\text{IV.8})$$

Nous devons en outre donner les équations relatives à Ψ .

- nous postulons l'équation de Dirac pour le spineur :

$$\rho^\xi \partial_\xi \Psi = 0 \quad (\text{IV.9})$$

- les conditions de bord pour le champ Ψ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Psi_1(\xi^0, 0) &= \Psi_2(\xi^0, 0) \\ \Psi_1(\xi^0, \pi) &= \varepsilon \Psi_2(\xi^0, \pi) \quad \varepsilon = \pm 1 \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

$\varepsilon = 1$ modèle de Ramond, conditions de périodicité (fermions)

$\varepsilon = -1$ modèle de Neveu-Schwarz, conditions d'antipériodicité (bosons)

- conditions de superjauge :

$$\rho^\xi \rho^\zeta \partial_\xi X \cdot \Psi = 0 \quad (\text{IV.11})$$

équation à rapprocher de (IV.5).

Le Lagrangien donnant les équations du mouvement (IV.6) et (IV.9) s'écrit de façon simple sous la forme :

$$L = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\xi (\partial_\xi X^\alpha \partial^\xi X_\alpha - i\Psi \rho^\xi \partial_\xi \Psi) \quad (\text{IV.12})$$

4 Invariance.

Transformation conforme.

Nous nous sommes placés dans la jauge du cône de lumière; on sait que les transformations qui conservent le cône de lumière sont les transformations conformes⁽²⁾ (ainsi par exemple dans l'espace de Minkowski le groupe des transformations conformes, comprend celui des transformations de Lorentz). On peut montrer que pour une transformation conforme infinitésimale, $\delta\xi^i = u^i$, on a la relation :

$$\partial_\xi u_\zeta + \partial_\zeta u_\xi - \eta_{\xi\zeta} \partial^\kappa u_\kappa = 0 \quad (\text{IV.13})$$

Il est possible d'exprimer la transformation conforme en utilisant l'identité :

$$\Lambda_\xi^\zeta \eta_{\zeta\kappa} \Lambda_\eta^\kappa = \eta_{\xi\eta} \quad (\text{IV.14})$$

On obtient alors :

- transformation sur la surface d'univers :

$$\Lambda(\alpha) = \begin{pmatrix} ch\alpha & sh\alpha \\ sh\alpha & ch\alpha \end{pmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

- transformation dans l'espace des spineurs :

$$D(\Lambda(\alpha)) = \begin{pmatrix} e^{\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha/2} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.16})$$

- identité :

$$\Lambda_{\xi}^{\zeta} \rho^{\xi} = D^{-1}(\Lambda) \rho^{\xi} D(\Lambda) \quad (\text{IV.17})$$

Le Lagrangien (IV.12) et les équations (IV.6) à (IV.11) sont invariantes uniquement pour les transformations (IV.13). Si l'on désire une invariance relativement aux transformations générales, on doit, tout comme en relativité générale, où l'on remplace l'élément de volume d^4x par $\sqrt{-g}d^4x$, remplacer $d^2\xi$ par $\sqrt{-g}d^2\xi$.

Nous allons montrer explicitement qu'une telle prescription permet de retrouver le Lagrangien de Nambu. L'action :

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \eta_{\alpha\beta} g^{\xi\zeta} \partial_{\xi} X^{\alpha} \partial_{\zeta} X^{\beta} \sqrt{-g}$$

est invariante pour les transformations générales :

$$g_{\xi\zeta} \rightarrow g_{\xi\zeta} + \delta g_{\xi\zeta}$$

$$0 = \delta S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{-g} \eta_{\alpha\beta} \left(\frac{-1}{2} g_{\xi\zeta} g^{\eta\epsilon} \partial_{\eta} X^{\alpha} \partial_{\epsilon} X^{\beta} + \partial_{\xi} X^{\alpha} \partial_{\zeta} X^{\beta} \right)$$

On en déduit :

$$\partial_{\xi} X^{\alpha} \partial_{\zeta} X_{\alpha} = \frac{1}{2} g_{\xi\zeta} g^{\eta\epsilon} \partial_{\eta} X^{\alpha} \partial_{\epsilon} X_{\alpha}$$

Soit encore :

$$\sqrt{-h} = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\xi\zeta} \partial_{\xi} X^{\alpha} \partial_{\zeta} X_{\alpha}$$

On retrouve ainsi l'action de Nambu :

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{-h}$$

Transformations de superjauge.

Il existe une autre classe de transformation laissant les équations du mouvement invariantes : celles qui échanent les rôles de Ψ et X . De telles transformations paraîtront plus claires à l'issue de la deuxième partie; elles sont définies comme suit (on les appelle transformations de superjauge) :

$$\begin{cases} \delta X^{\alpha} = i\bar{\epsilon} \Psi^{\alpha} \\ \delta \Psi^{\alpha} = \partial_{\xi} X^{\alpha} \rho^{\xi\epsilon} \epsilon + F^{\alpha\epsilon} \\ \delta F^{\alpha} = i\bar{\epsilon} \rho^{\xi\epsilon} \partial_{\xi} \Psi^{\alpha} \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

ε est un spineur sur la surface d'univers et un scalaire d'espace-temps; c'est le paramètre de la transformation. $([\varepsilon(\xi), \varepsilon(\xi')]_+ = 0)$.

F^α est un champ scalaire auxiliaire introduit pour préserver la structure de groupe (dont l'équation est $F^\alpha = 0$).

ε satisfait en outre l'équation :

$$(\rho_\xi \partial_\xi + \rho_\zeta \partial_\zeta - \eta_{\xi\zeta} \rho^\kappa \partial_\kappa) \varepsilon = 0 \quad (\text{IV.19})$$

On peut vérifier que le commutateur de deux transformations conformes est une transformation conforme, que le commutateur de deux transformations de superjauge est une transformation conforme de paramètre :

$$u^\xi = 2i\bar{\varepsilon}_1 \rho^\xi \varepsilon_2 \quad (\text{IV.20})$$

et enfin que le commutateur d'une transformation conforme et de superjauge est une transformation de superjauge. On obtient donc une algèbre de Lie.

5 Solution des équations du mouvement.

La solution pour X est la même que pour le premier chapitre :

$$X_\alpha = q_\alpha + \alpha_\alpha^0 \xi^0 + i \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_{n,\alpha} e^{-in\xi^n} \frac{\cos n\xi^1}{n} \quad (\text{IV.21})$$

alors que la solution de l'équation de Dirac est :

$$\begin{aligned} \Psi_1^{\varepsilon=1} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-in(\xi'' + \xi')} \\ \Psi_2^{\varepsilon=1} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-in(\xi'' - \xi')} \\ \Psi_1^{\varepsilon=-1} &= \sum_{n=\frac{2p+1}{2}} C_n e^{-in(\xi'' + \xi')} \\ \Psi_2^{\varepsilon=-1} &= \sum_{n=\frac{2p+1}{2}} C_n e^{-in(\xi'' - \xi')} \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

6 Quantification covariante.

L'étape ultérieure est de procéder à la quantification canonique des champs X et Ψ ; nous imposons les relations de commutation à ξ^0 égal :

$$\begin{aligned}
[X^\alpha(\xi^0, \xi^1), X^\beta(\xi^0, \xi'^1)] &= -\pi\eta^{\alpha\beta}\delta(\xi^1 - \xi'^1) \\
[\Psi^\alpha(\xi^0, \xi^1), \Psi^\beta(\xi^0, \xi'^1)]_+ &= -\pi\eta^{\alpha\beta}\delta(\xi^1 - \xi'^1)
\end{aligned}
\tag{IV.23}$$

La relation (IV.23.b) permet de déduire :

$$[C_n^\alpha, C_{n'}^\beta]_+ = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\delta_{n,n'}
\tag{IV.24}$$

$\epsilon = 1$: corde de Ramond.

n entier

$$\begin{array}{lll}
C_n & n > 0 & \text{opérateur d'annihilation} \\
C_n & n < 0 & \text{opérateur de création}
\end{array}$$

(IV.24) devient pour $n = 0$:

$$[C_0^\alpha, C_0^\beta]_+ = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}$$

C_0^α : élément de l'algèbre de Clifford (annexe 1).

On peut prendre :

$$C_0^\alpha = \frac{i}{2}\gamma^\alpha
\tag{IV.25}$$

Les matrices γ^α sont les matrices associées aux vecteurs d'un espace à D dimensions; elles sont construites suivant la méthode préconisée par Cartan (annexe 1)⁽¹²⁾.

On définit alors :

$$\begin{aligned}
C_n^\alpha &= \frac{\gamma^{D+1}}{\sqrt{2}} d_n^\alpha \\
C_{-n}^\alpha &= \frac{\gamma^{D+1}}{\sqrt{2}} d_n^{+\alpha} \\
\Psi^\alpha &= \frac{i}{\sqrt{2}} \Gamma^\alpha(z)
\end{aligned}
\tag{IV.26}$$

$$\Gamma^\alpha(z) = \gamma^\alpha + i\sqrt{2}\gamma^{D+1} \sum_{n=1}^{+\infty} (d_n^{+\alpha} z^n + d_n^\alpha z^{-n})$$

$$z = \xi^0 + \xi^1$$

$\epsilon = -1$: Corde de Neveu-Schwarz.

n demi-entier, nous introduisons les opérateurs b_n et b_n^+ :

$$\begin{aligned}
 C_n^\alpha &= 2^{-1/2} b_n^\alpha \\
 C_{-n}^\alpha &= 2^{-1/2} b_n^{+\alpha} \\
 \Psi^\alpha(z) &= 2^{-1/2} H^\alpha(z) \\
 H^\alpha(z) &= \sum_{n=\frac{2r+1}{2}} [b_n^{+\alpha} z^n + b_n^\alpha z^{-n}] \quad (IV.27)
 \end{aligned}$$

7 Contraintes et spectre des états.

Nous allons tenir compte des contraintes de jauge et de superjauge. La contrainte de jauge (IV.7) peut se mettre sous la forme plus simple en posant :

$$\begin{aligned}
 \Psi(\xi^0, \xi^1) &= \Psi_1(\xi^0, \xi^1) & \xi^1 \in [0, \pi] \\
 \Psi(\xi^0, \xi^1) &= \Psi_2(\xi^0, -\xi^1) & \xi^1 \in [-\pi, 0] \\
 P^2 + i\Psi(\partial_0 + \partial_1)\Psi &= 0 & \text{ou encore} \\
 P^2 - 2\Psi(z)z \frac{d}{dz} \Psi(z) &= 0 & (IV.28)
 \end{aligned}$$

Alors que la contrainte de superjauge, (IV.11), devient :

$$P^\alpha \Psi_\alpha = 0 \quad (IV.29)$$

que l'on traduit au niveau quantique de façon analogue⁽⁴⁾ à la quantification de la corde de Nambu. On obtient alors des opérateurs dont les éléments de matrice sont nuls.

$\epsilon = 1$: Modèle de Ramond (fermions).

On peut montrer que la corde de Ramond représente les états fermioniques; l'état fondamental est une particule non massive de spin $\frac{1}{2}$.

La condition de masse devient :

$$M^2 = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} (\alpha_n \cdot \alpha_{-n} + n d_n^+ d_n) \quad (IV.30)$$

La théorie est en outre covariante si $D = 10$ et est sans fantôme et sans tachyon.

$\epsilon = -1$: Modèle de Neveu-Schwarz.

Dans ce cas, la corde de N.S. décrit les états bosoniques, dont l'état fondamental est un scalaire :

$$M^2 = -1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + 2 \sum_{n=\frac{1}{2}}^{+\infty} n b_n^+ \cdot b_n$$

mais, nous obtenons encore un tachyon. On peut cependant obtenir comme état fondamental une particule non massive de spin 1⁽⁴⁾.

Pour que la théorie soit sans fantôme, il faut se placer dans un espace à 26 dimensions (i.e. $D = 26$)⁽⁴⁾.

Nous verrons lors de l'étude consacrée aux supercordes que le modèle Ramond-Neveu-Schwarz (R.N.S.) est à la base de la théorie des supercordes. En fait, comme le montrera la deuxième partie, la théorie est déjà supersymétrique. Lors de la première formulation de la "spinning string", Ramond d'une part et Neveu-Schwarz d'autre part ne l'ont pas remarqué. C'est cette découverte ultérieure de la supersymétrie qui a suscité le regain d'intérêt pour les supercordes.

2^{ième} Partie:

SUPERSYMETRIE-SUPER GRAVITE

La supersymétrie

L'étude des symétries d'un système est d'une grande importance depuis qu'Einstein, à partir de propriétés de symétries et d'équivalences, a mis au point en 1905 la relativité restreinte et en 1915 la relativité générale. C'est de la même façon, en étudiant certaines symétries des équations, que l'on débouche sur la notion de champ d'interaction en tant que champ de jauge. Ou encore la notion de symétrie (liée à l'invariance sous certaines transformations) nous conduit à des quantités conservées.

Il existe deux types de symétries; les symétries d'espace-temps et les symétries internes. C'est en voulant créer une structure plus large, incluant ces deux types de symétries, que l'on obtient la supersymétrie. C'est donc une théorie liée à la philosophie qu'Einstein nous a légué.

Dans un premier temps, nous étudierons l'algèbre de la supersymétrie; on montrera qu'il est nécessaire d'introduire un nouveau type de générateur. Nous tirerons ensuite les conséquences directes de la supersymétrie, dont la plus importante est l'égalité du nombre de degrés de liberté fermionique et bosonique, conséquences qui imposent l'existence de partenaires supersymétriques (on obtient alors une symétrie fermion-boson). Un test à venir de la supersymétrie est la détection d'éventuelles particules supersymétriques (on peut les différencier des autres particules grâce au couplage qu'elles ont avec la matière ordinaire).

Si on applique le raisonnement inverse en supposant avoir une symétrie fermion-boson, i.e. une action invariante lorsqu'on "change les rôles" des bosons et des fermions, le théorème de Noether conduit à une charge conservée que l'on peut identifier avec les générateurs introduits précédemment.

Ensuite, nous formulerons une théorie des champs supersymétriques pour la matière fermionique (modèle de Wess-Zumino), pour les champs de jauge (super Q.E.D. et théorie de Yang-Mills supersymétrique) et enfin, pour la gravitation (supergravité). On verra qu'il devient simple de coupler la supergravité avec la matière (procédure de Noether).

Dans un dernier chapitre, nous étudierons les superespaces, espaces auxquels on rajoute des dimensions spinorielles pour obtenir une théorie supersymétrique tout au long des calculs. Il est important de noter que les dimensions auxiliaires n'ont aucun sens physique: elles ont été introduites pour obtenir une formulation élégante de la supersymétrie. Les superespaces imposent une révision des règles d'intégration et rendent compte de façon naturelle de l'existence des particules et de leurs partenaires supersymétriques (en faisant un développement en série entière, à un ordre suffisant pour que les termes ultérieurs s'annulent).

Algèbre de la Supersymétrie

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, l'étude des symétries d'un système a été introduite par Einstein; on peut les classer en deux catégories bien distinctes. D'une part les symétries d'espace-temps liées à la covariance des équations, symétries représentées par le groupe de Poincaré, d'autre part les symétries dites internes, symétries liées soit à une grandeur conservée (charge électrique) soit à l'invariance de la théorie sous des transformations de l'espace interne, (le théorème de Noether conduit aussi dans ce cas à des grandeurs conservées). L'idée de base de la supersymétrie est de considérer un groupe plus large incluant le groupe de Poincaré et le groupe des symétries internes. Une des conséquences - et non des moindres - est la symétrie fermion-boson. Philosophiquement une telle conséquence est satisfaisante car la dissymétrie fermion-boson a un certain côté choquant (par exemple les théories de jauge ne rendent compte que des bosons).

Gelfand et Likhtman⁽¹³⁾ ont montré qu'il fallait étendre la notion de groupe de Lie pour obtenir un groupe supersymétrique. Il est nécessaire d'introduire N supercharges ou charges spinorielles; ce nombre définit les théories supersymétriques de type N . On peut montrer que $1 \leq N \leq 8$. En effet pour $N > 8$, on obtient des particules de spin supérieur à deux alors que de telles particules n'ont pas été mises en évidence. On arrive à une telle conclusion en utilisant la procédure de Wigner qui permet d'obtenir une représentation irréductible de la supersymétrie.

Pour les applications supersymétriques nous ne nous intéresserons qu'au cas $N = 1$.

1 Extension du groupe de Lie.

Comme nous l'avons vu dans la première partie, le groupe de Poincaré est défini par les générateurs des translations et des rotations, P forme un groupe de Lie satisfaisant les relations de commutation :

$$\begin{aligned} [P^\alpha, P^\beta] &= 0 \\ [P^\alpha, J^{\beta\gamma}] &= i(\eta^{\alpha\beta} P^\gamma - \eta^{\alpha\gamma} P^\beta) \\ [J^{\alpha\beta}, J^{\gamma\delta}] &= i(\eta^{\beta\gamma} J^{\alpha\delta} - \eta^{\alpha\gamma} J^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\delta} J^{\beta\gamma} - \eta^{\beta\delta} J^{\alpha\gamma}) \end{aligned} \quad (V.1)$$

On considère ensuite un groupe G des symétries internes dont les générateurs T_r satisfont les relations de commutation :

$$[T_r, T_s] = iC_{rs}^t T_t \quad (V.2)$$

où C_{rs}^t sont les constantes de structure du groupe. On introduit alors les générateurs Q_a^i satisfaisant les relations d'anticommutation :

$$[Q_a^i, Q_b^j]_+ = \text{autre générateur} \quad (V.3)$$

On appelle générateurs *pairs* ceux satisfaisant (V.1) et (V.2) et générateurs *impairs* ceux vérifiant (V.3). Et l'on impose la structure supersymétrique :

$$\begin{aligned} [\textit{pair}, \textit{pair}] &= \textit{pair} \\ [\textit{impair}, \textit{impair}]_+ &= \textit{pair} \\ [\textit{pair}, \textit{impair}] &= \textit{impair} \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

On peut noter la similitude existant avec les transformations conformes et de superjauge où les transformations conformes sont des générateurs *pairs* et les transformations de superjauge les générateurs *impairs*. La théorie R.N.S. est donc supersymétrique. On postule ensuite les relations de Jacobi généralisées (extension du groupe de Lie); on note B un opérateur *pair* et F *impair* :

$$\begin{aligned} [[B_1, B_2], B_3] + [[B_2, B_3], B_1] + [[B_3, B_1], B_2] &= 0 \\ [[B_1, B_2], F_3] + [[B_2, F_3], B_1] + [[F_3, B_1], B_2] &= 0 \\ [[B_1, F_2], F_3]_+ + [[F_2, F_3]_+, B_1] + [[F_3, B_1], F_2]_+ &= 0 \\ [[F_1, F_2]_+, F_3] + [[F_2, F_3]_+, F_1] + [[F_3, F_1]_+, F_2] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{V.5})$$

Avec les relations (V 1-5) on peut exprimer sans trop de difficultés les relations de commutation du groupe supersymétrique. Pour plus de détails, on peut se reporter à la référence (5).

Les générateurs *pairs* sont aussi appelés générateurs bosoniques (comportement scalaire $-T_r^-$, vecteur $-P^\alpha_-$, tenseur $-J^{\alpha\beta_-}$, vis-à-vis des relations de commutations) et les générateurs *impairs* sont dit fermioniques (comportement spinoriel.)

2 Approche alternative : symétrie fermion-boson.

L'idée la plus simple que nous puissions avoir de la supersymétrie est le fait d'avoir une symétrie fermion-boson.

On rappelle que les bosons sont des particules de spin entiers (0,1,2,...), dont la description quantique nous est donnée par des scalaires, vecteurs, et tenseurs satisfaisant certaines relations de commutation (statistique de Bose-Einstein), tandis que les fermions sont des particules de spin demi-entier ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$), décrites par des spineurs, spineurs-vecteurs (ou spineurs d'ordre 3) satisfaisant certaines relations d'anticommutation (statistique de Fermi-Dirac). Une différence fondamentale pour ces deux types de particules est que les fermions satisfont le principe d'exclusion de Pauli; c'est ce qui confère à la matière son extension spatiale, alors que les champs d'interactions peuvent être très intenses. Pour l'obtention d'équations covariantes, on peut consulter (3,14,15).

Explicitons la symétrie fermion-boson en considérant A , un champ scalaire, et Ψ_a , un champ spinoriel. Nous recherchons une transformation linéaire permettant de passer de A à Ψ_a . Pour ce faire, adjoignons-nous un spineur ε_a vérifiant l'algèbre de Grassmann (anticommutant avec lui-même). On postule alors :

$$\begin{aligned}\delta A &= \bar{\varepsilon}^a \Psi_a = \bar{\varepsilon} \cdot \Psi \\ \delta \Psi_a &= (\gamma^\alpha)_a^b \partial_\alpha A \varepsilon_b = \gamma^\alpha \partial_\alpha A \cdot \varepsilon\end{aligned}\quad (V.6)$$

On peut encore mettre (V.6) en étroite comparaison avec les transformations de la "spinning string".

Si l'on calcule le commutateur de deux transformations supersymétriques, on voit que d'une part on doit se donner un champ scalaire supplémentaire et que d'autre part :

$$[\delta \varepsilon_1, \delta \varepsilon_2] = \text{translation} \quad (V.7)$$

3 Conséquences de la supersymétrie.

Nous avons introduit les charges spinorielles Q_a^i comme la représentation spinorielle du groupe de Lorentz, autrement dit l'action de Q_a^i sur un état de spin j consiste à le transformer en particule de spin $j \pm \frac{1}{2}$. Si l'on étudie la représentation irréductible de la supersymétrie, il apparaît que :

$$\begin{aligned}Q_1^{i*} & \quad \text{diminue le spin d'une demi-unité.} \\ Q_1^i & \quad \text{l'augmente d'une demi-unité.}\end{aligned}$$

Ainsi, partant par exemple d'un état de spin 1, pour $N = 4$, on construit :

$$1 \text{ état de spin } 1 : |1 \rangle, | -1, [ijkl] \rangle = Q_1^{*i} \dots Q_1^{*l} |1 \rangle,$$

$$4 \text{ états de spin } 1/2 : |\frac{1}{2}, i \rangle = Q_1^{*i} |1 \rangle, | -\frac{1}{2}, [ijk] \rangle = Q_1^{*i} \dots Q_1^{*k} |1 \rangle,$$

$$6 \text{ états de spin } 0 : |0, [ij] \rangle = Q_1^{*i} Q_1^{*j} |1 \rangle,$$

où $Q_1^{*i} \dots Q_1^{*l}$ représente le produit totalement antisymétrique en $i \dots l$.

De plus si nous utilisons la relation de commutation :

$$[P_\alpha, Q_a^i] = 0 \quad (V.8)$$

on obtient :

$$[P_\alpha P^\alpha, Q_a^i] = 0 \quad (V.9)$$

$P_0 P^\alpha = P^2$ est donc un opérateur de Casimir, ce qui implique que dans une représentation irréductible, tous les états sont de même masse.

On peut noter l'analogie avec le problème du spin en mécanique quantique où J^2 est un opérateur de Casimir et en plus Q_1^* joue le rôle de I_- et Q_1 de I_+ .

Une autre conséquence importante résultant de l'algèbre de la supersymétrie est que l'énergie P_0 d'un état est positive. Mais nous allons établir le théorème le plus important de la supersymétrie :

le nombre de degrés fermioniques et bosoniques sont égaux.

Pour établir cette assertion, supposons que nous avons séparé les états bosoniques B et fermioniques F . Supposons que le nombre d'états bosoniques soit inférieur au nombre d'états fermioniques; ou plus précisément qu'il existe une injection de $B \rightarrow F : Q_a^i$.

$$B \xrightarrow{Q_a^i} f \subset F$$

Or de deux choses l'une; soit Q_b^i est une bijection de f dans B , soit est une injection.

Si Q_b^i est une injection de f dans B :

$$f \xrightarrow{Q_b^i} b \subset B$$

Appliquons maintenant à chaque état de B l'anticommutateur $[Q_a^i, Q_b^i]_+$:

$$B \xrightarrow{[Q_a^i, Q_b^i]_+} b$$

Or,

$$[Q_a^i, Q_b^i]_+ = 2(\gamma_\alpha C)_{ab} P^\alpha \quad (\text{V.10})$$

C est le tenseur métrique de l'espace des spineurs et P^α l'opérateur de translation (bijection).

Il vient donc que $B = b$ et par suite Q_b^i est donc une bijection de B dans f . On en déduit : n^b de boson $\leq n^b$ de fermion.

En partant de F on arrive à la conclusion :

$$n^b \text{ de fermion} \leq n^b \text{ de boson}$$

d'où $f = F$.

On a donc bien démontré le théorème proposé.

La conséquence la plus importante de ce théorème est l'existence de partenaires supersymétriques de la matière ordinaire. On va donc reformuler une théorie des champs dite supersymétrique invariante pour une transformation du type (V.6), dont les paramètres arbitraires sont déterminés en posant que le commutateur de deux transformations supersymétriques ou d'une transformation supersymétrique et d'une transformation de jauge est fermé⁽⁵⁾.

Champs supersymétriques

Nous allons, dans ce chapitre, considérer successivement différents types de théories supersymétriques. Nous partirons d'une grandeur (spinorielle ou vectorielle) puis nous lui associerons un champ représentant le partenaire supersymétrique. Toutes les théories seront formulées dans un espace à 4 dimensions et concerneront des états non massifs.

1. Modèle de Wess-Zumino.

L'équation fondamentale de la matière (spin 1/2) est l'équation de Dirac; dans le cas où la masse est nulle, il y a découplage entre les états gauches et droits, qui sont valeurs propres de l'opérateur γ_5 (projection de Weyl). On utilise la représentation de Majorana avec des spineurs non massifs réels, qui possèdent deux degrés de liberté. Nous lui associons un champ scalaire A et un champ pseudo-scalaire B . On pourrait à partir de :

$$\begin{aligned} |1/2\rangle & \text{ construire } |0_R\rangle = Q_1^* |1/2\rangle \\ |-1/2\rangle & \text{ construire } |0_L\rangle = Q_1 |-1/2\rangle \end{aligned}$$

qui sont les particules scalaires associées aux états gauches et droits du spineur. On obtient alors les particules supersymétriques de la matière (s-leptons et s-quarks); l'état L (resp R) peut être relié à A et B : $L = A - B$ (resp $R = A + B$).

Le Lagrangien d'un tel système est :

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\alpha A)(\partial^\alpha A) + \frac{1}{2}(\partial_\alpha B)(\partial^\alpha B) + \frac{i}{2}\bar{\Psi}\Psi \quad (\text{VI.1})$$

Il conduit aux équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \square A &= 0 \\ \square B &= 0 \\ i\gamma^\alpha \partial_\alpha \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.2})$$

L'action construite à partir de (VI.2) et les équations du mouvement sont invariantes dans les transformations supersymétriques :

$$\begin{aligned} \delta A &= \bar{\epsilon}\Psi \\ \delta B &= i\bar{\epsilon}\gamma_5\Psi \\ \delta\Psi &= \gamma^\alpha \partial_\alpha(A + i\gamma_5 B)\epsilon \end{aligned} \quad (\text{VI.3})$$

Le commutateur de deux transformations supersymétriques est :

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] = 2\bar{\epsilon}_1 \gamma^\alpha \epsilon_2 P_\alpha, \quad (\text{VI.4})$$

ce qui représente une translation de vecteur :

$$v^\alpha = 2\bar{\epsilon}_1 \gamma^\alpha \epsilon_2. \quad (\text{VI.5})$$

Le modèle de Wess-Zumino est le premier modèle linéaire supersymétrique.

2 Super Q.E.D.

L'invariance du système sous le groupe $U(1)$ conduit aux équations de Maxwell; le champ est décrit par un vecteur non massif A_α . Nous devons donc lui associer un spineur de Majorana λ (égalité des degrés de liberté fermioniques et bosoniques).

Le vecteur A_α permet la construction du tenseur de Maxwell :

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \quad (\text{VI.6})$$

Il satisfait trivialement les relations :

$$\begin{aligned} \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} &= 0 \\ \text{ou } \partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.7})$$

qui sont la première série des équations de Maxwell. Elles ne représentent qu'une propriété géométrique de $F_{\alpha\beta}$ et non pas physique. En l'absence de source ($J^\alpha = 0$) on a la deuxième série d'équations de Maxwell.

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{VI.8a})$$

à laquelle on rajoute l'équation du spineur λ représentant le photino (partenaire supersymétrique du photon) :

$$\gamma^\alpha \partial_\alpha \lambda = 0 \quad (\text{VI.8b})$$

Les équations (VI.8b) sont données par le Lagrangien :

$$L = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{i}{2} \bar{\lambda} \gamma^\alpha \partial_\alpha \lambda \quad (\text{VI.9})$$

Les équations (VI.8) et l'action construite à partir de (VI.9) sont invariantes pour

1) les transformations de jauge :

$$\begin{aligned} \delta A_\alpha &= \partial_\alpha \Lambda \\ \delta \lambda &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.10})$$

où Λ est un champ scalaire

2) les transformations supersymétriques :

$$\begin{aligned}\delta A_\alpha &= \bar{\epsilon} \gamma_\alpha \lambda \\ \delta \lambda &= -\frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \epsilon\end{aligned}\quad (\text{VI.11})$$

$$\text{où } \sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta].$$

Enfin, on peut relever les relations de commutation :

$$\begin{aligned}[jauge, jauge] &= jauge \\ [jauge, susy] &= susy \\ [susy, susy] &= translation + jauge\end{aligned}\quad (\text{VI.12})$$

3 Super Yang-Mills.

Dans l'annexe 1, nous étudions les théories de jauge non abéliennes. Nous partons d'un système invariant sous un groupe de symétrie G à p générateurs, la théorie impose alors l'existence de p bosons de jauge A_α^i associées aux p générateurs R^i .

Le fait que les générateurs ne commutent pas entre eux (V.2) explique que les bosons de jauge self-interagissent et rend compte de l'existence d'un courant associé aux bosons de jauge.

On rappelle (V.2) :

$$[R_i, R_j] = i S_{ij}^k R_k$$

Au champ de jauge A_α^i , associons le champ de jaugino λ^i (spineur de Majorana).

Le Lagrangien est donné par :

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \bar{\lambda}^i \gamma^\alpha \partial_\alpha \lambda_i \quad (\text{VI.13})$$

où le tenseur de Yang-Mills Maxwell est donné par :

$$F_{\alpha\beta}^i = \partial_\alpha A_\beta^i - \partial_\beta A_\alpha^i - g S_{jk}^i A_\alpha^j A_\beta^k \quad (\text{VI.14})$$

C'est la deuxième partie de $F_{\alpha\beta}^i$ qui est responsable de la non linéarité des équations. En notant g la constante de couplage, les équations du mouvement sont, en l'absence de source externe :

$$\begin{aligned}\partial^\alpha F_{\alpha\beta}^i &= g S_{jk}^i F_{\beta\gamma}^j A^{\gamma,k} \\ i\gamma^\alpha \partial_\alpha \lambda^i &= 0\end{aligned}\quad (\text{VI.15})$$

Ces équations sont invariantes dans les transformations de jauge :

$$\begin{aligned}\delta_1 A_\alpha^i &= S_{jk}^i R^j(x) A_\alpha^k \\ \delta_1 \lambda^i &= 0\end{aligned}\quad (\text{VI.16a})$$

$$\begin{aligned}\delta_2 A_\alpha^i &= \partial_\alpha \Lambda^i \\ \delta_2 \lambda^i &= 0\end{aligned}\quad (\text{VI.16b})$$

où nous avons relié δ_1 et δ_2 par :

$$\Lambda_i(x) = \frac{1}{g} R_i(x) \quad (\text{VI.17})$$

Et pour les transformations supersymétriques :

$$\begin{aligned}\delta A_\alpha^i &= \bar{\epsilon} \gamma_\alpha \lambda^i \\ \delta \lambda^i &= -\frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^i\end{aligned}\quad (\text{VI.18})$$

A condition de remplacer dans (VI.13) :

$$\partial_\alpha \lambda^i \text{ par } D_\alpha \lambda^i = \partial_\alpha \lambda^i - g S^{ijk} A_{\alpha,j} \lambda_k \quad (\text{VI.19})$$

on obtient une supersymétrie locale.

En partant du Lagrangien sous sa forme la plus simple, la procédure de Noether permet de construire le Lagrangien (VI.13) en rajoutant des termes "d'interactions" pour le rendre invariant, lorsque nous imposons une transformation de jauge locale (VI.16) et un couplage (VI.17). En supergravité, le problème est plus complexe car d'une part, il faut rajouter des termes additionnels au Lagrangien mais en plus, il faut modifier les lois de transformation des champs. Néanmoins, on peut ainsi coupler supergravité et matière.

4 Formulation "off shell".

Dans les paragraphes précédents, nous avons supposé que les champs considérés étaient sur leur couche de masse ("on shell") i.e. $P^2 = 0$. Si maintenant on suppose que ce n'est plus le cas (formulation "off shell"), pour préserver l'égalité du nombre de degrés de libertés bosoniques et fermioniques, on doit considérer des champs supplémentaires (qui "on shell" sont identiquement nuls). De tels champs ne se propagent donc pas car ils n'ont pas de terme cinétique, ils sont donc découplés de la théorie. Un des problèmes de la supersymétrie est de trouver ces champs auxiliaires, (pour la supermétrie $N = 8$ on ne connaît pas de champs auxiliaires).

Dans le modèle de Wess-Zumino on rajoute deux champs F (scalaire) et G (pseudoscalaire) d'équation :

$$F = G = 0 \quad (\text{VI.20})$$

En super Q.E.D. on rajoute un champ pseudoscalaire D d'équation :

$$D = 0 \quad (\text{VI.21})$$

et pour les théories Yang-Mills supersymétriques p champs pseudoscalaires D^i d'équation :

$$D^i = 0 \quad (\text{VI.22})$$

Supergravité

Après avoir passé en revue une formulation supersymétrique de la matière (modèle de Wess-Zumino), puis une formulation supersymétrique des champs de jauge (électromagnétisme, champ de Yang-Mills), il reste à étudier une formulation supersymétrique de la relativité générale. Le champ de gravitation étant décrit par une particule non massive de spin 2 (le graviton), on lui associe un partenaire supersymétrique de spin 3/2 (le gravitino).

1 Principaux résultats de relativité générale.

Depuis Einstein, nous avons une vision géométrique de la gravitation; celle-ci est due à une altération de la courbure de l'espace-temps. Le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ contient tous les effets de la gravitation : la résolution des équations d'Einstein nous donne alors le tenseur métrique et par conséquent la structure géométrique de l'espace-temps.

Le formalisme variationnel conduit aux dix équations d'Einstein en prenant l'action :

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\kappa L_m) \quad (\text{VII.1})$$

où L_m est le Lagrangien de la matière, $\kappa = \frac{G}{8\pi c^2}$ et G la constante de gravitation.

Tenseur de courbure.

Le tenseur de courbure $R_{\rho\mu\nu}^\sigma$ est lié à la non commutativité de la dérivée covariante ∇_μ (annexe 1) :

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\sigma = R_{\rho\mu\nu}^\sigma A^\rho \quad (\text{VII.2})$$

l'on obtient alors :

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} = & \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} + \partial_\mu \partial_\sigma g_{\nu\rho} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\rho} - \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma}) \\ & + g_{\tau\epsilon} (\Gamma_{\nu\rho}^\tau \Gamma_{\mu\sigma}^\epsilon - \Gamma_{\nu\sigma}^\tau \Gamma_{\mu\rho}^\epsilon) \end{aligned} \quad (\text{VII.3})$$

Puis, par contraction, on définit le tenseur de Ricci :

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^\sigma$$

et la courbure scalaire :

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Le principe de correspondance permet d'annuler localement la gravitation ce qui se traduit au vu des équations (1.2 et 1.3) par $\Gamma_{\nu\rho}^\mu = 0$. Mais attention : on a $\partial_\tau \Gamma_{\nu\rho}^\mu \neq 0$ car l'on ne peut annuler la gravitation qu'au premier ordre, ceci étant dû à l'existence de forces

de marée ou à l'inhomogénéité du champ gravitationnel. Les équations de la gravitation obtenues à partir de (VII.1) sont :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (\text{VII.4})$$

(où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie impulsion de la matière représentant la source du champ gravitationnel; c'est l'analogie de j^μ en électromagnétisme).

En utilisant le principe de correspondance énoncé ci-avant, on obtient les équations d'Einstein linéarisées.

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\rho g_{\mu\sigma} + \partial_\mu\partial_\sigma g_{\nu\rho} - \partial_\nu\partial_\sigma g_{\mu\rho} - \partial_\mu\partial_\rho g_{\nu\sigma}) \quad (\text{VII.5})$$

Ces équations du champ gravitationnel libre et linéarisé s'écrivent alors :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{VII.6})$$

Ces équations sont alors invariantes dans la transformation de jauge :

$$\delta g_{\mu\nu} = \partial_\nu \xi_\mu(x) + \partial_\mu \xi_\nu(x) \quad (\text{VII.7})$$

où $\xi_\mu(x)$ est un champ vectoriel.

2 Champ de spin 3/2 : équation de Rarita-Schwinger.

Une particule de spin 3/2 peut-être décrite par un spineur vecteur $\Psi_\alpha^\mu(x)$. Son équation est donnée par :

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi^\nu - m\Psi^\nu = 0 \quad (\text{VII.8})$$

avec deux contraintes (pour avoir le nombre adéquat de degrés de liberté) :

$$\begin{aligned} \gamma_\nu \Psi^\nu &= 0 \\ \partial_\nu \Psi^\nu &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.9})$$

Equations que l'on peut récrire sous la forme ⁽²⁴⁾ :

$$0 = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu \left(\partial_\rho + \frac{im}{2} \cdot \gamma_\rho \right) \Psi_\sigma \quad (\text{VII.10})$$

Ces équations sont obtenues à l'aide du formalisme variationnel en utilisant le Lagrangien :

$$L = \bar{\Psi}_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu \left(\partial_\rho + i\frac{m}{2} \gamma_\rho \right) \Psi_\sigma \quad (\text{VII.11})$$

Dans le cas de la supergravité, où le gravitino est de masse nulle, on a :

$$\begin{aligned} L &= \bar{\Psi}_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho \Psi_\sigma \\ R^\mu &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho \Psi_\sigma = 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.12})$$

et on a l'invariance de jauge :

$$\delta \Psi_a^\mu = \partial^\mu \eta_a(x) \quad (\text{VII.13})$$

où $\eta_a(x)$ est un spineur.

3 Supergravité.

En supergravité, nous avons donc deux champs, le champ d'Einstein représentant le graviton et le champ de Rarita-Schwinger représentant le gravitino :

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \\ R^\mu &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho \Psi_\sigma = 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.14})$$

obtenues en utilisant l'action :

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{1}{2} \bar{\Psi}_\mu R^\mu \right) \quad (\text{VII.15})$$

(VII.14 et VII.15) sont invariants dans les transformations de jauge :

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} &= \partial_\mu \xi_\nu(x) + \partial_\nu \xi_\mu(x) \\ \delta \Psi_a^\mu &= \partial^\mu \eta_a(x) \end{aligned} \quad (\text{VII.16})$$

et dans les transformations supersymétriques :

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\bar{\varepsilon} \gamma_\mu \Psi_\nu + \bar{\varepsilon} \gamma_\nu \Psi_\mu) \\ \delta \Psi_\mu &= -\sigma^{\nu\rho} \partial_\nu g_{\rho\mu} \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{VII.17})$$

On peut si on le désire consulter ⁽⁵⁾ pour obtenir les lois de commutations entre les diverses transformations. Par exemple :

$$[\text{susy}, \text{susy}] g_{\mu\nu} = (\text{translation} + \text{jauge}) g_{\mu\nu}$$

On peut aussi obtenir une formulation "off shell" de la supergravité ⁽⁵⁾.

4 Equations non linéaires.

En utilisant la procédure de Noether, on peut dans un premier temps obtenir une théorie supersymétrique locale $\varepsilon = \varepsilon(x)$. Ensuite nous pouvons coupler la matière avec la supergravité en combinant (VII.16 et VII.17)⁽⁴⁾ :

$$\eta(x) = \frac{2}{\kappa} \varepsilon(x). \quad \text{et} \quad \xi_\mu = \frac{2}{\kappa} \zeta_\mu(x) \quad (\text{VII.18})$$

On peut noter la similitude entre la théorie de Yang-Mills et la supergravité (annexe 1); l'on considèrera que le groupe qui rend les équations du mouvement invariante est le groupe $Diff(1,3)$, des transformations inversibles de \mathbb{R}^4 . Autrement dit, c'est ce qui traduit la covariance des équations. Ce groupe incluant les groupes des transformations de Poincaré complique la quantification de la gravitation. De manière plus géométrique, on obtient le même résultat si on considère le double rôle de la métrique :

- rôle de champ de jauge (équations d'Einstein),
- rôle géométrique. Ce qui nous montre que quantifier la gravitation, c'est quantifier l'espace-temps.

Une autre difficulté provient de la notion de particules virtuelles; en effet, plus les distances sont petites, plus on peut créer des états virtuels d'énergie importante (inégalité de Heisenberg) ce qui fait qu'au-delà d'une certaine distance (distance de Planck), on peut créer des trous noirs virtuels; ce qui rend l'espace-temps extrêmement courbé aux petites échelles, cela est catastrophique pour les techniques de calcul (linéarisation des équations).

Superespace

Toute la supersymétrie repose sur l'égalité des degrés de liberté fermioniques et bosoniques; si on veut une théorie où l'on conserve le caractère supersymétrique à toutes les étapes du calcul, on peut définir un superespace. Nous ne nous intéresserons qu'à la formulation des superespaces pour $N = 1$. Nous considérerons les superespaces sous un angle relativement simple (on peut si on le désire consulter⁽⁵⁾ où l'auteur envisage le superespace comme le groupe quotient du supergroupe de Poincaré SP par le groupe de Lorentz L). Nous supposons le superespace comme étant une variété différentielle de dimension 8 : les 4 dimensions spatio-temporelles et les 4 dimensions spinorielles. Ceci peut se comprendre intuitivement si l'on veut autant de degrés de liberté fermioniques que bosoniques.

1 Superespace $N = 1$.

Soit x^α les 4 coordonnées spatio-temporelles auxquelles nous adjoignons θ^a ($a = 1, \dots, 4$) les 4 composantes d'un spineur de Majorana :

$$\theta_a = C_{ab} \bar{\theta}^b \quad (\text{VIII.1})$$

Nous imposons les relations de commutation et d'anticommutation :

$$\begin{aligned} [x^\alpha, x^\beta] &= 0 \\ [x^\alpha, \theta^a] &= 0 \\ [\theta^a, \theta^b]_+ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VIII.2})$$

et nous réexprimons les transformations de Poincaré :

$$\begin{aligned} x'^\alpha &= x^\alpha - \Lambda_{\beta}^{\alpha} x^{\beta} + a^{\alpha} \\ \theta'^a &= \theta^a - \frac{1}{4} \Lambda_{\beta\gamma} (\sigma^{\beta\gamma})^a_b \theta^b \end{aligned} \quad (\text{VIII.3})$$

et les transformations supersymétriques - translations :

$$\begin{aligned} x'^\alpha &= x^\alpha - \bar{\epsilon} \gamma^\alpha \theta + a^\alpha \\ \theta'^a &= \theta^a + \epsilon^a \end{aligned} \quad (\text{VIII.4})$$

Lorsque l'on calcule le commutateur de deux transformations supersymétriques, l'on obtient une translation : l'algèbre de la supersymétrie est donc fermée.

2 Superchamps.

On définit un superchamp comme étant un champ dépendant de x^α et θ^a . Tout comme en algèbre tensorielle, on peut définir des superchamps scalaires, spinoriels, vectoriels tensoriels, avec des lois de transformations bien définies. Nous pouvons, si on le désire,

exprimer les superchamps en fonction de supermultiplets (scalaires etc...). Pour ce faire, il suffit d'effectuer un développement en série entière en θ^a .

Soit $\varphi(x^a, \theta^a)$ un superchamp scalaire. Comme $[\theta^a, \theta^b]_+ = 0$, on a $\theta^a \theta^b \dots$ antisymétrique en a, b... et donc $\theta^a \theta^b \theta^c \theta^d \theta^e = 0$.

Le développement en série entière est alors un développement exact, s'arrêtant à l'ordre 5, les coefficients du développement en série définissant le multiplet.

3 Propriétés géométriques.

On peut, de façon analogue à la relativité générale, définir un champ de Vielbein, et ensuite définir une dérivée covariante. Si on calcule alors le commutateur de deux dérivées covariantes, on voit que la courbure est nulle et que la torsion est non nulle. Les superspaces ne forment donc pas un espace de Riemman.

Si E_M^π est le champ de Vielbein

$D_M = D_\pi E_M^\pi$ est la dérivée covariante ramenée à l'espace tangent (annexe 1).

$$D_\pi = (\partial_\pi + \frac{1}{2} W_\pi^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta}) \quad (\text{VIII.5})$$

$J_{\alpha\beta}$ sont les générateurs de groupe de Lorentz et $\frac{1}{2} W_\pi^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta}$ la connexion (annexe 1).

L'évaluation du commutateur conduit à :

$$[D_M, D_N] = T_{MN}^R D_R + \frac{1}{2} R_{MN}^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta} \quad (\text{VIII.6})$$

On a donc pour la courbure :

$$R_{MN}^{\alpha\beta} = 0$$

et pour la torsion :

$$T_{AA}^\alpha = -2i(\sigma^\alpha)_{AA} \neq 0 \quad (\text{VIII.7})$$

La torsion est donc liée au caractère spinoriel des dimensions θ .

Pour obtenir les équations de champ, il est nécessaire de redéfinir les lois de l'intégration, les distributions delta ..., tout ceci à cause de la nature anticommutante de θ . On est alors en mesure de définir l'action supersymétrique, qui bien entendu doit redonner l'action dans le 4 - espace ordinaire (supermultiplets).

On pourrait aussi définir des superspaces étendus ($N > 1$); dans ce cas, le problème est plus complexe. On peut, si on le désire, consulter (5).

Il est important de noter que les dimensions θ_a que nous avons introduit n'ont aucun sens physique; elles l'ont été uniquement pour avoir une formulation élégante de la supersymétrie (action supersymétrique).

3^{ième} Partie:

SUPERCORDES

Des cordes aux supercordes

Dans la première partie de ce travail, nous avons étudié la théorie des cordes, théorie dont le Lagrangien avait été postulé par Nambu en 1970. Dans la seconde partie, nous avons introduit quelques notions de supersymétrie, ce qui nous a permis de formuler une théorie des champs supersymétriques. Au vu de cette partie, il apparaît que le modèle R.N.S. possède déjà cette propriété.

La troisième partie est consacrée aux supercordes. L'idée primitive des supercordes est de formuler une théorie supersymétrique sur la surface d'univers : c'est le premier modèle des supercordes. L'étape ultérieure est de vouloir que les supercordes reproduisent les symétries fermions-bosons, ce qui nous amène à l'étude des supercordes nouveau formalisme. Une telle théorie, pour qu'elle soit satisfaisante, doit être compatible avec ce que nous observons. Nous vivons dans un espace de dimension 4, et la théorie est formulée dans un espace à 10 dimensions. On réinterprètera les 6 dimensions supplémentaires comme étant des dimensions compactifiées sur elles-mêmes. La théorie des supercordes est une théorie intéressante, en ce sens qu'elle permet de formuler une unification des forces fondamentales. Avons-nous là la théorie ultime qui permettra de réaliser le rêve d'Einstein?

Enfin, à partir des supercordes, on peut formuler un nouveau type de corde fermée, les cordes hétérotiques.

Une telle théorie est une théorie chirale dont le comportement est différent suivant que nous nous intéressons à des états droits ou gauches. Dans le secteur gauche, nous avons une théorie des supercordes à 10 dimensions, alors que dans le secteur droit une théorie des cordes bosoniques à 26 dimensions. Les 16 dimensions supplémentaires représentent alors un espace de symétries internes qui, par compactification à la Kaluza-Klein, conduit aux bosons de jauge de Yang-Mills, et par brisure de symétrie on obtient les forces électromagnétique faible et forte.

Dans un premier temps, nous formulerons une théorie supersymétrique sur la surface d'univers de la corde, ce qui nous permettra de coupler les supercordes à la supergravité. Nous étudierons alors les supercordes nouveau formalisme qui introduit de façon plus explicite la symétrie fermions-bosons. Dans un second chapitre, nous étudierons de façon succincte les supercordes en interaction. Nous procéderons ensuite à la réduction dimensionnelle ou compactification des 6 extra-dimensions, ce qui nous permettra d'étudier les théories limites des supercordes et le mécanisme d'unification des forces fondamentales. Dans un dernier temps, nous nous intéresserons à la théorie des cordes hétérotiques.

Supersymétrie à deux dimensions

Supercordes

Les équations du mouvement pour une corde sont déduites d'une action à deux dimensions (surface d'univers); il est possible d'obtenir une action supersymétrique sur la surface d'univers dont les états donnent particules et partenaires supersymétriques. Le point de départ de la théorie des supercordes est le modèle R.N.S. déjà supersymétrique. L'étape ultérieure est de reformuler une nouvelle action supersymétrique où apparaît de façon plus explicite la symétrie fermions-bosons.

1 Supersymétrie sur la surface d'univers.

Pour obtenir une action supersymétrique sur la surface d'univers, nous allons utiliser le formalisme développé dans le chapitre sur les superespaces. Nous rajoutons donc aux variables ξ^0 et ξ^1 un spineur à deux dimensions, θ^1 et θ^2 , ce qui définit une supersurface d'univers ($[\theta(\xi), \theta(\xi')]_+ = 0$) :

$$Z^\Delta = (\xi^\xi, \theta^{a'})$$

L'action supersymétrique s'écrit alors :

$$S = \frac{1}{8\pi\alpha'} \int d^4 Z \cdot e D_\Delta V^\alpha D^\Delta V_\alpha \quad (\text{IX.1})$$

où e est le déterminant du champ de Zweibein $e = \sqrt{-g}$ (annexe 1).

$$D_\Delta = \begin{cases} \partial_\xi \\ \partial_{a'} - i(\rho^\xi)_{a'b'} \theta^{b'} \partial_\xi \end{cases} \quad (\text{dérivée covariante})$$

et V^α est le superchamp vectoriel représentant la corde sur la supersurface d'univers. En faisant un développement en série (développement exact), on obtient :

$$V^\alpha = X^\alpha + i\theta\bar{\Psi}^\alpha - i\bar{\theta}\Psi^\alpha + i\bar{\theta}\theta F^\alpha \quad (\text{IX.2})$$

Les variables X^α et Ψ^α ont été introduites précédemment dans le modèle R.N.S. Le champ F^α (pseudoscalaire sur la surface d'univers et vectoriel dans l'espace-temps) est introduit pour avoir une formulation "off shell", il permet donc de préserver l'égalité des degrés de liberté fermioniques et bosoniques. On impose en outre à Ψ^α d'être un spineur de Majorana.

L'action (IX.1), après intégration sur les variables spinorielles, devient :

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\xi (\partial_\xi X^\alpha \partial^\xi X_\alpha + i\bar{\Psi}^\alpha \rho^\xi \partial_\xi \Psi_\alpha + F^\alpha F_\alpha)$$

les supercharges Q apparaissent alors naturellement en utilisant l'invariance de l'action dans les transformations supersymétriques (théorème de Noether) :

$$\begin{aligned} \delta X^\alpha &= i\bar{\epsilon}\Psi^\alpha \\ \delta \Psi^\alpha &= (\partial_\xi \rho^\xi X^\alpha + F^\alpha)\epsilon \\ \delta F^\alpha &= i\bar{\epsilon}\rho^\xi \partial_\xi \Psi^\alpha \end{aligned} \quad (\text{IX.3})$$

où ϵ est un champ spinoriel de Majorana. On rappelle que $[\epsilon(\xi), \epsilon(\xi')]_+ = 0$ (variable de Grassmann).

On a obtenu d'une part l'action du modèle R.N.S., d'autre part (IX.3) identique à (IV.18). Les transformations de superjauge sont donc des transformations supersymétriques.

2 Supercordes.

L'action (IX.3) définit alors les équations du mouvement d'une supercorde (ancien formalisme). Rappelons que dans le secteur bosonique (modèle de Neveu-Schwarz), la dimension D est 26, alors que dans le secteur fermionique, $D = 10$. Pourquoi cette différence? Celle-ci provient du fait qu'en mécanique quantique, la dimension de l'espace-temps est liée au degré de liberté du système. On peut ramener le secteur bosonique à $D = 10$; on obtient alors le modèle des supercordes $D = 10$ ⁽¹⁶⁾. Certains auteurs ont pensé pouvoir obtenir une théorie $D = 4$ en introduisant la symétrie $SU(3)_c$, mais dans ce cas il apparaît des problèmes lors du calcul de l'amplitude de diffusion fermions-fermions*. Dans le modèle R.N.S., secteur bosonique, les tachyons étaient éliminés de façon peu satisfaisante; lorsqu'on passe de $D = 26$ à $D = 10$, on élimine par troncation certains états bosoniques (tachyons compris). On impose en outre des conditions de Majorana-Weyl sur les spineurs. A chaque niveau d'excitation, on a autant de fermions que de bosons. De plus, il faut noter que la théorie est sans fantôme.

3 Couplage des supercordes à la supergravité.

Nous allons coupler la supergravité aux supercordes en utilisant la procédure de Noether.

On rappelle l'action** :

$$S_0 = \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi (\partial_\xi X^\alpha \partial_\xi X_\alpha + i\bar{\Psi}^\alpha \rho^\xi \partial_\xi \Psi_\alpha) \quad (\text{IX.4})$$

* Il semblerait qu'actuellement ce problème soit contourné.

** Comme on s'intéresse à une formulation "on shell", on prend donc directement $F = 0$ dans les équations.

qui est invariante dans les transformations supersymétriques :

$$\begin{aligned}\delta X^\alpha &= \bar{\varepsilon} \Psi^\alpha \\ \delta \Psi^\alpha &= \rho^\xi \partial_\xi X^\alpha \varepsilon\end{aligned}\quad (\text{IX.5})$$

si maintenant on veut une supersymétrie locale $\varepsilon = \varepsilon(x)$, on obtient une variation de l'action :

$$\delta S_0 = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \partial_\xi \bar{\varepsilon} \rho^\xi \partial_\xi X^\alpha \rho^\xi \Psi_\alpha \quad (\text{IX.6})$$

L'action S_0 est rendue invariante si l'on introduit un spineur vecteur χ^ξ vérifiant $\delta\chi^\xi = -\partial^\xi \varepsilon$.

$$S_1 = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi (\partial_\xi X^\alpha \partial^\xi X_\alpha + i\bar{\Psi}^\alpha \rho^\xi \partial_\xi \Psi_\alpha - \kappa \bar{\chi}_\xi \rho^\xi \partial_\xi X^\alpha \rho^\xi \Psi_\alpha) \quad (\text{IX.7})$$

où χ_ξ représente le gravitino et $h_{\xi\xi}$ le graviton. Ils sont invariants :
- dans les transformations de jauge :

$$\delta h_{\xi\xi} = \partial_\xi A_\xi + \partial_\xi A_\xi$$

$$\delta \chi_{\underline{a}'\xi} = \partial_\xi \eta_{\underline{a}'}$$

$\eta_{\underline{a}'}$ champ spinoriel sur la surface d'univers

A_ξ champ scalaire sur la surface d'univers

- et dans les transformations supersymétriques :

$$\delta h_{\xi\xi} = \frac{\kappa}{2} (\bar{\varepsilon} \rho_\xi \chi_\xi + \bar{\varepsilon} \rho_\xi \chi_\xi)$$

$$\delta \chi_{\underline{a}'\xi} = -\sigma^{\xi\xi} \partial_\xi h_{\xi\underline{a}'\eta} \varepsilon \quad (\text{IX.8})$$

Le couplage avec la supergravité se fait en imposant :

$$\eta(x) = \frac{2}{\kappa} \varepsilon(x) \quad (\text{IX.9})$$

En introduisant le champ de Zweibein, on obtient l'action invariante :

$$\begin{aligned}S &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi e \left(e_\xi^\xi e^{\xi\xi} \partial_\xi X^\alpha \partial_\xi X_\alpha + i\bar{\Psi}^\alpha e_\xi^\xi \rho^\xi \partial_\xi \Psi_\alpha \right. \\ &\quad \left. - \kappa \bar{\chi}_\xi \partial^\xi \rho_\xi X^\alpha \rho^\xi \Psi_\alpha - \frac{\kappa^2}{8} \bar{\chi}_\xi \rho^\xi \rho^\xi \chi_\xi \bar{\Psi}^\alpha \Psi_\alpha \right)\end{aligned}\quad (\text{IX.10})$$

L'action (IX.10) possède des propriétés d'invariance plus générales que celles que nous venons de mentionner⁽⁵⁾.

4 Supercordes : nouveau formalisme.

Partant de l'action (IX.3), nous avons obtenu un couplage des supercordes avec la supergravité. Cependant, bien que l'action possède une supersymétrie sur la surface d'univers, il n'apparaît pas clairement une supersymétrie d'espace-temps, autrement dit une symétrie fermions-bosons. Pour l'obtenir, nous allons modifier l'action en introduisant des variables fermioniques. Comme point de départ, nous prendrons l'action précédente dans la jauge du cône de lumière, en remplaçant $\Psi^{\alpha a'}$ par un spineur sur la surface d'univers et d'espace-temps : $S^{aa'}$. X^α a 8 degrés de liberté et $S^{aa'}$ a $2 \cdot 2^{\frac{4+1}{2}} = 64$ composantes complexes.

Considérer un spineur de Majorana implique que l'on ait 64 composantes réelles. La condition de Weyl se traduit par :

$$(1 \pm \gamma_{11})^{ab} S^{a'a} = 0 \quad (\text{IX.11})$$

on obtient alors 32 composantes.

La condition de jauge se traduit par :

$$(\gamma^+)^{ab} S^{a'a} = 0 \quad (\text{IX.12})$$

réduisant à 16 le nombre de degrés de liberté et on arrive à 8 composantes en imposant l'équation de Dirac dans l'espace-temps; on obtient ainsi autant de variables fermioniques que bosoniques.

L'équation (IX.11) nous montre que l'on a deux types de champs S suivant que S^{1a} et S^{2a} sont de même polarisation ou de polarisation opposée (en effet la condition de projection se fait indépendamment de S^{1a} et S^{2a} (IX.11)).

Nous sommes maintenant en mesure de construire l'action :

$$S = \int d^2 \xi \left(-\frac{1}{4\pi\alpha'} \partial_\xi X^{\tilde{m}} \partial^\xi X_{\tilde{m}} + \frac{i}{4\pi} \bar{S} \gamma^- \rho^\xi \partial_\xi S \right) \quad (\text{IX.13})$$

où :

$$\bar{S} = S^+ (\gamma^0) (\rho^0)$$

γ^- provient de la condition de projection (IX.12). (IX.13) est invariant dans les transformations supersymétriques :

$$\begin{aligned} \delta X^{\tilde{m}} &= (\rho^+)^{-1/2} \bar{\epsilon} \gamma^{\tilde{m}} S \\ \delta S &= i (\rho^+)^{-1/2} \gamma_- \gamma_\alpha (\rho^\xi \partial_\xi X^\alpha) \epsilon \end{aligned}$$

$(\rho^+)^{-1/2}$: facteur de normalisation
 $\epsilon^{a'a}$: spineur définissant la transformation (spineur de Majorana Weyl).

5 Equations du mouvement - Quantification.

Les équations du mouvement relatives à x^{\sim} sont analogues aux précédentes :

$$\square x^{\sim} = 0 \quad (\text{IX.14})$$

et donnent un même développement en mode normal et par quantification, les mêmes relations de commutation que précédemment. Les variations relatives à S nous donnent :

$$\rho^{\xi} \partial_{\xi} S = 0$$

ou

$$\begin{cases} (\partial_{\tau} + \partial_{\sigma}) S^{1a} = 0 \\ (\partial_{\tau} - \partial_{\sigma}) S^{2a} = 0 \end{cases} \quad (\text{IX.15})$$

On pose les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} S^{1a}(0, \tau) &= S^{2a}(0, \tau) \\ S^{1a}(\pi, \tau) &= S^{2a}(\pi, \tau) \end{aligned} \quad (\text{IX.16})$$

d'où le développement en mode normal :

$$\begin{aligned} S^{1a} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n^a e^{-in(\tau-\sigma)} \\ S^{2a} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n^a e^{-in(\tau+\sigma)} \end{aligned} \quad (\text{IX.17})$$

seuls les oscillateurs où n est entier apparaissent.

On remarque que la condition (IX.16) impose une même polarisation pour S^{1a} et S^{2a} . Enfin, nous avons les relations de commutation :

$$[S_n^a, \bar{S}_m^b]_+ = \left(\gamma^+ \left(\frac{1 \pm \gamma_{11}}{2} \right) \right)^{ab} \delta_{m,-n} \quad (\text{IX.18})$$

$$\bar{S}_n = \gamma^0 S_n$$

La condition de masse s'exprime toujours de la même façon :

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_{-n}^{\sim} \alpha_{n, \sim} + \frac{n}{2} \bar{S}_{-n} \gamma_- S_n) \quad (\text{IX.19})$$

et on voit que la théorie est sans tachyon.

6 Spectre des états.

Nous allons maintenant établir le spectre des états de la supercorde. L'état fondamental admet :

- 8 états de polarisation dans le secteur bosonique :

$$|\tilde{m}\rangle \quad \left(\langle \tilde{m} | \tilde{n} \rangle = \delta^{\tilde{m}\tilde{n}} \right)$$

- 8 états dans le secteur fermionique $|a\rangle$.

Nous pouvons passer de $|a\rangle$ à $|\tilde{m}\rangle$:

$$\begin{aligned} |a\rangle &= \frac{i}{8} \left(\gamma_{\tilde{m}} S_0 \right)^a |\tilde{m}\rangle \\ |\tilde{m}\rangle &= \frac{1}{8} \left(\tilde{S}_0 \gamma_{\tilde{m}} \gamma_+ \right)^a |a\rangle \end{aligned} \quad (\text{IX.20})$$

Dans (IX.20), nous avons bien entendu la sommation sur les indices. L'état $|a\rangle$ est défini à partir de $|\tilde{m}\rangle$ par (IX.20a).

Tous les états ainsi définis sont non massifs ((IX.19) si $|S_0^a, \alpha' M^2| = 0$). En effet, en partant de $|\tilde{m}\rangle$ non massif, si S_0^a commute avec l'opérateur de masse, alors $|a\rangle$ est non massif. De plus, les 16 états $|\tilde{m}\rangle$ et $|a\rangle$ définissent alors une représentation irréductible des oscillateurs S_0 .

Nous allons, à partir des opérateurs $\alpha_{-1}^{\tilde{m}}$ et S_{-1}^a construire les premiers états excités de la corde.

On peut créer 128 états bosoniques :

$$\begin{aligned} \alpha_{-1}^{\tilde{m}} |\tilde{m}\rangle & \quad 64 \text{ états} \\ S_{-1}^b |a\rangle & \quad 64 \text{ états} \end{aligned} \quad (\text{IX.21})$$

et 128 états fermioniques :

$$\begin{aligned} \alpha_{-1}^{\tilde{m}} |a\rangle & \quad 64 \text{ états} \\ S_{-1}^a |\tilde{m}\rangle & \quad 64 \text{ états} \end{aligned} \quad (\text{IX.22})$$

Le deuxième état excité comporte 1152 bosons et 1152 fermions construits de façon analogue à (IX.21) et (IX.22).

Le premier état excité contient entre autres des particules de spin 2 dans le secteur bosonique et des particules de spin 3/2 dans le fermionique. Les états de chaque niveau d'excitation se décomposent en supermultiplets, et il y a bien entendu égalité de degrés de liberté fermioniques et bosoniques à chaque niveau.

7 Cordes fermées.

Pour une corde fermée, nous avons les conditions de périodicité :

$$X^{\tilde{m}}(0, \tau) = X^{\tilde{m}}(\pi, \tau) \quad (\text{IX.23})$$

La décomposition en mode normal pour X s'effectue en série trigonométrique (I.27). On suppose qu'on a dans le secteur spinoriel :

$$S^{a'a}(0, \tau) = S^{a'a}(\pi, \tau) \quad (\text{IX.24})$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} S^{1a} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n^a e^{-2in(\tau-\sigma)} \\ S^{2a} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{S}_n^a e^{-2in(\tau+\sigma)} \end{aligned} \quad (\text{IX.25})$$

Aux règles de commutation du deuxième chapitre, on rajoute :

$$|S_n^a, \tilde{S}_m^b|_+ = |\alpha_m^{\tilde{a}}, \alpha_n^{\tilde{a}}| = |\alpha_n^{\tilde{a}}, \tilde{S}_m^a| = |\tilde{\alpha}_n^{\tilde{a}}, S_m^a| = 0 \quad (\text{IX.26})$$

La condition de masse devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha'}{4} M^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha_{-n}^{\tilde{a}} \alpha_{n, \tilde{a}} + \frac{n}{2} \bar{S}_{-n} \gamma^- S_n \right) = N \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tilde{\alpha}_{-n}^{\tilde{a}} \tilde{\alpha}_{n, \tilde{a}} + \frac{n}{2} \bar{\tilde{S}}_{-n} \gamma^- \tilde{S}_n \right) = \tilde{N} \end{aligned} \quad (\text{IX.27})$$

Alors que pour les cordes ouvertes on obtient une supersymétrie $N = 1$, pour les cordes fermées la supersymétrie est de type $N = 2$. Cette différence provient du fait que dans le cas des anneaux, on a deux séries d'opérateurs. Nous avons en outre deux théories des cordes fermées suivant que S^a et \tilde{S}^a ont la même polarisation (superstring theory, SST I) ou non. Dans le premier cas, on construit une théorie supersymétrique $N = 1$ en symétrisant les états de la corde et dans le cas où S^a et \tilde{S}^a ont une polarisation inverse, on débouche sur la théorie des supercordes II (SST II). De plus, la théorie SST I permet d'avoir une théorie couplant les cordes ouvertes et fermées, alors que SST II ne peut pas contenir de cordes ouvertes.

Les états des cordes fermées diffèrent suivant que l'on prend SST I ou SST II; mais dans les deux cas un état est défini par l'action simultanée d'opérateurs tildés et non tildés. Nous obtenons 256 états fondamentaux :

$$|\tilde{n}, \tilde{m}\rangle, |\tilde{n}, a\rangle, |a, \tilde{n}\rangle, |a, b\rangle$$

états connectés par les transformations :

$$\begin{aligned} |a, \tilde{m}\rangle &= \frac{i}{8} \left(\gamma_{\tilde{n}} S_0 \right)^a |\tilde{n}, \tilde{m}\rangle \\ |\tilde{n}, a\rangle &= \frac{i}{8} \left(\gamma_{\tilde{m}} \tilde{S}_0 \right)^a |\tilde{n}, \tilde{m}\rangle \end{aligned} \quad (\text{IX.28})$$

SST I ainsi que SST II contiennent dans leurs états fondamentaux le graviton de spin 2 et le gravitino de spin 3/2 ainsi qu'une multitude d'autres particules^(17,18).

Cependant, alors que dans le modèle primitif (Nambu ou R.N.S.) $(\alpha')^{-1/2}$ valait de l'ordre du GeV (ordre de grandeur de la physique hadronique) et représentait la trajectoire de Regge (fig. 2), dans la théorie des supercordes, α' est relié à la tension de la corde $T = (2\pi\alpha')^{-1}$

et $(\alpha')^{-1/2}$ est de l'ordre de la masse de Planck! (10^{19} GeV). Autrement dit, aux basses énergies, les seuls états observables sont les états non massifs. Nous expliquerons l'existence de la matière ($m \neq 0$) lors de l'étude de la brisure de supersymétrie.

Il faut enfin noter que le nouveau formalisme est identique à l'ancien (modèle R.N.S.) : on peut exprimer les opérateurs S en fonction de ceux du modèle R.N.S.

Interaction de supercordes

Dans le chapitre précédent, nous n'avons considéré les supercordes que du point de vue de leurs propriétés d'invariance sous le groupe de Poincaré et sous l'angle des transformations supersymétriques. De ce fait, nous ne nous sommes intéressés qu'aux cordes libres. L'étude des supercordes en interaction est similaire à celle développée dans la première partie. Nous devons définir un propagateur et un "vertex" d'émission fermionique et bosonique.

Jusqu'à présent, nous n'avons introduit qu'un paramètre arbitraire α' . La théorie nécessite un autre paramètre pour l'étude des cordes en interaction : la constante de couplage. On verra plus tard qu'il est nécessaire d'introduire un troisième paramètre, le rayon des dimensions compactifiées.

Dans le cas de SST I, une corde ouverte peut interagir avec elle-même. Il en découle que la constante de couplage κ des cordes fermées est proportionnelle à g^2 (g constante de couplage des cordes ouvertes).

1 Cordes ouvertes.

Nous allons définir des opérateurs décrivant l'émission de fermions et de bosons non massifs à $\sigma = 0$ (le cas $\sigma = \pi$ peut être envisagé grâce au "twist operator"⁽¹⁷⁾).

On rappelle que l'état fondamental de la corde est défini par :

$$\begin{aligned} |\tilde{m}\rangle &= \alpha_{-1}^m |0\rangle && \text{états bosoniques} \\ |a\rangle &= S_{-1}^a |0\rangle && \text{états fermioniques} \end{aligned} \quad (\text{X.1})$$

Nous définissons ensuite deux opérateurs : l'un décrivant l'émission d'un boson non massif $V_B(\xi, k, \tau)$ où ξ^α est la polarisation et l'autre l'émission d'un fermion non massif $V_F(u, k, \tau)$ de fonction d'onde u^α, k étant le 10- moment et τ l'instant d'émission. Les états ainsi émis sont "on shell" :

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \quad (\text{X.2})$$

et de polarisation transverse :

$$\begin{aligned} k^\alpha \xi_\alpha &= 0 \\ \gamma^\alpha k_\alpha u(k) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{X.3})$$

(X.3b) se déduit de l'équation de Dirac.

Pour déterminer l'amplitude de diffusion, nous introduisons le propagateur de la supercorde :

$$\Delta = \frac{1}{2} \frac{1}{L_0 + i\epsilon} \quad (\text{X.4})$$

On peut ensuite exprimer le couplage entre 3 bosons et 3 fermions non massifs⁽¹⁷⁾, en exprimant l'état :

- d'un vecteur non massif :

$$|\xi\rangle = \left(\xi^{\tilde{m}} - \frac{p^{\tilde{m}}}{p^+} \xi^+ \right) |\tilde{m}\rangle \quad (\text{X.5})$$

- d'un spineur non massif :

$$|u\rangle = -2(p^+)^{-1/2} \bar{u}^a |a\rangle \quad (\text{X.6})$$

Les différents états (X.4) et (X.5) sont connectés par des transformations supersymétriques (Q charge spinorielle) :

$$\begin{aligned} |u'\rangle &= \epsilon \bar{Q} |\xi\rangle = \left| \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \xi^\alpha k^\beta \epsilon \right\rangle \\ |\xi'\rangle &= \epsilon \bar{Q} |u\rangle = \left| 2\bar{\epsilon} \left(\gamma^\alpha - \gamma^- \frac{p^\alpha}{p^-} \right) u \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{X.7})$$

De telles transformations peuvent être mises en comparaison avec celles obtenues dans le cas de la théorie de Yang-Mills supersymétrique.

Enfin, nous pouvons exprimer les relations permettant de construire V_F à partir de V_B , par une transformation supersymétrique :

$$\begin{aligned} [\bar{\epsilon} Q, V_B(\xi, k, \tau)] &= V_F \left(\frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \xi^\alpha k^\beta, k, \tau \right) + \partial_\tau \\ [\bar{\epsilon} Q, V_F(u, k, \tau)] &= V_B \left(2\bar{\epsilon} \left(\gamma^\alpha - \frac{k^\alpha}{k^-} \gamma^- \right) u, k, \tau \right) + \partial_\tau \end{aligned} \quad (\text{X.8})$$

Dans les commutateurs (X.8), ∂_τ représente des dérivées par rapport à τ (on peut les ignorer car elles ne contribuent pas au calcul des sections efficaces).

Les relations (X.7) et (X.8) sont strictement similaires, ce qui se comprend aisément car elles représentent la même chose : (X.7) sur un état physique (transformation linéaire) et (X.8) sur un opérateur (commutateur).

2 Emission d'une corde fermée.

Alors que pour les cordes ouvertes l'émission se fait à un bout ($\sigma = 0, \pi$), dans le cas de la corde fermée elle peut se faire pour σ quelconque : une corde fermée peut être émise n'importe où.

Par exemple on peut obtenir la self-interaction d'une corde ouverte*.



Ainsi pour déterminer l'émission d'une supercorde non massive, on introduit

- le propagateur (condition de masse) :

$$\Delta = \frac{1}{4} \frac{1}{L_0 - 2}$$

- les vertex d'émission de bosons et fermions :

$$\begin{aligned} V_B (\xi^{\tilde{m}\tilde{n}}, k, \tau) \\ V_B (\eta^{ab}, k, \tau) \\ V_F (u^{\tilde{m}a}, k, \tau) \\ V_F (u^{a\tilde{m}}, k, \tau) \end{aligned} \quad (X.9)$$

Nous avons 4 possibilités car les états de la corde fermée sont définis en terme de double espace de Fock :

$$\begin{aligned} |\tilde{m}\tilde{n}\rangle \quad \text{et} \quad |ab\rangle \quad \text{pour un boson} \\ |\tilde{m}a\rangle \quad \text{et} \quad |a\tilde{m}\rangle \quad \text{pour un fermion} \end{aligned}$$

$\xi^{\tilde{m}\tilde{n}}$: tenseur d'ordre 2	décrit un boson
η^{ab}	: spineur d'ordre 2	décrit un boson
$u^{\tilde{m}a}$: spineur vecteur	décrit un fermion
$u^{a\tilde{m}}$: spineur vecteur	décrit un fermion

3 Amplitude de diffusion.

Nous sommes en mesure, avec les règles de Feynmann, de déterminer l'amplitude de diffusion (les règles énoncées lors de l'étude des cordes (chap.3) restent valables) :

$$A(1, \dots, N) = \langle 1 | V(2) \Delta \dots \Delta V(N-1) | N \rangle \quad (X.10)$$

Le calcul n'a été fait explicitement que dans le cas où nous avons 4 particules⁽¹⁷⁾.

Il est important de noter que l'amplitude de diffusion est symétrique dans le cas d'une ligne bosonique et antisymétrique dans celui d'une ligne fermionique.

* Uniquement dans le cas de SST I.

4 Supercordes et renormalisation.

En théorie quantique des champs, lorsqu'on considère des particules en self-interaction (à l'ordre le plus bas) :

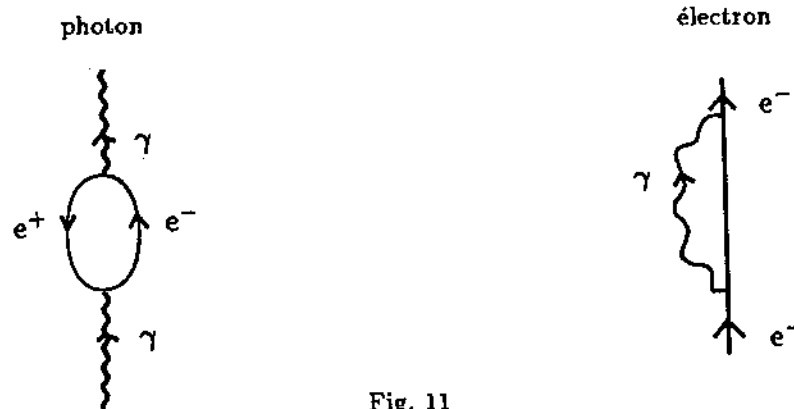


Fig. 11

et que l'on applique les règles de Feynmann, on aboutit à des diagrammes divergents (quantités infinies).

Une théorie est dite renormalisable si on peut introduire ces quantités infinies dans des quantités physiquement observables telles que la masse ou la charge de l'électron par exemple. Un des avantages de la théorie des supercordes (tout comme de la supersymétrie) est que certains infinis sont éliminés d'eux-mêmes; en effet, à la contribution de la particule vient s'ajouter celle de la particule supersymétrique, de telle sorte que la somme des deux contributions est rigoureusement nulle. Ce résultat provient de la règle de Feynmann qui stipule que les boucles fermioniques et bosoniques sont de signes opposés.

Compactification des dimensions spatiales

Théories limites

La théorie des supercordes a été construite de manière cohérente et logique, en partant du Lagrangien postulé par Nambu, puis en appliquant les techniques de supersymétrie. Mais avant tout, nous sommes des physiciens et la beauté du formalisme mathématique ne doit pas nous faire perdre tout sens physique. Quoique la théorie des supercordes soit loin d'être achevée et qu'elle nous réserve probablement encore bien des surprises, il devient nécessaire à cette étape du calcul, d'interpréter les 6 extra-dimensions. Comme nous l'avons déjà dit, les dimensions de l'espace-temps sont liées aux degrés de liberté des systèmes (c'est ce qui a permis de construire, à partir des cordes bosoniques et fermioniques, le modèle R.N.S. à 10 dimensions). Les physiciens ont pensé pouvoir réduire l'espace-temps à 4 dimensions en rajoutant des degrés de liberté au système; cependant, on en est arrivé à la conclusion que seules certaines dimensions critiques permettent une formulation cohérente des supercordes : $D = 2, 10, 26$, en fait $D = 4k + 2^{(19)}$. De plus, dans le cas où $D < 10$, un certain nombre de problèmes apparaissent. Il en ressort donc que la théorie des supercordes se fait dans un espace à 10 dimensions. Il est important de noter que lorsque $D = 10$, la théorie est sans tachyon et sans fantôme.

Pour éliminer les 6 dimensions supplémentaires, nous allons considérer que ces 6 dimensions sont compactifiées sur elles-mêmes; l'espace se met sous la forme :

$$M_{10} = M_4 \times K_6, \quad \text{où} \quad (\text{XI.1})$$

M_4 est une variété de Riemann de dimension 4 et K_6 , une variété différentielle compactifiée sur elle-même. Il faut en outre, pour que la théorie soit acceptable, que les dimensions compactifiées ne soient pas observables. Il est donc nécessaire que K_6 soit "si petit" que l'on ne puisse pas en détecter l'existence - donc l'espace-temps nous apparaît comme quadridimensionnel - dans le domaine des énergies accessibles actuellement (on peut penser que ces dimensions sont du même ordre de grandeur que la dimension de la corde).

1 Fermions chiraux.

La théorie doit permettre l'existence de fermions chiraux. En effet, puisque l'interaction faible ne conserve pas la parité, le neutrino ne peut exister que dans un état de polarisation (levogyre), ce qui impose à l'opérateur de parité (changement de signe des dimensions spatiales) d'être une opération discrète. Ce n'est pas le cas de $SO(2)$ où l'opérateur de parité consiste en une rotation de 180° ; le groupe de rotation spatial doit être obligatoirement du type $SO(2n - 1)$ et la dimension de l'espace-temps paire. On arrive au même résultat en considérant les matrices de Dirac; dans un espace de dimension $D = 2\nu + 1$ ou

2ν , les matrices de Dirac sont des dimensions $2^\nu \times 2^\nu$. On peut alors montrer que γ_{D+1} n'existe que si D est pair (en comptant les covariants de Dirac), ce qui nous permet de définir les fonctions d'onde chirales :

$$\begin{aligned}\Psi_L &= \frac{1}{2} (1 - \gamma_{D+1}) \Psi \\ \Psi_R &= \frac{1}{2} (1 + \gamma_{D+1}) \Psi\end{aligned}\quad (\text{XI.2})$$

ce qui n'est pas le cas dans un espace de dimension impaire. Par compactification, un fermion chiral de M_{10} doit redonner un fermion chiral de M_4 :

$$\begin{aligned}M_D &= M_4 \times K_{(D-4)} \\ \gamma_{D+1} &= \gamma_5 \times \gamma_{D-4+1}\end{aligned}$$

Le signe moins de γ_{D+1} peut être obtenu par un signe moins de γ_5 dans M_4 multiplié par un signe + de $\gamma_{(D-3)}$ dans K_6 ou inversement, ce qui nous montre que (XI.1) est compatible avec l'existence de fermions chiraux.

2 Compactification des dimensions.

Comme nous l'avons dit précédemment, la compactification consiste à décrire M_{10} sous la forme (XI.1); le problème consiste donc à rechercher la "topologie" de K_6 . Il semblerait qu'il faille considérer K_6 comme un orbifold ou une variété de Calabi-Yau. Dans notre étude introductive, nous nous bornerons à choisir K_6 sous la forme d'une sphère. Pour introduire le principe physique de la compactification, donnons nous un exemple : considérons un espace unidimensionnel et à chaque point de l'espace introduisons un petit cercle. Nous obtenons alors un cylindre qui est un espace à deux dimensions dont l'une est compactifiée.

3 Modification des équations du mouvement.

On sait depuis la relativité générale que le tenseur métrique induit la courbure de l'espace-temps et donc la gravitation. Les équations du mouvement dans un espace ayant 6 dimensions compactifiées deviennent alors non linéaires (tout comme les équations d'Einstein) et inextricables.

On peut contourner le problème et l'aborder plus simplement en considérant que K_6 est une hypersphère et en imposant des conditions de périodicité sur les dimensions compactifiées (X^i est donc défini à $2\pi R^i$ près, R^i étant le rayon de compactification); et on peut donc assimiler $g_{\mu\nu}$ à la métrique Minkowskienne et donc prendre $g_{ij} = -\delta_{ij}$. Les équations du mouvement sont donc inchangées et seules les conditions aux limites sont modifiées. Les équations du mouvement demeurent :

$$\square X^m = 0 \quad (\text{XI.3})$$

et pour une coordonnée compactifiée, l'expansion en modes normaux devient, dans le cas d'une corde ouverte :

$$X^m = x^m + 2\alpha' P^m \cdot \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^m \cos n\sigma e^{-in\tau} \quad (\text{XI.4})$$

Nous rappelons que P^m est le moment conjugué de \dot{x}^m , ou plus exactement :

$$P^m = - \int_0^\pi P^{m,\tau}(\sigma, \tau) d\sigma$$

Maintenant, par quantification, on obtient :

$$P^m = \frac{M^m}{R} \quad (\text{XI.5})$$

(Cf. la relation de de Broglie ($p = \frac{\hbar}{\lambda}$, $\lambda = R, \frac{R}{2}, \dots, \frac{R}{n}$.)

Si nous notons c la dimension de K_c ($c = 6$), le spectre d'énergie de la corde devient :

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^c M_i^2 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^m \cdot \alpha_{-n,m} + \frac{n}{2} \bar{S}_{-n} \gamma^- S_n \quad (\text{XI.6})$$

Les états sont donc distinguables par les nombres quantiques M_i .

Dans le cas d'une corde fermée, la corde peut s'enrouler N_i fois autour de la i ème dimension, d'où :

$$X^m = x^m + 2\alpha' P^m \cdot \tau + 2N^m R\sigma + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left[\alpha_n^m e^{-2in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^m e^{-2in(\tau+\sigma)} \right] \quad (\text{XI.7})$$

On a toujours :

$$P^m = \frac{M^m}{R}$$

Les états de la corde deviennent :

$$M^2 = \frac{1}{4\alpha'} \sum_{i=1}^c \left(\frac{\alpha'}{R^2} M_i^2 + \frac{R^2}{\alpha'} N_i^2 \right) + \frac{1}{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_{-n}^m \cdot \alpha_{n,m} + \tilde{\alpha}_{-n}^m \cdot \tilde{\alpha}_{n,m} + \frac{n}{2} \bar{S}_{-n} \gamma^- S_n + \frac{n}{2} \tilde{S}_{-n} \gamma^- \tilde{S}_n \right) \quad (\text{XI.8})$$

Les états accessibles sont étiquetés par N_i et M_i . Il est important de noter que par compactification, les états 10-dimensionnels se décomposent en multiplets : ainsi un 10-vecteur se décompose en un 4-vecteur et 6 scalaires. De même, un spineur de Majorana-Weyl se décompose en 4 spineurs à 4 composantes. Enfin, dans les calculs de section efficace, on peut montrer que les résultats ne dépendent pas de $R^{(17)}$.

4 Théories limites.

Toutes les théories qui se proposent de généraliser des concepts ou d'autres théories déjà établies doivent nous redonner, dans certaines limites, des résultats connus. Ainsi, par exemple, dans la limite des faibles vitesses, la relativité restreinte redonne la mécanique Newtonienne et dans la limite des champs faibles, la relativité générale est équivalente à la théorie de la gravitation universelle. La mécanique quantique quant à elle, dans la limite où l'"action" - produit de deux variables conjuguées - devient grande devant \hbar , conduit à la mécanique classique (les commutateurs deviennent équivalents aux crochets de Poisson). Qu'en est-il des supercordes?

Dans la théorie des supercordes, 2 paramètres sont arbitraires :

- α' relié à la tension de la corde.
- R rayon des dimensions compactifiées.

En fait la constante de couplage g n'est pas arbitraire et est imposée par la nature des interactions.

1) R .

Le cas de $R \rightarrow +\infty$ ne nous intéresse pas, il peut s'interpréter comme une décompactification ; l'on retombe alors sur une théorie 10-dimensionnelle. Le cas $R \rightarrow 0$ quant à lui, devrait, si la théorie est cohérente, nous redonner une théorie 4-dimensionnelle.

2) α' .

On sait que la tension de la corde est donnée par :

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad (\text{XI.9})$$

Dans la limite où $\alpha' \rightarrow 0$ ($T \rightarrow +\infty$), le développement de $X^{\tilde{m}}$ se réduit à $x^{\tilde{m}}$, vérifiant l'équation $\tilde{x}^{\tilde{m}} = 0$, qui n'est rien d'autre que l'équation d'une particule ponctuelle libre. Il en découle que dans la limite $\alpha' \rightarrow 0$, on doit retrouver la théorie des champs. Nous pouvons avancer une explication plus imagée ; dans le cas où la tension de la corde devient infinie, les deux extrémités de la corde sont "confondues", ce qui peut s'apparenter à une particule ponctuelle. Le cas $\alpha' \rightarrow +\infty$ n'a pas de sens physique car la masse des états excités est proportionnelle à α' et de telles particules auraient des énergies infinies.

Nous allons donc étudier les théories limites dans le cas où $\alpha' \rightarrow 0$ et $R \rightarrow 0$, ou plus exactement, puisque quand $R \rightarrow 0$ les états massifs deviennent de masse infinie (XI.6 et XI.8), nous imposerons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha'}{R} \rightarrow 0 \\ R \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad (\text{XI.10})$$

Les théories limites s'obtiennent en étudiant le comportement de la matrice $S^{(20)}$ et on peut montrer que dans la limite (XI.10) :

SST I redonne, dans le cas des cordes ouvertes, la théorie de Yang-Mills $N = 4$, $D = 4$ et dans le cas des cordes fermées, la supergravité $N = 4$ et $D = 4$ (en fait, la supergravité est couplée avec la théorie de Yang-Mills).

SST II donne alors, dans la même limite, la supergravité $N = 8$, $D = 4$.

De plus, il faut noter que SST II est finie alors que SST I est renormalisable (étude des différents éléments du développement en série perturbative de S).

Cependant, la théorie $N = 4$ de Yang-Mills soulève deux problèmes :

- (i) on ne peut pas incorporer la matière à une telle théorie; les champs, qu'ils soient scalaires, vectoriels ou spinoriels, sont associés à la théorie de Yang-Mills.
- (ii) on sait en outre que suivant les états de polarisation, les fermions sont dans deux états différents : $\begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L$ pour l'état gauche et l_R pour l'état droit (violation de parité), alors que la théorie est essentiellement vectorielle et ne rend donc pas compte de cette dissymétrie chirale.

Le problème ne semble pas insoluble et certains fondent leurs espoirs sur le fait qu'une théorie vectorielle 10-dimensionnelle peut redonner une théorie de saveur chirale en dimension 4 en supposant que les champs vérifient certaines symétries plus étroites. D'aucuns pensent que si l'on considère un groupe de symétrie de Yang-Mills plus large (E_8), on peut surmonter le premier problème. Mais bien qu'un tel groupe rende la théorie acceptable, il serait bon qu'en plus des prédictions précédentes, l'on puisse décrire le groupe des symétries d'espace-temps.

Dans le cas SST II, puisque l'on ne décrit que des cordes fermées, le problème consiste à trouver un moyen pour incorporer la théorie de Yang-Mills. Pour ce faire, il y a plusieurs alternatives :

Le premier consiste à vouloir la supersymétrie $N = 8$, $SO(8)$ locale : on introduit alors des bosons de jauge satisfaisant la symétrie $SO(8)$ mais un tel groupe n'est pas assez large pour rendre compte du modèle standard $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$.

La seconde possibilité est de partir du groupe $SO(8)$; on peut montrer que bien qu'un tel groupe ne permette pas de décrire directement les bosons de jauge du modèle standard, on peut se ramener au groupe $SU(5)$ du modèle grand unifié le plus simple. Mais un tel modèle prévoit une durée de vie du proton de 10^{32} ans, prédiction non confirmée par l'expérience. Il semble donc qu'il faille abandonner le groupe $SU(5)$ en faveur d'autres groupes unifiés ($SO(10)$ ou E_6). Il existe encore d'autres alternatives dont nous ne parlerons pas⁽¹⁷⁾.

Il est important de remarquer que la théorie fait apparaître la longueur de la corde et les dimensions compactifiées, qui sont de l'ordre de grandeur de la dimension de Planck (10^{-35} m). 17 ordres de grandeur séparent cette physique de la physique actuelle! A-t-on enfin la théorie quantique de la gravitation tant attendue? Va-t-on pouvoir décrire les quatre forces fondamentales comme une seule force unifiée?

Pour répondre à ces questions fondamentales, nous devons faire un choix entre SST I et SST II. Il semble que plusieurs arguments⁽²¹⁾ sont en faveur de SST II où l'on ne prend en compte que des cordes fermées. Il y est en outre énoncé la possibilité que les champs fondamentaux ne soient plus, ni les quarks, ni les leptons, ni les quanta du champ de Yang-Mills qui deviennent alors composites. Mentionnons encore que le choix ouvert de la méthode de compactification laisse à la théorie des possibilités qui jusqu'à présent, n'ont pas été explorées.

Cordes hétérotiques

Partant de la théorie des cordes formulée par Nambu, nous en sommes arrivés aux supercordes. Nous avons vu qu'il y avait deux théories des supercordes : SST I qui rendait compte des cordes ouvertes et fermées et SST II qui ne considérait que des cordes fermées. Le but de telles théories était d'obtenir une description unifiée et cohérente de la physique des particules et des forces fondamentales. Une description cohérente doit tenir compte des deux piliers de la physique moderne, la relativité générale et la mécanique quantique. Une telle description semble permise par compactification de 6 dimensions spatiales. De plus, la théorie des supercordes prévoit l'existence de nouveaux phénomènes qui, si la théorie s'avère juste, doivent être observés expérimentalement.

De SST I et II, il semble que le modèle SST II s'avère plus adapté pour une description des forces unifiées. Or pour éliminer certaines anomalies (anomalies chirales), le groupe de jauge de la théorie de Yang-Mills doit être $SO(32)$ ou $E_8 \otimes E_8$. Cependant la théorie des supercordes ne peut incorporer de tels groupes (elle ne peut inclure que $SO(N)$); c'est ce qui a amené D. Gross⁽²²⁾ à introduire la notion de cordes hétérotiques.

Alors que dans la théorie des supercordes, les nombres quantiques relatifs aux forces de Yang-Mills sont fixés au bout de la corde (seules les cordes ouvertes en possèdent), les cordes hétérotiques quant à elles sont des cordes fermées, les charges de Yang-Mills étant issues d'un groupe de symétrie interne. Kaluza est le premier à avoir rajouté des dimensions à l'espace-temps pour décrire des symétries internes (il avait obtenu une théorie unifiant la gravitation et la force électromagnétique dans un espace de dimension 5).

La corde existe alors sous deux états de polarisation, suivant que les ondes se déplacent dans le sens rétrograde (on obtient une théorie 10-dimensionnelle des supercordes fermées) ou dans le sens direct (on obtient une théorie des cordes bosoniques 26-dimensionnelle).

C'est alors par compactification des 16 dimensions internes que l'on produit le groupe de symétrie de Yang-Mills $E_8 \otimes E_8$ ou $SO(32)$ et qui va générer par brisure de symétrie (transition de phase) les 3 champs de jauge de la théorie des champs*. Il est important de remarquer que les 16 dimensions ne sont que des dimensions internes, représentant des symétries cachées de la théorie; ce ne sont en aucun cas des dimensions d'espace-temps.

Enfin, même lorsque l'on étudie l'interaction de telles cordes, il ne peut y avoir interférence entre les deux modes.

1 Construction du modèle.

Nous définissons une théorie chirale avec deux secteurs de polarisation comme suit :

- le secteur gauche se comporte comme une théorie des supercordes à 10 dimensions.
- le secteur droit comme une théorie des cordes bosoniques à 26 dimensions.

* Il apparaît en outre un nouveau courant neutre véhiculé par le boson Z' .

Les résultats du chapitre précédent nous permettent de nous placer dans la jauge du cône de lumière. Les degrés de liberté du secteur gauche sont alors :

$$\begin{aligned} X^{\tilde{m}}(\tau - \sigma) & \quad \tilde{m} = 1, \dots, 8 \\ S^a(\tau - \sigma) & \quad \text{spineur de Majorana-Weyl (8 états)} \end{aligned}$$

et ceux du secteur droit :

$$\begin{aligned} X^{\tilde{m}}(\tau + \sigma) & \quad \tilde{m} = 1, \dots, 8 \\ X^I(\tau + \sigma) & \quad I = 1, \dots, 16 \end{aligned}$$

Les 8 états transverses $X^{\tilde{m}}$ et les coordonnées X^\pm décrivent la position de la corde dans un espace à 10 dimensions.

En vue de construire notre action, nous devons remarquer que :

$$S = S(\tau - \sigma) \text{ donc } S^{2a} = S^{2a}(\tau + \sigma) = 0$$

et donc :

$$\rho^\xi \partial_\xi S = 0 \text{ devient } (\partial_\tau + \partial_\sigma)S = 0$$

S n'apparaît donc pas explicitement comme un spineur sur la surface d'univers (spineur gaucher). L'action est alors :

$$\begin{aligned} S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \left(\partial_\xi X^{\tilde{m}} \partial^\xi X_{\tilde{m}} + \partial_\xi X^I \partial^\xi X_I \right. \\ \left. + i\bar{S}\gamma^-(\partial_\tau + \partial_\sigma)S \right) \end{aligned} \quad (\text{XII.1})$$

La contrainte $0 = X^I = X^I(\sigma - \tau)$ peut s'écrire :

$$\phi^I = (\partial_\tau - \partial_\sigma)X^I = 0 \quad (\text{XII.2})$$

et suivant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on peut inclure un terme supplémentaire dans le Lagrangien. Nous imposons comme précédemment à S d'être un spineur de Majorana-Weyl.

$$\gamma^+ S = \left(\frac{1 + \gamma_{11}}{2} \right) S = 0 \quad (\text{XII.3})$$

Nous pouvons donner immédiatement les transformations supersymétriques :

$$\begin{aligned} \delta X^{\tilde{m}} &= \frac{1}{\sqrt{p^+}} \bar{\epsilon} \gamma^{\tilde{m}} S \\ \delta S &= \frac{i}{\sqrt{p^+}} \gamma_- \gamma_\alpha (\partial_\tau - \partial_\sigma) X^\alpha \epsilon \end{aligned} \quad (\text{XII.4})$$

Comme S , ε est un spineur gauche sur la surface d'univers. On peut noter la similitude avec les équations de Weyl pour le neutrino ν et l'antineutrino $\bar{\nu}$:

$$\begin{aligned} (-\partial_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma})\psi_R &= 0 \\ (\partial_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma})\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (\text{XII.5})$$

Les développements en mode normaux :

$$\begin{aligned} X^m(\tau - \sigma) &= \frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}P^m(\tau - \sigma) + \frac{1}{2}i \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^m}{n} e^{-2in(\tau - \sigma)} \\ X^m(\tau + \sigma) &= \frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}P^m(\tau + \sigma) + \frac{1}{2}i \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^m}{n} e^{-2in(\tau + \sigma)} \\ S^a(\tau - \sigma) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n^a e^{-2in(\tau - \sigma)} \end{aligned} \quad (\text{XII.6})$$

Il n'y a pas de développement en \tilde{S}_n^a .

Les relations de commutation sont analogues à celles proposées précédemment. Dans le cas du secteur droit, il faut tenir compte de la contrainte (XII.2). On peut montrer que⁽²²⁾ :

$$X^I(\sigma, \tau) = x^I + P^I(\sigma + \tau) + \frac{1}{2}i \sum \tilde{\alpha}_n^I e^{-2in(\tau + \sigma)} \quad (\text{XII.7})$$

où $p^I = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\partial X^I}{\partial \tau}$

et que l'on a les relations de commutation :

$$\begin{aligned} [\tilde{\alpha}_n^I, \tilde{\alpha}_m^J] &= n\delta_{n,-m}\delta^{IJ} \\ [X^I(\sigma, \tau), P^J(\sigma', \tau)] &= \delta(\sigma - \sigma')\delta^{IJ} \end{aligned} \quad (\text{XII.8})$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ provient de la contrainte (XII.2) qui impose que $2P^I$ sont les générateurs des translations dans l'espace interne. L'opérateur de masse devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha'}{4}M^2 &= N + (\tilde{N} - 1) + \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{16} (P^I)^2 \\ N &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_{-n}^m \cdot \alpha_{n,m} + \frac{1}{2}n\bar{S}_{-n}\gamma^- S_n) \\ \tilde{N} &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\tilde{\alpha}_{-n}^m \tilde{\alpha}_{n,m} - \frac{1}{2}n\bar{\tilde{S}}_{-n}\gamma^- \tilde{S}_n) \end{aligned} \quad (\text{XII.9})$$

2 Compactification des dimensions internes.

Le premier à avoir introduit les espaces fibrés en physique pour décrire des symétries internes est Kaluza. Il considérait un espace de dimension 5 : la cinquième dimension était une dimension interne soumise au groupe de symétrie $U(1)$ de l'électromagnétisme alors que les 4 dimensions restantes étaient les dimensions de l'espace-temps de Riemann, et son groupe de symétrie (représentant la covariance des équations) reproduisait les équations d'Einstein de la gravitation. Il avait donc obtenu une théorie où la gravité et l'électromagnétisme étaient unifiés.

Nous allons procéder de façon analogue pour les cordes hétérotiques, les 16 dimensions internes (que nous allons compactifier) représentant le groupe de symétrie interne T qui induit les bosons de jauge de Yang-Mills, alors que l'espace 10-dimensionnel, invariant suivant les transformations de Poincaré, va engendrer la gravitation (ou plus exactement la supergravité). Il apparaît que la théorie des cordes hétérotiques est une théorie ambitieuse qui se propose d'unifier de façon simple les forces de la nature et certains n'hésitent pas à la qualifier de "theory of everything".

Pour les mêmes raisons que précédemment, les 16 dimensions X^J ne doivent pas être courbes (non linéarité des équations), nous serons alors amenés à considérer que l'espace compact T forme une 16-sphère.

Il apparaît donc clairement 16 bosons de jauge (du groupe $[U(1)]^{16}$) liés à la compactification de T ; ce sont les bosons de Kaluza-Klein. Il apparaît en outre d'autres bosons, les solitons, liés à l'enroulement suivant les dimensions compactifiées (résultat déjà obtenus dans le chapitre précédent).

En vue de la compactification, nous devons définir un réseau Γ (chaque X^J est défini à $2\pi R^J$ près) et son réseau réciproque Γ^* . Se donner $\Gamma(\Gamma^*)$ revient à se donner le pas du réseau avec la relation d'orthogonalité :

$$\sum_{J=1}^{16} e_i^J e_j^{*J} = \delta_{ij} \quad (\text{XII.10})$$

Ce qui nous permet d'obtenir⁽²²⁾ :

$$X^J(\sigma, \tau) = x^J + P^J \cdot \tau + 2L^J \sigma + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left(\tilde{\alpha}_n^J e^{-2in(\sigma+\tau)} \right)$$

$$P^J = \sqrt{2} \sum_{i=1}^{16} \frac{m_i}{R_i} e_i^{*J}$$

$$L^J = \sqrt{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{16} R_i n_i e_i^J \quad (\text{XII.11})$$

Les états physiques sont tels que :

$$N = \tilde{N} + \sum_{I=1}^{16} p^I M^I = \tilde{N} + \sum_i n_i m_i$$

Les états de la corde sont étiquetés par L_I (enroulement) que décrivent les solitons.

3 Spectre des états.

Le spectre des états est obtenu par le produit direct des états R et L :

$$|\text{état} = | >_R \otimes | >_L \quad (\text{XII.12})$$

Les états du secteur fermionique sont annihilés par $\alpha_n^{\tilde{m}}$, S_n^a et N et ceux du secteur bosonique par $\tilde{\alpha}_n^I$, $\tilde{\alpha}_n^{\tilde{m}}$, P^I , \tilde{N} . Le fondamental de la corde hétérotique est défini par :

$$(|a >_R \text{ ou } |^{\tilde{m}} >_R) \otimes (\tilde{\alpha}_{-1}^{\tilde{m}}|0 >_L \text{ ou } (\tilde{\alpha}_{-1}^I|0 >_L \text{ ou } |P^I >_L)$$

- ($|^{\tilde{m}} >_R$ ou $|a >_R$) $\otimes \tilde{\alpha}_{-1}^{\tilde{m}}|0 >_L$ supermultiplet de la supergravité ($N = 1$, $D = 10$).

- ($|^{\tilde{m}} >_R$ ou $|a >_R$) $\otimes \tilde{\alpha}_{-1}^I|0 >_L$ ou $|P^I >_L$ supermultiplet de Yang-Mills ($N = 1$, $D = 10$)

On peut comme précédemment créer des états excités dont le nombre croît très rapidement (18883584 au premier).

4 Représentation fermionique.

Nous avons décrit les symétries internes (responsables des forces de Yang-Mills) à l'aide de variables bosoniques (X^I). Il existe une représentation équivalente qui consiste à introduire des variables fermioniques chirales*, vérifiant une algèbre de Grassmann. Comme dans les cordes munies de spin (R.N.S.), on introduit une variable spinorielle ψ^a de Majorana-Weyl et gauchère.

L'action s'écrit alors :

$$S = - \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \{ \partial_\xi X^{\tilde{m}} \partial^\xi X_{\tilde{m}} + i\bar{S}\gamma^-(\partial\sigma + \partial\tau)S + \psi_a(\partial\tau - \partial\sigma)\psi^a \} \quad (\text{XII.13})$$

$\psi^a = 2^8$ composantes. La condition de Majorana-Weyl ramène à 32 composantes : c'est donc une représentation de $SO(32)$.

L'équation du mouvement pour ψ est :

$$(\partial\sigma - \partial\tau)\psi^a = 0 \quad (\text{XII.14})$$

qui s'intègre aisément :

$$\psi^a(\sigma + \tau) = \sum_{n \in N_c} \psi_n^a e^{-2in(\sigma + \tau)} \quad (\text{XII.15})$$

Comme dans la première partie, nous avons deux choix de conditions aux limites (périodicité ou antipériodicité). Le secteur de Ramond (périodicité) décrit alors les bosons et celui

* ceci résulte du choix de la représentation du groupe de symétrie.

de Neveu-Schwarz les fermions.

Dans le secteur gauche nous avons en outre X^m et S^a .

$$\begin{aligned}\tilde{N} &= \tilde{N}_B + \tilde{N}_F \\ \tilde{N}_F &= \sum_{n>0} n \psi_{-n}^a \psi_n^a - C_{A,P} \\ C_{A,P} &= 1, -1\end{aligned}\tag{XII.16}$$

ce qui nous permet de déduire la condition de masse. On pourrait rechercher les supercharges connectant les deux secteurs.

Enfin, en remarquant que $SO(32)$ n'est pas irréductible, on montre que la représentation irréductible de T engendre les bosons de jauge et leurs partenaires supersymétriques, les jauginos⁽²²⁾. La théorie des cordes hétérotiques, que ce soit dans la représentation bosonique ou fermionique, est formulée dans un espace à 10 dimensions d'espace-temps. Nous devons donc encore opérer une réduction dimensionnelle analogue à celle développée dans le chapitre précédent.

La compactification du groupe de symétrie interne T a conduit aux 16 bosons de jauge de Kaluza-Klein et à 480 solitons ("enroulement" de la corde suivant les dimensions internes).

La théorie des cordes hétérotiques est issue d'états droitiers et gauchers séparément. On pourrait construire une théorie des supercordes $D = 2$ (cordes fermioniques), dont le secteur droit pourrait se combiner avec le gauche. Dans ce cas là, il faudrait compactifier 24 dimensions.

Pour conclure, nous pouvons dire qu'une telle théorie introduit de façon simple une vision unifiée des forces fondamentales; elle contient en effet les supermultiplets de la supergravité et de la théorie de Yang-Mills ($D = 10$, $N = 1$). Elle est enfin sans tachyon et sans fantôme. C'est donc un candidat intéressant pour l'unification de la matière et de la gravitation.

Conclusion

Nous avons tenté, tout au long de ce travail, de montrer comment, à partir de la corde de Nambu, on débouche sur la supercorde puis sur la corde hétérotique. En effet, c'est d'une part en généralisant certains concepts, et d'autre part en voulant rendre la théorie plus élaborée que progressivement nous avons obtenu les supercordes puis les cordes hétérotiques. Ces deux théories sont cohérentes et de plus elles sont sans fantôme et sans tachyon. Avons-nous avec ces modèles, la théorie achevée ou bien y aura-t-il d'autres sophistications?

Nous n'avons pas, dans le cadre de ce mémoire, étudié plus en détail la théorie des supercordes. Nous avons laissé de côté bien des choses déjà solidement établies. Nous aurions pu nous intéresser de plus près aux interactions des supercordes, ou encore développer un peu plus le mécanisme d'unification des forces fondamentales. Il eut été aussi intéressant de nous attacher plus finement au comportement de la gravitation. On aurait pu également étudier certaines des nouvelles prédictions telles que les dilatons, les axions... Par exemple, un point que nous n'avons pas mentionné est la notion de la matière de l'ombre : lorsque l'on brise le groupe de symétrie $E_8 \otimes E_8$ tout en conservant la supersymétrie, il apparaît un groupe de jauge E_8 , représentant les particules ne subissant pas les forces de Yang-Mills, mais sensibles à la gravitation. Cette matière, dite matière de l'ombre, pourrait selon certains auteurs rendre compte du problème de la masse manquante de l'univers.

Mais revenons à la théorie des supercordes que nous avons exposée dans ce travail. Est-elle condamnée d'avance parce que trop sophistiquée ou bien est-elle promise à un brillant avenir? Avant de trancher, d'autres notions vont probablement apparaître et notre vision de l'espace et du temps en sera certainement modifiée. Comme exemple, on peut signaler que les supercordes peuvent être formulées dans l'espace de configuration de la corde. On définit alors un champ, le champ de la corde et celle-ci apparaît comme une perturbation de cet espace de configuration, tout comme en relativité générale où le graviton apparaît comme une modification de la courbure de l'espace de Riemann. On obtient donc une vision géométrique de la théorie. On formule alors la théorie des cordes dans un espace à deux dimensions, seule la surface d'univers nous intéresse. Ce nouvel espace pourra peut-être nous aider à comprendre le concept de vide, qui apparaît de plus en plus compliqué.

Bien entendu, l'épée de Damoclès est suspendue au-dessus de la théorie des supercordes. A l'instar de toutes les autres théories, elle est soumise à la pression de l'expérimentation. En effet, les prédictions des supercordes devront, directement ou indirectement, être mises en évidence : partenaires supersymétriques, axions, dilatons, dimensions compactifiées, etc...

Cependant, une question reste en suspens : nous avons dit que seuls, dans la limite des basses énergies, les états non massifs contribuaient aux particules observables car les premiers états excités correspondent à des particules dont la masse est de l'ordre de celle de Planck (10^{-8} kg). Pour rendre compte de la masse des particules observables, il faut

faire appel au mécanisme de brisure de symétrie. C'est un mécanisme fondamental qui permet de passer d'un groupe de symétrie donnée à un groupe de symétrie plus réduite. On rencontre le premier mécanisme lorsque l'on rajoute au groupe de symétrie des termes la brisant. Un exemple classique est fourni par le système proton-neutron. En l'absence d'interactions électromagnétiques, ces particules ont la même masse et font partie du même doublet d'isospin ($SU(2)$). L'interaction électromagnétique crée un excès de masse $\delta m < 0$ au proton et la symétrie est légèrement brisée.

Le deuxième type de brisure de symétrie apparaît quand le système est invariant sous un groupe de symétrie, alors que l'état vide $|0\rangle$ ne l'est pas; on parle alors de brisure spontanée de symétrie et on débouche sur la notion de boson de Goldstone ou de boson de Higgs. C'est ainsi par exemple que l'on brise la symétrie $SU(2) \otimes U(1)$ électrofaible en interaction faible et électromagnétique. Il est vraisemblable de penser que de tels mécanismes pourraient être responsables de la brisure de supersymétrie.

Ce type de brisure qui va engendrer certains états massifs de la corde et son extension à la supersymétrie conduit à un "supermécanisme de Higgs" dans lequel les partenaires supersymétriques acquièrent leur masse par absorption d'un goldstino (partenaire supersymétrique du boson de Goldstone). Leptons et quarks, quant à eux, deviennent massifs par brisure de la symétrie électrofaible.

Remarquons que, lors de la brisure de la supersymétrie apparaissent des états scalaires massifs. Ne pourrait-on pas identifier ces bosons aux bosons de Higgs?

Toute cette théorie dont nous venons de voir certains aspects est une théorie sophistiquée et d'une certaine manière vulnérable car faisant appel à des concepts et des notions peu ordinaires (la compactification par exemple). C'est pourquoi elle est rejetée en bloc par certains physiciens qui n'admettent pas des prédictions qui sont par trop éloignées de notre conception des choses, remettant en question des notions qui semblaient jusque là bien établies. Mais est-il besoin de rappeler que tous les progrès décisifs de la science ont été consécutifs à des ruptures, et l'histoire des sciences abonde d'exemples en ce sens.

Une théorie est en quelque sorte la sublimation de notre conception de l'ordre naturel. Mais par ses conséquences vérifiées, celle-ci influe en retour sur la manière que nous avons de percevoir le monde sensible. La théorie des supercordes, dans ce domaine, n'échappe pas à la règle.

Ce n'est que lorsque se fera la confirmation expérimentale que cette théorie accèdera à la dimension historique. Sinon,

Annexe 1

Le propos de cette annexe est de rappeler succinctement les notions utilisées tout au long de ce travail. Nous nous intéresserons au calcul tensoriel, spinoriel, aux théories de jauge, au formalisme tétraédrique et à la géométrie Riemannienne. Nous utiliserons abondamment la notation d'Einstein qui consiste en la sommation sur les indices répétés, ainsi :

$$A_i A^i = \sum_{i=1}^n A_i A^i$$

I. Calcul tensoriel⁽²³⁾.

Le fait de vouloir une théorie covariante fait que les vecteurs, ou plus généralement, les tenseurs, sont adaptés à la description des lois physiques. Un tenseur se définit par ses lois de transformation. On appelle scalaire un être mathématique dont la valeur ne dépend pas du système de coordonnées, le tout étant défini par rapport à un espace vectoriel E .

1. Vecteurs - Covecteurs.

Un tenseur quelconque se construit à partir des vecteurs et des covecteurs. Un vecteur est un élément de l'espace vectoriel E (ou plus précisément du bidual E^{**}) et un covecteur appartient au dual E^* .

Soit a_i^j la matrice de passage d'une base e_i de E à une autre ε_i . Notons b_j^i la matrice inverse (on suppose que les transformations sont inversibles).

Soit un vecteur x de composante x^i (resp. x'^i) selon la base e_i (resp. ε_i) :

$$\begin{aligned} x &= x^i e_i \\ &= x'^j \varepsilon_j \end{aligned} \quad \varepsilon_j = a_j^i e_i$$

d'où :

$$x'^i = b_j^i x^j \tag{A1.1}$$

Pour avoir la loi de transformation d'un covecteur f (application linéaire de E dans \mathbb{R}), on utilise l'invariance de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f &= f_i e^i \\ &= f'_i \varepsilon^i \quad e^i, \varepsilon^i \text{ bases duales de } e_i, \varepsilon_i^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f_i x^i = f'_j x'^j \\ f'_j &= a_i^j f_i \end{aligned} \tag{A1.2}$$

2 Tenseurs.

Un tenseur (p, q) , p fois covariant, q fois contravariant, possède la loi de transformation :

$$T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q} b_{k_1}^{i_1} \dots b_{k_p}^{i_p} a_{j_1}^{l_1} \dots a_{j_q}^{l_q} \quad (\text{A1.3})$$

3 Base locale.

En physique, nous travaillons avec des champs de tenseurs (définis en chaque point M). On définit la base locale (relative au système de coordonnées) par :

$$e_i = \frac{\partial M}{\partial x^i} = \partial_i M \quad (\text{A1.4})$$

D'où les lois de transformation :

$$\begin{aligned} \text{vecteur } x'^i &= \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} x^j \\ \text{covecteur } y'_i &= \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} y_j \\ \text{tenseur } (p, q) \ T_{j_1 \dots}^{i_1 \dots} &= \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial x^{l_1}}{\partial x'^{j_1}} T_{l_1 \dots}^{k_1 \dots} \end{aligned} \quad (\text{A1.1}' - 3')$$

4 Métrique.

Si nous munissons E d'une métrique g de composantes g_{ij} , nous obtenons un espace vectoriel euclidien (muni d'un produit scalaire); une conséquence immédiate est que l'on crée un isomorphisme entre vecteurs et covecteurs (on peut remonter ou descendre les indices).

$$A^i = g^{ij} A_j, \quad g^{ij} \text{ est la métrique inverse.} \quad (\text{A1.5})$$

Pour une présentation plus moderne, on peut consulter (2,15).

II. Calcul spinoriel⁽¹²⁾.

Il existe une classe plus large de grandeur que les tenseurs : ce sont les spineurs. Ils apparaissent naturellement en théorie des champs pour la description des particules de spin demi-entier. Nous allons généraliser la notion de spineur pour un espace de dimension quelconque ($2\nu + 1$ ou 2ν).

la base duale est parfois notée $e^i = e_i^$.

1 Spineur de $E_{2\nu+1}, E_{2\nu}$.

Du point de vue mathématique, un spineur représente un ν -plan isotrope (dont la norme est nulle). Les spineurs se construisent alors par récurrence, en partant de la forme quadratique :

$$F = (x^0)^2 + x^1 x^{1'} + \dots + x^\nu x^{\nu'} \quad (\text{A1.6})$$

et définissent les 2^ν équations du ν -plan. Un spineur a donc 2^ν composantes, ainsi à chaque étape de la récurrence, on rajoute un indice, de façon à ce que : $\xi_{i_1 \dots i_p}$, soit antisymétrique en $i_1 \dots i_p$:

$$\xi_a = (\xi_0, \xi_i, \xi_{ij} \dots \xi_{i_1 \dots i_p}) \quad \text{définit un spineur}$$

Les relations de récurrence définissant ξ sont :

- pour p pair :

$$\xi_0 \xi_{i_1 \dots i_p} = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} \xi_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_{p-1}} \xi_{i_k i_p}$$

- pour p impair :

$$\xi_0 \xi_{i_1 \dots i_p} = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \xi_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_p} \xi_{i_k} \quad (\text{A1.7})$$

Nous avons en outre les 2^ν équations du ν -plan :

$$0 = \eta_{i_1 \dots i_p} = \sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} \xi_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_p} x^{i_k} + \sum_{m=1}^{\nu} \xi_{i_1 \dots i_{p+m}} x^m + (-1)^p \xi_{i_1 \dots i_p} x^0 \quad (\text{A1.8})$$

2 Matrice associée à un vecteur.

La relation linéaire (A1.8) peut se mettre sous forme matricielle :

$$\eta = X \xi = 0 \quad (\text{A1.9})$$

$$\text{où } X = x^0 H_0 + x^i H_i + x^{i'} H_{i'} \quad (\text{A1.10})$$

permet de définir les matrices associées aux vecteurs. Si on met (A1.1) sous la forme :

$$F = (x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^{2\nu+1})^2 \quad \text{espace euclidien}$$

ou bien $F = (x^0)^2 + (x^\nu)^2 - (x^{\nu+1})^2 - \dots - (x^{2\nu+1})^2 \quad \text{espace pseudo-euclidien}$

on peut réexprimer les matrices H . Ainsi, dans un espace $(+, + \dots +)$ ou $(+, \dots, +, -, \dots, -)$, on obtient les matrices de Dirac⁽¹²⁾.

$$\begin{aligned}
 X_{i_1 \dots i_p i_{p+1}}^{i_1 \dots i_p} &= x^{i_{p+1}} \\
 X_{i_1 \dots i_p}^{i_1 \dots i_p} &= (-1)^P x^0 \\
 X_{i_1 \dots i_p i_{p+1}}^{i_1 \dots i_p} &= x^{i_{p+1}}
 \end{aligned}
 \tag{A1.11}$$

qui sont les seuls éléments non nuls de X .

Nous pouvons montrer à partir de (A1.11) le théorème :

$$X^2 = \|x\|^2 \cdot I \tag{A1.12}$$

et les matrices H permettent de construire la métrique C dans l'espace des spineurs :

$$C = (H_1 - H_{1'}) \cdots (H_\nu - H_{\nu'}) \tag{A1.13}$$

Remarquons que dans un espace Minkowskien, (A1.12) nous montre que les matrices γ satisfont l'algèbre de Clifford :

$$[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]_+ = 2\eta^{\alpha\beta} \cdot I \tag{A1.12'}$$

Si l'on veut construire les spineurs $E_{2\nu}$, il suffit de prendre $x^0 = 0$ dans (A1.6), et on obtient alors deux types de semi-spineurs ou spineurs de Weyl suivant qu'ils ont un nombre pair ou impair d'indices⁽¹²⁾. On ne peut définir l'analogue de γ_5 que dans $E_{2\nu}$:

$$\begin{aligned}
 - \text{ si } \nu \text{ pair} & \quad \gamma_{2\nu+1} = i \sum_{r=0}^{2\nu} \gamma^r \\
 - \text{ si } \nu \text{ impair} & \quad \gamma_{2\nu+1} = \sum_{r=0}^{2\nu} \gamma^r
 \end{aligned}
 \tag{A1.14}$$

3 Spineur d'ordre 2.

Un spineur d'ordre 2 ζ_{ab} est réductible en vecteur, bivecteur, trivecteur etc.... Ainsi, on peut construire un vecteur associé à un spineur d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
 \zeta_{ab} &= \xi'_a \xi_b \\
 v^i &= {}^i \xi' C H^i \xi
 \end{aligned}
 \tag{A1.15}$$

4 Loi de transformation.

On peut montrer qu'une rotation ou une réflexion dans l'espace vectoriel E , se traduisant par :

$$X' = AXA, \tag{A1.16a}$$

donne dans l'espace des spineurs :

$$\xi' = A\xi \quad (\text{A1.16b})$$

Avec (A1.15) et (A1.16), en notant $K_{ij} = -K_{ji}$ les générateurs des rotations vectorielles, une rotation de l'espace des vecteurs (rotation dans le plan (i, j)) :

$$R_v = e^{\frac{ic^{ij}K_{ij}}{2}} \quad (\text{A1.17})$$

devient dans l'espace des spineurs :

$$R_s = e^{\frac{ic^{ij}}{4} [A_i, A_j]} \quad (\text{A1.18})$$

où A_i est la matrice associée aux vecteurs de base ($A_i = H_i, \gamma_i \dots$) suivant la forme quadratique choisie.

En prenant $A_i = \sigma_i$, on retrouve les spineurs de Pauli.

$A_i = \gamma_i$, on retrouve les spineurs de Dirac.

(A1.15) nous montre que les spineurs sont plus fondamentaux que les tenseurs (un spineur donne un tenseur), c'est ce qui a conduit Bargmann et Wigner à représenter une particule de spin s par un spineur d'ordre $2s$ vérifiant une équation de Dirac pour chaque indice (on retrouve ainsi les équations de Maxwell par exemple) :

$$(i\gamma^\alpha \partial_\alpha - m)_{a_p, a'_p} \Psi_{a_1 \dots a'_p \dots a_{2s}} = 0, \quad p = 1, \dots, 2s \quad (\text{A1.18})$$

Une représentation plus moderne est donnée dans (23)*.

III Théories de jauge ^(3,6,23) de Yang-Mills.

Les théories de jauge permettent, en utilisant certaines propriétés d'invariance, d'introduire les interactions fondamentales et d'obtenir une théorie unifiant plusieurs forces (modèle de Salam-Weinberg, GUT). Soit ϕ une fonction représentant un champ quelconque dont les équations du mouvement sont obtenues à partir du Lagrangien :

$$L = L(\phi, \partial_\alpha \phi) \quad (\text{A1.19})$$

1 Dérivée covariante de jauge.

Soit G un groupe de symétrie laissant (A1.19) invariant, notons T_a les générateurs de G :

$$\begin{aligned} [T_a, T_b] &= iC_{ab}^c T_c \\ C_{ab}^c &\text{ constantes de structure du groupe } G \end{aligned} \quad (\text{A1.20})$$

* Notons également qu'il est possible d'obtenir les spineurs via la théorie des groupes, en introduisant le groupe de recouvrement de $SO(n)$, $\underline{SO}(n)$ ou $Spin(n)$; en effet, ceci provient du fait que l'espace paramétrique de $SO(n)$ est doublement connecté.

L est invariant de jauge globale i.e. $\forall g \in G : g = e^{ia^r T_r}$

$$L(g\phi, g\partial_\alpha\phi) = L(\phi, \partial_\alpha\phi) \quad (\text{A1.21})$$

Si l'on veut une invariance de jauge locale $g = g(x)$, on doit modifier la dérivée ∂_α en introduisant un champ de jauge \tilde{A}_α :

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \partial_\alpha + i\kappa\tilde{A}_\alpha \\ &= \partial_\alpha + i\kappa A_\alpha^a T_a \end{aligned} \quad (\text{A1.22})$$

Ainsi dans la transformation de jauge :

$$\begin{cases} \phi(x) & \rightarrow \phi'(x) = g(x)\phi(x) \\ D_\alpha\phi(x) & \rightarrow (D_\alpha\phi(x))' = g(x)D_\alpha\phi(x) \\ A'_\alpha & = g(A_\alpha - \frac{i}{\kappa}\partial_\alpha)g^{-1} \end{cases} \quad (\text{A1.23})$$

$\kappa =$ constante de couplage des interactions

laisse L invariant $L(g\phi, gD_\alpha\phi) = L(\phi, D_\alpha\phi)$

2 Forme de courbure - équations du mouvement.

La forme de courbure $F_{\alpha\beta}$ est définie par :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\alpha\beta} &= \frac{-i}{\kappa}[D_\alpha, D_\beta] = \partial_\alpha\tilde{A}_\beta - \partial_\beta\tilde{A}_\alpha + i\kappa[\tilde{A}_\alpha, \tilde{A}_\beta] \\ F_{\alpha\beta}^a &= \partial_\alpha A_\beta^a - \partial_\beta A_\alpha^a - \kappa C_{bc}^a A_\alpha^b A_\beta^c \end{aligned} \quad (\text{A1.24})$$

Les équations du mouvement sont obtenues en extrémalisant l'action :

$$\begin{aligned} S &= \frac{-1}{4} \int d^4x F_{\alpha\beta}^a F_a^{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \text{Tr}(\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (\text{A1.25})$$

où Tr représente la trace.

3 Conséquences physiques.

A chaque générateur T_a correspond un boson de jauge responsable de l'interaction considérée; ainsi la structure du groupe de jauge G^* conduit aux interactions physiques.

* On peut montrer que G n'est pas arbitraire (dans le cas des groupes de Lie finis), en utilisant la méthode de classification de Cartan et les diagrammes de Dynkin. On obtient ainsi $G = SU(n), SO(n), SP(2n)$, ou l'un des groupes exceptionnels (E_8, E_6, G_2, \dots).

L'invariance sous $U(1)$ conduit à l'électromagnétisme, $SU(3)$ à la Q.C.D., $U(1) \otimes SU(2)_L$ à l'interaction électrofaible, $SU(5)$ ou $SO(10)$ ou E_6 à la GUT.

La gravitation peut aussi être obtenue comme un champ de jauge, à cette différence près que le groupe de jauge $G = Diff(1,3)$ est un groupe continu (on n'a plus de générateur T_a , ou plus exactement on en a une infinité). Néanmoins l'équation (A1.22) redonne la dérivée covariante de la relativité générale, (A1.23c) définit les lois de transformation des symboles de Christoffel et (A1.24) le tenseur de courbure $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$.

IV Formalisme tétraédrique.

Le principe de relativité permet, en chaque point de l'espace-temps dans un voisinage d'un point M , d'éliminer la gravitation. Un tel système est dit localement inertiel.

$$\begin{aligned} &\text{Si } x^\mu \text{ coordonnée dans le système quelconque} \\ &\quad \xi^\alpha (x) \text{ coordonnée dans le système inertiel} \\ &\text{alors } ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \end{aligned} \quad (\text{A1.26})$$

1 Champ de Vierbein.

(A1.26) peut se mettre sous la forme :

$$g_{\mu\nu}(x) = \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right)_{X=x(M)} \left(\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \right)_{X=x(M)} \eta_{\alpha\beta} \quad (\text{A1.27})$$

$$V_\mu^\alpha(x) = \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right)_{X=x(M)} : \text{champ de Vierbein}$$

α est un indice relatif à l'espace tangent. Il est donc soumis aux transformations de Lorentz :

$$V_\mu^\alpha(x) \xrightarrow{\text{transformations de Lorentz}} V_\mu^{\prime\alpha}(x) = V_\mu^\beta(x) \Lambda_\beta^\alpha \quad (\text{A1.28})$$

μ est un indice relatif à l'espace courbe, il est soumis aux transformations générales :

$$V_\mu^\alpha(x) \xrightarrow{\text{transformations générales}} V_\mu^{\prime\alpha}(x) = V_\nu^\alpha(x) \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\prime\mu}} \quad (\text{A1.29})$$

V_μ^α est donc un ensemble de quatre vecteurs covariants.

2 Champs fondamentaux en relativité générale.

A un tenseur quelconque $T_\nu^{\mu\dots}$, on peut associer :

$$T_{\alpha\dots}^\beta = T_\nu^{\mu\dots} V_\mu^\alpha(x) \dots V_\beta^\nu(x) \dots \quad (\text{A1.30})$$

qui est uniquement soumis aux transformations de Lorentz. En relativité générale, seuls les scalaires et tenseurs sont définis (pour les transformations générales de coordonnées). On peut néanmoins introduire un spineur $\Psi(x)$, il est défini par :

- $\Psi(x)$ invariant lors d'une transformation générale
- $\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = e^{i \frac{c_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}}{2}} \Psi(x)$ pour une transformation de Lorentz.

V Géométrie Riemannienne^(15,23).

La géométrie Riemannienne consiste en une géométrie dans un espace courbe (la métrique $g_{\mu\nu}$ est définie localement).

1 Equation du mouvement d'une particule libre - Géodésique métrique.

L'équation du mouvement d'une particule libre est obtenue en minimalisant la longueur :

$$S = -m \int_P^Q (\dot{x} \cdot \dot{x})^{1/2} \quad (\text{A1.31})$$

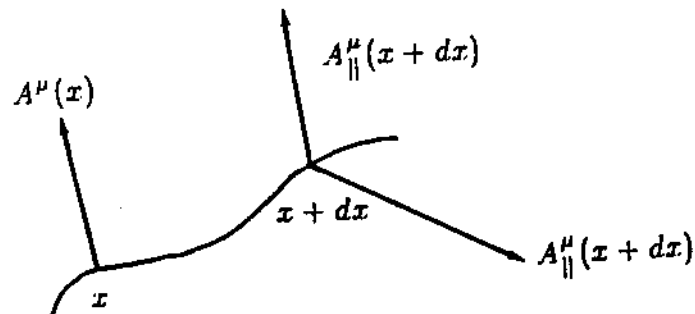
On obtient alors :

$$\begin{aligned} \ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho &= 0 \\ \Gamma_{\nu\rho}^\mu &= \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}) \end{aligned} \quad (\text{A1.32})$$

L'équation (A1.32) définit une géodésique métrique, i.e. une courbe extrémalisant la distance entre deux points.

2 Transport de parallèle - Dérivée covariante.

L'espace n'étant plus linéaire, on ne peut plus comparer un vecteur en x et $x + dx$, autrement dit la dérivée ∂_μ est insuffisante. On arrive à la même conclusion en remarquant que A^μ vecteur n'entraîne pas nécessairement $\partial_\nu A^\mu$ tenseur.



$$A^\mu_{||}(x + dx) = A^\mu(x) - \Gamma_{\nu\rho}^\mu A^\nu dx^\rho \quad (\text{A1.33})$$

On peut ainsi comparer $A^\mu_{||}(x + dx)$ avec $A^\mu(x + dx)$. Les fonctions Γ ne sont plus les mêmes que précédemment. Elles définissent une géodésique affine (transport de parallèle).

On définit alors la dérivée covariante par :

$$dx^\mu \nabla_\mu F^\nu(x) = F^\nu(x + dx) - F^\nu_{||}(x + dx)$$

$$\nabla_\mu F^\nu(x) = \partial_\mu F^\nu(x) + \Gamma_{\rho\mu}^\nu F^\rho(x) \quad (\text{A1.34})$$

Le principe de correspondance impose :

$$\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0 \quad (\text{A1.35})$$

ce qui rend compatible géodésique métrique et affine et traduit la conservation du produit scalaire sur une géodésique affine.

3 Courbure.

Le tenseur de courbure se définit par :

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A_\sigma = R_{\sigma\mu\nu}^\rho A_\rho \quad (\text{A1.36})$$

On obtient alors :

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} + \partial_\mu \partial_\sigma g_{\nu\rho} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\rho} - \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma})$$

$$+ g_{\tau\epsilon} (\Gamma_{\nu\rho}^\tau \Gamma_{\mu\sigma}^\epsilon - \Gamma_{\nu\sigma}^\tau \Gamma_{\mu\rho}^\epsilon) \quad (\text{A1.37})$$

Si la connexion affine $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ n'est pas symétrique dans les indices du bas, le principe d'équivalence n'est plus valable. On définit alors le tenseur de torsion :

$$\tau_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{[\mu\nu]}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\nu\mu}^\rho \quad (\text{A1.38})$$

si $\tau_{\mu\nu}^\rho \neq 0$, on est alors dans un espace plus général que celui de Riemann, à savoir un espace de Cartan. Weyl a formulé la relativité générale dans un tel espace.

Annexe 2

Dans cette annexe, nous expliciterons nos notations concernant les indices, la métrique, les matrices de Dirac et les champs de Vierbein.

1 Indices.

	vecteur	partie spatiale d'un vecteur	partie transverse d'un vecteur	spineur	super-indices
espace plat	α, β, \dots	m, n, o, \dots	$\tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{o}, \dots$	a, b, c	M, N, \dots
espace courbé	μ, ν, \dots	i, j, k, \dots	$\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k}, \dots$	$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$	$\underline{M}, \underline{N}, \dots$
W.S.*	ξ, ζ, \dots			a', b', c'	Δ, π, \dots
W.S. courbe	$\underline{\xi}, \underline{\zeta}, \dots$			$\underline{a}', \underline{b}', \underline{c}'$	$\underline{\Delta}, \underline{\pi}, \dots$

2 Métriques.

Métrique de Minkowski	d'espace-temps	:	$\eta_{\alpha\beta}$
	W.S	:	$\eta_{\xi\zeta}$
Métrique de Riemann	d'espace-temps	:	$g_{\mu\nu}$
	W.S	:	$\underline{g}_{\underline{\xi}\underline{\zeta}}$
Métrique de spineur		:	C_{ab}

*W.S "World Sheet".

3 Matrices de Dirac.

Matrice de Dirac d'espace-temps

plat

 γ_α

courbe

$$\gamma_\mu(x) = V_\mu^\alpha(x) \gamma_\alpha$$

Matrice de Dirac W.S

 ρ_ξ

$$\underline{\rho}_\xi = \rho_\xi e_\xi^\xi(\xi)$$

4 Champs de Vierbein.

d'espace-temps

$$V_\mu^\alpha(x)$$

W.S

$$e_\xi^\xi(\xi)$$

superespace

$$E_M^M(Z)$$

Annexe 3

Nous nous sommes intéressés à une présentation "historique" qui, à partir du modèle dual, nous a conduit aux supercordes puis aux cordes hétérotiques. Nous allons présenter brièvement une autre alternative qui permet d'obtenir la théorie des supercordes. Le point de départ est, comme nous allons le voir, le modèle standard. C'est en voulant répondre à certaines questions laissées en suspens que nous obtenons la théorie des supercordes. Nous avons vu qu'une telle théorie permet de rendre compte de la gravitation, nous émettrons cependant quelques restrictions à cet égard.

1 Du modèle standard aux supercordes.

La physique moderne comme nous l'avons déjà souligné repose sur le modèle standard. Mais dans un tel modèle, nous avons trois constantes de couplage. La GUT permet, en introduisant un groupe de jauge grand-unifié, de décrire les phénomènes à l'aide d'une constante de couplage (SST comme nous l'avons vu permet de choisir E_6 parmi les trois groupes proposés). Mais une telle théorie ne rend toujours pas compte de la gravitation et des symétries d'espace-temps.

- L'étape ultérieure est l'obtention d'une théorie grand-unifiée supersymétrique i.e. où l'on adjoint aux bosons de jauge, des jauginos (on peut montrer que dans une telle théorie les divergences quadratiques sont éliminées).

- Comment, à ce stade, introduire la gravitation ?

Nous savons que les bosons de jauge apparaissent naturellement lorsqu'on passe d'une théorie de Yang-Mills globale à une théorie locale (tout en préservant l'invariance de jauge de l'action). Or nous avons vu en étudiant le couplage des supercordes avec la supergravité que si on impose une supersymétrie locale, il est nécessaire d'introduire un champ de spin $3/2$, le gravitino, et un champ de spin 2 , le graviton. On peut montrer que de la même façon (en utilisant la procédure de Noether), si on impose une GUT supersymétrique locale, le champ de gravitation apparaît logiquement.

- Nous pouvons enfin décrire de façon "naturelle" en physique des particules l'interaction gravitationnelle, mais il subsiste toujours un problème : la renormalisation. Une telle théorie n'est pas renormalisable car elle présente une infinité de diagrammes primitivement divergents. Un tel problème a déjà été rencontré en physique des hautes énergies. Le modèle de Fermi de l'interaction faible n'est pas renormalisable. Par contre, si l'on ajoute les bosons W^\pm, Z^0 et que l'on tient compte de la brisure de symétrie, la théorie devient renormalisable.

- De la même façon, on peut renormaliser la supergravité en rajoutant des champs que l'on peut interpréter comme étant les états vibratoires d'une corde : c'est la théorie des supercordes. Et tout comme le modèle de Fermi est la limite à basse énergie de l'interaction

faible, la supergravité est la limite à basse énergie de la théorie des supercordes (c'est ce qui apparaît sur les trajectoires de Regge).

Mais il est important de faire la remarque suivante : nous avons vu que la théorie des supercordes est formulée dans un espace plat (métrique de Minkowski). Or elle rend compte du graviton. Comment peut-on rendre compte de la gravitation dans un tel espace ? Lorsqu'on étudie les théories limites, on prétend retrouver la gravitation ; ceci n'est pas tout à fait vrai car on obtient une théorie perturbative, alors que la relativité générale d'Einstein n'est en aucun cas perturbative. Les supercordes ne peuvent pas décrire la solution de Schwarzschild par exemple. En ce sens, on voit que la théorie des supercordes ainsi formulée est incomplète car elle devrait être établie dans une variété Riemannienne.

2 Supercordes : un espoir d'obtenir la théorie ultime ?

Malgré cette restriction, la théorie des supercordes peut d'ores et déjà résoudre certaines des questions que le modèle standard ne peut expliquer. Ainsi par exemple, en étudiant la topologie de K_6 , variété compactifiée, on peut rendre compte du nombre de familles ou de générations de quarks et leptons. Plus exactement, il faut exprimer K_6 sous la forme $K_6 = K_0/G$, où G est un groupe de symétrie discret agissant sur K_0 ; on voit donc que K_6 ainsi défini n'est plus simplement connecté et qu'il existe en quelque sorte des "trous" sur K_6 . Il faut spécifier en outre que certains modèles vont jusqu'à prédire les constantes de Yukawa (toujours en étudiant des propriétés topologiques de K_6) et donc jusqu'à rendre compte des divers masses et angles de mélange... .

Annexe 4

Supermembranes et au-delà

Jusqu'à environ une vingtaine d'années auparavant, on considérait les particules comme ponctuelles; avec Nambu en 1970, cette conception des choses a été quelque peu modifiée. En effet, avec la corde et la supercorde nous avons à faire à des objets ayant un degré de liberté spatiale. Mais pourquoi s'arrêter là? Quels sont les arguments qui vont en faveur d'une particule ponctuelle, d'une supercorde, ou même d'une supermembrane...? Partant de cette constatation, certains physiciens sont allés au-delà des supercordes et ont défini les supermembranes puis les superobjets étendus (p-brane).

1 Supermembranes.

Nous considérons en premier lieu la membrane : elle va balayer au cours du temps un volume d'univers et la procédure appliquée par Nambu est transposable. On définit alors le volume balayé au cours du temps par :

$$h = (- \det \partial_\xi X^\alpha \partial_\zeta X_\alpha)^{1/2} = (- \det \partial_\xi X^\alpha \partial_\zeta X_\beta \eta_{\alpha\beta})^{1/2*}$$

$$\xi = (\xi^0, \xi^1, \xi^2) = (\tau, \sigma, \rho)$$

En posant Ξ^{-1} la tension de la membrane, on déduit l'action :

$$S = - \frac{1}{4\pi^2 \Xi} \int d^3 \xi \sqrt{-\det(\partial_\xi X^\alpha \partial_\zeta X_\alpha)} \tag{A4.1}$$

que nous pouvons mettre en étroite comparaison avec (I.5).

Si nous nous plaçons dans une jauge telle que :

$$h_{\xi\zeta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(A4.1) devient :

$$S = - \frac{1}{8\pi^2 \Xi} \int d^3 \xi (\partial^\xi X_\alpha \partial_\xi X^\alpha - 1) \tag{A4.2}$$

* Théorie toujours formulée dans un espace Minkowskien.



que l'on peut récrire :

$$S = -\frac{1}{8\pi^2\Xi} \int d^3\xi \sqrt{-g} (\partial^\xi X_\alpha \partial_\xi X^\alpha - 1) \quad (\text{A4.3})$$

en vue de réintroduire l'invariance générale.

On peut rendre la membrane supersymétrique en rajoutant des champs spinoriels de Majorana définis sur le volume d'univers, on obtient alors une supermembrane mais nous n'en parlerons pas. Lorsque l'on quantifie la supermembrane, tout comme dans le cas des supercordes, seules certaines dimensions d'espace-temps sont permises; $D = 11$ est en une.

2 Supermembranes - Supercordes.

Existe-t-il un lien entre les supercordes à $D = 10$ dimensions et les supermembranes à $D = 11$ dimensions? Nous allons voir que la réponse est oui et que la solution provient de la compactification.

$X^\alpha \quad \alpha = 0, \dots, 10$ décrit la position de la supermembrane dans l'espace-temps
 $\xi = (\tau, \sigma, \rho)$ paramètre le volume d'univers balayé par la supermembrane

Considérons alors que :

$$X^\alpha = (X^\beta, y) \quad \beta = 0, \dots, 9$$

$$\xi = (\tau, \sigma, y)$$

où y décrit une variété compacte à la Kaluza-Klein, les différents observables ne dépendent pas de y ($\partial_y X^\beta = 0 \dots$).

On peut montrer qu'une telle limite redonne la théorie des supercordes à $D = 10$ dimensions.

Par ailleurs, dans la limite où la tension de la supermembrane tend vers $+\infty$, on retrouve la supergravité $D = 11$, ce qui nous permet donc la comparaison entre ces deux théories.

3 Au-delà des supermembranes.

Pour obtenir des superobjets étendus avec d dimensions du genre espace ($d = 1$ pour les supercordes, $d = 2$ pour les supermembranes), il suffit de généraliser le formalisme précédent. Le point de départ est alors une action à la Nambu.

$\xi = (\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^d)$ décrit le $(d + 1)$ volume d'univers balayé au cours du temps.

$$L = [\det(-\partial_\xi X^\alpha \partial_\xi X_\alpha)]^{1/2}$$

$$\xi = 0, \dots, d.$$

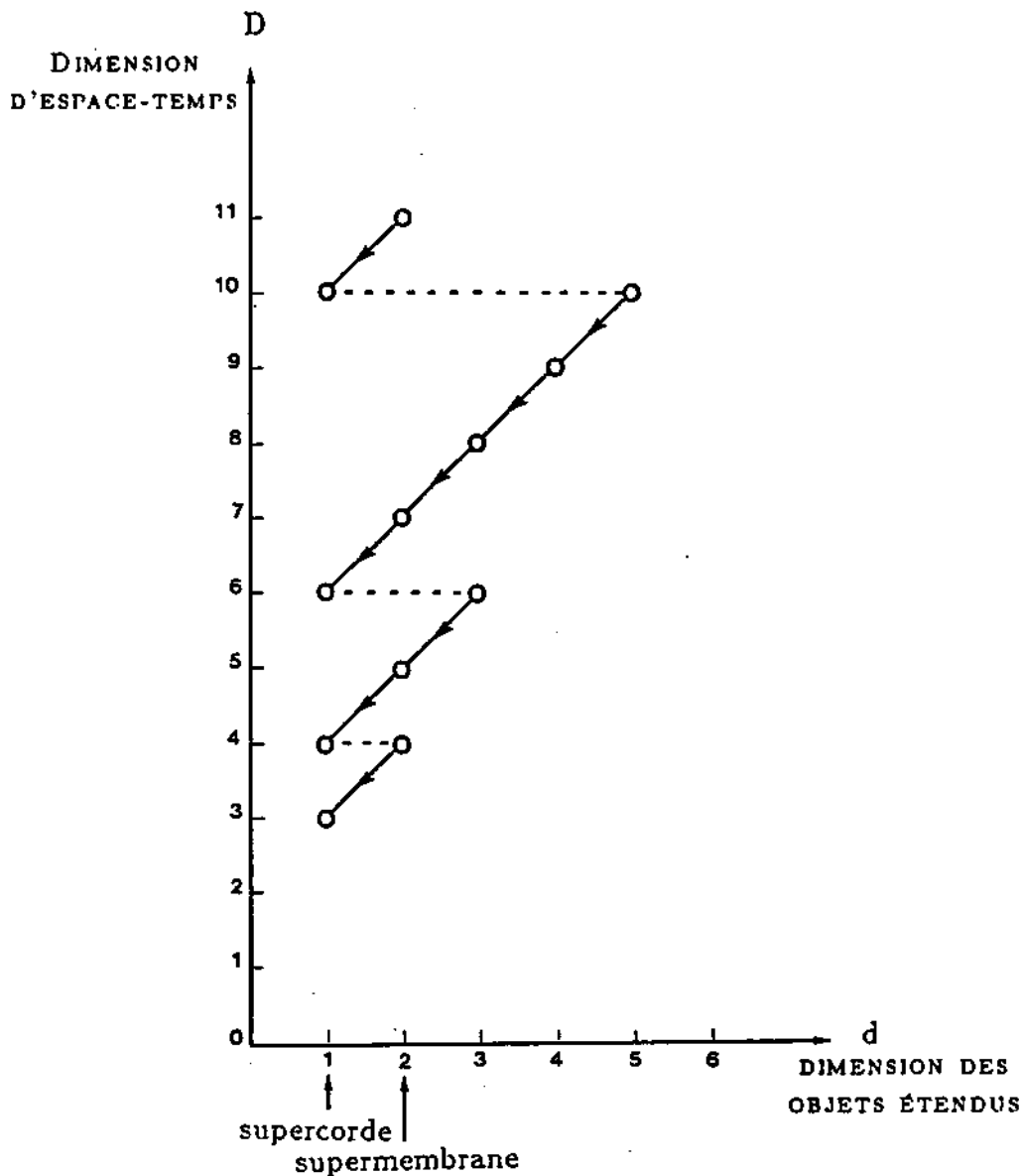
$$\alpha = 0, \dots, D \quad D \geq d - 2$$

Les équations du mouvement s'obtiennent :

$$\partial_\xi \frac{\partial L}{\partial \partial_\xi X} = 0 \quad (\text{au niveau classique})$$

où, en posant $P^\xi = \frac{\partial L}{\partial \partial_\xi X}$, moment dans la direction ξ , on obtient $\partial^\xi P_\xi = 0$

Tout comme dans le cas des supercordes et des supermembranes, la théorie n'est consistante que pour certaines valeurs D de l'espace. De plus, partant d'une théorie (D, d) par compactification, on obtient une théorie $(D-1, d-1)$. Nous résumons dans le graphe suivant les valeurs D et d compatibles.



→ : compactification à la Kaluza-Klein

REMERCIEMENTS

Je remercie le C.R.N. qui m'a accueilli dans ses laboratoires et m'a permis d'effectuer ce travail.

Ce rapport a été composé par le service spécialisé de la DIHE.

Je remercie à cet égard Mme Jegham : elle a bien voulu avec son équipe coordonner la frappe du manuscrit. Une mention toute particulière à Mme Tissier qui a assuré avec gentillesse, compétence et célérité ce travail.

R. Huck s'est chargé du tirage de ce document. Qu'il en soit remercié.

REFERENCES

- (1) Y. Nambu, 1969, Proc. Intl. Conf. on Symmetries and quark model (Wayne State University)
Y. Nambu, 1970, Lecture at the Copenhagen Symposium
- (2) B. Felsager, Geometrie particle and field, Odense University Press
- (3) J. Leite Lopes, Gauge fields theories an introduction, Pergamon Press
- (4) J. Scherk, 1975, Rev.Mod.Phy. 47, 123
- (5) P. West, Introduction to supersymmetry and supergravity, World Scientific
- (6) C. Itzykson, Quantum field theory, International Student Edition
- (7) N. Fleury, Sur l'électrodynamique du tachyon chargé, Thèse 3^{ième} cycle Strasbourg C.R.N, mars 1973
- (8) P. Ramond, 1971, Phys. Rev. D3, 2145
- (9) A. Neveu, J. Schwarz, 1971, Phys. Rev. B31, 86
- (10) S. Weinberg, Gravitation and Cosmology Witey, NY, 1972
- (11) Y. Iwasaki, K. Kikkawa, 1973, Phys. Rev. D8, 440
- (12) E. Cartan, The theory of spinors, Hermann
- (13) Y.A. Golfand, E.S. Likhtman, 1971, JETP let 13, 223
- (14) L. Landau, E. Lifchit, Théorie quantique relativiste, première partie, Ed. Mir. Moscou
- (15) R.M. Wald, General Relativity, Chic. University Press
- (16) F. Gliozzi, J. Scherk, D. Olive, 1976, Phys. Lett. 65B, 282
- (17) J.H. Schwarz, 1982, Phys. Rep. N°3, 223
- (18) M.B. Green, 1983, Surveys in High Energy Physics, Vol 3, 127
- (19) P.H. Frampton, Dual resonances model and superstrings, World Scientific
- (20) M. Green, J. Schwarz, 1982, Nucl. Phy., B193, 474
- (21) J. Schwarz,* p 916
- (22) D.J. Gross et al, 1985, Nucl. Phy., B256, 253
- (23) B. Doubrovine, Géométrie contemporaine. Méthode et application, première partie, Ed. Mir Moscou
- (24) N. Fleury, J. Leite Lopes, D. Spehler, mars 1983, Nuovo Cimento, Vol.36, N°13

La plupart des ouvrages cités, sont réunis dans *

- (*) Superstrings : the first 15 years of superstrings theory Vol. 1 et 2. Edited by J Schwarz, World Scientific