CBPF-MO-001/82

# TÓPICOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL EM MECÂNICA HAMILTONIANA, LAGRANGIANA E RELATIVIDADE

por

Paulo Roberto Rodrigues

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF/CNPq
Rua Xavier Sigaud, 150
22290 - Rio de Janeiro - RJ - BRASIL

INDICE

INTRODUÇÃO

O presente texto contem e complementa uma série de exposições realizadas no primeiro semestre de 1974 no CBPF, para o departamento de Física Teórica.

Está dividido em seis capítulos.

No primeiro capítulo faz-se uma introdução rápida da álgebra tensorial e exterior.

No segundo capítulo algumas noções básicas da Geometria Diferencial são estudadas. Introduz-se a noção de variedade diferencial e a seguir dão-se exemplos em que o espaço de configuração e o de fase de um sistema mecânico satisfazem os axiomas daquele conceito. Estudam-se algumas propriedades referentes aos fibrados vetoriais, particularmente o fibrado tangente e contangente à uma variedade diferencial. As formas diferenciais no $R^n$ e em variedades são estudadas com certos detalhes.

No terceiro capítulo estuda-se a mecânica hamiltoneana sob o ponto de vista simplético. O objetivo deste capítulo é o de formular de uma maneira explícita o aspecto geométrico do formalismo hamiltoneano. Trata-se de estudar este formalismo na forma subjascente ao fibrado contangente a uma variedade. Tal método é baseado no fato de que a descrição dos movimentos de um sistema mecânico é feita obtendo-se as soluções ou trajetórias de um dado campo de vetores sobre a variedade considerada. Mais explicitamente, mostra-se que o fibrado contangente admite uma estrutura simplética canônica que permite, a partir de uma dada função H definida nesta variedade, a obtenção de um campo de vetores cujas curvas integrais serão, localmemte, soluções das conhecidas equações de Hamilton.

O desenvolvimento destas idéias deve-se, entre outros, a E.Cartan(0), G.Reeb(1), J.Souriau(2) e A.Lichnerowicz(3). O estudo do formalismo geométrico Lagrangeano, desenvolvido principalmente por J.Klein(4), necessita de uma formulação própria no que diz respeito ao calculo exterior sobre espaços tangentes. Uma versão sumária é apresentada no quarto capítulo.

No quinto capítulo apresenta-se um estudo conhecido como Mecânica de Dirac-Bergmann. Trata-se da Mecânica usual em presença de vinculos. O texto apresentado é uma reprodução de uma nota publicada nos Anais da II Escola de Cosmologia e Gravitação do CBPF, vol.III (1980) pp 1165-1191.

O capítulo sexto aborda, de uma maneira acanhada, alguns tópicos da Geometria Diferencial empregados na Relatividade.

A redação do presente texto foi realizada numa forma que permita atingir aqueles que não estão habituados com esta parte da Matemática. Daí, aparentemente, realizar-se certos abusos que visam somente evitar dificuldades desnecessárias. Questões de existencia e unicidade são, por exemplo, deixadas de lado.

Agradecemos ao Prof. Mário Novello pelo convite feito naquela oportunidade. Ao prof. Constantino M. de Barros agradecemos as sugestões dadas no que se refere ao Capítulo II. Ao CBPF agradecemos igualmente pela publicação destas notas.

CAPÍTULO I

# ALGEBRA TENSORIAL E EXTERIOR

## 1- Preliminares

Por R representa-se o corpo dos números reais. Os espaços vetoriais considerados são reais e de dimensão finita. Sejam $V_1, \ldots, V_k$ e Z espaços vetoriais. Diz-se que a aplicação $f: V_1 x \ldots x V_k \to Z$ é uma aplicação multilinear ou k- linear se $f_i: V_i \to Z$, definida por $f_i(x) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_k)$ é linear para todo i, $1 \leq i \leq k$. Se Z = R, diz-se que f é uma k- forma linear.

Por $L^k(V_1, \ldots, V_k; Z)$ representa-se o conjunto das aplicações k-lineares de $V_1 x \ldots x V_k$ para Z, munido de uma estrutura de espaço vetorial, (as operações de soma entre k- lineares e o produto de um escalar por uma k- linear são definidas da maneira habitual para funções). No caso particular em que k = 1 e Z = R, põe-se $L\ (V;R) = V^*$, dito espaço dual de V. Se $(e_1, \ldots, e_n) = (e_i)$ é uma base de V, então existe uma única base de $V^*$, $(v^1, \ldots v^n) = (v^j)$ tal que $v^j(e_i) = \delta_i^j$. A base $(v^j)$ é dita base dual de $(e_i)$.

## 2- Tensores de ordem 2

Sejam V, W espaços vetoriais. Seja $(V \otimes W, f)$ um par tal que $V \otimes W$ é um espaço vetorial e $f: V \otimes W \to V \otimes W$ é uma aplicação bilinear tal que

(i) $V \otimes W$ é gerado pelo conjunto $f(x,y)$; $(x,y) \in V\ x\ W$,

(ii) se $(e_i)$ e $(g_j)$ são bases de V e W respectivamente, então os nm elementos de $f\ (e_i, g_j)$ formam uma base de $V \otimes W$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

O par $(V \otimes W, f)$ é dito produto tensorial de V por W. Representa-se $f(x,y)$ por $x \otimes y$. Os elementos de $V \otimes W$ são ditos ten sores (de ordem 2). Se $t \in V \otimes V$, então t é dito tensor contravariante (de ordem 2). t é dito tensor covariante (de ordem 2) se $t \in V^* \otimes V^*$ e tensor misto ou de tipo (1,1) se $t \in V \otimes V^*$.

3- Propriedades

a) Proposição.

Se V, W e Z são espaços vetoriais, então a todo elemento g de $L^2(V,W;Z)$ corresponde biunivocamente $h \in L\ (V \otimes W;\ Z)$, tal que $g = h_o f$.

Demonstração: De fato, defina-se $h: V \otimes W \to Z$ por $h(t) = \sum g(x_i, y_i)$, onde $t = \sum x_i \otimes y_i \in V \otimes W$. Tem-se que h está bem definida, pois as componentes do tensor t numa base $(e_i \otimes g_j)$ independem da representação dada à t. A aplicação h é linear por construção e é única como é fácil de verificar-se.

b) Colorário

$L^2(V,W;R)$ é isomorfo à $(V \otimes w)^*$.

c) Proposição.

$(V \otimes W)^*$ é isomorfo à $V^* \otimes W^*$.

Demonstração: Basta definir $g: V^* x W^* \to (V \otimes W)^*$ por $g\ (x^*,y^*)(x \otimes y) = x^*(x) y^*(y)$, $x \in V$, $y \in W$. Tem-se que g é bilinear e pela Proposição (a) existe uma única linear $h \in L(V^* \times W^*);\ (V \times W)^*$ tal que $g = h_o f$, onde $f \in L^2(V^*,W^*;\ V^* \otimes W^*)$. Como $\dim V^* \otimes W^* = \dim\ (V \otimes W)^*$, tem-se o isomorfismo desejado.

d) Corolário.

$L^2(V,W;R)$ é isomorfo à $V^* \otimes W^*$.

O Colorário (d) sugere a seguinte definição: Seja V espa ço vetorial e $L^2(V^*,V;R)$ o espaço vetorial das formas bilineares de $V^* \times V$ em R. Os elementos de $L^2(V^*,V,R)$ são ditos tensores em V. No caso $L^2(V^*,V^*;R)$, são ditos tensores contravariantes (de ordem 2) e no caso $L^2(V,V;R)$ são ditos tensores covariantes (de ordem 2).

4- Generalização. Algebra Tensorial

Os resultados acima enunciados são de fácil generalização para o caso em que considera-se k espaços vetoriais $V_1,V_2,\ldots,V_k$. No que se segue consideraremos a situação em que $V_1=\ldots=V_k = V$. Colocar-se-a

$$T^r_s(V) = L^{r+s}(V^*, \ldots, V^*, V, \ldots, V;R),$$

onde $V^*$ e V são repetidos r e s vezes respectivamente. Os elementos de $T^r_s(V)$ são ditos tensores em V, contravariantes de ordem r, covariantes de ordem s, ou ainda do tipo (r,s). A dimensão de $T^r_s(V)$ é $n^{r+s}$, onde n é a dimensão de V.

Sejam $T^r_s(V)$ e $T^n_u(V)$ espaços vetoriais conforme a convenção acima. Seja

$$f: T^r_s(V) \times T^n_u(V) \to T^r_s(V) \otimes T^n_u(V)$$

a aplicaçaõ bilinear da definição de produto tensorial. Como $T^r_s(V) \otimes T^n_u(V)$ é isomorfo ã $T^{r+n}_{s+u}(V)$, pode-se tomar f como sendo uma aplicação bilinear de contradomínio $T^{r+n}_{s+u}(V)$. Diremos que f é a multiplicação tensorial de elementos de $T^r_s(V)$ por elementos de $T^n_u(V)$. Se $t \in T^r_s(V)$ e $v \in T^n_u(V)$, então pela convenção adotada, põe-se $f(t,v) = t \otimes v$. Se $L^j$, $\beta^j \in V^*$, $a_j$, $b_j \in V$, tem-se por definição

$$t \otimes v\,(L^1, \ldots, L^r, \beta^1, \ldots, \beta^n, a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_u)$$

$$= t\,(L^1, \ldots, L^r, a_1, \ldots, a_s)\; v\,(\beta^1, \ldots, \beta^n, b_1, \ldots, b_u).$$

Uma algebra é um par (A,f) onde A é um espaço vetorial e $f{:}A \times A \to A$ é uma aplicação bilinear, dita produto. A aplicação $f{:}T(V) \times T(V) \to T(V)$, onde $T(V) \overset{def}{=} \bigoplus T_o^r(V)$, $r \in Z$, definida por

$$f(t,t') = t_o \otimes t'_o + (t_o \otimes t'_1 + t_1 \otimes t'_o) + (t_o \otimes t'_2 + t_1 \otimes t'_1 +$$

$$+ t_2 \times t'_o) + \ldots .$$

com $t = t_o + t_1 + \ldots + t_m$, $t' = t'_o + t'_1 + \ldots + t'_m \in T(V)$ mune o espaço vetorial T(V) de uma estrutura de algebra, dita <u>algebra tensorial contravariante</u>. De maneira análoga tem-se a algebra dos tensores covariantes e dos tensores mistos.

5- <u>As componentes de um tensor do tipo</u> (r,s).

Seja $(e_i) = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base de V. Uma base de $T_s^r(V)$ é dada por

$$(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_s})$$

onde $i_k, j_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $(\varepsilon^j) = (\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ é a respectiva base dual de $(e_i)$.

Se $t \in t^{r}_{s_1}1(V)$, então as componentes de t na base de $t_s^r(V)$ acima são representados por

$$t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}\,,$$

$$t = \sum t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}\, e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_s},$$

com $\{i_1, \ldots, i_r\}$, $\{j_i, \ldots, j_s\}$ representando um arranjo com re petição de 1, 2, ..., n.

A expressão de t acima pode ser re-escrita na forma

$$t = \sum_{I,J} t_J^I \, e_I \times \varepsilon^J,$$

onde I,J representam a r-upla $\{i_1, \ldots, i_r\}$ e a s-upla $\{j_1,\ldots,j_s\}$ respectivamente.

Se $e'_i = \sum a_i^j \, e_j$ e $\varepsilon'^j = \sum b_i^j \; ^j$, onde $(a_i^j)$ e $(b_i^j)$ designam as matrizes de mudança de bases em V e V* respectivamente, então

$$t_J^I = \sum_{I,J} a_{m_1}^{i_1} \ldots a_{m_r}^{i_r} \, b_{j_1}^{n_1} \ldots b_{j_s}^{n_s} \, t'^M_N$$

é a relação de mudança de componentes de um tensor do tipo (r,s) na mudança de bases acima mencionadas.

6- <u>Vetores e formas exteriores. Algebra exterior</u>.

Sejam V espaço vetorial e k um interior não negativo. Por $X^kV$ representaremos o produto cartesiano V x V x ... x V, k vezes. Seja $(\Lambda^kV, f)$ um par tal que $\Lambda^kV$ designa um espaço vetorial e $f: X^kV \to \Lambda^kV$ tal que:

PEa) f é multilinear alternada, i.e., f é linear em cada variável e

$$f(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k) = -f(v_1, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_k),$$

onde $v_j \in V$, j=1, 2, ..., k;

PEb) $\Lambda^kV$ é gerado pelo conjunto

$$\{f(v_1, \ldots, v_k); (v_1, \ldots, v_k) \in X^kV\},$$

PEc) Se $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ é uma base de V, então os $\binom{n}{k}$ elementos

$$f(\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_k}) \text{ é uma base de } \Lambda^k V, \text{ com } 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n.$$

Os elementos de $\Lambda^k V$ são chamados de k-<u>vetores</u> sobre V e f $(v_1, \ldots, v_k)$ é representado por $v_1 \Lambda \ldots \Lambda v_k$, chamado <u>produto exterior</u> de $v_1, \ldots, v_k$. Convenciona-se

$$\Lambda^o V = R \text{ e } \Lambda^1 V = V.$$

Diz-se que $(\Lambda^k V, f)$ é uma k-<u>ésima potencia exterior</u> de V. Se $(\Lambda^k V', f')$ é outra k-ésima potência exterior de V, então $(\Lambda^k V, f)$ e $(\Lambda^k V' f')$ são isomorfos.

EXEMPLO. Se k=2 e dimV=3, então $\Lambda^2 V$ é constituido das combinações de todos os elementos $(\alpha, \beta)$ de VxV da forma $\alpha \Lambda \beta$. Se $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$é uma base de V, então

$$\alpha = \sum_i a_i \sigma_i, \; \beta = \sum_j b_j \sigma_j$$

com $a_i$, $b_j \varepsilon R$. Por (PEa), (PEb) e (PEc) tem-se

$$\alpha \Lambda \beta = \sum_{i,j} a_i b_j \sigma_i \Lambda \sigma_j.$$

Portanto $\dim \Lambda^2 V = (n!/(n-k)!k!) = 3$.

Se $w \varepsilon \Lambda^k V$ e se $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ é uma base de V, então por (PEc) tem-se

$$w = \sum a_{i_1 \ldots i_k} \sigma_{i_1} \Lambda \ldots \Lambda \sigma_{i_k}, \tag{I-6.1}$$

com $1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq n$.

Observa-se que se dimV=n e k>n, então $\Lambda^k V = 0$, pois pela multilinearidade de f e por (PEc) tem-se que $\sigma_{i_1} \Lambda \ldots \Lambda \sigma_{i_k}$ é o produto de k-vetores, com k>n; logo nulo.

<u>O produto exterior de um k-vetor</u> $\alpha$ <u>por um p-vetor</u> $\beta$ <u>é por definição uma aplicação</u> $\Lambda$: $\Lambda^k V \times \Lambda^p V \to \Lambda^{k+p} V$ <u>definida por</u> $\Lambda(\alpha,\beta) = \alpha\Lambda\beta$.

Logo se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in X^k V$ e $(\beta_1, \ldots, \beta_p) \in X^p V$, então

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \Lambda (\beta_1, \ldots, \beta_p) = \alpha_1 \Lambda \ldots \Lambda\, \alpha_k \,\Lambda\, \beta_1 \Lambda \ldots \Lambda \beta_p.$$

Tem-se que

(i) $\Lambda$ é distributiva

(ii) $\Lambda$ é associativa

(iii) $\alpha\Lambda\beta = (-1)^k\ \beta\Lambda\alpha$.

Munido do produto exterior $\Lambda$, o espaço $\bigoplus_{k\in Z} \Lambda^k V$ dos k-vetores é uma álgebra, dita álgebra dos k-vetores.

Seja $T_o^k(V)$ o espaço dos tensores em V contravariantes de ordem k e seja $t \in T_o^k(V)$. Se $t = x_1 \otimes \ldots \otimes x_k$ é uma representação de t, $(x_1, \ldots, x_k) \in \overset{k}{X} V$, então diz- se que t é <u>alternado</u> se $t = -x_1 \otimes \ldots\ x_i \otimes x_{i-1} \otimes \ldots \otimes x_k$. Como as componentes do tensor t numa base independem da representação de t, tem-se que t é alternado se suas componentes, com respeito a qualquer base, mudam de sinal quando permuta-se dois índices sucessivos da base. Se $f: \overset{k}{X} V \to T_o^k(V)$ é a aplicação k- linear da definição de produto tensorial, então $T_o^k(V)$ é isomorfo à $\Lambda^k V$ se e somente se f é alternada. <u>Portanto um k-vetor é um tensor alternado contravariante de ordem k</u>.

Um tensor covariante de ordem k alternado é dito uma k-<u>forma exterior</u>. O espaço das k-formas exteriores é representado por $\Lambda^k V^*$. Da mesma maneira, tem-se a existência de um produto exterior $\Lambda$ que mune o espaço $\bigoplus_{k\in Z} \Lambda^k V^*$ de uma álgebra, dita <u>álgebra exterior</u> ou <u>álgebra de Grassmann</u>.

# CAPÍTULO II

# ALGUMAS NOÇÕES BÁSICAS DA GEOMETRIA DIFERENCIAL

## 1 - Variedades Diferenciais

Diz-se que um par $(U,\phi)$ é um sistema de coordenadas local ou uma carta local (n-dimensional), se $\phi : U \to R^n$ é uma função injetora e $\phi(U)$ é um aberto do $R^n$, espaço nas n- uplas dos números reais. Se $p \in U$ diz-se que $(U,\phi)$ é um sistema de coordenadas local ou uma carta local em p. Por brevidade, põe-se $p \underset{U}{=} (x_1,\ldots,x_n)$ ou $(U,x_1,\ldots,x_n)$ onde $(x_1,\ldots x_n) = (\phi_1(p),\ldots,\phi_n(p)$, para designar-se um sistema de coordenadas local em p.

Dois sistemas de coordenadas $(U_\alpha,\phi_\alpha)$ e $(U_\beta,\phi_\beta)$ são ditos compatíveis se $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ e $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ são abertos de $R^n$ e $\phi_\beta o \phi_\alpha^{-1}: \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ é um difeomorfismo, i.e., $\phi_\beta o \phi_\alpha^{-1}$ é diferenciável e o seu jacobiano é diferente de zero em todo o ponto de $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$. A função $\phi_\beta o \phi_\alpha^{-1}$ é chamada mudança de coordenadas ou de cartas.

Uma estrutura diferencial (n-dimensional) é um conjunto de sistemas de coordenadas locais n-dimensionais $Q = \{(U_\alpha,\phi_\alpha);\alpha \in I\}$ tal que

(i) para todo par $(\alpha,\beta) \in I x I$, $(U_\alpha,\phi_\alpha)$ e $(U_\beta,\phi_\beta)$ são compatíveis

(ii) Se $(U,\phi)$ é um sistema de coordenadas local tal que $U \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ é compatível em todo $(U_\alpha,\phi_\alpha) \in Q$, então $(U,\phi) \in Q$.

Uma estrutura diferencial sobre um conjunto M é uma estrutura diferencial $Q = \{(U_\alpha,\phi_\alpha); \alpha \in I\}$ tal que $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Uma variedade diferencial (n-dimensional ou de dimensão n) é um conjunto M munido de uma estrutura diferencial (n-dimensional), que representaremos pelo par $(M,Q)$. Quando estiver subtendida sobre M a estrutura diferencial Q considerada, a variedade será repre sentada somente por M.

Diz-se que U é um <u>aberto</u> da variedade diferencial M se $U \subset M$ e para todo $\alpha \in I$ se tenha $\phi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ aberto do $R^n$.

OBSERVAÇÃO: Todas as variedades consideradas no texto satisfazem as propriedades:

(i) se x, y são elementos de M e $x \neq y$, então existem abertos U e W de M tais que $U \cap W = \emptyset$ e $x \in U$, $y \in W$;

(ii) existe uma coleção enumerável $G$ de abertos de M tal que se U é um aberto de M, então $U = \bigcup_{i \in I} G_i$, com $G_i \in G$.

## 2. O espaço de configuração e o de fase como variedade diferencial - Exemplos.

Em geral o espaço de configuração $C$ de um sistema mecânico não está em correspondência biunívoca com todo o $R^n$; no entanto em cada um de seus pontos existe um sistema de coordenadas que permite munir $C$ de uma estrutura diferencial. Se o sistema mecânico é constituído de uma partícula no $R^n$, então $C$ é uma variedade diferencial imersa no $R^n$, onde as coordenadas generalizadas são os sistemas de coordenadas locais.

EXEMPLO (1) (cf [5]). Consideremos um sistema mecânico constituído de três partículas que se movimentam no $R^3$. Como duas partículas não podem ocupar a mesma posição no espaço, ao mesmo tempo, o espaço de configuração é $C = \{R^3 x R^3 x R^3 - S\}$, onde

$$S = \{(v_1, v_2, v_3) \in R^3 x R^3 x R^3;\ v_1 = v_2 \text{ ou } v_1 = v_3 \text{ ou } v_2 = v_3\}.$$

Se o sistema mecânico é um corpo rígido, por exemplo um pião girando em torno de algum ponto fixo, então a posição do sistema mecânico será descrita dando-se a posição no espaço por tres vetores ortonormais com origem no ponto fixo. Assim se $(e_1, e_2, e_3)$ representa uma base ortogonal arbitrária, então qualquer que seja a posição possivel do sistema, ela será dada pelo terno $(u_1, u_2, u_3)$, onde $u_i = A\, o_i$, $i = 1, 2, 3$, com A representando uma rotação. Como a base ortonormal é arbitrária podemos afirmar que $C$ é o conjunto de todas as bases ortonormais orientadas do $R^3$. Portanto $C$ é uma variedade diferencial de dimensão 3.

Da mesma maneira tem-se que o espaço de fase $P$ é uma variedade diferencial.

EXEMPLO (cf. [6] ): Seja $f: R^n \to R^n$ contínua e para todo $x_o \in R^n$, o sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x), \qquad \text{(II-2.1)}$$

possua uma única solução $\phi(t)$ tal que $\phi(t) = \phi(t, x_o)$ e $\phi(0) = x_o$. Seja $E: D \subset R^n \to R$ uma funçaõ de classe $C^1$, onde D é aberto do $R^n$. Diz-se que E é uma <u>integral</u> <u>primeira</u> ou simplesmente uma <u>integral</u> de (II-2.1) se E não é constante em D e é constante sobre toda solução de (II-2.1) i.e., $D = R^n$. O sistema (II-2.1) é dito ser <u>conservativo</u> se possui integral global. As órbitas dadas pelas soluções do sistema conservativo coincidem com as curvas de nível da integral E.

Se o sistema considerado é o mecânico, i.e, as equações (II-2.1) descrevem o movimento do sistema, então por hipótese (II-2.1) é conservativo. Uma integral será dada pela energia total do sistema, tomada como função das coordenadas de posição e momentum.

Consideramos o pêndulo de massa m, comprimento l e formando um ângulo $\theta$ inicial com a posição de equilíbrio. O momentum será

$$P_\theta = m\ l^2 \dot{\theta}. \qquad \text{(II-2.2)}$$

A energia do sistema é dada por

$$E = \frac{P_\theta^2}{2\ m\ l^2}\ m\ g\ l\ \cos\ \theta,$$

onde g denota a aceleração da gravidade. A equação do movimento do pêndulo é dada por

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\ \text{sen}\ \theta = 0. \qquad \text{(II-2.3)}$$

Ponhamos $f(\theta) = \frac{g}{l}$ sen $\theta$. Então (2.3) fica

$$\ddot{\theta} + f\ (\dot{\theta}) = 0,$$

ou equivalentemente, pondo $\dot{\theta} = u$,

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= u \\ \dot{u} &= -\ f(\theta) \end{aligned} \qquad \text{(II-2.4)}$$

as órbitas deste sistema (que coincidem com as curvas dadas por E) decompõem $R^2$ conforme a figura 1:

A curva a corresponde a um movimento de rotação periódica do pêndulo, quando E<mgl; a curva b corresponde a situação em que E = mgl, e a curva c significa que E>mgl, ou seja o pêndulo possui energia suficiente para ultrapassar a posição $\theta = \pi$ .

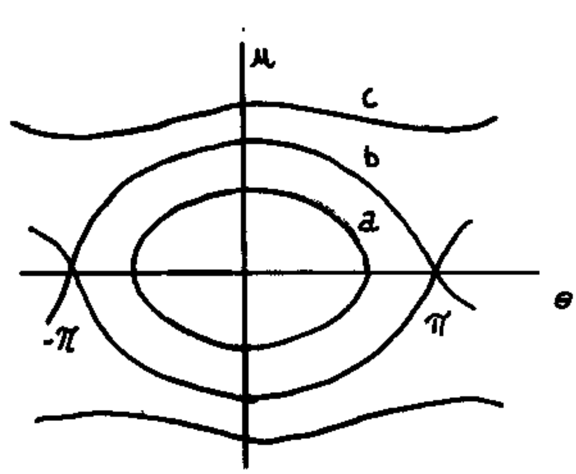


Figura 1

Considerando o subconjunto A de $R^2$ constituído por estas órbitas e levando em conta que ele é formado por curvas parametrizadas, tem-se que A é uma variedade diferencial.

O espaço de fase $P$ é obtido observando-se por exemplo, que se o movimento do pêndulo é periódico, tem-se para $\theta = 0$ que $|p_\theta|$ é o maximo. Portanto, como $P = C \times M$, onde $M$ denota o espaço dos momentuns, em cada um destes subespaços tem-se um segmento fechado da reta contendo a origem, determinado pelas oscilações repetidas do pêndulo. Consequentemente, neste caso, tem-se em $P$ uma elipse (figura 2). Devido a equação (II-2.2) é fácil se ver que $P$ é difeomorfo ao espaço das soluções das equações (II-2.4), logo $P$ é uma variedade diferencial de dimensão 2.

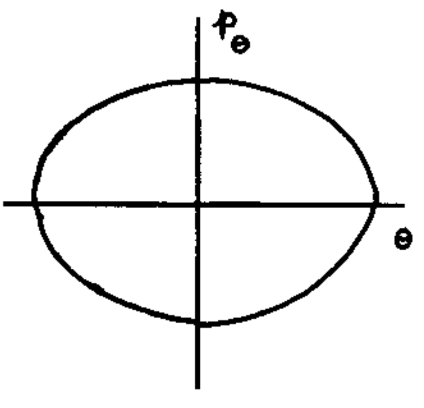


Figura 2

3. <u>Espaços tangente e cotangente. Caracterizações</u>.

Seja (M,Q) uma variedade diferencial de dimensão n e p um ponto de M. Seja $Q_p$ o conjunto $\{\phi; (U,\phi)$ é um sistema de coordenadas local em p, pertencente a $Q\}$. Seja $T_p(M)$ o conjunto das funções $X: Q_p \to R^n$ tais que

$$X(\phi_\beta) = d(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})_{\phi_\alpha(p)} \, X(\phi_\alpha), \qquad \text{(II-3.1)}$$

onde $\phi_\alpha$, $\phi_\beta \in Q_p$ e $d(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})_{\phi_\alpha(p)}$ é a diferencial de $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ no ponto $\phi_\alpha(p)$.

A condição (II-3.1) pode ser reescrita da seguinte maneira,

$$\beta^i = \sum_j \left(\frac{\partial(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})}{\partial x^i}\right)_{\phi_\alpha(p)} \alpha_j \qquad \text{(II-3.2)}$$

onde

$$X(\phi_\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),\ X(\phi_\beta) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

e

$$\left(\frac{\partial(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})}{\partial x^i}\right)\ \phi_\alpha(p)$$

é a matriz jacobiana da mudança de coordenadas. O conjunto $T_p(M)$ munido das operações usuais de soma de funções e produto de um escalar por uma função tem estrutura de espaço vetorial.

Diz-se que o conjunto $T_p(M)$ é o <u>espaço tangente à variedade</u> no ponto p e que a função $X \in T_p(M)$ é um <u>vetor tangente</u> à variedade M no ponto p. Dado $\phi_\alpha \in Q_p$ por $\{(\frac{\partial}{\partial \phi_\alpha^1})_p, \ldots (\frac{\partial}{\partial \phi_\alpha^n})_p\}$ indica-se a base $T_p(M)$ tal que cada $(\frac{\partial}{\partial \phi_\alpha^i})_p$ é definido por

$$\left(\frac{\partial}{\partial \phi_\alpha^i}\right)_p \phi_\beta = \left( \left(\frac{\partial(\phi_\beta^i \circ (\phi_\alpha^1)^{-1})}{\partial x^1}\right)_{\phi_\beta(p)}, \ldots, \left(\frac{\partial(\phi_\beta^i \circ (\phi_\alpha^n)^{-1})}{\partial x^n}\right)_{\phi_\beta(p)} \right)$$

para todo $\phi_\beta \in Q_p$, onde $\phi_\alpha = (\phi_\alpha^1, \ldots, \phi_\alpha^n)$.

Seja $f: U \to R$ uma função real definida num aberto U da variedade M de dimensão n. A função é dita <u>diferenciável no ponto</u> $p \in U$ se para cada $\phi_\alpha \in Q_p$, $f \circ \phi_\alpha^{-1}: (U \cap U_\alpha) \to R$, (dita <u>a lida de f no sistema de coordenadas local</u> $(U_\alpha, \phi_\alpha)$), for diferenciável no ponto $\phi_\alpha(p)$.

Seja

$$\mathcal{F}_p = \{f \in \mathcal{F} ; f : U \to R \text{ e } p \in U\},$$

onde $\mathcal{F}$ é o conjunto das funções reais definidas em abertos de M e diferenciáveis. Seja $x$ um elemento de $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset R^n$ e ponhamos $\bar{x} = \phi_\beta o \phi_\alpha^{-1}(x)$. Então, em virtude da regra de cadeia

$$d(fo\ \phi_\alpha^{-1})\ (x) = d(fo\ \phi_\beta^{-1})\ \bar{x}, \qquad \text{(II-3.3)}$$

para todo $f \in \mathcal{F}_p$. Fica assim associado a cada $x \in R^n$ uma função $X_x : \mathcal{F}_p \to R$ tal que

$$X_x(f) = d(fo\ \phi^{-1})_{\phi(p)}(x) \qquad \text{(II-3.4)}$$

para todo $\phi \in Q_p$, (a qual não depende, devido a (II-3.3), do sistema de coordenadas local escolhido $\phi \in Q_p$).

Pondo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tem-se ainda

$$X_x(f) = \sum_i \left(\frac{\partial(fo\phi^{-1})}{\partial x_i}\right)_{\phi(p)} x_i .$$

Seja $\tilde{T}_p(M)$ o conjunto de todas as funções $X_x$: $\mathcal{F}_p \to x \in R^n$, definidas acima. A função de $R^n$ para $T_p(M)$ definida por $x \to X_x$ é bijetiva e define uma transformação linear de $R^n$ para $T_p(M)$, munido da seguinte estrutura de espaço vetorial:

$$(X_x + X_y)(f) = X_x(f) + X_y(f) \ ,$$

$$(\lambda X_x)(f) \qquad = \lambda(X_x(f)) \ ,$$

para todo $f \in \mathcal{F}_p$ e todo $\lambda \in R$ . Se $Y \in T_p(M)$ e $\phi, \psi \in Q_p$, então, em virtude da definição dos elementos de $T_p(M)$, $X_{y(\phi)} = X_{y(\phi)}$. A função de $T_p(M)$ para $\tilde{T}_p(M)$ definida por $Y \to X_{y(\phi)}$, onde $\phi \in Q_p$, é um isoformismo de espaço vetorial $\tilde{T}_p(M)$. Em virtude deste isoformismo identificamos $T_p(M)$ com $\tilde{T}_p(M)$ e chamamos também os ele mentos de $\hat{T}_p(M)$ de vetores tangentes à M no ponto p.

OBSERVAÇÃO (1): Seja $\hat{T}_p(M)$ o espaço vetorial constituído por todas as aplicações $X : \mathcal{F}_p \to R$ tais que

$$X(\lambda f + \mu g) = \lambda(X(f) + \mu(X(g)) =$$

$$X(f.g) = X(f).g(p) + f(p).X(g),$$

para todo $\lambda$, $\mu \in R$ e f, g $\in \mathcal{F}_p$. Tem-se que existe uma correspondencia injetiva de $T_p(m)$ para $\hat{T}_p(M)$. Se cada elemento de $\mathcal{F}_p$ é de classe $C^\infty$, i.e., as lidas em sistemas de coordenadas locais possuem em derivadas parciais contínuas de todas as ordens, então $\hat{\hat{T}}_p(M)$ é isomorfo a $\hat{T}_p(M)$.

OBSERVAÇÃO (2): Seja uma curva regular $\alpha: (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$, $\varepsilon > 0$, i.e., $\phi \, 0 \, \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to R^n$ é diferenciável e $\frac{d}{dt}(\phi 0 \alpha)(t') \neq 0$ para todo $t' \varepsilon (-\varepsilon,\varepsilon)$ e $\phi \in Q_p$, $p = \alpha(0)$ }. Então a cada curva regular podemos associar um elemento de $T_p(M)$. De fato, seja $f \in Q_p$ e $\Gamma_p = \{\alpha , \alpha$ é uma curva regular tal que $\alpha(0) = p\}$. Então temos uma função de $\Gamma_p(M)$ definida por $\alpha \to v_\alpha$, onde $v_\alpha = (\frac{d}{dt}(f o \alpha))_t$. Mostra-se facilmente que esta função é sobrejetiva, logo existe uma bijeção canônica de $T_p(M)$ sobre o quociente de $\Gamma_p$ pela relação de equivalência definida por $\alpha \sim \alpha' \Longleftrightarrow v_\alpha = v_{\alpha'}$. Em virtude disto chama-se frequentemente uma tal classe de equivalência de vetor tangente à curva no ponto p. Dora em diante usaremos $\dot{q}$ em lugar de $v_\alpha(f)$, desde que isto não acarrete confusão.

Seja $T_p(M)$ o espaço tangente à variedade no ponto p. O espaço dual $(T_p(M))^*$ de $T_p(M)$, também indicado por $T^p(M)$, é chamado de espaço cotangente à M no ponto p.

Se $f \in \mathcal{F}$ então a sua diferencial é uma aplicação definida por $p \to df_p$ de U em $T^p(M)$. Se

$$\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p\}$$

fôr a base de $T_p(M)$ associada a um sistema de coordenadas local $(U, x_1, \ldots, x_n)$, então o conjunto $\{(dx_1)_p \ldots, (dx_n)_p\}$ será base em $T^p(M)$, (Cf. [7]). Pomos $df_p = \sum_i (\frac{\partial f}{\partial x_i}) dx_i$ e chamamos $df_p$ de vetor cotangente à M no ponto p, determinado pela função f.

## 4- Álgebra tensorial num ponto de uma Variedade Diferencial

Seja M uma variedade diferencial n-dimensional e $T_p(M)$ o espaço vetorial tangente à M no ponto $p \in M$. Por $A(T_p(M))$ designa-se a álgebra tensorial de tensores contravariantes relativa ao espaço tengente $T_p(M)$, em $p \in M$. Os elementos desta álgebra se chamam tensores contravariantes no ponto $p \in M$. Da mesma forma $A^*(T_p(M)$ designa a álgebra dos tensores covariantes em $p \in M$ e $M(T_p(u)$ a álgebra dos tensores mixtos neste ponto de variedade M.

Os valores $\left(\frac{\partial (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})^j}{\partial x^i}\right)_{\phi_x(p)}$ da expressão (II-3.2) são os valores $A_i^j$ da matriz da mudança de componentes de um tensor contravariante, visto em I-§(5). Portanto

$$\sum \left(\frac{\partial (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})^{i_1}}{\partial x^{m_1}}\right) \cdots \left(\frac{\partial (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})^{i_r}}{\partial x^{m_r}}\right) \bar{t}^{m_1 \ldots m_r} = t^{i_1 \ldots i_r}$$

são as fórmulas classicas usadas para definir um tensor contravariante.

5- Fibrados Vetoriais

Sejam M,N variedades diferenciais e $\pi$: M $\to$ N uma aplicação diferencial $C^\infty$, sobrejetiva. A terna (M, $\pi$, N) é dita variedade fibrada (Cf [8]) se para todo p $\varepsilon$ M,existe uma carta $(\mathcal{V},\phi)$ em p, n+m dimensional e uma carta (V,$\psi$) em $\pi$(p) = q, n - dimensional tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\phi} & R^n \times R^m \\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\ V & \xrightarrow{\psi} & R^n \end{array}$$

é comutativo, ($p_2$ representa a projeção canônica de $R^n x R^m$ sobre $R^n$).

A carta $(\mathcal{V},\phi)$ é dita carta fibrada e a carta (V,$\psi$) é dita induzida por $(\mathcal{V},\phi)$.

Se q $\varepsilon$ N, põe-se $\pi^{-1}(q) = M_q$, subvariedade de M, dita fibra sobre q.

No que se segue a variedade fibrada (M,$\pi$,N) será dita somente fibrada, M espaço total, $\pi$ projeção e N a base do fibrado.

Uma seção de (M,$\pi$,N) é uma aplicação s:$\mathcal{V} \to$ M. de classe $C^\infty$, onde $\mathcal{V}$ é um aberto de N, tal que $\pi$os = $Id_{\mathcal{V}}$.

Um fibrado (M,$\pi$,N) é dito fibrado vetorial se

i) para todo q $\varepsilon$ N, $M_q$ está munido de uma estrutura de espaço vetorial real,

ii) para todo q $\varepsilon$ N existe um aberto $\mathcal{V} \ni$ q e uma carta fibrada $(\pi^{-1}(\mathcal{V}),\phi)$ tal que, para todo p $\varepsilon$ $\mathcal{V}$ $\phi_p:M_p \to \psi_p x R^m$ é um isoformismo de espaços vetoriais, onde $\phi_p \stackrel{def}{=} \phi/M_p$ e $(\mathcal{V},\psi)$ é a carta induzida por $(\pi^{-1}(\mathcal{V}),\phi)$.

## 6- Fibrados tangente e contangente

Seja M uma variedade diferencial. Por TM designaremos o conjunto de todos os vetores tangentes à variedade M, i.e. $TM = \bigcup_{p\in M} T_p(M)$.

Se $X \in TM$ então existe um único $p \in M$ tal que $X \in T_p(M)$; este p é dito a origem de X. Por $\pi$ indicaremos a aplicação de TM sobre M tal que $\pi(X)$ é a origem de X.

Seja $(U,\phi)$ um sistema de coordenadas local e ponhamos $\phi = (\phi_1,\ldots,\phi_n)$. se $p \in U$ e $X \in \hat{T}_p(M)$ então

$$X = \sum_i \xi_i \left[\frac{\partial}{\partial\phi_i}\right]_p$$

onde

$$\{\left[\frac{\partial}{\partial\phi_1}\right]_p,\ldots,\left[\frac{\partial}{\partial\phi_n}\right]_p\}$$

é a base de $\tilde{T}_p(M)$ associada à $\phi$. Consideremos a aplicação $\tilde{\phi}: X \to (\ (p),\xi_1,\ldots,\xi_n)$ de $\pi^{-1}(U)$ em $R^{2n}$. Ponhamos $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$ então $\tilde{\phi}(\tilde{U}) = \phi(U)xR^n$, ou seja $(\tilde{U},\tilde{\phi})$ é um sistema de coordenadas local, associado à $\phi \in Q$. É de verificação quase imediata que a coleção constituida por todas as cartas locais $(\tilde{U},\tilde{\phi})$ onde $\phi \in Q$, determina sobre TM uma estrutura de variedade diferencial e que a terna $(TM,\pi,M)$ é uma variedade fibrada vetorial, dito fibrado tangente a M.

De maneira análoga, se $T^*M = \bigcup_{p\in M} T^p(M)$ é o conjunto de todos os vetores cotangentes à M, então $T^*M$ é uma variedade diferencial de dimensão 2n e $(T^*M, \pi^*, M)$, onde $\pi^*: T^*M \to M$ é sobrejetiva, é uma variedade fibrada vetorial, dito fibrado cotangente à M. (Maiores detalhes, veja o CAP. III, §2).

7- Formas diferenciais

7.1) Formas diferenciais no $R^n$.

Seja $p \in R^n$ e $T_p(R^n) = V_p$ o respectivo espaço tangente e $\Lambda^k V_p^*$ o espaço dos k-vetores, associados ao espaço vetorial $V_p$. Os elementos de $\Lambda^k V_p^*$ serão chamados de k-forma (exterior) sobre V. Seja $f: X^k V_p^* \to \Lambda^k V_p^*$ definida por:

Se $\phi_1,\ldots,\phi_k$ são tais que $\phi_i \in V_p^*$ e se $v_j \in V_p$, então $f(\phi_1,\ldots,\phi_k) = \det\{-\phi_i(v_j)\}$, onde

$$\{\phi_i(v_j)\} \doteq \begin{pmatrix} \phi_1(v_1)\ldots\phi_1(v_k) \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \phi_k(v_1)\ldots\ _k(v_k) \end{pmatrix}$$

Logo f satisfaz (PEa), (PEb) e (PEc). Põe-se $\det\ \{\phi_i(v_j)\} =$ $= \phi_1 \wedge \phi_2 \ldots \wedge \phi_k$.

Se $\{(dx_1)_p \ldots (dx_k)_p\}$ denota a base dual da base canônica $\{e_1,\ldots e_n\}$ de $R^n$, i.e., $(dx_i)_p \in V_p^*$ é definida por

$$(dx_i)_p(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

então o conjunto $\{(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})_p : 1 \leq i_1 \ll \ldots\ i_k \leq n\}$ é uma base de $\Lambda^k V_p^*$,

Diz-se que $\omega$ é uma k-forma diferencial (exterior) em $R^n$ se

$$\omega : R^n \to \bigcup_{p\in R^n} \Lambda^k V_p^*$$

é uma aplicação tal que para todo $p \in R^n$, existe um aberto U de $R^n$ tal que $p \in U$ e para todo $q \in U$

$$\omega(q) = \sum a_{i_1\ldots i_k}(q)(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})_q \qquad \text{(II.(7.1)1)}$$

onde, $a_{i_1} \ldots_{i_k}$ são funções diferenciáveis de U para R, $(dx_{i_1} \Lambda \ldots \Lambda dx_{i_k})_p$ é a base acima definida e $1 \le i_1 < \ldots \vee_{i_k} \le n$ tem-se a notação simplificada

$$\omega = \sum_I a_I \, dx_I$$

no aberto U acima mencionado.

Convenciona-se que uma 0-forma diferencial em $R^n$, é uma função diferenciável $f : R^n \to R$.

Sejam $\omega$ e $\eta$ k e q-formas diferenciais em $R^n$, respectivamente. Define-se $\omega \Lambda \eta$ como sendo a k+q-forma em $R^n$

$$\omega \Lambda \eta = \sum a_I b_j dx_I \Lambda dx_j$$

onde

$$\omega = \sum a_I \, dx_I \text{ e } \eta = \sum b_j \, dx_j.$$

Por $\Omega^k(R^n)$ denotaremos o conjunto $\Omega^k(R^n) = \{\omega \; ; \; \omega$ é uma k-forma diferencial de $R^n\}$.

Para todo k inteiro não negativo, existe (Cf [9]) uma única função de $\Omega^k(R^n)$ para $\Omega^{k+1}(R^n)$, indicada por d, satisfazendo

DE i) $d(\omega+\eta) = d\omega + d\eta$ ,

DE ii) $d(\omega\Lambda\eta) = d\omega\Lambda\eta + (-1)^k \omega\Lambda d\eta$,

DE iii) $d(d\omega) = d^2\omega = 0$,

DE iv) Se f é uma função diferenciável, então df é q diferencial de f, i.e.,

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i .$$

Diz-se que d é a <u>derivada exterior</u> de $\omega \in \Omega^k(R^n)$.

Tem-se

$$d\omega \underset{U}{=} \sum_{I} da_I \wedge dx_I \quad ,$$

onde

$$\omega \underset{U}{=} \sum_{I} a_I \quad dx_I$$

Sejam V, W espaços vetoriais sobre F, de dimensão n e m respectivamente. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Então T induz uma aplicação , representada por $\Lambda^k T$ de $\Lambda^k V$ para $\Lambda^k W$. De fato, sejam

$$f : X^k\ V \ \to \Lambda^k\ V \text{ e } g : X^k\ W \to \Lambda^k W$$

as aplicações caracterizadas por PEa, PEb e PEc. Então $\Lambda^k T$ é definida por

$$\Lambda^k T(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = (\Lambda^k T \circ f)(v_1, \ldots, v_k) = g(T(v_1), \ldots, T(v_n)) =$$

$$= T(v_1) \wedge \ldots \wedge T(v_n) .$$

$$\begin{tikzcd}
X^k V \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X^k W \arrow[d, "y"] \\
\Lambda k_V \arrow[r, "\Lambda k_T"'] & \Lambda k_W
\end{tikzcd}$$

Denomina-se $\Lambda^k T$ de k-ésima potência exterior de T. Se $(T_{ij})$ é a matriz associada à transformação linear $t: V \to W$, i.e,

$$T\sigma_i = T_{ij}\ \zeta_j$$

onde $\{\sigma_1, \ldots, {}_n\}$ é a base de V e $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_m\}$ é a base de W, então

$$\Lambda^k T(\sigma_{i_1} \Lambda \ldots \Lambda \sigma_{i_n}) = T(\sigma_{i_1}) \Lambda \ldots \Lambda T(\sigma_{i_n}).$$

Como

$$T_{i_j} = \sum_{p_j} T_{i_j\, p_j}\, p_j,\ j = 1, \ldots, k$$

Tem-se

$$\Lambda^k T(\sigma i_1 \Lambda \ldots \Lambda \sigma_{i_n}) = \sum T_{i_1\, p_1} \ldots T_{i_k p_k\, p_1} \zeta \Lambda \ldots \Lambda \zeta_{p_k} = \sum T_{IP}\, \zeta_p.$$

É de verificação imediata que

$$\Lambda^k (T\ H) = (\Lambda^k T)\ (\Lambda^k H)$$

Seja $f : R^n \to R^m$ uma função diferenciável. Então a diferencial de f no ponto $p \in R^n$ é uma transformação linear $df_p : V_p \to V_{f(p)}$. Logo $df_p$ induz uma aplicação ${}^t(\Lambda^k df_p)$ de $\Lambda^k V^*_f(p)$ para $\Lambda^k V^*_p$, definida por

$${}^t(\Lambda^k df_p) = \Lambda^k ({}^t df_p)$$

onde ${}^t df_p$ representa a transposta de transformação linear $df_p$, i.e,

$${}^t df_p : V^*_{f(p)} \to V^*_p$$

é uma aplicação definida por

$${}^t df_p(\phi)_v = \phi(df_p(v)),$$

onde $\phi \in V^*_{f(p)}$ e $v \in v_p$.

PROPOSIÇÃO(7.1-1). Seja $f : R^n \to R^m$ diferenciável. A toda k-forma diferencial

$$\omega\ R^m \to \bigcup_{q \in R^m} \Lambda^k V^*_q$$

está associada uma k-forma diferencial do $R^n$ para $\bigcup_{p\varepsilon R^n} \Lambda^k V_p^*$, indicada por $[f^*\omega]$ e definida por

$$[f^*\omega](p)(v_1\Lambda\ldots\Lambda v_n) = \omega(f(p))(df_p(v_1)\Lambda\ldots\Lambda df_p(v_n)).$$

Demonstração: Suponhamos que $k = 1$. Então $\Lambda^k V_q^* = V_q^*$.

Portanto

$$^t(\Lambda^k df_p) = {}^t(df_p) = {}^t df_p$$

Como $\omega(f(p)) \varepsilon V^*_{f(p)}$ tem-se

$$^t df_p(\omega(f(p)) = \omega(f(p))df_p(v),\ v \varepsilon V_p.$$

Defina-se um 1-forma denotada por $[f^*\omega]$ de $R^n$ para $\bigcup_{p\varepsilon R^n} V_p^*$

$$[f^*\omega](p)v = {}^t df_p(\omega(f(p))(v) = \omega(f(p))df_p v.$$

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $k-1$.

Então, como

$$^t(\Lambda^k df_p) = {}^t(\Lambda^{k-1} df_p\ .\Lambda df_p) = {}^t(df_p)\,{}^t(\Lambda^{k-1} df_p)$$

tem-se

$$
\begin{aligned}
& t(\Lambda^k df_p)\omega(f(p))(v_1\Lambda\ldots\Lambda v_k) = \\
&= {}^t(df_p)({}^t(\Lambda^{k-1} df_p)\omega(f(p))(v_1\ldots v_k) = \\
&= {}^t(df_p)({}^t(\Lambda^{k-1} df_p)\omega(f(p))(v_1\Lambda\ldots\Lambda v_{k-1})\Lambda\omega(f(p)v_k \\
&= {}^t(df_p)({}^t df_p\omega(f(p))v_1\Lambda\ldots\Lambda {}^t df_p\omega(f(p))v_{k-1}) \\
&\quad \Lambda\omega(f(p))v_k = {}^t(df_p)(\omega(f(p))df_p(v_1)\Lambda\ldots \\
&\quad \ldots\Lambda\omega(f(p))df_p(v_{k-1}))\Lambda\omega(f(p))v_k \\
&= \omega(f(p))(df_p(v_1)\Lambda\ldots\ \Lambda df_1(v_{k-1}))\ \Lambda {}^t(df_p)\omega(f(p))v_k \\
&= \omega(f(p))df_p(v_1)\Lambda\ldots\ \Lambda df_p(v_{k-1})\ \Lambda df_p(v_k).
\end{aligned}
$$

Defina-se $[f^*\omega] : R^n \to \bigcup_{p\varepsilon R^n} \Lambda^k V_p^*$ por

$$[f^*\omega](p)(v_1\Lambda\ldots\Lambda v_k) = \omega\ (f(p))(df_p(v_1)\Lambda\ldots\Lambda\ldots\Lambda df_p(v_k)).$$

$$\begin{tikzcd}
R^n \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "{[f^*\omega]}"'] & R^m \arrow[r, "\omega"] & \bigcup_{q\varepsilon R^m} \Lambda^k V_q^* \arrow[d] \\
& & \bigcup_{p\varepsilon R^n} \Lambda^k V_p^*
\end{tikzcd}$$

Ponhamos $f^* = t(\Lambda^k df_p)$. Então a aplicação $f^*$ é um operador linear, em relação a soma de formas diferenciais e multiplicação de formas por escalares. Tem-se ainda que:

i) $[f^*(\omega\Lambda\eta)] = [f^*\omega] \Lambda [f^*\eta]$

ii) $[f^*(g(\omega))] = [f^*g] [f^*\omega]$, onde $g$ é 0-forma

iii) $[(foh)^* \omega] = [h^*[f^*\omega]]$

iv) $[f^*d\omega] = d[f^*\omega]$

$f^*$ opera em $\omega$, k-forma em $R^m$, por <u>substituição de variáveis</u>. De fato, se $f: R^n \to R^m$ é diferenciável e se

$$f(x_1,\ldots,x_n) = (f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_n(x_1,\ldots x_n)) =$$

$$= (y_1,\ldots,y_m)$$

pondo

$$\omega = \sum_I a_I dy_I$$

tem-se

$$[f^*\omega] = [f^*(\sum a_I dy_I)] = \sum [f^*a_I][f^*dy_I]$$

Mas

$$[f^*dy_I](v) = dy_I(df(v)) = d(y_I of(v)) = df_I(v)$$

Logo

$$[f^*\omega] = \sum [f^*a_I]\ df_I = \sum a_I(y_1,\dots,y_m)\ df_I.$$

Portanto $[f^*\omega]$ é uma k-forma dependendo das variáveis $x_1,\dots,x_n$.

Se $\omega$ é uma 0-forma, tem-se $|f^*\omega| = \omega \circ f$.

EXEMPLO. Considere uma 2-forma

$$\omega = a(y_1,y_2)dy_1 \Lambda dy_2.$$

Então

$$[f^*\omega] = [f^*(a(y_1,y_2)dy_1 \Lambda dy_2)] =$$

$$= [f^*(a(y_1,y_2)] [f^*ay_1\ \Lambda\ f^*dy_2]$$

onde $f : R^n \to R^2$ é diferenciável. Portanto

$$[f^*\omega] = a(f_1(x_1,\dots,x_n), f_2(x_1,\dots,x_n)df_1 \Lambda df_2$$

Mas

$$df_e = \sum \frac{\partial f_e}{\partial x_i}\ dx_i\ ,\ e = 1,2$$

Logo

$$[f^*\omega] = \sum a(f_1(x_1,\dots,x_n), f_2(x_1,\dots,x_n)) \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_i \Lambda dx_j$$

ou ainda pondo $f_e = y_e$ ,

$$[f^*\omega] = \sum a(y_i(x_i,\dots,x_n), y_2(x_1,\dots,x_n)) \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_j} dx_i \Lambda dx_j.$$

7.2) <u>Formas diferenciais em variedades</u>.

Sejam o espaço euclideano $R^n$ e $\Lambda^k(V_p)^*$ o espaço dos k-vetores, onde $V_p = T_p(R^n)$. No que se segue identificaremos $R(^n_R)$

com $\Lambda^k(R^n)^*$, onde $\Lambda^k(R^n)^* = \bigcup_{p\in R^n} \Lambda^k(V_p)^*$

Seja $(M,Q)$ uma variedade diferencial de dimensão n, onde

$$Q = \{(U_\alpha, f_\alpha);\ f_\alpha : U_\alpha \to f_\alpha(U_\alpha)\ M, \alpha\in I\}$$

é uma estrutura diferencial sobre M. Ponhamos

a) $f_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha$

b) $V_\alpha \cap V_\beta = V_\beta \quad V_\alpha = V_{\alpha\beta}$

c) $f_\alpha^{-1}\ (V_{\alpha\beta}) = (U_\alpha);\ f_\beta^{-1}\ (V_{\alpha\beta}) = U_\beta$

d) $f_{\alpha\beta} = f_\alpha^{-1} \circ f_\beta : U_{\beta\alpha} \to U_{\alpha\beta}$

TEOREMA(7.2-1). <u>Seja</u> $(M,Q)$ <u>uma variedade diferencial de dimensão</u> n. <u>Então para todo</u> k <u>inteiro não negativo existe uma variedade diferencial de dimensão</u> $n + \binom{n}{k}$, <u>indicada por</u>

$$(\Lambda^k M, (U_\alpha x \Lambda^k(R^n)\ ,\ \Lambda^k f\ ),\ \alpha \in I)). \qquad (*)$$

<u>Demonstração</u>. Seja k inteiro não negativo. Seja $\Lambda^k(R^n)$ o respectivo espaço dos k-vetores. Então a mudança de coordenadas $f_{\alpha\beta} : U_{\beta\alpha} \to U_{\alpha\beta}$ induz uma aplicação

$$(df_{\alpha\beta})_q^* : \Lambda^k(R^n) \to \Lambda^k(R^n)\ ,\ q\in U_{\beta\alpha}.$$

Como $U_{\beta\alpha} \subset U_\beta$, pela identificação mencionada acima, tem-se $U_{\beta\alpha}\ x\Lambda^k(R^n)^* \subset U_\beta\ x\ R\binom{n}{k}$ e $U_{\alpha\beta}\ x\Lambda^k(R^n)^* \subset U_\alpha x\ R\binom{n}{k}$.

Seja

$$\check{\Lambda}^k f_{\alpha\beta} : U_{\beta\alpha}\ x\Lambda(R^n)^* \to U_{\alpha\beta}\ x\Lambda^k(R^n)^*$$

a aplicação definida por

$$\check{\Lambda}^k f_{\alpha\beta}\ (q,\omega) = (f_{\alpha\beta}(q)\ ,\ df_{\alpha\beta})^*{}_q\omega)\ ,\ q\in U_{\beta\alpha}$$

onde $\omega$ é uma forma definida em $R^n$.

Se $(U_\beta, f_\beta)$ é uma carta local e se $q \varepsilon U_\beta$ então existe $\alpha \varepsilon I$ tal que $q \varepsilon U_{\beta\alpha}$. Seja $\omega$ uma k-forma em $R^n$ e seja

$$\check{\Lambda}^k f_\beta : (U_{\beta\alpha} \times \Lambda^k(R^n)^*) \to \check{\Lambda}^k f_\beta (U_{\beta\alpha} \times \Lambda^k(R^n)^*) = V_{\alpha\beta} ,$$

tal que

$$(\check{\Lambda}^k f_\alpha) \bar{o}^1 \check{\Lambda}^k f_\beta = \check{\Lambda}^k f_{\alpha\beta} \qquad (*,*)$$

Pondo-se $\check{\Lambda}^k M = \bigcup V_{\alpha\beta}$ , tem-se que

$$\Lambda^k Q = \{ (U_\alpha x \Lambda^k (R^n)^* ; \check{\Lambda}^k f_\alpha) ; \alpha \varepsilon I \}$$

define uma estrutura diferencial sobre $\check{\Lambda}^k M$, onde (*,*) caracteriza a mudança de coordenadas nesta variedade.

TEOREMA(7.2-2). <u>A menos do difeomorfismo, $\check{\Lambda}^k M$ é única, cuja mudança de coordenadas é caracterizada por</u> (*,*)

<u>Demonstração</u>. De fato, se $(\hat{M}, (\hat{U}_\alpha, \hat{f}_\alpha) ; \alpha \varepsilon I)$ é outra, dimensão $n + \binom{n}{k}$, obtida conforme o teorema acima, como $\hat{U}_\alpha = U x \Lambda^k (R^n)^*$ tem-se que $\hat{f}_\alpha \, o (\Lambda^k f_\alpha)^{-1} : \Lambda^k \hat{M} \to \hat{M}$ define o difeomorfismo entre estas variedades.

Diz-se que (*) é uma <u>variedade de</u> k-<u>forma</u> (tangentes) de M.

Seja ${}^{\pi}{}_{\Lambda^k(M)} : \Lambda^k M \to M$ tal que, para todo $\alpha \varepsilon I$ e todo $q \varepsilon \mathcal{V}$,

$$f_\alpha(q) = (\pi_{\Lambda^k(M)} \, o \Lambda^k f_\alpha)(q, \omega) .$$

Então ${}^{\pi}{}_{\Lambda^k(M)}$ é uma <u>projeção</u> de $\Lambda^k M$ sobre M.

Ponhamos

$$\check{\Lambda}^k_q(M) = ({}^{\pi}{}_{\Lambda^k(M)})^{-1}(q) \quad , q \varepsilon M .$$

Então $\overset{\vee}{\Lambda}{}^k_q(M)$ está munido de uma estrutura de espaço vetorial. De fato, defina-se

$$(\overset{\vee}{\Lambda}{}^k f_\alpha)_q \; : \quad \omega \; \rightarrow \overset{\vee}{\Lambda}{}^k f_\alpha(f_\alpha^{-1}(q), \omega)$$

Então $(\overset{\vee}{\Lambda}{}^k f_\alpha)_q$ é um difeomorfismo entre o espaço vetorial $\Lambda^k(R^n)*$ sobre $\overset{\vee}{\Lambda}{}^k_q(M)$.

DEFINIÇÃO(7.2-3). Uma k-forma $\omega$ sobre a variedade diferencial M é uma aplicação

$$\omega \; : \; M \; \rightarrow \overset{\vee}{\Lambda}{}^k(M)$$

tal que

$$\pi_{\overset{\vee}{\Lambda}{}^k(M)} \, o\omega(q) \; = \; Id_M, \; q \in U, \; \omega(q) \in \overset{\vee}{\Lambda}{}^k_q(M)$$

Diz-se que $\omega$ é uma k-forma diferencial sobre M se $(\Lambda^k f \;)_q^{-1}$ o (q) é uma f-forma diferencial sobre

$$\Lambda^k(R^n)*, \; q \in U_\alpha.$$

Se $\Omega(\overset{\vee}{\Lambda}{}^k M)$ é o conjunto de todas k-formas sobre M, então existe um unico operador

$$D \; : \; \Omega(\Lambda^k M) \; \rightarrow \; \Omega(\Lambda^{k+1} M)$$

satisfazendo DE(i), (ii), (iii), (iv).

De fato, se $\omega$ é uma k-forma diferencial em $\overset{\vee}{\Lambda}{}^k M$ então $(\overset{\vee}{\Lambda}{}^k f_\alpha)_q^{-1}$ $o\omega(q)$ é uma k-forma diferencial sobre $\Lambda^k(R^n)*$. Logo $(\overset{\vee}{\Lambda}{}^k(f_\alpha))_q^{-1}$ o $d\omega(q)$ é uma k+1-forma diferencial sobre $\Lambda^{k+1}(R^n)*$. Defina-se

$$D \; : \; \omega \; \rightarrow \; D\omega$$

onde $D\omega = (\overset{\vee}{\Lambda}{}^k f_\alpha)_q^{-1} \circ d\omega(q)$ é a k+1-forma em $\Lambda^{k+1}(R^n)^*$.

Diz-se que D é a <u>derivada</u> <u>exterior</u> de $\omega$, que represen teremos por <u>d</u>. É imediato que <u>d</u> satisfaz as propriedades DE(i), (ii), (iii) e (iv).

No caso em que a variedade é uma espaço vetorial V, $\overset{\vee}{\Lambda}{}^k V$ é o espaço vetorial das k-formas sobre V, onde uma estrutura diferencial $\overset{\vee}{\Lambda}{}^k Q$ em $\overset{\vee}{\Lambda}{}^k V$ caracterizada pelas cartas locais $(U_\alpha \times R\binom{n}{k}, \overset{\vee}{\Lambda}{}^k f_\alpha)$, $\alpha \in I$ e onde $\overset{\vee}{\Lambda}{}^k f_\alpha$ é tal que

$$(\overset{\vee}{\Lambda}{}^k f_\beta)^{-1}_{\circ} (\overset{\vee}{\Lambda}{}^k f_\alpha) = \overset{\vee}{\Lambda}{}^k f_{\alpha\beta}$$

com

$$\overset{\vee}{\Lambda}{}^k f_{\alpha\beta} : (x,\omega) \to (\bar{x}, \bar{\omega})$$

onde $\bar{x} = f_{\alpha\beta}(x)$ e $\bar{\omega} = \Lambda^k f_{\alpha\beta}\omega$, é a k-ésima potência exterior de $f_{\alpha\beta}$ i.e, $\Lambda^k f_{\alpha\beta}$ é a aplicação de $\Lambda^k(R^n)^*$, para $\Lambda^k(R^n)^*$, induzida pela transformação linear bijetiva $f_{\alpha\beta} : U_{\beta\alpha} \subset R^n \to U_{\alpha\beta} \subset R^n$, conforme visto anteriormente.

O caso particular em que $V = R^n$ nos dá a teoria das k-formas no $R^n$.

Uma k-forma diferencial $\Omega$ em uma variedade diferencial M é dita <u>fechada</u> se $d\,\Omega = 0$ e <u>exata</u> se existe $\eta$,k-1-forma em M tal que $d\eta = \Omega$. Toda forma exata é fechada, mas a recíproca nem sempre é verdadeira.

OBSERVAÇÃO: <u>Para o que se segue é conveniente observar se o seguinte: seja</u> $\theta : M \to \overset{\vee}{\Lambda}{}^1 M$ <u>uma 1-forma diferencial sobre uma variedade diferencial</u> M. <u>Se</u> $p \in M$, <u>então num sistema de coordenadas local</u>, $\theta(p)$ <u>é um elemento de</u> $\Lambda^1(R^n)^* \overset{def}{=} \bigcup_{q \in R^n} T_q^*(R^n)$. <u>Em vista disto, considerar-se-á uma 1-forma diferencial como sendo uma aplicação diferencial</u> $\theta : M \to T^*M$ <u>tal que</u> $\theta(p) \in T_p^*(M)$, <u>para todo</u> $p \in M$.

Uma k-forma diferencial em M será, pois, uma soma do produto exterior de 1-formas, k-vezes: $\omega : M \to \Lambda^k T^*M$.

## 8- Campos de Vetores

Por $F_A^B$ representamos o conjunto das aplicações diferenciáveis de A para B.

Um campo de vetores num aberto U de M elementos X de $F_U^{TM}$ tal que, para todo $p \in U$, $\pi\text{-}(X(p)) = p$, i.e., $X(p) \in T_p(M)$. Se $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ é uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$, põe-se

$$X_\alpha(p)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\Big|\ t = 0\ ,$$

(veja § 3.)

Em termos de coordenadas locais, tem-se

$$X(f) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \ \frac{dx}{dt}i.$$

Podemos supor então que

$$X : F(M) \to F(M)$$

é uma aplicação da álgebra $F(M)$ das funções reais de classe $C^\infty$ definidas em abertos da variedade M, que a todo f associa $(\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i})(f)$, onde $a_i = \frac{dx}{dt}i$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}$ é o vetor tangente à curva $x_i \to f(0,\ldots,x_i,\ldots,0)$, no ponto $p \in U$, Põe-se

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\ .$$

Seja $b_U$ o conjunto constituído de todos os campos vetores sobre U, aberto de M. Tem-se que são válidas as seguintes propriedades :

i) $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$ ,

ii) $X(f + g) = X(f) + X(g)$ ,

iii) $X(f)p = 0$ , se $f \in \mathcal{F}_M^R$ é constante e $p \in M$ ,

iv) $(X + y)f = X(f) + Y(f)$ ,

onde $X$ , $y \in \mathcal{H}_M$ e $f$, $g \in \mathcal{F}_M^R$ são quaisquer.

Sejam $X, Y \in \mathcal{H}_M$. Por $|X , Y|$ representar-se-á o único campo de vetores tal que para todo $f \in \mathcal{F}_M^R$ tem-se

$$[X , Y] (f) = (XY - YX)(f)$$

Em termos de coordenadas locais tem-se que

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad e \quad y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad ,$$

onde $x_i : U \to R^n$ é um sistema de coordenadas local em $p \in U$. Se $f \in \mathcal{F}_M^R$ então

$$\begin{aligned} X(Yf) &= \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} (Yf) = \\ &= \sum_i a_i \sum_j \left(\frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) \\ &= \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial b_J}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + b_j\, a_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) . \end{aligned}$$

Analogamente, obtem-se

$$Y(Xf) = \sum_{i,j} \left(b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + b_i\, a_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) .$$

Donde

$$(XY - YX)f = \sum_i \left(\sum_i a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial f}{\partial x_j} .$$

Pondo

$$C_j = \sum_i a_i \frac{\partial b_i}{\partial x_i} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i} .$$

Tem-se

$$(XY - YX)f = Z(f), \; Z = \sum_j C_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Logo, se X , Y são elementos de $H_U$, então existe um (único) campo Z representado por $[X , Y]$ tal que, para todo f $\varepsilon$ $F_M^R$

$$[X , Y] f = (XY - YX) f$$

Seja M uma variedade diferencial. Uma <u>derivação</u> na álgebra $F_M^R$ é uma aplicação

D: $F_M^R \to F_M^R$ tal que

i) $D(fg) = D(f)g + fD(g)$,

ii) $D(f + g) = D(f) + D(g)$ ,

iii) $D(f) = 0$, se f $\varepsilon$ $F_M^R$ é constante.

Tem-se o resultado: <u>Sejam</u> X, Y $\varepsilon$ $H_M$. <u>A aplicação</u> $f \to XY(f) - YX(f)$, <u>onde</u> f $\varepsilon$ $F_M^R$, <u>é uma derivação na álgebra</u> $F_M^R$ .

As seguintes propriedades são válidas:

i) $[X , y] = - [Y , X]$ ,

ii) $[[X , Y] , Z] + [[Y , Z] , X] + [[Z , X] , Y]$

$= 0$, (igualdade de Jacobi) ,

iii) $[X , fY] = (Xf)Y + f[X , Y]$ , f $F_M^R$ ,

iv) $[X , Y + Z] = [X , Y] + [X , Z]$

Mostra-se que (CF. [10] ), pag.77) a correspondencia que a todo campo de vetores X sobre M, associa a derivação $f \to X,f$ de $F_M^R$ é um isomorfismo.

# CAPÍTULO III

# FORMALISMO HAMILTONEANO

## Transformação de Legendre

Consideremos um espaço vetorial real W de dimensão n, munido de sua estrutura de variedade diferencial natural Q, i.e., Q é um conjunto de cartas locais de dimensão n sobre W tal que

i) se $\phi$: $W \to R^n$ é uma aplicação linear bijetiva, então $(W,\phi)$ $\varepsilon$ Q;

ii) se $(U,\psi)$ é uma carta local tal que $U \subset W$, se $(U,\psi)$ é compatível com todo elemento de Q, então $(U,\psi)$ $\varepsilon$ Q.

Seja v um vetor de W, $T_v(W)$ e $T^v(W)$ os respectivos espaços tangente e cotangente. Para cada v $\varepsilon$ W seja $\xi_v$: $W \to T_v(W)$ tal que $\xi_v(w)(\phi) = d\phi_w(v)$, onde $\phi$ $\varepsilon$ $Q_v$ e w $\varepsilon$ W. Devido a (II-3.1) esta aplicação independente da $\phi$ escolhida. Segue-se que $\xi_v$ é um isomorfismo entre W e $T_v(W)$. Da mesma maneira obtem-se um isomorfismo $\xi^*_v$: $W^* \to T^v(W)$. Por $\xi$ indicaremos a função de WxW em TW definida por $(V,u) \to \xi_v(u)$. Indicaremos $\xi^*$ a função de WxW* em T*W definida por $(v,u) \to \xi^*_v(u)$. Tem-se que $\xi$: WxW $\to$ TW e $\xi^*$: WxW $\to$ T*W são difeomorfismos tais que $(\pi \circ \xi)(V,u) = v$ e $(\pi^* \circ \xi^*)(v,t) = v$, para $(v,u)$ $\varepsilon$ WxW e t $\varepsilon$ W*; ou seja $\xi$: WXW $\to$ TW (resp. $\xi^*$: WxW* $\to$ T*W) é um isomorfismo do fibrado diferencial (WxW, $\pi_W$;W), onde $\pi_W$:WxW$\to$W é a projeção canônica (resp. (WxW*, $\pi^W$; W), onde $\pi^W$: WxW* $\to$ W é a projeção canônica) para o fibrado (TW, $\pi$; W) (resp. (T*W, $\pi^*$; W)).

$$\begin{tikzcd} W\times W \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "\pi_W"'] & TW \arrow[d, "\pi"] \\ & W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W\times W^* \arrow[r, "\xi^*"] \arrow[dr, "\pi^W"'] & T^*W \arrow[d, "\pi^*"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Se $(U, v_1, \ldots, v_n)$ denota um sistema de coordenadas local de $v \in W$, designaremos a base de $T_v(W)$, que lhe é associada por

$$\{ \left[\frac{\partial}{\partial v_1}\right]_v, \ldots, \left[\frac{\partial}{\partial v_n}\right]_v \}$$

e por

$$\{ [dv_1]_v, \ldots, [dv_n]_v \}$$

sua base dual em $T^v(W)$.

Ponhamos

$$\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_v = (\xi_v)^{-1}\left(\left[\frac{\partial}{\partial v_i}\right]_v\right)$$

$$(dv_i)_v = \xi^*_v \left([dv_i]_v\right)$$

onde

$$\xi_v : T^v(W) \to W^*$$

é o isomorfismo inverso de $\xi^*_v$ i.e. $\xi_v = (\xi^*_v)^{-1}$

Seja $L: W x W \to R$ uma função diferenciável e $v \in W$. Por $L_v$ indicaremos a função de $W$ em $R$ definida por $u \to L(v,u)$. Em outras palavras, $L_v$ é a restrição de $L$ ao espaço tangente $T_v(W)$. De fato, fixando $v$, tem-se que $\{v\} \times W$, $W$ e $T_v(W)$ são isomorfos.

Por $[dL_v]$ indicaremos a aplicação de $W$ em $T^v(W)$ tal que $(dL_v) = \xi_v \circ [dL_v]$, para todo $v \in W$. Denotaremos por $\mathcal{L}_{L_v}$ a função diferenciável de $W$ para $W^*$ definida por $u \to (dL_v)(u)$,

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "\mathcal{L}_{L_v}"] \arrow[dr, "{[dL]_v}"'] & & W^* \\ & T^v(W) \arrow[ur, "\xi_v"'] & \end{tikzcd}$$

Em termos de componentes, se $(U,w_1,\dots,w_n)$ é um sistema de coordenadas local em w, então

$$(\frac{\partial L_v}{\partial w_1})_w,\dots,(\frac{\partial L_v}{\partial w_n})_w \in R^n$$

Se representarmos por $\pi_i$ a projeção í-ésima coordenada de $^{\mathcal{L}}L_v$, temos então que

$$(\pi_i o^{\mathcal{L}} L_v) = (\frac{\partial L_v}{\partial w_i})_w \ .$$

Pondo $w_i = \dot{q}_i$ , define-se

$$p_i = \frac{\partial L_v}{\partial \dot{q}_i} = \pi_i o^{\mathcal{L}} L_v$$

com $i = 1,2,\dots,n$. Devido à física, chamamos $p_i$ de <u>momentum</u>.

Para todo $v \in W$, ponhamos

$$< \mathcal{L}_{L_v} > = (\xi_v)^{-1} \, o\mathcal{L}_{L_v} \, o\xi_v^{-1}$$

Então $<\mathcal{L}_{L_v}>$ é uma função diferenciável de $T_v(W)$ para $T^v(W)$.

Se W é um espaço vetorial com produto interno $<,>$ então para cada $v \in W$ tem-se uma forma quadrática positiva definida em W, associada a uma bilinear de $\{v\}x\ Wx\{v\}xW$ para R, definida por $((v;w),(v,\bar{w})) \to <w,\bar{w}>$. Tem-se a seguinte

PROPOSIÇÃO(1.1): <u>Seja</u> W <u>um espaço vetorial com produto interno</u> $< , >$ . <u>Se</u> $w \in W$ <u>e se</u> $L_v$ <u>é a forma quadrática positiva definida em</u> W, <u>associada a este produto interno, então</u> $\mathcal{L}_{L_v}$ <u>é um isomorfismo de</u> W <u>para</u> W*.

<u>Demonstração</u>: Seja $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ base de W. Se $(U,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n)$ for um sistema de coordenadas local em W, então $L_v(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n) = \sum_{i,j} \beta_{ij}\, \dot{q}_i \dot{q}_j$ . Seja

$w = \sum_i z_i\, e_i$. Então considerando $^{\mathcal{L}}L_v$ temos

$$< w,\mathcal{L}_{L_v}(t) > \; = \; < w, d_t L_v >^{(*)1} = \; < \dot{z}_1,\ldots,\dot{z}_n,(\frac{\partial L_v}{\partial q_1})t,\ldots,(\frac{\partial L_v}{\partial q_n})t> \; =$$

$$= \sum_{i,j} \beta_{ij}\, \dot{z}_i\, \dot{q}_j = \; < w,t >$$

Logo $\mathcal{L}_{L_v}$ é uma aplicação de W para W* associada a W, dada pelo produto interno $<w,.> : t \to <w,t> = <w,\mathcal{L}_{L_v}(t)>$. Sendo linear e não degenerado, tem-se que $\mathcal{L}_{L_v}$ é um isomorfismo.

Como W é isomorfo a $T_v(W)$, o produto interno $< \, , >$ induz para cada $v \in W$, uma forma quadrática positiva definida em $T_v(W)$, associada a uma bilinear de $T_v(W) \times T_v(W)$.

COROLÁRIO(1.1): <u>Se</u> $L_v$ <u>é a forma quadrática em</u> $T_v(W)$, <u>associada ao produto interno</u> $< \, , >$ <u>definido em</u> W, <u>então</u> $<\mathcal{L}_{L_v}>$ <u>é um isomorfismo de</u> $T_v(W)$ <u>em</u> $T^v(W)$.

TEOREMA(1.1): <u>Se</u> $\mathcal{L}_{L_v}$ <u>tem inversa</u> $(\mathcal{L}_{L_v})^{-1}$, <u>pondo</u> $w = L_v(v)$, <u>então</u> $(\mathcal{L}_{L_v})^{-1} = \mathcal{L}_{H_w}$, <u>onde</u> $H_w : W^* \to R$ <u>é caracterizado por</u>

$$H_w = \textstyle\sum_i \dot{q}_i\, p_i - L_v. \qquad \text{(III-1.1)}$$

<u>Demonstração</u>: Sejam $(p_1,p_2,\ldots,p_n) = y$ as coordenadas locais em W* e consideremos $(\mathcal{L}_{L_v})^{-1} : W^* \to W$. Então pondo $\mathcal{L}_{L_v}^{-1}(y) = (\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_n)$ e definindo $H_w(y) = \; < y,\mathcal{L}_{L_v}(y)> - (L_v \, o \mathcal{L}_{L_v}^{-1})(y)$, tem-se $H_w = \sum_i \dot{q}_i\, p_i - L_v$.

Consideremos $\mathcal{L}_{H_w} : W^* \to W^{**} = W$. Então $\pi_j . o\mathcal{L}_{H_w} = \frac{\partial H_w}{\partial p_j}$. Derivando (III-1.1) em relação a $p_j$, tem-se que

$$\frac{\partial H_w}{\partial p_j} = \dot{q}_j \qquad \text{(III-1.2)}$$

Portanto

$$\mathcal{L}_{L_v} o \mathcal{L}_{H_w}(p_1,\ldots,p_n) = \mathcal{L}_{L_v}\left(\frac{\partial H_w}{\partial p_1},\ldots,\frac{\partial H_w}{\partial p_n}\right) =$$

$$\mathcal{L}_{L_v}(q_1,\ldots,q_n) = \left(\frac{\partial L_v}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial L_v}{\partial q_n}\right) = (p_1,\ldots,p_n)$$

Ou seja, $\mathcal{L}_{L_V} o\mathcal{L}_{H_V} = Id$ . Logo $\mathcal{L}_{H_w} = (\mathcal{L}_{L_V})^{-1}$ , em uma vizinhança de um ponto de W*.

DEFINIÇÃO(1.1): Sejam $L : W \times W \to R$ diferenciável e $(w,t) \in W\times W$. A <u>transformação de Legendre</u> de L é a função $\mathcal{L}_L$ de TW em T*W definida por

$$\mathcal{L}_L \text{ o } \xi(w,t) = \xi^*(w,(\mathcal{L}_{L_w})(t))$$

onde $\xi$ e $\xi^*$ são os isomorfismos de WxW para TW e WxW* para T*W , respectivamente, acima definidos.

$$\begin{tikzcd} TW \arrow[r, "\mathcal{L}_L"] & T^*W \\ W \times W \arrow[u, "\xi"] \arrow[r, "(id_W,\mathcal{L}_{L_V})"'] & W \times W^* \arrow[u, "\xi^*"'] \end{tikzcd}$$

Se $t \in W$, então $\xi_w(t)$ é um elemento de $T_w(W)$, portanto, devido as considerações acima, temos que $\xi_w(t)\phi = d\phi_t(w)$ , $\phi \in Q_w$, ou ainda, como WxW e TW são isomorfos $d\phi_t(w) = \xi(w,t)\phi$.

Portanto

$$\mathcal{L}_L(d\phi_t(w)) = \xi^*(w,(\mathcal{L}_{L_w})(t)) = \xi^*(w,(dL_w)(t)) = \xi^*_w(dL_w)(t).$$

Desta maneira, fixando $w \in W$, associada a $L : W\times W \to R$ tem-se a aplicação $L_w : W \to R$. Tomando-se a sua diferencial no ponto $t \in W$, a transformação de Legendre associa, via os isomorfismos $\xi$ e $\xi^*$, o par $(w,t)$ ao par $(w,(dL_w)(t))$. Como w é fixo, po demos assumir que a transformação de Legendre associa o vetor $t \in T_w(W)$ à diferencial de $L_w$ no ponto t, que é um elemento de $T^w(W)$.

Seja $(U, q_1, q_2, \ldots, q_n)$ vizinhança coordenada de $v \in W$ e $\pi : TW \to W$ a projeção do fibrado tangente para a variedade. Então $(\pi^{-1}(U), q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$ será um sistema de coordenadas de TM em V. Logo

$$\mathcal{L}_L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = (q_1, \ldots, q_n, (dL_v)(w)) = (q_1, \ldots, q_n [p_1]_v, \ldots, [p_n]v)$$

onde $w = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$

Se L fôr a função lagrangeana de um sistema mecânico, tem-se que no fibrado cotangente as coordenadas são de posição-momentum, ou seja, o fibrado cotangente é o espaço de fase de um sistema mecânico. A importancia da transformação de Legendre está no fato de que ela associa isomorficamente, no caso em que W é um espaço vetorial, o espaço das velocidades com o de fase. Devido ao teorema (1.1) podemos antever que através de $\mathcal{L}_L$ obteremos as equações de Hamilton. É o que passaremos a fazer.

2- Equações de Hamilton

As equações de Lagrange permitem descrever o sistema mecânico estudado. Seja $h: \mathbb{R} \to W$ uma aplicação diferenciável, suposta descrever uma curva representativa do sistema mecânico considerado. Em cada ponto $h(t) \in W$, podemos tomar o vetor tangente à curva em (h)t e podemos considerar a aplicação diferenciável $\bar{h} : R \to TW$ que a todo ponto t associa o par $(h(t), v)$. Esta aplicação é uma curva em TW que "levanta" a curva h em W. Por composição com a transformação de Legendre podemos então afirmar que em T*W existe uma curva diferenciável que representa a trajetória do sis tema mecânico considerado. Estas trajetórias satisfazem certas e- quações, chamadas equações de Hamilton.

Pelo teorema (1.1), determinamos uma aplicação $H_w$ definida em W*. Vimos que

$$\frac{\partial H_w}{\partial p_j} = \dot{q}_j \qquad \text{(III-2.1)}$$

Derivando em relação a $q_j$, obtem-se

$$\frac{\partial H_w}{\partial q_j} = - \frac{\partial L_v}{\partial q_j}$$

Usando as equações de Lagrange e a definição do momentum, tem-se

$$\frac{\partial L_v}{\partial q_J} = \dot{p}_j \qquad \text{(III-2.2)}$$

Logo

$$\frac{\partial H_w}{\partial q_j} = - \dot{p}_j$$

Seja a função $H : W^* \times W^* \to R$ definida por $H(w,u) = H_w(u)$. Então as equações (III-2.1) e (III-2.2) ficam

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j \qquad \text{(III-2.1)*}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = - \dot{p}_j \qquad \text{(III-2.3)*}$$

e são denominadas de <u>equações de Hamilton</u>. Elas são válidas para o espaço de fase, ou seja o fibrado cotangente, devido ao iso- morfismo entre W* e $T^w(W)$.

Seja M uma variedade diferencial de dimensão n e L uma função diferenciável definida em TM. Seja $L/T_q(M): T_q(M) \to R$, onde $q \in W$, a restrição de L ao espaço tangente $T_q(M)$. Sendo $T_q(M)$ espaço vetorial defina-se a aplicação

$$L_L : TM \to T^*M$$

por

$$L_L(v\ ,\ L/T_q(u)) = (v, d(L/T_q(M)_v)$$

Pondo $L/T_q(M) = L_q$, tem-se $d(L(T_q(M))_v) = L_{Lq}$. Logo

$$L_L(v, L_q(t)) = (v, (dL_q)_v)$$

Como no caso anterior, chamamos $L_L$ de transformação de Legendre da função L.

Se $(U, q_1, q_2, \ldots, q_n)$ forem coordenadas locais e se $\pi : TM \to M$ for a respectiva projeção, então

$$((\pi^{-1})(U),\ (q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n))$$

é um sistema de coordenadas em $\pi^{-1}(U)$ de TM. Se $v \in \pi^{-1}$, definindo-se $\phi : \pi^{-1}(U) \to R^{2n}$ por $\phi(v) = (q_1(\pi(v)), \ldots, q_n(\pi(v)), dq_1(v), \ldots, dq_n{}'v))$ tem-se que

$$q_i(\pi(v)) = q_i(v) \text{ e } dq_i(v) = \dot{q}_i(v)$$

pois

$$v = \sum_i \dot{q}_i(v)\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)\ \pi(v)$$

Da mesma maneira no fibrado cotangente T*M obtem-se coordenadas locais $(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ a partir das coordenadas $(U, q_1, q_2, \ldots, q_n)$ em M. Para isto, basta observar que se $\pi^*$ é a projeção de T*M sobre M, dado $w \in (\pi^*)^{-1}(U)$ e definindo-se

$\phi : (\pi^*)^{-1}(U) \to R^{2n}$ por

$\phi(w) = (q_1(\pi^*(w),\ldots,q_n(\pi^*(w),w(\frac{\partial}{\partial q_1}),\ldots,w(\frac{\partial}{\partial q_n}))$,

pondo

$$w = \sum_i p_i(w)(dq_i)_{\pi^*(w)} \quad ,$$

tem-se que

$$q_i(\pi^*(w)) = q_i(w) \quad e \quad p_i = w(\frac{\partial}{\partial q_i}) \ .$$

Desta maneira podemos determinar as componentes da transformação de Legendre ; pondo

$$L = L(q_1,q_2,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_n) \text{ tem-se}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \pi^i \circ \mathcal{L}_L$$

onde $\pi^i$ é a projeção.

Se $\mathcal{L}_L$ é uma imersão (*)[2] sobrejetiva e se H é uma função definida numa vizinhança da imagem $\mathcal{L}_L$ de um ponto de TM por

$$H(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots p_n) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n),$$

então $\mathcal{L}_L^{-1} = \mathcal{L}_H$. Neste caso H é chamada de função <u>hamiltoneana regular</u> e L é a <u>lagrangeana regular</u>. No caso em que a transformação de Legendre é um difeomorfismo de TM sobre T*M diz-se que a hamiltoneana e lagrangeana são <u>hiper-regulares</u> ou <u>perfeitas</u>.

---

(*)[1] $d_vL$ denota a diferencial da função L no ponto v. A razão desta notação é para simplificar a leitura das equações a serem vistas no próximo parágrafo.

(*)[2] Uma aplicação $\psi : M \to N$ diferenciável, de uma variedade N, é dita <u>imersão</u> se sua diferencial $d\psi$ é injetiva, (logo dim M$\leq$dim N).

3- Espaços Simpléticos e Variedades Hamiltoneanas.

Seja V espaço vetorial real de dimensão par 2n e seja w uma forma bilinear alternada em V. Seja $\tilde{w}$ a aplicação associada à w de V para V definida por $\tilde{w}(v)u = w(v,u)$, onde v,u V. Diz-se que $\tilde{w}$ é não-degenerada se o posto (dim $\tilde{w}(V)$) é 2n, ou equivalentemente se para todo $v \in V$ existe $u \in V$ tal que $w(v,u) \neq 0$ . Diz-se que w é uma forma simplética em V se w é uma forma bilinear alternada não-degenerada em V. Diz-se que o par (V,w) é um espaço simplético (real) se w é uma forma simplética em V.

Seja $A = (a_{ij})$ a matriz associada à forma simplética w, i.e., $a_{ij} = w(v_i,v_j)$, onde $v_1,\ldots,v_{2n}$ é base de V. Se v e u são dois elementos de V então mostra-se que $w(v,u) = {}^tX\Lambda Y$, onde X e Y representam as matrizes colunas cujos elementos são as coordenadas de v e u na base mencionada.

PROPOSIÇÃO(3.1). Seja (V,w) um espaço simplético (real). Então existe uma base $\{v_1,\ldots,v_{2n}\}$ de V na qual a matriz associada à w é da forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

onde I é a matriz identidade n x n.

Demonstração: Seja $v_1 \in V$ arbitrário. Logo existe $u \in V$ tal que $w(v_1,u) \neq 0$, pois w é não degenerada. Ponhamos $u = v_{n+1}$ . Podemos supor que $w(v_1,v_{n+1}) = 1$, bastando para tal multiplicar, se necessário, $v_1$ por um escalar conveniente. Se W é o espaço gerado por estes vetores então o espaço ortogonal $W^+ = \{z \in V \; ; \; w(z,v_1) = w(z,v_{n+1}) = 0\}$ é tal que $V = W \oplus W^+$, onde $\oplus$ denota soma direta entre espaços vetoriais. Como dim $W^+$ é par, 2n-2, tem-se que $(W^+, w/W^+)$ é um espaço simplético. Logo existem $v_2, v_{n+2}$ tais que $w(v_2, v_{n+2}) = 1$ e $w(v_2, v_1) = 0$, $w(v_{n+2}, v_1) = 0$ etc.. Obtem-se indutivamente, portanto uma base $\{v_1, \ldots, v_n, \ldots, v_{2n}\}$ tal que a matriz de w é da forma mencionada.

Diz-se que uma base $\{v_1, \ldots, v_{2n}\}$ de V é uma <u>base simplética</u> se a matriz associada à w nesta forma for A.

O objetivo deste parágrafo é caracterizar o tipo de variedade em que o formalismo hamiltoneano é expresso. Mais precisamente: obter-se-á um caso análogo à proposição (3.1) para variedades, i.e., introduzir-se-á um certo tipo de variedade diferencial de dimensão par 2n, chamada variedade <u>hamiltoneana</u> ou <u>simplética</u> , representada por S, na qual está definida uma 2-forma fechada $\Omega$ de posto maximal 2n, tal que em cada ponto da variedade é possível escolher coordenadas locais $(U, x_1, \ldots, x_{2n})$ na qual a 2-forma $\Omega$ assume a expressão local

$$\Omega_U = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dx_{i+n}$$

Se o fibrado cotangente à variedade admitir uma estrutura diferencial hamiltoneana e se H é uma função diferenciável definida nesta variedade, então mostrar-se-á a existência de um campo vetorial, associado a H, chamado <u>campo hamiltoneano</u>, o qual (quando expresso nas coordenadas acima mencionadas) terá como curvas integrais as soluções das equações de Hamilton. Passaremos a utilizar a notação $q_i$ , $p_i$ para representar as coordenadas locais , ditas hamiltoneanas.

Diz-se que uma 2-forma fechada tem posto <u>maximal</u> m se

$$\Omega^m = \frac{\Omega\wedge\ldots\wedge\Omega}{m} \neq 0 \text{ e } \Omega^{m+1} = \frac{\Omega\wedge\ldots\wedge\Omega}{m+1} = 0$$

Seja S uma variedade diferencial de dimensão 2n , uma forma <u>hamiltoneana</u> ou <u>simplética</u> em S é uma 2-forma diferencial $\Omega$ fechada, de posto maximal 2n, definida em S, tal que para todo ponto existe um sistema de coordenadas local $(U, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ tal que

$$\Omega_U = \sum_i dq_i \wedge dp_i$$

Diz-se que $(U, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ são <u>coordenadas hamiltoneanas</u> ou <u>simpléticas</u>. O par $(S, \Omega)$ é dito <u>variedade hamiltoneana</u> ou <u>simplética</u>, que será representada somente por S.

OBSERVAÇÃO: <u>É usual em Geometria Diferencial definir-se forma simplética sem a condição de existencia do sistema de coordenadas</u> $(U, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ <u>tal que</u> $\Omega_U = \sum_i dq_i \wedge dp_i$. <u>Este fato decorre do "Teorema de Darboux" que afirma</u> (Cf |10|)etc) <u>que em cada ponto de uma variedade simplética existe um sistema de coordenadas simpléticas tal que</u> $\Omega$ <u>assume a forma local acima mencionada. No caso presente, sendo o nosso objetivo a formulação geométrica da mecânica hamiltoneana, acreditamos não haver perdas de generalidades em se adotar a definição acima.</u>

Sejam T*M, o espaço fibrado cotangente de uma variedade diferencial de dimensão 2n e $q_i, p_i, i = 1, \ldots, n$, as coordanadas locais em T*M, i.e., $q_i : U \to R$, $p_i : U \to R$ são funções definidas em um aberto U de T*M. Então cada $dq_i$ é uma 1-forma local em T*M; $dq_i : \hat{U} = (\pi^*)^{-1}(U) \to T^*(T^*M)$, com $dq_i(b) = (b, d_b q_i)$, para todo $b \in U$. Mas $b \in T^*M$, logo $b = (a, b_a g)$, para $a \in M$ e algum $g \in \mathcal{F}$. Portanto

$$dq_i : b \to ((a, d_a g), d_b q_i). \qquad \text{(III-3.1)}$$

O produto $p_i dq_i$ das coordenadas $p_i$ por $dq_i$ é uma 1-forma em $\tilde{U}$ assim como a sua soma $\theta = \sum_i p_i \, dq_i$.

Recordamos que uma aplicação $\psi : U \to T^*M$ é dita <u>seção local</u> do fibrado cotangente, se $\psi$ é diferenciável e se $\pi^*\psi(x)=x$, para todo $x \in U$, onde $\pi^*$ é a projeção de $T^*M$ sobre $M$.

Se $g$ é uma função diferenciável definida em $U$ e $d_a g$ é o respectivo vetor cotangente em $a \in M$, então tem-se que $dg : U \to T^*M$ é uma seção do fibrado cotangente. Observe que a seção independe do sistema de coordenadas escolhido.

O nosso próximo passo consiste em demonstrar que a 1-forma $\theta = \sum_i p_i dq_i$, expressa em termos de coordenadas locais, pode ser definida independentemente destas coordenadas. Este resultado é muito importante pois permite obter uma 2-forma fechada de posto maximal em $T^*M$ e em consequência temos que o espaço fase é uma variedade hamiltoneana. O estudo da formulação hamiltoneana na mecânica passará então a ser feito sobre este tipo de variedade.

PROPOSIÇÃO (3.2). <u>Seja $M$ uma variedade diferencial de dimensão $n$. Seja $T^*M$ o respectivo espaço fibrado cotangente e denotemos por $q_i, p_i, i = 1,\dots,n$ as coordenadas locais (posição momentum) em uma vizinhança de um ponto de $T^*M$. Se $\theta = \sum p_i\ dq_i$ é a 1-forma acima referida, então podemos afirmar que $\theta$ é uma seção de $T^*(T^*M)$ e consequentemente, em todo fibrado cotangente de uma variedade existe uma 1-forma que independe da escolha do sistema de coordenadas locais. Dá-se a $\theta$ o nome de forma de Liouville.</u>

<u>Demonstração</u>. Primeiramente definiremos uma aplicação e mostraremos que ela é uma seção de $T^*(T^*M)$ - logo independe da escolha de coordenadas locais. A seguir mostraremos localmente ela coincide com $\theta$ e consequentemente $\theta$ está definida em todo $T^*M$.

Seja $\gamma$ a aplicação definida por $b \to (b, d_b(g \circ \pi^*))$, onde $b = (a, d_a g)$, $g \in \mathcal{F}$ e $\pi^* : T^*M \to M$ é a projeção usual. A aplicação composta é diferenciável, logo o par $(b, d_b(g \circ \pi^*))$ é um elemeto de $T^*(T^*M)$. Se $\pi^{**} : T^*(T^*M) \to T^*M$ representa a projeção de $T^*(T^*M)$ sobre o fibrado cotangente, tem-se que $\gamma$ é uma seção. Logo é uma 1-forma que designaremos por $\theta$. Portanto $\bar{\theta}(b) = (b_1, d_b(g \circ \pi^*))$. Resta mostrar que $\bar{\theta} = \theta$. Mas $\theta$ é uma 1-forma em $T^*M$ e por isto $\theta$ é uma aplicação de $T^*M$ em $T^*(T^*M)$, definida por

$$\theta = (b, \sum_i p_i(b) d_b q_i).$$

Calculemos $\bar{\theta}$ (b). Para isto coloquemos $d_a g = \sum_i k_i d_a q_i$, onde $k_i = p_i(a)$, $a \in M$. Então

$$\bar{\theta}(b) = \bar{\theta}(a, d_a g) = \bar{\theta}(a, \sum_i k_i d_a q_i) =$$

$$= \bar{\theta}(a, d_a(\sum_i k_i q_i)) =$$

$$= (b, d_b(\sum k_i (q_i \circ \pi)) =$$

$$= (b, d_b \ (\sum_i k_i q_i))$$

Pois $(q_i \circ \pi^*)(a) = q_i(a)$. Então,

$$\bar{\theta}(b) = (b, \sum_i k_i d_b q_i) = (b, \sum_i p_i(b) d_b q_i).$$

Comparando com (III-3.2) e como b é qualquer, tem-se o resultado desejado.

Conclue-se então que a 1-forma $\theta = \sum_i p_i dq_i$ está definida em todo o fibrado cotangente, sendo portanto independente dos q's e p's.

TEOREMA(3.2). <u>Todo fibrado cotangente (espaço de fase) de uma variedade diferencial M de dimensão n é uma variedade hamiltoneana</u>.

<u>Demonstração</u>: Pela proposição (3.2) existe em $T^*M$

uma 1-forma $\theta = \sum_i p_i dq_i$ e portanto uma 2-forma fechada $\Omega = d\theta = \sum dp_i \wedge dq_i$. Ela tem posto maximal 2n e como a dimensão de $T^*M$ é par, tem-se o resultado desejado.

4- Sistemas Hamiltoneanos.

Seja W espaço vetorial e $W^*$ o seu dual. Seja $W^* \wedge W^*$ o produto exterior gerado por $e \wedge e'$, onde $e, e' \in W^*$. Seja $t \in W^* \wedge W^*$. Então t é combinação linear dos $e \wedge e'$. Sem perda de generalidades, tomemos $t = e \wedge e'$. Para cada $t \in W^* \wedge W^*$, defina-se uma aplicação, representada por $\rho_t$, de W para $W^*$, da seguinte maneira:

$$\rho_t(v)v' = ((e \wedge e')(v))(v') = e(v)\ e'(v'),$$

com $v \in W$, $v' \in W^*$.
Obtem-se, desta maneira, para cada $t \in W$, uma aplicação $\rho_t$ a partir da base $e \wedge e'$.

Seja M uma variedade diferencial. Podemos considerar o produto exterior dos fibrados cotangentes $T^*M \wedge T^*M$, em que, para cada $b \in M$, $T^bM \wedge T^bM$ é uma fibra. Se $\Omega: M \to T^*M \wedge T^*M$ é uma 2-forma sobre M, então $\Omega(b) \in T^bM \wedge T^bM$. Representemos por $\Omega_b$ o valor de $\Omega$ em b. Pelas considerações acima, tem-se uma aplicação $\rho_{\Omega_b} : T_bM \to T^bM$, associada à $\Omega$ e definida por

$$(\rho\Omega_b(u)(v) = \Omega_b(u,v),$$

Diz-se que $\Omega$ é não degenerado se $\rho_{\Omega_b}$ for bijetiva.

De uma maneira geral, para todo $b \in M$, obteremos uma aplicação $\rho_\Omega : TM \to T^*M$, diferenciável. Não é dificil de se ver que $\rho_\Omega$ é biunivoca e sobre, (pois $T^*M$ é uma variedade hamiltoneana). Logo existe a inversa $\rho_\Omega^{-1} : T^*M \to TM$. Ponhamos $\rho\Omega_b = \hat{\Omega}_b$, para cada $b \in M$. Se $v \in T^bM$, diz-se que $-(\hat{\Omega}_b)^{-1}(v)$

é o $\Omega$ - <u>gradiente</u> de v em b, ou simplesmente (quando estiver subentendido de que $\Omega$ se trata) de gradiente de v em p. Põe-se

$$\text{grad}_b v = - (\hat{\Omega}_b)^{-1} (v)$$

Nosso objetivo neste parágrafo é mostrar que se H é uma função diferenciável definida em S, variedade hamiltoneana, então existe um campo de vetores X associado à H, tendo como curva integral as soluções das equações de Hamilton. Para isto introduziremos algumas definições e propriedades.

Se $X \in L_M$, chama-se <u>produto interior</u> de X por $\Omega$, a 1-forma diferencial, indicada por $i(x)\Omega$, tal que

$$(i(X)\Omega)(Y) = \Omega(X,Y),$$

para todo $Y \in H_M$.

Se $\Omega$ é não degenerado, tem-se que $X \to i(X)\Omega$ define um isomorfismo de $H_M$ sobre $H_M^*$ (dual de $H_M$).

Se $f \in F_M^R$, por $\text{grad}_\Omega f$, ou simplesmente grad f, indica-se o único elemento de $H_M$ tal que

$$i(\text{grad } f)\Omega = - df.$$

Portanto

$$(\text{grad } f)_p = - (\hat{\Omega}_p)^{-1}((df)p) ,$$

se $p \in M$. Tem-se

$$i(\text{grad } f)\Omega = \Omega(\text{grad } f , X) = - \Omega(X, \text{grad } f).$$

O parênteses de Poisson de $f, g \in F_M^R$ é definido por

$$\{f , g\} = \Omega(\text{grad } f , \text{grad } g).$$

Tem-se

$$X(f) = \Omega(X, \text{grad } f) = (i(\text{grad } f)\Omega)(X) = - df(X)$$

Quando

$$X = \text{grad } g$$

tem-se

$$(\text{grad } g)\ f = \Omega(\text{grad } g\ ,\ \text{grad } f) = - \{g\ ,\ f\}.$$

Logo

$$\{f\ ,\ g\} = (\text{grad } f)g.$$

Em termos de coordenadas $(U, q_i, p_i)$ tais que

$$\Omega_U = \sum_i dp_i \wedge dq_i\ ,$$

tem-se

$$\{f\ ,\ g\} \underset{U}{=} \sum_i \left(- \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i}\right),$$

que é a forma clássica usual.

Para f , g , e h $\varepsilon\ \mathcal{F}_M^R$, tem-se

i) $\{f,f\} = 0$

ii) $\{f,g,h\} = \{f,g\}\ h + g\ \{f,h\}$,

iii) $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$

iv) $\{\lambda f,g\} = \lambda\ \{f,g\}$, se $\lambda\ \varepsilon\ R$

$\{f + g.h\} = \{f,h\} + \{g,h\}$ .

Seja $\omega$ uma 2-forma sobre M. Demonstra-se, Cf [10] , que a aplicação $X \to i(X)\omega$, é um isomorfismo de $\mathcal{H}_M$ sobre $\Lambda^1(M)$ . Se $\alpha\ \varepsilon\ \Lambda^1(M)$, por $X_\alpha$ representa-se o campo de vetores sobre M tal que $\alpha = i(X_\alpha)\omega$ .

Seja $(S, \Omega)$ uma variedade simplética e $(U, q_i p_i)$, $i = 1,\ldots,n$ um sistema de coordenadas local tal que

$$\Omega_U = \sum_i dp_i \wedge dq_i$$

Se $\alpha = \sum a_i \, dq_i + b_i \, dp_i$ , tem-se

$$X_\alpha = \sum_i - b_i \frac{\partial}{\partial q_i} + a_i \frac{\partial}{\partial p_i} .$$

De fato, ponhamos

$$X = \sum d_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial q_i} .$$

Então

$$\alpha = i(X)\Omega = \sum d_i \, dq_i - c_i \, dp_i \text{ . Logo}$$

$d_i = a_i$ , $b_i = - c_i$.

Um campo de vetores X sobre S é dito sistema (dinâmico) hamiltoneano se $d(i(X)\Omega) = 0$. Se $i(X)\Omega$ é exata, i.e., existe $\beta$ tal que $d\beta = i(X)\Omega$, diz-se que $-\beta$ é um hamiltoneano do campo X. Põe-se $\beta = H$ e portanto

$$i(X)\Omega = - dH. \qquad \text{(III-4.1)}$$

Se H é uma função diferencial em S, então existe um único sistema hamiltoneano X sobre S tal que $i(X)\Omega = - dH$. Diz-se neste caso que X é associado à H.

Em coordenadas locais, a 1-forma dH tem a expressão

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{q_i} dq_i + \frac{\partial H}{p_i} dp_i .$$

A expressão local do sistema hamiltoneano X associado à dH é

$$X_{dH} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

Portanto

$$X_{dH}\, q_j = \{q_j\ ,\ H\} = \frac{\partial H}{\partial p_j}\ ;\ X_{dH}\, p_j =$$

$$= \{p_j\ ,\ H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}\ .$$

Se $\phi : I \to S$ é uma curva integral do campo $X_{dH}$ , i.e., $X_{dH}(\phi(t)) = \phi'(t)$, então, em coordenadas locais, tem-se

$$X_{dH}(\phi(t)) = X_{dH}(q_i(t), p_i(t)) = (\frac{\partial}{\partial t} q_i(t)_j \frac{\partial}{\partial t} p_i(t)$$

Logo

$$\frac{\partial}{\partial t} q_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}\ ;\ \frac{\partial}{\partial\ t} p_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (*)$$

que são as equações de Hamilton em coordenadas locais. Vale a recíproca i.e., toda solução de (*) é uma integral de $X_{dH}$.

CAPÍTULO IV

FORMALISMO LAGRANGEANO

Vimos no capítulo anterior que a descrição geométrica do formalismo Hamiltoneano decorre canonicamente da existencia de uma estrutura simplética obtida a partir da forma de Liouville (Prop.3.2) e do cálculo diferencial exterior. No que concerne o aspecto Lagrangeano da Mecânica Clássica a situação é mais complicada. Isto decorre do fato de que o fibrado tangente à uma variedade diferencial não admite canonicamente uma estrutura simplética. Este "defeito" pode ser no entanto eliminado se a lagrangeana $L : TM \to R$ for regular, i.e., a Hessiana de L com respeito as velocidades for diferente de zero em todos os pontos. Neste caso existem dois métodos para dotar TM de uma estrutura simplética: via a transformação de Legendre, conforme visto no §1 do cap. III ou então via a "estrutura quase tangente" canonicamente associada ao fibrado TM (Cf [4]) Este segundo ponto de vista será o objeto do presente capítulo. Faremos um estudo rápido, sem muitos detalhes. O excelente livro de C. Godbillon (Cf [10] cap. IX e seguintes) poderá servir como referência ao leitor mais minucioso.

1- <u>O duplo fibrado tangente e o prolongamento tangente</u>

Sejam M,N variedades diferenciais de dimensão m,n respectivamente. Sejam $(TM,p_M,M)$ e $(TN,p_N,N)$ os respectivos fibrados tangentes e consideremos uma aplicação diferencial $h: M \to N$. A aplicação $Th : TM \to TN$ tal que $h \circ p_M = p_N \circ Th$ é dita <u>aplicação tangente</u> à h.

Consideremos agora o fibrado tangente à variedade TM, i.e., $(T(TM),p_{TM},TM)$. Se considerarmos a aplicação tangente à projeção $p_M : TM \to M$, $Tp_M : T(TM) \to TM$, então podemos verificar que existem duas estruturas de fibrado vetorial tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} T(TM) \arrow[r, "Tp_M"] \arrow[d, "p_{TM}"'] & TM \arrow[d, "p_M"] \\ TM \arrow[r, "p_M"'] & M \end{tikzcd}$$

Comuta, i.e., $p_M \circ p_{TM} = p_M \circ Tp_M$. Damos a $(T(TM), p_{TM}, M)$ o nome de <u>duplo fibrado tangente</u> de $M$ e a $(T(TM), Tp_M, TM)$ o de <u>prolongamento tangente</u> de $TM$.

2- <u>A estrutura quase tangente à uma variedade tangente</u>.

Seja $J_o : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ o endomorfismo definido por $J_o(a,b) = (o,a)$. Então a imagem de $J_o$ e seu núcleo são iguais, i.e., $I_m\, J_o = \text{Ker}\, J_o$. Tem-se ainda que $J_o\, J_o = J_o^2 = 0$. Consideremos agora uma variedade diferencial $M$, de dimensão $n$, $h \in Q_M$ e $u \in TM$ tal que $p_M(u)$ $\varepsilon$ domínio de $h$. Seja $\bar{h}_u : \mathbb{R}^{2u} \to T_u(TM)$ tal que, se localmente $u = (x,y)$ e $v = (x,y,a,b) \in T_u(TM)$ então $\bar{h}_u(a,b) = v$. É claro que $\bar{h}_u$ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Seja $J_u \overset{def}{=} \bar{h}_u \cdot J_o \circ (\bar{h}_u)^{-1}$. Então $J_u : T_u(TM) \to T_u(TM)$ é um endomorfismo tal que $\ker J_u = I_m\, J_u$ e $J_u^2 = 0$, para todo $u \in TM$. Podemos, então considerar um endomorfismo linear $J : T(TM) \to T(TM)$ tal que $J$ restrito à $T_u(TM)$ seja $J_u$ (i.e., $J/T_u(TM) = J_u$). Damos a $J$ o nome de <u>forma vertical</u> ou <u>estrutura quase tangente</u>. No que se segue, se $X \in T(TM)$ então localmente $X$ será representado por

$$X = (x,y,a,b) \text{ ou } X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{(eliminando-se os}$$

indices)

A ação de $J$ em $X$ é dada por

$$J(X) = (x,y,o,a)$$

O <u>fibrado vertical</u> $V(TM)$ é o subfibrado de $T(TM)$ definido por $V(TQ) = \text{Ker } Tp_M$. Pode-se mostrar que $\text{Ker } J = I_m J = V(TQ)$ e que se $X \in V(TQ)$, então localmente $X = (x,y,o,b)$. Em particular pode se mostrar que existe um único campo $C \in V(TQ)$, chamado <u>campo vertical</u> ou campo de Liouville tal que, localmente

$$C = (x,y,o,y)$$

O produto interior de $J$ por uma q-forma $\omega$ é definido por

$$i_J\omega\ (x_1,\dots,x_q) = \sum_{i=1}^{q} \omega(X_1,\dots,JX_i,\dots,X_q)$$

onde $X_i \in T(TM)$, $i = 1,\dots,q$. Põe-se $i_J f = 0$, para toda função $f$. A derivada vertical $d_J$ é definida por

$$d_J = [i_J,\ dJ = i_J d - d i_J$$

3- <u>As equações de Lagrange</u>

M como sendo o espaço das configurações, TM o das velocidades e $L : TM \to \mathbb{R}$ uma Lagrangeana. Então a forma vertical $J$ determina uma 2-forma fechada

$$\omega = dd_J L$$

sobre TM. Em coordenadas locais $(q^i,v^i)$, $\omega$ assume a expressão

$$\omega = \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j}\, dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}\, dv^i \wedge dq^j.$$

A Lagrangeana L é <u>regular</u> se e somente se $\omega$ é <u>não degenerada</u> i.e. a Hessiana $\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}$ é não singular.

Seja $C = (q^i, v^i, o, v^i)$ ou $C = v^i \frac{\partial}{\partial v^i}$ a expressão local do campo vertical. A Hamiltoneana de L, como sabemos, é definida por

$$H = q^i p^i - L$$

onde $$p^i = \frac{\partial L}{\partial q^i}$$

Podemos, então definir intrinsicamente a energia do sistema Lagrangeano por

$$E = C(L) - L$$

As equações intrínsicas de Lagrange assumem a forma

$$i(X)\omega = - dE \qquad \text{(IV-3.1)}$$

Em coordenadas locais, pondo $X = a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + b^i \frac{\partial}{\partial v^i}$, obtem-se de (IV-3.1) o sistema

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} (a^j - v^j) = 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} b^j = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j v^i} v^j$$

como a hessiana e inversível, tem-se que

$$a^j = v^j \qquad \text{(IV-3.2)}$$

O leitor poderá demonstrar que as curvas integrais de X satisfazem as conhecidas equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \qquad \text{(IV-3.3)}$$

(ver o capitulo III para o caso Hamiltoneano)

4- Equação diferencial de 2a ordem

Como vimos acima $T(TM)$ admite duas estruturas de fibrado tangente. Um campo de vetores $X : TM \to T(TM)$ é uma seção de fibrado $p_{TM} : T(TM) \to TM$, i.e., $p_{TM} \circ X = i_d$. Se no então X for também uma seção do fibrado $Tp_M : T(TM) \to TM$, então X é dito ser uma equação diferencial de 2a ordem. Em coordenadas locais, se $X = (q,v,a,b)$ então X é uma equação diferencial de 2a ordem se e somente se $v = 0$. Isto decorre do fato de que $p_{TM}(q,v,a,b) = (q,v)$ e $Tp_M(q,v,a,b) = (q,a)$. Decorre daí que o campo de vetores X que é a solução da equação de Lagrange (IV-3.1) é uma eq. dif. de 2a ordem.

Consideremos agora a ação da forma vertical J sobre o campo X. Localmente tem-se $J(X) = (q,v,o,a)$. Se $J(X) = C$, então $a = v$. Logo X é uma equação diferencial de 2a ordem se e somente se $JX = C$.

Consideremos a aplicação $X \to i(x)\omega$. Como $\omega$ é simplética esta aplicação é um isomorfismo. Logo se E é a energia da Lagrangeana tem-se que existe uma única equação diferencial de 2a ordem X tal que

$$i(X)\omega = - dE.$$

Se, no entanto, L não for regular (i.e., $dd_J L$ não é simplética) então podemos ter situações em que a eq.(IV.1) não admite soluções, e, mesmo admitindo, pode não ser única e nem uma equação diferencial de 2a ordem. Como vimos a questão de regularidade de L é equivalente à Hessiana de L ser inversivel. A situação "singular" foi estudada por Dirac e é conhecida como a Teoria de vínculos de Dirac-Bergmann ou Mecânica de Dirac-Bergmann. Abordaremos esse assunto no próximo capítulo no que se refere ao aspecto Hamiltoneano.

# CAPÍTULO V

# FORMALISMO HAMILTONEANO PARA A MECÂNICA COM VÍNCULOS

## 1- Mecânica présimplética

O assunto que abordaremos no presente capítulo diz respeito a uma formulação geométrica da teoria de Dirac - Bergmann para uma mecânica com vínculos. Em termos geométricos isto significa que a forma simplética quando restrita à subvariedade na qual o movimento do sistema (no espaço das fases) está vinculado, perde uma das suas características, qual seja, abaixa o seu posto . Damos o nome de pré-simplético a esta situação.

O ponto de partida do formalismo Hamiltoneano diz respeito à definição dos momentus generalizados

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} \quad , \; i = 1,\ldots,n$$

onde L é a lagrangeana e os v's são as velocidades generalizadas. Se

$$W = \left\{\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}\right\}$$

é a hessiana de L, então os p's estarão definidos (todos) se o posto de W for n. Se for $k < n$, então a não maximalidade do posto determina que somente k-variáveis de velocidade podem ser expressas como funções dos q's, p's e as restantes (n-k) velocidades (Teorema das Funções Implícitas). Decorre daí que existem (n-k) relações independentes entre os p's e q's. Estas relações podem ser expressas na forma

$$f^A(q_i,p_i) = 0 \quad , \quad A = 1,2,\ldots,n-k$$

Elas são chamadas de vínculos primários (primário porque as equações de movimento não foram usadas para obte-las). O movimento do sistema considerado ficará então confinado à uma subvariedade N, cuja definição é precisamente dada pelas equações de vínculos acima. As funções $f^A$ estão definidas em um aberto U do espaço ambiente e são tais que, quando restritas à interseção $U_1 = U \cap N$, são nulas. Pode ocorrer, no entanto, que outras funções $g^B$ definam também N. Neste caso $f^A$ e $g^B$ serão iguais sobre uma parte de N. Na terminologia de Dirac, isto significa que $f^A$ e $g^B$ são <u>fracamente iguais</u>. Se, no entanto, $f^A$ e $g^B$ tiverem também o mesmo gradiente nesta parte de N, então diz-se que $f^A$ e $g^B$ são <u>fortemente iguais</u> ( a necessidade de se impor esta condição sobre o gradiente ficará mais clara ao leitor logo a seguir).

As equações de Hamilton, como vimos, tem a forma

$$i(X)w = - dH$$

onde H é a hamiltoneana, dH sua diferencial e i(X)w o produto interior da forma simplética w pelo campo X. Este campo X é unicamente determinado. Se, no entanto, N é a subvariedade de vínculos, a restrição de w a N não é, em geral simplética. Assim, a equação em X acima pode ou não ter solução e, se tiver, não será necessariamente única. Isto se deve precisamente ao fato de w não ter mais posto maximal.

Nosso objetivo será, pois, o de entender geometricamente, o que significa "equações consistentes" no caso pré-simplético. As idéias a serem expostas a seguir serão feitas para a situação que consideramos mais simples. Assim, por exemplo, o espaço das fases será tomado como sendo o espaço euclideano 2n-dimensional $R^{2n}$ dos números reais, e não o fibrado cotangente de uma variedade diferenciável qualquer. Utilizando um resultado devido a

Darboux, tomaremos como forma simplética a 2-forma dp $\Lambda$ dq, onde $p = (p_1,\ldots,p_n)$ e $(q_1,\ldots,q_n)$ são coordenadas locais no $R^{2n}$. Faremos isto por uma questão puramente psicológica. Ao leitor sugerimos consultar o artigo de Gotay, Nester e Hinds ([GNH]), de onde nós baseamos o presente trabalho, para uma abordagem mais ampla e detalhada.

O caso pré-simplético (também chamado degenerado) aparece quando existir uma subvariedade (superfície euclideana abstrata) N do espaço $R^{2n}$, de dimensão k, no qual a forma simplética w não tem posto maximal nos seus pontos. A subvariedade N é caracterizada da seguinte maneira: para todo ponto $p \in N$ existe uma vizinhança U de p em $R^{2n}$ e 2n-k funções diferenciáveis $f^A : U \to R$, $A = 1,\ldots,2n-k$, tais que a interseção $U_1 = U$ N é definida pelas equações

$$f^i = 0,\ldots,f^{2n-k} = 0$$

Coloquemos $d = 2n-k$. Então d é dito codimensão de N, (se $d = 1$,N é chamado de hipersuperfície; se $d = 2n$, então N é um conjunto de pontos; se $d = 0$, então N é um aberto do $R^{2n}$). Representemos por $\bar{w}$ a restrição de w a N. Em geral $(N,\bar{w})$ não é uma variedade simplética, pois o posto de $\bar{w}$ não é forçosamente maximal em todo ponto de N. Isto significa que existe um subconjunto C de N constituído dos pontos onde $\bar{w}$ não é maximal. É este exatamente o obstáculo para que $(N,\bar{w})$ herite a estrutura simplética do $R^{2n}$, além do fato de ser a dimensão de N par ou não. Seja $p \in N$ e suponha que o posto de $\bar{w}$ em p seja s. Coloquemos $c = k-s$, chamado co-posto de $\bar{w}$ em p. A menos que o co-posto c seja o mesmo em todo ponto de N, teremos necessariamente outros subconjuntos onde o co-posto é diferente. Por um argumento de continuidade pode-se mostrar que em pontos suficientemente próximos de p, o co-posto aumenta.

Resumindo, em N obtemos subconjuntos $C_c$ definidos por

$$C_c = \{p \varepsilon N;\ \text{o co-posto de } \bar{w} \text{ em } p \text{ é } c\}$$

Pode-se mostrar que os $C_c$ são subvariedades de N cuja codimensão é $\frac{c}{2}$ (c-1), (Cf. [12])

No que se segue não iremos considerar a situação em que N é "partido" por tais subvariedades. A situação em que o co-posto aumenta ã mais complexa e, para obtermos resultados interessantes, necessitaríamos de hipóteses suplementares. Um estudo nesse sentido (utilizando técnicas de topologia diferencial) foi recentemente realizado (Cf. [12]) utilizando a Teoria das Catástrofes de R. Thom. Nos contentaremos aqui com a situação em que o co-posto de $\bar{w}$ é c em todos os pontos de N (isto é $N = C_c$).

Passemos agora à descrição da Mecânica com vínculos do ponto de vista geométrico. Seja $(N,\bar{w})$ conforme a descrição logo acima. Nesta situação as equações de Hamilton podem ou não possuir soluções. A existência de possíveis soluções dependerá do fato de dH estar ou não na imagem da aplicação linear $\underline{b}$ definida por $\underline{b}(x) = i(x)\omega = -dH$. Não sendo $\bar{w}$ simplética, $\underline{b}$ não é mais um isomorfismo; não é sobrejetora. Como vimos anteriormente, a subvariedade N é localmente determinada por uma família $f^1,\ldots,f^d$, ($d = 2n - k$) de funções. Estas funções são precisamente aquelas que não permitem definir todos os p's como funções independentes dos v's. Chamaremos, portanto, N de variedade dos <u>vínculos primários</u>. Nosso problema agora se coloca na seguinte forma: dado uma hamiltoneana $H:R^{2n} \to R$, como determinar geometricamente o "local" onde a equação $i(X)w = -dH$ possui uma solução X quando restrita a N, de maneira que as curvas integrais de X estejam inteiramente contidas em N?

DEFINIÇÃO: Seja N uma subvariedade do espaço simplético $(R^{2n},w)$. Diz-se que N é uma variedade de <u>vínculos regularmente consistentes</u> se para toda forma linear $\alpha$ sobre $R^{2n}$, a equação

$$i(X)w = \alpha \qquad (*)$$

quando restrita a N admitir uma solução X tangente a N.

A condição de X ser tangente a N é importante. Sendo X um campo de vetores do $R^{2n}$, ele associa necessariamente cada ponto $p \in N$ a um elemento do respectivo espaço tangente $T_pN$. Quando isto ocorrer então o <u>movimento do sistema mecânico</u> considerado está totalmente vinculado a N, caso contrário o sistema se desenvolve para fora do domínio N.

No entanto, a <u>condição de tangência, genericamente, não ocorre</u>. Somos obrigados a "restringir" nossa subvariedade. O processo geométrico de determinação da subvariedade de vínculos regularmente consistente é o seguinte: Se a forma linear $\alpha$ é tal que $\alpha(p) \in \underline{b}(TN)$ para todo $p \in N$ e o campo X é tangente a N, então o problema está resolvido. Se não, consideramos a subvariedade $N_1$ de N definida por

$$N_1 = \{p \in N \ ; \quad (p) \ \in \underline{b}(TN)\}$$

Se a solução X for tangente à $N_1$, o problema está resolvido, caso contrário, consideramos a subvariedade $N_2$ definida por

$$N_2 = \{p \in N_1 \ ; \ \alpha(p) \ \in \underline{b}(TN_1)\}$$

e assim sucessivamente. Obtemos então uma sucessão de subvariedades $N_3, N_4, \ldots, N_s, \ldots$ tais que

$$N_s = \{p \quad N_{s-1} \quad ; \quad \alpha(p) \ \in \underline{b}(TN_{s-1})\}$$

O processo acima nos leva às quatro possibilidades seguintes:

Caso 1: Existe um inteiro K tal que $N_K$ é vazio;

Caso 2: Existe um inteiro K tal que $N_K$ não é vazio mas a dim $N_k=0$;

Caso 3: Existe um inteiro K tal que $N_K = N_{K+1}$ com dim$N_K \neq 0$;

Caso 4: O processo não é finito.

O <u>primeiro caso</u> significa que as equações de Hamilton jamais possuem solução. O <u>segundo caso</u> significa que a variedade de vínculos é constituída de pontos e a única solução possível é a trivial, ou seja, $X = 0$ (não há portanto dinâmica). A terceira probabilidade é aquela que diz respeito à existência de uma variedade de vínculos regularmente consistentes e maximal (se $V$ é outra regularmente consistente então $V \subset N_k$).

A situação descrita no caso 4 corresponde aos sistemas com um número infinito de graus de liberdade. Nesta situação, podemos considerar $N_\infty$ como sendo a interseção de todas as subvariedades $N_s$ e podemos então recair em um dos três casos anteriores.

Este processo nos permite, ainda, determinar 4 tipos de vínculos:

(a) Os vínculos primários: são aqueles que definem a subvariedade na qual a forma simplética se degenera ($f^A$; $A = 1, \ldots, 2n-k$)

(b) Os vínculos secundários: são aqueles que possibilitam determinar as soluções das equações da Hamilton (ou seja, $dH$ está na imagem de $\underline{b}$);

(c) Os vínculos terciários: são de dois tipos. Os chamados de 1a classe dizem respeito à condição de tangência da solução $X$ à uma subvariedade de vínculos. Isto significa que dentre os vínculos primários e secundários, deve-se extrair uma sub-família de funções $g_B$ que sejam preservadas pela dinâmica, ou seja, eles devem ser constantes ao longo das trajetórias (curvas integrais) do campo $X$. Geometricamente, isto significa que $X(g_B)$ restrito à subvariedade de vínculos deve ser nulo. De fato, isto acontece se e somente se $X\left[g_B(h(t))\right] = 0$ para toda curva integral $h(t)$ de $X$. Mas isto é equivalente à condição $\frac{d}{dt}\left[g_B(h(t))\right] = 0$, ou seja, $g_B(h(t))$ é constante.

Os vínculos que não são de la classe são ditos de 2a classe

2- A relação com o formalismo de Dirac-Bergmann

Passemos agora à comparação da interpretação geométrica acima descrita com a teoria dos vínculos proposta por Dirac Bergmann.

Seja $L : R^{2n} \to R$ uma lagrangeana. O ponto de partida do formalismo é a hipótese de que a transformação de Legendre é degenerada. Isto significa que a hessiana $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}\right)$ não é inversível. A transformação de Legendre não é, pois, sobrejetora (existem coordenadas p's que não podem ser definidas independentemente das coordenadas v's). Se representarmos por N a imagem do espaço de configuração (no caso presente tomado como $R^{2n}$) pela transformação de Legendre, então N é uma subvariedade de dimensão, digamos, k, à qual o sistema está vinculado. Os vínculos primários são dados por uma família de funções $f^A$ que definem N localmente. Se representarmos por $H_1$ a hamiltoneana obtida a partir da transformação de Legendre para a parte em que for possível definir os p's (isto é, N) e se representarmos por $\bar{H}_1$ qualquer extensão de $H_1$ ao aberto U que caracteriza N localmente, temos que a hamiltoneana sobre $U_1 = U \cap N$ tem a forma

$$h = H_1 + f^A u_A$$

onde os $u_A$ são os multiplicadores de Lagrange a serem determinados (são funções constantes). Queremos, portanto, estudar a equação

$$i(X)w = dH \quad \text{restrita a } U_1.$$

Como vimos, a fim de que $U_1$ seja regularmente consistente necessitamos da condição de tangência. Isto pode ser feito numa forma equivalente , qual seja, a dos parênteses de Poisson. Da hamiltoneana h acima tem-se

$$dh = d\bar{H}_1 + df^B u_B \quad (**)$$

Consideremos o campo $\mathrm{grad} f^A$. Então

$$dh(\mathrm{grad} f^A) = i(X)w(\mathrm{grad} f^A) = w\,(X, \mathrm{grad} f^A) = X(f^A) \qquad (***)$$

O lado esquerdo da expressão acima fica

$$\begin{aligned} dh(\mathrm{grad} f^A) &= dH_1(\mathrm{grad} f^A) + df^B(\mathrm{grad} f^A)u_B \\ &= i(\mathrm{grad} f^A)w(\mathrm{grad}\bar{H}_1) + i(\mathrm{grad} f^A)w(\mathrm{grad} f^B)u_B \\ &= w(\mathrm{grad} f^A\ ,\ \mathrm{grad}\bar{H}_1) + w(\mathrm{grad} f^A\ ,\ \mathrm{grad} f^B)u_B \\ &= \{f^A, H_1\} + \{f^A, f^B\}u_B \end{aligned}$$

Representaremos o termo à direita na expressão acima por $\bar{f}^A$. Então, de (***) tem-se que:

$X(f^A)$ restrito a $U_1 = 0$ se e somente se $\bar{f}^A$ restrito a $U_1 = 0$.

Traduzindo nesta forma a condição de tangência, podemos obter informações com respeito aos coeficientes $u_B$. Do fato de $\bar{f}^A$ ser nulo sobre $U_1$, tem-se

$$\{\bar{H}_1, f^A\} = u_B\{f^A, f^B\}$$

As equações acima podem ser colocadas em forma matricial. O sistema terá solução se a matriz $(\{f^A, f^B\})$ for inversível sobre os pontos de $U_1$. No entanto, genericamente, isto não ocorre. Somos obrigados a considerar uma subvariedade local $U_2$ de $U_1$, onde parte dos $u_B$ serão determinados. O fato da matriz $(\{f^A, f^B\})$ ser singular nos permite obter uma família de funções (autovalores) $f^\alpha_A \neq 0$ tais que $f^\alpha_A\{f^A, f^B\} = 0$. Isto nos dá então a igualdade

$$f^{\alpha}_{A}\{\bar{H}_1, f^A\} = 0$$

que passa a ser então uma nova condição, dita de vínculos secundários. Coloquemos

$$g^{\alpha} = f^{\alpha}_{A}\{\bar{H}_1, f^A\} .$$

Pondo

$$\bar{g}^{\alpha} = \{g^{\alpha}, \bar{H}_1\} + u_B\{g^{\alpha}, f^B\}$$

temos que, como anteriormente, a preservação destes vínculos secundários $g^{\alpha}$ nos leva à condição de que $\bar{g}^{\alpha}$ restrito a $U_2$ deva ser nula. Isto vai originar novas condições de vínculos, ditos terciários, dado por algo do tipo $h^{\beta}_{\alpha}\{\bar{H}_1, g^{\alpha}\}$ restrito a $U_3$ ser nulo. Repetindo o processo quantas vezes for necessário, obtemos, caso o problema seja solúvel, uma subvariedade final $U_k$, onde determinamos a solução.

Como vemos, o algorítmo de Dirac-Bergmann é o mesmo que o algorítmo geométrico proposto. A diferença é que o segundo é colocado em termos nas subvariedades $N_s$, enquanto que o primeiro tem caráter meramente local; a construção é feita a partir das funções $f^A$ que definem localmente a subvariedade. O algorítmo geométrico é, portanto, uma formulação intrínseca, independente do sistema de coordenadas utilizado. Outros resultados podem ser obtidos para uma situação mais complexa, como por exemplo, para variedades de dimensão infinita (que podem ser aplicados à Mecânica Quântica).

Para terminar, observemos que hamiltoneana a ser considereda, no espaço $R^{2n}$ é da forma:

$$h_t = \bar{H}_1 + u_a h^a + u_b t^b + \lambda_c s^c ,$$

chamada por Dirac de <u>hamiltoneana total</u> ou <u>estendida</u>. Nesta expressão, $u_a$ são arbitrários, enquanto $u_b$ são fixos. As funções $h^a$ e $t^b$ são vínculos primários de 1a e 2a classes com multiplicadores arbitrários $\lambda^c$. A equação que admite solução, quando restrita a $U_k$, é então da forma:

$$i(X)w = dh_T \quad .$$

Finalmente, um estudo do <u>Formalismo Lagrangeano</u> para uma mecânica com vínculos pode ser encontrada em [13] e [14].

CAPÍTULO VI

# APLICAÇÕES EM RELATIVIDADE

## 1- Conexões Lineares

Seja M uma variedade diferencial de dimensão n e $\mathfrak{X}(M)$, resp. $F_M^R$ o conjunto dos campos de vetores em M, resp. das funções reais $C^\infty$ definidas em M. Uma aplicação $\nabla$: $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é dita conexão linear se, para todo X, Y, Z, $\in \mathfrak{X}(M)$, $f \in F_M^R$, tem-se

$$\text{i)}\quad \nabla(X+Y,Z) = \nabla(X,Z) + \nabla(Y,Z),$$
$$\text{ii)}\quad \nabla(X,Y+Z) = \nabla(X,Z) + \nabla(X,Z),$$
$$\text{iii)}\quad \nabla(fX,Y) = f\nabla(X,Y),$$
$$\text{iv)}\quad \nabla(X,fY) = (Xf)Y + f\nabla(X,Y)\ .$$

É usual na literatura representar-se $\nabla(X,Y)$ por $\nabla_X Y$, dita derivada covariante.

Seja $p \in M$ e $T_pM$ o espaço tangente à M no ponto p. A aplicação que ao ponto p associa uma base $(X_i)$, $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ do espaço tangente $T_pM$ será dita referencial. Se por P(M) representar-se o conjunto dos referenciais $(p,X_i)$ em p, então mostra-se (Cf. [11]) que P(M) é uma variedade diferencial de dimensão $n+n^2$ e que $(P(M), \pi M)$ é uma variedade fibrada, $\pi : (p,X_i) \to p$. No que se segue omitiremos o ponto p na representação do referencial, representado dora em diante por $(X_i)$. Portanto

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma^k_{ij} X_k \qquad \text{(VI-1.1)}$$

As $n^3$ funções $\Gamma^k_{ij}$ são ditas componentes da conexão linear.

Se $(U, x_1,\dots,x_n)$ é um sistema de coordenadas local e $p \in U$, indicaremos por $(\partial_1,\dots,\partial_n)_p$ o referencial em $T_pM$ induzido, i.e., $(\partial_i)_p = (\partial/\partial x_i)_p$. Utilizando-se os axiomas da definição de conexão linear, tem-se

$$\nabla_X Y(p) = \sum_j (X_p b_j (\partial_i)_p + b_j(p) (\sum_i a_i(p) \nabla_{\partial_i} (\partial_j)_p)),$$

(VI-1.2)

onde $X_p = \sum_i a_i(p)(\partial_i)_p$, $Y = \sum_j b_j(\partial_j)$. Decorre de (IV-1.2) que $\Lambda_X Y(p)$ depende exclusivamente de X em p e de Y.

EXEMPLO. (A conexão canônica no $R^n$) - Se X, $Y \in \mathfrak{X}(R^n)$ e $p \in R^n$, defina-se

$$\nabla_X Y(p) = \sum_j (Xb_j)(p)(\partial_j)_p .$$

Seja $\alpha : I \to R^2$ o círculo unitário $\alpha(t) = (\text{cost},\text{sent})$. Então $\alpha'(t) = (-\text{sent})\partial_1 + (\text{cost})\partial_2$. Se $X_p = -x_2\partial_1 + x_1\partial_2$, $p = (x_1,x_2)$, então

$$X_{(t)} = (-\text{sent})\partial_1 + (\text{cost})\partial_2 = \alpha'(t).$$

Portanto $\nabla_X X(\alpha(t)) = (-x_1)\partial_1 + (-x_2)\partial_2$ , i.e., $\nabla_X X(\alpha(t))$ representa o vetor aceleração de $\alpha : I \to R^2$;

$$\nabla_{\alpha'}\alpha'(t) = \sum_{ij} \frac{d^2\alpha j}{dt^2} (\partial_i).$$

Seja $\alpha : I \to M$ uma curva diferenciável. Diz-se que $\alpha$ é uma <u>geodésica</u> se $\nabla_{\alpha'}\alpha' = 0$. Diz-se que uma curva diferenciável $\alpha : I \to M$ é uma curva <u>integral</u>, ou uma <u>solução</u>, ou ainda uma <u>trajetória</u>, de X se $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$. Neste caso diz-se que o campo de vetores X é um <u>campo</u> (tangente) <u>ao longo de</u> $\alpha$. Diz-se que $Y \in \mathfrak{X}(M)$ é <u>paralelo ao longo de</u> $\alpha$ se $\nabla_X Y(\alpha(t)) = 0$, onde X é um campo tangente à $\alpha$. Se X é um campo tangente à $\alpha$, então $\alpha$ é uma geodésica se e somente se X é paralelo ao longo de $\alpha$.

Seja $\nabla$ uma conexão linear em uma variedade M. Diz se que $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, (resp. $R: \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to L(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M)$) é a 2-<u>forma de torção</u>, (resp. 2-<u>forma de curvatura</u>) associada à $\nabla$ se

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - |X,Y| ,$$

$$(\text{resp. } R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} ).$$

Segue-se que T, (resp. R) é bilinear alternada, pois

$$\begin{aligned} T(X,Y) &= - T(Y,X) , \\ T(X+X',Y) &= T(X,Y) + T(X',Y) , \\ T(fX,Y) &= fT(X,Y) , \\ (\text{resp. } R(X,Y) &= - R(X,Y) , \\ R(X+X',Y) &= R(X,Y) + R(X',Y) , \\ R(fX,Y) &= fR(X,Y) , \\ R(X,Y)(Z+Z') &= R(X,Y)Z + R(X,Y)Z' , \\ R(X,Y)(fZ) &= fR(X,Y)Z) . \end{aligned}$$

Se $(X_i)$ é um referencial, pondo $[X_i, X_j] = \sum C^k_{ij} X_k$, tem-se, por (IV-1.1),

$$T(X_i, X_j) = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} - C^k_{ij} \overset{\text{def}}{=} T^k_{ij} , \qquad \text{(VI-1.3)}$$

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k = {} & X_j \Gamma^h_{ik} - X_k \Gamma^h_{ji} + \Gamma^l_{ki} \Gamma^h_{jl} - \Gamma^l_{ji} \Gamma^h_{kl} \\ & - C^l_{jk} \Gamma^h_{li} \overset{\text{def}}{=} R^h_{ijk} . \end{aligned} \qquad \text{(VI-1.4)}$$

No caso em que $T(X,Y) = 0$, qualquer que sejam $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, diz-se que a torção é <u>livre</u> e neste caso que $\nabla$ é simétrica. Se $X_i = \partial_i$ então (VI-1.3) e (VI-1.4) assumem a forma

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$$

$$R^h_{ijk} = \partial_j \Gamma^h_{ik} - \partial_k \Gamma^h_{ji} + \Gamma^l_{ki} \Gamma^h_{jl} - \Gamma^l_{ji} \Gamma^h_{kl}$$

visto que $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Observa-se que a tomada do referencial canônico $(\partial_i)$ dependerá das condições do teorema de Frobenius (Cf. [10]).

Tem-se ainda que (se a conexão for simétrica)

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

(dita identidade de Bianchi)

2- Equações de Estrutura

Seja $\nabla$ uma conexão linear sobre $M, (X_i) \in P(M)$, $X = \sum_i X_i$. Se

$$\nabla_X X_j = \sum_k , \omega^k_j X_k \qquad \text{(VI-2.1)}$$

e se $\omega_i$ são (n-1) formas tais que $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$, então

$$\omega^k_j = \sum_i \Gamma^i_{jk} \omega_i \qquad \text{(VI-2.2)}$$

As n e $n^2$ 1-formas $\omega_i$, $\omega^k_j$ são definidas sobre P(u) e são linearmente independentes. Diz-se que $\omega^k_j$ são as 1-formas de conexão do referencial $(X_i)$.

Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então, pondo

$$T(X,Y) = \sum_i T_i (X,Y) X_i$$

$$R(X,Y)X_j = \sum_i R_{ij} (X,Y) X_i$$

tem-se

$$T_i(X,Y)X_i = \sum_j (X\omega_j(Y) - Y\omega_j(X) - \omega_j\ [X,Y])X_j +$$
$$+ \sum_i (\omega_j(Y)\omega_{ij}(X) - \omega_j(X)\ \omega_{ij}(X)X_i$$

donde

$$T_i(X,Y) = X\omega_i(Y) - Y\omega_i(X) - \omega_i\ [X,Y] + \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j(X,Y)$$

ou

$$d\omega_i(X,Y) = T_i(X,Y) - \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j(X,Y)$$

A equação

$$d\omega_i = T_i - \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j \qquad \text{(VI-2.3)}$$

ê dita la equação estrutural de Cartan. Analogamente, deduz-se

$$d\omega_{ij} = R_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \qquad \text{(VI-2.4)}$$

dita 2a equação estrutural de Cartan.

Num referencial $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ induzido por um sistema de coordenadas local, (VI-2.3) 2 (VI-2.4) ficam

$$T_i = \sum_{j,k} T^k_{ij}\ dx_j \wedge dx_k$$

$$R_{ij} = \sum_{k,h} R^h_{ijk}\ dx_k \wedge dx_h$$

(Observe que $d^2\omega = 0$ e que $\omega_{ij} \wedge \omega_j\ (\partial_m, \partial_n) = \omega_{ij}(\partial_m)\ {}_j(\partial_n)$ -

$- \omega_{ij}(\partial_n)\ \omega_j(\partial_m)$)

3- <u>Caso Riemanniano</u>

Seja M uma variedade <u>Riemanniana</u> i.e., M está munida de uma estrutura Riemanniana dada por uma aplicação real $C^\infty g$ tal que, para todo ponto $p \in M$, g associa uma aplicação

$g_p : T_pM \times T_pM \to R$ bilinear, simétrica e positiva definida . Diz-se que uma conexão em M é Riemanniana se, para todo X,Y,Z $\varepsilon$ X(M) , tem-se,

$$\text{i)}\quad X_g(Y,Z) = g(\nabla_x Y,Z) + g(Y, \nabla_x Z)$$

$$\text{ii)}\quad [X,Y] = \nabla_x Y - \nabla_x X \quad \text{a torção associada é nula}$$

Mostra-se, (Cf. [15])que existe uma única conexão Riemanniana numa variedade Riemanniana.

Se $\alpha : [a,b] \to M$ é uma curva regular numa variedade Riemanniana, o comprimento de $\alpha$ é definido por

$$s(\alpha) = \int_a^b g(\alpha'(t),\ \alpha'(t))^{1/2}$$

Num sistema de coordenadas local tem-se

$$ds^2 = \sum g_{ij}\ \alpha_i'\ \alpha_j'$$

onde

$$g_{ij} \overset{def}{=} g_p(\partial_i,\partial_j)_p$$

Mostra-se por (i), (ii) que

$$g\ (\nabla_{\partial_i},\partial_j,\ \partial_k) = \frac{1}{2}\ (\partial_i g(\partial_j,\partial_k) + \partial_j g(\partial_k,\partial_i) - \partial_R g(\partial_i,\partial_j))$$

ou ainda

$$\sum_r \Gamma_{ij}^r\ (g_{rk}) = \frac{1}{2}\ (\partial_i(g_{jk}) + \partial_j(g_{ki}) - \partial_k(g,j)) \qquad \text{(IV-3.1)}$$

onde $(g_{lm}) = (g(\partial_l,\partial_m)$ representa a matriz associada ã g.

Se $(\partial_1,\ldots,\partial_n)$ é ortonormal, então

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2}(g^{rk})\ \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right) \qquad \text{(VI-3.2)}$$

onde $(g^{rk})$ representa a matriz inversa de $(g_{rk})$.

Do fato de que a torção associada a conexão Riemanniana ser nula, segue-se que as equações de estrutura de Cartan são

$$d\omega_i = - \sum \omega_{ij} \wedge \omega_j$$

$$d\omega_{ij} = R_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$$

EXEMPLO-A. Consideremos um sistema de coordenadas polares no $R^2$ representado por $\rho$ , $\phi$. A métrica é dada por

$$ds^2 = d\rho^2 + (f(\rho,\phi))^2 d\phi^2$$

Ponha-se

$$\omega_i = d\rho \quad , \quad \omega_2 = f(\rho,\phi)d\phi$$

Então

$$ds^2 = (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2$$

Tomando-se a derivada exterior, tem-se

$$d\omega_1 = 0$$

$$d\omega_2 = f(\rho,\phi)d^2\phi \; + df \wedge d\phi =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho \wedge d\phi \; + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi \wedge d\phi$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \rho} \omega_1 \wedge d\phi \; = \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{/(\rho,\phi)} \right\} \omega_1 \wedge \omega_2$$

Verifica-se que $\omega_{11} = \omega_{22} = 0$, donde

$$d\omega_1 = - \omega_{12} \wedge \omega_2 \quad , \quad d\omega_2 = - \omega_{21} \wedge \omega_1$$

Mas $\omega_{12} = - \omega_{21} = \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) / f(\rho,\phi) \right\} \omega_2$, pois

$$d\omega_2(x_1,x_2) = \left\{\left\{\frac{\partial f}{\partial \rho}\right\}/f(\rho,\phi)\right\}\omega_1 \wedge \omega_2\ (x_1,x_2) =$$

$$= \left\{\left\{\frac{\partial f}{\partial \rho}\right\}/f(\rho,\phi)\right\}$$

Logo a 2-forma curvatura é

$$R_{12} = - R_{21} = d\omega_{12} + \sum \omega_{2p} \wedge \omega_p{}^1$$

$$= d\left[\left\{\left\{\frac{\partial f}{\partial \rho}\right\}/f\right\}\omega_2\right] + \omega_{21} \wedge \omega_{21} + \omega_{12} \wedge \omega_{21}$$

$$= \left\{\left\{\frac{\partial f}{\partial \rho}\right\}/f\right\}d\omega_2 + d\left\{\left\{\frac{\partial f}{\partial \rho}\right\}/f\right\} \wedge \omega_2$$

Tem-se

$$d\omega_2 = - \omega_{21} \wedge \omega_1 = \left\{\left\{\frac{\partial f}{\partial \rho}\right\}/f\right\} \omega_1 \wedge \omega_2$$

e

$$d\left[\left\{\frac{\partial f}{\partial \rho}\right\}/f\right] \wedge \omega_2 = \left\{\left\{\frac{\partial f}{\partial \rho}\right\}/f\right\}d\rho \wedge \omega_2$$

$$= \left[\left\{\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\right\}/f\right\} \left\{\frac{\partial f}{\partial \rho}\right\}/f^2\right]\omega_1 \wedge \omega_2$$

logo

$$R_{12} = - R_{21} = \left[\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\right\}/f\right] \omega_1 \wedge \omega_2$$

e

$$R^2_{112} = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\right\}/f \ .$$

EXEMPLO B. (Cf. [16]). Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional e $(X_1,\ldots,X_n)$ um referencial em $p \in M$. A forma quadrática $g_p$ sendo positiva definida admite uma decomposição

$$(g_{ij})\, X_i\, X_j = \sum_i (\partial_i)^2$$

onde $\theta_i = \sum a_{ij} X_j$. A composição acima possui m termos positivos e n-m termos negativos. Diz-se que M é <u>hiperbólica</u> sem = 1. Diz - se que $R^n$ munido da métrica

$$d\Lambda^2 = \sum a_i\, (dx_i)^2 \quad , \; a_i = 1 \text{ ou } -1$$

é um espaço "flat". Uma variedade Riemanniana de dimensão 4 hiperbólica é dita <u>Lorentziana</u> e será representada por $V_4$. Se o espaço $R^4$ é "flat" e hiperbólico, então é dito <u>espaço-tempo</u> de Minkowski, denotado por $M_4$.

Pode-se mostrar, que uma curva em $V_4$ é uma geodésica se satisfaz

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} = - \sum \Gamma^k_{ij} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0$$

Tomemos $V_4$ munido de uma métrica dada por

$$g_4 = -1 + \gamma_{11},\; g_{12} = \gamma_{12}, \ldots, g_{44} = 1 + \gamma_{44}$$

onde os $\gamma$'s são funções diferenciáveis cujos valores, bem como suas derivadas de la ordem relativamente aos x's, são suficientemente pequenos. Consideremos ainda que $o < \frac{dx_i}{dt} < \varepsilon$ , $\frac{dx_4}{dt} = 1 + \delta$ e

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} = - \Gamma^k_{44} = - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_k}$$

com, $g_{4k} = 0$, $k = 1,2,3$. Neste caso a métrica $g_{ij}$ pode ser tomada como representando o campo gravitacional. Pode-se mostrar (Cf. [16]) que o tensor curvatura de Ricci definida por

$$R_{ik} = - \sum_n R^n_{ikn}$$

neste caso é

$$R_{44} = -\frac{1}{2}\sum_i \left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial x_4^2}\right).$$

Tomando a situação

$$R_{44} = -\frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}\,\Delta\, g_{44} \,,$$

a condição $R_{44} = 0$ implica na equação de Laplace, que estabelece a equação para o campo gravitacional. Na ausencia de matéria, Einstein introduziu a equação

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}\, g_{ij}\, R = 0$$

onde $R = \sum R_{ii}$, que a transforma em

$$G_{ij} - X\, G\, R_{ij} = k\, T_{ij},$$

(onde $T_{ij}$ é o tensor energia-momentum, r,k constante), quando considera-se a presença da matéria-energia.

4- Equações de Maxwell (Cf. [17])

Consideremos as equações de Maxwell

(1) $\operatorname{div} B = 0$ (2) $\operatorname{div} D = \sigma$

(3) $\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ (4) $\operatorname{rot} H = j + \frac{\partial D}{\partial t}$

onde $\sigma$ é a densidade de carga, j o vetor densidade de corrente , $E = D$ o campo elétrico e $B = H$ o campo magnético. Sejam $(x_1, x_2, x_3, x_0 = t)$ um sistema de coordenadas local de $M_4$ (espaço tempo). As componentes do campo eletromagnético de Minkowski $F_{ij}$ são dadas pela matriz

$$(F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

onde $E_i$, $B_i$ são os componentes de A e B respectivamente.

Como $(F_{ij})$ é anti-simétrica, pode-se considerar a 2-forma

$$F = \sum F_{ij}\, dx^i \wedge dx^j =$$

$$= \sum E_i\, dx_i \wedge dt + B_1\, dx_2 \wedge dx_3 + B_2\, dx_3 \wedge dx_2$$

$$+ B_3\, dx_1 \wedge dx_2 = \varepsilon \wedge dt + \beta$$

para caracterizar o campo eletromagnético. Pode ser demonstrado (Cf. [6], [9]) que

$$dF = 0 \iff \begin{cases} d\beta = 0, \text{ i.e. } \operatorname{div} B = 0 \\ d\beta + \frac{\partial\beta}{\partial t} = 0, \text{ i.e. } \nabla \times E = -\frac{\partial\beta}{dt} \end{cases}$$

TEOREMA A: <u>Suponha que cada observador inercial observe que</u> div B = 0. <u>Então</u> dF = 0, <u>donde cada observador observa que</u> rot E = $-\frac{\partial B}{\partial t}$.

<u>Prova</u>. Seja $(x_1,x_2,x_3,t)$ um sistema de coordenadas local (para o observador inicial) em $M_4$ fixa-se $t_o$, e consideremos a inclusão $\phi$ $R^3 \to R^3 xR$ $(x_1,x_2,x_3) \to (x_1,x_2,x_3,t_o)$. Então, (Cf. §7, cap.III) $\phi^*F$ é a 2-forma induzida pelo $\phi$ i.e., F restrita à seção espacial $(x_1,x_2,x_3,t)$. Tem-se

$$\phi^*F = \phi^*\beta = B_1\, dx_2 \wedge dx_3 + B_2\, dx_3 \wedge dx_1 + B_3\, dx_1 \wedge dx_2$$

visto que para $t = t_o$, $dt = 0$. Por hipótese

$$d(\phi^*\beta) = (\text{div } B)\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = 0$$

donde $d(\phi^*F) = \phi^*(dF) = 0$, ou seja a 3-forma dF restrita a seção espacial é nula. Tem-se que $dF = 0$, pois pondo

$$dF = \sum A_{ijk}\, dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k = i(A)\ dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

onde A é o vetor de componentes $A_{ijk}$, tem-se que $dF = 0 \iff A = 0$. Se $A \neq 0$ então pode-se determinar um referencial $A, y_1, y_2, y_3$ em $V_4$ tal que

$$dF(y_1, y_2, y_3) = dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3(A, y_i, y_2, y_3) \neq 0$$

o que contradiz o fato de que em qualquer referencial $d(\phi^*F) = 0$

A demonstração do teorema abaixo encontra-se em [17].

TEOREMA B. Se div $E = \sigma$, para cada observador inercial, então rot $B = j + \frac{\partial E}{\partial t}$ .

BIBLIOGRAFIA


[0] E.Cartan - Leçons sur les Invariants Integraux (Hermann) (1922), Paris.

[1] G.Reeb - C.R.Acad. Sc. Paris, 235 (1952).

[2] J.Souriau - Publ. Sc. Univ. Alg., Al (1954).

[3] A.Lichnerowicz - C.R.Acad. Sc. Paris 233 (1951) 723.

[4] J.Klein - Ann. Inst. Fourier, 12 (1962).

[5] L.Loomis and S.Sternberg - Advanced Calculus, Addison Wesley, (1968), N.Y.

[6] Y.Choquet-Bruhat - Géometrie Differentièlle et Systèmes Extérieurs (Dunod), (1968), Paris .

[7] J.W.Leech - Classical Mechanics (Methuen Co. Ltd.), (1965) , London .

[8] M.Kuranishi - Publ. Soc. Mat. São Paulo, (1967), S.P.

[9] H.Flanders - Amer. Math. Month, (1953), 543 .

[10] C.Godbillon - Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique, (Hermann) (1969) Paris.

[11] P.M.Quan - Introduction à la Géométrie des variétes differentiables, (Dunod) (1969) Paris.

[12] S.Pneumatikos - C.R.Acad. Sc. Paris, A298, (1979), 799.

[13] M.J.Gotay and J.M.Nester - Ann. Inst. H.Poincaré, A30 (1979), 129.

[14] M.J.Gotay and J.M.Nester - Ann. Inst. H.Poincaré, A32 (1980),1.

[15] N.Hicks - Notes on Differential Geometry, (Van Nostrand),(1965), N.Y.

[16] S.Sterberg - Celestial Mechanics (Port.1) (Benjamin) (1965), N.Y.

[17] T.Frankel - Amer. Math. Month., (1974), 343.

[18] R.Abraham - Foundations of Mechanics (Benjamin), (1967), 343.

[19] M. do Carmo - Formas diferenciais e aplicações (IMPA), (1971), N.Y.

[20] S. Mac Lane - Amer. Math. Month, 77 (1970), 570.

[21] S.Sternberg - Lectures on Differential Geometry (Prentice Hall) (1969) N.Jersey.

[22] V.Arnold - Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique (Mir) (1976) Moscou.