

**CBPF - CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS**  
**Rio de Janeiro**

**Monografia**

**CBPF-MO-001/81**

**FISSÃO NUCLEAR**

**por**

**T. Kodama**



# FISSÃO NUCLEAR

T. Kodama

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

## 1. Introdução

Foi em fins de 1938 que os dois químicos alemães O. Hahn e F. Strassmann observaram de maneira conclusiva, ao contrário das expectativas da época, que os produtos radioativos resultantes do bombardeamento de urânio por neutrons não eram elementos transurânicos, mas sim núcleos de massa intermediária<sup>1)</sup>. Este fato foi interpretado pela física austríaca L. Meitner, ex-colaboradora de Hahn que tinha fugido da Alemanha, e pelo seu sobrinho O. Frisch como divisão do núcleo pai (urânio) em dois núcleos filhos de massas aproximadamente iguais. Eles chamaram esse fenômeno de fissão nuclear, em analogia com a fissão de células.

Os primeiros modelos teóricos de fissão nuclear foram publicados no ano seguinte por Y. Frenkel, e por N. Bohr e J.A. Wheeler. A teoria de Bohr e Wheeler<sup>2)</sup>, baseada no modelo da gota líquida do núcleo, ofereceu uma base de compreensão do fenômeno, cuja essência é ainda válida até hoje.

Pelas circunstâncias políticas da época e pelo fato de que a fissão nuclear representou a primeira possibilidade de acesso ao uso da energia nuclear para a humanidade, os aspectos tecnológicos foram sempre enfatizados, mesmo após a Guerra.

Não obstante isto, foram encontrados vários fenômenos interessantes, associados ao processo de fissão, e ao mesmo tempo foram desenvolvidos métodos teóricos capazes de tratar os núcleos em estados de grande deformação. Desse modo, o interesse dos físicos nucleares, motivados principalmente pela procura de elementos superpesados, retornou ao velho problema da fissão. Isto ocorreu nas décadas de 60 e 70, nas quais, do lado experimental, foi descoberta a existência de isômeros de fissão<sup>3)</sup> e, do lado teórico, foi estabelecido o método de renormalização de Strutinsky<sup>4)</sup>.

Cálculos extensivos foram feitos com a superfície de potencial por diversos métodos, e o problema de assimetria dos fragmentos de fissão, que permaneceu durante longo tempo como um mistério, foi, pelo menos qualitativamente, explicado por intermédio da existência de uma estrutura fina da superfície do potencial. O desenvolvimento teórico se estendeu na área dos núcleos longe da linha de estabilidade  $\beta$  e dos elementos superpesados, estimulando conseqüentemente o estudo experimental das reações de íons pesados.

Nos últimos anos, a Física Nuclear está entrando em uma nova era: Com as reações de íons pesados de alta energia, esperamos compreender a dinâmica da matéria nuclear, e isso será, conforme expressão de D. Scott<sup>5)</sup>, "o pequeno passo em direção ao cosmos e às estrelas".

Apresentamos, nestas notas, uma breve e pedagógica revisão sobre o processo de fissão nuclear do ponto de vista macroscópico-microscópico. As discussões sobre a estrutura dos níveis transientes ou canais de fissão são completamente omitidas<sup>6)</sup>.

Na Sec. 2, discutimos, principalmente, as propriedades básicas da fissão espontânea e mostramos como o modelo da gota líquida funciona. Na Sec. 3, explicamos o mecanismo do surgimento da correção de camada na barreira de potencial de deformação, e demonstramos como o efeito é relevante para a assimetria de massa e para a existência dos isômeros de fissão. Na Sec. 4, tratamos o problema da dinâmica da fissão e discutimos como cálculos recém desenvolvidos, como por exemplo, o método de integral de trajetória e a aproximação semi-clássica, poderão ser aplicados.

## 2. Descrição Convencional do Processo de Fissão

A imagem mais intuitiva do processo de fissão é a de uma gota d'água, dividindo-se em dois. No caso da gota d'água, o mecanismo que provoca a divisão é entendido como processo de competição entre o peso da própria gota e sua tensão superficial. No caso do núcleo, um mecanismo análogo pode ser considerado, onde o efeito do peso da gota deve ser substituído pela força Coulombiana do núcleo.

Para discutir quantitativamente a dinâmica da fissão, é necessário introduzir um conjunto de variáveis, chamados coordenadas coletivas. Estas Coordenadas, de um lado, devem representar o estado final da fissão, i.é, o sistema de dois fragmentos, e de outro lado, devem representar o estado do núcleo pai. A coordenada mais importante é aquela que descreve o grau de liberdade do movimento relativo dos fragmentos. Para ilustrar, vamos considerar o caso uni-dimensional, em que o nú

cleo pai  $(A, Z)$  fissiona em dois núcleos filhos  $(A_1, Z_1)$  e  $(A_2, Z_2)$ . Imaginamos então uma família de superfícies que representam a forma do núcleo durante a fissão, como mostrada na Fig.1.

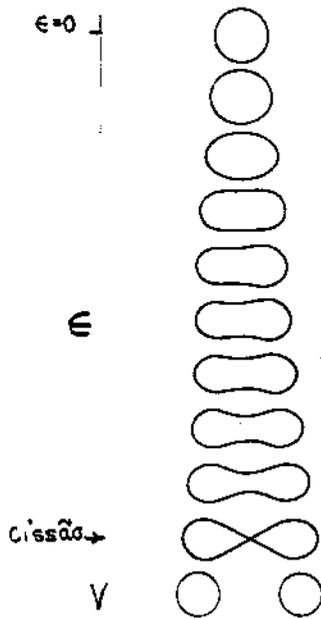


Fig. 1. A família de formas nucleares envolvidas no processo de fissão<sup>7)</sup>. A coordenada  $\epsilon$  representa o desenvolvimento da forma.

A cada etapa do desenvolvimento da forma, associamos um parâmetro  $\epsilon$ . Este parâmetro pode ser utilizado como variável dinâmica para descrever a fissão. Quando  $\epsilon$  é pequeno, ele é relacionado linearmente com o parâmetro de deformação  $\beta$ . Naturalmente, existem várias maneiras de se estabelecer explicitamente a família de formas nucleares. Isto constitui uma das ambiguidades intrínsecas na teoria de fissão. Apesar desta ambiguidade,

podemos discutir as propriedades básicas do mecanismo de fissão, pelo menos qualitativamente.

Como ponto de partida, são válidas as seguintes receitas:

1. Considera-se o núcleo como uma gota líquida, com formas geométricas dadas na Fig. 1.
2. Calcula-se a energia potencial associada à variável  $\epsilon$ . As contribuições vêm da energia Coulombiana e da energia de superfície.
3. Determina-se a inércia, com o núcleo tratado como um fluido incompressível e irrotacional.

Para pequenas deformações, é conveniente especificar a forma do núcleo pela equação

$$R = R(\theta, \phi) = R_0(\epsilon) \{1 + \epsilon Y_{20}(\theta, \phi)\} \quad (1)$$

Neste caso, a energia de deformação, associada com o parâmetro  $\epsilon$ , é calculada como

$$E_{\text{def}} = E_{\text{def}}(\beta) = \frac{1}{2\pi} E_s^{(0)} (1-x) \epsilon^2 \quad (2)$$

onde  $x$  é o parâmetro de fissionabilidade, definido por

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \frac{E_c^{(0)}}{E_s^{(0)}} = \frac{a_c}{2a_s} \frac{Z^2}{A} \\ &= \frac{1}{50} \frac{Z^2}{A} \end{aligned} \quad (3)$$

$E_s^{(0)}$  e  $E_c^{(0)}$  são, respectivamente, as energias de superfície e de Coulomb do núcleo na forma esférica;  $a_s$  e  $a_c$  são os coeficientes dos termos correspondentes na fórmula de massa de gôta líquida.

Na verdade, a Eq. (2) é dada como a soma da energia de tensão superficial  $\frac{1}{2\pi} E_s^{(0)} \epsilon^2$  e da energia Coulombiana  $-\frac{1}{2\pi} E_s^{(0)} x \epsilon^2$ .

Para grandes valores de  $\epsilon$ , a energia de tensão superficial tende a uma constante, visto que, após a separação (cissão) dos fragmentos, a área total da configuração é constante. As curvas de potencial em função de  $\epsilon$  são ilustradas esquematicamente na Fig. 2. Obviamente, quando  $x > 1$ , o núcleo

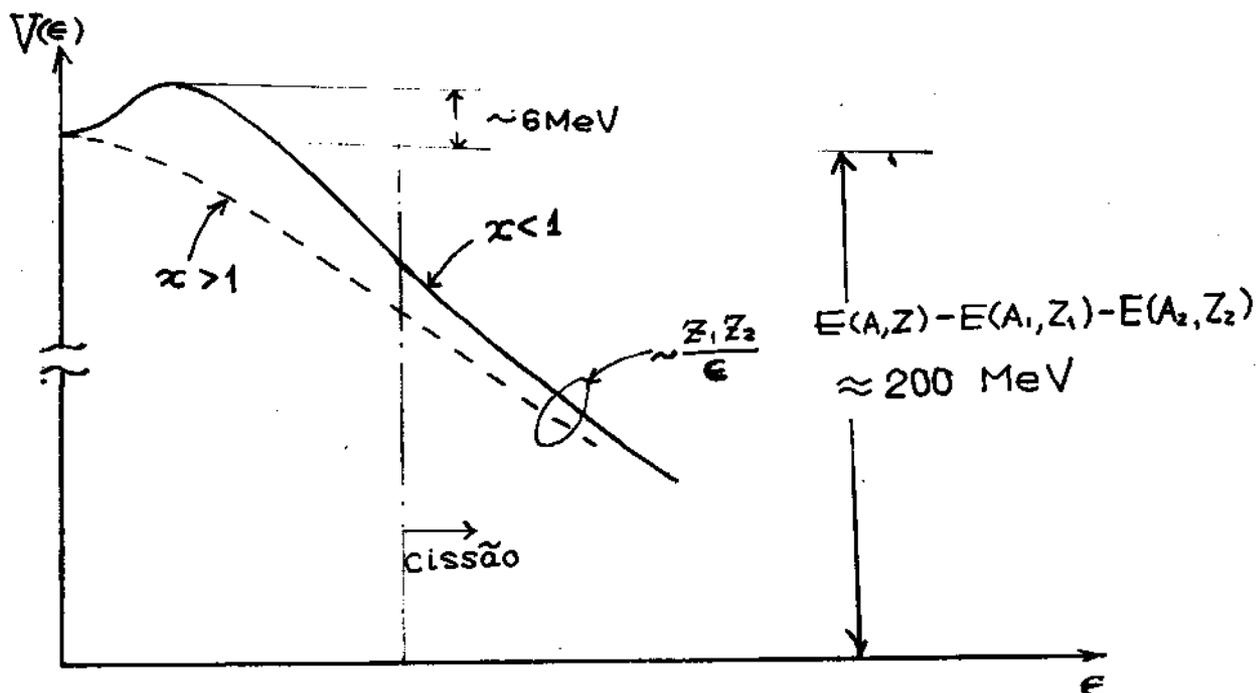


Fig. 2. Dependência esquemática da energia potencial em relação a  $\epsilon$ , para núcleo pesado ( $A \approx 240$ ). A linha contínua é para  $x < 1$  e a linha tracejada é para  $x > 1$ .

é instável contra deformação  $\epsilon$ . É interessante notar que, de fato, os núcleos têm maior probabilidade de fissão quando os valores de  $x$  ficam mais próximos de 1. Na Fig. 3, é mostrada a sistemática<sup>8)</sup> das meias-vidas observadas de fissão espontânea.

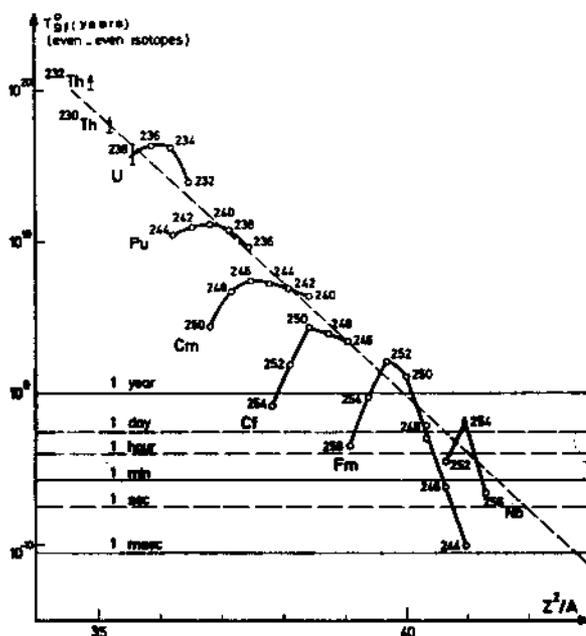


Fig. 3. A sistemática das meias-vidas observadas de fissão espontânea<sup>8)</sup>.

Como mostrado na Fig. 2, surge uma barreira de potencial para  $x < 1$ , proveniente do processo de competição entre as forças nucleares (de curto alcance) e Coulombiana (de longo alcance). As alturas da barreira foram medidas experimentalmente<sup>9)</sup> para alguns núcleos, utilizando-se o processo de fissão induzida (Fig. 4). São mostradas, também na Fig. 4, as alturas das barreiras calculadas pelo modelo de gôta líquida, incluindo efeitos de estrutura de camada<sup>10)</sup>. Vemos que, apesar da extrema simplicidade do modelo, o aspecto básico do fenômeno de fissão é bem reproduzido pelo modelo de gôta líquida.

Entretanto, alguns problemas não são explicados por este modelo. O problema mais importante é o da assimetria em massa dos fragmentos, observada na fissão de baixa energia ou na fissão espontânea na região dos actinídeos (ver Fig. 5). O mecanismo macroscópico (energia de superfície + energia Coulombiana) sempre favorece a separação simétrica dos fragmentos. Além desta dificuldade básica, podemos citar outras, tais como o desvio sistemático da meia-vida dos isótopos, como se pode ver na Fig. 3, e a estrutura supercomplexa dos níveis do núcleo transiente, observada na seção de choque para reação do tipo  $(n, f)$ .

Foi Swiatecki quem primeiramente chamou a atenção para a importância do efeito da estrutura microscópica do núcleo sobre a fissão nuclear, especialmente quanto à correção de camada nas massas nucleares<sup>9)</sup>. Ele mostrou explicitamente que a discrepância entre o logaritmo da meia-vida observada e a curva suave na Fig. 2 é linearmente proporcional à diferença entre a massa observada experimentalmente e a calculada pelo modelo



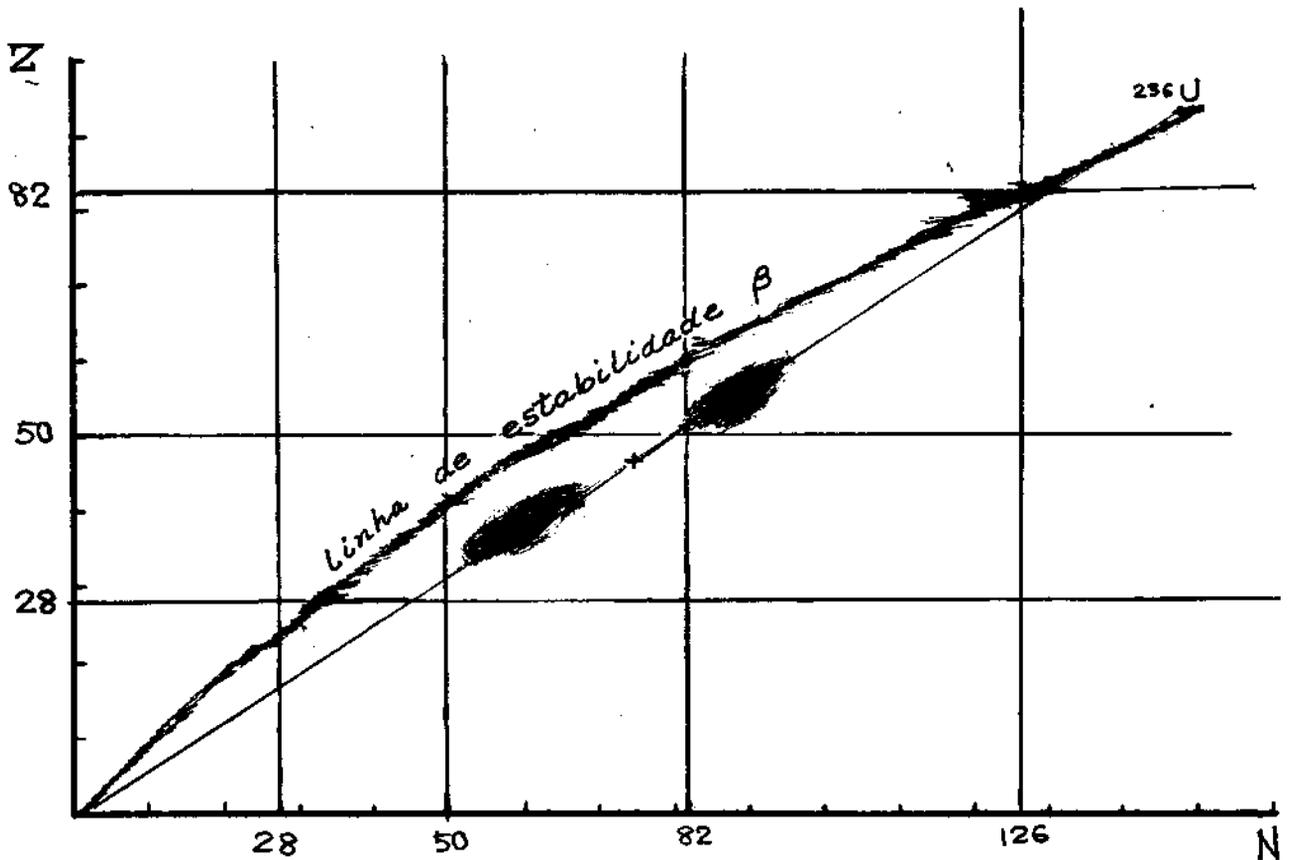


Fig. 5. Distribuição estatística dos fragmentos de fissão do  $^{235}\text{U}$  induzida por neutron t\u00e9rmico<sup>11)</sup>.

de g\u00f4ta l\u00edquida.

Os acontecimentos relevantes para o entendimento do efeito da estrutura microsc\u00f3pica no fen\u00f4meno de fiss\u00e3o foram a descoberta dos is\u00f4meros de fiss\u00e3o por Polikanov et al.<sup>3)</sup>, e a realiza\u00e7\u00e3o de c\u00e1lculos de superf\u00edcie de potencial, usando-se o m\u00e9todo macrosc\u00f3pico-microsc\u00f3pico<sup>4,12)</sup>.

Na se\u00e7\u00e3o seguinte, explicaremos o m\u00e9todo macrosc\u00f3pico-microsc\u00f3pico e mostraremos como os problemas citados foram resolvidos.

### 3. M\u00e9todo Macrosc\u00f3pico-Microsc\u00f3pico

O m\u00e9todo mais rigoroso para calcular o potencial em

função da deformação seria o método microscópico, tipo Hartree-Fock. Mas tal abordagem fica proibitivamente complicada para grande número de massa  $A$  e, mesmo quando aplicada, não daria necessariamente o valor da energia com precisão desejada ( $\leq 1$  MeV), devido à falta de informações sobre a interação efetiva entre núcleons. Por outro lado, sabemos que o modelo da gota líquida, apesar do caráter semi-empírico, dá uma estimativa da energia com precisão bastante razoável (erro relativo  $< 0.8\%$ ) e, ao mesmo tempo, permite construir facilmente uma imagem intuitiva da fissão.

Em 1963, Swiatecki, em vez de calcular a energia total, sugeriu um método para calcular a correção sobre a fórmula semi-empírica causada pela estrutura microscópica do núcleo<sup>13</sup>). Seja  $\Delta E$  tal correção, i.é.,

$$\Delta E \equiv E_{\text{obs}} - E_{\text{macro}} \quad (4)$$

onde  $E_{\text{obs}}$  é a massa nuclear observada e  $E_{\text{macro}}$ , a massa determinada pela fórmula de massa semi-empírica. O ponto fundamental do método macroscópico-microscópico é substituir  $\Delta E$ , não o próprio  $E$ , pelo valor  $\Delta E_{\text{modelo}}$  calculado por um modelo qualquer. Assim, a energia total calculada  $E_{\text{cal}}$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} E_{\text{cal}} &\equiv E_{\text{cal}} + \Delta E_{\text{modelo}} \\ &\rightarrow E_{\text{macro}} + \Delta E_{\text{modelo}} \end{aligned} \quad (5)$$

onde  $E_{\text{cal}}$  é a parte macroscópica da energia no modelo microscópico. Em outras palavras, renormalizamos a energia macroscópi

ca  $E_{ca}$  do cálculo microscópico na base da fórmula semi-empírica.

O modelo mais simples para estimar  $\Delta E_{\text{modelo}}$  é o modelo de gás de Fermi, o que foi proposto por Myers e Swiatecki<sup>10)</sup>. Para ilustrar o mecanismo do método macroscópico-microscópico, vamos ver como o modelo de gás de Fermi funciona.

Consideremos o gás de Fermi com número total de partículas igual a  $N$ . O espectro de partícula simples do gás (espectro "homogêneo") para o  $n$ -ésimo nível é

$$E_h(n) = \frac{1}{2m} p^2 \propto n^{2/3} \quad (6)$$

Por outro lado, o espectro não-homogêneo, correspondente ao sistema num poço de potencial, é da forma

$$E_{nh}(n) = E_i \quad M_{i-1} < n \leq M_i \quad (7)$$

onde  $M_i$  é o  $i$ -ésimo número mágico (camada fechada) do sistema.

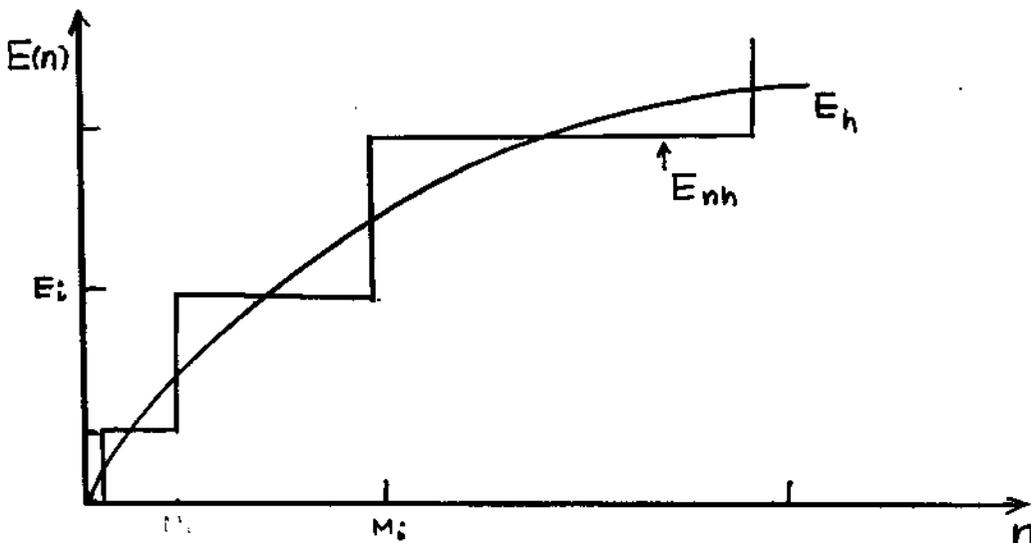


Fig. 6. Os espectros homogêneo e não-homogêneo.

Identificando  $\Delta E_{\text{modelo}}$  como a diferença das energias totais calculadas pelos dois espectros  $E_{nh}$  e  $E_h$ , temos

$$\Delta E_{g.F} = \sum_{n=0}^N E_{nh}(n) - \int_0^N E_h(n) dn \quad (8)$$

A Eq. (8) é baseada na idéia de que o espectro de gás de Fermi representa a propriedade média do sistema de  $N$  nucleons. É claro que a correção  $\Delta E_{g.F}$ , como função de  $N$ , tem a forma mostra-

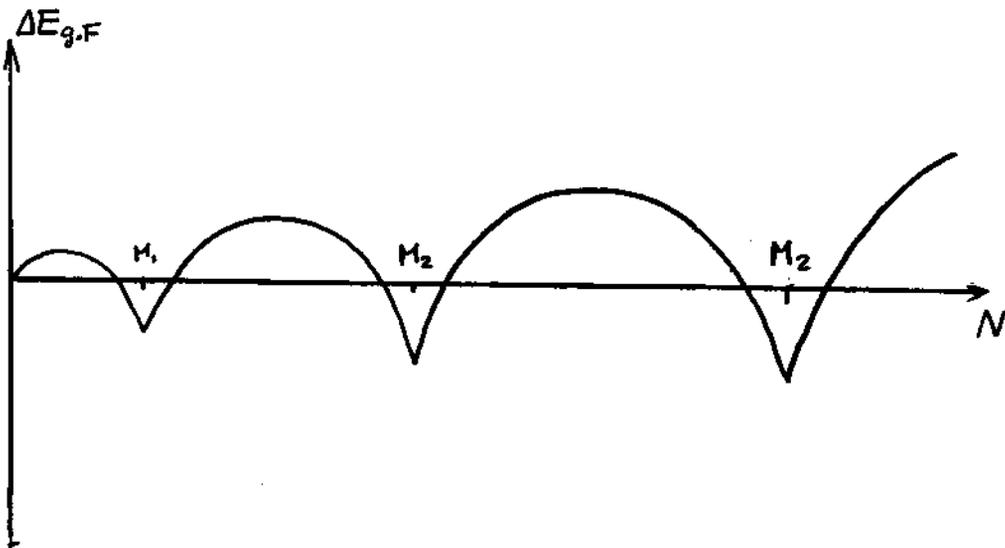


Fig. 7. A dependência de  $\Delta E_{g.F}$  em relação a  $N$ .  $M_i$ 's são os números mágicos<sup>10)</sup>.

da na Fig. 7, que é justamente a forma observada de  $\Delta E$ , em função de  $N$ , para núcleo no estado fundamental.

Strutinsky generalizou<sup>4)</sup> a idéia de Swiatecki e formulou um método para calcular  $\Delta E_{\text{modelo}}$ , inclusive no caso de núcleos deformados. Como já vimos, a origem da correção de camada vem da diferença nas distribuições de níveis do caso não-homogêneo (agrupamento dos níveis) e do caso homogêneo (Ver Fig. 8). Seja  $E_i[\epsilon]$  a energia do  $i$ -ésimo nível de partícula simples, calculada com o poço de potencial cuja deformação é espe-

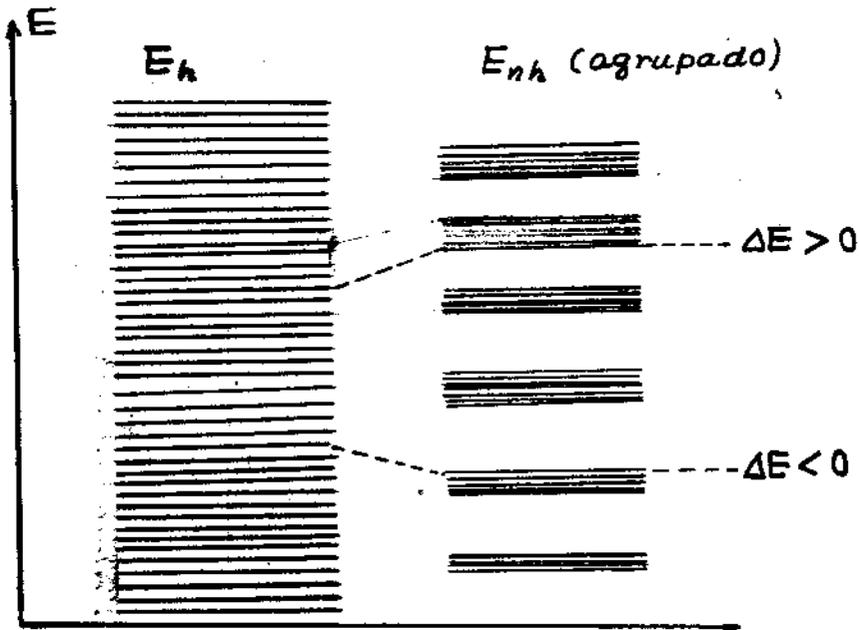


Fig. 8. O mecanismo de correção de camada.

cificada pelo parâmetro  $\epsilon$ . A energia total do sistema de  $N$  partículas  $\bar{E}$

$$\begin{aligned}
 E_{\text{tot}} &= 2 \sum_i^N E_i \\
 &= 2 \int^{\lambda_0} dE E g(E) \quad (9)
 \end{aligned}$$

onde  $g(E) = \sum_i \delta(E-E_i)$   $\bar{E}$  é a densidade de níveis,  $\lambda_0$ , a energia de Fermi do sistema e o fator 2 vem do spin. Seja  $\tilde{g}(E)$  a densidade de níveis do espectro homogêneo correspondente ao sistema. Então, a correção de camada  $\Delta E_{\text{modelo}}$  é calculada como

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{\text{modelo}} &= \Delta E_{\text{modelo}}(\epsilon) \\
 &= 2 \int^{\lambda_0} dE E g(E) - 2 \int^{\lambda} dE E \tilde{g}(E) \quad (10)
 \end{aligned}$$

onde  $\lambda$  é calculado pela conservação de número de neutrons ou de prótons,

$$2 \int^{\lambda_0} dE g(E) = 2 \int^{\lambda} dE \tilde{g}(E) = N \text{ ou } Z \quad (11)$$

A densidade de níveis homogênea  $\tilde{g}(E)$  é obtida de  $g(E)$  através do procedimento de suavização. Strutinsky<sup>4)</sup> propôs um método de suavização que consiste na convolução de  $g(E)$  com a função de peso

$$f(E) = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{E^2}{\gamma^2}} \sum_{i=1}^p a_i E^i \quad (12)$$

e

$$\tilde{g}(E) = \int dE' g(E') f(E-E') \quad (13)$$

onde  $\gamma$  é um parâmetro ajustável e os  $a_i$ 's são determinados pela condição

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-E^2} \sum_{i=1}^p a_i E^{i+k} dE = \delta_{k0} \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (14)$$

A ordem  $p$  do polinômio é estimada como sendo em torno de 6<sup>14)</sup>. Vários cálculos foram feitos por diversos grupos<sup>15)</sup>, que utilizaram diferentes parametrizações da deformação. Os resultados são bastante satisfatórios. Para o estado fundamental, os cálculos de  $\Delta E$  reproduzem os valores observados com erro máximo de 2 MeV (ver Fig. 9). Entretanto, vale a pena lembrar que o método

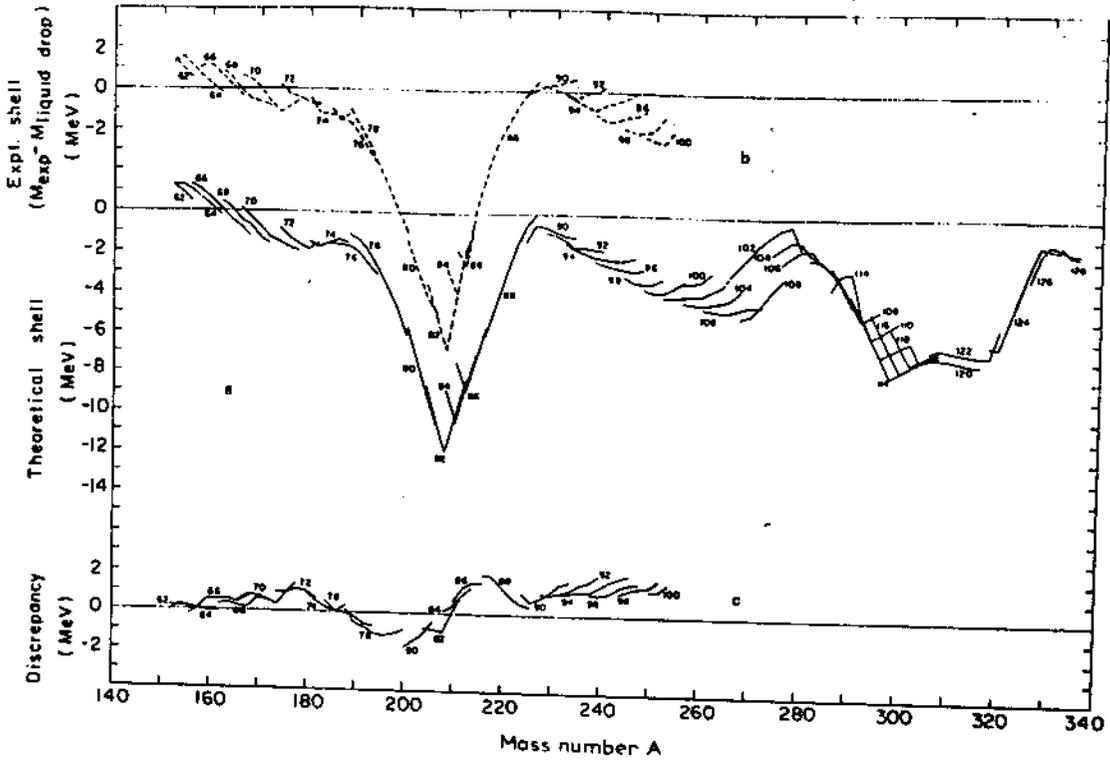


Fig. 9.  $\Delta E_{\text{obs}}$  (acima),  $\Delta E_{\text{modelo}}^{15}$  (centro), e  $\Delta E_{\text{obs}} - \Delta E_{\text{modelo}}$  (baixo).

tudo semi-fenomenológico de gás de Fermi de Myers-Swiatecki também reproduz com a mesma precisão o comportamento da energia do estado fundamental dos núcleos.

A vantagem do método de Strutinsky é que ele permite calcular  $\Delta E_{\text{modelo}}$  para qualquer deformação. Neste método, a variação de  $\Delta E$  em relação ao parâmetro de deformação  $\epsilon$  é facilmente conhecida, uma vez conhecido o modo como as energias de partícula simples variam em função de  $\epsilon$ . A deformação do poço de potencial provoca o levantamento da degenerescência dos níveis. À medida em que a deformação aumenta, os níveis se reordenam, de modo tal que, para certos valores de deformação, ocor-

rem re-agrupamentos de níveis, dando surgimento a novas camadas fechadas. Tal situação é mostrada na Fig. 10, onde os níveis de oscilador harmônico tri-dimensional são plotados em função da deformação  $\epsilon$ .

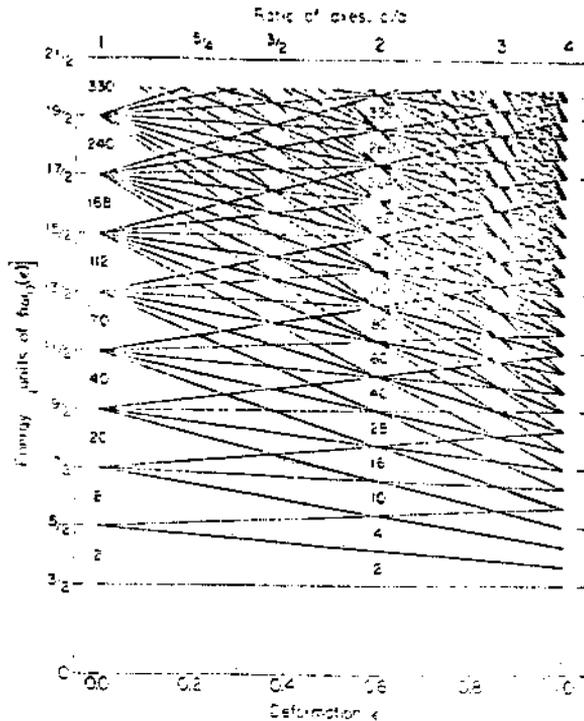


Fig. 10. Níveis de oscilador harmônico em função da deformação  $\epsilon$  <sup>12)</sup>.

A Fig. 10 mostra nitidamente que os números mágicos mudam em relação à deformação. O caso de um cálculo com potencial mais realístico é mostrado na Fig. 11.

Quando a correção  $\Delta E(\epsilon)$  é superposta à curva de deformação do modelo de gota-líquida, a curva de potencial fica modulada conforme mostra a Fig. 12.

A existência de isômeros de fissão é agora facilmente entendida. Com efeito, olhando-se a Fig. 12, os estados isoméricos de fissão são identificados como sendo os níveis quase-ligados associados ao segundo poço da curva.

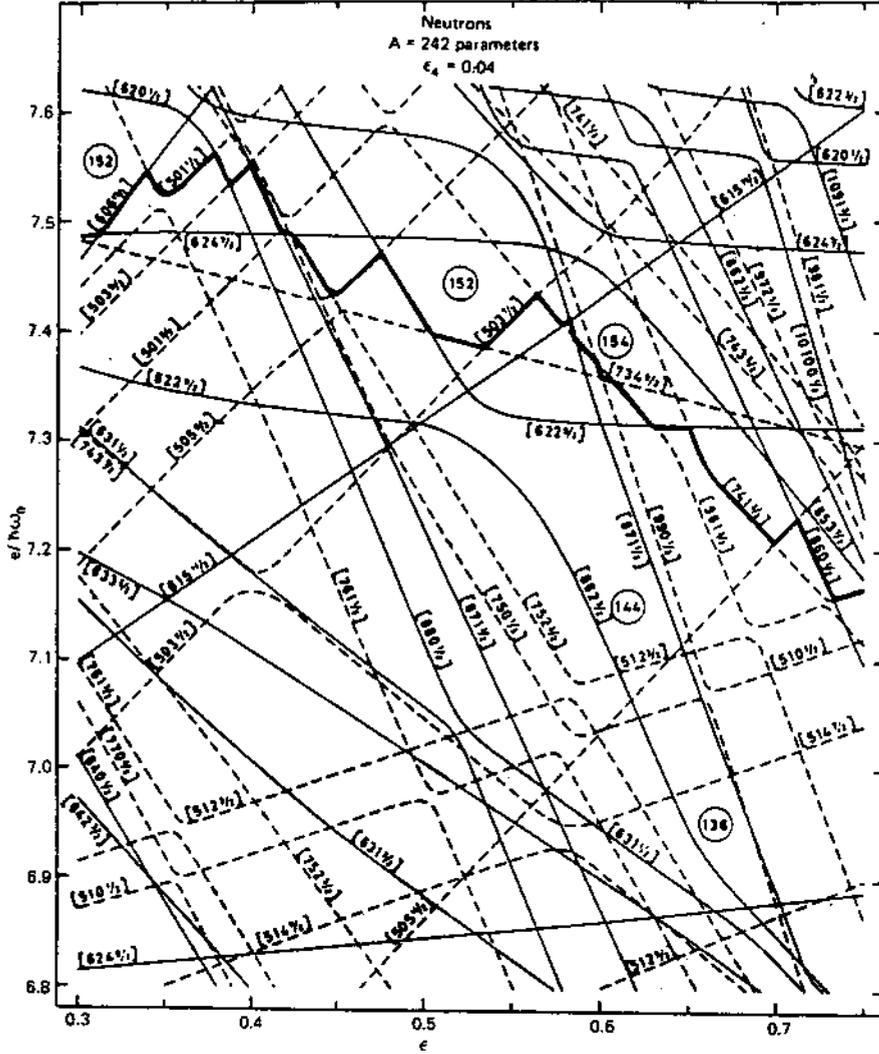


Fig. 11. Níveis de neutrons para núcleos pesados em função da deformação de quadrupolo, tais como calculados por Nilsson et al<sup>15)</sup>. A linha grossa representa o estado fundamental do <sup>250</sup>Cf (N = 152).

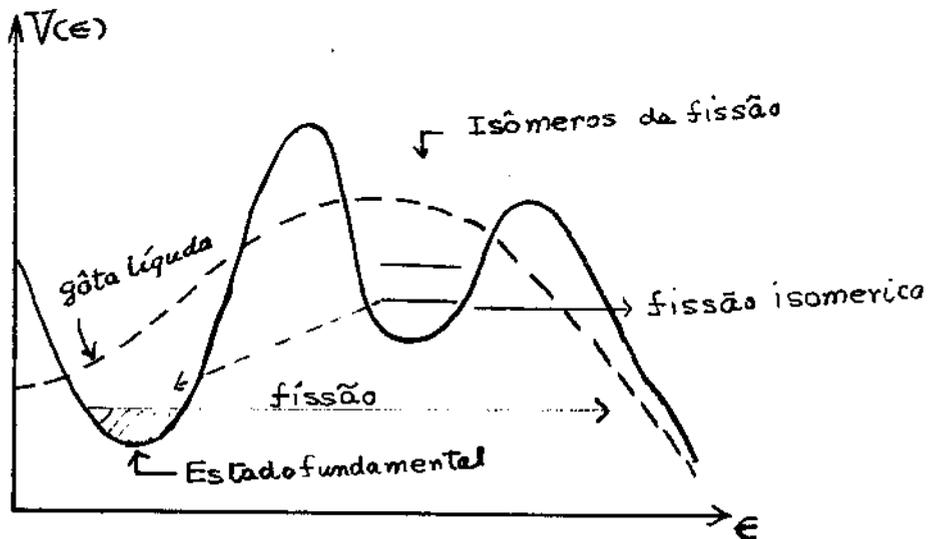


Fig. 12. Curva do potencial incluindo o efeito microscópico  $\Delta E$ .

Até agora, restringimos nossa discussão ao caso unidimensional, ou seja, um único parâmetro para especificar a deformação nuclear. A fim de discutir o fenômeno de assimetria em massa, temos que aumentar o número de graus de liberdade no movimento coletivo. Como mencionamos anteriormente, o efeito macroscópico favorece a fissão simétrica. Portanto, o fenômeno de fissão assimétrica deve ser explicado pelo efeito microscópico.

O cálculo de  $\Delta E_{\text{modelo}}$ , incluindo o grau de liberdade de divisão assimétrica do núcleo, mostraram que de fato tal efeito existe. Na Fig. 13, mostramos o resultado de Nix<sup>12)</sup>, onde se observa um rebaixamento do potencial para divisão assimétrica em relação à divisão simétrica. É interessante notar que

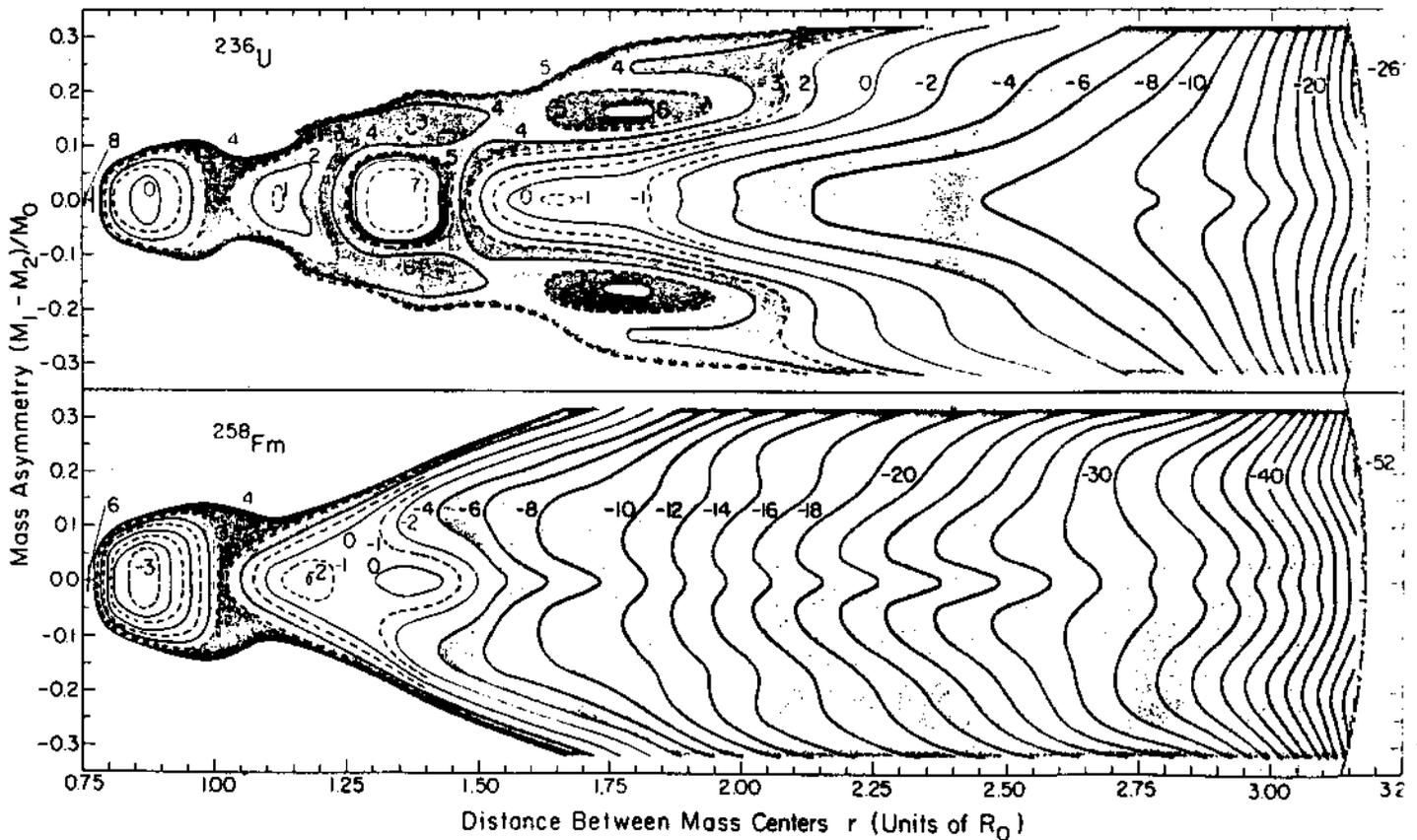


Fig. 13. Superfícies de energias potenciais do  $^{236}\text{U}$  (acima) e  $^{258}\text{Fm}$  (baixa). os contornos são especificados em termos de energia (MeV).

tal rebaixamento é consistente com o fato de que o valor observado da altura da segunda barreira é sistematicamente abaixo do valor calculado, para divisão simétrica, da segunda barreira. Entretanto, esperamos que a assimetria diminua para isótopos bem pesados, porque o efeito macroscópico cresce com  $A$  e, portanto, neste caso o efeito microscópico (efeito de partícula simples) permanece aproximadamente constante.

#### 4. Dinâmica da Fissão

Na Sec. 3, discutimos a propriedade da superfície de potencial em termos de coordenadas coletivas. Sabemos que o fenômeno de fissão é essencialmente um processo semi-clássico. Podemos, então, no caso unidimensional, aplicar a aproximação WKB, por exemplo, para calcular a constante de decaimento. Entretanto, no caso de dimensão maior do que um, precisamos de um método mais sofisticado. A generalização da aproximação WKB para mais do que uma dimensão não é trivial. Para discutir a fissão assimétrica, porém, tal generalização é essencial. Além disso, pelos dados experimentais, sabemos que os fragmentos de fissão são altamente excitados, provocando a emissão de partículas prontas. É importante, portanto, para o estudo da fissão, analisar a distribuição dos núcleos filhos logo após a fissão. Isto é, precisamos enfrentar o problema do mecanismo dinâmico da fissão.

Sejam  $\{e_i\}$  as coordenadas coletivas que descrevem as formas do núcleo apropriadas à fissão. O Hamiltoniano do sistema tem a forma

$$H_C = T_C + V_C(\epsilon) \quad (16)$$

onde  $V_C$  é o potencial para o movimento, conforme foi discutido na Sec. 2. A interação entre os graus de liberdade coletivos e os graus de liberdade internos fornece, no movimento coletivo, um mecanismo de dissipação, como no caso de reações de íons pesados. Aqui, não entraremos no assunto da dissipação, e simplesmente discutiremos o termo  $H_C$ .

A parte da energia cinética  $T_C$  do Hamiltoniano no modelo clássico tem a forma

$$T_C = \frac{1}{2} \dot{\epsilon} M \dot{\epsilon} \quad (17)$$

onde  $\dot{\epsilon}$  é a derivada temporal da variável coletiva (vetor),  $M$ , a matriz de inércia. Em termos de momentum,

$$T_C = \frac{1}{2} P M^{-1} P \quad (18)$$

Eventualmente, a matriz de inércia  $M$  pode depender das coordenadas  $\epsilon$ . Em geral,  $M$  não é diagonal (acoplamento cinético das variáveis).

Estudos sobre os parâmetros de inércia para fissão, infelizmente, não são tão bem estabelecidos como no caso do potencial. Isto porque, além do fato de os valores dos parâmetros de inércia não serem medidos experimentalmente, temos que utilizar a teoria microscópica para calcular  $M$ , sem a ajuda de estimativas feitas com modelos macroscópicos. A estimativa pelo modelo hidrodinâmico de um fluido incompressível e irrotacional dá normalmente  $1/10 \sim 1/5$  vezes menor que o valor encon-

trado pelo estudo microscópico<sup>17)</sup>. Em particular, o efeito de emparelhamento modifica substancialmente a natureza cinética do sistema (superfluidez), provocando uma alteração dos valores dos parâmetros de inércia em relação aos obtidos pelo modelo hidrodinâmico.

No tratamento microscópico, os parâmetros de inércia são calculados, identificando-se a parte da energia total que contém  $\dot{\epsilon}$  do sistema submetido a um potencial cuja deformação varia lentamente, como sendo a energia cinética  $T_c$ . O cálculo perturbativo em 1ª ordem conduz à fórmula de "cranking" de Inglis<sup>18)</sup>.

Além da dificuldade de se obter os parâmetros de inércia, existe o problema de quantização do sistema, quando tais parâmetros de inércia dependem de coordenadas  $\epsilon$ . Isto é relacionado com o problema de ordenação de operadores não comutáveis. No procedimento de quantização tradicional, o operador  $\bar{T}_c$  correspondente ao  $T_c$  da Eq. (18) é dado por

$$\bar{T}_c = - \frac{\hbar^2}{2} \frac{1}{\sqrt{\det M}} \nabla_{\epsilon} (\sqrt{\det M} M^{-1} \nabla_{\epsilon}) \quad (19)$$

onde  $\det M$  é o determinante da matriz  $M$ , e  $\nabla_{\epsilon}$ , o gradiente em relação a  $\epsilon$ . O problema da dinâmica de fissão, então, reduz-se ao problema de se resolver a equação de Schrödinger

$$- \frac{\hbar^2}{2} \frac{1}{\sqrt{\det M}} \nabla_{\epsilon} (\sqrt{\det M} M^{-1} \nabla_{\epsilon} \psi) + V\psi = E\psi \quad (20)$$

com condição de contorno apropriada, onde  $\psi = \psi(\epsilon)$  é a função de onda do estado coletivo.

Hofmann<sup>20)</sup> propôs um método de calcular, no caso bi-dimensional, a probabilidade de fissão, levando-se em consideração o mecanismo de excitação dos fragmentos. Tal método consiste em essencialmente introduzir o "caminho de fissão" no plano  $\epsilon_1 - \epsilon_2$ , ao longo do qual se aplica, então, a aproximação WKB. Ao mesmo tempo, a fim de considerar as excitações  $\epsilon_2$ , introduz-se a aproximação de Born para o grau de liberdade perpendicular ao caminho.

Entretanto, para processos que ocorrem na região de energia classicamente proibida, como no caso de tunelamento, o próprio conceito de "caminho" se torna ambíguo<sup>20)</sup>.

Outro método para quantizar o sistema é usar a integral de trajetórias, tal como introduzido por Feynmann<sup>21)</sup>.

A amplitude de probabilidade  $K(\epsilon_A, t_A; \epsilon_B, t_B)$  da configuração inicial  $\epsilon_A$  no tempo  $t_A$  para a configuração final  $\epsilon_B$  no tempo  $t_B$  é dada formalmente por

$$K(\epsilon_A, t_A; \epsilon_B, t_B) = \int_{\epsilon_A}^{\epsilon_B} \mathcal{D}[\epsilon] \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ \int_{t_A}^{t_B} (\frac{1}{2} \dot{\epsilon} M \dot{\epsilon} - V_c) dt \right\} \quad (21)$$

onde  $\int_{f_A}^{f_B} \mathcal{D}[f]$  denota a integral funcional sobre as funções  $f = f(t)$  com  $f(t_A) = t_A$  e  $f(t_B) = f_B$ . A amplitude  $K$  contém todas as informações da mecânica quântica do sistema. Infelizmente, porém, não existe um método geral de calcular a integral de trajetórias. Especificamente, como a medida de uma trajetória  $\epsilon(t)$  depende dos parâmetros de inércia, temos que ter certo cuidado no cálculo da integral funcional. Neste caso,  $\int \mathcal{D}[\epsilon]$  é definida como

$$\int_{\epsilon_A}^{\epsilon_B} \mathcal{D}[\epsilon] \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{[2\pi i \Delta t \det M^{-1}]^{\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^{N-1} \frac{1}{[2\pi i \Delta t \det M^{-1}]^{\frac{1}{2}}}} \int \frac{d\epsilon_k}{[2\pi i \Delta t \det M^{-1}]^{\frac{1}{2}}} \quad (22)$$

onde  $\Delta t = (t_B - t_A)/N$  e  $\epsilon_k = \epsilon \Big|_{t=t_A+k \cdot \Delta t}$ .

Contudo, a Eq. (21) é útil para discutir a estrutura da amplitude quântica, particularmente quando a aproximação semi-clássica é aplicável. Miller<sup>22)</sup> utilizou extensivamente a aproximação semi-clássica para a amplitude de transição, Eq. (21). A aproximação semi-clássica reside na expansão da ação integral  $\int_{t_A}^{t_B} L dt$  em torno da trajetória clássica até 2ª ordem em relação à variação  $\delta\epsilon \equiv \epsilon(t) - \epsilon_c(t)$ , onde  $\epsilon_c(t)$  é a trajetória clássica e, a seguir, na aplicação da integral Gaussiana para o 2º termo da expansão. Assim, a amplitude  $K$  é representada em termos de quantidades clássicas que satisfazem às relações obtidas pela equação de movimento clássico.

Escrevendo a ação clássica como

$$\Phi(\epsilon_A, \epsilon_B) \equiv \int_{t_A}^{t_B} L dt \Big|_{\epsilon = \epsilon_c(t)} \quad (23)$$

Miller obteve a expressão da aproximação semi-clássica da amplitude,

$$K^{S.C.}(\epsilon_A, \epsilon_B) = \left[ -\frac{1}{2\pi i \hbar} \det \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_A \partial \epsilon_B} \right] \right]^{1/2} \exp \frac{i}{\hbar} \Phi \quad (24)$$

Uma aplicação interessante deste método é calcular a

constante de decaimento de um estado preparado no tempo  $t_A = 0$ . Seja  $\psi_0(\epsilon)$  a função de onda inicial do estado coletivo, que é o auto-estado de energia do sistema sem o canal de decaimento. A amplitude de encontrar o sistema, no tempo  $t$ , ainda no estado não decaído é

$$A_{n,d}(t) = \int d\epsilon_B \int d\epsilon_A \psi_0^*(\epsilon_B) K(\epsilon_A, 0; \epsilon_B, t) \psi_0(\epsilon_A) e^{\frac{i}{\hbar} E_0 t} \quad (25)$$

onde  $E_0$  é a energia do sistema. Portanto, podemos definir a constante de decaimento  $\lambda$  por

$$\lambda = - \frac{dP}{dt} \quad (26)$$

onde  $P = |A_{n,d}|^2$ . O ponto importante, na hora de aplicar a aproximação semi-clássica para o processo classicamente proibido, é estender o conceito de trajetória até ao domínio complexo da variável  $\epsilon$  e do tempo  $t$ . Este fato pode ser entendido quando olhamos a trajetória clássica do ponto de vista do princípio da mínima ação. No princípio da mínima ação, a trajetória clássica é determinada pela equação

$$\Delta \int P \cdot \dot{\epsilon} dt = 0$$

onde  $\Delta$  é a variação, mantendo-se a energia total constante. No ponto de retorno clássico, aparece um "branching point" da função  $\epsilon = \epsilon(t)$  no plano complexo. Consequentemente, existem trajetórias "clássicas", no domínio complexo das variáveis e do tempo, que ligam os dois pontos  $\epsilon_A$  e  $\epsilon_B$ . Miller mostrou<sup>22)</sup> que tais trajetórias clássicas complexas reproduzem o

fator familiar de penetração de barreira,  $e^{-\frac{2}{\hbar} \text{Im}\phi}$ . É curioso notar que a extensão analítica da trajetória no plano complexo para o caso de energia abaixo da barreira equivale essencialmente a trocar o sinal do potencial na equação de movimento. Isto desloca as trajetórias de energia baixa em direção à região de potencial maior (ver Fig. 14), o que aparentemente é contrário à idéia de "caminho" de fissão adiabática. Ao mesmo tempo, o cálculo de parâmetros de inércia, tipo "cranking", deve ser re-investigado no contexto de trajetórias complexas. É desejável realizar um estudo comparativo dos vários métodos de

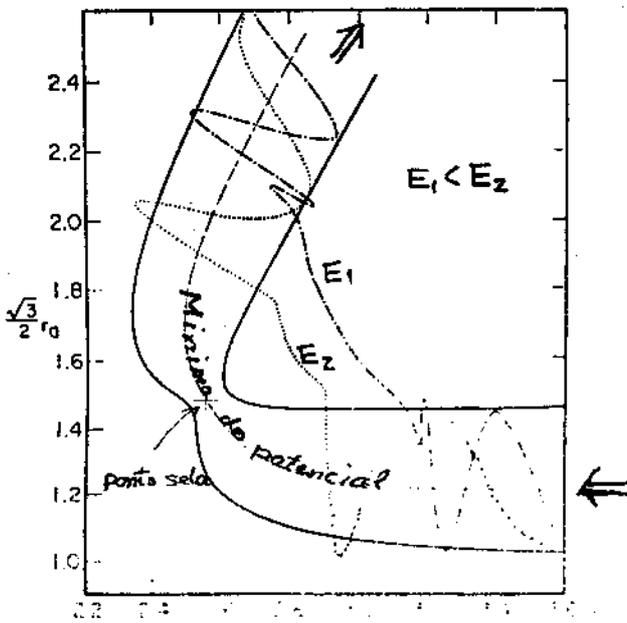


Fig. 14 - As trajetórias para energia abaixo da barreira.

dinâmica da fissão, incluindo o efeito da matriz de inércia. Como se vê, o problema da dinâmica de fissão está ainda bem longe de ser entendido com clareza.

Nestas notas, estudamos alguns aspectos da fissão nu

clear, principalmente a fissão espontânea, relacionados com as coordenadas coletivas (variáveis macroscópicas). Muitos outros aspectos importantes, contudo, não foram mencionados. Especialmente, os processos nucleares que envolvem o canal de fissão, por exemplo  $(\gamma, f)$ ,  $(n, f)$ ,  $(d, pf)$  etc. Tais processos constituem uma vasta área de pesquisa para o estudo da estrutura nuclear nos estados transientes<sup>23)</sup>.

Acreditamos que, através do estudo da fissão, várias surpresas, quanto ao mecanismo nuclear, poderão ainda ser reveladas.

Gostaria de agradecer aos Profs. K.C. Chung e R.A.M. S. Nazareth pela leitura cuidadosa do texto e pelas sugestões, especialmente ao K.C. Chung pelas correções de Português. Agradeço também aos Profs. L.C. Gomes e O.A.P. Tavares pelo interesse nas discussões.

Bibliografia

1. O. Hahn e F. Strassman, Naturwissenschaften 27, 11 (1939).
2. N. Bohr e J.A. Wheeler, Phys.Rev. 56, 426 (1939).
3. S. Polikanov et al., Zh. Eksperim. i Teoret. Fiz. 42, 1464 (1962).
4. V.M. Strutinsky, Nucl. Phys. A95, 420 (1967).
5. D. Scott, Progress in Particle and Nuclear Physics, vol. 4, Ed. D. Wilkinson, Pergamon Press (1980).
6. Para revisão geral, ver
  - L. Willets, Theories of Nuclear Fission, Clarendon, Oxford, 1963.
  - I. Halpern, Nuclear Fission, An. Rev. Nucl. Sci. 9, 245 (1959).
  - R. Vandenbosch e J.R. Huizenga, Nuclear Fission, Academic, N.Y. 1973.
  - A. Michaudon, Advances in Nucl. Phys. 6, 1 (1973).
7. M. Bolsterli, E.O. Fiset, J.R. Nix e J.L. Norton, Phys.Rev. 5, 1050 (1972).
8. W.J. Swiatecki, Phys. Rev. 100, 937 (1955).
9. A.V. Ignatyuk e G.N. Smirenkin, Phys. Lett. 29B, 159(1969).  
L.G. Moretto et al., Phys. Lett. 38B, 471 (1972).  
B.B. Back et al., Physics and Chemistry of Fission, IAEA , Viena, 1972.
10. W.D. Myers e W.J. Swiatecki, Nucl. Phys. 81, 1 (1966).  
W.D. Myers, Droplet Model of Atomic Nuclei, IFI/Plenum N.Y., 1977.
11. A.C. Pappas, J. Alstad e E. Hagebø, Physics and Chemistry of Fission, IAEA, Viena, 669 (1969).

12. P. Möller e J.R. Nix, Calculation of Fission Barriers, Physics and Chemistry of Fission, IAEA, Viena (1973)p.103.
13. W.J. Swiatecki, Proceedings of the Second International Conference on Nuclidic Masses, Viena, 1963, p. 58.
14. C.F. Tsan, Report UCRL-18899 (1969).
15. M. Bolsterli, E.O. Fiset, J.R. Nix e J.R. Norton, op.cit, S.G. Nilsson et al. Nucl. Phys. A131, 1 (1969).  
M. Brack et al., Rev. Mod. Phys. 44, 320 (1970).  
M.G. Mustafa, U. Mosel e H.W. Schmitt, Phys.Rev. C7, 1519 (1973).
16. M.G. Mustafa e H.W. Schmitt, Oak Ridge Report (1973).
17. S.G. Nilsson et al., Nucl. Phys. A131, 67 (1969).
18. Por exemplo, J.M. Eisenberg e W.Greiner, Microscopic Theory of the Nucleus, North-Holland, 1972.
19. H. Hofmann, Nucl. Phys. A224, 116 (1974).
20. R.A.M.S. Nazareth e T. Kodama, Rev. Bras. de Física 10, 99 (1980).
21. Por exemplo, R.P. Feynmann e A.R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill, N.Y. 1965.
22. W.H. Miller, Adv. Chem. Phys. 25, 69 (1974).
23. Para recém estudo experimental no Brasil, ver por exemplo, J.D.T.A. Neto et al., Phys. Rev. 18, 863 (1978).