

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
BIBLIOTECA

UM MODELO DE SOLUÇÕES COSMOLÓGICAS NÃO SINGULARES

95.428

TESE DE MESTRADO

Ligia Maria Coelho de Souza Rodrigues

1974

E 23.1  
696

T 7.9  
R 696

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos:

- A Mario Novello, que sugeriu e orientou esta tese, e durante o tempo de nossa colaboração científica soube transmitir estímulo, entusiasmo e apontar inúmeras perspectivas de trabalho.

- A Ivano Damião Soares, que de mil maneiras colaborou na realização desta tese, discutindo, sugerindo, criticando, revisando e não deixando nunca de nos prestar seu apoio e estímulo.

- A Takeshi Kodama e Helio Schechter, cujo auxílio no desenvolvimento dos métodos numéricos aqui empregados nos foi imprescindível.

- A Jader Benuzzi Martins, que com sua maravilhosa boa vontade, colaborou de maneira decisiva em todas as questões relativas à impressão deste trabalho.

- Ao Conselho Nacional de Pesquisas, que me concedeu ajuda financeira através de bolsas, proporcionando-me a oportunidade de desenvolver meus estudos de pós-graduação.

## RESUMO

Inicialmente resumimos brevemente as características gerais dos modelos de Friedmann da Cosmologia Relativista. Discutimos a seguir as dificuldades relativas à ocorrência de singularidades em Relatividade Geral e Cosmologia. Estas dificuldades se constituem num estímulo à procura de soluções cosmológicas não singulares a partir das equações de Einstein e de modificações destas equações. Analisamos as equações de Einstein modificadas pelas flutuações do campo gravitacional no vazio e as soluções cosmológicas obtidas a partir delas. Finalmente, propomos descrever estas flutuações através de um modelo escalar tensorial (no sentido de Jordan), no qual a dependência cósmica dos coeficientes dos termos adicionados às equações de Einstein é levada em consideração. Demonstramos que para um universo fotônico somente existem soluções de Friedmann se a constante gravitacional  $G$  for realmente constante. Obtemos soluções cosmológicas não singulares, assintoticamente ( $t \gg 1$ ) de tipo Friedmann. Nas soluções correspondentes para o campo escalar, a variação temporal da constante gravitacional obedece a uma lei Gaussiana a qual se superpõe, em  $t = 0$ , uma espécie de efeito de saturação que torna  $G$  assintoticamente constante.

## ÍNDICE

	Página
INTRODUÇÃO .....	1
NOTAÇÃO E UNIDADES .....	9
CAPÍTULO I: MODELOS DE FRIEDMANN .....	11
I.1 - A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL .....	11
I.2 - O MODELO DE EINSTEIN .....	13
I.3 - O MODELO DE DE SITTER .....	14
I.4 - A EXPANSÃO DO UNIVERSO .....	15
I.5 - COORDENADAS COMOVENTES .....	16
I.6 - AS QUANTIDADES CINEMÁTICAS .....	18
I.7 - A MÉTRICA DE ROBERTSON-WALKER .....	20
I.8 - O ESPAÇO 3-DIMENSIONAL .....	23
I.9 - A CONSTANTE DE HUBBLE .....	23
I.10 - DESVIO PARA O VERMELHO .....	24
I.11 - O TENSOR ENERGIA MOMENTUM .....	25
I.12 - EQUAÇÃO DE ESTADO .....	26
I.13 - OS MODELOS DE FRIEDMANN .....	27
I.14 - A EVOLUÇÃO FUTURA DO UNIVERSO .....	28
I.15 - A EQUAÇÃO DE RAYCHAUDHURI .....	30
I.16 - OS UNIVERSOS DE FRIEDMANN E OS DADOS OBSERVACIONAIS	32
I.17 - A SINGULARIDADE INICIAL E A RADIAÇÃO ISOTRÓPICA ..	33
CAPÍTULO II: A QUESTÃO DA SINGULARIDADE EM RELATIVIDADE GE RAL E COSMOLOGIA .....	36
II.1 - O CONCEITO DE SINGULARIDADE EM RELATIVIDADE GERAL .	37
II.2 - A EXISTÊNCIA DE UMA SOLUÇÃO GERAL NÃO SINGULAR ...	42
II.3 - OS TEOREMAS DE SINGULARIDADE .....	43

CAPÍTULO III: MODIFICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN	....	51
III.1 - FLUTUAÇÕES QUÂNTICAS DO CAMPO GRAVITACIONAL NO VAZIO	.....	51
III.2 - MODELOS DE FRIEDMANN NÃO SINGULARES	.....	58
III.3 - TEORIAS ESCALAR-TENSORIAIS	.....	60
CAPÍTULO IV: MODELO ESCALAR-TENSORIAL DAS FLUTUAÇÕES DO CAMPO GRAVITACIONAL NO VAZIO	.....	63
IV.1 - LAGRANGIANA ESCALAR-TENSORIAL MODIFICADA: DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES	.....	64
IV.2 - EQUAÇÕES PARA UM UNIVERSO HOMOGÊNEO E ISOTRÓPICO	.	67
IV.3 - A INCOMPATIBILIDADE DAS SOLUÇÕES $a(t) \sim t^q$ E $(t) \sim t^r$	.....	69
IV.4 - AS CONSTANTES $w$ E $n$	.....	72
IV.5 - AS EQUAÇÕES PARA UM UNIVERSO FOTÔNICO	.....	73
IV.6 - SOLUÇÕES ASSINTÓTICAS	.....	81
IV.7 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES	.....	84
IV.8 - A CONSTANTE GRAVITACIONAL	.....	86
CONCLUSÃO	.....	89
TABELA 1	.....	92
TABELA 2	.....	93
LEGENDAS PARA AS FIGURAS	.....	94
FIGURA 1	.....	95
FIGURA 2	.....	96
APÊNDICE 1	.....	97
APÊNDICE 2	.....	104

Página

APÉNDICE III .....	108
APÉNDICE IV .....	112
APÉNDICE V .....	114
REFERENCIAS .....	117

## INTRODUÇÃO

A Cosmologia tem como objeto de estudo o universo, considerado como um único sistema físico. As características globais e evolução do cosmos são descritas através de modelos físicos, obtidos supondo-se que as leis da Física válidas no laboratório e na Terra e suas vizinhanças podem ser extrapoladas para distâncias cada vez maiores, até que estas distâncias compreendam o universo inteiro.

A interação gravitacional é a interação dominante em escala cosmológica. É assim necessário a existência de uma teoria de gravitação para que se possa construir um modelo para o cosmos. A Cosmologia desenvolvida a partir da suposição de que os efeitos gravitacionais são descritos pela Teoria da Relatividade Geral, chama-se Cosmologia Relativista.

As hipóteses de homogeneidade e isotropia do espaço constituem o Princípio Cosmológico. As características atuais do universo indicam propriedades de homogeneidade e isotropia em larga escala e grande parte da Cosmologia Relativista é construída sobre a suposição de validade deste princípio. O Princípio Cosmológico possibilita descrever o conteúdo material do universo como um fluido perfeito, cujas partículas são as galáxias. O fato de que estas se afastam de nós com velocidades que podem chegar à ordem de grandeza da velocidade da luz, permite definir uma velocidade média de recessão da matéria no universo. Para quaisquer observadores colocados em dife -

rentes pontos do espaço e se movendo com esta velocidade média, o universo apresenta o mesmo aspecto. O conteúdo material do universo pode ser descrito por uma densidade de matéria-energia  $\rho$  e uma pressão  $p$ , funções somente do tempo. Cada observador que se move com uma galáxia mede o tempo próprio desta. Se estes observadores são comoventes entre si, todas as partículas do fluido cosmológico têm o mesmo tempo próprio. É possível, então, definir um único tempo cósmico, que tem a propriedade de medir o tempo próprio de qualquer partícula do fluido.

Combinando o Princípio Cosmológico com a Relatividade Geral, vários modelos podem ser derivados sem grande dificuldade. A homogeneidade e isotropia do espaço implica que a métrica do espaço-tempo é uma função somente do tempo. A solução cosmológica é obtida substituindo esta métrica nas equações de Einstein (ou alguma forma modificada destas equações) e fazendo alguma suposição sobre a natureza do conteúdo material descrito por  $\rho(t)$  e  $p(t)$ .

Os modelos homogêneos e isotrópicos da Cosmologia Relativista podem ser estáticos ou expansionistas. Os modelos expansionistas são conhecidos como modelos de Friedmann, por ter sido o físico russo A.A. Friedmann o primeiro a obter uma solução cosmológica relativística que descreve um universo em expansão.

As soluções de Friedmann descrevem com bastante sucesso

as características do universo atual, em larga escala. No entanto, todas as soluções de Friedmann possuem pelo menos uma singularidade, isto é, um momento na história do universo em que a curvatura do espaço-tempo e a densidade de matéria se tornam infinitas. Esta singularidade constitui séria dificuldade. Não se pode estender a validade das leis da Física e, em particular, das equações de Einstein, a regiões de densidade infinita <sup>2,15</sup> e embora a hipótese de uma origem singular do universo seja sustentada pela existência de uma radiação fotônica em equilíbrio térmico a uma temperatura de  $2,7^{\circ}\text{K}$ , que preenche o espaço ao nosso redor de forma altamente isotrópica, tem-se tentado obter soluções cosmológicas não singulares.

Podemos distinguir pelo menos 4 linhas distintas nas tentativas de obter modelos cosmológicos não singulares. Por algum tempo pensou-se que a singularidade aparecesse nas solu-ções das equações de Einstein devido ao alto grau de simetria imposta sobre a métrica <sup>11</sup>. No entanto, empregando uma definição de singularidade em termos de não completicidade de geodésicas, foi possível demonstrar (na forma de teoremas matemáticos <sup>13,14</sup>) que as soluções das equações de Einstein são singulares, desde que a variedade espaço-tempo obedeça a certas condições aparentemente razoáveis. A relação entre um espaço tempo que admite geodésicas incompletas e um espaço-tempo que possui regiões onde a curvatura se torna infinita é uma questão ainda não resolvida. Estes teoremas não se constituem nu

ma resposta negativa quanto à possibilidade das equações de Einstein admitirem soluções não singulares, se por singular entendermos (como Einstein <sup>2</sup>) uma região do espaço-tempo onde as leis da Física não são válidas.

Apesar do caráter não conclusivo do resultado dos teoremas de singularidade, deixou-se de lado a possibilidade de obter soluções cosmológicas não singulares a partir das equações de Einstein e um grande interesse por modificações destas equações começou a surgir. Considerou-se os efeitos quânticos associados com a matéria no universo <sup>17,18</sup>. A possibilidade de obter soluções de Friedmann não singulares a partir das equações de Einstein modificadas pela introdução de flutuações do vácuo do campo gravitacional foi discutida <sup>19,20</sup> e obteve-se um resultado positivo <sup>20</sup>.

Num trabalho recente <sup>27</sup>, uma outra possibilidade de estabelecer uma relação entre efeitos quânticos e modelos cosmológicos não singulares é investigada. Mostra-se que partículas criadas em um campo gravitacional clássico tipo Friedmann minimalmente acoplado a um campo escalar quantizado podem dar origem a pressões negativas que se opõem à atração gravitacional e poderiam impedir a ocorrência da singularidade.

Finalmente, fazendo uso da teoria da Einstein-Cartan da gravitação, sugeriu-se <sup>28</sup> que o colapso gravitacional e a singularidade cosmológica possam ser evitadas por influência do spin sobre a geometria do espaço-tempo. Mostrou-se que para

um universo homogêneo e isotrópico, em que as partículas do fluido cosmológico possuem spin não nulo alinhados numa certa direção, as equações de Einstein-Cartan possuem uma solução não singular.

As flutuações do campo gravitacional no vazio introduzem nas equações de Einstein termos quadráticos nos tensores de curvatura. Nos modelos propostos para descrever estas flutuações estes coeficientes são tomados como constantes. No entanto, mostrou-se <sup>17</sup> que estes coeficientes são funções da curvatura do espaço-tempo.

No presente trabalho sugerimos um modelo para descrever a variação dos coeficientes dos termos acrescentados às equações de Einstein devido às flutuações do campo gravitacional no vazio. Propomos que estas flutuações sejam descritas por uma teoria escalar-tensorial (no sentido de Jordan <sup>22,23</sup>) e portanto que os coeficientes dos termos adicionais sejam funções do espaço-tempo através do campo escalar.

As equações do modelos que propomos são derivadas a partir da Lagrangiana

$$L = \sqrt{-g} \left[ \phi (R + nR^2) - w \frac{\phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}}{\phi} g^{\alpha\beta} + 16\pi L_m \right]$$

onde  $\phi$  é o campo escalar, inversamente proporcional a  $G$ , a constante gravitacional. As equações para  $g^{\mu\nu}$  são:

$$G^{\mu\nu} = 8\pi \frac{T^{\mu\nu}}{\phi} + \frac{w}{\phi^2} \left[ \frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} \phi_{,\alpha} \phi_{,\alpha} g^{\mu\nu} \right] + \frac{1}{\phi} \left[ \phi_{,\alpha} ;^{\alpha} g^{\mu\nu} - \phi_{,\mu ; \nu} \right] + 2n \left[ \frac{1}{4} R^2 g^{\mu\nu} - R R^{\mu\nu} + \frac{(\phi R)_{,\alpha} ;^{\alpha}}{\phi} g^{\mu\nu} - \frac{(\phi R)_{,\mu ; \nu}}{\phi} \right]$$

e as equações para o campo escalar:

$$R + nR^2 - w \frac{\phi_{,\alpha} \phi_{,\alpha}}{\phi^2} + 2w \frac{\square \phi}{\phi} = 0$$

Investigamos o caso de um universo homogêneo e isotrópico com 3-curvatura nula e preenchido por radiação eletromagnética. Demonstramos que a constância do campo escalar é condição necessária e suficiente para que as equações do modelo admitam soluções de Friedmann. Devido à forma extremamente complicada e altamente não linear das equações, a integração só pôde ser realizada por métodos numéricos. Demonstramos que as equações possuem soluções assintoticamente de tipo Friedmann, não singulares, coerentes com soluções do campo escalar que se tornam constantes para valores grandes de  $t$ . Verificamos que é possível associar às soluções obtidas para a constante gravitacional ( $G \sim \phi^{-1}$ ) uma expressão analítica da forma:

$$G = G_{\max} \exp\left(-\frac{\tau^2}{b^2}\right) + \theta(\tau) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau^2}{d^2}\right) \right]$$

onde  $G_{\max}$ ,  $b$  e  $d$  são constantes e  $\theta(\tau)$  é a função de Heaviside. A dependência cósmica de  $G$  obedece a uma lei Gaussiana a

qual se superpõe, a partir de  $t = 0$ , um efeito de saturação descrito pela função  $1 - \exp(-\frac{\tau^2}{d^2})$ .

No capítulo I, fazemos uma breve revisão dos modelos de Friedmann. No capítulo II, inicialmente analisamos as dificuldades relativas ao conceito de singularidade em Relatividade Geral; revisamos as tentativas de relacionar as singularidades das soluções das equações de Einstein às imposições de simetria sobre a métrica e discutimos a validade das condições impostas sobre a variedade espaço-tempo com o fim de demonstrar os teoremas de singularidade.

No capítulo III, discutimos as flutuações do vácuo do campo gravitacional e as modificações introduzidas por estas flutuações nas equações de Einstein; analisamos as soluções cosmológicas obtidas destas equações modificadas. Finalmente fazemos um breve resumo da teoria escalar-tensorial de Jordan.

No capítulo IV, introduzimos e desenvolvemos o modelo escalar-tensorial das flutuações do vácuo do campo gravitacional. Empregando métodos numéricos, integramos as equações obtidas e discutimos os resultados obtidos.

As equações do modelo, em sua forma geral e para um universo homogêneo e isotrópico, são derivadas no apêndice I. No apêndice II, demonstramos que as equações de movimento derivadas das duas Lagrangianas quadráticas nos tensores de curvatura e independentes entre si, são proporcionais quando a métrica é homogênea e isotrópica.

Os cálculos necessários para colocar as equações do modelo em uma forma adequada a sua integração numérica estão nos apêndices III e IV. Finalmente, no apêndice V, apresentamos o programa Fortran empregada na integração das equações.

## NOTAÇÃO E UNIDADES

O espaço-tempo é considerado como uma variedade Riemanniana 4-dimensional cujos pontos são designados pelas coordenadas  $x^\mu$ . Os índices gregos variam de 0 a 3 e os índices latinos de 1 a 3. A métrica do espaço-tempo é  $g_{\mu\nu}$ , de assinatura -2 e tal que

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho.$$

Índices repetidos indicam soma.

Ponto e vírgula indica derivação covariante e vírgula indica derivação ordinária. Por definição:

$$t_{\alpha;\mu} = t_{\alpha,\mu} - t_\beta \Gamma_{\alpha\mu}^\beta$$

e

$$t^\alpha_{;\mu} = t^\alpha_{,\mu} + t^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\alpha$$

As  $\Gamma_{\rho\sigma}^\alpha$  são os símbolos de Christoffel da variedade espaço-tempo; por definição:

$$\Gamma_{\beta\mu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} [g_{\beta\rho,\mu} + g_{\rho\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\rho}]$$

O tensor de Riemann-Christoffel é definido por

$$v_{\alpha;\mu;\nu} - v_{\alpha;\nu;\mu} = R_{\alpha\sigma\mu\nu} v^\sigma$$

e o tensor de Ricci por

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = R_{\rho\mu\alpha\nu} g^{\rho\alpha}$$

Contraíndo novamente, tem-se a curvatura escalar:

$$R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$$

Denotamos simetrização e anti-simetrização por:

$$\frac{1}{2} (f_{\alpha\mu} + f_{\mu\alpha}) = f_{(\alpha\mu)}$$

$$\frac{1}{2} (f_{\alpha\mu} - f_{\mu\alpha}) = f_{[\alpha\mu]}$$

A derivação em relação ao tempo é designada por um ponto:

$$\frac{da}{dt} = \dot{a}$$

Na tabela abaixo, damos os valores das 3 constantes fundamentais da Física, no sistema CGS e no sistema de unidades geométrico:

Constante	CGS	Geométrico
c-velocidade da luz	$3 \times 10^{10}$ cm/s	1
G-constante gravitacional de Newton	$6,67 \times 10^{-8}$ cm <sup>3</sup> /gs <sup>2</sup>	1
h-constante de Planck	$1,05 \times 10^{-27}$ g cm <sup>2</sup> /s	$2,61 \times 10^{-66}$ cm <sup>2</sup>

## CAPITULO I

### MODELOS DE FRIEDMANN

Neste capítulo faremos uma breve revisão dos propriedades básicas da Teoria da Relatividade Geral e descreveremos, de uma forma não muito detalhada, as características dos modelos homogêneos da Cosmologia Relativista.

#### I.1 A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

A Teoria da Relatividade Geral foi proposta por Einstein em 1915, insatisfeito com duas limitações da Relatividade Restrita: permitir a existência de movimentos absolutos e não explicar a constância da razão entre massas inerciais e massas gravitacionais.

A Relatividade Geral descreve o espaço-tempo como uma variedade 4-dimensional Riemanniana, cuja métrica  $g_{\mu\nu}(x)$  é identificada com o campo gravitacional. Assim a geometria do espaço-tempo passa a ser um elemento dinâmico da teoria. A curvatura da variedade espaço-tempo é gerada pela presença de matéria. Esta teoria é construída sobre três princípios básicos:

- (i) A Relatividade Especial permanece válida localmente;
- (ii) Os campos gravitacionais são determinados pela matéria existente no universo;
- (iii) As leis da Física são as mesmas para quaisquer observadores em qualquer estado de movimento.

Einstein propõe que os campos gravitacionais obedecem às equações

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (I.1)$$

onde  $R_{\mu\nu}(x)$  é o tensor de Ricci,  $R(x)$  a curvatura escalar,  $\kappa = 8\pi G$  e  $G$  é a constante gravitacional.  $T_{\mu\nu}(x)$  é o tensor energia momentum da matéria. Por definição:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

é o tensor de Einstein.

As quantidades que aparecem do lado esquerdo da equação (I.1) descrevem a geometria do espaço-tempo, enquanto que  $T_{\mu\nu}$  descreve seu conteúdo material. Estas equações são invariantes para quaisquer observadores e são uma generalização da equação de Poisson para o potencial gravitacional  $\phi$ :  $\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho$ , onde  $\rho$  é a densidade de matéria.

As equações (I.1), conhecidas como equações de Einstein, podem ser obtidas de um princípio variacional, a partir da ação

$$I = \int \sqrt{-g} \left[ R + \kappa L_m \right] d^4x, \quad (I.2)$$

variando  $g_{\mu\nu}$  e suas derivadas.  $g = \det g_{\mu\nu}$  e  $L_m$  é a densidade Lagrangiana que descreve a matéria. O tensor energia momentum é definido por:

$$\int \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} \left( \sqrt{-g} L_m \right) \delta g_{\mu\nu} d^4x = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} d^4x \quad (I.3)$$

Não se conhece até hoje nenhuma contradição entre as pre  
dições da Relatividade Geral e a experiência. Três testes clás  
sicos confirmam estas predições:

- (i) O desvio para o vermelho das linhas espectrais da radiação ao passar para regiões de campo gravitacional mais fraco;
- (ii) A deflexão dos raios de luz causada pelo campo gravitacional do sol;
- (iii) O avanço do periélio do planeta Mercúrio.

Nos últimos anos, outros testes têm obtido resultados que tam  
bém não desmentem a teoria <sup>1</sup>.

Outras teorias também são capazes de explicar os resulta  
dos destes testes, mas nenhuma delas de maneira tão natural e satisfatória como a teoria proposta por Einstein. Pode-se di  
zer que a Relatividade Geral é a mais bem sucedida teoria de gravitação.

## I,2 O MODELO DE EINSTEIN

A época em que a teoria da Relatividade Geral foi prop  
os ta os dados astronômicos indicavam que as velocidades relati  
vas das galáxias eram muito pequenas em relação à velocidade da luz. Einstein, bem como toda a comunidade científica, a  
creditava que o universo pudesse ser adequadamente descrito a  
través de um modelo estático. Como ele afirma em *Sur le Problème Cosmologique* <sup>2</sup>, foi na procura de uma solução estática das equações (I.1) que se baseou para modificar estas equa -

ções pela introdução do chamado termo cosmológico. As equações modificadas são

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (I.4)$$

onde  $\Lambda$  é a constante cosmológica. É a partir destas equações que, em 1917, Einstein propõe o primeiro modelo cosmológico relativista, construído sobre as hipóteses de que existe no espaço uma densidade média de matéria constante e de que a métrica do espaço-tempo é independente do tempo e homogênea e isotrópica relativamente às coordenadas espaciais. Esta métrica se escreve:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (I.5)$$

onde  $R$  é uma constante positiva. Pode-se calcular o volume do 3-espaço de

$$V = \int \sqrt{-g} d^3x \quad (I.6)$$

Verifica-se que é constante:

$$V = 4\pi R^3 .$$

### I.3 MODELO DE DE SITTER

Também em 1917, um outro modelo cosmológico é obtido a partir das equações (I.4). Neste modelo, proposto por de Sitter, a densidade de matéria contida no universo é nula e  $\Lambda > 0$ .

Tres modelos são possíveis, dependendo do valor da 3-curvatura (conforme seção I.8) mas somente o modelo para  $K = 0$  obteve atenção como um possível modelo cosmológico. A métrica de de Sitter para  $K = 0$ , é:

$$ds^2 = dt^2 - \exp(2\alpha t) [dx^2 + dy^2 + dz^2]$$

onde  $\alpha$  é constante.

O volume do 3-espaco pode ser calculado de (I.6):

$$V = \exp(3\alpha t) 4\pi f(r) ;$$

sua variação temporal é:

$$\dot{V} = 3\alpha \exp(3\alpha t) 4\pi f(r) .$$

Portanto,  $\dot{V}/V = 3\alpha = c^{te}$ . O modelo de de Sitter descreve um universo que se expande e apresenta o mesmo aspecto para qualquer observador localizado em qualquer ponto do espaco-tempo; é um modelo estático e ademais a hipótese de ausência de matéria no universo é muito pouco realística.

#### I.4 A EXPANSÃO DO UNIVERSO

Em 1919 Friedmann publicou seus trabalhos propondo pela primeira vez um modelo de universo em expansão. Ele obteve portanto a primeira aplicação correta da Relatividade Geral à Cosmologia, embora na época sua teoria não fôsse reconhecida como tal. Devemos aos trabalhos de Slipher e Hubble o estabelecimento, em 1929, de que as galáxias afastam-se umas das ou

tras com velocidades que são proporcionais a sua distância relativa e que alcançam (para distâncias da ordem de  $10^8$  anos luz) valores próximos à velocidade da luz, cada delas agindo como um centro de repulsão. Isto é coerente com um universo em expansão e elimina a possibilidade de que os modelos estáticos possam ser uma boa descrição do universo.

Estas observações, indicando a expansão do universo, foram uma primeira comprovação da correção da descrição fornecida pelos modelos de Friedmann. As dúvidas que restavam foram praticamente eliminadas na década de 60 com a detecção da radiação isotrópica de  $2,7^{\circ}\text{K}$ , que discutiremos na seção I.17.

A teoria de Friedmann se baseia num mínimo de suposições: a validade das equações de Einstein originais, isto é, sem o termo cosmológico; a homogeneidade e isotropia do espaço; e a existência de uma densidade média de matéria, distribuída homogeneamente no espaço, isto é, função somente do tempo.

## I.5 COORDENADAS COMOVENTES

Os dados observacionais que possuímos (e que se deve em essência ao trabalho pioneiro de Hubble) indicam que as galáxias estão distribuídas quase isotropicamente em torno de nós (para distâncias da ordem de  $10^8$  anos luz), se afastando com velocidades próximas a da luz. As velocidades aleatórias em relação a este movimento médio são pequenas. A suposição de homogeneidade e isotropia do espaço implica que isto vale para

qualquer galáxia. Pode-se assim definir uma velocidade média  $v_\alpha$  de recessão das galáxias e tratar o conteúdo material do universo como um fluido.

Definamos coordenadas comoventes. Um ponto do espaço-tempo tem coordenadas  $x_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Seja  $S$  uma superfície tipo espaço sobre a qual qualquer ponto tem coordenada temporal  $t$ . Os diferentes pontos sobre  $S$  são caracterizados por coordenadas  $x^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . A cada um destes pontos está associado um observador  $O$ . A trajetória de um observador  $O$  é descrita pelas coordenadas  $\{x^i = c^i t, t\}$ . Portanto,  $O$  está em repouso em relação às coordenadas espaciais e as coordenadas  $\{x^i, t\}$  são ditas comoventes. O parâmetro  $t$  é o tempo próprio do observador. Sua velocidade é dada por

$$v^\alpha = \left. \frac{dx^\alpha}{dt} \right|_{x^i = c^i t},$$

e, em coordenadas comoventes,  $v^\alpha = \delta_0^\alpha$ .

A métrica sobre  $S$  é dada por

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - v_\alpha v_\beta \quad (I.7)$$

onde  $g_{\alpha\beta}$  é a métrica do espaço-tempo. Em coordenadas comoventes

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0.$$

$S$  é uma hiper-superfície de homogeneidade do espaço e as condições físicas são idênticas em qualquer ponto sobre  $S$ . De

$$g_{\alpha\beta} g^{\alpha\rho} = \delta_\beta^\rho \quad \text{e} \quad v_\alpha v^\alpha = 1$$

tem-se que

$$h_{\alpha}^{\alpha} = 3; \quad h_{\alpha\beta} v^{\beta} = 0 \quad \text{e} \quad h_{\alpha}^{\beta} h_{\beta}^{\rho} = \delta_{\alpha}^{\rho} \quad (\text{I.8})$$

Portanto,  $h_{\alpha\beta}(x)$  é um tensor de projeção, que projeta sôbre a hipersuperfície  $S$ , ortogonalmente a  $v_{\alpha}$ .

A homogeneidade e isotropia do espaço nos permitem definir velocidade média de recessão do fluido cosmológico e separar o espaço-tempo em espaço e tempo. A velocidade de um observador comovente com as galáxias é portanto  $v^{\alpha} = \delta_0^{\alpha}$ .

## I.6 AS QUANTIDADES CINEMÁTICAS

Vamos considerar dois observadores  $O_1$  e  $O_2$ , vizinhos no espaço-tempo e ambos comoventes com as galáxias. Portanto,  $O_1$  e  $O_2$  são caracterizados pelas coordenadas comoventes  $\{x^i, t\}$  e  $\{x^i + \delta x^i, t\}$ , respectivamente e pela velocidade  $v_{\alpha} = \delta_{\alpha}^0$ . O vetor  $X^{\alpha}$  de componentes  $\{X^j = \delta x^j, t=0\}$ , liga as trajetórias destes dois observadores em qualquer instante de tempo. O vetor posição de  $O_2$  em relação a  $O_1$  é

$$Y^{\alpha} = h^{\alpha}_{\beta} X^{\beta}$$

ou seja, é a projeção de  $X^{\beta}$  na hipersuperfície de homogeneidade determinada por  $v_{\alpha}$ .

A variação da posição relativa  $Y^{\alpha}$ , medida por um observador que se move com velocidade  $v_{\alpha}$  é

$$Y^{\alpha};_{\beta} v^{\beta} = (h^{\alpha}_{\rho} X^{\rho});_{\beta} v^{\beta}.$$

A projeção desta quantidade sobre  $S$  é o vetor velocidade relativa de  $O_2$  em relação a  $O_1$ :

$$v^\mu = h^\mu{}_\tau (h^\tau{}_\rho X^\rho)_{;\beta} v^\beta$$

Usando a igualdade <sup>3</sup>

$$v^\alpha{}_{;\rho} x^\rho - x^\alpha{}_{;\rho} v^\rho = v^\alpha{}_{,\rho} x^\rho - x^\alpha{}_{,\rho} v^\rho = 0$$

pode-se escrever que

$$\begin{aligned} v_\mu &= h_\mu{}^\alpha h_\rho{}^\tau v_{\alpha;\tau} \gamma^\rho \\ &= v_{\mu\rho} \gamma^\rho \end{aligned} \quad (I.9)$$

onde  $v_{\mu\rho}$  representa as velocidades relativas dos observadores vizinhos. Vamos separar  $v_{\mu\rho}$  em suas partes simétrica e anti-simétrica:

$$v_{\mu\rho} = \theta_{\mu\rho} + w_{\mu\rho}$$

onde  $\theta_{\mu\rho} = v_{(\mu\rho)}$  e  $w_{\mu\rho} = v_{[\mu\rho]}$ .  $\theta_{\mu\rho}$  pode ainda ser separado em:

$$\theta_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \theta h_{\alpha\beta}$$

onde  $\sigma_\alpha{}^\alpha = 0$  e  $\theta = \theta_\alpha{}^\alpha$ . De acordo com (I.9), tem-se que

$$\theta = v^\alpha{}_{;\alpha} ; \quad \sigma_{\mu\nu} = v_{(\mu;\nu)} - \frac{1}{3} \theta h_{\mu\nu}$$

e

$$w_{\mu\nu} = v_{[\mu;\nu]}$$

$w_{\alpha\beta}$  é o tensor de rotação,  $\sigma_{\mu\nu}$  o tensor de shear e  $\theta$  a expansão.  $w_{\alpha\beta}$  representa uma rotação do fluido cosmológico;  $\sigma_{\mu\nu}$  mede a distorção que pode mudar a forma do fluido deixando seu volume invariante; finalmente,  $\theta$  representa a expansão do fluido, sem distorção ou rotação. A velocidade do fluido cosmológico estando decomposta em  $\sigma_{\mu\nu}$ ,  $w_{\mu\nu}$  e  $\theta$ , é possível caracterizar os diferentes modelos cosmológicos de acordo com os valores, nulos ou não, que cada uma destas quantidades cinemáticas assume.

No modelo de Einstein todas as quantidades cinemáticas são nulas. No modelo de de Sitter com  $K = 0$ ,

$$\begin{aligned}\theta &= v^\alpha{}_{;\alpha} = v^\alpha{}_{,\alpha} + v^\rho \Gamma_{\rho\alpha}^\alpha \\ &= \Gamma_{0\alpha}^\alpha\end{aligned}$$

Mas  $\Gamma_{0\alpha}^\alpha = 3\alpha$  e portanto  $\theta = 3\alpha$  e  $\theta = \dot{V}/V$ . representa a razão da expansão do volume ocupado pelo fluido cosmológico; o modelo de de Sitter apresenta uma expansão contínua.

## 1.7 A MÉTRICA DE ROBERTSON-WALKER

Em coordenadas comoventes, a métrica do espaço-tempo homogêneo e isotrópico é dada por:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.10)$$

Robertson e Walker mostraram que esta é a métrica homogênea e

isotrópica em sua forma mais geral.

Na métrica (I.10),  $g_{00} = 1$  e portanto relógios sincronizados em um instante  $t_0$  permanecerão sincronizados em qualquer outro instante  $t$ .  $t$  é o tempo próprio medido por um observador comovente com o fluido cosmológico e mede portanto o tempo cósmico.  $a(t)$  é o fator de escala: se em um tempo  $t_0$  a distância espacial entre dois pontos é dada por

$$d\ell^2(t_0) = -a^2(t_0) \left[ \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]$$

em um instante seguinte  $t_1$ , a distância entre os mesmos pontos será dada por:

$$d\ell^2(t_1) = -a^2(t_1) \left[ \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]$$

Se  $a(t_1) > a(t_0)$ , então os intervalos espaciais estão aumentando e o universo está em expansão; se  $a(t_1) < a(t_0)$ , os intervalos estão diminuindo e o universo está em contração. Se  $a(t_1) = a(t_0)$  o universo é estático e os intervalos espaciais são sempre os mesmos. Neste caso  $a(t) = c^{te}$  e temos o universo estático de Einstein.

Finalmente, na métrica (I.10), a constante  $K$  é a curvatura do espaço 3-dimensional <sup>4</sup>.

Num espaço tempo de métrica (I.10), a única quantidade cinemática não nula é a expansão. Por definição,  $\theta = \theta_{\alpha}^{\alpha} = v^{\alpha}_{;\alpha}$ . Mas

$$v^{\alpha}{}_{;\alpha} = v^{\alpha}{}_{,\alpha} + v^{\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha}$$

Em coordenadas comoventes  $v^{\alpha} = \delta_0^{\alpha}$  e portanto  $v^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0$ . Então  $v^{\alpha}{}_{;\alpha} = \Gamma_{0\alpha}^{\alpha}$ . A componente  $\Gamma_{0\alpha}^{\alpha}$  da afinidade contraída com a métrica (I.10) está calculada no apêndice I. Finalmente,

$$\theta = 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} .$$

O volume de um espaço-tempo de Robertson-Walker não é constante:

$$\begin{aligned} V &= \int \sqrt{-g} \, d^3x \\ &= a^2(t) \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-Kr^2}} r^2 dr \, \sin\theta \, d\theta \, d\phi \\ &= 4\pi \dot{a}^3(t) F(r) \end{aligned}$$

onde

$$F(r) = \int_0^{\infty} \frac{r^2}{\sqrt{1-Kr^2}} \, dr .$$

A variação temporal de  $V$  é:

$$\dot{V} = 12\pi a^2(t) F(r) \dot{a}(t)$$

Portanto

$$\frac{\dot{V}}{V} = 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

e  $\theta = \dot{V}/V$ .  $\theta$  é a razão de expansão do volume ocupado pelo flúid cosmológico.

## I.8 O ESPAÇO 3-DIMENSIONAL

A separação espacial entre duas partículas materiais num espaço-tempo de métrica (I.10), uma na origem e outra com coordenadas  $(r, 0, 0)$ , é dada por:

$$R(t) = a(t)f(r) \quad (I.11)$$

onde

$$f(r) = \int \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}}$$

Então, se

- (i)  $K = 0$ , tem-se que  $f(r) = r$  e  $R(t) = a(t)r$ . O espaço é euclídiano;
- (ii)  $K < 0$ . Tomando  $K = -1$  tem-se que  $f(r) = \sinh^{-1}r$ . O espaço é aberto, pois  $R(t) = a(t)\sinh^{-1}r$  e  $R \rightarrow \infty$  quando  $r \rightarrow \infty$ .
- (iii)  $K > 0$ . Tomando  $K = 1$  obtêm-se  $f(r) = \sin^{-1}r$ . O espaço é fechado, pois  $0 \leq r \leq 1$  e  $0 \leq R \leq \frac{\pi}{2a}$ .

De acordo com a curvatura do 3-espaço pode-se classificar os modelos do universo em:

$K = 0$ , modelo euclídeano.

$K = -1$ , modelo aberto.

$K = 1$ , modelo fechado.

## I.9 A CONSTANTE DE HUBBLE

Usando suas medidas das distâncias das galáxias espirais, Hubble estabeleceu em 1929 que a velocidade relativa das galáxias é proporcional à distância entre elas:

$$v = H_0 R \quad (I.12)$$

A relação (I.12) é chamada lei de Hubble e a constante de proporcionalidade  $H_0$  é a constante de Hubble.

Na equação (I.11)  $R(t)$  é a distância relativa entre dois pontos materiais em um universo homogêneo e isotrópico. Se derivarmos  $R(t)$  em relação a  $t$ , teremos a velocidade relativa das duas partículas:

$$v = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} R \quad (I.13)$$

Chamando  $\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = H(t)$  e comparando (I.12) e (I.13), identifica-se  $H_0$  com o valor atual de  $H(t)$ . Portanto, a constante de proporcionalidade entre  $v$  e  $R$  varia com a expansão do universo. Seu valor atual é  $H_0 \approx 2,4 \times 10^{-18} \text{s}^{-1}$ . O inverso de  $H_0$  representa o tempo que as galáxias levariam para alcançar sua separação atual, partindo de um estado de densidade infinita e, portanto, separação nula entre elas, se tivessem mantido em todos os tempos sua velocidade atual.

## I.10 DESVIO PARA O VERMELHO

Um objeto celeste qualquer que se move com velocidade idêntica à velocidade média de recessão das galáxias é comovente com elas e é portanto descrito por coordenadas espaciais constantes. No entanto, devido à expansão do universo, este objeto está se afastando de nós. Sua presença é detectada pela radiação eletromagnética que ele emite. A trajetória desta radiação é obtida fazendo  $ds = 0$  em (I.10). Isto nos per-

mite calcular o instante  $t$  em que foi emitida uma radiação detectada por nós em  $t_0$ . Por um cálculo simples <sup>4</sup>, verifica-se que

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t} = \frac{a(t_0)}{a(t)}$$

$\Delta t$  é o período da radiação emitida e  $\Delta t_0$ , o período da radiação observada. Se  $\lambda$  é a frequência da radiação emitida e  $\lambda_0$  da radiação observada, pode-se escrever:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a(t_0)}{a(t)}$$

Como  $a(t_0) > a(t)$ , tem-se que  $\lambda_0 < \lambda$  e o espectro dos objetos astronômicos aparece desviado para o vermelho. Definimos o desvio pelo parâmetro  $Z$ :

$$1 + Z = \frac{a(t_0)}{a(t)}$$

## 1.11 O TENSOR ENERGIA MOMENTUM

O tensor energia momentum que descreve o conteúdo material do universo em sua forma mais geral pode ser escrito <sup>3</sup>:

$$T_{\mu\nu} = \rho v_\mu v_\nu + p h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} q_{(\mu} v_{\nu)} + \Pi_{\mu\nu}$$

onde  $h_{\mu\nu}(x)$  é a métrica do 3-espaco (dada por (I.7)),  $v_\mu$  é a velocidade média de recessão do fluido cosmológico.  $\rho = \rho(t)$  é a densidade de matéria medida por um observador que se move com velocidade  $v_\mu$ ;  $p = p(t)$  é a pressão isotrópica do fluido;

$q_\alpha$  é o fluxo de energia em relação a  $v_\alpha$  e  $\Pi_{\alpha\beta}$  a pressão anisotrópica. Em um universo homogêneo e isotrópico,  $q_\alpha = \Pi_{\alpha\beta} = 0$ .

Pode-se escrever:

$$T_{\mu\nu} = (\rho(t) + p(t))\delta_\mu^\nu - p(t)g_{\mu\nu} \quad (I.14)$$

Substituindo a métrica (I.10) em (I.14), do anulamento da divergência covariante de  $T_{\mu\nu}$  resulta que <sup>5</sup> :

$$T^{\nu}{}_{;\nu} = \frac{d}{dt} (\rho + p) + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) = 0 \quad (I.15)$$

A equação (I.15) tem a forma da equação que descreve a expansão adiabática de um fluido perfeito. Para que possamos usá-la é necessário especificar a equação de estado  $p = f(\rho)$ .

## I.12 EQUAÇÃO DE ESTADO

Vamos considerar a equação de estado em sua forma geral,  $p = \lambda\rho$ , onde  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

- (i) Se  $p = 0$ , tem-se o caso de um fluido de pressão nula. Esta equação de estado,  $p = 0$ , é uma boa aproximação para descrever um gás de partículas não relativísticas, para as quais  $p \sim \rho v^2 \ll \rho c^2$ . Neste caso a equação (I.15) se reduz a:

$$\frac{d\rho}{dt} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho = 0$$

e portanto

$$\rho(t) a^3(t) = c e^{-3\int \frac{\dot{a}}{a} dt} = b \quad (I.16)$$

(ii) Se  $\lambda = \frac{1}{3}$ , tem-se a equação de estado que descreve a radiação eletromagnética,  $p = \frac{1}{3}\rho$ . Da equação (I.15), tem-se

$$\frac{d\rho}{dt} + 4 \frac{\dot{a}}{a} \rho = 0$$

e

$$\rho(t) a^4(t) = c^{te} = m. \quad (I.17)$$

(iii) Se  $\lambda = 1$ , a equação é  $p = \rho$ . Neste caso,  $\rho v^2 = \rho c^2$  e a velocidade do som toma seu valor limite  $v_s = c$ . Esta equação foi proposta e discutida por Zeldovich que denomina a matéria por ela descrita de "stiff matter". Para  $p = \rho$ , obtêm-se que

$$\rho(t) a^6(t) = d. \quad (I.18)$$

No caso geral,  $p = \lambda\rho$ , tem-se

$$\rho(t) a^{3(\lambda+1)} = c^{te}. \quad (I.19)$$

### I.13 OS MODELOS DE FRIEDMANN

Os modelos de Friedmann da Cosmologia Relativista são obtidos substituindo-se a métrica de Robertson-Walker nas equações de Einstein (I.1), considerando-se a matéria como um fluido de densidade  $\rho(t)$  e pressão  $p(t)$  descrita pelo tensor energia momentum (I.14).

Da equação (I.1) para  $\mu = \nu = 0$ , tem-se <sup>4</sup> :

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) a^2 - K$$

As componentes  $\mu = \nu = i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) da equação (I.1) são:

$$2 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = - 8\pi G \rho(t) - \frac{K}{a^2}$$

Em seu trabalho original Friedmann estudou o caso  $p = 0$ , mas várias soluções são possíveis dependendo do valor de  $K$  e da equação de estado usada. Estas soluções (para  $p = \frac{1}{3} \rho$  e  $p = 0$ ) estão classificadas na tabela 1.

#### I.14 A EVOLUÇÃO FUTURA DO UNIVERSO

De acordo com o valor da 3-curvatura  $K$  pode-se ter modelos abertos ou fechados, como foi visto na seção I.8. O valor atual da densidade de matéria do universo,  $\rho_0$ , é outro parâmetro que determina a evolução futura dos universos de Friedmann.

É vantajoso substituir estes dois parâmetros por outros que são diretamente observáveis: a constante de Hubble  $H_0$  e o parâmetro de desaceleração  $q_0$ , definido como

$$q_0 = - \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \frac{1}{H_0^2}$$

$H_0$  e  $q_0$  se relacionam com  $K$  e  $\rho_0$  através de

$$H_0^2 = - \frac{K}{a_0^2} + \frac{8}{3} \rho_0$$

e

$$- q_0 H_0^2 = - H_0^2 - \frac{K}{a_0^2}$$

É possível mostrar <sup>6</sup> que, assim como o valor de  $K$  determina se o universo é aberto (e portanto a expansão continua indefinidamente) ou fechado (a expansão termina e dá lugar a uma fase de contração), existem valores críticos de  $q_0$  e  $\rho_0$ , que correspondem a  $K = 0$  e que também separam os modelos abertos dos fechados, a saber:

$$(i) \text{ Se } K = 0, \text{ então } \rho_0 = \rho_{\text{crit}} = \frac{3\pi}{8} H_0 \text{ e } q_0 = \frac{1}{2}$$

$$(ii) \text{ Se } K < 0, \text{ então } \rho_0 < \rho_{\text{crit}} \text{ e } q_0 < \frac{1}{2}$$

$$(iii) \text{ Se } K > 0, \text{ então } \rho_0 > \rho_{\text{crit}} \text{ e } q_0 > \frac{1}{2}$$

É extremamente difícil medir a densidade média de matéria do universo. Todas as estimativas que se tem são baseadas em cálculos teóricos sobre cuja correção não se tem suficiente suporte observacional. Somando a matéria luminosa nas galáxias Oort obteve:

$$\rho_{m1} \sim 2 \times 10^{-31} \text{ g/cm}^3$$

Este resultado pode ser considerado um limite mínimo para o valor de  $\rho$ , uma vez que pode haver matéria no universo sob formas que ainda não tenham sido observadas (como, por exemplo, matéria intergaláctica, neutrinos, etc.). As estimativas que consideram esta possibilidade obtêm valores da ordem de  $10^{-29}$ . Portanto, o máximo que se pode afirmar é que

$$10^{-31} \lesssim \rho \lesssim 10^{-29}$$

## I.15 A EQUAÇÃO DE RAYCHAUDHURI

A partir da não comutatividade da derivação covariante, que se escreve

$$t_{\alpha;\mu;\nu} - t_{\alpha;\nu;\mu} = R_{\alpha\sigma\mu\nu} t^{\sigma} \quad (I.20)$$

onde  $R_{\alpha\sigma\mu\nu}$  é o tensor de Riemann e  $t_{\alpha}$  um vetor qualquer, se pode derivar a equação que governa a evolução da expansão  $\theta$ . Substituindo em (I.20)  $t_{\alpha}$  por  $v_{\alpha}$ , a velocidade de recessão das galáxias, multiplicando a expressão por  $g^{\alpha\mu}$  e  $v^{\nu}$  e fazendo uso da relação <sup>4</sup>

$$\dot{\theta} - \dot{v}^{\alpha}_{;\alpha} + 2(\sigma^2 - w^2) + \frac{1}{3}\theta^2 + (\dot{v}_{\alpha}\dot{v}^{\alpha})^2 = R_{\alpha\beta} v^{\alpha} v^{\beta}$$

onde  $\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$  e  $w^2 = \frac{1}{2}w_{\mu\nu}w^{\mu\nu}$ , obtêm-se que:

$$\dot{\theta} + \dot{v}^{\alpha}_{;\alpha} + 2(\sigma^2 - w^2) + \frac{1}{3}\theta^2 = R_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} \quad (I.21)$$

A equação (I.21) é conhecida como equação de Raychaudhuri. Nos universos de tipo Friedmann,  $v_{\alpha} = \sigma = 0$  e  $w = 0$ ; contraindo as equações de Einstein (I.1) com  $v^{\mu}v^{\nu}$ , lembrando que  $R = \kappa T = \kappa T_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ , e usando a expressão (I.14) para  $T_{\mu\nu}$ , obtêm-se que:

$$R_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} = -\frac{\kappa}{2} (\rho + 3p)$$

Portanto, a equação de Raychaudhuri para os universos de Friedmann se escreve:

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 = -\frac{\kappa}{2} (\rho + 3p)$$

Nestes modelos  $\theta = 3 \frac{\dot{a}}{a}$ . A equação (I.22) em termos de  $a(t)$  é:

$$3 \frac{\ddot{a}}{a} = - \frac{\kappa}{2} (\rho + 3p) \quad (I.23)$$

A forma geral da equação de estado que descreve o fluido cosmológico é  $p = \lambda\rho$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ ; no caso limite  $p = 0$ ,  $\rho + 3p$  assume seu valor mínimo. Neste caso,  $\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 = -\frac{\kappa}{2}\rho$ . Como  $\rho$  é sempre positiva, conclui-se que  $\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 < 0$ , para qualquer  $t$ . Isto implica que  $\dot{\theta} < -\frac{1}{3}\theta^2$  e portanto que  $\dot{\theta}$  é sempre negativa. É conveniente considerar-se um instante de tempo  $t_0$  onde  $\theta$  assume o valor  $\theta_0$ . Se  $\dot{\theta}$  é negativa,  $\theta$  decresce quando  $t$  cresce. Portanto, tem-se

$$\theta_1 = \theta(t_1) > 0, \text{ para qualquer } t_1 < t_0$$

e

$$\theta_2 = \theta(t_2) < \theta_0, \text{ para qualquer } t_2 > t_0.$$

$\theta$  tende para infinito quando  $t$  tende para zero. Da equação (I.15), tem-se que

$$\dot{\rho} = -\theta(\rho + p)$$

onde  $\rho + p > 0$ .  $\dot{\rho}$  tem sempre o sinal contrário ao sinal de  $\theta$ . Pode-se supor que:

- (i)  $\theta_0 > 0$ . Portanto, para  $t < t_0$ ,  $\theta > 0$  e  $\dot{\rho} < 0$ . Neste caso,  $\rho$  cresce quando  $t$  decresce e  $\rho \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow 0$ .
- (ii)  $\theta_0 < 0$ . Nesta região,  $\dot{\rho} > 0$  e  $\rho$  decresce quando  $t$  decresce. Mas se  $\theta_0 < 0$ , então em algum  $t_1 < t_0$ ,  $\theta$  assumiu o valor nulo e  $\theta$  é positivo em qualquer  $t < t_1$ . Em  $t_1$ ,  $\rho$  assume seu valor mínimo. Recai-se no caso (i).

A equação de Raychaudhuri prevê que  $\rho \rightarrow \infty$  no sentido negativo dos tempos. De (I.19), vê-se que isto implica que  $a \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow 0$ .

A análise acima demonstra que a existência de singularidades nas soluções de Friedmann está contida na equação de Raychaudhuri. No entanto, aparentemente seria possível evitar este resultado se os termos negativos que aparecem na equação (I.21) não fossem nulos. Mas  $w^2 \neq 0$  implicaria na existência de anisotropia no universo e  $\dot{v}^\alpha_{;\alpha} \neq 0$  equivaleria ao aparecimento de inhomogeneidades, pois neste caso  $v_\alpha = v_\alpha(x)$ . Assim, a equação de Raychaudhuri sugere que a existência de singularidades esteja ligada às imposições de homogeneidade e isotropia do espaço e que soluções menos simétricas possam ser não singulares. Como veremos no capítulo seguinte, os teoremas de singularidades negam esta possibilidade, demonstrando que a singularidade (definida matematicamente em termos de não-completicidade de geodésicas) aparece nas soluções das equações de Einstein independentemente das simetrias impostas sobre a métrica, desde que a variedade espaço-tempo obedeça a certas condições aparentemente razoáveis.

## I.16 OS UNIVERSOS DE FRIEDMANN E OS DADOS OBSERVACIONAIS

As principais características dos universos descritos pelos modelos de Friedmann são:

- (i) O espaço é homogêneo e isotrópico



- (ii) A separação espacial entre as partículas do fluido cosmológico (as galáxias) está aumentando e portanto o universo está em expansão.
- (iii) No instante  $t = 0$  a separação espacial entre as galáxias é nula e a densidade de matéria e a curvatura do espaço-tempo são infinitas.

As observações astronômicas sustentam a hipótese de homogeneidade e isotropia do espaço em larga escala (distâncias da ordem de  $10^8$  anos luz). Estas observações fornecem os seguintes dados: há evidência de homogeneidade e isotropia na distribuição de galáxias e de suas magnitudes aparentes e dos valores de seus desvios para o vermelho; há evidência de homogeneidade e isotropia na distribuição de fontes de rádio no céu; a radiação cósmica de  $2,7^0\text{K}$  é isotrópica.

A expansão do universo foi firmemente comprovada observacionalmente por Hubble, cujas medidas alcançaram distâncias da ordem de  $2 \times 10^8$  anos luz. A estas distâncias a velocidade de recessão das galáxias é da ordem de  $\frac{1}{7} c$ . A única mudança importante que os trabalhos e observações posteriores trouxeram aos resultados de Hubble foi a alteração no valor de  $H_0$  que resultou do reconhecimento de que havia um erro na escala de distâncias usada por ele. Hubble estimava  $H_0 \cong 1,8 \times 10^{-17} \text{s}^{-1}$  e o valor atualmente aceito é  $H_0 \cong 2,4 \times 10^{-18} \text{s}^{-1}$ .

## I.17 A SINGULARIDADE INICIAL E A RADIAÇÃO ISOTRÓPICA

A mais discutida das propriedades gerais dos modelos de

Friedmann é a existência de singularidades nestas soluções :  $a(t=0) = 0$  e portanto o instante  $t = 0$  é, nas palavras de Einstein <sup>2</sup> o *começo de mundo*. Nestes modelos, existe um instante de criação e a idade de universo é finita. De (I.19) e (A.12), vê-se que em  $t = 0$  a densidade de matéria  $\rho$  e a curvatura do espaço-tempo são infinitas.

Em 1946, Gamow propôs pela primeira vez a idéia de que a temperatura durante os estágios iniciais do universo fôsse suficientemente alta para permitir reações termonucleares; ele esperava explicar a abundância observada de hélio em termos destas reações. Gamow propôs também que esta teoria poderia ser comprovada se fôsse detectada uma radiação isotrópica de temperatura de uns poucos graus Kelvin, que seria a radiação remanescente do estágio primordial extremamente quente do universo.

A conservação do tensor energia momentum implica que a densidade de energia da radiação,  $\rho_{rad}$ , é proporcional a  $a^{-4}(t)$ , enquanto que a densidade de energia da matéria,  $\rho_{mat}$ , é proporcional a  $a^{-3}(t)$ . Se é levado a concluir, como Gamow, que nos instantes iniciais do universo, a densidade de radiação supera a densidade de matéria. Devido às interações entre a matéria e a radiação, há equilíbrio térmico nesta fase. A radiação possui um espectro de corpo negro completamente caracterizado pela temperatura  $T$ , que se relaciona com  $\rho_{rad}$  através de

$$\rho_{rad} \sim T^4$$

e portanto

$$T \sim \frac{1}{a(t)}$$

Nos instantes iniciais a temperatura é muito alta ( $T = \infty$  em  $t = 0$ ) e diminui com a expansão do universo. Portanto, esta radiação, se detectada hoje, seria caracterizada por uma temperatura muito baixa.

Em 1965, Penzias e Wilson, acidentalmente, detectaram uma radiação de background de comprimento de onda de 7 cm, isotrópica numa precisão de 2% e algumas centenas de vezes mais intensa do que as radiações emitidas pelas fontes de rádio conhecidas. A temperatura desta radiação era de  $3,1^{\circ}\text{K}$ . Em 1966 Roll e Wilkinson conseguiram detectar uma radiação de temperatura  $3^{\circ}\text{K}$  em 3 cm. Mais tarde, Howell e Shakeshaft encontraram  $2,8^{\circ}\text{K}$ , em 21 cm. Estas observações se ajustam razoavelmente com a curva de radiação do corpo negro a  $2,7^{\circ}\text{K}$ .

Embora ainda existam dúvidas relativas à explicação desta radiação como a remanescente da explosão primordial, como previsto por Gamow, nenhuma das outras explicações propostas é satisfatória. A detecção desta radiação se constitui num forte argumento em favor dos modelos que preveem um estado inicial do universo de densidade e temperatura infinitas e portanto, singular.

No capítulo seguinte, discutiremos vários aspectos da questão da singularidade em Relatividade Geral e Cosmologia.

## CAPITULO II

## A QUESTAO DA SINGULARIDADE EM RELATIVIDADE GERAL E COSMOLOGIA

Os modelos de Friedmann predizem a ocorrência de pelo me os uma singularidade, ou seja, uma região do espaço-tempo em que a densidade de matéria e os tensores de curvatura \* se tornam infinitos. A mesma propriedade aparece na maioria das soluções exatas das equações de Einstein. Em *Sur le problème Cosmologique*<sup>2</sup> (1951) Einstein afirma: para grandes densidades de campo e de matéria, as equações de campo e mesmo as variáveis que nelas aparecem não têm significação real. Pode-se em razão disto não admitir a validade das equações para uma densidade de campo e de matéria muito elevadas e não concluir que o começo da expansão deve significar uma singularidade no sentido matemático. Tudo o que devemos perceber é que as equações não se prolongam em tais regiões. \*\* Este pequeno trecho é uma contribuição muito valiosa à compreensão de qual o ponto de vista que a Física deve adotar frente a uma solução singular: uma singularidade é uma região na vizinhança da qual não se pode esperar que valham as leis físicas que conhecemos e cuja análise se torna, portanto, extremamente difícil

\* A menos de referência em contrário, por tensores de curvatura entendemos o tensor de Riemann, o tensor de Ricci e a curvatura escalar.

\*\* Ademais, na vizinhança da singularidade, as flutuações quânticas do espaço-tempos podem ser suficientes para alterar a topologia e a visão do espaço-tempo como uma variedade diferenciável pode deixar de ser válida <sup>14</sup>.

de realizar. Uma reformulação das leis físicas que permitisse a análise de regiões onde a densidade de matéria se torna infinita não seria tarefa trivial. Resta a alternativa de que a ocorrência de singularidades possa ser evitada.

A visão física de singularidade proposta por Einstein é extremamente simples. No entanto, a definição rigorosa de singularidade em Relatividade Geral apresenta muitas dificuldades.

Neste capítulo, discutiremos a delicada questão do conceito de singularidade em Relatividade Geral e a existência ou não de soluções não singulares das equações de Einstein.

## II,1 O CONCEITO DE SINGULARIDADE EM RELATIVIDADE GERAL

A Relatividade Geral possui uma característica que a particulariza; enquanto nas outras teorias de campo da Física os campos básicos são definidos sobre um espaço-tempo absoluto cuja métrica é fixa, na Relatividade Geral o campo físico é a própria métrica do espaço-tempo. Esta característica tem dificultado a transposição da idéia tradicional que se tem de singularidade para um conceito equivalente em Relatividade Geral.

Nas teorias de campo, como Eletrodinâmica e Hidrodinâmica, uma solução das equações que governam o comportamento dos campos é singular se o campo se torna infinito, ou seja, não definido em um ou mais pontos do espaço-tempo. Em princípio se poderia, por analogia, definir um espaço-tempo singular co

mo aquele que possui pontos nos quais o tensor métrico não está definido. No entanto, se removêssemos da variedade as regiões em que isto acontece, teríamos um espaço-tempo cuja métrica está definida em todos os pontos e que seria, de acordo com a definição, não singular. Ademais, uma má escolha do sistema de coordenadas pode resultar numa divergência em alguma componente do tensor métrico em algum ponto do espaço-tempo, sem que neste ponto exista uma singularidade. Um exemplo clássico desta situação é a solução de Schwarzschild<sup>6</sup>. No sistema de coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  a métrica de Schwarzschild pode ser escrita:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Vê-se que  $g_{11}$  diverge em  $r = 2m$ . Calculando os tensores de curvatura, verifica-se que estas quantidades possuem valor finito em  $r = 2m$ . A "singularidade" em  $r = 2m$  não é intrínseca à solução e sim uma consequência do uso de um sistema de coordenadas inadequado ao problema. É possível escolher um sistema de coordenadas onde a divergência de  $g_{11}$  desaparece e a métrica de Schwarzschild apresenta um comportamento regular em  $r = 2m$ . No sistema de Eddington-Finkelstein, por exemplo,  $ds^2$  toma a forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 - 2 dv dr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

onde  $v = t + r + 2m \log(r - 2m)$

A questão do conceito de singularidade adequado à Relatividade Geral tem sido muito discutida nos últimos anos. Geroch <sup>7</sup> (1968) discute a relação entre um espaço-tempo singular e uma variedade que admite geodésicas incompletas. Uma geodésica é completa se, dado um parâmetro afim sobre ela, é possível estendê-lo arbitrariamente para valores crescentes ou decrescentes. Quando isto não acontece, a geodésica termina para um certo valor do parâmetro: ela é dita incompleta.

Pode-se tentar definir um espaço-tempo singular através de uma das seguintes definições: um espaço-tempo é singular se:

- (i) contêm pontos em que a métrica não está definida;
- (ii) as componentes do tensor de Riemann são infinitas em alguns pontos;
- (iii) os escalares de curvatura se tornam infinitos em alguns pontos;

Geroch conclui que nenhuma destas definições é adequada e propõe que a definição de singularidade seja posta na seguinte forma:

*Um espaço-tempo é não singular se é geodesicamente completo.* \*

\* A definição de geodesicamente completo é a seguinte <sup>8</sup>: "Seja  $M$  uma variedade espaço-tempo,  $TM_p$  o espaço tangente no ponto  $p$  e  $TM = \bigcup_{p \in M} TM_p$ , o fibrado tangente.  $M$  é geodesicamente completo se e somente se

$$H_+ = TM$$

Esta definição é introduzida por Geroch \* com o objetivo de obter um conceito que tenha a propriedade de não incluir espaços-tempos dos quais tenham sido removidas quaisquer regiões. Numa variedade de métrica não positiva definida, uma geodésica pode ser de tipo tempo, nula ou tipo espaço e portanto uma geodésica incompleta pode ser de qualquer um dos três tipos. Se a existência de geodésicas incompletas de um tipo implicasse na existência de geodésicas incompletas dos outros dois tipos, a definição seria satisfatória na forma em que foi proposta e não seria necessário acrescentar que tipo (ou tipos) de geodésica incompleta implica no caráter singular do espaço-tempo. No entanto, mostrou-se <sup>9</sup> que os três tipos de completicidade não são equivalentes e que é possível a existência de variedades com somente um ou dois tipos de geodésicas incompletas. As cinco combinações seguintes são possíveis:

(i) tipo tempo completa; tipo espaço e nula incompleta;

onde  $H_+ = \exp^{-1}M$  é a imagem inversa da aplicação exponencial,  $\exp : TM \rightarrow M$ .  $M$  é geodesicamente incompleto se  $H_0 = H - H_+$ , onde

$$H = \bigcup_{\substack{p \in M \\ \zeta \in TM_p}} \overline{TM_{p,\zeta} \cap H_+}$$

$H_0 \neq \emptyset$ ,  $TM_{p,\zeta}$  é o sub-espaço unidimensional de  $TM$  gerado pelo vetor  $\zeta$  e a barra denota que o conjunto é fechado. Cada ponto de  $H_0$  gera uma geodésica incompleta em  $M$ ."

\* Geroch afirma estar introduzindo tal definição. No entanto nos foi comunicado pessoalmente por M. Novello que esta definição aparece simultaneamente nos trabalhos dos grupos de Cambridge e Munich.

- (ii) tipo espaço completa; tipo tempo e nula incompleta;
- (iii) nula completa; tipo tempo e tipo espaço incompleta;
- (iv) tipo tempo e nula completa; tipo espaço incompleta;
- (v) tipo espaço e nula completa; tipo tempo incompleta.

Na definição proposta não está explícito qual o tipo de geodésica incompleta que torna um espaço-tempo singular. Conclue-se que esta definição tampouco esclarece qual o tipo de região que não pode ter sido removida do espaço-tempo não singular. É proposto então por Geroch que os espaços-tempos não singulares satisfaçam a uma segunda propriedade:

*Num espaço-tempo não singular, observadores que possuem linhas de universo "razoáveis" devem ter um tempo próprio total infinito.*

Mesmo colocada nesta forma vaga, esta propriedade não soluciona a questão. Pode-se dar pelo menos um exemplo de um espaço-tempo geodesicamente completo nos tres sentidos que contém uma curva tipo tempo com tempo próprio finito.

Os problemas levantados por Geroch neste trabalho quanto à definição de singularidade através da não completicidade de geodésicas continuam sendo discutidos. Apesar disto, Hawking e Ellis<sup>10</sup> adotam o ponto de vista de que a completicidade das geodésicas nulas e tipo tempo são as condições mínimas para que um espaço-tempo seja considerado não singular, pois com esta definição é possível demonstrar uma série de teoremas sobre a ocorrência de singularidades. A menos que se con

significa estabelecer de forma inequívoca a relação entre o conceito de geodésicas incompletas e a existência de regiões do espaço-tempo onde os tensores de curvatura se tornam infinitos, as definições de singularidade baseadas neste conceito somente podem ser vistas como definições matemáticas, cujo significado físico é, senão inexistente, pelo menos obscuro.

## II,2 A EXISTÊNCIA DE UMA SOLUÇÃO GERAL NÃO SINGULAR

A existência de singularidades é uma propriedade não somente dos modelos de Friedmann, mas também da grande maioria das soluções exatas das equações de Einstein. Como é sugerido pela equação de Raychaudhuri, Lifshitz e Khalatnikov <sup>11</sup> colocam a seguinte questão: é a singularidade uma propriedade da solução geral das equações de Einstein ou esta propriedade aparece nestas soluções devido às suposições restritivas que são feitas sobre as métricas? Dito de outra forma: não será o excesso de simetrias impostas a estas soluções (com o objetivo de tornar as equações facilmente solúveis) o responsável pelo aparecimento de singularidades? Uma vez que obter a solução geral exata das equações de Einstein é um problema insolúvel, para responder a esta pergunta estes autores investigam a forma da solução geral próximo à singularidade. Pelo número de funções arbitrarias das coordenadas que estas soluções contêm (a solução geral das equações de Einstein contêm oito funções arbitrarias) conclui-se que a solução com singu-

laridades não é a solução geral, mas somente uma classe limitada de soluções possíveis.

Este resultado não se constituiu numa resposta definitiva à questão colocada por Lifshitz e Khalatnikov, pois na segunda metade da década de 60 surgem os teoremas de singularidade de Hawking e Penrose, demonstrando ser a singularidade uma propriedade das equações de Einstein, desde que a variedade espaço-tempo satisfaça a certas condições. Estes teoremas serão discutidos na seção seguinte.

Em 1970, Lifshitz e Khalatnikov <sup>12</sup> provam a existência de uma solução geral singular das equações de Einstein, de certa maneira negando seu resultado anterior e reforçando os teoremas de Hawking e Penrose.

### II.3 OS TEOREMAS DE SINGULARIDADE

A partir de 1965, Hawking e Penrose <sup>13</sup> demonstram, sob a forma de teoremas matemáticos rigorosos, a inevitabilidade de singularidades (definidas através do conceito de geodésicas incompletas) nas soluções das equações de Einstein.

Nos diferentes teoremas diversas hipóteses são feitas e duas delas são comuns a todos, a saber:

- (i) a variedade espaço-tempo não admite violações da causalidade;
- (ii) o tensor energia momentum não permite auto valores negativos.

O mais geral destes teoremas é o demonstrado por Hawking e Penrose <sup>14</sup> em 1970. Seu enunciado é o seguinte:

Uma variedade espaço-tempo  $M$  necessariamente contém geodésicas nulas ou tipo tempo não extensíveis e incompletas se além das equações de Einstein, valem as seguintes condições:

1.  $M$  não contém curvas tipo tempo fechadas;
2. Em cada evento em  $M$  e para cada vetor unitário tipo tempo  $u_\alpha$ , o tensor energia momentum satisfaz a:

$$(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T) u^\alpha u^\beta \geq 0 ;$$

3. A variedade é geral no sentido de que cada geodésica nula ou tipo tempo com tangente unitária  $u_\alpha$  passa através de pelo menos um evento onde a curvatura não está alinhada com  $u_\alpha$  de nenhuma maneira específica:

$$u_\alpha R_{\beta\gamma\delta} [ \epsilon u^\rho ] u^\gamma u^\delta \neq 0$$

em algum ponto da geodésica.

4. A variedade contém uma superfície "trapped".

A condição (1) é uma condição de causalidade usual; a condição (2) é satisfeita se a densidade total de energia, medida por um observador cuja linha de universo tem tangente unitária  $u_\alpha$  tipo tempo, é positiva ou, se for negativa,  $p_i < -\rho$ , onde  $p_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  são as pressões principais nas três direções tipo espaço  $u_i$ ;  $u_\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ , são os auto-vetores de  $T_{\mu\nu}$ .

Para esclarecer o significado da condição (3), somos obrigados a recordar brevemente uma classificação dos campos gravitacionais, realizada por Petrov. O tensor de Weyl, definido como:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + g_{\alpha[\nu} R_{\mu]\beta} + g_{\beta[\mu} R_{\nu]\alpha} + \frac{1}{3}R g_{\alpha[\mu} g_{\nu]\beta}$$

pode ser classificado em quatro tipos, de acordo com o número de auto-vetores linearmente independentes que possui: Tipo I, possui quatro vetores linearmente independentes; tipo II, três vetores; tipo III, dois vetores e tipo N, um vetor linearmente independente. Para o espaço-vazio,  $T_{\mu\nu} = 0$  e portanto  $R_{\mu\nu} = 0$ . Neste caso,  $C_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$  e a classificação de Petrov vale para o tensor de Riemann. A cada um dos tipos de Petrov correspondem as seguintes igualdades:

$$\text{Tipo N} - R_{\alpha\beta\gamma\delta} u^{\alpha} = 0$$

$$\text{Tipo III} - R_{\alpha\beta\gamma} [\delta u^{\gamma} u_{\lambda}] = 0$$

$$\text{Tipo II} - R_{\alpha\beta\gamma} [\delta u_{\lambda}] u^{\beta} u^{\gamma} = 0$$

$$\text{Tipo I} - u_{[\rho} R_{\alpha] \beta\gamma} [\delta u_{\lambda}] u^{\beta} u^{\gamma} = 0$$

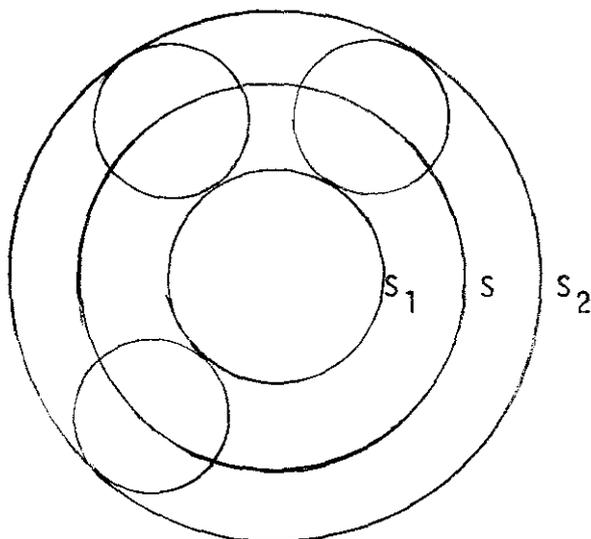
onde  $u_{\alpha}$  são os auto-vetores de  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ .

Cada uma das igualdades acima implica em todas as seguintes mas não implica nas anteriores. Se  $u_{[\rho} R_{\alpha] \beta\gamma} [\delta u_{\lambda}] u^{\beta} u^{\gamma} \neq 0$  também não são válidas as igualdades anteriores e portanto, nos pontos em que vale a desigualdade tem-se  $T_{\mu\nu} \neq 0$ . A condição (3) implica que a variedade M admite geodésicas que passam necessariamente por pontos onde existe matéria, como é razoável supor numa situação fisicamente realística.

Quanto à condição (4), por definição <sup>15</sup>:

*Uma superfície "trapped"  $S$  é uma dois-superfície tipo espaço compacta com a propriedade de que geodésicas nulas que a encontram ortogonalmente convergem localmente em direções futuras.*

Considere-se um corpo massivo  $M$  contido dentro de uma esfera  $S$  que em um certo instante emite um raio de luz. Em um instante posterior, as frentes de onda incidente e emergente formam esferas  $S_1$  e  $S_2$ , como na figura abaixo. A área de  $S_1$



é sempre menor que a área de  $S$ , mas normalmente a área de  $S_2$  é maior que a área de  $S$ . Se a quantidade de matéria contida dentro de  $S$  for suficientemente grande, também a área de  $S_2$  será menor que a área de  $S$ . Conforme  $t$  cresce a área de  $S_2$  se torna menor. A velocidade da matéria é sempre menor que a velocidade da luz; para um observador comoviente com  $M$ , o volu

me ocupado pela matéria contida em  $S$  decresce e se torna zero em um tempo finito. Um exemplo de superfície "trapped" aparece quando uma distribuição de matéria está dentro de seu raio de Schwarzschild,  $r = 2m$ . Um ponto fora da matéria mas de raio menor que  $r = 2m$ , determina uma superfície "trapped".

É razoável supor a existência de superfícies "trapped" em nosso universo? Penrose <sup>15</sup>, um dos autores dos teoremas de singularidades não propõe nenhuma resposta para esta pergunta, observando somente que *não há questão de princípio contra o aparecimento de uma superfície "trapped" em nosso universo*. Mais recentemente, Hawking e Ellis <sup>10</sup> dão argumentos para sustentar a hipótese de que o universo contém matéria suficiente para tornar possível a ocorrência de tais superfícies e demonstram sua existência em um universo homogêneo e isotrópico que contém matéria com energia positiva.

Em coordenadas  $(t, \chi, \theta, \phi)$  a métrica de Robertson-Walker se escreve:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

onde  $f(\chi) = \sin\chi$ ,  $\chi$  ou  $\sinh\chi$  se  $K$  (a curvatura do 3-espaço) for 1, 0 ou -1. Consideremos a dois-esfera  $S$  de raio  $\chi_0$ , sobre a superfície  $t = t_0$ . Por questões de simetria, a métrica sobre uma esfera se reduz a:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\chi^2 \quad . \quad (II.1)$$

Fazendo  $ds = 0$  em (II.1) e integrando a expressão de  $t_0$  a  $t$ , obtêm-se

$$\chi(t) = \chi_0 \pm \int_{t_0}^t \frac{dt}{a(t)} \quad (II.2)$$

As duas famílias de geodésicas nulas dirigidas para o passado e ortogonais a  $S$  intersectam as superfícies  $t = c^{te}$  em duas esferas de raio  $\chi$ , dado pela expressão (II.2).

A área de uma dois-esfera de raio  $\chi$  é  $4\pi a^2(t) f^2(\chi)$ . Se em  $t = t_0$

$$\frac{d}{dt} a^2(t) f^2(t) > 0 \quad (II.3)$$

para ambos os valores de  $\chi$  acima, as áreas estarão diminuindo no sentido decrescente de  $t$  e portanto as geodésicas nulas estarão convergindo no passado. A desigualdade (II.3) é uma condição necessária para a existência de uma superfície "trapped" em um universo homogêneo e isotrópico.

Desenvolvendo a derivação em (II.3), tem-se que:

$$\dot{a}(t_0) a(t_0) f^2(t_0) + a^2(t_0) \dot{f}(t_0) f(t_0) > 0 \quad ;$$

Mas  $d\chi = \pm \frac{dt}{a(t)}$  e portanto,

$$\frac{df}{dt} = \pm \frac{1}{a(t)} \frac{df}{d\chi} = \pm \frac{1}{a(t)} f'$$

A desigualdade (II.3) é válida se:

$$\frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} > \frac{f'(\chi_0)}{a(t_0) f(\chi_0)} \quad (II.4)$$

A equação de Raychaudhuri para  $p = 0$  é:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{3} \kappa \rho = 0$$

Integrando esta equação, obtêm-se:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{4}{3} \pi \rho = \frac{K}{a^2}$$

onde  $K$  é a curvatura do 3-espaço. Portanto,

$$\frac{\dot{a}}{a} = \left[ \frac{K}{a^2} - \frac{4}{3} \pi \rho \right]^{1/2} \quad (\text{II.5})$$

Substituindo a igualdade (II.5) em (II.4), obtêm-se a condição (II.3) na forma:

$$\left[ \frac{8}{3} \pi \rho(t_0) a^2(t_0) - K \right]^{1/2} > \pm \frac{f'(\chi_0)}{f(\chi_0)} \quad (\text{II.6})$$

Para  $K = 0$ ,  $f(\chi) = \chi$  e portanto,  $a(t_0)\chi_0$  deve ser maior que  $\left[ \frac{8}{3} \pi \rho_0 \right]^{1/2}$ . Para  $K = 1$ ,  $f(\chi) = \text{sen } \chi$ ,  $f'(\chi) = \text{cos } \chi$  e (II.6) assume a forma:

$$\left[ \frac{8}{3} \pi \rho(t_0) a(t_0) - 1 \right]^{1/2} > \pm \frac{\text{cos } \chi_0}{\text{sen } \chi_0}$$

$a(t_0)\chi_0$  deve ser maior que o menor valor entre  $\left[ \frac{8}{3} \pi \rho_0 \right]^{1/2}$  e  $\frac{\pi}{2}$ . Para  $K = -1$ ,  $a(t_0)\chi_0$  deve ser maior que  $\left[ \frac{8}{3} \pi \rho_0 \right]^{1/2}$ . Em geral, pode-se dizer que a condição (II.6) equivale a

$$a(t_0)\chi_0 > \left[ \frac{8}{3} \pi \rho_0 \right]^{1/2}$$

Num tempo  $t_0$  a esfera de raio  $\chi_0$  e densidade de massa  $\rho_0$

conterá uma massa da ordem  $\frac{4}{3}\pi\rho_0 a_0^3 \chi_0^3$ . Se

$$a_0 \chi_0 < \frac{8}{3} \pi \rho_0 a_0^3 \chi_0^3 \quad (\text{II.7})$$

a esfera estará dentro de seu raio de Schwarzschild. A desigualdade (II.7) equivale a  $a_0 \chi_0 > \left[\frac{8}{3}\pi\rho_0\right]^{1/2}$  e portanto (pelo menos para  $K = 0$  ou  $-1$ ) é sempre possível a existência de uma superfície "trapped" em um universo de métrica homogênea e isotrópica.

Os resultados destes teoremas não são conclusivos quanto à possibilidade das equações de Einstein admitirem soluções não singulares, se por não singular se entende uma solução que não permite a ocorrência de regiões do espaço-tempo em que a densidade de matéria e os tensores de curvatura se tornam infinitos. Tudo o que eles demonstram é que se as equações de Einstein descrevem corretamente o comportamento dos campos gravitacionais, espaços-tempos que satisfazem a certas condições de causalidade e positividade do tensor energia momentum contêm necessariamente geodésicas tipo tempo e/ou nulas incompletas. Estes resultados indicam que somente o abandono ou das equações de Einstein ou de uma destas condições pode levar à obtenção de um espaço-tempo que somente admita geodésicas tipo tempo e nulas completas.

## CAPÍTULO III

## MODIFICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Neste capítulo discutiremos as modificações propostas às equações de Einstein, na tentativa de evitar a ocorrência de singularidades nos modelos cosmológicos relativistas. Em particular, analisaremos as modificações originadas nas flutuações quânticas do campo gravitacional e daremos uma breve descrição de alguns dos modelos propostos. Faremos também uma revisão sucinta da teoria de Jordan e Brans e Dicke, uma das versões de uma outra linha de modificações das equações de Einstein, as chamadas teorias escalar-tensoriais.

## III.1 FLUTUAÇÕES QUÂNTICAS DO CAMPO GRAVITACIONAL NO VAZIO

Os teoremas de singularidade de Hawking e Penrose demonstram a impossibilidade de se obter soluções não singulares (dentro de certos critérios ligados à definição de singularidade em termos de não completicidade de geodésicas) a partir das equações de Einstein, quando são impostas algumas condições sobre a variedade espaço-tempo. Apesar do caráter não conclusivo destes teoremas e das restrições sobre o sentido físico de seus resultados, deixou-se de lado as tentativas de obter soluções cosmológicas não singulares a partir destas equações. Pensou-se que um possível caminho para eliminar a singularidade dos modelos cosmológicos seria introduzir-se mo

dificações nas equações de Einstein. De imediato uma questão se colocou: que modificações? Verificou-se que fazendo um apelo à teoria das flutuações quânticas do campo gravitacional se pode obter uma resposta a esta pergunta.

Nos problemas astronômicos usuais a interação gravitacional é a interação dominante (seus efeitos quânticos sendo desprezíveis). No entanto, estes efeitos passam a ter importância quando a densidade de matéria é da ordem de  $10^{94}$  g/cm<sup>3</sup> \* e são portanto relevantes para o colapso gravitacional e próximo à singularidade cosmológica, pois nestas duas situações a densidade de matéria tende para infinito.

Sabe-se da Eletrodinâmica Quântica que as flutuações do vácuo do campo eletromagnético introduzem termos não lineares nas equações originais da teoria clássica. Estas flutuações explicam o "Lamb shift" dos níveis de energia do átomo de hidrogênio. As flutuações quânticas do campo gravitacional no vácuo deveriam produzir um efeito semelhante, isto é, introduzir nas equações de movimento da métrica termos não lineares nos tensores de curvatura.

Em 1963, Utiyama e DeWitt <sup>16</sup> mostraram que num campo gravitacional clássico produzido por um tensor energia momentum de um conjunto de campos materiais quantizados, o valor espe-

\* Este número pode ser obtido utilizando como grandezas fundamentais a constante de Planck  $\hbar$ , a velocidade da luz  $c$  e a constante gravitacional  $G$ . Por argumentos dimensionais, vê-se que uma massa crítica  $m^* \approx 10^{94}$  é obtida de  $c^5 / \hbar G^2$ . <sup>26</sup>

rado, não nulo, do tensor energia momentum no vazio,  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ , apresenta divergências de três ordens:  $\infty^4$ ,  $\infty^2$  e  $\log\infty$ . A divergência  $\infty^4$  pode ser removida introduzindo-se nas equações um termo cujo efeito consiste em renormalizar a constante cosmológica; a divergência  $\infty^2$  é removida por um termo que renormaliza a constante gravitacional e a parte proporcional a  $\log\infty$  é eliminada pela introdução de um termo proporcional ao quadrado do escalar de curvatura,  $R^2$ . As equações de movimento são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = - \kappa T_{\mu\nu} \quad (\text{III.1})$$

onde  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  é o valor médio do tensor de energia momentum no vazio. As equações (III.1) são derivadas de um princípio variacional a partir da ação:

$$I = \int \sqrt{-g} \left[ R + 16\pi G \langle L_m \rangle \right] d^4x \quad (\text{III.2})$$

onde  $\langle L_m \rangle$  é o valor médio da densidade Lagrangiana dos campos materiais. A representação de  $\langle T^{\mu\nu} \rangle$  no espaço dos momenta é:

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int J^{\mu\nu}(p) \exp(ipx) d^4p$$

$\langle T^{\mu\nu} \rangle$  apresenta divergências de três ordens e por isto é conveniente introduzir-se a notação

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = J_A^{\mu\nu \text{sing}}(x) + J_B^{\mu\nu \text{sing}}(x) + J_C^{\mu\nu \text{sing}}(x)$$

onde

$$\begin{aligned} J_A^{\mu\nu \text{ sing}} &= A g^{\mu\nu} \\ J_B^{\mu\nu \text{ sing}} &= B G_0^{\mu\nu} \\ J_C^{\mu\nu \text{ sing}} &= C G_1^{\mu\nu} + D G_2^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

A é uma constante da ordem de  $\infty^4$ , B uma constante da ordem de  $\infty^2$  e C e D, constantes da ordem de  $\log\infty$  e ainda:

$$\begin{aligned} G_0^{\mu\nu} &= \int \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} [\sqrt{-g} R] d^4x = \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} I_0 \\ G_1^{\mu\nu} &= \int \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} [\sqrt{-g} R^2] d^4x = \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} I_1 \\ G_2^{\mu\nu} &= \int \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} [\sqrt{-g} R_{\alpha\beta\rho\sigma} R^{\alpha\beta\rho\sigma}] d^4x = \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} I_2 \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Se em lugar da ação (III.2) fôr introduzido

$$I^* = \int \sqrt{-g} [R + 8\pi G \langle L_m \rangle] d^4x + 8\pi G I_0 + \alpha I_1 + \beta I_2 + \gamma I_3$$

onde

$$I_3 = \int \sqrt{-g} d^4x$$

as novas equações de movimento serão:

$$\begin{aligned} G_0^{*\mu\nu} + \kappa^* T^{\mu\nu \text{ finito}} + \kappa^* (A - \gamma) g^{*\mu\nu} + (\kappa^* B + Z - 1) G_0^{*\mu\nu} + \\ + \kappa^* (C - 2\alpha) G_1^{*\mu\nu} + \kappa^* (D - 2\beta) G_2^{*\mu\nu} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

onde  $\kappa^* = Z\kappa$  e  $g_{\mu\nu}^* = Z^{-1}g_{\mu\nu}$  e os tensores  $G^{*\mu\nu}$  são construídos com  $g_{\mu\nu}^*$  de maneira análoga a (III.4). Com a escolha

$$Z = 1 - \kappa^*$$

$$\alpha = C/2$$

$$\beta = D/2$$

$$\gamma = A$$

a equação (III.5) se reduz a:

$$G_0^{*\mu\nu} = -\kappa^* \langle T^{*\mu\nu} \rangle_{\text{finito}}$$

eliminando as divergências de  $\langle T^{\mu\nu} \rangle$ . Uma simples inspeção mostra que somar  $I_3$  à ação (III.2) equivale a renormalizar a constante cosmológica; somar  $I_0$  equivale a renormalizar a constante gravitacional. As ações  $I_1$  e  $I_2$  contribuem com novos termos, não lineares nos tensores de curvatura.

Neste trabalho, Utiyama e DeWitt dão ênfase à possibilidade de eliminar as divergências do tensor energia momentum. Em 1971, Ginzburg et al <sup>17</sup> mostram explicitamente que são as flutuações do campo gravitacional no vácuo que introduzem nas equações de Einstein os termos adicionais, necessários para e liminar as divergências de (III.3).

As equações de Einstein com o termo cosmológico são:

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

Ginzburg et al tomam o valor médio do tensor métrico e das

quantidades construídas com ele, para todos os modos de flutuação do campo gravitacional no vácuo, modificando as equações de Einstein para

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}$$

$G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein construído com a métrica não perturbada  $g_{\mu\nu}$  e  $\phi_{\mu\nu}$  é um tensor que descreve a contribuição das flutuações.  $T_{\mu\nu}$  é suposto uma quantidade que não flutua e que satisfaz a  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ . Desenvolvendo  $\phi_{\mu\nu}$  em potências dos tensores de curvatura construídos com a métrica não perturbada, é fácil mostrar que:

- (i) O termo constante renormaliza a constante cosmológica (como  $I_3$ )
- (ii) O termo linear renormaliza a constante gravitacional (como  $I_0$ )
- (iii) Os termos de segunda ordem contribuem com termos adicionais às equações de Einstein ( $I_1$  e  $I_2$ ).

Ginzburg et al discutem também neste trabalho a importância destas flutuações nas soluções cosmológicas, mais especificamente, em um universo tipo Friedmann fechado.

Com o objetivo de demonstrar que é correta a suposição de que  $\phi_{\mu\nu}$  pode ser expandido em potências de  $R_{\mu\nu}$ , Ginzburg et al utilizam um método de aproximação, substituindo o tensor métrico por  $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ , onde  $g_{\mu\nu}$  é o valor médio e  $\delta g_{\mu\nu}$

descreve a perturbação. Quando estas perturbações são somente as flutuações do vácuo, mostra-se que  $\phi_{\mu\nu}$  tem a forma proposta, ou seja,

$$\phi_{\mu\nu} = \alpha g_{\mu\nu} + \beta R + \gamma R^2 + \delta R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \epsilon R_{\alpha\beta\rho\sigma} R^{\alpha\beta\rho\sigma} + \dots$$

e ademais, que os coeficientes dos termos de segunda ordem nos tensores de curvatura devem ser funções (logarítmicas) da curvatura. No caso do modelo de Friedmann fechado, um cálculo direto mostra que os coeficientes são funções logarítmicas de  $a(t)$ .

As equações de Einstein não contêm termos quadráticos nos tensores de curvatura. É necessário alterá-las para que incluam as flutuações do vácuo do campo gravitacional\*. Isto implica em modificar a Lagrangiana de Einstein  $L_E$ ,

$$L_E = \sqrt{-g} R \quad (\text{III.6})$$

Esta modificação foi proposta por Sakharov<sup>18</sup> em 1967. Ele sugere que a Lagrangiana (III.6) seja a variação devida à curvatura do espaço-tempo na ação das flutuações quânticas do vácuo e propõe a Lagrangiana modificada, desenvolvida em potências do escalar  $R$ :

$$L_S = L(0) + \sqrt{-g} (R + AR^2 + \dots)$$

O primeiro termo corresponde à constante cosmológica, o se -

\* Como vimos atrás, do ponto de vista da teoria quântica de campos os termos adicionais permitem eliminar as divergências do tensor energia momentum de campos materiais quantizados em presença de um campo gravitacional.

gundo a Lagrangiana (III.6) usual e os termos seguintes são correções devido às flutuações do vácuo do campo gravitacional. Desta Lagrangiana, desprezados os termos de  $R$  em diante, são derivadas as equações modificadas pelas flutuações do campo gravitacional, obtidas por Ginzburg et al <sup>17</sup>.

Estimulados pela proposta de Sakharov e pelos trabalhos de Utiyama e DeWitt, vários autores investigaram a possibilidade destas modificações introduzidas nas equações de Einstein pelas flutuações do vácuo serem aquelas que vão modificar as características das soluções cosmológicas, tornando-as não singulares sem que seja preciso renunciar às propriedades de homogeneidade e isotropia do espaço.

### III.2 MODELOS DE FRIEDMANN NÃO SINGULARES

Os modelos de Friedmann descrevem com bastante sucesso o estágio atual do universo. Entretanto sua singularidade representa uma séria dificuldade, como foi discutido no capítulo anterior, o que tem estimulado a procura de soluções cosmológicas não singulares. Relativamente às flutuações do campo gravitacional no vácuo, procurou-se <sup>19,20</sup> soluções das equações de Einstein modificadas por estas flutuações para as quais:

- (i) o fator de escala  $a(t)$  apresente um mínimo  $a_{\min} > 0$  e a solução seja portanto não singular;
- (ii) a solução não singular tenda assintoticamente para a solução de Friedmann correspondente.

Adotando esta linha de trabalho, Ruzmaikina e Ruzmai - kin <sup>19</sup> tentam encontrar uma solução não singular destas equações modificadas, derivadas a partir de um princípio variacional, dado pela Lagrangiana \*

$$L = \sqrt{-g}(R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) \quad (\text{III.7})$$

Discute-se um universo cujo conteúdo material é um fluido perfeito descrito pela equação de estado  $p = \frac{1}{3} \rho$  e cujo 3-espaço é euclidiano ( $K=0$ ). As soluções procuradas devem tender assintoticamente para  $a(t) \sim t^{1/2}$ . Eles obtêm o seguinte resultado:

- (i) Se  $\alpha, \beta > 0$ , as soluções são singulares e tendem para soluções tipo Friedmann assintoticamente;
- (ii) Se  $\alpha, \beta < 0$ , as soluções não são singulares, mas não tendem para soluções tipo Friedmann.

Motivado particularmente pelos trabalhos de Utiyama e De Witt, Nariai <sup>20</sup> se interessa pela mesma questão. Sua tentativa de encontrar um modelo cosmológico não singular e assintoticamente Friedmann é mais bem sucedida. Usando métodos numéricos, ele obtêm soluções das equações derivadas a partir de

\* No apêndice II, demonstramos que as equações derivadas de  $L_1 = \sqrt{-g} R^2$  e  $L_2 = \sqrt{-g} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$  não são independentes quando a métrica é homogênea e isotrópica. Por isso, quando se procura uma solução tipo Friedmann, é suficiente derivar as equações a partir de  $L_E + L_1$ .

(III.7), para  $p = \frac{1}{3}\rho$  e  $K = 0$ , que para  $t \rightarrow \infty$ , tendem para  $a(t) \sim t^{1/2}$ , se  $\alpha, \beta < 0$ . Se  $\alpha, \beta > 0$ , as soluções são todas singulares.

Uma outra tentativa de obter soluções cosmológicas não singulares que se poderia citar é a de Gurovich et al <sup>21</sup>. Seguindo o caminho inverso, eles supõem que as equações derivadas da Lagrangiana

$$L = \sqrt{-g}(R + f(R))$$

possuem solução não singular, assintoticamente de tipo Friedmann e determinam a forma de  $f(R)$ : o resultado é  $f(R) \sim R^{4/3}$ . Este parece ser apenas um resultado matemático, pois nenhum argumento é apresentado para justificar uma tal Lagrangiana.

### III.3 TEORIAS ESCALAR\_TENSORIAIS

Das várias versões da teoria escalar-tensorial, originalmente proposta por Jordan <sup>22</sup>, é o modelo de Brans e Dicke <sup>23</sup> que tem sido mais discutido. O objetivo principal das idéias desenvolvidas por estes dois autores é tentar incorporar o princípio de Mach à teoria da Relatividade Geral. O caminho seguido é o da modificação das equações de Einstein. A teoria proposta não é completamente geométrica, pois parte dos efeitos gravitacionais são descritos por um campo escalar  $\phi(x)$ . Este campo escalar é interpretado como uma função da constante gravitacional  $G$ . Portanto, nesta teoria  $G$  varia com a posição no espaço-tempo <sup>25</sup>.

As equações de Brans e Dicke são obtidas de uma generalização da ação (I.2): divide-se (I.2) por  $G$ , soma-se a ela a Lagrangiana do campo escalar  $\phi(x)$ . Como é feita a suposição de que  $G$  é proporcional a  $\phi^{-1}$ , a ação generalizada é:

$$I_{BD} = \int \sqrt{-g} \left[ R\phi + 16\pi L_m - w \frac{\phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}}{\phi} g^{\alpha\beta} \right] d^4x \quad (\text{III.8})$$

onde  $w$ , a constante de auto-interação do campo escalar é adimensional. A equação para  $\phi$  obtida de um princípio variacional é:

$$2w \frac{\square\phi}{\phi} - w \frac{\phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha}}{\phi^2} + R = 0 \quad (\text{III.9})$$

As equações para o tensor métrico são:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} + \frac{w}{\phi^2} (\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha}) + \frac{1}{\phi} (\phi_{,\mu;\nu} - \square\phi g_{\mu\nu}) \quad (\text{III.10})$$

Brans e Dicke discutem uma aplicação da teoria à Cosmologia. Eles obtêm soluções para um universo de Friedmann euclidiano, cujo conteúdo material é um gás incoerente de matéria descrito pela equação de estado  $p = 0$ . O campo escalar é suposto função somente do tempo, coerentemente com as suposições de homogeneidade e isotropia do espaço. As soluções são:

$$\phi(t) = \phi_0 \left[ \frac{t}{t_0} \right]^r$$

e

$$a(t) = a_0 \left[ \frac{t}{t_0} \right]^q$$

onde

$$r = \frac{2}{4+3w} \quad \text{e} \quad q = \frac{2+2w}{4+3w}$$

Para  $w = 9$ ,

$$a(t) = a_0 \left[ \frac{t}{t_0} \right]^{20/31}$$

e a solução é praticamente a solução de Friedmann usual  $a(t)$ . Além disto, a solução do campo escalar correspondente é praticamente constante para tempos muito grandes. Portanto, para os tempos atuais, a descrição do universo na teoria de Brans e Dicke é bastante semelhante à descrição na teoria de Einstein.

## CAPÍTULO IV

## MODELO ESCALAR TENSORIAL DAS FLUTUAÇÕES DO CAMPO GRAVITACIONAL NO VAZIO

As propostas de modificação das equações de Einstein através de flutuações do campo gravitacional no vazio encontraram aplicação em Cosmologia nas tentativas de obter soluções de Friedmann não singulares. Uma destas tentativas (Nariai) obteve um resultado positivo, encontrando soluções não singulares das equações derivadas da Lagrangiana (III.7), com  $\alpha$  e  $\beta$  constantes. No entanto, Ginzburg et al<sup>17</sup>, ao analisar o papel das flutuações do vazio nas soluções de Friedmann, concluem que  $\alpha$  e  $\beta$  não são realmente constantes mas funções de  $a(t)$ . Isto sugere que os modelos desenvolvidos por Ruzmaikina et al e Nariai sejam somente uma primeira aproximação, na qual se despreza a dependência temporal dos coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ : as flutuações do vazio do campo gravitacional seriam mais exatamente descritas por um modelo que considerasse esta dependência. Neste trabalho, propomos uma realização possível de tal modelo, onde as flutuações quânticas são descritas por uma teoria escalar-tensorial,

Neste capítulo derivaremos as equações de nosso modelo escalar-tensorial das flutuações do vazio em sua forma geral e discutiremos sua aplicação para um universo homogêneo e isotrópico. Trataremos o caso em que o conteúdo material do universo é um gás de fótons e a 3-curvatura é nula.

#### IV.1 LAGRANGIANA ESCALAR-TENSORIAL MODIFICADA: DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES

As equações derivadas da Lagrangiana modificada de Sakharov admitem soluções de Friedmann não singulares, indicando que as flutuações do campo gravitacional no vácuo são suficientes para eliminar a singularidade das soluções da teoria de Einstein original. No entanto, Ginzburg et al.<sup>17</sup> mostraram que a suposição de que os coeficientes dos termos de segunda ordem nos tensores de curvatura em (III.7) sejam constantes é somente uma aproximação e que na verdade estes coeficientes são funções do fator de escala  $a(t)$  (e portanto funções do tempo). Isto nos sugere uma generalização da Lagrangiana de Sakharov, de forma covariante, semelhante à generalização da Lagrangiana de Einstein proposta nas teorias escalar-tensoriais,

As equações de movimento do modelo serão derivadas de um princípio variacional, a partir de

$$L = \sqrt{-g} \left[ \phi(R + nR^2) + L(\phi) + 16\pi L_m \right] d^4x \quad (IV.1)$$

onde  $n$  é uma constante,  $\phi$  é proporcional ao inverso da constante gravitacional  $G$  e  $L(\phi)$  depende do particular modelo da teoria escalar-tensorial escolhido. Neste trabalho discutiremos somente o modelo de Brans-Dicke, no qual a Lagrangiana (IV.1) é escrita:

$$L = \sqrt{-g} \left[ \phi(R + nR^2) - w \frac{\phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} g^{\alpha\beta}}{\phi} + 16\pi L_m \right] d^4x \quad (IV.2)$$

w é a constante de auto-interação do campo escalar e é adimensional.

A equação para o campo escalar  $\phi$  é obtida variando  $\phi$  e  $\phi_{,\alpha}$  em (IV.2):

$$R + nR^2 - w \frac{\phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha}}{\phi^2} + 2w \frac{\square \phi}{\phi} = 0 \quad (\text{IV.3})$$

Variando  $g_{\mu\nu}$  e suas derivadas (de acordo com os cálculos no apêndice I), obtemos as equações para o tensor métrico:

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} = & -8\pi \frac{T^{\mu\nu}}{\phi} + \frac{w}{\phi^2} \left[ \frac{1}{2} \phi^{,\mu} \phi^{,\nu} - \frac{1}{2} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} g^{\mu\nu} \right] + \frac{1}{\phi} \left[ \phi_{,\alpha} ;^{\alpha} g^{\mu\nu} - \right. \\ & \left. - \phi^{,\mu ; \nu} \right] + 2n \left[ \frac{1}{4} R^2 g^{\mu\nu} - R R^{\mu\nu} + \frac{(\phi R)_{,\alpha} ;^{\alpha}}{\phi} g^{\mu\nu} - \right. \\ & \left. - \frac{(\phi R)_{,\mu ; \nu}}{\phi} \right] \quad (\text{IV.4}) \end{aligned}$$

onde  $T^{\mu\nu}$  é definido por (I.2).

Fazendo  $n = 0$ , as equações (IV.3) e (IV.4) se reduzem às equações de Brans-Dicke, a saber:

$$R - w \frac{\phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha}}{\phi^2} + 2w \frac{\square \phi}{\phi} = 0$$

e

$$G^{\mu\nu} = -8\pi \frac{T^{\mu\nu}}{\phi} + \frac{w}{\phi^2} \left[ \phi^{,\mu} \phi^{,\nu} - \frac{1}{2} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} g^{\mu\nu} \right] + \frac{1}{\phi} \left[ \phi_{,\alpha} ;^{\alpha} g^{\mu\nu} - \phi^{,\mu ; \nu} \right]$$

Fazendo  $w = 0$  e  $\phi = c^{te} = \frac{1}{G}$ , recaímos nas equações obtidas por Ruzmaikina et al <sup>19</sup> e Narai <sup>20</sup> \*:

$$G^{\mu\nu} = -8\pi GT^{\mu\nu} + 2n \left[ \frac{1}{4} R^2 g^{\mu\nu} - RR^{\mu\nu} + R_{,\alpha}{}^{;\alpha} g^{\mu\nu} - R^{;\mu}{}_{;\nu} \right] \quad (IV.4')$$

Podemos verificar a consistência da equação (IV.4) com o anulamento da divergência covariante do tensor de Einstein ( $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ ) e do tensor energia momentum ( $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ ). Multiplicando (IV.4) por  $g_{\mu\alpha}$  e tomando sua divergência covariante, temos:

$$\begin{aligned} G_{\alpha}{}^{\nu}{}_{;\nu} = & -R_{\alpha}{}^{\nu} \phi_{,\nu} + \frac{1}{2} R \phi_{,\alpha} + w \frac{\phi_{,\alpha} \phi^{',\nu}{}_{;\nu}}{\phi} + w \frac{\phi_{,\alpha}{}_{;\nu} \phi^{',\nu}}{\phi} - \\ & - w \frac{\phi_{,\nu} \phi^{',\nu}{}_{;\alpha}}{\phi} - w \frac{\phi_{,\alpha} \phi^{',\nu} \phi_{,\nu}}{2\phi^2} - 2n \left[ R_{\alpha}{}^{\nu} \phi_{,\nu} + \right. \\ & + R_{,\nu} R_{\alpha}{}^{\nu} \phi + RR_{\alpha}{}^{\nu}{}_{;\nu} \phi + (\phi R)_{,\alpha}{}^{;\nu}{}_{;\nu} - \frac{1}{4} R^2 \phi_{,\alpha} - \\ & \left. - RR_{,\alpha} \phi - (\phi R)_{,\nu}{}^{;\nu}{}_{;\alpha} \right] \end{aligned}$$

Fazendo uso da igualdade

\* Na verdade estes autores derivam suas equações a partir de (III.7) e elas contêm termos adicionais que não aparecem em (IV.4'). No entanto, demonstramos no apêndice II que para métricas homogêneas e isotrópicas as equações derivadas de  $L_1 = \sqrt{-g} R^2$  e  $L_2 = \sqrt{-g} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$  são proporcionais, sendo assim suficiente introduzir-se somente um destes dois termos.

$$f_{,\alpha}{}^{;\mu}{}_{;\alpha} - f_{,\mu}{}^{;\alpha}{}_{;\alpha} = f^{;\tau} R_{\tau\mu}$$

onde  $f$  é uma função escalar qualquer, chegamos à expressão:

$$G_{\alpha}{}^{\nu}{}_{;\nu} = -\frac{1}{2} \phi_{,\alpha} \left[ R^2 + nR + 2w \frac{\square \phi}{\phi} - w \frac{\phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha}}{\phi^2} \right]$$

Da equação (IV.3) para o campo escalar, vemos que a expressão no parênteses é nula e portanto

$$G_{\alpha}{}^{\nu}{}_{;\nu} = 0.$$

#### IV.2 EQUAÇÕES PARA UM UNIVERSO HOMOGÊNEO E ISOTRÓPICO

A forma geral de uma métrica homogênea e isotrópica pode ser escrita como:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (\text{IV.5})$$

Discutiremos as equações para o 3-espaco euclidiano. Neste caso, a métrica (IV.5) se reduz a

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (\text{IV.6})$$

As únicas componentes não nulas do tensor métrico associado à métrica (IV.6) são:

$$g_{00} = 1 ; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -a^2(t)$$

Coerentemente com as suposições de homogeneidade e isotropia do espaço, o campo escalar  $\phi$  é função somente de  $t$ . De acor-

do com os cálculos realizados no apêndice I, a equação para o campo escalar é:

$$2w \left[ \dot{\phi} - \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} \right] + 6\phi \left[ \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right] + 36n\phi \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right]^2 = 0 \quad (\text{IV.7})$$

Fazendo  $\mu = \nu = 0$  em (IV.4), temos:

$$8\pi \frac{T^{00}}{\phi} = 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + w \frac{\dot{\phi}^2}{2\phi^2} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\phi}}{\phi} + 18n \left[ 2 \frac{\ddot{a}\ddot{a}}{a^2} + 2 \frac{\dot{a}^2\ddot{a}}{a^3} - 3 \frac{\dot{a}^4}{a^4} - \frac{\ddot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{\dot{\phi}}{\phi} \left( \frac{\dot{a}^3}{a^3} + \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} \right) \right] \quad (\text{IV.8})$$

De acordo com (I.14), o tensor energia momentum tem componentes:

$$T_{00} = \rho, \quad T_{11} = T_{22} = T_{33} = a \quad \text{e} \quad T_{\mu\nu} = 0 \quad \text{para} \quad \mu \neq \nu$$

Substituindo  $T_{00}$  por  $\rho$  na equação (IV.8), temos:

$$8\pi \frac{\rho(t)}{\phi} = 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + w \frac{\dot{\phi}^2}{2\phi^2} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\phi}}{\phi} + 18n \left[ 2 \frac{\ddot{a}\ddot{a}}{a^2} + 2 \frac{\dot{a}^2\ddot{a}}{a^3} - 3 \frac{\dot{a}^4}{a^4} - \frac{\ddot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{\dot{\phi}}{\phi} \left( \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} + \frac{\dot{a}^3}{a^3} \right) \right] \quad (\text{IV.9})$$

É interessante notar que se a matéria contida no universo é descrita pela equação de estado  $p = 0$ , as equações (IV.7) e (IV.9) (para  $\phi = c^{te}$ ) não admitem a solução de Friedmann  $a(t) \propto t^{2/3}$ . Realmente, substituindo nas equações (IV.7) e (IV.9) as soluções

$$\phi = \frac{1}{G} \quad \text{e} \quad a(t) = a_0 t^{2/3}$$

e lembrando que (seção I.12)

$$\rho(t) a^3(t) = c t^e = b$$

obtemos as igualdades

$$8\pi G \frac{b}{a_0^3} t^{-2} = \frac{4}{3} t^{-2} + 8n t^{-4}$$

e

$$\frac{2}{3} t^{-2} + \frac{24}{81} t^{-4} = 0$$

Um simples inspeção das igualdades acima mostra que as soluções propostas não satisfazem às equações (IV.7) e (IV.9).

#### IV.3 A INCOMPATIBILIDADE DAS SOLUÇÕES $a(t) = t^p$ e $\phi(t) = t^r$

Como já mencionamos anteriormente, as equações de Brans-Dicke admitem soluções cosmológicas homogêneas e isotrópicas da forma  $a(t) = t^p$ ,  $\phi(t) = t^r$ ,  $p$  e  $q$  reais e fracionários. Podemos demonstrar que nossas equações, com  $n < 0$ , não admitem tais soluções. Tomemos as equações (IV.7) e (IV.9) e façamos  $a(t) = a_0 t^p$  e  $\phi(t) = \phi_0 t^r$ . Teremos que os expoentes  $p$  e  $q$  devem satisfazer a

$$\left[ wr^2 - wr - 6wrq + 6(2q^2 - q) \right] r^{r-2} + 36n(2q^2 - q)^2 t^{r-4} = 0 \quad (\text{IV.10})$$

e também a

$$8\pi \frac{\rho(t)}{\phi_0} = \left[ 3q^2 + \frac{w}{2} r^2 + 3qr \right] t^{r-2} + 18n \left[ -6q^3 + 3q^2 - 4rq^3 - 2rq^2 \right] t^{r-4} \quad (\text{IV.11})$$

A equação de estado do fluido cosmológico é  $p = \lambda\rho$ , com  $0 \leq \lambda \leq 1$ . A conservação do tensor energia momentum implica que  $\rho(t)a^{3\lambda+1} = c^{te}$ . Vamos substituir me (IV.11) a expressão

$$\rho(t) = b \left( a_0^{3(\lambda+1)} t^{3(\lambda+q)} \right)^{-1}$$

Teremos:

$$8\pi \frac{b}{\phi_0 a_0^{3(\lambda+1)}} = \left[ 3q^2 + \frac{w}{2} r^2 + 3qr \right] t^{r-2+3(\lambda+q)} + 18n \left[ -6q^3 + 3q^2 + 4rq^3 - 2rq^2 \right] t^{r-4+3(\lambda+q)} \quad (\text{IV.12})$$

A igualdade (I.10) implica que

$$2q^2 - q = 0 \quad \text{e} \quad r^2 - r - 6rq = 0$$

e portanto, (I.10) fica satisfeita para  $q = 0$  ou  $\frac{1}{2}$  e  $r = 2$  ou 5. Quanto à equação (IV.12), lembramos que a quantidade

$$8\pi \frac{b}{\phi_0 a_0^{3(\lambda+1)}}$$

é necessariamente não nula. Portanto, concluímos que uma das possibilidades abaixo é verdadeira, a saber:

$$(i) \quad r - 2 + 3q + q = 0 \quad (\text{IV.13})$$

e portanto

$$3q^2 + \frac{w}{2} r^2 + 3qr = 8\pi \frac{b}{\phi_0 a_0^{3(\lambda+1)}}$$

ou

$$(ii) \quad r - 4 + 3\lambda q + q = 0 \quad (IV.14)$$

e

$$-6q^3 + 3q^2 + 4rq^3 - 2rq^2 = 8\pi \frac{b}{\phi_0 a_0^{3(\lambda+1)}}$$

Vamos analisar a primeira possibilidade:

(i) Para  $q = 0$  e  $r = 2$ , a relação (IV.13) é trivialmente satisfeita.

Para  $q = \frac{1}{2}$  e  $r = 5$ , a igualdade (IV.13) implica que  $\lambda = -\frac{7}{3}$ , um valor que não pertence ao intervalo de variação de  $\lambda$ .

Quanto à segunda possibilidade:

(ii) As soluções com  $q = 0$  e  $r = 2$  não satisfazem a igualdade (IV.14). Se substituirmos estes valores naquela expressão, obteremos  $-2 = 0$ .

Se  $q = \frac{1}{2}$  e  $r = 5$ , o único valor de  $\lambda$  que satisfaz a (IV.14) é  $\lambda = -1$ . Ademais, do anulamento do coeficiente de  $t^{r-2+3q+q}$  em (IV.12), temos que  $w = -\frac{33}{50}$ .

No entanto, como observam Brans e Dicke<sup>24</sup>  $w$  deve ser positiva e seu valor mais provável está entre 6 e 9.

Concluimos que (IV.7) e (IV.9) não admitem soluções da forma  $a(t) = a_0 t^q$  e  $\phi(t) = \phi_0 t^r$ , com  $q$  e  $r$  ambos não nulos.

IV.4 AS CONSTANTES  $w$  E  $n$ 

Antes de realizar a integração das equações (IV.7) e (IV.9), é necessário que discutamos as constantes que foram introduzidas na teoria.

$w$  é a constante de auto interação do campo escalar  $\phi$ . De acordo com Brans e Dicke<sup>23</sup>,  $w$  deve ser da ordem da unidade. Eles observam que para  $w \geq 6$ ,  $K = 0$  e  $p = 0$ , a solução encontrada para suas equações difere muito pouco da solução de Friedmann usual. Em particular, para  $w = 9$ ,  $a(t) \sim t^{20/31}$  que é praticamente  $t^{2/3}$ . Neste trabalho, tomaremos  $w = 9$ . De qualquer modo, para qualquer valor de  $w$  da ordem da unidade, as propriedades qualitativas das soluções aqui obtidas não são alteradas, o que é o importante para nossa presente discussão.

A constante  $n$  tem dimensões de  $L^{-2}$ . Como proposto por Nariai<sup>20</sup>, vamos supor que este parâmetro esteja ligado a um tempo característico  $t_c$ , através de \*

$$t_c^2 = \frac{1}{6n} \quad (\text{IV.15})$$

A modificação introduzida pelo termo  $R^2$  é importante para  $t \ll t_c$  e é desprezível para  $t \gg t_c$ . Portanto, para  $t \ll t_c$ , a solução  $a(t)$  é a solução de Friedmann usual e consequentemente, como veremos adiante, nesta região o campo escalar assu

\* A relação é  $t_c^2 = \frac{1}{6n/c^2}$ , mas estamos considerando  $c = 1$ , e portanto  $[L] = [T]$ .

me um valor constante, proporcional ao inverso de  $G$ , a constante gravitacional. Verificaremos que somente existem soluções não singulares de nossas equações quando tomamos para  $n$  o valor negativo.

#### IV.5 AS EQUAÇÕES PARA UM UNIVERSO FOTÔNICO

Se o conteúdo material do universo é descrito pela equação de estado  $p = \frac{1}{3}\rho$ , então  $\rho(t)a^4(t) = \rho_0 a_0^4 = c^{te}$ , onde  $\rho_0 = \rho(t_0)$  e  $a_0 = a(t_0)$ .  $t_0$  é o valor de  $t$  para o qual  $a(t)$  é mínimo (com  $a_0 > 0$ ). Portanto

$$\rho(t) = \frac{\rho_0 a_0^4}{a^4(t)} \quad (IV.16)$$

Substituindo (IV.6) em (IV.9) e multiplicando ambos os membros desta equação por  $a^4(t)$ , temos

$$8\pi \frac{\rho_0 a_0^4}{\phi} = 3a^2 \dot{a}^2 + wa^4 \frac{\dot{\phi}^2}{2\phi^2} + 3a^3 \dot{a} \frac{\dot{\phi}}{\phi} + 18n \left[ 2a^2 \ddot{a} \dot{a} - 3\dot{a}^4 - a^2 \ddot{a}^2 + 2 \frac{\dot{\phi}}{\phi} (a^2 \ddot{a} + a \dot{a}^3) \right] \quad (IV.17)$$

que juntamente com a equação para o campo escalar

$$2w \left[ \ddot{\phi} - \frac{\dot{\phi}^2}{2\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} \right] + 6\phi \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right] + 36n\phi \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right]^2 = 0 \quad (IV.18)$$

constitue o sistema de equações cujas soluções vamos procurar. Fazendo  $w = 9$  e  $n = -t_c^2/6$  em (IV.17) e (IV.18) e dividindo (IV.17) por 3, o sistema de equações acima toma a forma:

$$8\pi \frac{\rho_0 a_0^4}{3\phi} = a^2 \dot{a}^2 + \frac{3}{2} a^4 \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} + a^3 \dot{a} \frac{\dot{\phi}}{\phi} - t_c^2 \left[ 2a^2 \ddot{a}\ddot{a} + 2a\dot{a}^2 \ddot{a} - \right. \\ \left. - 3\dot{a}^4 - a^2 \ddot{a}^2 + 2 \frac{\dot{\phi}}{\phi} (a^2 \ddot{a}\dot{a} - a\dot{a}^3) \right] \quad (\text{IV.19})$$

e

$$18 \ddot{\phi} - 9 \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} + 54 \dot{a} \frac{\dot{\phi}}{a} + 6\phi \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - 6t_c \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right)^2 \phi = 0 \quad (\text{IV.20})$$

Estas equações podem ser colocadas em uma forma mais simples e mais conveniente para sua integração se realizarmos uma mudança de variável. Definiremos

$$x = \left[ \frac{a(t)}{a_0} \right]^2; \quad \tau = \frac{t - t_0}{t_c} \quad \text{e} \quad \varphi = \frac{\phi}{\phi_F} \quad (\text{IV.21})$$

(deste modo,  $\phi_F = 1$ ) e um novo parâmetro:

$$s^2 = \frac{32\pi}{3} \frac{\rho_0 t_c^2}{\phi_F} \quad (\text{IV.22})$$

Designaremos a derivação em relação a  $\tau$  por uma linha. Nas novas variáveis, as equações (IV.19) e (IV.20) são escritas (ver cálculos no apêndice III):

$$\frac{s^2}{\varphi} = x'^2 + 6x^2 \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} + 2xx' \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{x'^2 x''}{x} + x''^2 - 2x'x'' - \\ - 2x'x'' \frac{\varphi'}{\varphi} \quad (\text{IV.23})$$

e

$$18\varphi'' - 9 \frac{\varphi'^2}{\varphi} + 27 \frac{x'}{x} \varphi' + 3 \frac{x''}{x} \varphi - \frac{3}{2} \left( \frac{x''}{x} \right)^2 \varphi = 0 \quad (\text{IV.24})$$

Para que  $a(t)$  tenha um mínimo em  $t = t_0$ , as condições de contorno apropriadas são:

$$a(t_0) = a_0 > 0 ; \quad \dot{a}(t_0) = 0 \quad \text{e} \quad a''(t_0) = \left[ \frac{8\pi}{3} \frac{\rho_0 a_0^4}{\phi_0} - \frac{3}{2} \frac{\dot{\phi}(t_0)}{\phi(t_0)} a_0^2 \right]^{1/2}$$

Nas novas variáveis definidas por (IV.21), as condições são:

$$x(\tau=0) = 1 ; \quad x'(\tau=0) = 0 \quad \text{e} \quad x''(\tau=0) = \left[ \frac{s^2}{\psi(0)} - 6 \frac{\psi'(0)}{\psi^2(0)} \right]^{1/2}$$

e a solução de Friedmann  $a(t) \sim t^{1/2}$  corresponde a solução:

$$x(\tau) = \frac{s}{\sqrt{\psi}} \tau = s\tau \quad (\text{IV.25})$$

As equações (IV.19) e (IV.20) admitem a solução de Friedmann  $a(t) \sim t^{1/2}$  se e somente se  $\phi = c^{te}$ . É mais simples obter este resultado a partir das equações do modelo escritas na forma dada por (IV.23) e (IV.24). Portanto, demonstraremos que:

*A condição necessária e suficiente para que  $x(\tau) \sim \tau$  seja solução das equações (IV.23) e (IV.24) (com  $n < 0$ ) é que  $\psi = c^{te}$ .*

(i) A condição é necessária: portanto  $\psi = c^{te}$ . Neste caso, as equações (IV.23) e (IV.24) se reduzem respectivamente a

$$\frac{s^2}{\psi} = x'^2 + \frac{x''^2 x'''}{x} - 2x'x'''' + x''^2 \quad (\text{IV.26})$$

e

$$\frac{x'''}{x} - \frac{1}{2} \left( \frac{x'''}{x} \right)^2 = 0 \quad (\text{IV.27})$$

De (IV.27) vemos que podemos ter

$$x''' = 0 \quad (\text{IV.28})$$

ou

$$\frac{x'''}{x} = 2 \quad (\text{IV.29})$$

Se  $x''' = 0$ , da equação (IV.26) temos que

$$\frac{s^2}{\varphi} = x'^2 \quad (\text{IV.30})$$

Ambas as equações (IV.28) e (IV.30) admitem a solução de Friedmann (IV.25).

Derivando (IV.29) temos que

$$x'''' = 2x' \quad (\text{IV.31})$$

Substituindo (IV.29) e (IV.31) em (IV.26), temos

$$\frac{s^2}{\varphi} = -x'^2 + 4x^2$$

Derivando a expressão acima, obtemos

$$x'' = 4x.$$

Portanto, a única solução comum às equações (IV.26) e (IV.27) é a solução de Friedmann (IV.25). A solução  $\varphi = c^{te}$  implica  $x(\tau) = \tau$ .

(ii) A condição é suficiente: portanto  $x(\tau) = s\tau$ . Nes-

te caso,

$$x' = s$$

e

$$x'' = x''' = 0.$$

As equações (IV.23) e (IV.24) se reduzem a:

$$\frac{1}{\varphi} = 1 + 6\tau^2 \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} + 2\tau \frac{\varphi'}{\varphi} \quad (\text{IV.32})$$

e

$$\varphi'' + \frac{1}{2} \frac{\varphi'^2}{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{\varphi'}{\tau} = 0 \quad (\text{IV.33})$$

De (IV.32) temos que

$$\frac{\varphi'^2}{\varphi} = \frac{1}{6} \frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{6} \frac{\varphi}{\tau^2} - \frac{1}{3} \frac{\varphi'}{\tau}$$

Substituindo a expressão acima em (IV.33), obtemos:

$$\varphi'' + \frac{1}{12} \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{12} \frac{\varphi}{\tau^2} + \frac{5}{3} \frac{\varphi'}{\tau} = 0 \quad (\text{IV.34})$$

Vamos substituir em (IV.34) a solução

$$(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \tau^{i+j}$$

Teremos:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[ a_i \left[ (i+j)(i+j-1) + \frac{1}{12} + \frac{5}{3}(i+j) \right] \tau^{i+j} \right] = \frac{1}{12}$$

Desenvolvendo o somatório acima obtemos:

$$a_0 \left[ j(j+1) + \frac{1}{12} + \frac{5}{3}j \right] \tau^j + a_1 \left[ (j+1)j + \frac{1}{12} + \frac{5}{3}(j+1) \right] \tau^{j+1} + \\ + a_2 \left[ (j+2)(j+1) + \frac{1}{12} + \frac{5}{3}(j+2) \right] \tau^{j+2} + \dots = \frac{1}{12}$$

Para satisfazer a igualdade acima, um dos expoentes de  $\tau$  deve ser nulo. Por exemplo, se  $q = 0$ ,  $a_0 = 1$  e todos os  $a_i$ ,  $i \neq 0$  são nulos; se  $q + 1 = 0$ ,  $q = -1$ ,  $a_1 = 1$  e todos os  $a_i$ ,  $i \neq 1$  são nulos; e assim por diante. Portanto, a única solução que satisfaz a equação (IV.34) é  $\varphi = c^{te} = \varphi_F = 1$ .

Vale a pena observar que no modelo puramente tensorial das flutuações do vazio, desenvolvido por Ruzmaikina et al.<sup>19</sup> e Nariai<sup>20</sup>,  $a(t)$  deve satisfazer somente a equação (IV.9) (com  $\phi = c^{te}$ ) que certamente admite outras soluções além de  $a(t) = t^{1/2}$ . Portanto o resultado que demonstramos acima não se aplica a aqueles modelos, embora eles sejam casos particulares do nosso (na verdade, a Lagrangiana (IV.2) recai na Lagrangiana (III.7), com  $\beta = 0$ , se fazemos  $\phi = c^{te} = \frac{1}{G}$ ).

Retomando as equações (IV.23) e (IV.24), vamos deslocar a origem dos tempos e tomar agora  $\tau = t/t_c$ . Definindo

$$y = xy_0 \quad \text{e} \quad h^2 = s^2 y_0^2$$

obtemos as equações de movimento na forma em que serão integradas:

$$\frac{h^2}{\varphi} = y'^2 + 6y^2 \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} + 2yy' \frac{\varphi'}{\varphi} + y' \frac{2y''}{y} - 2y'y'' + \\ + y''^2 - 2y'y''' \frac{\varphi'}{\varphi} \quad (\text{IV.36})$$

e

$$\varphi'' - \frac{1}{2} \frac{\varphi'^2}{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{y'}{y} \varphi' + \frac{1}{6} \frac{y''}{y} \varphi - \frac{1}{12} \left( \frac{y''}{y} \right)^2 \varphi = 0 \quad (\text{IV.37})$$

As condições em  $\tau_0 = t_0/t_c$  serão:

$$y(\tau_0) = y_0 ; \quad y'(\tau_0) = 0 \quad \text{e} \quad y''(\tau_0) = \left[ \frac{h^2}{\varphi_0} - 6y_0^2 \frac{\varphi_0'^2}{\varphi_0^2} \right]^{1/2} \quad (\text{IV.38})$$

onde  $\varphi_0 = \varphi(\tau_0)$  e  $\varphi_0' = \varphi'(\tau_0)$  e a solução (IV.25) corresponde

$$y(\tau) = h\tau \quad . \quad (\text{IV.39})$$

Devemos procurar quais as condições adequadas para o campo escalar em  $\tau_0$ . Vamos expandir  $\varphi(\tau)$  em série em torno de  $\tau = \tau_0$ :

$$\varphi(\tau) = \varphi_0 + \varphi_1(\tau - \tau_0) + \frac{1}{2} \varphi_2(\tau - \tau_0)^2 + \dots \quad (\text{IV.40})$$

$$\text{onde } \varphi_1 = \varphi_0' \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \left. \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} \right|_{\tau=\tau_0} .$$

Vamos substituir (IV.40) em (IV.36) e (IV.37). Fazendo  $\tau = \tau_0$  e usando as condições (IV.38), da equação (IV.36) resulta que:

$$\frac{h^2}{\varphi_0} = 6y_0^2 \frac{\varphi_1^2}{\varphi_0^2} + \frac{h^2}{\varphi_0} - 6y_0^2 \frac{\varphi_1^2}{\varphi_0^2} \quad (\text{IV.41})$$

A relação (IV.41) é uma identidade e portanto fica satisfeita para qualquer valor de  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$ .

De (IV.37), temos:

$$\varphi_2 - \frac{1}{2} \frac{\varphi_1^2}{\varphi_0} + \frac{1}{6} \varphi_0 \left[ \frac{h^2}{\varphi_0} - 6y_0^2 \frac{\varphi_1^2}{\varphi_0^2} \right]^{1/2} - \frac{1}{12} \frac{\varphi_0}{y_0^2} \left[ \frac{h^2}{\varphi_0} - 6y_0^2 \frac{\varphi_1^2}{\varphi_0^2} \right] = 0$$

ou ainda

$$\varphi_2 - \frac{1}{12} \frac{h^2}{y_0^2} = - \frac{1}{6} \frac{\varphi_0}{y_0} \left[ \frac{h^2}{\varphi_0} - 6y_0^2 \frac{\varphi_1^2}{\varphi_0^2} \right]^{1/2} \quad (\text{IV.42})$$

Elevando a expressão (IV.42) ao quadrado, temos:

$$\varphi_2^2 - \frac{1}{6} \varphi_2 \frac{h^2}{y_0^2} + \frac{1}{144} \frac{h^4}{y_0^4} - \frac{1}{36} \frac{h^2}{y_0^2} \varphi_2 + \varphi_1^2 = 0$$

e as raízes  $\varphi_2$  são:

$$\varphi_2 = \frac{1}{12} \frac{h^2}{y_0^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{9} \frac{h^2}{y_0^2} \varphi_0 - 4\varphi_1^2} \quad (\text{IV.43})$$

Vamos da expressão (IV.43) que  $\varphi_0$  é necessariamente positivo: em caso contrário, a expressão no radical seria negativa. Pelo mesmo motivo,

$$0 \leq \varphi_1^2 \leq \frac{1}{36} \frac{h^2}{y_0^2} \varphi_0.$$

Se  $\varphi_1$  for nulo, haverá um mínimo ou um máximo de  $\varphi(\tau)$  em  $\tau_0$ , conforme  $\frac{h}{2y_0} \pm \sqrt{\varphi_0}$  for positivo ou negativo; como  $h$  e  $y_0$  são positivos,  $\varphi_2$  será negativo somente quando tomarmos a solução  $\frac{h}{2y_0} - \sqrt{\varphi_0}$  e  $\sqrt{\varphi_0} > \frac{h}{2y_0}$ .

Resumindo a análise feita cima, somente podemos afirmar que as condições de contorno sobre  $\varphi(\tau)$  devem satisfazer a:

$$\varphi(\tau_0) = \varphi_0 > 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq \varphi'(\tau_0) \leq \frac{1}{36} \frac{h^2}{y_0^2} \varphi_0 \quad (\text{IV.44})$$

Para  $n = +t_c^2/6$ , as equações, nas variáveis  $y$  e  $\varphi$ , são:

$$\frac{h^2}{\varphi} = y'^2 + 6y \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} + 2yy' \frac{\varphi'}{\varphi} - y' \frac{2y''}{y} + 2y'y'' + y''^2 + 2y'y'' \frac{\varphi'}{\varphi} \quad (\text{IV.36'})$$

e

$$\varphi'' = \frac{1}{2} \frac{\varphi'^2}{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{y'}{y} \varphi' + \frac{1}{6} \frac{y''}{y} \varphi + \frac{1}{12} \left( \frac{y''}{y} \right)^2 \varphi = 0 \quad (\text{IV.37'})$$

#### IV. 6 SOLUÇÕES ASSINTÓTICAS

As soluções  $y(\tau)$  e  $\varphi(\tau)$  que procuramos para as equações (IV.36) e (IV.37) devem ter os limites

$$y(\tau) \approx h\tau \quad \text{e} \quad \varphi(\tau) \approx \varphi_F = 1 \quad (\text{IV.45})$$

para  $\tau \rightarrow \infty$ . Podemos representar estas soluções assintóticas por:

$$y(\tau) = h\tau(1 + \varepsilon f(\tau)) \quad (\text{IV.46})$$

$$\varphi(\tau) = 1 + \delta g(\tau) \quad (\text{IV.47})$$

onde  $\varepsilon$  e  $\delta$  são parâmetros que medem o quanto as soluções se desviam das soluções de Friedmann (IV.45) e são tais que

$$\begin{aligned} |\varepsilon f|^2 &\ll 1 \\ |\delta g|^2 &\ll 1 \end{aligned} \quad (\text{IV.48})$$

Além disto,  $f(\tau)$  e  $g(\tau) \rightarrow 0$  quando  $\tau \rightarrow \infty$ .

Substituindo (IV.46) e (IV.47) em (IV.30) e (IV.37) e usando a aproximação (IV.48), obtemos as equações a que  $f(\tau)$  e

$g(\tau)$  devem satisfazer (ver apêndice IV):

$$f'''' + \frac{5}{2} \frac{f'''}{\tau} - \frac{f'}{\tau^2} - f - 2 \frac{f}{\tau} = \frac{\delta}{\varepsilon} g' \quad (\text{IV.49})$$

e

$$g'' + \frac{3}{2} \frac{g'}{\tau} = - \frac{\varepsilon}{6\delta} (f'' + \frac{f'}{\tau}) \quad (\text{IV.50})$$

As funções  $f(\tau)$  e  $g(\tau)$  devem ser tais que suas derivadas de qualquer ordem tendam para zero assintoticamente, ou seja, devemos ter:

$$\begin{aligned} f^{(n)} &\rightarrow 0, \text{ quando } \tau \rightarrow \infty \\ g^{(n)} &\rightarrow 0, \text{ quando } \tau \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (\text{IV.51})$$

As equações (IV.49) e (IV.50) podem ser colocadas numa forma mais apropriada para a obtenção de suas soluções assintóticas. Definindo

$$Y = (\tau f)' \quad \text{e} \quad X = \tau^{3/2} g'$$

e substituindo estas novas variáveis em (IV.49) e (IV.50) temos:

$$Y'' - \frac{Y'}{2\tau} - Y = - \frac{X}{\tau^{1/2}} \quad (\text{IV.52})$$

e

$$X = - \frac{1}{6} \frac{\varepsilon}{\delta} \tau^{1/2} Y' \quad (\text{IV.53})$$

Substituindo (IV.53) em (IV.52) após derivá-la novamente, obtemos a equação para  $Y(\tau)$ :

$$Y'''' + \frac{1}{4} \frac{Y'''}{\tau} - \frac{5}{6} Y' - \frac{Y}{2\tau} = 0$$

que reescrevemos em termos de  $f(\tau)$ :

$$f'''' + 4 \frac{f''''}{\tau} + \frac{f'''}{4\tau^2} - \frac{5}{6} f'' - \frac{1}{2} \frac{f'}{\tau^3} - \frac{f}{2\tau^2} - \frac{13}{6} \frac{f'}{\tau} = 0$$

De acordo com (IV.51), assintoticamente podemos desprezar os termos proporcionais a  $\tau^{-1}$ ,  $\tau^{-2}$  e  $\tau^{-3}$ . Finalmente, para  $\tau \rightarrow \infty$   $f(\tau)$  deve satisfazer a:

$$f'''' - \frac{5}{6} f'' = 0 \quad (\text{IV.54})$$

Esta equação admite quatro raízes:

$$r_1 = r_2 = 0 \quad \text{e} \quad r_3 = \sqrt{\frac{5}{6}} \quad ; \quad r_4 = -\sqrt{\frac{5}{6}}$$

A solução geral de (IV.54) é:

$$f(\tau) = A + B + C \exp(\sqrt{\frac{5}{6}}\tau) + D \exp(-\sqrt{\frac{5}{6}}\tau)$$

onde A, B, C e D são constantes. Para satisfazer a condição  $f(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , tomamos  $A=B=C=0$  e a solução particular que nos interessa é:

$$f(\tau) = D \exp(-\sqrt{\frac{5}{6}}\tau) \quad (\text{IV.55})$$

Obtemos a equação assintótica para  $g(\tau)$  desprezando os termos proporcionais a  $\tau^{-1}$  e  $\tau^{-2}$  na equação (IV.49):

$$f'''' - f = \frac{\delta}{\epsilon} g' \quad (\text{IV.56})$$

Substituindo (IV.55) em (IV.56) e integrando esta equação, obtemos:

$$g(\tau) = -\frac{\epsilon}{6\delta} \exp(-\sqrt{\frac{5}{6}}\tau) \quad (\text{IV.57})$$

As soluções  $y(\tau)$  que procuramos devem ter um mínimo positivo em  $\tau = \tau_0$ . Portanto, podemos expandir  $y(\tau)$  em torno deste ponto:

$$y(\tau) = y_0 + \frac{1}{2} y_0''(\tau - \tau_0)^2 + \frac{1}{6} y_0'''(\tau - \tau_0)^3 + \dots$$

Para as soluções  $\varphi(\tau)$ , próximo a  $\tau = \tau_0$  vale a expansão (IV.40).

#### IV:7 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES

Realizamos a integração numérica das equações (IV.36) e (IV.37) utilizando um programa Fortran (método Lunge-Kutta - Gill), conforme apêndice V. As integrações foram realizadas a partir de  $\tau_i = 10$ , no sentido decrescente de  $\tau$ , com  $f(\tau_i) = -10^{-4}$  e para diferentes conjuntos de valores de  $\epsilon, \delta$  e  $h$ , arbitrariamente escolhidos. Os valores de  $f'(\tau_i)$ ,  $f''(\tau_i)$ ,  $g(\tau_i)$  e  $g'(\tau_i)$  foram calculados fazendo  $f(\tau_i) = -10^{-4}$  nas equações (IV.55), (IV.57) e suas derivadas. Os valores iniciais de  $y(\tau)$  e  $\varphi(\tau)$  foram determinados através das soluções assintóticas (IV.46) e (IV.47).

Para  $f(\tau_i) = -10^{-4}$ , temos:

$$f'(\tau_i) = 9,1287 \times 10^{-5}$$

$$f''(\tau_i) = -8,33333\dots \times 10^{-5}$$

Se tomamos  $\epsilon = \delta$ , temos que  $g = \frac{1}{6} f$  e  $g' = -\frac{1}{6} f'$ . Portanto:

$$g(\tau_i) = 1,6666\dots \times 10^{-5}$$

$$g'(\tau_i) = -1,152145 \times 10^{-5}$$

(IV.60)

Os valores de  $\varphi(\tau_i)$  e  $\varphi'(\tau_i)$  independem do sinal de  $\tau$ . Se tomarmos  $\delta = -\epsilon$ , obteremos:

$$g(\tau_i) = -1,6666\dots \times 10^{-5}$$

e

$$g'(\tau_i) = 1,152145 \times 10^{-5}$$

Se calcularmos  $\varphi(\tau_i)$  e  $\varphi'(\tau_i)$  com (IV.60), obteremos:

$$\begin{aligned}(\tau_i) &= 1 + 1,6666\dots \times 10^{-5} \delta \\(\tau_i) &= - 1,152145 \times 10^{-5} \delta ;\end{aligned}$$

se calcularmos com os valores (IV.61), o resultado será:

$$\begin{aligned}(\tau_i) &= 1 + (-) 1,6666\dots \times 10^{-5} (-) \delta \\(\tau_i) &= 1,152145 \times 10^{-5} (-) \delta .\end{aligned}$$

Na tabela 2, mostramos os resultados para os casos em que  $\epsilon < 0$  e  $\delta = \epsilon$ . Para o parâmetro  $\epsilon$  negativo todas as soluções obtidas são não singulares. Por outro lado, para  $\epsilon$  positivo e  $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$  e os mesmos valores de  $h$  da tabela 2, as soluções são todas singulares.

Para  $n > 0$  (equações (IV.36') e (IV.37')), todas as soluções encontradas, independentemente dos valores e sinais de  $\epsilon$  e  $\delta$ , são singulares.

Considerando a imprecisão devida ao uso de um método numérico para integrar nossas equações, uma simples inspeção da tabela 2 nos mostra que soluções com mesmos valores de  $\epsilon$  e  $\delta$  e diferentes valores de  $h$  são proporcionais, ou seja,

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{y_{01}}{y_{02}} \quad (\text{IV.62})$$

Como  $\varphi$  não depende de  $h$ , os valores de  $\varphi_0$  são os mesmos. Também o valor de  $s$  é o mesmo, em consequência da relação de proporcionalidade (IV.62):

$$\frac{h_1}{y_{01}} = \frac{h_2}{y_{02}} \quad \text{e} \quad s_1 = s_2 \quad .$$

Por outro lado, as soluções com mesmos valores de  $\epsilon$  e  $\delta$  e diferentes valores de  $h$  são a mesma solução para o campo escalar e as soluções correspondentes para  $y(\tau)$  podem ser obtidas uma da outra por um deslocamento da origem. Não se poderia esperar resultado diferente uma vez que  $h$  é simplesmente a constante da solução de Friedmann,  $y(\tau) = h\tau$  .

Na figura 1, apresentamos o gráfico da solução  $y(\tau)$  obtida para  $h = 5$  e  $\epsilon = \delta = -1$  e o gráfico da solução  $a(\tau)/a_0$  correspondente.

#### IV.8 A CONSTANTE GRAVITACIONAL

As equações do modelo aqui proposto para descrever a gravitação admitem soluções cosmológicas de tipo Friedmann, não singulares. No entanto, o resultado mais importante deste trabalho está relacionado com as soluções obtidas para o campo escalar.

O campo escalar  $\varphi(\tau)$  é proporcional ao inverso da constante gravitacional  $G$  e portanto a cada solução  $\varphi(\tau)$  obtida corresponde uma solução  $G(\tau)$ . Verificamos que para as soluções que obtivemos, as  $G(\tau)$  podem ser (bastante precisamente) descritas por expressões do tipo:

$$G = G_{\max} \exp\left(-\frac{\tau^2}{b^2}\right) + \theta(\tau) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau^2}{d^2}\right) \right] \quad (\text{IV.63})$$

onde  $\theta(\tau)$  é a função de Heaviside, definida por

$$\theta(\tau) = 0, \tau < 0 \quad \text{e} \quad \theta(\tau) = 1, \tau \geq 0 \quad ,$$

e b e d são constantes que caracterizam as diferentes soluções para os diferentes valores dos parâmetros arbitrários da teoria,  $\epsilon$  e  $\delta$ . Na figura 2, apresentamos o gráfico da  $\psi(\tau)$  e  $G(\tau)$  para  $\epsilon = \delta = -1$ . Para esta particular solução,  $b \cong d \cong 3,6$ .

O fato de termos obtido para as soluções de nossas equações, integradas por meio de métodos numéricos, expressões analíticas extremamente simples (e também bastante comuns em Física) é um resultado interessante. Ademais, a expressão (IV.63) é bastante sugestiva: a dependência cósmica de  $G(\tau)$  obedece a uma lei Gaussiana a qual se superpõe, em  $t = 0$ , a função

$$1 - \exp\left(-\frac{\tau^2}{d^2}\right)$$

Esta função cresce durante um certo intervalo e tende para o valor 1, o que nos sugere que ela possa estar associada a uma espécie de efeito de saturação. Obviamente, não temos nas condições atuais, dados suficientes para tentar uma interpretação deste resultado ou uma explicação para o aparecimento deste efeito. Poderíamos, no entanto, fazer algumas observações de caráter especulativo. Aparentemente, a eliminação da singularidade pelo método aqui desenvolvido traz consigo o aparecimento de um efeito novo. Isto se constitui num resultado positi-

vo, pois não há, em princípio, nenhum motivo para que o efeito de saturação na constante gravitacional não possa ser analisado à luz das leis físicas conhecidas. O mesmo não ocorre nas vizinhanças da região singular (como foi bastante discutido nos capítulos anteriores). Na conclusão deste trabalho, discutiremos algumas questões que o resultado obtido nos sugere.

## CONCLUSÃO

A singularidade que aparece nas soluções cosmológicas de Friedmann implica na existência de um momento na história do universo em que a densidade de matéria tende para infinito. Nas vizinhanças desta região as leis físicas conhecidas têm de ser abandonadas, o que impossibilita o estudo dos processos que aí ocorrerem. No entanto, se desejarmos alcançar a compreensão das origens do universo, devemos investigar os instantes iniciais da sua atual fase de expansão. Ao impasse que a existência da região singular coloca, oferecem-se duas opções de solução: ou a singularidade é evitável ou novas leis físicas, capazes de descrever adequadamente os mecanismos que governam o comportamento do universo próximo à região singular devem ser procuradas.

Na verdade, a decisão entre as duas opções colocadas acima é uma questão experimental. A escolha da segunda alternativa implicaria em todo um projeto de reformulação da Física para o qual não possuímos hoje nenhum suporte observacional. A radiação isotrópica de background é a única informação que se possui sobre os instantes iniciais da atual fase de expansão do universo. Ela sugere que o universo tenha passado por um estágio extremamente quente e denso (não necessariamente  $T \rightarrow \infty$  e  $\rho \rightarrow \infty$ ), em que a densidade de radiação, em equilíbrio térmico, supera a densidade de matéria. A singularidade das soluções de Friedmann é uma representação possível deste estágio, mas certamente não a única. Um modelo não singular pode igualmente descrever uma fase extremamente quente e densa do universo. Lembramos, no entanto, que

os modelos de Friedmann descrevem corretamente as características atuais do universo.

Assim, em completo acordo com as evidências observacionais, nos propusemos neste trabalho a obter soluções cosmológicas não singulares, assintoticamente de tipo Friedmann. O modelo escalar tensorial da gravitação, modificado pelas flutuações do campo gravitacional no vazio, mostrou admitir tais soluções, confirmando a não inevitabilidade da singularidade nos modelos expansionistas do universo. As soluções não singulares obtidas correspondem soluções para o campo escalar e conseqüentemente, soluções para  $G(t)$ . Embora as equações tenham sido integradas através de um método numérico, foi possível relacionar as soluções  $G(t)$  a expressões analíticas extremamente simples.

Ao analisar os resultados obtidos neste trabalho, devemos antes de mais nada, salientar a extrema simplicidade e beleza da expressão obtida para  $G$ . Esta função apresenta um comportamento gaussiano para  $t < 0$ . A partir de  $t = 0$  a este comportamento se soma uma função que satura no valor atual de  $G$ . Ademais, ao comportamento quase gaussiano da constante gravitacional em torno de  $t = 0$  corresponde a passagem de  $a(t)$  por seu valor mínimo, e ao aparecimento do efeito de saturação corresponde a estabilização do universo numa fase que vem a ser corretamente representada pela solução de Friedmann.

Estes resultados, a saber, a forma de  $G(t)$  e a correlação entre seu comportamento e o comportamento de  $a(t)$ , são altamente sugestivos. Aparentemente, em  $t = 0$ , ocorre algum processo

que altera o comportamento gaussiano desta função e causa um efeito de saturação ( $G \rightarrow G_F$ ). O fato de que  $a(t)$  passa por seu valor mínimo enquanto inicia a saturação em  $G$  sugere que a singularidade tenha sido *substituída* pelo aparecimento de tal processo. Sendo a eliminação da singularidade uma tentativa de estender a validade das leis da Física além dos instantes iniciais do universo, acreditamos que nosso resultado abre um caminho para a realização de tal projeto, pois não há motivo para que o comportamento da constante gravitacional em torno de  $t = 0$  não possa ser explicado dentro do contexto da Física conhecida.

A busca da compreensão da natureza e origem do processo que causa o efeito de saturação na constante gravitacional na solução obtida neste trabalho é uma primeira questão sugerida por nossos resultados. O efeito de saturação aparece em outras situações na Física, e existem modelos para explicá-lo. No entanto, consideramos que qualquer tentativa de extrapolar um destes modelos para o comportamento de  $G$  nos levaria ao terreno da especulação, uma vez que, como já observamos, os dados observacionais que se possui sobre os primeiros estágios do universo em sua atual fase de expansão não fornecem base suficiente para tal projeto. Deixamos aberto um caminho para investigações futuras, que se seguido poderá resultar em contribuições na busca da compreensão das origens do cosmos.

TABELA 1: SOLUÇÕES DE FRIEDMANN EM FORMA PARAMÉTRICA

$\lambda$	$\kappa$	$a(\eta)$	$t(\eta)$
$\frac{1}{3}$	1	$\text{sen } \eta$	$1 - \text{cos } \eta$
	0	$\eta$	$\frac{1}{2} \eta^2$
	-1	$\text{senh } \eta$	$\text{cosh } \eta - 1$
0	1	$1 - \text{cos } \eta$	$\eta - \text{sen } \eta$
	0	$\frac{1}{2} \eta^2$	$\frac{1}{6} \eta^3$
	-1	$\text{cosh } \eta - 1$	$\text{senh } \eta - \eta$

TABELA 2

h	$\epsilon$	$\delta$	$z_0$	$\tau_0$	$\psi_0$	f
5	-0,5	-0,5	11,3	1,1	0,93	0,44
5	-1	-1	15,3	1,9	0,94	0,32
5	-2	-2	19,6	2,8	0,96	0,25
5	-5	-5	24,4	3,8	0,96	0,20
5	-10	-10	28,4	4,6	0,97	0,18
5	-20	-20	32,6	5,4	0,97	0,15
0,1	-0,5	-0,5	0,2	1,2	0,93	0,43
0,1	-10	-10	0,6	4,6	0,97	0,17
10	-0,5	-0,5	24,3	1,3	0,93	0,41
10	-2	-2	38,4	2,7	0,96	0,26

## LEGENDAS PARA AS FIGURAS

Figura 1: Soluções para  $h = 5$ ,  $\epsilon = -1$  e  $\delta = \pm 1$ .

- (a) Gráfico de  $y(\tau)$
- (b) Gráfico de  $a(\tau)/a_0$ , onde  $a_0$  é o valor mínimo de  $a(\tau)$ .

Figura 2: Soluções para  $h = 5$  e  $\epsilon = -1$  e  $\delta = \pm 1$ .

- (a) Gráfico de  $\psi(\tau)$
- (b) Gráfico de  $G(\tau)/G_F$ , onde  $G_F$  é o valor atual da constante gravitacional. A curva em linha cheia é a solução obtida. Para  $\tau \geq 0$ , ela corresponde à soma das duas curvas em linha tracejada.

FIGURA 1

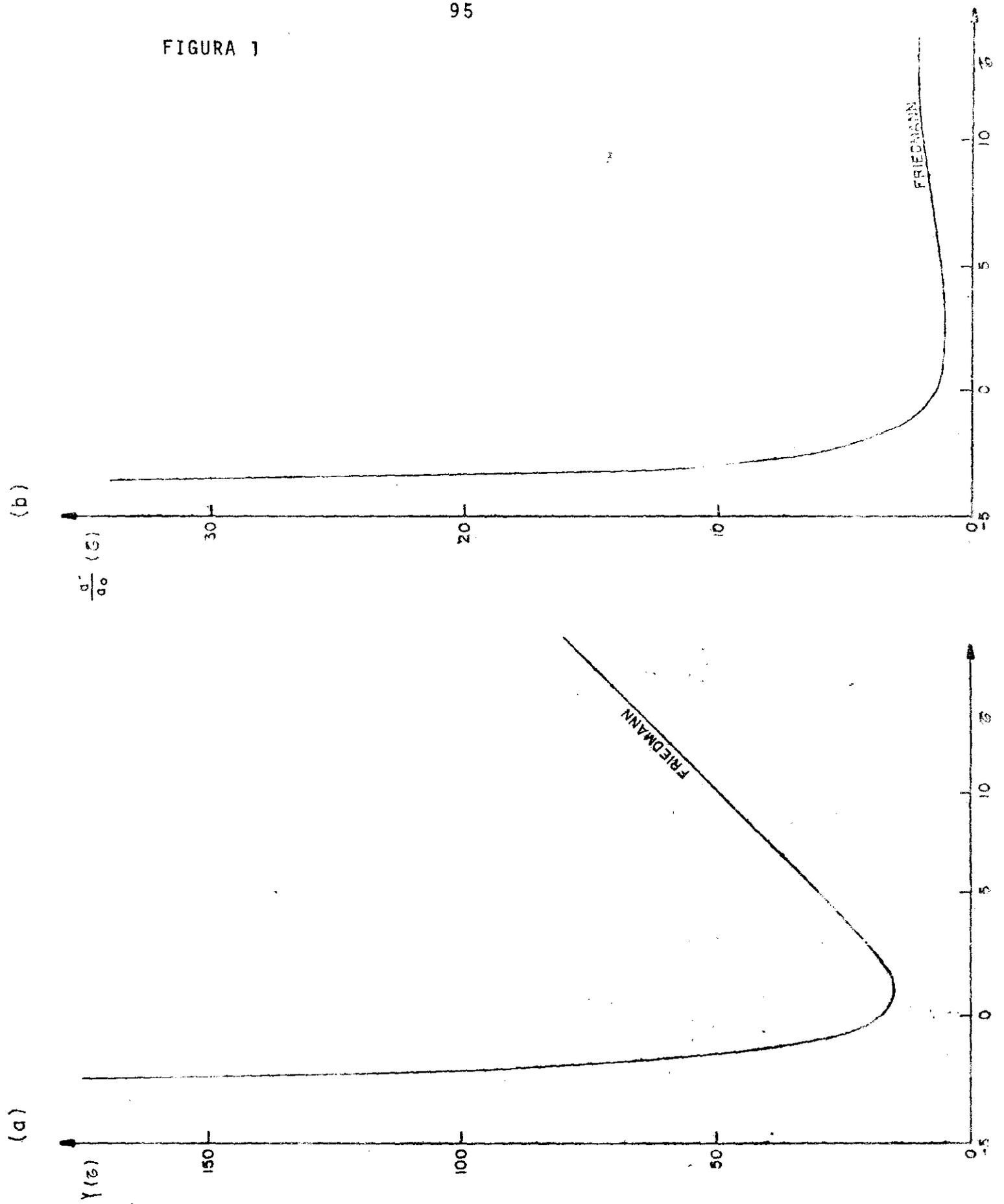
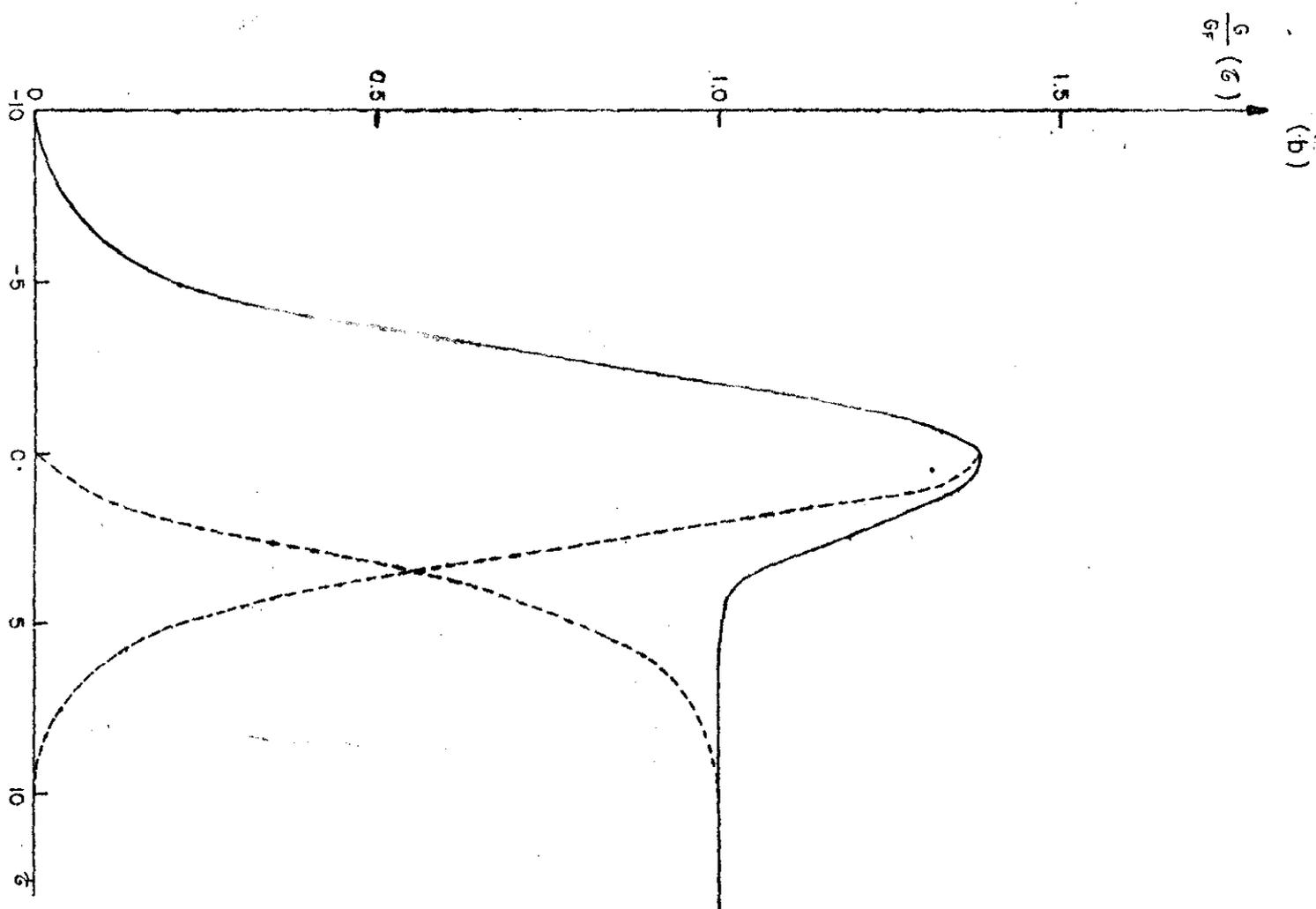
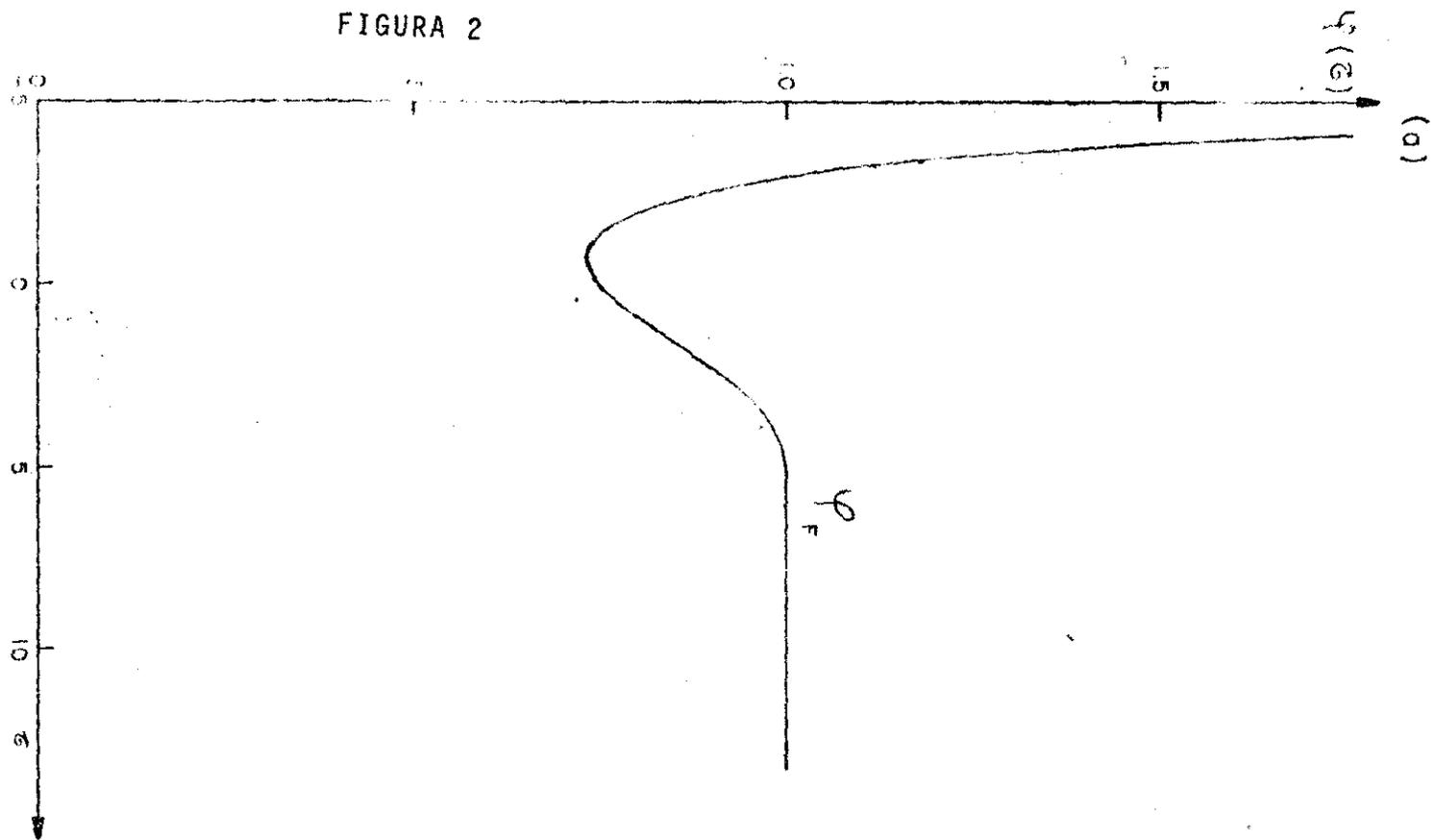


FIGURA 2



## APÊNDICE I

DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES (IV.4), (IV.7) e (IV.9)

As equações (IV.4) são obtidas da Lagrangiana (IV.2), a partir de um princípio variacional. A variação de (IV.2) em relação a  $g_{\mu\nu}$  e suas derivadas se escreve:

$$L = \delta\sqrt{-g} \left[ \phi(R + nR^2) - w \frac{\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}}{\phi} g^{\alpha\beta} + \gamma L_m \right] +$$

$$+ \sqrt{-g} \left[ \phi(1 + 2nR) \delta R - w \frac{\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}}{\phi} g^{\alpha\beta} \right]$$

Faremos uso das seguintes igualdades (24):

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{A.1})$$

$$\delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\mu} g^{\nu\beta} \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{A.2})$$

$$\delta R = -R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$$

$$g^{\mu\nu} g^{\sigma\tau} (\delta g_{\mu\nu;\sigma;\tau} - \delta g_{\mu\sigma;\nu;\tau}) =$$

$$- R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{A.3})$$

Substituindo em  $\delta L$  as expressões (A.1), (A.2) e (A.3), teremos:

$$\delta L = \frac{1}{2} L g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \sqrt{-g} \phi (1 + 2nR) (-R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} +$$

$$+ g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (\delta g_{\mu\nu,\alpha,\beta} - \delta g_{\mu\alpha,\nu,\beta})) + w \frac{\phi^{,\mu} \phi^{,\nu}}{\phi} \delta g_{\mu\nu}$$

A condição de extremo do princípio variacional é:

$$\delta \int L d^4x = \int \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \left[ \phi (R + nR^2) - w \frac{\phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}}{\phi} g^{\alpha\beta} \right] g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \right.$$

$$+ \gamma T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} - \phi (1 + 2nR) R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} +$$

$$+ \phi (1 + 2nR) g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} (\delta g_{\mu\nu,\alpha,\beta} - \delta g_{\mu\alpha,\nu,\beta}) +$$

$$\left. + w \phi^{,\mu} \phi^{,\nu} \delta g_{\mu\nu} \right] d^4x$$

$$= 0$$

onde usamos a definição do tensor energia-momentum (I.2). Vamos integrar separadamente o termo

$$\int \sqrt{-g} \phi (1 + 2nR) g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} (\delta g_{\mu\nu,\alpha,\beta} - \delta g_{\mu\alpha,\nu,\beta}) d^4x$$

Lembramos que a variação de  $g_{\mu\nu}$  é nula na hipersuperfície que contorna o 4-volume de integração e que  $g^{\mu\nu}_{;\alpha} = 0$ . Integrando por partes, obtemos:

$$\int \sqrt{-g} \phi (1 + 2nR) g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (\delta g_{\mu\nu;\alpha;\beta} - \delta g_{\mu\alpha;\nu;\beta}) d^4x =$$

$$= \int \sqrt{-g} \phi (1 + 2nR) g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} (\delta g_{\mu\nu;\alpha} - \delta g_{\mu\alpha;\nu})_{;\beta} d^4x +$$

$$- \int \sqrt{-g} \left[ \phi (1 + 2nR) \right]_{;\beta} (\delta g_{\mu\nu;\alpha} - \delta g_{\mu\alpha;\nu}) g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} d^4x$$

O primeiro termo é uma divergência total e se anula devido às condições de contorno sobre  $\delta g_{\mu\nu}$ . Integrando por partes novamente, temos:

$$\int \sqrt{-g} \phi (1 + 2nR) g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} (\delta g_{\mu\nu;\alpha;\beta} - \delta g_{\mu\alpha;\nu\beta}) d^4x =$$

$$- \int \sqrt{-g} \left\{ \phi (1 + 2nR)_{;\beta;\alpha} - \left[ \phi (1 + 2nR) \right]_{;\beta;\nu} \right\} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} d^4x =$$

$$- \int \sqrt{-g} \left\{ \phi g^{\mu\nu} + 2n (\phi R) g^{\mu\nu} - \phi_{;\mu;\nu} - 2n(\phi R)_{;\mu;\nu} \right\} \delta g_{\mu\nu} d^4x$$

Então:

$$\delta \int L d^4x = \int \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \phi (R + nR) - w \frac{\phi_{;\alpha} \phi^{;\alpha}}{\phi} \right] g^{\mu\nu} + \gamma T^{\mu\nu} - \right.$$

$$- \phi (1 + 2nR) R^{\mu\nu} + w \frac{\phi_{;\mu} \phi_{;\nu}}{\phi} - \square \phi g^{\mu\nu} - 2n \square (\phi R) g^{\mu\nu} +$$

$$\left. + \phi_{;\mu;\nu} + 2n(\phi R)_{;\mu;\nu} \right\} \delta g_{\mu\nu} d^4x$$

$$= 0$$

Como as variações  $\delta g_{\mu\nu}$  são arbitrárias, o integrando é nulo. Lembrando que

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = G^{\mu\nu}$$

obtemos finalmente a equação (IV.4).

A métrica de Robertson-Walker tem componentes

$$g_{00} = 1; g_{11} = g_{22} = g_{33} = -a^2(t) \quad \text{e} \quad g_{\mu\nu} = 0, \mu \neq \nu; \quad (\text{A.4})$$

de  $g_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} = \delta_{\nu}^{\alpha}$ , calcula-se

$$g^{00} = 1; g^{11} = g^{22} = g^{33} = -\frac{1}{a^2(t)}. \quad (\text{A.5})$$

As únicas componentes não nulas das afinidades construídas com (A.4) e (A.5) são:

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a} \quad (\text{A.6})$$

$$\Gamma_{11}^0 = \Gamma_{22}^0 = \Gamma_{33}^0 = a\dot{a} \quad (\text{A.7})$$

O campo escalar  $\bar{\phi}$  é função somente do tempo; portanto:

$$\begin{aligned} \phi_{,\alpha;\beta} g^{\alpha\beta} &= \phi_{,\alpha;\beta} g^{\alpha\beta} - \phi_{,\rho} \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} g^{\alpha\beta} \\ &= \phi_{,0,0} - \phi_{,0} - \frac{1}{a^2} \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{33}^0 \\ &= \phi_{,0,0} + 3\phi_{,0} \frac{\dot{a}}{a} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\phi_{,0;0} = \phi_{,0,0} + \phi_{,0} \Gamma_{0\alpha}^{\mu} g^{\alpha 0} = \phi_{,0,0} \quad (\text{A.9})$$

$$\text{Mas, } \phi_{,0}^{\cdot 0} = \phi_{,0} = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}.$$

Por definição, o tensor de Ricci  $\bar{e}$ :

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\rho,\nu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu,\rho}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}$$

Portanto, sã são não nulas as componentes

$$\begin{aligned} R_{00} &= \Gamma_{0\rho,0}^{\rho} + \Gamma_{\sigma 0}^{\rho} \Gamma_{0\rho}^{\sigma} \\ &= 3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} R_{11} = R_{22} = R_{33} &= \Gamma_{11,\rho}^{\rho} - \Gamma_{11}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} + \Gamma_{\sigma 1}^{\rho} \Gamma_{1\rho}^{\sigma} \\ &= -2\dot{a}^2 - a\ddot{a} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

A curvatura escalar  $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$   $\bar{e}$ :

$$\begin{aligned} R &= R_{00} - a^2(R_{11} + R_{22} + R_{33}) \\ &= \frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Logo:

$$R = \frac{36}{a^4}(a^2\ddot{a}^2 + \dot{a}^4 + 2a\ddot{a}\dot{a}^2) \quad (\text{A.13})$$

Derivando (A.12), obtemos:

$$\dot{R} = 6 \frac{\ddot{a}'}{a} + \frac{\dot{a}\ddot{a}'}{a^2} - 12 \frac{\dot{a}^3}{a^3} \quad (\text{A.14})$$

Temos ainda que:

$$R^{00} = R_{00} \quad \text{e} \quad R^{11} = R^{22} = R^{33} = -2 \frac{\dot{a}^2}{a^4} - \frac{\ddot{a}}{a^3}$$

De (A.8) e (A.9), vemos que

$$\square(\phi R) = \frac{d^2}{dt^2}(\phi R) + 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{d}{dt}(\phi R)$$

e

$$(\phi R)^{,0;0} = \frac{d^2}{dt^2}(\phi R)$$

A componente  $\mu = \nu = 0$  de (IV.4)  $\bar{e}$ :

$$\begin{aligned} G^{00} = & 8\pi \frac{\rho(t)}{\phi} + 2n \left[ \frac{1}{4} R^2 g^{00} - R R^{00} + \frac{1}{\phi} \frac{d^2}{dt^2}(\phi R) g^{00} + \right. \\ & \left. + 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{1}{\phi} \frac{d}{dt}(\phi R) g^{00} - \frac{1}{\phi} \frac{d^2}{dt^2}(\phi R) \right] + w \frac{1}{\phi^2} \left[ \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 g^{00} \right] + \\ & + \frac{1}{\phi} \left[ \dot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} - \ddot{\phi} \right] \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} G^{00} = & 8\pi \frac{\rho(t)}{\phi} + 2n \left[ \frac{1}{4} R^2 - R R^{00} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} R + 3 \frac{\dot{a}}{a} R + \right. \\ & \left. + w \frac{1}{2\phi^2} \dot{\phi}^2 + 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right] \quad (A.15) \end{aligned}$$

Substituindo em (A.15) as expressões (A.10), (A.12), (A.13) e (A.14), temos, finalmente:

$$8\pi \frac{\rho}{\phi} = 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + w \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2\phi^2} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\phi}}{\phi} + 18n \left[ 2 \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} + 2 \frac{\dot{a}^2\ddot{a}}{a^3} - 3 \frac{\dot{a}^4}{a^4} - \frac{\ddot{a}^2}{a^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\dot{\phi}}{\phi} \left( \frac{\dot{a}^3}{a^3} + \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} \right) \right] \quad (\text{IV.9})$$

A equação (IV.3) é:

$$R + nR^2 = w \frac{\phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha}}{\phi^2} + 2w \frac{\square \phi}{\phi} = 0$$

Substituindo (A.8), (A.9), (A.12) e (A.13) nesta expressão, obtemos:

$$2w \left[ \dot{\phi} - w \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} - 3 \dot{\phi} \frac{\dot{a}}{a} \right] + 6\phi \frac{\ddot{a}}{a} + 6\phi \frac{\dot{a}^2}{a^2} \\ + 36 n \phi \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right)^2 = 0 \quad (\text{IV.7})$$

## APÊNDICE II

A DEPENDÊNCIA DAS EQUAÇÕES DERIVADAS DE  $L_1 = \sqrt{-g} R^2$  E  
 $L_2 = \sqrt{-g} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$  PARA MÉTRICAS HOMOGENEAS E ISOTRÔPICAS

No apêndice I calculamos a variação de  $L_1 = \sqrt{-g} R^2$ . Se  $\phi = c^{te}$ , obtêm-se:

$$\delta \int \sqrt{-g} R^2 d^4x = \int \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} R^2 g^{\mu\nu} + 2 R g^{\mu\nu} - 2 R^{;\mu;\nu} - \right. \\ \left. - 2 R R^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} d^4x \quad (B.1)$$

O argumento de que as equações derivadas a partir de  $L_1 = \sqrt{-g} R^2$  e  $L_2 = \sqrt{-g} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$  não são independentes para um universo homogêneo e isotrópico é citado na literatura para justificar a adoção de somente uma destas duas Lagrangianas como correção de segunda ordem às equações de Einstein. Aparentemente, a demonstração deste resultado não é publicada em nenhum texto de Relatividade Geral e/ou Cosmologia e em nenhuma revista científica acessível. Portanto, achamos conveniente demonstrá-lo nós mesmos.

Vamos calcular a variação de  $L_2$ :

$$\delta \int \sqrt{-g} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} d^4x = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} \left[ R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} + \delta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \right. \\ \left. + R_{\mu\nu} \delta R^{\mu\nu} \right] d^4x \quad (B.2)$$

Fazendo uso das igualdades

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} (\delta g_{\mu\nu;\sigma;\tau} + \delta g_{\sigma\tau;\mu;\nu} - \delta g_{\mu\sigma;\nu;\tau} - \delta g_{\nu\tau;\mu;\sigma})$$

e

$$\delta R^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta} (g^{\mu\rho} g^{\alpha\sigma} g^{\nu\beta} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\rho} g^{\beta\sigma}) \delta g_{\rho\sigma}$$

podemos calcular o segundo termo de (B.2) facilmente:

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{-g} \left[ \delta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta R^{\mu\nu} \right] d^4x = \\ & \int \sqrt{-g} \left[ R^{\mu\nu} g^{\sigma\tau} (\delta g_{\mu\nu;\sigma;\tau} + \delta g_{\sigma\tau;\mu;\nu} - \delta g_{\mu\sigma;\nu;\tau} - \delta g_{\nu\tau;\mu;\sigma}) - \right. \\ & \quad \left. - R_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} (g^{\mu\rho} g^{\alpha\sigma} g^{\nu\beta} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\rho} g^{\beta\sigma}) \delta g_{\rho\sigma} \right] d^4x = \\ & \int \sqrt{-g} \left[ \square R^{\mu\nu} + R^{\alpha\beta}{}_{;\alpha;\beta} g^{\mu\nu} - R^{\mu\sigma}{}_{;\tau;\sigma} g^{\nu\tau} - R^{\nu\tau}{}_{;\sigma;\tau} g^{\mu\sigma} - \right. \\ & \quad \left. - 2 R^{\mu\beta} R^{\nu}{}_{\beta} \right] \delta g_{\mu\nu} d^4x \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{-g} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} d^4x = \\ & \int \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + R^{\mu\nu} + R^{\alpha\beta}{}_{;\alpha;\beta} g^{\mu\nu} - R^{\mu\sigma}{}_{;\tau;\sigma} g^{\nu\tau} - \right. \\ & \quad \left. - R^{\tau\mu} R_{;\sigma;\tau} g^{\sigma\nu} - 2 R^{\mu\sigma} R^{\nu}{}_{\sigma} \right] \delta g_{\mu\nu} d^4x \end{aligned} \quad (B.3)$$

A equação derivada de  $L_1$  é:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} R^2 g^{\mu\nu} + 2 \square R g^{\mu\nu} - 2 R^{;\mu;\nu} - 2 R R^{\mu\nu}$$

Para a métrica (IV.6), a componente  $\mu = \nu = 0$  de  $\alpha_1$  se escreve:

$$\alpha_1 = -18 \frac{\ddot{a}^2}{a^2} - 54 \frac{\dot{a}^4}{a^4} + 36 \frac{\ddot{a}\ddot{a}}{a^2} + 36 \frac{\dot{a}^2\ddot{a}}{a^3} \quad (\text{B.4})$$

De (B.3), vemos que a equação derivada de  $L_2$  é:

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + \square R^{\mu\nu} + R^{\alpha\beta}{}_{;\alpha;\beta} g^{\mu\nu} - R^{\mu\sigma}{}_{;\tau;\sigma} g^{\nu\tau} - \\ - R^{\tau\mu}{}_{;\sigma;\tau} g^{\nu\sigma} - 2 R^{\mu\sigma} R^{\nu}{}_{\sigma}$$

A componente  $\mu = \nu = 0$  é:

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} g^{00} + \square R^{00} + R^{\alpha\beta}{}_{;\alpha;\beta} g^{00} - R^{0\sigma}{}_{;0;\sigma} g^{00} - \\ - R^{\tau 0}{}_{;0;\tau} g^{00} - 2 R^{00} R^0{}_0$$

Para calcular os diversos termos da expressão acima fizemos uso das componentes das afinidades e dos tensores de curvatura calculados no apêndice I. Calculamos também:

$$\Gamma_{11,0}^0 = \dot{a}^2 + a\ddot{a} \quad ; \quad \Gamma_{01,0}^0 = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}$$

Obtivemos que:

$$\frac{1}{2} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} = 6 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 6 \frac{\dot{a}^4}{a^4} + 6 \frac{\dot{a}^2\ddot{a}}{a^2}$$

$$\square R^{00} = R^{00}{}_{,0,0} + 6g^{11}(R^{00} \Gamma_{01}^1 \Gamma_{11}^0 + R^{11} \Gamma_{11}^0 \Gamma_{11}^0) - 3R^{00}{}_{,0} \Gamma_{11}^0 g^{11} =$$

$$R^{00}{}_{,0,0} - 21 \frac{\ddot{a}\ddot{a}}{a^3} + 12 \frac{\dot{a}^4}{a^4} + 9 \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2}$$

$$R^{00}{}_{;0;0} = R^{00}{}_{,0,0}$$

$$R^{\alpha\beta}{}_{;\alpha;\beta}g^{00} = R^{00}{}_{,0,0} + 15 \frac{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\ddot{a}\ddot{a}}}{a^2} - 21 \frac{\overset{\cdot\cdot}{\dot{a}^2\ddot{a}}}{a^3} + 6 \frac{\overset{\cdot\cdot}{\ddot{a}^2}}{a^2}$$

$$R^{0\sigma}{}_{;0;\sigma}g^{00} = R^{00}{}_{,0,0} - 24 \frac{\overset{\cdot\cdot}{\dot{a}^2\ddot{a}}}{a^3} + 18 \frac{\overset{\cdot}{\dot{a}^4}}{a^4} + 6 \frac{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\ddot{a}\ddot{a}}}{a^2}$$

$$R^{00}R_{00} = 9 \frac{\overset{\cdot\cdot}{\ddot{a}^2}}{a^2}$$

Substituindo as expressões acima em (B.4), temos:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 6 \frac{\overset{\cdot\cdot}{\ddot{a}^2}}{a^2} + 6 \frac{\overset{\cdot}{\dot{a}^4}}{a^4} + 6 \frac{\overset{\cdot\cdot}{\dot{a}^2\ddot{a}}}{a^3} + R^{00}{}_{,0,0} - 21 \frac{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\ddot{a}\ddot{a}^2}}{a^3} + 12 \frac{\overset{\cdot}{\dot{a}^4}}{a^4} + 9 \frac{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\ddot{a}\ddot{a}}}{a^2} + \\ &+ R^{00}{}_{,0,0} + 15 \frac{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\ddot{a}\ddot{a}}}{a^2} - 21 \frac{\overset{\cdot\cdot}{\dot{a}^2\ddot{a}}}{a^3} + 6 \frac{\overset{\cdot\cdot}{\ddot{a}^2}}{a^2} - 2 R^{00}{}_{,0,0} + 48 \frac{\overset{\cdot\cdot}{\dot{a}^2\ddot{a}}}{a^3} - \\ &- 36 \frac{\overset{\cdot}{\dot{a}^4}}{a^4} - 12 \frac{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\ddot{a}\ddot{a}}}{a^2} - 18 \frac{\overset{\cdot\cdot}{\ddot{a}^2}}{a^2} = \\ &= - 6 \frac{\overset{\cdot\cdot}{\ddot{a}^2}}{a^2} - 18 \frac{\overset{\cdot}{\dot{a}^4}}{a^4} + 12 \frac{\overset{\cdot\cdot}{\dot{a}^2\ddot{a}}}{a^3} + 12 \frac{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\ddot{a}\ddot{a}}}{a^2} \quad (B.5) \end{aligned}$$

Comparando (B.4) e (B.5) vemos que para uma métrica homogênea e isotrópica,  $\alpha_1 = 3\alpha_2$  e portanto as equações derivadas de  $L_1$  e  $L_2$  não são independentes.

## APÊNDICE III

## OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES (IV.31) e (IV.32)

As equações

$$\frac{8\pi}{3} \frac{\rho_0}{\Phi} a_0^4 = a^2 \dot{a}^2 + \frac{3}{2} a^4 \frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi^2} + a^3 \dot{a} \frac{\dot{\Phi}}{\Phi} - t_c^2 \left[ 2a^2 \ddot{a} \dot{a} + 2a \dot{a}^2 \ddot{a} - 3\dot{a}^4 - \right. \\ \left. - a^2 \ddot{a}^2 + 2 \frac{\dot{\Phi}}{\Phi} (a^2 \ddot{a} \dot{a} - a \dot{a}^3) \right] \quad (\text{IV.27})$$

e

$$18 \ddot{\Phi} - 9 \frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi} + 54 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Phi} + 6 \Phi \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right] - 6 t_c^2 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right] \Phi = 0 \quad (\text{IV.28})$$

podem ser colocadas numa forma mais simples, se realizarmos a seguinte mudança de variável:

$$x = \left[ \frac{\dot{a}(t)}{a_0} \right]^2 ; \quad \tau = \frac{t-t_0}{t_c} \quad \text{e} \quad \varphi = \frac{\Phi}{\Phi_F} \quad (\text{IV.29})$$

e definirmos um novo parâmetro:

$$s^2 = \frac{32\pi}{3} \frac{\rho_0 t_c^2}{\Phi_F} \quad (\text{IV.30})$$

Da relação entre  $\tau$  e  $t$ , temos que

$$\frac{dt}{d\tau} = t_c$$

Portanto,  $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{1}{t_c}$ . Designando a derivação em relação a  $\tau$  por uma linha, temos:

$$x' = t_c \dot{x}$$

Portanto

$$x' = 2 \frac{t_c}{a_0} a \dot{a}$$

$$x'' = \frac{t_c^2}{a_0^2} (2\dot{a}^2 + 2a\ddot{a}) \quad (C.1)$$

e

$$x''' = \frac{t_c^3}{a_0^3} (6\dot{a}\ddot{a} + 2a\ddot{\ddot{a}})$$

De (C.1), obtemos  $a(t)$  e suas derivadas em função de  $x(t)$  e suas derivadas:

$$a = a_0 x^{1/2}$$

$$\dot{a} = \frac{a_0}{2t_c} \frac{x'}{x^{1/2}}$$

$$\ddot{a} = \frac{a_0}{t_c^2} \left[ \frac{1}{2} \frac{x''}{x^{1/2}} - \frac{1}{4} \frac{x'^2}{x^{3/2}} \right]$$

$$\ddot{\ddot{a}} = \frac{a_0}{t_c^3} \left[ \frac{1}{2} \frac{x'''}{x^{1/2}} - \frac{3}{4} \frac{x'x''}{x^{3/2}} + \frac{3}{8} \frac{x'^3}{x^{5/2}} \right]$$

Vamos calcular os diversos termos de (IV.28) e (IV.29):

$$\dot{a}^2 a^2 = \frac{a_0^4}{2t_c^2} x'^2$$

$$a^4 = a_0^4 x^2$$

$$\dot{a} a^3 = \frac{a_0^4}{2t_c^2} x x'$$

$$\begin{aligned}
 2a^2 \ddot{a} \ddot{a} &= \frac{a_0^4}{t_c^4} \left[ \frac{1}{2} x x' x'''' - \frac{3}{4} x'^2 x'' + \frac{3}{8} \frac{x'^4}{x} \right] \\
 2a \ddot{a}^2 \ddot{a} &= \frac{a_0^4}{2t_c^4} \left[ \frac{1}{2} \frac{x'^2 x''}{x} - \frac{1}{4} \frac{x'^4}{x^2} \right] \\
 3\dot{a}^4 &= \frac{3}{16} \frac{a_0^4}{t_c^4} \frac{x'^4}{x^2} \quad (C.2) \\
 a^2 \ddot{a}^2 &= \frac{a_0^4}{t_c^4} \left[ \frac{1}{4} x''^2 + \frac{1}{16} \frac{x'^4}{x^2} - \frac{1}{4} \frac{x'^2 x''}{x} \right] \\
 a^2 \dot{a} \ddot{a} &= \frac{a_0^4}{2t_c^3} \left[ \frac{1}{2} x' x'' - \frac{1}{4} \frac{x'^3}{x} \right] \\
 \dot{a} \ddot{a}^3 &= \frac{a_0}{8t_c^3} \frac{x'^3}{x} \\
 \frac{\dot{a}}{a} &= \frac{1}{2t_c} \frac{x'}{x} \quad (C.3) \\
 \frac{\ddot{a}}{a} &= \frac{1}{t_c^2} \left[ \frac{x''}{2x} - \frac{1}{4} \frac{x'^2}{x^2} \right]
 \end{aligned}$$

Substituindo as expressões (C.2) na equação (IV.27) e usando as definições (IV.29) e (IV.30), temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{s^2}{\varphi} &= x'^2 + 6 x^2 \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} + 2xx' \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{x'^2 x''}{x} - 2x' x'''' + x''^2 \\
 &\quad - 2x' x'' \frac{\varphi'}{\varphi} \quad (IV.31)
 \end{aligned}$$

Usando as igualdades (C.3) e substituindo  $\phi$  por  $\phi_F \Psi$ , (IV.28) toma a forma:

$$18\Psi'' - 9\frac{\Psi'^2}{\Psi^2} + 27\frac{x'}{x}\Psi' + 3\frac{x''}{x}\Psi - \frac{3}{2}\frac{x'^2}{x^2}\Psi = 0 \quad (\text{IV.32})$$

## APÊNDICE IV

EQUAÇÕES ASSINTÔTICAS PARA OS DESVIOS  $\delta(\tau)$  E  $g(\tau)$ 

As expressões assintóticas ( $t \rightarrow \infty$ ) para  $y(\tau)$  e  $\varphi(\tau)$  são:

$$y(\tau) = h\tau(1 + \epsilon f(\tau)) \quad (\text{IV.45})$$

e

$$\varphi(\tau) = 1 + \delta g(\tau) \quad (\text{IV.46})$$

Vamos substituir estas soluções em (IV.36) e (IV.37) e teremos as equações a que devem obedecer  $f(\tau)$  e  $g(\tau)$ . Derivando as expressões acima temos:

$$y'(\tau) = h + h\epsilon(\tau f)'$$

$$y''(\tau) = h\epsilon(\tau f)''$$

$$y'''(\tau) = h\epsilon(\tau f)'''$$

$$\varphi'(\tau) = \delta g'$$

$$\varphi''(\tau) = \delta g''$$

Substituindo estas expressões na equação (IV.36), ela assume a forma:

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{1+\delta g} &= h^2 + h^2 \epsilon^2 (\tau f)'^2 + 2 h^2 \epsilon (\tau f)' + 6\delta^2 \left[ \frac{g'^2}{(1+\delta g)^2} \right] \times \\ &\times \left[ h^2 \tau^2 (1 + (\epsilon f)^2 + 2 \epsilon f) \right] + 2\delta \left[ \frac{g'}{1+\delta g} h\tau(1 + \epsilon f) \right] \times \\ &\times \left[ h + h\epsilon(\tau f)' \right] + \frac{\epsilon}{\tau} \frac{(f)'''}{(1+\epsilon f)} h^2 \epsilon^2 (\tau f)''^2 - 2 \left[ h\epsilon(\tau f)'' \right] \times \\ &\times \left[ h + h\epsilon(\tau f)' \right] + h^2 \epsilon^2 (\tau f)''^2 - 2\delta \frac{g'h(\tau f)'''}{1+\delta g} \left[ h + h\epsilon(\tau f)' \right] \end{aligned}$$

Como  $|\epsilon f|^2 \ll 1$ ,  $|\delta g|^2 \ll 1$ , podemos também supor que  $|\epsilon f| |\delta g| \ll 1$  e conservar somente os termos de primeira ordem em  $\epsilon f$  e  $\delta g$ . Fazendo estas aproximações na expressão acima e-la se reduz a:

$$2\epsilon(\tau f)' + 2\delta h^2 \tau g' - \frac{\epsilon}{\delta} (\tau f)''' + 2\epsilon(\tau f)'''' = 0$$

ou ainda

$$f'''' + \frac{5}{2} \frac{f'''}{\tau} - \frac{f'}{\tau^2} - f - 2 \frac{f}{\tau} = \frac{\delta}{\epsilon} g' \quad (\text{IV.49})$$

Usando o mesmo processo em (IV.37), temos:

$$g'' - \frac{1}{2} \frac{g'^2}{1+\delta g} + \frac{3}{2} \delta g' \frac{(h + h\epsilon(\tau f)')}{h(1 + \epsilon f)} + \frac{1}{6} (1 + \delta g) \frac{h\epsilon(\tau f)''}{h(1 + \epsilon f)} - \frac{1}{12} \frac{\epsilon^2}{\tau^2} \frac{(1 + \delta g)(\tau f)'''}{(1 + \epsilon f)^2} = 0$$

Conservando os termos de primeira ordem em  $\epsilon f$  e  $\delta g$ , ficamos com:

$$g'' + \frac{3}{2} \delta \frac{g'}{\tau} + \frac{1}{6} \frac{\epsilon}{\tau} (\tau f)''' = 0$$

ou, finalmente:

$$g'' + \frac{3}{2} \frac{g'}{\tau} = - \frac{1}{6} \frac{\epsilon}{\delta} \left[ f''' + \frac{f'}{\tau} \right] \quad (\text{IV.50})$$

## APENDICE V

## PROGRAMA FORTRAN: MÉTODO LUNGE-KUTTA-GILL

Dimension F(5), Y(5), Q(5), R1(4), R2(4), R3(4)

Dimension G(5)

T = 10

R1(1)=0.5

R1(2)=0.29289322

R1(3)= 1.70710678

R1(4)=0.16666667

R2(1)=2.

R2(2)=1.

R2(3)=1.

R2(4)=2.

R3(1)=0.5

R3(2)=R1(2)

R3(3)=R1(3)

R3(4)=0.5

DT = -1.E-2

DO 3 N=1.5

3 Q(N)=0

ICOUNT=0

Y(1)=

Y(1)=Y( $\tau=10$ )

Y(2)=

Y(2)=Y'( $\tau=10$ )

Y(3)=

Y(3)=Y''( $\tau=10$ )

Y(4)=

Y(4)=Y'''( $\tau=10$ )

$$Y(5) =$$

$$Y(5) = \psi'(\tau=10)$$

7 D01 M=1.4

$$Z=Y(1)$$

$$ZP=Y(2)$$

$$ZP2=Y(3)$$

$$ETA=Y(4)$$

$$ETAP=Y(5)$$

$$H =$$

$$F(1)=Y(2)$$

$$F(2)=Y(3)$$

$$A1=H*H/(2.*ETA*ZP)$$

$$A2=ZP2*ZP2/(2.*ZP)$$

$$A3=ZP/2$$

$$A4=ZP*ZP2/(2.*Z)$$

$$A5=3.*Z*Z*ETAP*ETAP/(ZP*ETA*ETA)$$

$$A6=ETAP*ZP2/(2.*ETA)$$

$$A7=ETAP*Z/ETA$$

$$F(3) = A1+A2+A3+A4+A5-A6+A7$$

$$ZP3=F(3)$$

$$F(4)=Y(5)$$

$$B1*ETAP*ETAP/(2.*ETA)$$

$$B2=3.*ETAP*ZP/(2.*Z)$$

$$B3=ETA*ZP2/(6.*Z)$$

$$B4=ETA*ZP2*ZP2/(12.*Z*Z)$$

$$F(5)=B1-B2-B3+B4$$

$$ETAP2=F(5)$$

```
DO 9 I=1.5
G(I)=DT*F(I)
R=R1(M)*G(I)-R2(M)*Q(I)
Q(I)=Q(I)+3.*R-R3(M)*G(I)
Y(I)=Y(I)+R
9 CONTINUE
IF (M-1) 4,5,4
4 IF (M-3) 1,5,1
5 T=T+0.5*DT
1 CONTINUE
ICOUNT=ICOUNT+1
Y1=Y(1)
Y2=Y(2)
Y3=Y(3)
Y4=Y(4)
Y5=Y(5)
PRINT 6, Y1, Y2, Y3, F(3), Y4, Y5, F(5), T
6 FORMAT (1H, 8E14.6)
IF (ICOUNT-2000)7,8,8
8 STOP
END
```

## REFERÊNCIAS

1. Veja por exemplo, W.Kundt - Survey of Cosmology - Springer Tracts in Modern Physics 58, 1 (1971).
2. A.Einstein - Sur le Problème Cosmologique - Gauthiers Villars - Paris, 1951.
3. G.F.R.Ellis - Relativistic Cosmology , em General Relativity and Cosmology - Academic Press, New York, 1971.
4. M.Novello - Tópicos de Cosmologia Relativista - Monografias de Física, XXXIV, CBPF, 1973.
5. Veja por exemplo, G.Steigman - The Case Against Anti-matter in the Universe - Orange Aid Preprint Series, CALTECH, 1972.
6. J.L.Anderson - Principles of Relativity Physics - Academic Press, New York, 1967.
7. R.Geroch - Ann.Phys. 48, 526 (1968).
8. R.Geroch - Battelle Rencontres 1967, Lectures in Mathematics and Physics, W.A. Benjamin, New York, 1968.
9. W.Kundt - Z.Physik 172, 488 (1963), citado na referência (7).
10. S.W.Hawking e G.F.R.Ellis - The Large Scale Structure of Space-Time - Cambridge at the University Press, 1973.
11. E.M.Lifshitz e I.M.Khalatnikov - Adv.Phys. 12, 185 (1963).
12. E.M.Lifshitz e I.M.Khalatnikov - Sov.Phys.JETP 11, 123 (1971).
13. S.W.Hawking - Proc.Roy.Soc.London A294, 511 (1966); A295, 490 (1966); A300, 187 (1967).

- R.Penrose - Phys.Rev.Lett. 14, 57 (1965); Rev.Mod.Phys. 37, 215 (1965).
14. S.W.Hawking e R.Penrose - Proc.Roy.Soc.London, A314, 529 (1970).
  15. R.Penrose - Battelle Rencontres 1967 , Lectures in Mathematics and Physics, W.A. Benjamin, New York, 1968.
  16. R.Utiyama e B.S.DeWitt - J.Math.Phys. 3, 608 (1962).
  17. V.L.Ginzburg, D.A.Kirshinitz e A.A.Luybushin - Sov.Phys. JETP 33, 242 (1971).
  18. A.D.Sakharov - Dokl.Akad.Nauk.SSSR 177, 70 (1967).
  19. T.V.Ruzmaikina e A.A.Ruzmaikin - Sov.Phys.JETP 30, 372(1970)
  20. H.Nariai - Prog.Theor.Phys. 46, 433 (1971); 46, 776 (1971).
  21. B.N.Breizman, V.Ts.Gurovich e V.P.Sokolov - Sov.Phys. JETP 32, 155 (1971).
  22. P.Jordan - Z.Physik 157, 112 (1959).
  23. C.Brans e R.H.Dicke - Phys.Rev. 124, 925 (1961).
  24. B.S.DeWitt - Relativity, Groups and Topology, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1964.
  25. P.A.M.Dirac - Nature 139, 323 (1937).
  26. Veja por exemplo, J.A.Wheeler - Relativity, Groups and Topology, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1964.
  27. A.Trautman, Nature Phys.Sc. 242, 7 (1973).
  28. L.Parker e S.A.Fulling, Phys.Rev.D. 7, 2357 (1973).