

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
BIBLIOTECA

PROPRIEDADES NUCLEARES MÉDIAS BASEADAS NO MODELO ESTATÍSTICO

95.934

539.312  
E 43

T 77  
E 43

Tese de Mestrado , 1994  
LÉA JACCOUD EL-JAICK

## I N D I C E

AGRADECIMENTOS .....	i
RESUMO .....	ii
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO II - REVISÃO TEÓRICA .....	2
1. Densidades Nucleares .....	9
2. Energias e massas nucleares nas fórmulas de massa e no modelo estatístico .....	12
a) Fórmulas de Massa .....	13
b) Modelo Estatístico .....	19
CAPÍTULO III - CÁLCULOS NO MODELO ESTATÍSTICO .....	
1. Sistemas de uma componente	
a) Método de Cálculo .....	22
b) Resultados e Discussão .....	35
2. Sistemas de duas componentes .....	45
a) Método de Cálculo .....	46
b) Resultados e discussão .....	49
CAPÍTULO IV - CONCLUSÃO .....	54
FIGURAS .....	58
REFERÊNCIAS .....	79

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Takeshi Kodama, pela especial dedicação na orientação deste trabalho.

Ao Professor Sergio M. Calzavara Alves, pela grande colaboração nas discussões e na revisão do manuscrito.

Ao Professor Carlos Márcio do Amaral, pelas sugestões a apresentadas.

À Laís de Carvalho Ventura, pelo trabalho de datilografia.

À equipe da Divisão do Computador do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.

As Instituições: Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Conselho Nacional de Pesquisas e Comissão Nacional de Energia Nuclear.

## R E S U M O

Propriedades grossas dos núcleos foram investigadas através do modelo estatístico, em sistemas com número de protons e neutrons iguais e diferentes, separadamente, sendo que somente neste último foi considerada a energia Coulombiana.

Assumindo conhecida a densidade da energia de matéria nuclear, a partir da fórmula semi-empírica de massa de Weizscker-Bethe, generalizada para núcleos compressíveis, foram calculadas certas propriedades nucleares médias.

No estudo do coeficiente  $a_s$  da energia de superfície foi verificada a grande influência exercida pela energia Coulombiana e pela compressibilidade nuclear.

Para um bom ajuste das linhas de estabilidade beta e do excesso de massa, foi constatada a importância da energia de simetria de superfície.

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

A teoria nuclear tem se desenvolvido por meio de dois tipos de tratamento, básicos para o conhecimento da estrutura nuclear: o tratamento macroscópico e o microscópico.

O tratamento microscópico procura expressar as propriedades nucleares partindo do conhecimento da estrutura das forças que atuam entre os componentes do sistema, isto é, investigando os núcleos de uma maneira mais detalhada, a partir das propriedades de cada nucleon.

O macroscópico, por sua vez, considera o núcleo como uma assembleia de nucleons, analisando-o como um todo, através dos valores médios de suas propriedades gerais, sem considerar as características individuais dos seus componentes.

É evidente, então, que este último tratamento pode ser considerado como o que trata dos valores médios das propriedades nucleares obtidas pela teoria microscópica.

Os dois tratamentos se completam no sentido de que enquanto o macroscópico trata das propriedades gerais dos núcleos, investigando as tendências grossas das curvas, permitindo de certa maneira, extrapolar as fórmulas de massa para núcleos pesados [1], o tratamento microscópico estuda a sua estrutura fina considerando efeitos de camada, emparelhamento, etc., restringindo-se a determinadas regiões sem condições de extrapolação. As duas aproximações são igualmente importantes dentro de suas limitações e necessárias para

se descrever o núcleo de uma maneira mais precisa.

Para o estudo de propriedades nucleares médias é conveniente o uso de métodos estatísticos de cálculo. Por exemplo, o método de Thomas-Fermi, para elétrons atômicos pode ser aplicado com sucesso a núcleos. Consiste em obter uma equação para a distribuição de densidade das partículas, através de um princípio variacional, cuja solução fornece a base para se calcular outras propriedades nucleares. A aproximação de Thomas-Fermi assume que a dependência da densidade na energia é localmente a mesma que a num meio homogêneo no seu estado fundamental. É equivalente a assumir que as correlações entre nucleons em núcleos finitos são as mesmas que na matéria nuclear.

Então este método pode ser desenvolvido [2], assumindo forças nucleares com um caroço repulsivo.

A teoria da matéria nuclear admite uma configuração hipotética na qual as propriedades dos núcleos são independentes do número de nucleons, se o  $A$  (número de massa) é tão grande que os efeitos de superfície possam ser desprezados, formando uma configuração estável pelo fato de não existir repulsão Coulombiana. Na realidade esta configuração não existe, pois o efeito Coulombiano cresce com o quadrado de  $Z$  (número de protons) e se torna importante antes que o número  $A$  seja suficientemente grande para se desprezar efeitos de superfície. No entanto este conceito de matéria nuclear se mostrou bastante adequado para descrever certas propriedades dos núcleos pesados mas finitos [2, 4, 5].

Outro importante modelo dentro da teoria estatística é o da gota líquida, que, aplicado a núcleos, considera desprezível o alcance das forças interpartículas. Há vários pontos de analogia entre um núcleo e uma gota líquida: a densidade de uma gota líquida é independente de seu tamanho, tal que o

seu raio  $R$  é proporcional a  $A^{2/3}$  sendo  $A$  o número de moléculas (equivalente ao número de nucleons no núcleo); a energia necessária para evaporar a gota em moléculas bem separadas é aproximadamente proporcional ao número  $A$  (análogo à energia de ligação de um núcleo); a tensão superficial da gota provoca uma correção nesta relação, desde que a energia de ligação na superfície é menor que no interior das moléculas. Isto dá origem a um termo proporcional a  $A^{1/3}$  na energia de ligação total. Um termo análogo foi introduzido na fórmula semi-empírica de Weizsacker-Bethe para energias de ligação.

Várias fórmulas de massa tipo gota líquida foram desenvolvidas para estimar as massas dos núcleos e fornecer informações sobre interações nucleares.

Apesar da simplicidade de algumas fórmulas, elas reproduzem bastante bem as massas experimentais, com 0.5% no máximo de erro relativo. No caso nuclear, é necessária a introdução das energias Coulombiana e de simetria como as usadas na fórmula semi-empírica de Weizsacker-Bethe [6,7]. Em fórmulas mais sofisticadas [8,9] incluem-se outros efeitos como a compressibilidade nuclear.

A maioria destas fórmulas só leva em conta as propriedades grossas dos núcleos, como já foi assinalado anteriormente, sem considerar as características individuais de seus nucleons, que são provenientes de efeitos microscópicos, entre os quais o efeito de camadas, deformação nuclear, etc. . Muitas tentativas de incluir estes efeitos nas fórmulas de massa têm sido feitas e certamente obtiveram êxito ao melhorar a concordância com a observação [10, 11, 12, 13, 14, 15].

A teoria de Hartree-Fock, foi também largamente aplicada para o conhecimento das quantidades nucleares. A estrutura de camadas é aí muito bem tratada, porém a dificuldade de cálculo na resolução de suas equações é bastante

grande, pois exige o conhecimento das funções de onda do modelo de camadas e das interações efetivas entre dois corpos no núcleo.

Dai o motivo pelo qual ainda é válido se trabalhar com métodos macroscópicos, pois alguns parâmetros, como a energia de superfície, energia de simetria, etc., são dificilmente obtidos por uma descrição microscópica.

Um bom exemplo da utilização dos dois tratamentos, macroscópico e microscópico, simultaneamente, é o método de Strutinsky [16], que calcula a correção de camada para a energia da gota líquida do núcleo como uma função do número de ocupação e da deformação. A equivalência deste método com o modelo estatístico foi demonstrada analiticamente por Gross [17], generalizando o método de Thomas-Fermi, incluindo termos de maior ordem devidos às correções de não homogeneidade da energia cinética.

Mais um bom argumento favorável ao uso de métodos estatísticos foi dado por Myers-Swiatecki [1]. É que eles permitem a separação da gota líquida e do efeito de camadas nas fórmulas de massa semi-empíricas, a fim de extrapolar a fórmula de massa e investigar núcleos pesados e super-pesados.

Berg e Wilets [18] utilizaram a aproximação de Thomas-Fermi [2], de uma maneira fenomenológica e auto-consistente, para estudar os efeitos da superfície nuclear. Eles definiram uma "densidade de energia de matéria nuclear"  $\epsilon(\rho)$ , que contém contribuições da energia cinética e das partes atrativa e repulsiva da energia potencial. Os coeficientes são ajustados para reproduzirem as energias de ligação e a densidade de equilíbrio corretas.

Skyrme [19] tomou como ponto de partida idéias fundamentais da matéria nuclear. Seu trabalho se assemelha ao de Berg e Wilets na medida em que ele também levou em conta um termo que expressa o efeito da variação da densidade nuclear com a posição, sobre a energia.

Um método estatístico, também baseado em Thomas-Fermi, foi desenvolvido por Hara [20], usando um potencial efetivo não local dependente da densidade, atrativo a baixas e médias densidades. O método de Hara foi aplicado à espessura de superfície de núcleos pesados. Apesar das aproximações usadas, os resultados foram satisfatórios.

Kumar e colaboradores [21] generalizaram o método de Thomas-Fermi, baseando-se nas matrizes de reação de Brueckner [22, 23] para a obtenção da energia potencial e conseqüente cálculo das distribuições de energia e densidades de núcleos para todos os valores de massa. Foram obtidos resultados razoáveis em relação aos valores empíricos.

Mais recentemente Brueckner [4, 5] aplicou o formalismo da densidade de energia a núcleos finitos, expressando a energia total de um sistema de muitos nucleons como uma funcional  $E[\rho]$  da densidade local  $\rho(r)$  e minimizando-a em relação a  $\rho(r)$  para calcular a distribuição de densidade do estado fundamental.

A energia de ligação, raio e espessura de superfície foram achadas com boa concordância com a experiência.

Por outro lado, existem trabalhos semi-empíricos que utilizam resultados de métodos macroscópicos. As três fórmulas de massa tipo Weizsacker-Bethe, determinadas por Kodama [24] dão desvios sistemáticos na região pesada. Um desvio característico é o comportamento da linha de estabilidade beta. Os núcleos estáveis sobre esta linha tendem, na região mais pesada, a possuir mais prótons do que quando calculados pela fórmula semi-empírica de Weizsacker-Bethe [6, 7].

Yamada [8] usou a fórmula de massa de Weizsacker-Bethe, generalizada para núcleos compressíveis, para melhorar a medida grossa da linha de estabili-

dade beta. A forma proposta por ele considera outros termos como funções da densidade e não só a energia Coulombiana, como o fazem alguns autores [25,26,27]. Foi encontrado um valor para a densidade do estado fundamental da matéria nuclear infinita consideravelmente maior do que os observados para as densidades dos núcleos reais, devido ao uso da compressibilidade nuclear. Houve um significativo melhoramento na descrição da linha de estabilidade beta, porém foram insatisfatórios os resultados de certas quantidades nucleares para densidades longe das de equilíbrio.

Três fórmulas macroscópicas, baseadas no modelo da gota líquida (núcleos incompressíveis), foram determinadas por Kodama [24] ao analisar empiricamente os núcleos de massa ímpar, enfatizando a estrutura grossa das superfícies de massas nucleares sobre a linha de estabilidade beta. Foi notado que são necessárias grandes energias de simetria (de volume e de superfície) para uma boa reprodução da linha de estabilidade beta experimental. Porém observa-se que há uma tendência da curva em piorar para regiões além da dos núcleos pesados, daí a inconveniência da extrapolação destas fórmulas de massa.

Num trabalho conjunto, Kodama e Yamada [9] levaram em conta a compressibilidade nuclear na fórmula semi-empírica de Weizsacker-Bethe, fazendo os coeficientes dos termos de volume, superfície e simetria dependentes da densidade e substituindo a energia Coulombiana por uma fórmula aproximada do modelo trapezoidal. Os resultados não foram satisfatórios devido a não consideração da energia de simetria de superfície.

Um refinamento do modelo da gota líquida foi feito por Myers-Swia-tecki [28] para calcular propriedades nucleares médias. Este novo modelo, que foi chamado modelo da gotícula, estuda as mudanças das várias energias em torno da densidade de equilíbrio para configurações esféricas. Recentemente

eles generalisaram o modelo para formas arbitrárias [29].

Também para analisar barreiras de fissão e núcleos superpesados, o modelo da gota líquida dá uma grande contribuição [30]. Nix e Krappe [31] usaram-no modificando a energia de superfície, isto é, substituindo-a por uma auto-energia da gota, causada por uma interação de curto alcance entre duas partículas, para diminuir a dependência da forma nas energias de deformação das configurações de fissão.

O estudo dos elementos pesados exige uma cuidadosa reinvestigação do modelo da gota líquida. É necessária a utilização de parâmetros semi-empíricos da fórmula de massa que, por enquanto, não são obtidos através de métodos microscópicos. Apesar dos vários trabalhos já feitos ainda não existem suficientes conhecimentos sobre as propriedades de uma gota finita que serve de modelo para o núcleo.

O presente trabalho procura verificar a relação entre a fórmula semi-empírica de massa (baseada no modelo da gota líquida) e o modelo estatístico de Thomas-Fermi, para energias de superfície e distribuições de densidade. É também uma tentativa de reproduzir a linha de estabilidade beta experimental e do excesso de massa. Objetiva ainda possibilitar a construção de uma fórmula de massa, baseada na investigação do comportamento da gota finita, que possa ser extrapolada para regiões desconhecidas.

No capítulo II será feita uma breve revisão teórica sobre as quantidades nucleares mais importantes para o estudo a que este trabalho se propõe, e sobre os modelos utilizados para obtê-las.

Os cálculos, com o método e os resultados com as respectivas discussões, tanto para sistemas de uma componente sem energia Coulombiana como para sistemas de duas componentes com energia Coulombiana, serão mostrados no

capítulo III.

Uma discussão geral e as conclusões serão apresentadas no capítulo IV.

◊ ◊ ◊

## CAPÍTULO II

### REVISÃO TEÓRICA

#### 1 - DENSIDADES NUCLEARES

A principal fonte de conhecimento para a distribuição de cargas em núcleos provêm das experiências de espalhamento de elétrons, utilizando a propriedade de difração, uma vez que o comprimento de onda de de Broglie de elétrons de alta energia ( $\sim 200$  Mev) é da ordem de grandeza das dimensões nucleares..

Um dos mais significativos resultados destas experiências é que os núcleos não têm contornos bem definidos, havendo uma região na qual a densidade de nucleons cai assintoticamente a zero. Daí a superfície nuclear ser considerada como uma região  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$  tal que para  $r > r_{\max}$  a probabilidade de se encontrar constituintes nucleares é desprezível.

Devido à saturação das forças nucleares a distribuição de carga nuclear é descrita como possuindo uma região central de densidade uniforme e uma região de superfície definida como aquela em que a densidade cai de 90 a 10% de seu valor central. Uma boa representação para a distribuição de carga nuclear é dada pela função densidade de Fermi (fig.1).

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-R)/a}} \quad (1)$$

onde

- $\rho_0$  é o valor da densidade central (ou  $\rho_0$  é a densidade de núcleons próximo do centro do núcleo).
- $R$  é o raio definido na posição em que a densidade cai por um fator 2 em relação a seu valor central  $\rho_0$ .
- $a$  é uma medida da espessura da superfície medida entre 90 e 10% do valor da densidade central.

A distribuição da densidade de carga de Fermi e as com outras formas, tais como as do tipo gaussiana modificada e trapezoidal, dão uma boa concordância com a experiência para núcleos esféricos, com o número de prótons na faixa entre  $Z = 20$  e  $Z = 83$ . Por exemplo a figura 2 mostra que os três tipos de distribuição dão aproximadamente os mesmos valores para  $R$  e  $t$ , no caso do  $Au^{197}$ . Suas formas são:

$$\text{Fermi: } \rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

$$\text{Gaussiana modif.: } \rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r^2-R^2}{a^2}}}$$

$$\begin{aligned} \text{Trapezoidal: } \rho(r) &= \rho_2 & 0 < r < R - a_2 \\ &= \rho_2 (R + a_2 - r) / 2a_2 & R - a_2 < r < R + a_2 \\ &= 0 & r > R + a_2 \end{aligned}$$

Para núcleos mais leves, foram obtidos melhores resultados com outras formas de distribuição [32, 33], os quais serão mostrados nos próximos capítulos.

Em primeira aproximação a forma da distribuição de prótons é igual a de nêutrons (as duas juntas formando a distribuição de matéria); mas já se sabe que há diferenças entre elas de algum interesse [4, 5, 34, 35].

O tamanho e a densidade de um núcleo são determinados principalmente pelas forças nucleares que são muito maiores do que as forças eletrostáticas. Esperava-se que prótons e nêutrons tivessem a mesma distribuição espacial pelo fato das forças nucleares serem independentes de carga. Mas como existe uma força repulsiva Coulombiana entre prótons, os nêutrons devem ter uma densidade maior próximo do centro do núcleo.

Wilets [35] mostrou que a distribuição de densidade de prótons apresenta um leve pico perto da superfície, o que não acontece com os nêutrons, que, por sua vez, apresentam uma cauda mais longa. No ponto médio da distribuição o raio da de nêutrons é cerca de 0.2 fm maior que o associado com prótons.

Embora os prótons devessem tender a uma maior concentração na superfície nuclear, devido à repulsão Coulombiana, um efeito compensador foi proposto por Johnson e Teller, [36], assumindo que a repulsão Coulombiana atua como uma barreira para a penetração dos prótons, para explicar o fato do raio do nêutron ser maior que o do próton.

No modelo da partícula independente, prótons e nêutrons estão sujeitos a um mesmo potencial, a menos do potencial Coulombiano. Por este motivo o potencial nuclear dos prótons se defasa em relação ao de nêutrons de uma quantidade repulsiva devida a este potencial Coulombiano. No entanto, apesar da repulsão Coulombiana favorecer a diminuição do número de prótons, o princípio de exclusão de Pauli leva a um grande aumento na energia. Esta energia, chamada energia de simetria, faz com que o potencial nuclear dos prótons seja mais profundo do que o de nêutrons, provocando uma diferença no potencial total de cerca de metade do potencial Coulombiano [10, 35], modificando assim o efeito de Johnson e Teller. A diferença entre as distribuições de prótons e nêutrons não é tão grande como era de se esperar pela introdução da energia Coulombiana, pois seu efeito é compensado pela energia de simetria.

## 2 - ENERGIAS E MASSAS NUCLEARES NAS FÓRMULAS DE MASSA E NO MODELO ESTATÍSTICO.

Um fato importante observado experimentalmente para núcleos é a constância aproximada da energia de ligação por nucleon  $B/A$ . Exceto para núcleos muito leves ( $A < 10$ ), o valor de  $B/A$  está sempre compreendido entre 7.4 e 8.8 Mev. Todos os constituintes do núcleo são mais ou menos igualmente ligados. Esta propriedade mostra uma similaridade entre o núcleo e a gota líquida.

O pequeno decréscimo na energia de ligação por partícula para altos valores de  $A$  pode ser explicado qualitativamente. Os prótons se repelem dentro do núcleo por causa de sua força eletrostática. Esta repulsão é fraca em relação às forças nucleares de ligação. Como ela cresce com o quadrado de  $Z$ , torna-se cada vez mais importante para valores maiores de  $Z$ , enquanto a

energia de ligação se mantém proporcional à primeira potência de  $A$  [12]. O efeito da energia de ligação das forças nucleares para altos valores de  $A$ , é diminuído pela repulsão Coulombiana, que lhe é contrária.

Para valores baixos de  $A$ , é o efeito de superfície que provoca a diminuição da energia de ligação por partícula. Na superfície as partículas estão menos ligadas que no interior do núcleo. Quanto menor o núcleo, maior é a percentagem de constituintes na sua superfície. Sendo a energia de superfície uma quantidade positiva ela faz com que a energia de ligação decresça para núcleos leves.

#### a) Fórmulas de Massa

Muitas tentativas foram feitas nos últimos anos para se desenvolver fórmulas matemáticas que descrevessem as energias de ligação nucleares. Existem atualmente cerca de trinta equações de massa formuladas a partir de vários modelos nucleares, das quais, algumas, semi-empíricas, baseadas no modelo da gota líquida do núcleo atômico, reproduzem regularmente as massas observadas em algumas regiões, dando desvios sistemáticos dos dados experimentais em outras regiões de massa [11].

As fórmulas de massa fornecem também uma estimativa das massas dos núcleos desconhecidos e informações sobre as interações nucleares.

Como foi dito na Introdução, no estudo da fissão nuclear, núcleos super-pesados e núcleos longe da linha de estabilidade beta, é preciso extrapolar as fórmulas de massa, daí a necessidade de se conhecer as propriedades grossas dos núcleos, entre as quais uma das de maior interesse, fora a energia Coulombiana, é o efeito de superfície, que está intimamente ligado com as forças nucleares.

Muitas das fórmulas de massa utilizam parâmetros semi-empíricos, como a de Weizsacker-Bethe [6]. São de grande utilidade não só porque descrevem as propriedades médias das quantidades nucleares, mas também porque servem de ligação entre sistemáticas empíricas e teorias nucleares. A maior parte delas foi construída sem considerar as propriedades finas características dos núcleons individuais, provenientes de efeitos microscópicos. Recentemente tem-se tentado incluir estes efeitos, dos quais o mais importante parece ser o devido à estrutura de camadas dos núcleos [15, 37].

Um certo número de fórmulas de massa, baseadas no modelo da gota líquida, reproduz muito bem as massas nucleares. Incluem efeitos de energia de simetria de superfície, compressibilidade nuclear e difusão de superfície, além dos termos da fórmula de Weizsacker-Bethe [6, 7].

Na fórmula de massa de Weizsacker-Bethe para núcleos incompressíveis a energia de ligação possui quatro componentes: as energias de volume, de superfície, de simetria e coulombiana.

O termo de energia de volume é proporcional à massa do núcleo, logo a seu volume. O coeficiente de proporcionalidade é calculado por comparação com os dados experimentais.

O efeito de superfície atua como um termo repulsivo na energia. Sua contribuição à energia de ligação é proporcional à área da superfície do núcleo, isto é, a  $A^{2/3}$ . O termo de superfície é mais importante para núcleos leves, pois a razão entre a área da superfície e o volume decresce à medida que o volume aumenta.

O efeito de simetria dá uma correção à energia de volume. Contribui positivamente (repulsivamente) favorecendo núcleos com o mesmo número de prótons e nêutrons. Assume-se que este termo é proporcional ao quadrado da di-

ferença entre o número de neutrons e protons e que a constante de proporcionalidade depende de A, pois a mudança da energia potencial é inversamente ao número de massa A. Outra contribuição importante é dada pelo campo eletrostático, responsável por uma força de longo alcance, que cresce quadraticamente com Z e é inversamente proporcional a  $A^{1/3}$ .

Considerando estes vários termos, a fórmula semi-empírica de massa para a energia de ligação para núcleos incompressíveis é a seguinte:

$$E = - B = - a_V A + a_S A^{2/3} + a_{sim} \frac{I^2}{A} + E_C \text{ Mev} \quad (2)$$

onde B é a energia de ligação, E é a energia do estado fundamental do núcleo,  $I = N - Z$ , com N e Z designando o número de neutrons e protons respectivamente,  $E_C$  é a energia Coulombiana, que é igual a  $a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}}$  e  $a_V$ ,  $a_S$ ,  $a_C$ , e  $a_{sim}$  são parâmetros a serem ajustados por comparação com resultados experimentais.

Esta equação foi expressa como uma série de potências em  $I/A$ , que não é muito grande para todos os A. Para cada valor fixo de A, a energia é considerada como função de I. As potências ímpares de I, de  $I^3$  em diante, são desprezadas na suposição de que as forças nucleares são simétricas em relação ao excesso de neutrons  $N - Z$ , isto é,  $E(A, I) = E(A, -I)$ . As potências pares de I, acima de  $I^2$  contribuem muito pouco, a menos que seus coeficientes sejam muito grandes.

Esta fórmula reproduz, como já foi dito, somente as medidas e tendências médias das energias nucleares, sem qualquer investigação dos seus deta-

Thes mais finos.

A energia total do núcleo, incluindo a energia de repouso, fica:

$$E_T = M_n c^2 N + M_p c^2 Z + E$$

ou

$$E_T = (M_n c^2 + M_p c^2) A/2 + (M_n c^2 - M_p c^2) (N - Z)/2 + E$$

Se o núcleo for incompressível, o coeficiente  $a_v$  representa a energia de ligação por partícula na densidade de equilíbrio da matéria nuclear.

Foi mostrado [24] que a linha de estabilidade beta, calculada através da fórmula semi-empírica de massa, tipo gota líquida, para núcleos incompressíveis, dá um desvio maior da linha experimental na região dos núcleos pesados, parecendo ser devido a alguma propriedade da matéria nuclear infinita. Ao se definir a linha de estabilidade beta desta maneira o único parâmetro ajustável é o de simetria pois o termo Coulombiano é bem definido. Porém o ajuste daquele termo não melhora a situação apreciavelmente [38, 39]. O uso da matéria nuclear compressível, isto é, densidade de nucleons uniforme mas variável, parece ser mais favorável porque para núcleos incompressíveis a repulsão Coulombiana, muito grande nas regiões mais pesadas, provoca um decréscimo na energia de ligação, enquanto para núcleos compressíveis ela expande o núcleo. O decréscimo na energia de ligação em núcleos compressíveis é menor que nos incompressíveis. A expansão é maior para núcleos com maior número de protons porque a repulsão Coulombiana é mais forte. Portanto o decréscimo da energia de ligação de núcleos com altos Z, é menor do que com baixos valores de Z. Daí o motivo pelo qual núcleos compressíveis com altos Z serem relati-

vamente mais estáveis que o núcleo incompressível, o que concorda com a tendência da linha de estabilidade beta observada.

De acordo com Yamada [8] a introdução da compressibilidade nuclear pode explicar o comportamento da linha de estabilidade beta, principalmente na região mais pesada, pois a compressibilidade causa um decréscimo de energia nesta região. Foi visto porém, que a compressibilidade nuclear precisa ser muito grande para explicar a linha de estabilidade beta. Em detalhes mais finos o trabalho de Yamada não é muito satisfatório.

Para se conhecer a relação entre a energia e a densidade tem-se que entender a fórmula de massa, considerando seus coeficientes dependentes da densidade. A fórmula semi-empírica de Weizsacker, generalizada para núcleos compressíveis [9] se expressa como:

$$M_E(A, I, \rho) c^2 = 7.68004 A + 0.39131 I + a_1(\rho) A + a_2(\rho) A^{2/3} + a_3(\rho) \frac{I^2}{A} + E_C(A, I, \rho) \text{ Mev} \quad (3)$$

onde  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são parâmetros a serem calculados por comparação com dados experimentais.

Como esta fórmula é para núcleos compressíveis, é necessário usar um parâmetro que represente a densidade de um núcleo. Foi escolhido, então, a densidade central  $\rho_0$  como parâmetro, que está relacionada com o raio do volume médio por nucleon,  $r_0$ , por:

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{4\pi}{3} r_0^3$$

A variável  $\xi = \frac{1}{r_0}$  foi usada, em vez de  $\rho_0$  na referência [24].

Assumindo um estado de densidade infinitesimal, microscopicamente homogêneo, isto é, um sistema no qual protons e neutrons se movem livremente com movimento infinitesimalmente lento, a energia de ligação do sistema  $a_1(\xi)$  é tal que  $a_1(0) = 0$ . Neste caso não há formação de aglomerados, em  $\xi = 0$ .

Uma tentativa para se determinar funções do tipo  $a_1(\xi)$  foi feita por Kodama e Yamada [9], usando a fórmula:

$$a_1(\xi) = \alpha_i + \beta_i \xi + \gamma_i (\xi_c - \xi)^{-1/2} + \delta_i (\xi_c - \xi)^{-2} \quad (4)$$

com valores dos parâmetros  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  e  $\delta_i$  dados na tabela I abaixo.

TABELA I

$\alpha_1 = 7175.622$	$\alpha_2 = -10197.28$	$\alpha_3 = -7517.044$
$\beta_1 = 580.2438$	$\beta_2 = -809.6194$	$\beta_3 = -622.9500$
$\gamma_1 = -16004.09$	$\gamma_2 = 22807.42$	$\gamma_3 = 16686.79$
$\delta_1 = 13222.80$	$\delta_2 = -19302.89$	$\delta_3 = -13221.59$

A constante  $\xi_c$  é o limite superior de  $\xi$  quando a interação nuclear tem um "hard-core". Considerando potenciais calculados recentemente, tem-se

$$\xi_c = 4.0 \text{ fm}^{-1}$$

Para a matéria nuclear ( $A \rightarrow \infty$ ), o coeficiente da energia de volume

$a_1(\xi)$  representa a energia de ligação por partícula, que tem um mínimo na densidade observada da matéria nuclear.

A energia de ligação do núcleo é:

$$\epsilon(A, Z, \rho) = a_v(\rho) A + a_s(\rho) A^{2/3} + a_{sim}(\rho) \frac{I^2}{A} + E_c(A, Z, \rho); \quad (5)$$

para  $A \rightarrow \infty$  e na ausência de energia Coulombiana vem:  $\epsilon \rightarrow a_v(\rho)A$ , logo a energia por partícula da matéria nuclear é dada como:

$$E(\rho) = \frac{\epsilon}{A} = a_v(\rho) \quad (6)$$

A curvatura de  $\epsilon/\rho$  no mínimo está relacionada com a compressibilidade nuclear  $K$ , definida como:

$$K = 9\rho^2 \left. \frac{\partial^2(\epsilon/\rho)}{\partial \rho^2} \right|_{\rho_0} \quad (7)$$

O valor de  $K$  calculado deu 112.5129 Mev.

A energia por partícula da matéria nuclear é calculada na teoria de muitos corpos por vários autores [23, 40, 41, 42].

Neste trabalho usamos a expressão particular fornecida pela equação (6), devido à sua grande simplicidade, mesmo sabendo da ambiguidade deste tipo de tratamento.

#### *b) Modelo Estatístico*

Devido à grande dificuldade de se trabalhar com as equações de Hartree-

Fock para o conhecimento das propriedades dos núcleos finitos, foram usados resultados da matéria nuclear infinita para se conseguir este objetivo.

A teoria estatística funciona bem para este tipo de aproximação, com a restrição porém de só se poder avaliar as propriedades grossas dos núcleos, desde que esta aproximação não leva em conta os efeitos microscópicos. Foi mostrado por Hohenberg [43] que a energia de um sistema quântico pode ser expressa como uma funcional da densidade. O modelo estatístico visa aproximar esta funcional de uma maneira semi-clássica, com a condição de que a densidade  $\rho$  tem que variar lentamente com  $r$  para que se possa expandir a energia em potências de gradiente da densidade. No entanto esta aproximação encobre a flutuação devido à estrutura de camadas que se origina das oscilações quânticas criadas quando se anula a densidade fora do núcleo.

A teoria de Thomas-Fermi [2] usa a aproximação da densidade local na suposição de que as correlações entre os nucleons no núcleo finito são as mesmas que na matéria nuclear. Esta aproximação consiste essencialmente em assumir que a dependência da densidade com a energia é localmente a mesma que a num meio homogêneo no seu estado fundamental. Para densidades baixas a aproximação falha, pois o comprimento de onda de de Broglie se torna grande.

Hohenberg e Kohn [43] mostraram que quando a densidade não é homogênea, a correção de primeira ordem na mudança da densidade é quadrática em gradientes. Esta correção é devido à correlação de duas partículas. Se esta correção fosse só devido ao princípio de exclusão de Pauli, teria a forma

$$\frac{1}{9} \frac{\hbar^2}{8M} \frac{(\nabla\rho)^2}{\rho} \quad (\text{correção de Weizsacker})$$

onde  $M$  é a massa nuclear.

Porém outras correlações advindas de interações nucleares criam desvios desta fórmula.

A expressão para a energia total de um núcleo, aplicada por Brueckner [22] é:

$$E_T = \int \left\{ \varepsilon(\rho_n, \rho_p) + \frac{\hbar^2}{8M} \left[ \zeta \frac{(\nabla\rho)^2}{\rho} + \eta (\nabla\rho)^2 \right] \right\} d\tau + \frac{e^2}{2} \iint \frac{\rho_p(\vec{r}_1) \rho_p(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \quad (8)$$

onde  $\varepsilon(\rho_n, \rho_p)$  é a densidade de energia da matéria nuclear uniforme, com densidade de prótons  $\rho_p$  e densidade de nêutrons  $\rho_n$ ; esta densidade de energia inclui contribuições de partes da energia cinética e partes da potencial. As correções de gradiente são incluídas para o caso de meios que variam com a densidade. Os termos de gradiente são supostos representar efetivamente os efeitos de correlação acima; os coeficientes  $\eta$  e  $\zeta$  são deixados como parâmetros ajustáveis.

Como  $E_T$  foi representada como uma funcional de  $\varepsilon(\rho)$  pode-se calcular propriedades de núcleos finitos sabendo  $\varepsilon(\rho)$  explicitamente. Pelo argumento anterior da fórmula de massa compressível a expressão de  $\varepsilon/\rho$  é:

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = a_v(\rho) + a_s \left( \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho_n + \rho_p} \right)^2 + \dots \quad (9)$$

Nos capítulos seguintes entraremos em maiores detalhes.

◊ ◊ ◊

### CAPÍTULO III

#### CÁLCULOS NO MODELO ESTATÍSTICO

Como foi dito anteriormente, este trabalho consiste em investigar, macroscopicamente, a correlação existente entre a fórmula semi-empírica de massa, tipo gota líquida, e o modelo estatístico, originário da teoria de Thomas-Fermi, para certas quantidades nucleares, tais como, as energias de ligação tamanhos e formas dos núcleos; e também procura reproduzir a linha de estabilidade beta experimental e a do excesso de massa.

Isto foi feito em duas etapas. Inicialmente foram considerados sistemas com densidades de neutrons e protons iguais (e com  $N = Z$ ), chamados sistemas de uma componente, pois implica no uso de um só parâmetro, que é o número de massa  $A$ . Neste caso a energia Coulombiana não foi levada em conta, pois o objetivo era somente estudar o efeito da energia nuclear.

Na segunda etapa são estudados sistemas de duas componentes: densidades de protons e neutrons diferentes ( $N \neq Z$ ) e levando em conta a energia Coulombiana.

#### 1 - SISTEMAS DE UMA COMPONENTE

Sistema de uma componente consiste em sistemas nucleares simétricos, que formam uma importante parte do sistema nuclear geral.

##### a) Método de cálculo

Utilizando o modelo estatístico e assumindo conhecida a densidade de energia da matéria nuclear (núcleos infinitos), procura-se determinar a energia

total e de superfície e também as distribuições de densidade dos núcleos finitos. Foi empregado o desenvolvimento de Berg-Wilets [18, 34, 36] .

Considerando núcleos com o mesmo número de prótons e nêutrons e desprezando forças Coulombianas, a energia total do núcleo pode ser expressa como:

$$E = \int \left\{ \varepsilon(\rho) + \frac{\xi \hbar^2}{8M} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho} \right\} d\tau \quad (10)$$

onde o integrando pode ser considerado uma expansão para a densidade de matéria nuclear em potências de várias derivadas da densidade.  $\varepsilon(\rho)$  representa a densidade de energia da matéria nuclear uniforme, e tirada da fórmula de massa. Explicitando para sistemas de uma componente ( $\rho_n = \rho_p$ ),  $\varepsilon = a_v(\rho)\rho$  (ver equação 9).

O termo de gradiente tem duas fontes de origem. Weizsacker sugeriu que existe uma correção para a energia cinética de Fermi quando a densidade não é constante, que seria a chamada correção de inomogeneidade. A segunda se origina de efeitos de alcance finito. Uma maneira de tratar estes dois efeitos combinados foi encontrada por Weizsacker por meio da utilização da correção da inomogeneidade por um parâmetro ajustável  $\zeta$ , dimensional.

Como o único objetivo nesta parte é investigar distribuições de densidade e energia total, a não consideração do termo de correção que envolve o parâmetro  $\eta$ , (eq. 5), não altera apreciavelmente os resultados. Além disto, a dificuldade de cálculo acarretada pela introdução de  $\eta$  não compensa a sua pequena contribuição, pois efetivamente se pode incluir o efeito provocado por  $\eta$  no termo em  $\zeta$ , desde que estes parâmetros estão correlacionados.

A equação (6) é uma funcional da distribuição de densidade. Para se obter a distribuição correspondente ao estado fundamental, tem-se que minimizar a energia  $E$  em relação a  $\rho$ , mantendo a condição de que o número de nucleons permanece fixo, isto é:

$$\delta E - \mu \delta A = 0$$

assim chega-se à eq. diferencial de segunda ordem:

$$\frac{\zeta \hbar^2}{2M} \nabla^2 u + \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} u = \mu u \quad (11)$$

para  $A = \int \rho d\tau$  e onde  $u = \sqrt{\rho}$  e  $\mu$  é um multiplicador de Lagrange, equivalente ao potencial químico.

Considerando somente núcleos esfericamente simétricos a eq. 7, em coordenadas esféricas, toma a forma:

$$\frac{\zeta \hbar^2}{2M} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ur)}{\partial r^2} \right\} + \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} u = \mu u \quad (12a)$$

Chamando  $ur = y$  vem:

$$- \frac{\zeta \hbar^2}{2M} \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} y = \mu y \quad (12b)$$

Apesar da equação(11) ter a aparência de uma equação de Schroedinger, ela não é linear desde que o termo correspondente ao potencial,  $\partial \epsilon / \partial \rho$ , depende de  $\rho$ . Além do mais,  $\partial \epsilon / \partial \rho$  não deve ser interpretada como um po-

tencial pois inclui contribuições de energia cinética.

O multiplicador de Lagrange  $\mu$ , que tem dimensão de energia, pode ser interpretado como a energia da última partícula e como a energia média por partícula  $E/A$ , para o caso da matéria nuclear, pois para núcleos finitos  $\mu < E/A$ .

A equação (12.b) tem mais de uma solução, mesmo sendo  $dp/dr$  igual a zero em  $r = 0$ . Para um mesmo  $\rho_0$  (densidade central), há vários valores de  $\mu$  dando diferentes distribuições mantendo o valor de  $A$  fixo.

Pode-se estudar o comportamento qualitativo desta equação da seguinte maneira (figura 3): seja

$$\frac{d^2y}{dr^2} = C \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} - \mu \right) > 0$$

onde  $C = \frac{2M}{\hbar^2}$  é constante;

se  $\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} > \mu$  e  $\rho_0 > \rho_1$ , significa que a curvatura é positiva e a densidade cresce indefinidamente, pois  $\frac{d}{d\rho} \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} > 0$ ; se  $\rho_0 < \rho_1$ , pode-se esperar uma solução oscilatória, o que não é de interesse, pois a finalidade aqui é encontrar uma família de soluções para  $A \rightarrow \infty$  (ou  $\rho_0 \rightarrow \rho_{00}$ );

se

$$\frac{d^2y}{dr^2} = C \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} - \mu \right) = 0$$

o que implica em  $\left. \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} = \mu$ , a densidade é constante e igual à densidade inicial.

Neste trabalho, interessa o caso em que

$$\frac{d^2 y}{dr^2} = C \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} - \mu \right) < 0$$

isto é,  $\mu > \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}$ , pois então a densidade vai a zero.

Estas considerações são representadas graficamente nas figuras 4 e 5, onde  $\mu_6 < \mu_5 < \mu_4 < \mu_3 < \mu_2 < \mu_1$ .

Vê-se, pelas figuras 4 e 5, que existem duas maneiras de  $y(r)$  chegar a zero (curvas 6 e 5): ou encontra o eixo dos  $r$  linearmente, cortando-o, ou cai exponencialmente. Porém somente para uma das curvas a energia total tem seu valor mínimo.

Se  $y \sim 0 \rightarrow \rho \sim 0$  então a solução de

$$\frac{d^2 y}{dr^2} = C \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} - \mu \right) y \quad \text{com} \quad C \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} - \mu \right) \equiv C' > 0$$

é

$$y_i = C_1 e^{-\sqrt{C'} r} + C_2 e^{\sqrt{C'} r} \quad (13)$$

que, por sua vez, é satisfeita para:

1)  $C_2 = 0$ ,  $r \rightarrow \infty$

sendo

$$y \sim C_1 e^{-\sqrt{C'} r}$$

ou

$$2) \quad C_1 e^{-\sqrt{C^1} r_0} + C_2 e^{\sqrt{C^1} r_0} = 0$$

sendo

$$y \approx C_1 e^{-\sqrt{C^1} r} + \left\{ -C_1 e^{-2\sqrt{C^1} r_0} \right\} e^{\sqrt{C^1} r}$$

$$y \approx C_1 \left\{ e^{-\sqrt{C^1} r} - e^{-2\sqrt{C^1} r_0} e^{\sqrt{C^1} r} \right\}$$

$$y \approx C_1 e^{-\sqrt{C^1} r_0} \left\{ e^{\sqrt{C^1} (r_0 - r)} - e^{-\sqrt{C^1} (r_0 - r)} \right\}$$

expandindo vem:

$$y \approx C_1 e^{-\sqrt{C^1} r_0} \left\{ 2 \sqrt{C^1} (r_0 - r) + \frac{2(\sqrt{C^1})^3}{3!} (r_0 - r)^3 + \dots \right\} \quad (14)$$

Quando  $y(r)$  corta o eixo,  $\rho$  se comporta como na figura 6.

Na região  $r < R_c$  a distribuição de densidade obedece à equação de Euler-Lagrange. À primeira vista parece que se pode utilizar esta região para a solução do problema físico, abandonando a região de  $r > R_c$ , porém vê-se que este tipo de solução não dá o valor mínimo para a energia total.

A forma de  $\rho$  pode ser escrita, na região  $r \leq R_c$ , como:

$$\rho \approx \gamma (R_c - r)^2 \quad (15)$$

onde

$$\gamma = \frac{\rho(r=R_c - \delta)}{\delta^2}$$

Introduzindo uma modificação na curva, isto é, fazendo-a cair exponen-

cialmente, o novo valor da densidade toma a forma:

$$\rho_{\text{mod}} = \gamma \delta^2 e^{-\alpha(R_c - \delta - r)} \quad (16)$$

onde  $\alpha = -\frac{2}{\delta}$  é determinada pela condição de continuidade

$$\left. \frac{d\rho}{dr} \right|_{r=R_c-\delta} = \left. \frac{d\rho_{\text{mod}}}{dr} \right|_{r=R_c-\delta}$$

Para as duas distribuições de densidade,  $\rho$  e  $\rho_{\text{mod}}$  pode-se mostrar que o número total de nucleons  $A$  é proporcional a  $\delta^3$ , logo a diferença entre  $A$  e  $A_{\text{mod}}$  tende mais rapidamente a zero do que  $\delta$ . Isto é: para a região de  $r = 0$  até  $r = R_c$ , o valor de  $A$  é:

$$A = \int_0^{R_c-\delta} \rho r^2 dr + \gamma \int_{R_c-\delta}^{R_c} (R_c - r)^2 r^2 dr$$

$$A = \int_0^{R_c-\delta} \rho r^2 dr + \gamma \left[ \frac{1}{5} R_c^2 \delta^3 - \frac{17}{30} R_c \delta^3 + \frac{R_c \delta^4}{10} + \frac{1}{5} \delta^5 \right]$$

então

$$A - \int_0^{R_c-\delta} \rho r^2 dr = O(\delta^3) \quad (18)$$

e para  $A_{\text{mod}}$  (curva descendo exponencialmente) a forma é:

$$A_{\text{mod}} = \int_0^{R_c - \delta} \rho r^2 dr + \int_{R_c - \delta}^{\infty} \gamma \delta^2 e^{-\alpha(R_c - \delta - r)} r^2 dr$$

$$A_{\text{mod}} = \int_0^{R_c - \delta} \rho r^2 dr + \gamma \left[ \delta^2 \left( \frac{R_c^2 \delta}{2} - \frac{R_c \delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{4} \right) \right]$$

então

$$A_{\text{mod}} - \int_0^{R_c - \delta} \rho r^2 dr = 0(\delta^3) \quad (19)$$

Combinando (14) e (15) vem:

$$A - A_{\text{mod}} = 0(\delta^3) \quad (20)$$

Para a energia total, usando a equação (6), tem-se:

$$E_T = E_1 + \int_{R_c - \delta}^{R_c} \left\{ \varepsilon(\rho) + \frac{\zeta \hbar^2}{8M} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho} \right\} r^2 dr \quad (21)$$

sendo  $E_1$  a energia na região de  $r = 0$  a  $r = R_c - \delta$  e  $\frac{\zeta \hbar^2}{8M}$  uma constante  $C$ .

Sabendo-se que  $\varepsilon(\rho) = \rho E(\rho)$  é a densidade de energia de um meio nuclear uniforme, pode-se considerar  $E(\rho)$  como uma constante  $a_0$ .

Então para a forma da densidade igual a

$$\rho = \gamma(R_c - r)^2$$

a energia total toma a forma:

$$\begin{aligned}
 E_T - E_1 &= 4\pi \int_{R_c - \delta}^{R_c} a_0 \rho \cdot r^2 dr + 4\pi C \int_{R_c - \delta}^{R_c} 4 \gamma r^2 dr \\
 &= 4\pi \gamma a_0 \int_{R_c - \delta}^{R_c} (R_c - r)^2 \cdot r^2 dr + 16\pi C \gamma \int_{R_c - \delta}^{R_c} r^2 dr \\
 E_T - E_1 &= 4\pi \gamma a_0 \left[ \frac{R_c \delta^4}{2} - \frac{R_c^2 \delta^3}{3} - \frac{\delta^5}{5} \right] + 16\pi C \gamma \left[ R_c^2 \delta - R_c \delta^2 - \delta^3 \right]
 \end{aligned}$$

$$E_T - E_1 = 16\pi \gamma C R_c^2 \delta + O(\delta^3) \quad (22)$$

A energia para a densidade modificada fica:

$$\begin{aligned}
 E_{T_{mod}} - E_1 &= 4\pi a_0 \gamma \delta^2 e^{-\alpha(R_c - \delta)} \int_{R_c - \delta}^{\infty} e^{\alpha r} r^2 dr + \\
 &\quad + 4\pi C \alpha^2 \delta^2 \gamma e^{-\alpha(R_c - \delta)} \int_{R_c - \delta}^{\infty} e^{\alpha r} r^2 dr \\
 E_{T_{mod}} - E_1 &= 4\pi a_0 \gamma \left[ \frac{\delta^5}{4} - \frac{R_c \delta^4}{2} + \frac{R_c^2 \delta^3}{2} \right] + 4\pi C \gamma \left[ \frac{\delta^3}{4} - \frac{R_c \delta^2}{2} + \frac{R_c \delta}{2} \right]
 \end{aligned}$$

$$E_{T_{mod}} - E_1 = 4\pi C R_c^2 \delta + O(\delta^2) \quad (23)$$

Logo:

$$E_T - E_{T_{\text{mod}}} = 12 \pi C \gamma R^2 \delta + O(\delta) > 0 \quad (24)$$

As equações (16) e (20) mostram que a distribuição modificada tem menor energia total que a distribuição correspondente à equação (10), tendo o mesmo número total  $A$ .

Assim a solução mais conveniente da equação

$$\frac{d^2 y}{dr^2} = C \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} - \mu \right) y$$

é

$$y \sim C_1 e^{-\sqrt{C} r} \quad (25)$$

A obtenção de  $\mu$  é feita através da resolução de um problema de auto-valores, pois  $\mu$  tem que tomar um determinado valor para um valor fixo de  $\rho_0$ . Pode-se investigar o comportamento do auto-valor  $\mu$  em relação a  $\rho_0$ , nas vizinhança de  $\rho_{00}$ .

Supõe-se que existe uma solução para a equação (8) em concordância com o modelo da gota líquida, isto é, uma solução cuja distribuição, quando  $R \rightarrow \infty$  e  $\rho_0 \rightarrow \rho_{00}$ , é praticamente constante até um certo valor de  $R$  e que possui uma espessura de superfície finita  $\Delta$  (figura 7).

Introduzindo

$$\xi = Rx$$

$$\eta = Ry$$

tem-se

$$\frac{d^2 \eta}{d \xi^2} = CR^2 \left[ \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_0} - \mu \right] \eta \quad (26)$$

onde

$$\rho = \left( \frac{\eta}{\xi} \right)^2$$

Se existe uma solução compatível com o modelo da gota líquida, quando  $\rho_0 \rightarrow \rho_{00}$ ,  $R$  tende a infinito e

$$\eta \rightarrow \sqrt{\rho_0} \xi \theta(1 - \xi)$$

Integrando de 0 a  $\infty$  a equação (22), chega-se a:

$$-1 = \frac{CR^2}{2} \left\{ \frac{d\epsilon}{d\rho_0} - \mu \right\}$$

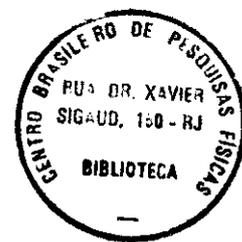
mas  $R$  é função de  $\mu$  e  $\rho_0$ , logo:

quando  $\rho_0 \rightarrow \rho_{00}$  vem

$$\frac{d\epsilon}{d\rho} - \mu = - \frac{2}{CR^2(\mu, \rho_0)} \quad (27)$$

Para se investigar como  $R$  tende ao infinito quando  $\rho_0 \rightarrow \rho_{00}$ , utiliza-se a expressão da energia por partícula. Se o sistema é saturante,  $E/A$  é função não singular em  $\rho_0$ , perto de  $\rho_{00}$ , daí a validade da expansão em  $(\rho_0 - \rho_{00})$

$$\frac{E}{A} = a_0 + a_1(\rho_0 - \rho_{00}) + a_2(\rho_0 - \rho_{00})^2 + \dots \quad (28)$$



Por outro lado a expressão de  $E/A$  no modelo da gota líquida

$$\frac{E}{A} = a_V(\rho_0) + a_S(\rho_0) A(\rho_0)^{-1/3} \dots$$

que, nas proximidades de  $\rho_{00}$ , tem as seguintes expressões para  $a_V(\rho_0)$  e  $a_S(\rho_0)$

$$a_V(\rho_0) = E(\rho_{00}) + K' (\rho_0 - \rho_{00})^2 \dots$$

$$a_S(\rho_0) = a_S(\rho_{00}) + C' (\rho_0 - \rho_{00}) \dots$$

onde  $K'$  e  $C'$  são constantes, fica:

$$\frac{E}{A} = E(\rho_{00}) + a_S(\rho_{00}) A(\rho_0)^{-1/3} + O' [(\rho_0 - \rho_{00})^2] \quad (29)$$

Comparando as equações (24) e (25) tem-se

$$a_S(\rho_{00}) A(\rho_0)^{-1/3} = a_1 (\rho_0 - \rho_{00})$$

$$A^{-1/3} \propto |\rho_0 - \rho_{00}|$$

$$A \propto (|\rho_0 - \rho_{00}|)^{-3} \quad (30)$$

isto é, o número total de nucleons tende a infinito de um modo inversamente proporcional ao cubo de  $|\rho_0 - \rho_{00}|$ .

Sabendo que a densidade é quase constante até  $r = R$  e que

$$A \approx \frac{4\pi}{3} \rho_0 R^3$$

vê-se que

$$R \propto \frac{1}{|\rho_0 - \rho_{00}|} \quad (31)$$

Combinando (23) e (27) vem

$$\frac{d\epsilon}{d\rho_0} - \mu \propto -(\rho_0 - \rho_{00})^2$$

A figura 10, que mostra o auto-valor  $\mu$  em função de  $\rho_0$  nas vizinhanças de  $\rho_{00}$ , fornece uma conclusão muito importante que é a de que a densidade central  $\rho_0$  tem que ser maior que  $\rho_{00}$ . Em outras palavras,  $\rho_0$  tende a  $\rho_{00}$  pelo lado maior de  $\rho_{00}$ , quando o sistema é infinitamente grande.

Isto pode ser provado da seguinte maneira: a diferença entre  $\left. \frac{d\epsilon}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0}$  e  $E(\rho_0)$  é proporcional a  $(\rho_0 - \rho_{00})$ , isto é:

$$\frac{d\epsilon}{d\rho_0} - E(\rho_0) = \rho_0 \frac{d E(\rho_0)}{d\rho_0}$$

Mas

$$E(\rho_0) = E(\rho_{00}) + \frac{K}{9\rho_{00}^2} (\rho_0 - \rho_{00})^2 + \dots \quad (32)$$

Então

$$\frac{d\epsilon}{d\rho} - E(\rho_0) \sim \frac{K}{9\rho_{00}^2} (\rho_0 - \rho_{00}) \quad \text{qdo.} \quad \rho_0 \sim \rho_{00}$$

onde  $K$  é a compressibilidade nuclear. Por outro lado

$$\frac{d\epsilon}{d\rho_0} - \mu \propto (\rho_0 - \rho_{00})^2 \quad (33)$$

Mas

$$E(\rho_0) = E(\rho_{00}) + 0 \left[ (\rho_0 - \rho_{00})^2 \right] \quad (34)$$

Combinando as equações (23), (33) e (34) vem:

$$\begin{aligned} \mu - E(\rho_{00}) &= \frac{K}{9\rho_{00}} (\rho_0 - \rho_{00}) + 0 | (\rho_0 - \rho_{00})^2 \\ &> 0 \quad \text{para } \rho_0 - \rho_{00} > 0 \\ &< 0 \quad \text{para } \rho_0 - \rho_{00} < 0 \end{aligned}$$

Como  $E(\rho_{00})$ , menor energia por partícula para um sistema de  $A$  qualquer, é menor que o potencial químico  $\mu$ , então

$$\rho_0 - \rho_{00} > 0 \quad (35)$$

### *b) Resultados e discussão*

Assumindo a forma da fig. 11 para  $a_1(\xi)$  e conhecendo-se a sua expressão em função de  $\xi$  (equação 2) e os parâmetros  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  e  $\delta_i$  (tabela I), pode-se calcular o valor da densidade de equilíbrio da matéria nuclear  $\rho_{00}$ , correspondente a  $\xi_{00}$ , para a qual  $a_1(\xi) \rightarrow \mu$  quando  $A \rightarrow \infty$ , na ausência da energia coulombiana.

A minimização de  $a_1(\xi)$  permite a determinação dos parâmetros

$$\xi_{00} = 0.8872474 \text{ fm}^{-1}$$

$$\rho_{00} = 0.1667422 \text{ fm}^{-3}$$

$$a_1(\rho_{00}) = -15.9403926 \text{ Mev}$$

Para a execução dos cálculos usa-se um processo de integração de equações diferenciais passo a passo, (método de iteração), fixando-se valores iniciais de  $\rho_0$ , com um valor tentativa de  $\mu$ , o qual é acrescido ou diminuído até ser encontrado o correto auto-valor.

As seguintes condições são levadas em conta para se controlar o acréscimo ou diminuição de  $\mu$ :

- a) se  $\mu$  é menor que o auto valor,  $y(r)$  se comporta como a curva 5 da fig. 5, tende uma certa posição na qual  $dp/dr > 0$  (ou  $d(y/r)/dr > 0$ );
- b) se  $\mu$  é maior que o auto valor,  $y(r)$  se comporta como a curva 6 da fig. 5, ficando negativo.

Sabe-se que o valor máximo de  $\mu$  é zero. Começa-se pois a procurar seu valor adequado a partir daí, diminuindo-o de um certo valor  $\Delta E$  até encontrar a situação a). Encontrando-a volta-se ao valor anterior de  $\mu$ , repetindo este processo com um valor menor de  $\Delta E$  até se conseguir a convergência necessária.

Baseado neste método, foi construído um programa de computador, através do qual são calculadas as distribuições de densidade, espessuras de superfície, energia total e energia de superfície, para qualquer valor de  $\rho_0$ .

A equação 12 pode ser transformada em:

$$\frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{r}^2} = \frac{2M}{\hbar^2} \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} - \mu \right) \bar{y} \quad (36)$$

com

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \alpha y \\ \bar{r} &= \alpha r \end{aligned} \quad \text{sendo} \quad \alpha = \sqrt{\xi} \quad (37)$$

Como todos os cálculos foram feitos através da equação (36) a comparação dos resultados obtidos com os experimentais leva a uma estimativa do valor de  $\xi$  através da relação (37).

A constante de proporcionalidade  $\alpha$  foi achada da seguinte maneira: calculando  $\bar{\Delta}$  (largura de superfície) a partir da equação (36), correspondente à largura de superfície experimental, pela distribuição de densidade calculada, vimos que ela tende a um valor constante igual a 3.5; usando a transformação (37), a espessura de superfície  $\Delta$ , da distribuição de densidade da equação (12), está relacionada com  $\bar{\Delta}$  por:

$$\bar{\Delta} = \alpha \Delta$$

Escolhendo  $\Delta$  com o valor experimental de 2.4 fm o valor de  $\alpha$  será:

$$\alpha = \frac{3.5}{2.4} = 1.45$$

O número total de nucleons, por sua vez, será:

$$A = \alpha^{-3} \bar{A} \quad \text{onde} \quad \bar{A} = \int \rho \bar{r}^2 d\bar{r}$$

São mostrados na fig. 12 dois exemplos de distribuições de densidade para o  $\text{Ca}^{40}$  e o  $\text{Pb}^{208}$ .

Deve ser notado que estes cálculos não levam em conta a energia Coulombiana, de modo que a comparação com os dados experimentais não pode ser considerada rigorosamente. De fato a densidade central calculada saiu maior que a experimental. Uma parte desta diferença pode ser atribuída à energia Coulombiana.

Com o valor ajustado de  $\zeta$ , foram calculados os valores da energia total, da energia de superfície e do seu coeficiente  $a_s$ .

$$E_T = \zeta^{-3/2} \bar{E}_T$$

$$S = \zeta^{-3/2} \bar{S}$$

$$a_s = \zeta^{-1/2} \bar{a}_s$$

onde  $E_T$ ,  $S$  e  $a_s$  são calculados através da equação (12), enquanto que  $\bar{E}_T$ ,  $\bar{S}$  e  $\bar{a}_s$ , através da equação (36).

Daqui em diante se considerará sempre  $\alpha = 1.45$ , isto é,  $\zeta = 2.10$ . Foram obtidos para a distribuição de densidade, calculadas pelo modelo estatístico, resultados que mostram uma consistência qualitativa com os resultados experimentais.

Na fig. 14 vê-se a mudança de  $A$  em função de  $\rho_0$  (densidade central). A posição da densidade da matéria nuclear é aí indicada. Para núcleos mais leves que o  $\text{Ca}^{40}$ , a curva muda bruscamente sua tendência. Neste ponto começam a aparecer efeitos provocados pelos termos mais altos da expansão em  $A^{1/3}$  da gota líquida.

Na região dos núcleos mais pesados do que o  $\text{Ca}^{40}$ , nota-se que a derivada do número de nucleons  $A$  em relação a  $\rho_0$  ( $dA/d\rho_0$ ) é negativa, concordando com a desigualdade (35). Este fato está ligado ao comportamento da energia de superfície em relação a  $\rho_0$ . Vê-se que quando a densidade central tende ao valor correspondente à matéria nuclear, o núcleo fica infinitamente grande. Para núcleos grandes mas finitos a tensão de superfície comprime a região central provocando o aumento da densidade acima da da matéria nuclear por uma quantidade que depende da razão superfície/volume (proporcional a  $A^{1/3}$ ). Este desvio cresce à medida que o núcleo se torna menor até que alcança seu valor máximo para núcleos com  $A \sim 40$ . Abaixo deste valor a densidade central diminui com o decréscimo do número de massa; para núcleos mais leves o modelo estatístico não funciona bem, nem a expansão da gota líquida em  $A^{1/3}$  é válida.

Para se constatar se os resultados estão coerentes com a expansão da gota líquida, foi calculada a relação entre  $A$  e  $(\rho_0 - \rho_{00})$  através da fig.16.

Verificou-se que a inclinação da reta  $\ln A \times \ln (\rho_0 - \rho_{00})$  é aproximadamente  $-3$ , o que está de acordo com o modelo da gota líquida, como pode ser visto na equação (31).

Da relação

$$A \rightarrow \frac{\sigma_0}{(\rho_0 - \rho_{00})^3} + \frac{\sigma_0}{(\rho_0 - \rho_{00})^2} + \dots \quad (38)$$

onde  $\sigma_0$  é uma constante, foi achado o valor de 0.115 para  $\sigma_0^{1/3}$ .

Como o objetivo deste trabalho é comparar a fórmula de massa e o modelo estatístico, será interessante observar o comportamento dos coeficientes da expansão:

$$E_T = a_1(\rho_0) A(\rho_0) + a_2(\rho_0) A^{2/3}(\rho_0) + a_3(\rho_0) A^{-1/3}(\rho_0) + \dots \quad (39)$$

obtida pelo modelo da gota líquida, onde  $a_1(\rho_0)$  é tomado como o coeficiente de volume da fórmula de massa  $a_v(\rho_0)$ .

O valor de  $a_2(\rho_0)$ , correspondente ao coeficiente de superfície  $a_s(\rho_0)$ , em  $\rho_0 = \rho_{00}$ , pode ser calculado através da análise do gráfico  $\varphi(\rho_0) \times \rho_0$  onde  $\varphi(\rho_0)$  é definido como:

$$\varphi(\rho_0) = \frac{E_T - a_1(\rho_0)A(\rho_0)}{A^{2/3}(\rho_0)} = a_2(\rho_0) + a_3(\rho_0) A^{-1/3} \quad (40)$$

em função de  $\rho_0$ .

Supondo que  $a_3(\rho_0)$ , em  $\rho_0 = \rho_{00}$ , não tem singularidade, o valor de  $\varphi(\rho_0)$ , em  $\rho_0 = \rho_{00}$ , dá  $a_2(\rho_{00})$ . O valor achado para  $a_2(\rho_{00})$  foi de 12.6 Mev, enquanto o correspondente calculado através da fórmula de massa é 19.368 Mev. Esta diferença pode ser proveniente da ausência da energia Coulombiana em nossa análise, bem como dos seus altos termos, na expansão da fórmula de massa.

A derivada de  $a_2(\rho_0)$  em relação a  $\rho_0$ , também pode ser calculada.

Pensando num sistema de A nucleons, com coeficiente de volume  $a_v(\rho_0)$ , coeficiente de superfície  $a_s(\rho_0)$  e energia total dada por

$$E_T = a_v(\rho_0) A + a_s(\rho_0) A^{2/3} + \dots$$

no estado fundamental  $\rho_0$ , a seguinte equação resulta:

$$\frac{dE_T}{d\rho_0} = a'_v(\rho_0) A + a'_s(\rho_0) A^{2/3} + \dots = 0$$

daí

$$a'_s(\rho_0) = - a'_v(\rho_0) A^{1/3} \quad (41)$$

até primeira ordem em  $A^{1/3}$ .

Sabendo que

$$a'_v(\rho_0) = \frac{K}{9\rho_{00}^2} (\rho_0 - \rho_{00})$$

$$A \sim \frac{\sigma_0}{(\rho_0 - \rho_{00})^3}$$

quando  $\rho_0 \rightarrow \rho_{00}$ , a substituição destas relações na equação (41) leva a

$$a'_s(\rho_{00}) = \frac{-K}{9\rho_{00}^2} \sigma_0^{1/3} \quad (42)$$

Colocando-se os valores

$$K = 112.5129 \text{ Mev}$$

$$\sigma_0^{1/3} = 0.115 \text{ fm}^3$$

$$\rho_{00} = 0.1667 \text{ fm}^{-3}$$

vem que

$$a'_s(\rho_{00}) = - 51.34 \text{ Mev fm}^3 \quad (43)$$

Myers-Swiatecki [28], investigando o comportamento do coeficiente de superfície na densidade de equilíbrio da matéria nuclear, através do modelo da gotícula, chegaram à seguinte relação para a derivada de  $a_s(\xi)$  em relação a  $\xi$ , no ponto  $\xi_0 = \xi_{00}$ :

$$\left. \frac{d}{d\xi} (\xi^2 a_s(\xi)) \right|_{\xi = \xi_{00}} = 0 \quad (44)$$

Em função de  $\rho_0$  esta relação fica, para  $\rho = \rho_{00}$ :

$$\left. \frac{da_s}{d\rho} \right|_{\rho = \rho_{00}} = \frac{-2}{3\rho_{00}} a_s(\rho_{00})$$

que dá para  $a'_s(\rho_{00})$ , considerando o valor calculado de  $a_s(\rho_{00})$  igual a 12.65 Mev, o valor de

$$a'_s(\rho_{00}) = -50.4 \text{ Mev} \quad (45)$$

Considerando que existe uma grande incerteza na estimativa do valor de  $\sigma_0$ , calculado pelo gráfico (fig. 4), a coincidência observada entre as equações (43) e (45) é muito boa. Este fato parece mostrar que o modelo estatístico obedece às restrições impostas por Myers-Swiatecki de que a região de superfície dos núcleos de grande massa e a sua região interna estão bem separadas.

O terceiro termo na equação (3) é chamado correção de curvatura.

Derivando a função  $\varphi(\rho_0)$ , equação (40), em relação a  $\rho_0$  encontra-se o valor da correção de curvatura  $a_3(\rho_{00})$  em  $\rho_0 = \rho_{00}$

Myers-Swiatecki [28], investigando o comportamento do coeficiente de superfície na densidade de equilíbrio da matéria nuclear, através do modelo da gotícula, chegaram à seguinte relação para a derivada de  $a_s(\xi)$  em relação a  $\xi$ , no ponto  $\xi_0 = \xi_{00}$ :

$$\left. \frac{d}{d\xi} (\xi^2 a_s(\xi)) \right|_{\xi = \xi_{00}} = 0 \quad (44)$$

Em função de  $\rho_0$  esta relação fica, para  $\rho = \rho_{00}$ :

$$\left. \frac{da_s}{d\rho} \right|_{\rho = \rho_{00}} = \frac{-2}{3\rho_{00}} a_s(\rho_{00})$$

que dá para  $a'_s(\rho_{00})$ , considerando o valor calculado de  $a_s(\rho_{00})$  igual a 12.65 Mev, o valor de

$$a'_s(\rho_{00}) = -50.4 \text{ Mev} \quad (45)$$

Considerando que existe uma grande incerteza na estimativa do valor de  $\sigma_0$ , calculado pelo gráfico (fig. 4), a coincidência observada entre as equações (43) e (45) é muito boa. Este fato parece mostrar que o modelo estatístico obedece às restrições impostas por Myers-Swiatecki de que a região de superfície dos núcleos de grande massa e a sua região interna estão bem separadas.

O terceiro termo na equação (3) é chamado correção de curvatura.

Derivando a função  $\varphi(\rho_0)$ , equação (40), em relação a  $\rho_0$  encontra-se o valor da correção de curvatura  $a_3(\rho_{00})$  em  $\rho_0 = \rho_{00}$

$$\frac{d\varphi}{d\rho_0} = a'_2(\rho_0) + a'_3(\rho_0) A^{-1/3}(\rho_0) - \frac{1}{3} a_3(\rho_0) A^{-4/3}(\rho_0) \frac{dA}{d\rho_0} + \dots \quad (46)$$

Sabendo que quando  $\rho_0 \rightarrow \rho_{00}$ ,  $A \rightarrow \infty$ , então:

$$a_3(\rho_0) = - \frac{a'_s(\rho_0) - \varphi'(\rho_0)}{A^{-1/3}(\rho_0)}$$

vê-se que  $a_3(\rho_0) > 0$  se  $\frac{d}{d\rho} \left\{ \frac{E_T - a_1 A}{A^{2/3}} \right\} > a'_2$

como

$$\varphi'(\rho_{00}) = 102 \quad (\text{fig.16})$$

e

$$a'_2(\rho_{00}) = \frac{-K \sigma_0^{1/3}}{9\rho_{00}^2}$$

então

$$a_3(\rho_{00}) = 27.84 \text{ Mev} \quad (47)$$

O valor encontrado por Myers-Swiatecki [28] para a correção de curvatura, no caso do modelo da gotícula, foi

$$a_3(\rho_{00}) = 9,34 \text{ Mev} \quad (48)$$

Vale a pena notar que tanto o valor achado pelo modelo estatístico como pelo modelo da gotícula, de Myers-Swiatecki, são positivos.

Nesta seção foi feita uma análise sobre algumas propriedades fundamen-

tais obtidas pelo modelo estatístico para sistemas eletricamente neutros, usando uma densidade de energia conveniente.

As distribuições de densidade encontradas são razoáveis na sua forma, apesar dos valores das densidades centrais estarem um pouco longe das experimentais, devido, em grande parte, ao fato de não se ter usado a energia Coulombiana.

Há dificuldades em se encontrar uma energia de superfície coerente com a fórmula de massa da qual está análise partiu. O valor obtido para seu coeficiente  $a_s$ , para a densidade de equilíbrio da matéria nuclear, usando o modelo estatístico, de cerca de 12.65 Mev (fig. 5), está bem baixo do resultado encontrado através da equação (2), tirada diretamente da fórmula de massa, que é -19.37 Mev.

Insistindo na consistência entre o modelo estatístico e o modelo da gota líquida, se se separa a parte aditiva da energia Coulombiana na energia total, a construção da fórmula de massa deveria obedecer à restrição de Myers-Swiatecki, baseada na suposição de que a região de superfície está bem separada da região interna dos núcleos, pois assim os outros termos da energia total não sofreriam influência dos termos de maior ordem da energia Coulombiana.

Mas independente do fato de que os núcleos reais são muito mais complexos, a energia Coulombiana não deve aparecer somente como um termo aditivo, desde que ela produz efeitos secundários sobre a forma da distribuição de densidade.

O valor  $a'_s(\rho_{00}) = -13.157 \text{ Mev fm}^3$ , calculado empiricamente através da derivada da fórmula de massa (equação 2), deu bastante fora do valor encontrado com a condição de Myers-Swiatecki, isto é:

$$\left( \frac{a'_s}{a_s} \right)_{\text{emp}} = \left( \frac{a'_s}{a_s} \right)_{\text{MS}} = - \frac{2}{3\rho_{00}} \quad (49)$$

Este grande desvio sugere que o  $a_s(\rho_{00})$  calculado pela fórmula de massa não pode ser identificado com o valor de  $a_1(\rho_{00})$  dado pelo modelo estatístico, no caso de uma componente.

Foi constatado também que a correção de curvatura contribui para a energia total da mesma maneira que a energia de superfície, isto é, positivamente,

O valor de 27.84 Mev encontrado para seu coeficiente  $a_3$  é bastante maior que o de Myers-Swiatecki.

Vê-se então que existe uma consistência qualitativa entre os resultados obtidos empiricamente pela fórmula de massa com os calculados pelo modelo estatístico. Esta consistência entretanto, não é boa do ponto de vista quantitativo, pois, para isto, como foi visto, deveria ter sido levada em conta a energia Coulombiana com seus termos de ordem superior.

Neste sentido é interessante avançar a análise para sistemas de duas componentes, na qual devem ser considerados os termos de correção de Brueckner e das partes direta e de troca da energia Coulombiana.

Isto será visto nos próximos itens deste capítulo.

## 2 - SISTEMAS DE DUAS COMPONENTES

Assim como o sistema a uma componente, também os formados por duas componentes, que envolvem dois parâmetros,  $A$  e  $I(=N-Z)$ , podem constituir agregados de partículas finitas e estáveis. As distribuições de densidade de tais sistemas podem ser determinadas pelo uso de um procedimento variacional

que investiga quais as distribuições de protons e neutrons que minimizam a energia total do sistema.

a) Método de cálculo

Considerando os termos de correção introduzidos por Weizsacker e Brueckner e levando em conta a energia Coulombiana direta e de troca, a energia total de um núcleo, com número de protons e neutrons diferentes, toma a seguinte forma:

$$E_T = \int \left\{ \varepsilon(\rho_n, \rho_p) + \frac{\hbar^2}{8M} \left[ \zeta \frac{(\nabla\rho)^2}{\rho} + \eta(\nabla\rho)^2 \right] \right\} d\tau + E_C(\rho_p, r) \quad (43)$$

onde  $\rho = \rho_n + \rho_p$ ,  $E_C$  é a energia Coulombiana e a densidade de energia  $\varepsilon(\rho_n, \rho_p)$  é dada por:

$$\varepsilon = a_V(\rho) + a_{sim}(\rho) \frac{(\rho_n - \rho_p)^2}{(\rho_n + \rho_p)^2} \quad (6)$$

Como antes,  $a_V(\rho)$  é o coeficiente do termo de volume e  $a_{sim}(\rho)$  é o coeficiente da energia de simetria.

Nota-se que o termo da energia de simetria na fórmula de massa não é analisado separadamente como energia de simetria de volume e de superfície. Em princípio não se poderia usar a tabela I, mas assumindo que a energia de simetria de superfície é menor que a de volume, identificamos, numa primeira tentativa, o  $a_{sim}$  do modelo estatístico com o  $a_3$  da equação (2).

A energia Coulombiana direta se expressa como:

$$E_C^{dir} = \frac{1}{2} \iint \frac{\rho_p(\vec{r}_1) \rho_p(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \quad (51)$$

que pode ser reescrita como

$$E_C^{dir} = (4\pi)^2 \int_0^\infty r \rho(r) \left[ \int_0^r r_1^2 \rho(\vec{r}_1) d\vec{r}_1 \right] dr \quad (52)$$

para o caso de simetria esférica considerado nos cálculos feitos no presente trabalho.

A energia Coulombiana de troca fica:

$$E_C^{tr} = \frac{|\rho(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} dr_1 dr_2$$

onde  $|\rho(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|$  é função correlação de dois corpos. Usando a aproximação do gás de Fermi para  $|\rho(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|^2$ , e desprezando efeitos de superfície, tem-se:

$$E_C^{tr} = - \frac{3}{4} \left( \frac{3}{2\pi} \right)^{2/3} \frac{e^2}{R^2} Z^{4/3} \quad (53)$$

Os coeficientes  $\eta$  e  $\zeta$  representam interações nucleares e correlações nucleon-nucleon. Em princípio  $\eta$  e  $\zeta$  têm que ser determinados ajustando várias propriedades do sistema dado pela equação (50). As quantidades que podem ser comparadas com as obtidas experimentalmente são: a energia total e a forma da distribuição de densidade.

Como já foi notado, a energia de simetria da fórmula de massa inclui a energia de simetria de volume e a energia de simetria de superfície. Se a energia de simetria de volume fosse conhecida, poder-se-ia ajustar  $\eta$  e  $\zeta$  por uma análise semelhante à feita para sistemas a uma componente; isto é, achar

valores de  $\eta$  e  $\zeta$  que minimizassem as diferenças entre os resultados experimentais e os calculados, para a energia total, a posição da linha de estabilidade beta, a espessura de superfície e o raio nuclear, para qualquer valor de A.

Porém, como a incerteza no conhecimento da energia de simetria de volume afeta os valores de  $\eta$  e  $\zeta$ , não teria muito sentido fazer este tipo de análise. Então foi escolhido um conjunto de valores para  $\eta$  e  $\zeta$ , de tal maneira que fossem obtidas distribuições de densidade razoáveis para vários valores de A, possibilitando um estudo sobre o comportamento grosso da estrutura nuclear pelo modelo estatístico.

Para se calcular as distribuições de densidade no estado fundamental, foi, inicialmente, usado o mesmo raciocínio empregado no caso de uma componente. Isto é, minimização da energia total em relação a  $\rho_n(r)$  e  $\rho_p(r)$  separadamente, e calculada a equação diferencial de segunda ordem resultante. Porém esta maneira se mostrou inadequada devido ao enorme tempo dispendido para se obter um auto-valor do potencial químico  $\mu$ , de modo que as densidades de neutrons e protons caíssem assintoticamente a zero ao mesmo tempo. O ajuste por tentativa não foi bem sucedido pois a tendência da distribuição era cortar sempre o eixo dos r, o que tornava a densidade negativa.

Assim foi alterada a maneira de se resolver o problema.

Em primeiro lugar assumiu-se uma distribuição uniforme de carga com a forma:

$$\begin{aligned}\rho_n &= \rho_{on} \left[ 1 + \exp \left( \frac{r - R}{a} \right) \right]^{-1} \\ \rho_p &= \rho_{op} \left[ 1 + \exp \left( \frac{r - R}{a} \right) \right]^{-1}\end{aligned}\tag{54}$$

de onde se determinam dois parâmetros: o raio médio  $R$  e a espessura de superfície  $t$ . O raio médio  $R$  é a distância para a qual a densidade cai de metade do seu valor central, e a espessura de superfície  $t$  é:  $t = (4 \ln 3)a = 4.39a$ .

Os parâmetros poderiam ser escolhidos separadamente, mas assumindo que o efeito de polarização neutron-proton é pequeno, foram usados parâmetros iguais para simplificar os cálculos.

A densidade central é determinada pela integral de normalização:

$$A = \int \rho d\tau = \rho_0 \frac{4\pi}{3} R^3 \left[ 1 + \left( \frac{\pi a}{R} \right)^2 \right] \quad (55)$$

sendo

$$A < \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0 \quad \text{onde} \quad \rho_0 = \rho_{on} + \rho_{op}$$

O primeiro passo para a resolução do problema consiste em verificar qual a combinação de valores dos parâmetros para as distribuições de densidade que fornece o menor valor da energia. Isto foi feito ajustando os valores de  $\rho_0$  e  $R$ , onde  $\rho_{on} = \frac{N}{A} \rho_0$  e  $\rho_{op} = \frac{Z}{A} \rho_0$ .

Foi utilizado para este cálculo o algoritmo de minimização de uma função para qualquer número de parâmetros, construído por Powell [44].

#### *b) Resultados e discussão*

Os valores calculados para  $\eta$  e  $\zeta$  que dão formas convenientes para as distribuições de densidade são:  $\eta = 2.0726 \text{ fm}^3$  e  $\zeta = 0.7074$  (adimensional).

Nas figuras 17, 18, 19, 20, 21 e 22 são mostradas as curvas de den

sidades de alguns elementos, comparando as calculadas com as experimentais [45].

O comportamento do raio  $R$  em função de  $A^{1/3}$  é mostrado na fig. 23, com boa concordância com os valores observados, dando para  $r_0$  (raio do volume médio por nucleon) um valor de aproximadamente  $(1.1 \pm 0.05)$  fm.

A fig. 24 dá as densidades centrais em função de  $A$  e na fig. 25 são vistas as espessuras de superfície calculadas e experimentais, em função de  $A^{1/3}$ .

Foi investigado também o comportamento dos núcleos sobre a linha de estabilidade beta, que mostra a distribuição dos isóbaros estáveis contra o decaimento beta e a captura eletrônica.

A linha de estabilidade beta experimental é expressa pelo valor da diferença entre o número de neutrons e protons que dá o menor valor da parábola de massa, para um determinado  $A$ . Este valor, que é denominado  $I_{oexp}(A)$ , geralmente não é inteiro e não corresponde a um núcleo real.

Se se faz um gráfico de  $I_{oexp}(A)$  contra  $A$ , a estrutura detalhada da linha dificilmente aparece. Por isto é utilizada a prática de analisar os desvios em relação a uma linha de referência [8].

Foi usada a fórmula de referência, tipo Weizsacker-Bethe [8], cujos coeficientes foram determinados através de considerações sobre as medidas da linha de estabilidade beta e do excesso de massa. O excesso de massa ( $^{12}C$  como padrão) é escrito como:

$$M_{E_{ref}} c^2 = (7.68004 - 15.88485) A + 0.39131 I + 18.32695 A^{2/3} + \\ + 23.64332 \frac{I^2}{A} + 0.71994 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \text{ Mev} \quad (56)$$

Os termos 7.68004 e 0.39131 são determinados a partir das massas em repouso do neutron,  ${}^1\text{H}$  e  ${}^{12}\text{C}$  [44]. O coeficiente da energia Coulombiana corresponde a uma distribuição uniforme de carga nuclear com  $r_0 = 1.2 \times 10^{-13}$  cm ( $r_0$  sendo o raio do volume médio por nucleon).

A linha de estabilidade beta de referência [24] é obtida como a solução de:

$$\left. \frac{\partial M_{E_{\text{ref}}} c^2}{\partial I_0} \right|_{I_0 = I_{0\text{ref}}} = 0$$

e dá

$$I_{0\text{ref}} = \frac{0.35997 A^{2/3} - 0.39131}{0.35997 A^{2/3} + 47.28664} A \quad (57)$$

A linha de estabilidade beta experimental, medida a partir da linha de referência, é dada pela fig. 26, na qual a linha em ziguezague é a experimental, a tracejada é a linha experimental suavizada e a sólida é a linha considerada aqui como a ideal.

A linha "ideal" também é a suavização da experimental, porém como não se consideram núcleos muito leves, não pode aparecer o termo de Wigner [46, 47] que dá o efeito em forma de V no início da curva.

A fig. 27 mostra a linha experimental do excesso de massa (linha em ziguezague), em cima da linha de estabilidade beta, medida da fórmula de referência de Weizsacker-Bethe, e a linha suavizada (linha sólida).

A curva tracejada na fig. 28 representa a linha de estabilidade beta

calculada. Observa-se que ela sobe muito rápido com  $A$  em relação à linha experimental suavizada (linha sólida).

Na fig. 29, o excesso de massa sobre a linha de estabilidade beta é mostrada na curva tracejada. Sua tendência é cair rapidamente em relação à experimental, para altos valores de  $A$ .

A posição calculada dos núcleos estáveis contra o decaimento beta e a captura eletrônica, demonstra que eles são mais ricos em neutrons do que os núcleos reais (fig. 28). Como a posição da linha de estabilidade beta é determinada principalmente pela competição entre a energia de simetria e a energia Coulombiana, este fenômeno indica que, no modelo aplicado neste trabalho, ou a energia Coulombiana foi superestimada ou a de simetria, subestimada.

Por outro lado a fig. 29 indica que este modelo superestima a parte da energia de ligação que cresce com  $A$ .

Ligando-se as duas análises, chega-se a conclusão que a energia de simetria foi subestimada. Esta conclusão se fortalece no fato de que a fórmula de massa foi analisada com a energia de simetria incluindo o efeito de superfície que sempre diminui o efeito de volume. Então o  $a_3$  da equação (2) é o valor efetivo do coeficiente da energia de simetria, desde que é afetado pelo efeito de superfície.

Considerando-se isto, tentou-se investigar o comportamento da linha de estabilidade beta e do excesso de massa, em função do coeficiente de simetria. Como se tem um conhecimento "a priori" de  $a_3$ , foram feitos os cálculos com um aumento de aproximadamente 20 e 30% no valor original de  $a_3$ .

Os resultados são mostrados nas figuras 28 e 29, onde a linha pontilhada representa a calculada com 20% de aumento em  $a_3$ , e a tracejada-pontilhada, com 30%.

A melhor curva do excesso de massa, (com aumento de 20%), fica quase paralela à curva experimental, mostrando que a dependência da energia total com  $A$  foi bem comprovada.

A posição da linha de estabilidade beta também aparece bem próxima da linha experimental.

Para se calcular a energia de superfície, sem considerar a energia Coulombiana, usa-se a equação:

$$E_T = a_v A + a_s A^{2/3} + a_h A^{1/3} + \dots$$

$$\frac{E_T - a_v A}{A^{2/3}} = a_s + a_h A^{-1/3} + \dots \quad (58)$$

onde  $a_h$  é a correção de curvatura.

A fig. 30 mostra  $(a_s + a_h A^{-1/3}) \times A^{-1/3}$ . Vê-se que à medida que os núcleos se tornam mais pesados ( $A > 250$ ), a energia de superfície cai rapidamente. Isto se deve aos efeitos da correção de segunda ordem da energia Coulombiana que estão influenciando de tal maneira que alteram a distribuição de densidade dos núcleos pesados. A correção de primeira ordem da energia Coulombiana afeta somente a energia total e não a distribuição nuclear.

Por isso tem-se que ter cuidado ao se analisar a fórmula de massa, tratando-a com uma energia Coulombiana não somente aditiva mas com todos os seus efeitos secundários na região dos núcleos. A análise feita para duas componentes mostrou também a importância da energia de simetria.

◊ ◊ ◊

## CAPÍTULO IV

### CONCLUSÃO

A estrutura nuclear tem sido estudada exaustivamente através de vários métodos. Para se obter propriedades grossas das quantidades nucleares, as fórmulas de massa têm se mostrado bastante eficientes. As mais usuais consideram núcleos incompressíveis e são baseadas no modelo da gota líquida. Reproduzem bastante bem as energias nucleares de ligação, porém o comportamento da linha de estabilidade beta mostra desvios sistemáticos na região mais pesada.

A introdução da compressibilidade nuclear mostrou a influência que ela exerce sobre a linha de estabilidade beta, porém ainda não se constatou a extensão desta influência, isto é, de que maneira a compressibilidade afeta os termos de volume e superfície. Por isto se faz necessário analisar estes termos separadamente.

Brueckner [48], usando uma funcional da densidade de energia nuclear consistente com a teoria de muitos corpos, admitindo uma interação de curto alcance, verificou que existe, realmente, uma significativa incerteza nas extrapolações feitas com a fórmula de massa convencional, onde a energia é função de  $A$  e  $Z$ , nas regiões mais pesadas.

Estudando elementos super-pesados através de cálculos por processo-r, usando a densidade de energia da fórmula de massa [48], Brueckner, em recente trabalho, [49], também verificou uma boa concordância com os resultados obtidos pela análise empírica de massa feita por Kodama [24] e mostrou que as linhas de estabilidade beta possuem menor curvatura para núcleos com altos va-

lores de  $Z$  do que os previstos pelas fórmulas de massa convencionais. Estas considerações indicam a importância da compressibilidade nuclear na investigação do comportamento da linha de estabilidade beta.

Vê-se então, que a real influência da compressibilidade nuclear não foi ainda estabelecida satisfatoriamente. Sabe-se, no entanto, que para núcleos compressíveis, com altos valores de  $Z$ , a energia Coulombiana, além de provocar um decréscimo na energia de ligação, faz com que o núcleo se expanda. A diminuição no valor da energia de ligação é menor do que para núcleos incompressíveis.

Este trabalho se propõe a dar mais uma contribuição ao estudo macroscópico das propriedades médias dos núcleos tentando reproduzir as linhas experimentais da estabilidade beta e do excesso de massa, sem considerar efeitos de camada, através de um modelo estatístico, baseado no método de Thomas Fermi.

Tomando como ponto de partida a teoria da matéria nuclear, assume-se conhecida a expansão funcional da densidade de energia de matéria nuclear  $\epsilon(\rho)$  (núcleos infinitos), tirada através da fórmula de massa de Weizsacker-Bethe (tipo gota líquida), generalizada para núcleos compressíveis, para a investigação de núcleos finitos.

Foram estudados sistemas com densidades de prótons e nêutrons iguais sem energia coulombiana e sistemas com densidades diferentes considerando a energia Coulombiana com suas partes direta e de troca.

Para sistemas com  $N=Z$  verificou-se que as distribuições de densidade encontradas possuem densidades centrais um pouco longe das experimentais, devido ao fato de não se ter usado a energia Coulombiana.

O valor obtido pelo modelo estatístico para o coeficiente  $a_s$  da energia de superfície é bem menor que o encontrado pela fórmula de massa. A cor

reção de curvatura, por sua vez, tem um coeficiente bem maior que o calculado por Myers-Swiatecki. A sua contribuição é positiva, tal como a da energia de superfície.

A boa concordância encontrada entre os valores de  $a'_s(\rho_{00})$  obtidos pelo modelo estatístico e pela relação de Myers-Swiatecki, apesar da incerteza no valor de  $\sigma_0$ , sugere que o modelo estatístico obedece às restrições de Myers-Swiatecki de que a região de superfície dos núcleos é bem separada da região interna.

O grande desvio entre  $a'_s(\rho_{00})$ , calculado diretamente pela fórmula de massa e o valor dado por Myers-Swiatecki, parece mostrar que o  $a_s(\rho_{00})$  da fórmula de massanão pode ser identificado com o  $a_2(\rho_{00})$  dado pelo modelo estatístico.

Foi verificada também a relação entre o número de nucleons  $A$  com a diferença entre  $\rho_0$  e  $\rho_{00}$ . Achou-se  $A \propto (\rho_0 - \rho_{00})^{-3}$  consistente com a expansão da gota líquida.

Sistemas com densidades de protons e neutrons diferentes foram analisados para se investigar os efeitos da energia Coulombiana.

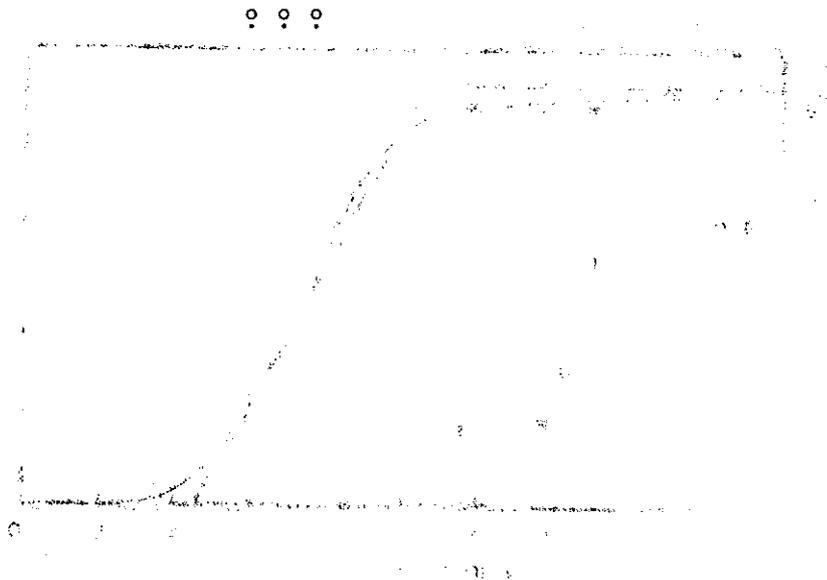
Com os valores tentativa dos parâmetros de superfície, algumas propriedades dos núcleos, neste modelo, foram calculadas.

Para se obter o melhor comportamento da linha de estabilidade beta e do excesso de massa, tem-se que aumentar de 20% o valor de  $a_3$  da fórmula de massa.

A análise feita para  $a_s$ , neste modelo, indicou que o efeito da energia Coulombiana junto com a compressibilidade nuclear altera as propriedades de  $a_s$  em relação às obtidas quando se considera núcleos incompressíveis. Para sistemas compressíveis com energia Coulombiana a condição de Myers-Swiate-

cki não deve ser obedecida por causa do caráter de longo alcance da força Coulombiana. Faz-se necessária, então, a construção de uma fórmula de massa que inclua os efeitos da compressibilidade e de todos os efeitos da energia Coulombiana, consistentemente.

O tipo de investigação executado possibilita um trabalho futuro com o objetivo de estimar quantidades nucleares com maior precisão, como  $a_V(\rho)$  e  $a_{sim}(\rho)$ , aprimorando a fórmula de massa, com a inclusão de efeitos efetivos dos termos de mais alta ordem da energia Coulombiana, fazendo com que se possa extrapolá-la para regiões desconhecidas e permitindo uma comparação com resultados dos cálculos de Brueckner[48], pela teoria de muitos corpos.



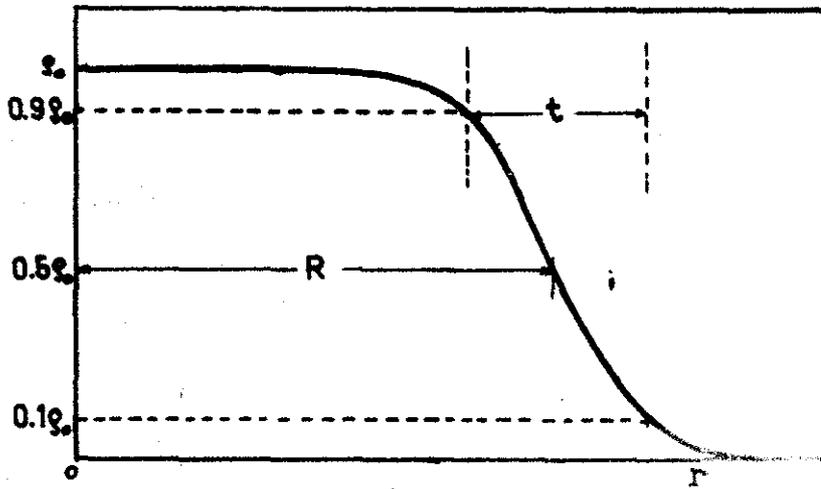


FIG. 1

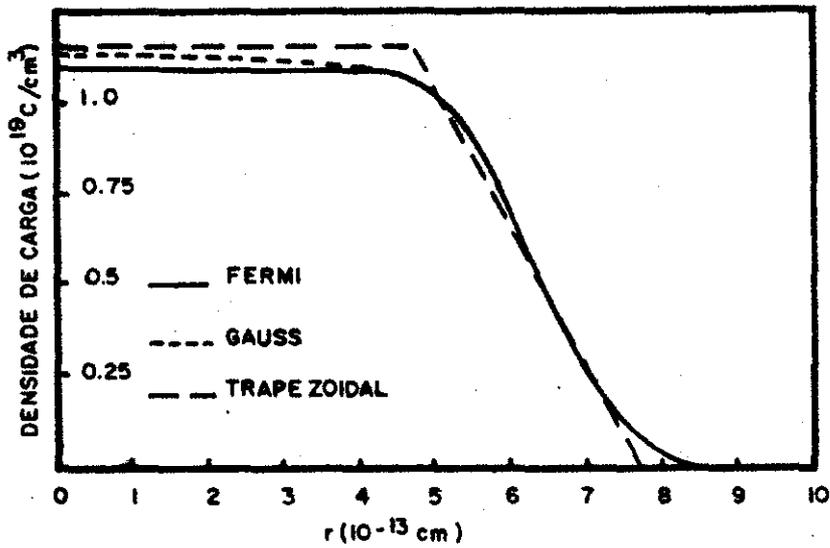
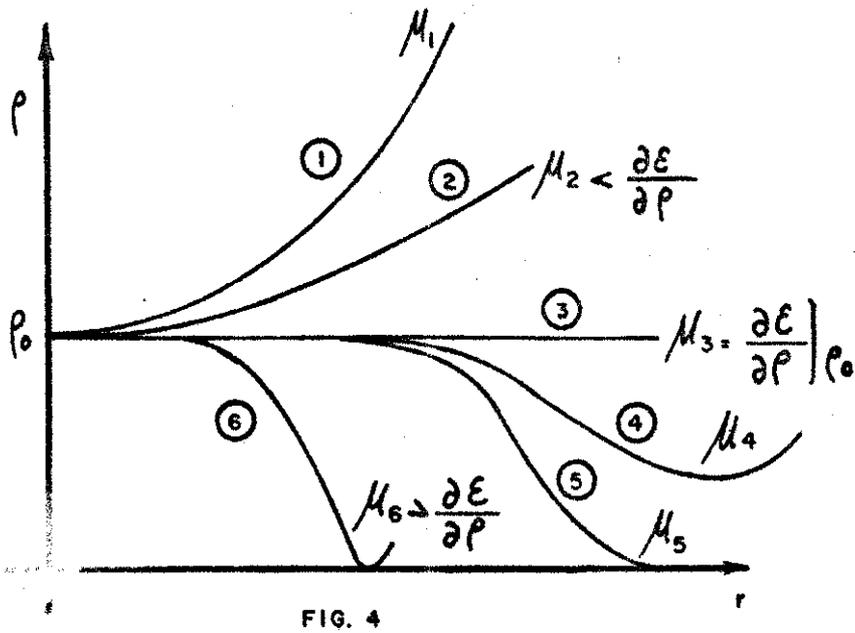
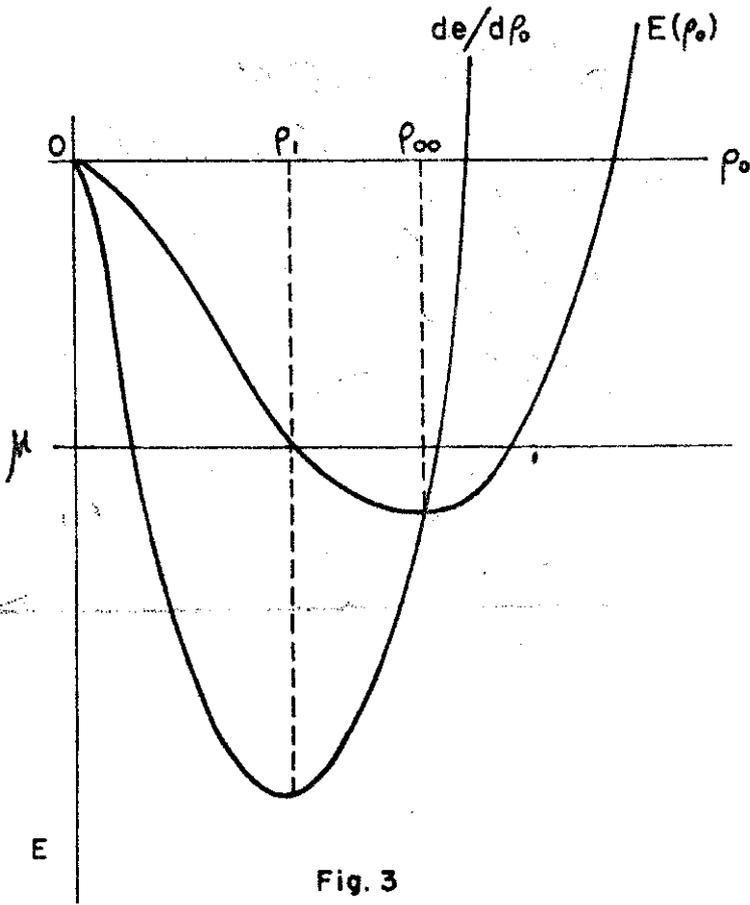


FIG. 2



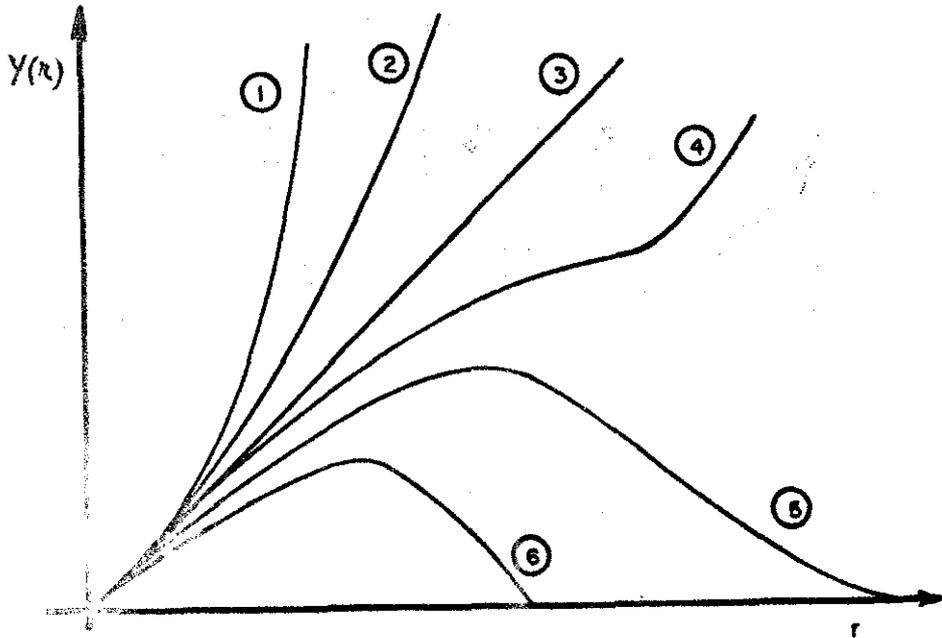


FIG. 5

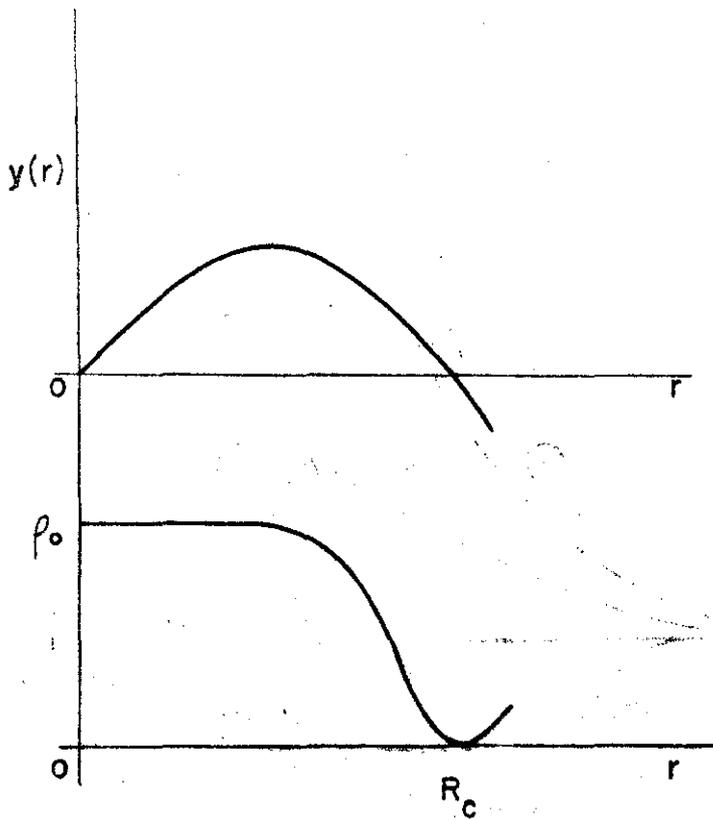


FIG. 6

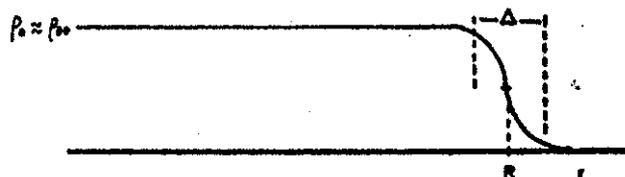


Fig. 7

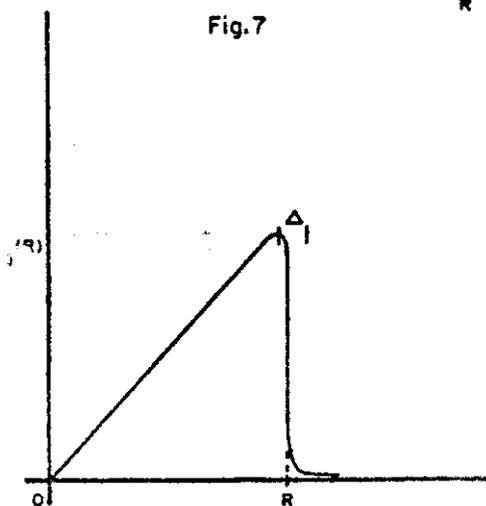


Fig. 8

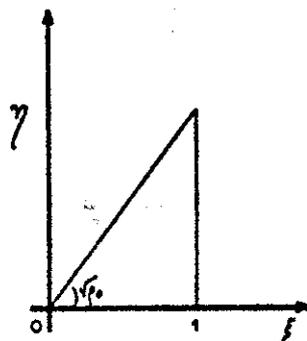


Fig. 9

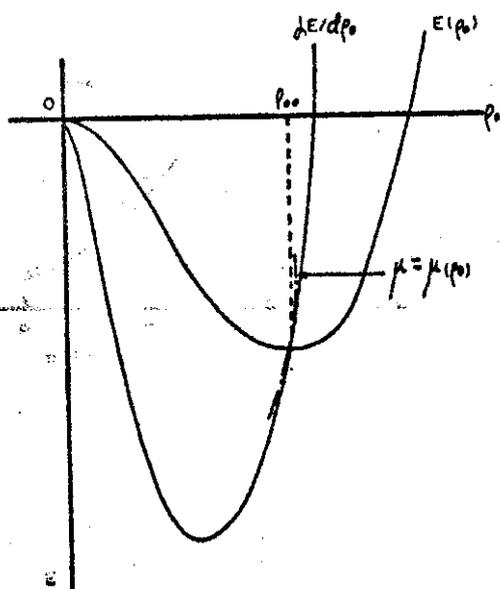


Fig. 10

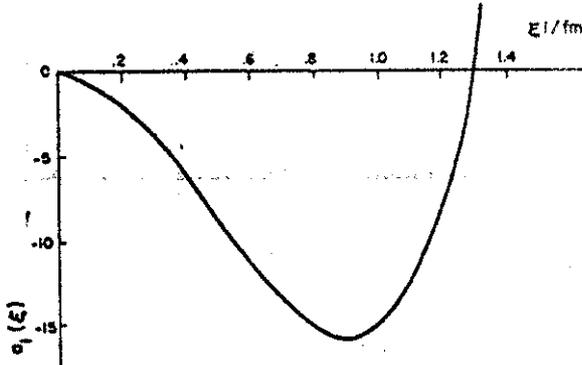


Fig. 11

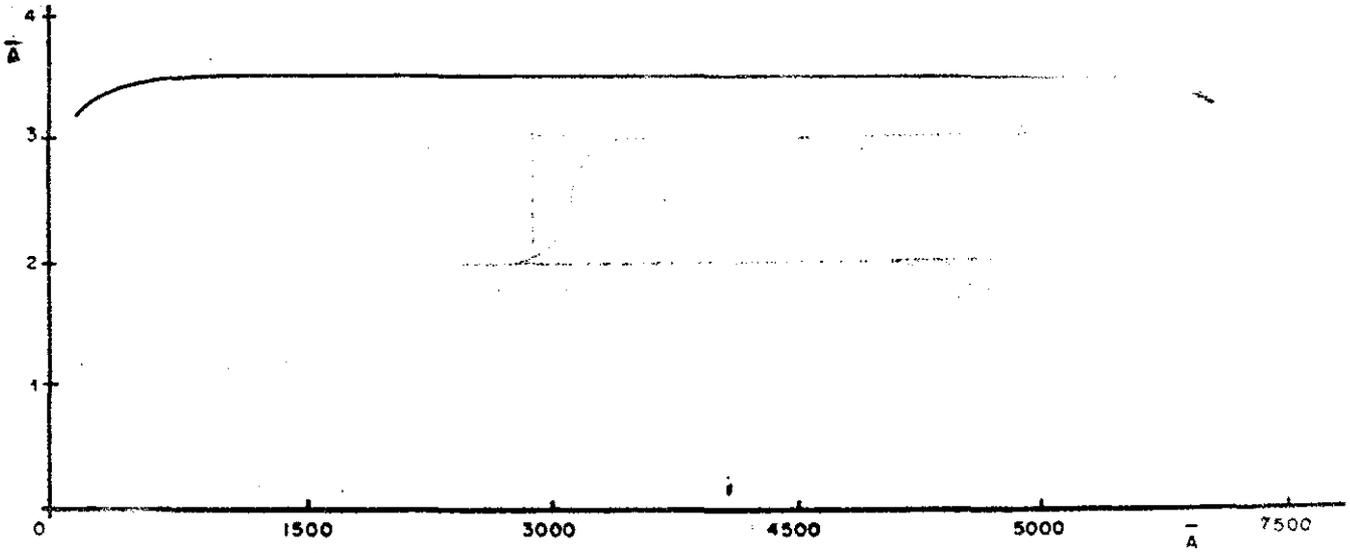


Fig. 12

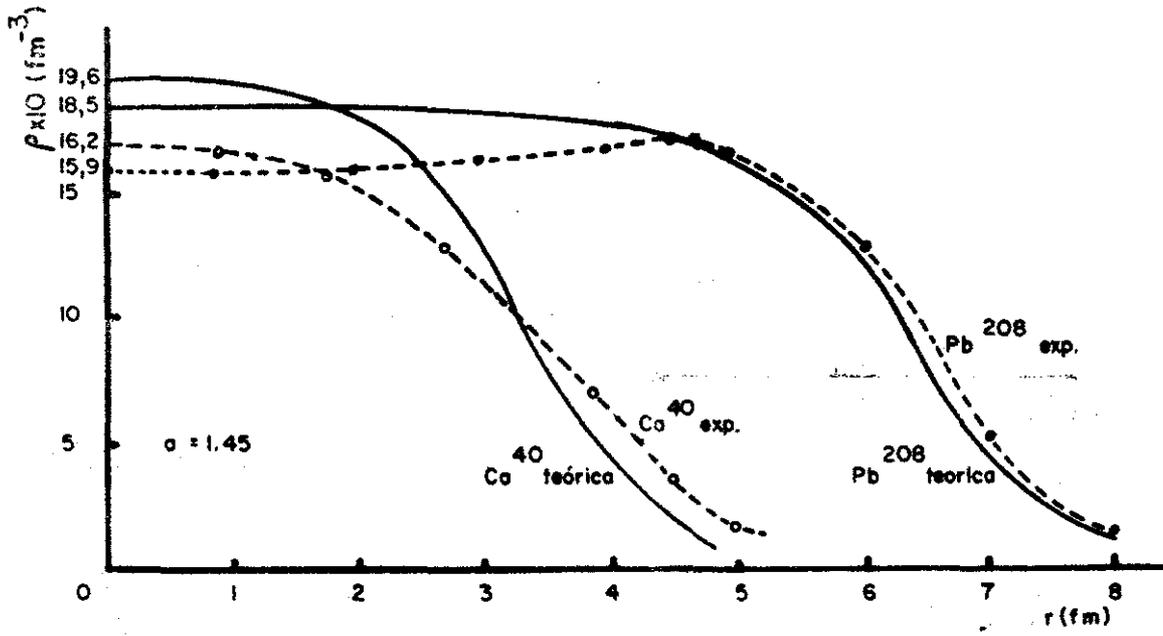


Fig. 13

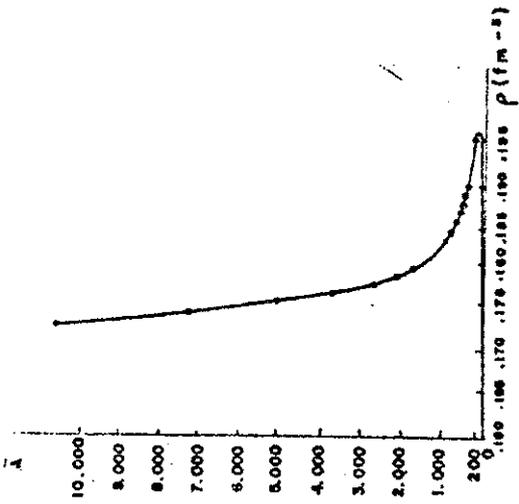


Fig. 14

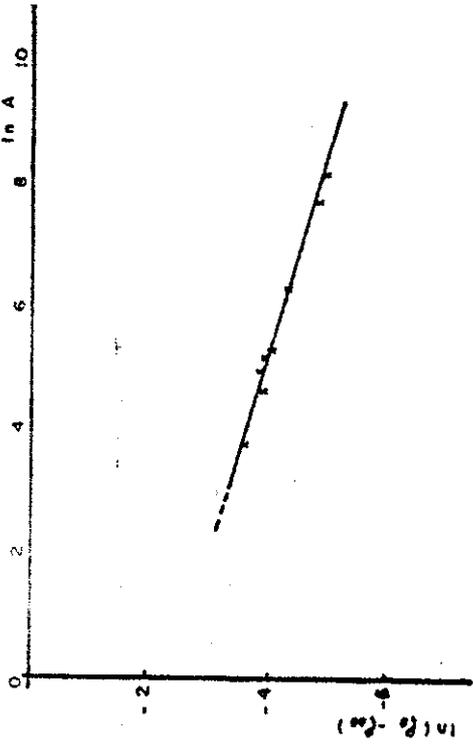


FIG. 15

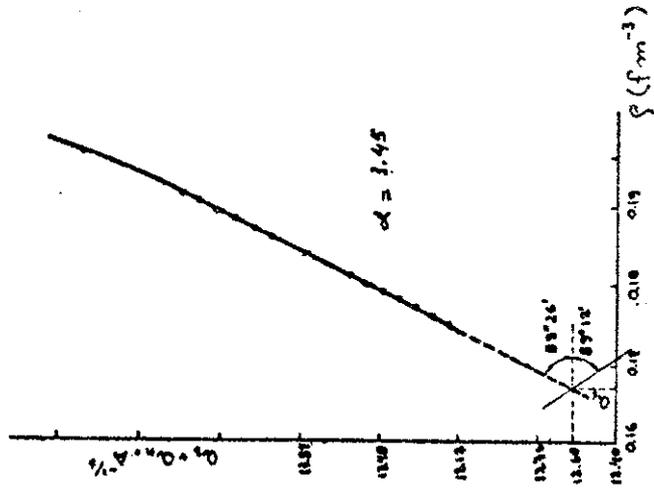
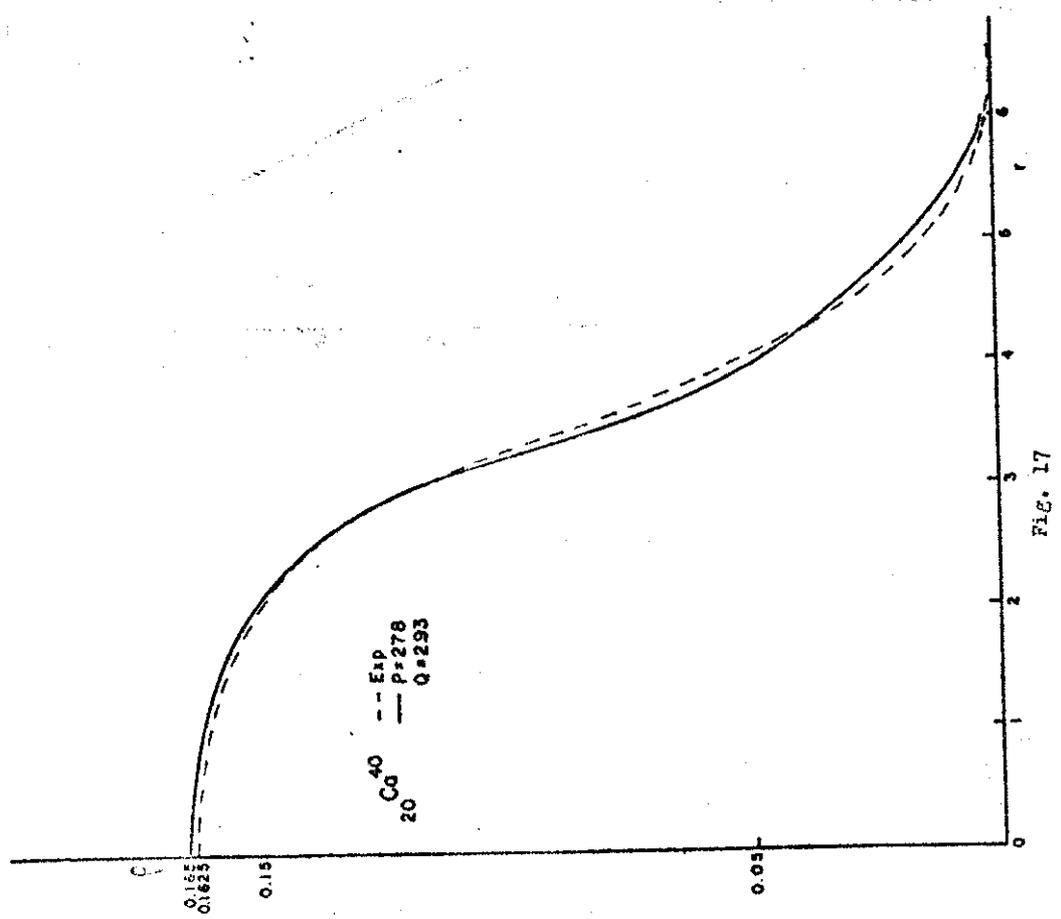
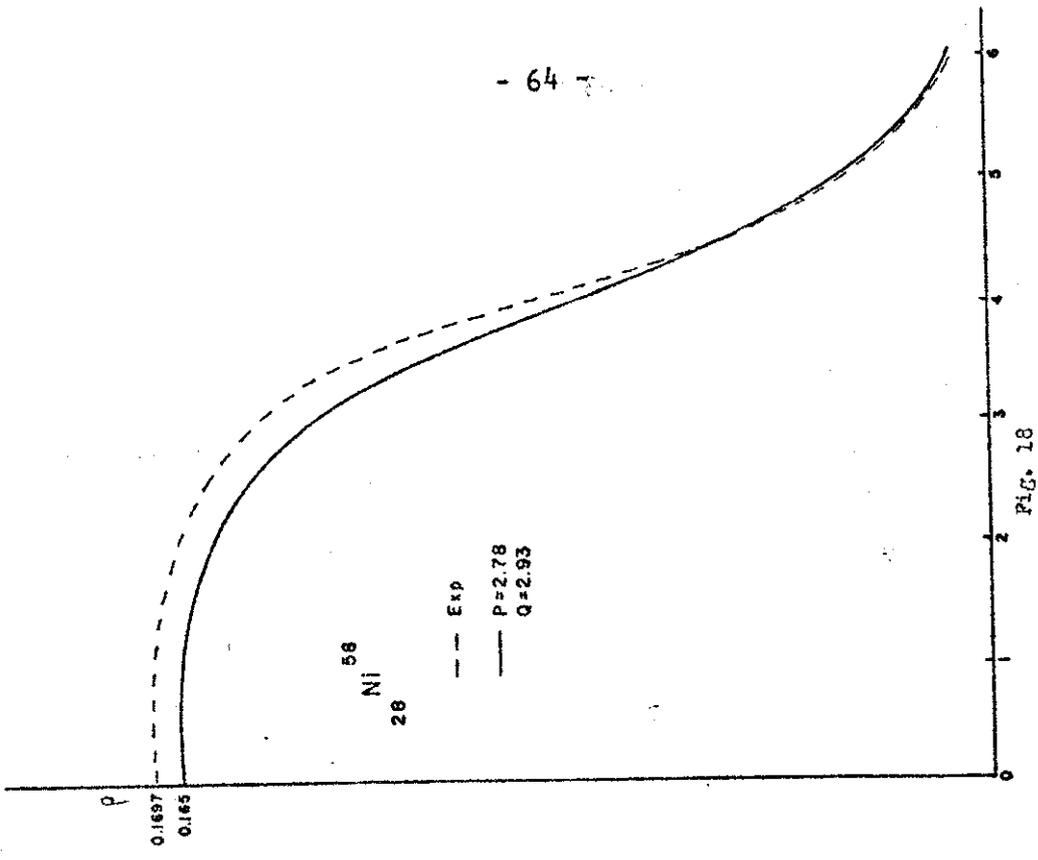


FIG. 16



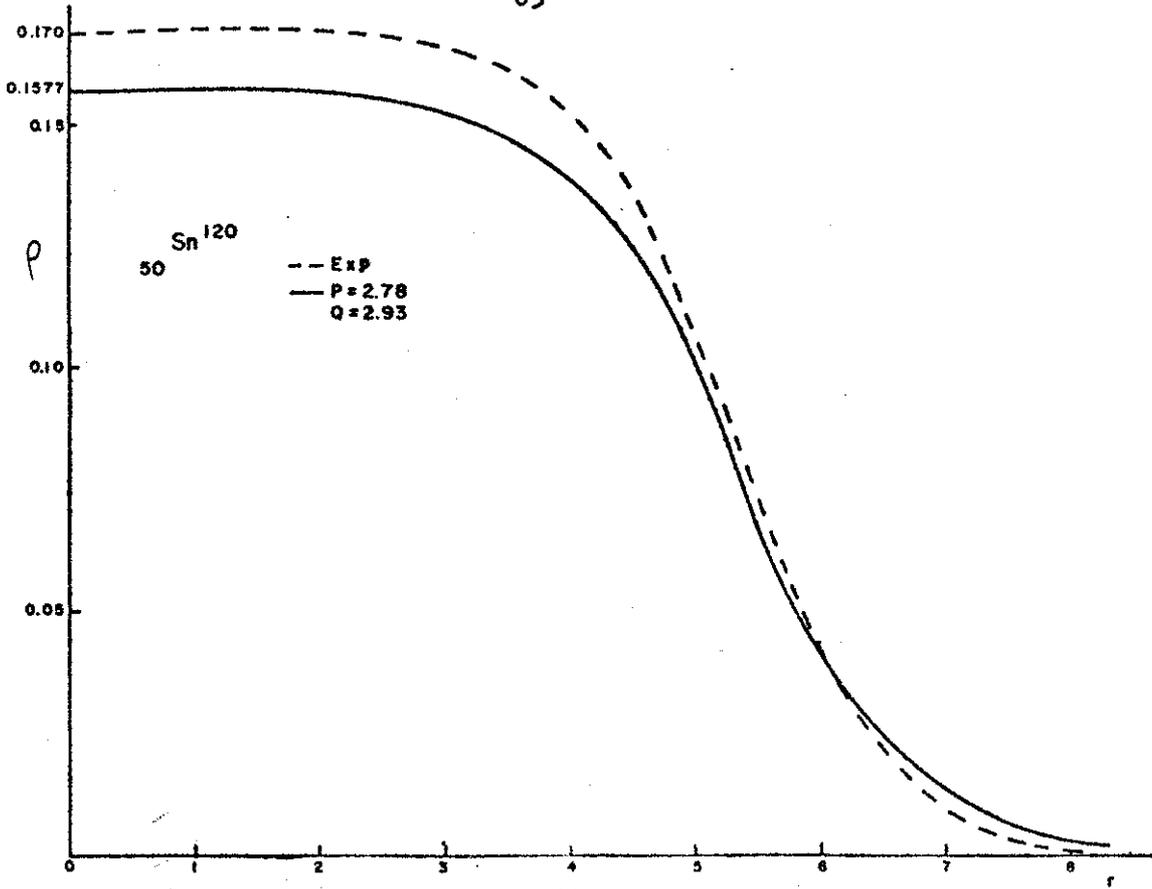


Fig. 19

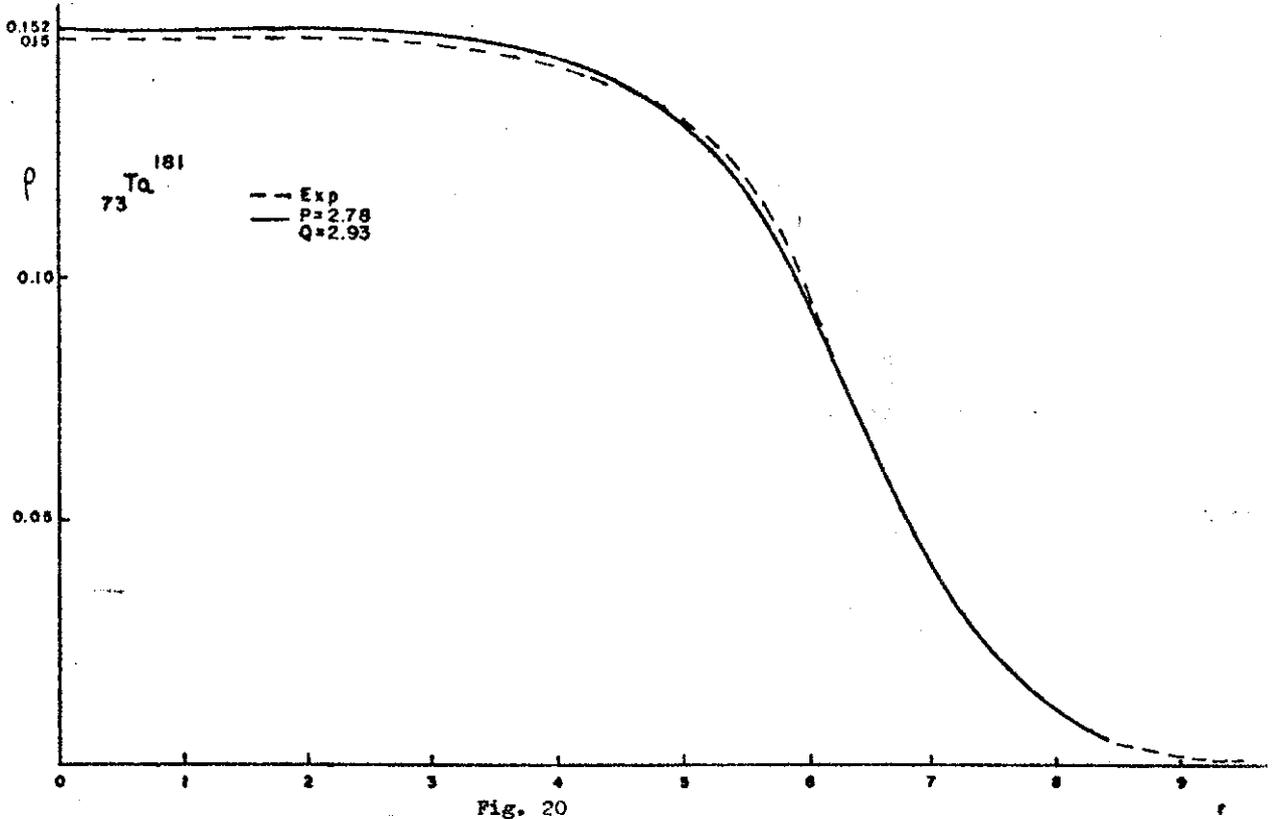


Fig. 20

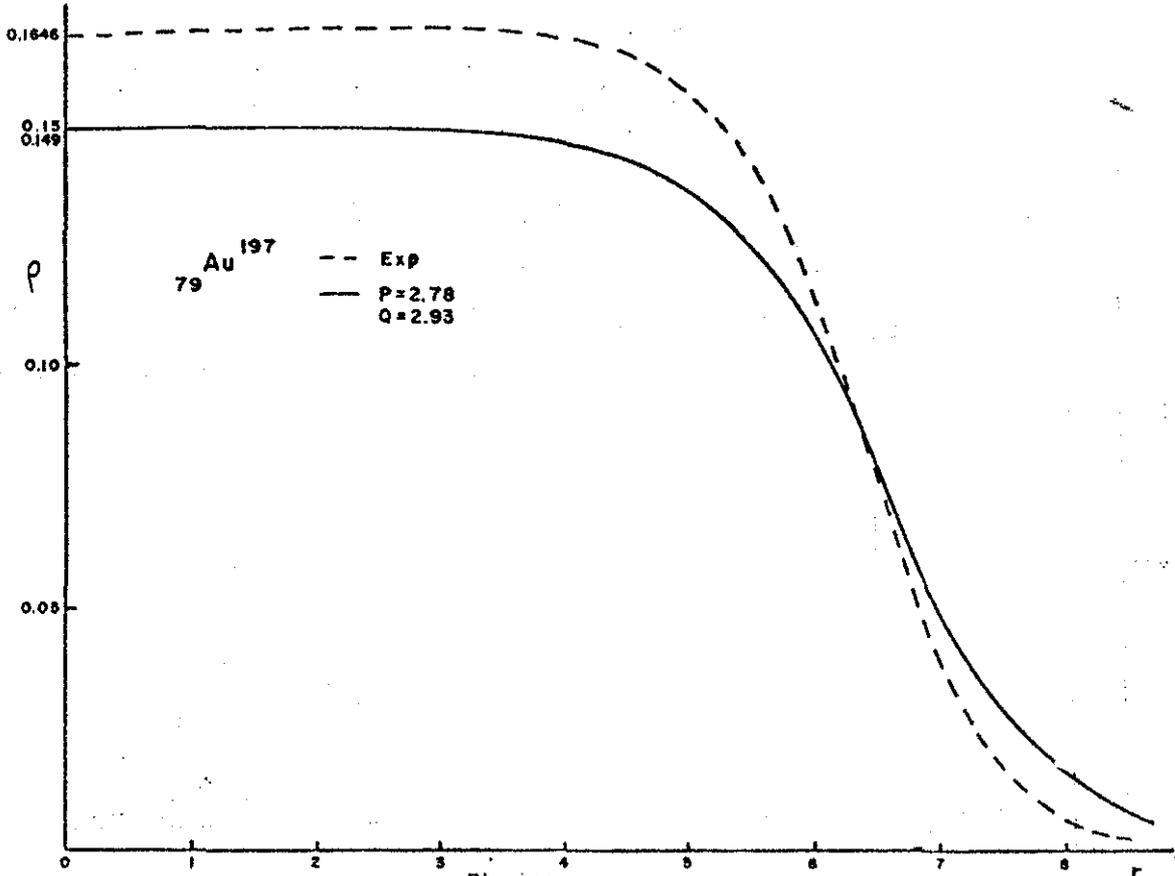


Fig. 21

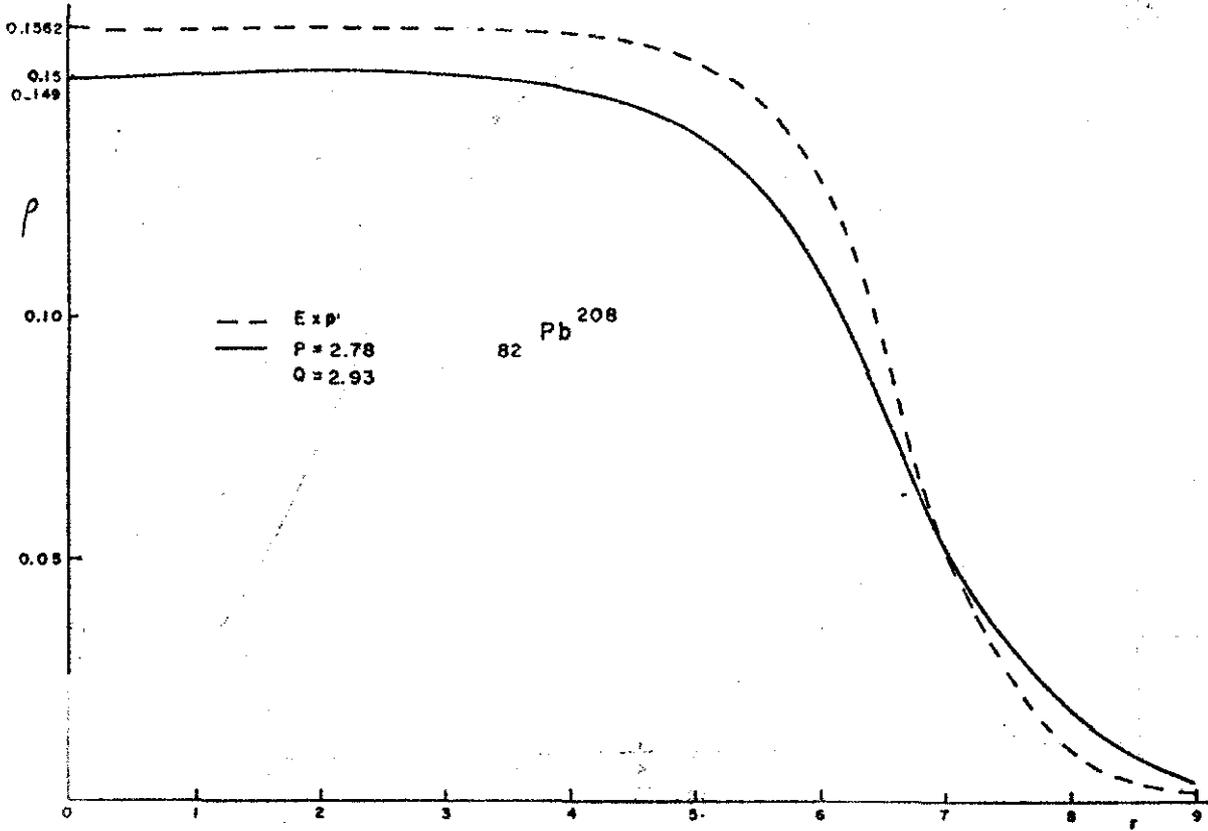


Fig. 22

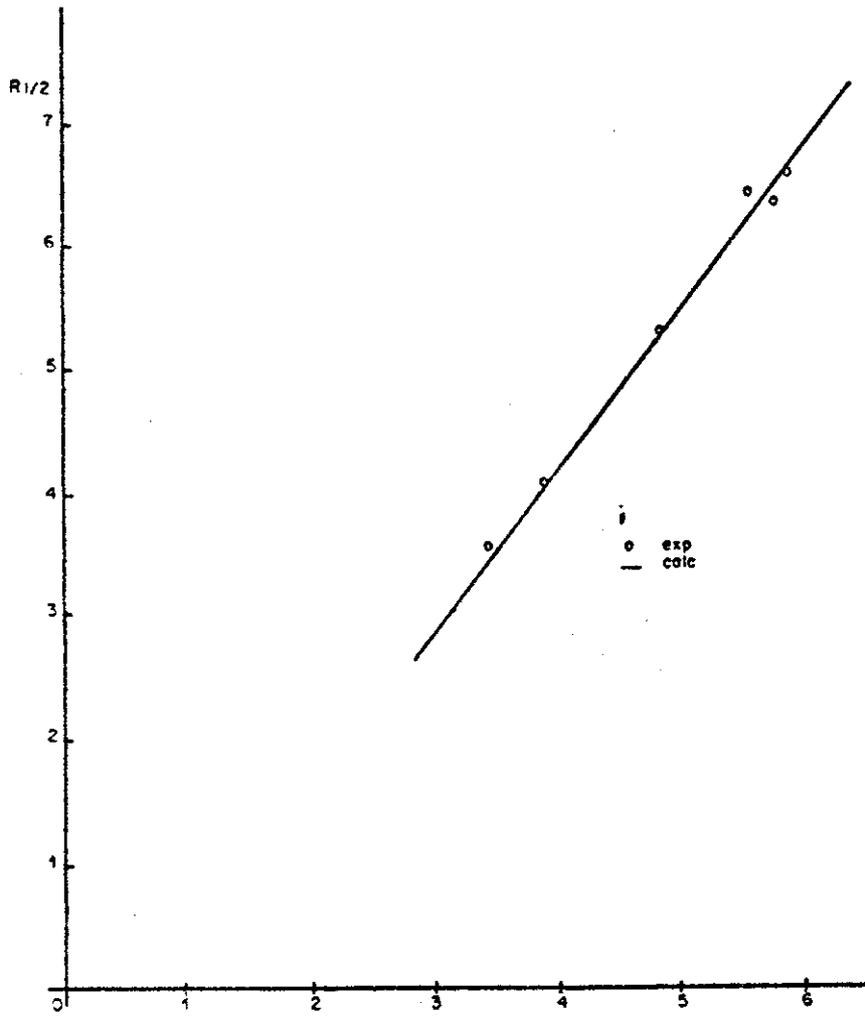


Fig. 23 -

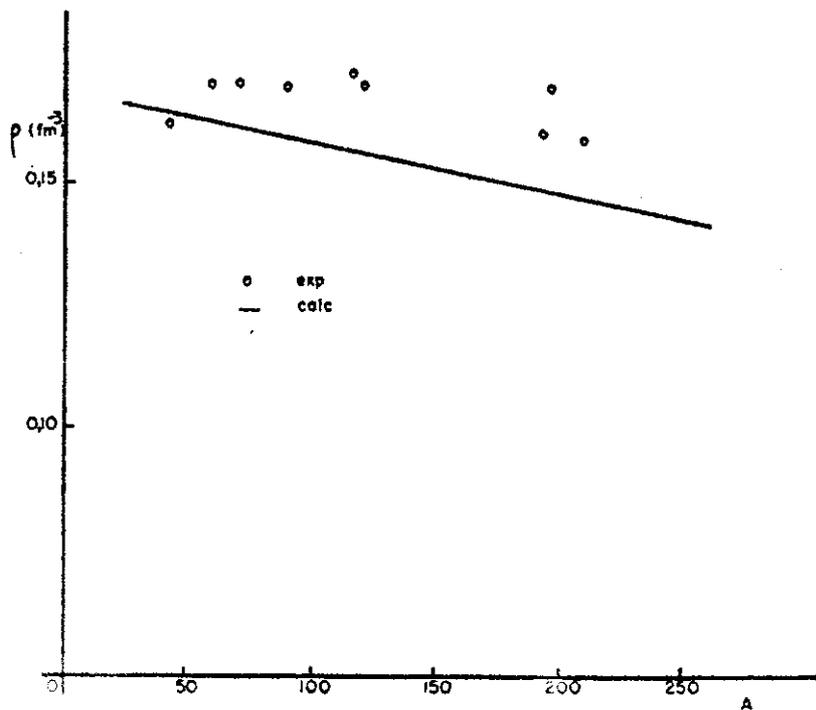


Fig. 24

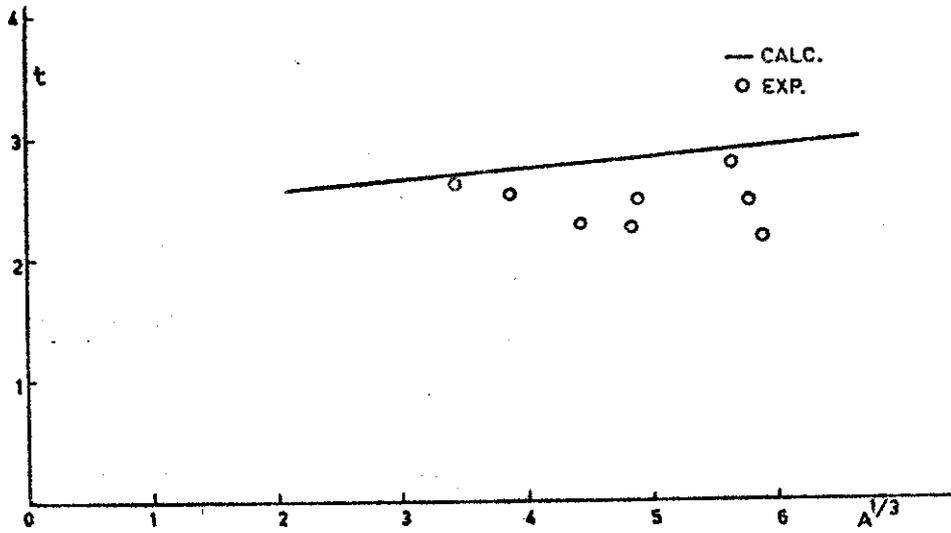


FIG. 25

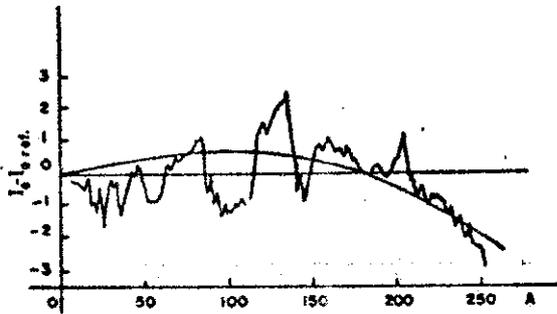


Fig. 26

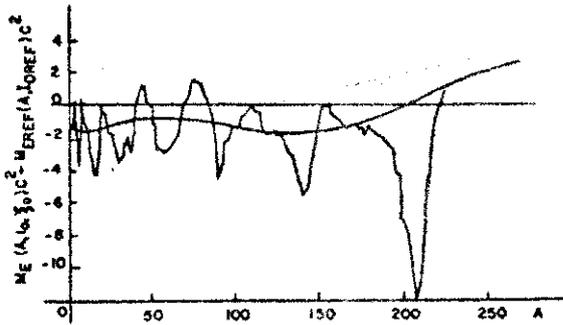


FIG. 27

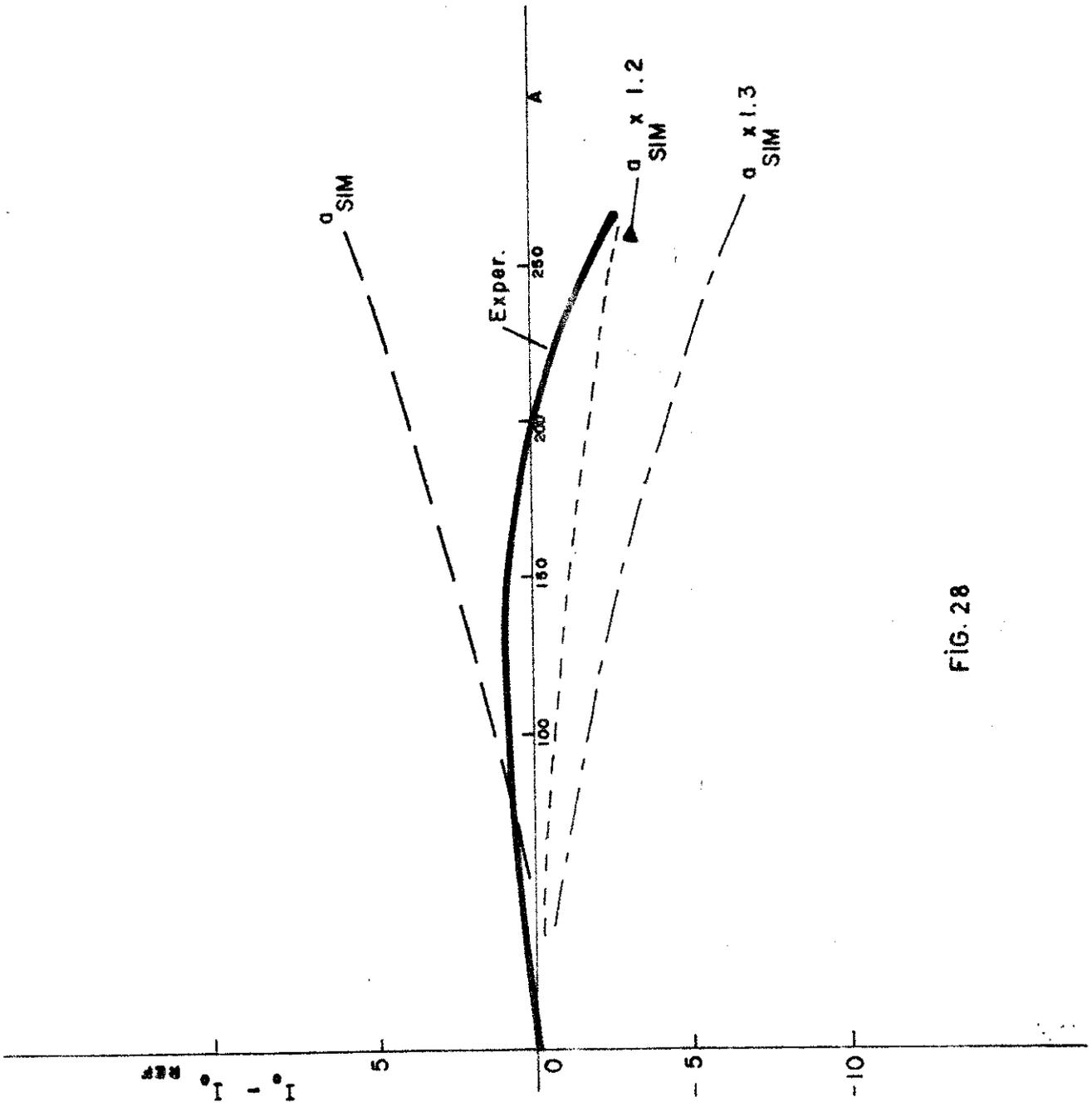


FIG. 28

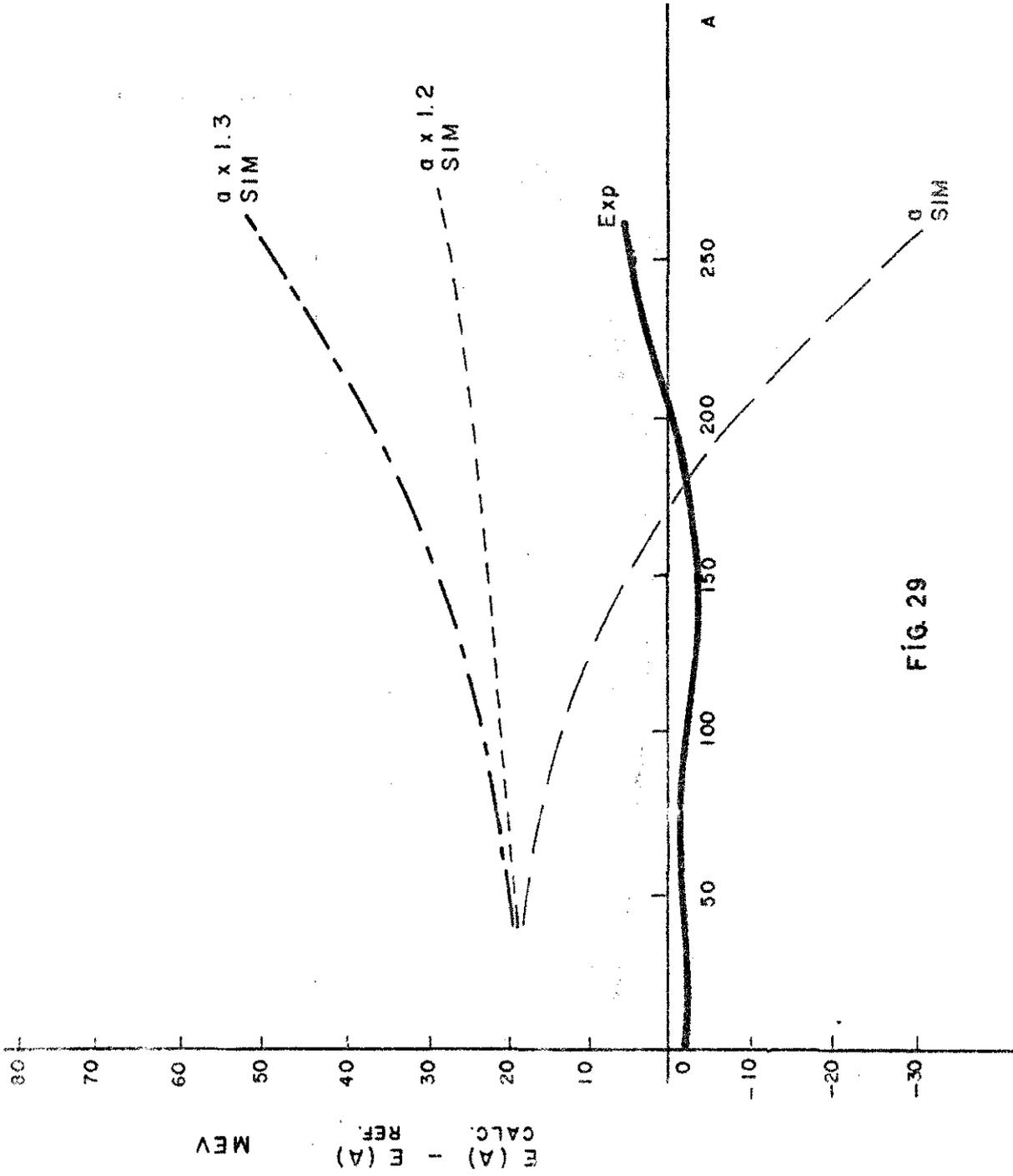


FIG. 29

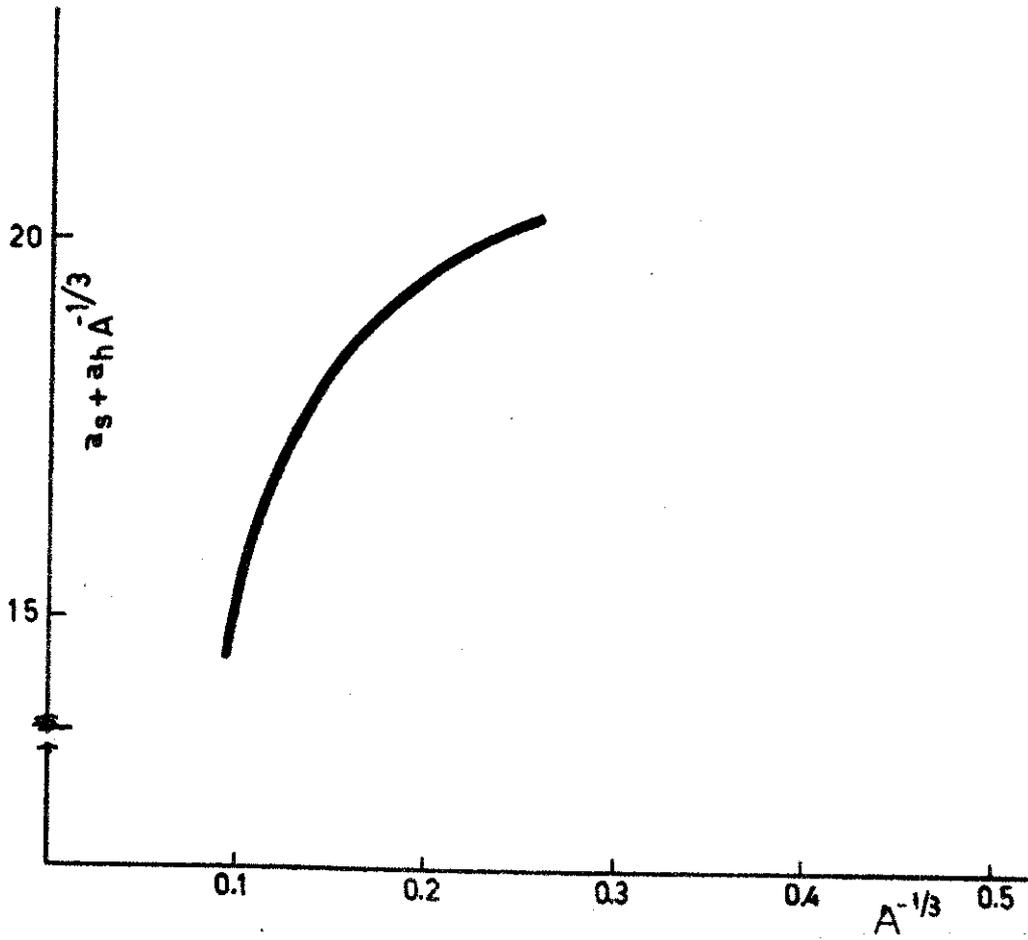


Fig. 30

REFERÊNCIAS

1. W.D. Myers e W.J. Swiatecki, Nucl. Phys. 81(1966)1 .
2. H.A. Bethe, Phys.Rev. 167(1968)879.
3. L.C. Gomes, J.D. Walecka e V.F. Weisskopf, Ann. of Phys. 3(1958)241.
4. K.A. Brueckner, J.R. Buchler, S.Jorna e R.J. Lombard, Phys.Rev. 171(1968) 1188.
5. K.A. Brueckner, J.R. Buchler, R.C. Clark, e J. Lombard, Phys.Rev. 181(1969) 1543.
6. C.F. von Weizsacker, Z. Phys. 96(1935) 431.
7. H.A. Bethe e R.F. Bacher, Rev.Mod.Phys. 8(1936) 827.
8. M. Yamada, Prog.Theor.Phys. 32(1964) 512 .
9. T. Kodama e M. Yamada, Prog.Theor.Phys. 45(1971) 1763 .
10. Ross, Mark e Lawson, Phys.Rev. 102(1956) 1613 .
11. J. Wing, Nucl.Phys. A120(1968) 369.
12. J. M. Blatt e V.F. Weiskopf, "Theor.Nucl.Phys." - 1952.
13. M.A. Preston, "Physics of the Nucleus" .
14. A.G.W. Cameron, Can.Jour.Phys. 35(1957) 1021.
15. P.A. Seeger, Nucl.Phys. 25(1961) 1.
16. V.M. Strutinsky, Nucl.Phys. A95(1967) 420.
17. D.H.E. Gross, Phys.Lett. 42B(1972) 41.
18. R.A. Berg e L.Wilets, Phys.Rev. 101(1956) 201.
19. T.H. Skyrme, Phyl.Mag. 1(1956) 1093.

20. Y. Hara, Prog.Theor.Phys. (Kyoto) 24(1960) 1179.
21. K.Kumar, K.J. LeCouteur e M.K. Roy, Nucl.Phys. 42(1963) 524.
22. K.A. Brueckner, A.M. Lockett e M. Rolemberg, Phys.Rev. 121(1961)255.
23. K.A. Brueckner, J.L. Gammel e H. Weitzner, Phys.Rev. 110(1958) 431.
24. T. Kodama, Prog. Theor. Phys. 45(1971) 1112.
25. E. Feenberg, Rev.Mod.Phys. 19(1947) 239.
26. P. Roman, Acta Phys.Hungary 1(1951) 107.
27. F.S. Mozer, Phys.Rev. 116(1959) 970.
28. W.D. Myers e W.J. Swiatecki, Ann. of Phys. 55(1969) 395.
29. W.D. Myers e W.J. Swiatecki, L.B.L. Univ. of California - 1973.
30. J.R. Nix, Los Alamos Scientific Laboratory, Univ. of California-1972.
31. H.I. Krappe e J.R. Nix, apresentado no "Third Symposium on Phys. and Chem. of Fission", Rochester, August - 1973.
32. J.H. Fregeau, Phys.Rev. 104(1956) 225.
33. B. Hahn, B.D.G. Ravenhall e R. Hofstadter, Phys.Rev. 101(1956) 1131.
34. L. Wilets, Rev.Mod.Phys. 30(1958) 542.
35. L. Wilets, Phys.Rev. 101(1956) 1805.
36. M.H. Johnson e E.Teller, Phys.Rev. 93(1954) 357.
37. A.H. Wapstra, Physica 18(1952) 2.
38. A.E.S. Green, Rev.Mod.Phys. 30(1958) 569.
39. A. Bohr e B.R. Mottelson, "Nuclear Structure" vol.1 - 1968.
40. K.A. Brueckner e J.L. Gammel, Phys.Rev. 109(1958) 1023.

41. K.A. Brueckner e C.A. Levinson, Phys.Rev. 97(1955) 1344.
42. K.A. Brueckner e W. Wada, Phys.Rev. 103(1956) 1008.
43. P. Hohenberg e W. Kohn, Phys.Rev. 136(1964) B864.
44. Computer Journal 7(1965) 303.
45. Landolt Bornstein - Nuclear Raddi, vol.2, Springer Verlag.
46. E. Wigner, Phys.Rev. 51(1937) 947.
47. E. Feenberg e E.P. Wigner, Phys.Rev. 51(1937) 95.
48. K.A. Brueckner, J.A. Chirico e H.W. Meldner, Phys.Rev. 4(1971) 732.
49. K.A. Brueckner, J.H. Chirico, S. Jorna e M.W.Meldner, Phys.Rev. C7(1973) 2123.

.. \* \* \*