

ESTRUTURA DAS ESTRELAS DE NEUTRON

TESE DE MESTRADO

defendida

por

CHUNG KAI CHEONG

no

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

- 1974 -

523.0  
C 518

T 154  
C 518

ESTRUTURA DAS ESTRELAS DE NEUTRON

TESE DE MESTRADO

defendida por

CHUNG KAI CHEONG

no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Orientador: *Prof. Takeshi Kodama*

em 22 de novembro de 1974

perante a banca integrada pelos senhores professores

*Takeshi Kodama*  
Professor Titular do CBPF

*Alfredo Marques de Oliveira*  
Professor Titular do CBPF

*Mario Novello*  
Professor Adjunto do CBPF

*Adel da Silveira*  
Professor da UFRJ

*José Antônio Freitas Pacheco*  
Professor Titular da USP

# Í N D I C E

	página
Agradecimentos .....	i
Sumário .....	ii
Abstract .....	iii
INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO I: MODELO DE ESTRELAS DE NEUTRON	8
1.1. Estrela de Neutron Como Estado Final de Evolução	8
1.2. Matéria Catalizada .....	13
1.3. Matéria Fria .....	14
1.4. Outras Hipóteses .....	15
CAPÍTULO II: EQUAÇÕES DA ESTRUTURA DAS ESTRELAS DE NEUTRON	18
2.1. Equações de Einstein .....	18
2.2. Solução Interior de Schwarzschild .....	20
2.3. Equações de Equilíbrio Hidrostático .....	24
2.4. Equações Simultâneas .....	27
CAPÍTULO III: EQUAÇÃO DE ESTADO DAS ESTRELAS DE NEUTRON	29
3.1. Densidade Subnuclear .....	30
3.1.a) Densidade Subnuclear Sem Neutrons Livres	30
3.1.b) Densidade Subnuclear Com Neutrons Livres	36
3.2. Densidade Nuclear .....	39

3.3. Densidade Supranuclear .....	40
3.4. Transição de Fase .....	42
3.5. Equações de Estado Aproximadas .....	47
<b>CAPÍTULO IV: ESTRUTURA DAS ESTRELAS DE NEUTRON</b>	<b>51</b>
4.1. Configuração da Estrela .....	51
4.2. Raio da Estrela .....	54
4.3. Número de Protons e de Neutrons; Massa Total ...	55
4.4. Energia de Ligação e Índice Adiabático .....	57
<b>CAPÍTULO V: ANÁLISE DOS RESULTADOS</b>	<b>59</b>
5.1. Equação de Estado .....	59
5.2. Configuração .....	62
<b>CONCLUSÃO</b> .....	<b>64</b>
<b>TABELAS</b> .....	<b>67</b>
<b>FIGURAS</b> .....	<b>79</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>91</b>
<b>LEGENDAS</b> .....	<b>94</b>

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Takeshi Kodama pela sugestão do tema e pela orientação segura e amigável, em todos os momentos de trabalho desta tese.

Agradeço ao Professor Alfredo Marques de Oliveira e ao Professor Jader Benuzzi Martins pelo contínuo incentivo e apoio; aos Professores Luiz Tauhata, Hêlio Schechter e Rui Alberto Nazareth pelas estimulantes críticas e discussões; à equipe da Divisão do Computador do CBPF, pela pronta colaboração e assistência.

Agradeço ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, enquanto instituição e enquanto encarnado em cada um de seus pesquisadores e funcionários, pela acolhida franca e generosa; ao Conselho Nacional de Pesquisas e à Comissão Nacional de Energia Nuclear, pelas bolsas-de-estudo.

Agradeço, last but not least, à datilógrafa Helena de Souza Ciccarino, pela paciência e dedicação com que colaborou na confecção deste trabalho.

## S U M Á R I O

Admitindo fria e catalizada a matéria su perdensa ( $\sim 10^{14}$  g/cm<sup>3</sup>), determinamos a estrutura das estrêlas de neutron, integrando as equações de equilíbrio hidrostático, derivadas da Relatividade Geral. A equação de estado que usamos foi obtida com o auxílio de fórmulas semi-empíricas de massa nuclear.

Encontramos uma larga transição de fase entre a região de densidade subnuclear e o domínio de densidade hiperônica. Os pontos da transformação foram calculados como sendo  $6,2 \times 10^{11}$  e  $3,8 \times 10^{13}$  g/cm<sup>3</sup>. A presença de tal transição de fase significa que a equação de estado, obtida pelo nosso modelo, consiste predominantemente de duas fases, a nuclear e a subnuclear, bem como implica na existência de um estado da matéria em que as du as fases, na pressão correspondente, se encontram em contato e em equilíbrio termodinâmico.

Discutimos também algumas propriedades macroscópicas das estrêlas de neutron.

## A B S T R A C T

Structure of neutron stars consisting of a cold and catalyzed superdense matter were investigated by integrating the equations for hydrostatic equilibrium based on the General Theory of Relativity. The equations of state used here were obtained with the help of semi-empirical nuclear mass formulae.

A large phase transition was found between the nuclear and subnuclear density regions. The density phase transition points were calculated as  $6.2 \times 10^{11}$  and  $3.8 \times 10^{13}$  g/cm<sup>3</sup>. Due to such a large phase transition, the equation of state practically consists of two parts: the nuclear and subnuclear phases, which are in contact under the thermodynamical equilibrium at the corresponding pressure.

Some macroscopic properties of neutron stars were discussed.

## INTRODUÇÃO

A descoberta dos pulsares em 1967 (Hewish *et al.*, 1968) tornou real e atual o problema da estrutura das estrelas superdensas, em equilíbrio hidrostático. Existe hoje forte evidência astrofísica de que os pulsares sejam, na realidade, estrelas de neutron em rotação, dotadas de intensos campos magnéticos, e emitindo radiações, principalmente na faixa dos raios-X, que variam rápida e periodicamente. Tais estrelas, denominadas de estrelas de neutron em virtude da alta percentagem de neutrons em sua constituição, têm densidade em torno da densidade dos núcleos ordinários ( $\sim 2 \times 10^{14}$  g/cm<sup>3</sup>), massa total da ordem de uma vez a massa do Sol ( $1M_{\odot}$ ), raio típico de aproximadamente 10 km, e distância característica de 100 parsec.

Em vista disso, a atenção de muitos pesquisadores se voltou para a investigação das propriedades da matéria a altas densidades, visando a obter fundamentalmente uma equação de estado, a partir dos conhecimentos correntes da Física Nuclear teórica. Em outras palavras, as pesquisas têm por objetivo primordial encontrar uma resposta à célebre questão levantada por Chandrasekhar (1932): "Dada uma caixa contendo eletrons e núcleos atômicos (carga total nula), o que acontece se continuarmos a comprimir o material indefinidamente?"

Estas pesquisas acêrca da matéria superdensa encontram



também motivação na Cosmogonia moderna. As duas teorias cosmogônicas mais aceitas atualmente partem de premissas frontalmente antagônicas quanto ao estado da matéria nos estágios inicial e final de evolução do Universo: a primeira, defendida pela maioria dos astrônomos, tem a matéria superdensa como estágio final de evolução das estrelas e galáxias; a segunda, proposta recentemente por Ambartsumian (1958), admite a matéria superdensa como estágio original. Para ambas as teorias, portanto, o estudo da matéria a altíssimas densidades é de importância vital.

A tais altíssimas densidades, da ordem de  $10^{14}$  g/cm<sup>3</sup>, as estrelas de neutron surgem como a única configuração estável da matéria bariônica fria diante da gravitação, numa faixa correspondente ao segundo ponto de instabilidade estimado por Landau (1932).

Cálculos recentes do mecanismo de colapso gravitacional estelar, baseados em modelos hidrodinâmicos (Colgate e White, 1966; Arnett, 1966, 1967; e outros), mostram que as estrelas de neutron devem ser formadas como produto final de explosões de supernova, na última etapa de evolução de uma estrela suficientemente maciça ( $\sim 2 M_{\odot}$ ). O número de pulsares galácticos, identificados como remanescentes de explosões de supernova, aumentou recentemente de 70 para 97 (Clark, 1973).

A Física das Partículas Elementares, por sua vez, com o grande impulso experimentado nos últimos decênios, contribuiu, de maneira decisiva, para esclarecer várias questões importantes da matéria altamente densa, em especial, na região supranuclear (p.

ex., processos de neutrino, formação de híperons, e criação e aniquilação de pares).

Não obstante esta gama de informações, a Física Nuclear foi incapaz, até hoje, de estabelecer em bases satisfatórias a teoria das interações nucleares, que permanecem, assim, essencialmente incôgnitas.

Desse modo, vários potenciais fenomenológicos foram propostos (p. ex., Levinger e Simmons, 1961; Hamada e Johnston, 1962). Dentre todos, talvez o mais realístico seja o potencial a dois corpos de Reid (1967), com carôço suave, que apresenta boa concordância com os dados obtidos por espalhamento nucleon-nucleon. Nemeth e Sprung (1968) utilizaram êsse potencial para determinar, pela teoria de muitos corpos de Brueckner e na hipótese de independência de carga, a densidade de energia da matéria das estrêlas de neutron, na parte próxima à densidade nuclear ( $0,7 \times 10^{13}$  a  $10^{14}$  g/cm<sup>3</sup>). Contudo, para valores superiores a  $0,8 \times 10^{15}$  g/cm<sup>3</sup>, os cálculos se tornam não só difíceis como também incertos (Pandharipande e Bethe, 1973). A própria descrição da interação nuclear por um potencial passa inclusive a ser duvidosa. Em vista disso, Leung e Wang (1973) deduziram uma equação de estado para densidades supranucleares, introduzindo o chamado "espectro de massa bariônica efetiva".

No entanto, alguns trabalhos (p. ex., Kodama e Yamada, 1971a), mesmo sem seguir o tratamento de Brueckner, levam em conta a interação nucleon-nucleon, através do uso de fórmulas semi-empí-

ricas de massa nuclear. Tal abordagem do problema tem a vantagem de simplificar substancialmente a parte computacional, sem prejuízo apreciável nos resultados qualitativos, embora isso não possa ser aplicado com confiança para densidades supranucleares.

Na região das densidades subnucleares, onde a distância média entre partículas ou núcleos é maior que o alcance das forças nucleares, a existência de não-homogeneidades na distribuição das cargas positivas passa a adquirir importância, dando margem a correções do tipo Coulombiano na expressão da energia total. Por outro lado, a estrutura e a estabilidade das estrêlas de neutron leves dependem sensivelmente da equação de estado da matéria a tais densidades.

Graças às contribuições de vários pesquisadores (p. ex., Hamada e Salpeter, 1961; Bethe *et al.*, 1970; Baym *et al.*, 1971), pode-se hoje responder, com razoável conhecimento de causa, à pergunta inicialmente proposta por Chandrasekhar.

A baixas densidades ( $d < 10^6$  g/cm<sup>3</sup>), a matéria em seu estado fundamental, após o esfriamento, consiste de núcleos de <sup>56</sup>Fe, dispostos em rede cristalina e envolvidos por um mar de eletrons não-relativísticos. Quando a densidade atinge a aproximadamente  $10^7$  g/cm<sup>3</sup>, os eletrons se tornam plenamente relativísticos e os núcleos começam a ficar ricos em neutrons pela captura de eletrons. Com o aumento da densidade, o processo de enriquecimento dos núcleos se acentua, até que, em  $d \sim 10^{11}$  g/cm<sup>3</sup>, surge um gás de neutrons livres, que passa a coexistir com os núcleos e o mar de ele-

trons.

Aumentando ainda mais a densidade, o número de núcleos diminui gradualmente, dando lugar, no final, quando  $\rho \sim 10^{14}$  g/cm<sup>3</sup>, a uma fase homogênea, composta de neutrons, protons e electrons. Nesta fase, em que a densidade coincide com a densidade nuclear, o número de neutrons é bem maior que o de protons e electrons (em torno de 95%). Para valores superiores a  $10^{14}$  g/cm<sup>3</sup>, outras partículas aparecem, tais como os muons e os híperons.

O presente trabalho tem, como objetivo primeiro, estudar a estrutura das estrêlas de neutron, dando ênfase à região subnuclear. A transição de fase que encontramos entre o regime subnuclear e o regime nuclear assume um aspecto relevante, e é por isso investigada com especial detalhe. Para tanto, utilizamos a fórmula semi-empírica de Kodama e Yamada (1971b), que leva em consideração a compressibilidade da matéria nuclear, e obtivemos uma equação de estado da matéria, na hipótese de estabilidade face a decaimento beta e de temperatura  $T = 0$  (capítulo III). Em seguida, resolvendo as equações de equilíbrio hidrostático, determinamos a configuração da estrêla (capítulo IV). Por questões de unidade e completicidade, apresentamos também o fundamento teórico do modelo de estrêlas de neutron que adotamos (capítulo I), bem como a dedução das equações de equilíbrio hidrostático (capítulo II). Os resultados, a que chegamos, são analisados, em confronto com os obtidos por outros pesquisadores (capítulo V).

Neste ponto, é indispensável uma observação sôbre as e-

quações de equilíbrio hidrostático. A métrica do espaço, ocupado pela matéria a densidades tão extremas, difere bastante da métrica Euclidiana chata. O campo gravitacional, criado pela matéria, encurva o espaço-tempo, de modo tal que este se torna uma variedade Riemanniana quadri-dimensional, ou mais precisamente, tendo em vista a assinatura da métrica, uma variedade pseudo-Riemanniana.

Diante disso, uma teoria rigorosa sobre estrutura de estrelas de neutron deve ser fundamentada, necessariamente, na Teoria Geral da Relatividade, embora, em termos puramente quantitativos, os resultados apresentem, no caso de modelos com densidade central  $\rho_c < 10^{15} \text{ g/cm}^3$ , somente desvios de menos de 10% em relação aos obtidos pela teoria da gravitação de Newton (Hamada e Salpeter, 1961). Mais concretamente, os efeitos da Relatividade Geral, no interior de uma estrela, tornam-se de importância capital para densidades da ordem de ou superiores a  $10^{16} \text{ g/cm}^3$  (Chiu, 1965).

Oppenheimer e Volkoff (1939) foram os primeiros a aplicar a Relatividade Geral nos cálculos sobre a estrutura da matéria superdensa. Adotando o modelo de um gás degenerado de neutrons, eles mostraram que a massa máxima para a estabilidade de uma estrela superdensa é  $3/4 M_\odot$ . Trabalhos mais atuais, com o uso de outras equações de estado, fornecem um limite de aproximadamente  $1,2 M_\odot$  (cf. Kodama e Yamada, 1971a; Canuto e Chitre, 1973).

Das duas teorias relativísticas da gravitação mais discutidas hoje em dia, a de Einstein e a de Brans-Dicke, escolhemos por simplicidade a primeira, já que em ambas as teorias os modelos

de estrêla de neutron são bastante similares. Com efeito, Salmona (1967) mostrou que a introdução do campo escalar acarreta apenas uma pequena mudança na configuração estelar (mesmo no caso de estrêlas superdensas), em comparação com as incertezas devidas à interação nuclear. Usaremos, por êste motivo, as equações diferenciais derivadas a partir das equações de campo de Einstein.

## CAPÍTULO I: MODELO DE ESTRÊLAS DE NEUTRON

Apresentamos, neste capítulo, as hipóteses fundamentais e tradicionais, sôbre as quais repousam as teorias correntes da estrutura estelar. Admitidas tais hipóteses, resta especificar, para uma dada equação de estado, um valor para a densidade central da matéria bariônica. E a cada valor inicial da densidade central corresponde, como se tornou comum intitular, um modelo de estrela de neutron. Uma exposição preliminar sôbre a evolução de uma estrela até o seu estado final nos parece bastante oportuna, a fim de melhor situar e justificar as hipóteses que usamos.

### 1.1. ESTRÊLA DE NEUTRON COMO ESTADO FINAL DE EVOLUÇÃO

De acôrdo com a maioria dos astrofísicos, as estrelas e galáxias são formadas a partir de um gás rarefeito interestelar, composto essencialmente de hidrogênio, com leve mistura de alguns elementos mais pesados, como carbono e nitrogênio (cf., por exemplo, Hayashi *et al.*, 1962; Burbidge e Burbidge, 1958). Em decorrência da força de autogravitação, surge a instabilidade gravita-

cional, que se torna suficientemente intensa para provocar a condensação da matéria difusa.

À medida que a contração se processa, a temperatura no interior da estrela se eleva e a matéria, inicialmente neutra, se ioniza. Sendo adiabático o processo, metade da energia gravitacional liberada se converte em calor, conforme garante o teorema virial. A outra metade é, então, gasta para cobrir as perdas de energia por radiação nas camadas mais externas.

Obviamente, forças devido a gradientes de pressão começam a restringir a contração das partículas, que, durante os primeiros momentos de instabilidade, têm um movimento próximo ao de queda livre (cf. Clayton, 1968). No entanto, a escala de tempo hidrodinâmico é muito pequena em comparação com a escala de tempo térmico, e muito menor ainda quando confrontada com a escala de tempo nuclear. No caso do Sol, por exemplo, a escala de tempo hidrodinâmico é da ordem de  $10^3$  seg, ao passo que as escalas de tempo térmico e nuclear são, respectivamente, da ordem de  $10^{14}$  e  $10^{17}$  seg! Isto significa que a evolução da estrela se processa através de uma sequência de estados de equilíbrio hidrostático, exceto, naturalmente, o período rápido das explosões de supernova.

Desse modo, não obstante os movimentos de convecção que surgem no transcorrer deste período, a estrela pode, seguramente, ser considerada em equilíbrio hidrostático: a força de pressão, em cada ponto, compensa a atração gravitacional das partículas em direção ao centro. A contração cessa, estabelecendo-se, então, ao lon



go do raio, um fluxo estacionário de energia radiante e calorífica. Esta fase tem duração relativamente curta: cêrca de  $10^7$  anos, para estrêlas com massa  $M \sim 1 M_{\odot}$ .

No final desta etapa, a densidade alcança quase  $1 \text{ g/cm}^3$ , e a temperatura chega a níveis tão elevados (perto de  $10^6 \text{ }^{\circ}\text{K}$ ) que provoca o início das reações termonucleares. Tais reações envolvem, em última análise, a transformação de hidrogênio em hélio.

Começa, assim, um novo período na vida da estrêla, correspondente ao estágio de sequência principal no diagrama de Hertzsprung-Russel, em que o principal responsável pela geração da energia estelar é a queima de hidrogênio (transformação nuclear de hidrogênio em hélio), através de várias reações intituladas de cadeias PPI, PPII e PPIII. Os ciclos CNO, sugeridos por Bethe (1939) e Weizsacker (1938), também contribuem para a energia da estrêla. Nestes processos de fusão, libera-se, sob a forma de calor, uma quantidade enorme de energia, quase um por cento da energia de repouso das partículas. Eventualmente, outras etapas mais avançadas podem ocorrer, tais como as etapas da queima de hélio, carbono e silício, que são encontradas normalmente depois do estágio de sequência principal, isto é, nos estágios de gigantes vermelhas, supergigantes vermelhas, etc.

No processo de desenvolvimento da estrêla, o estágio da sequência principal é o mais longo ( $10^9$  anos, para  $M \sim 2 M_{\odot}$ ), e só termina quando se esgotam completamente as suas fontes nucleares de energia.

A fim de suprir as emissões de energia, que continuam a ocorrer, a estrela volta a se contrair, consumindo a sua reserva de energia gravitacional. Em vista da sua capacidade calorífica negativa, que é característica de todo plasma não-degenerado quando submetido ao seu próprio campo gravitacional, a temperatura aumenta. A massa da estrela adquire, neste ponto, um caráter crítico. Dependendo de seu valor, a estrela evolui de diferentes maneiras até o seu estado final, podendo, inclusive, perder massa através de uma ejeção lenta e estacionária na superfície (vento estelar) ou por violentas explosões, capazes de desintegrar a própria estrela (cf. Zel'dovich e Novikov, 1971).

Para massas inferiores a  $1,2 M_{\odot}$  (limite de Chandrasekhar), por exemplo, a estrela continua a se contrair, até que a degenerescência crescente dos elétrons contribua com o necessário gradiente de pressão para o equilíbrio estelar. A capacidade calorífica torna-se agora positiva, e diante da contração, a temperatura passa a diminuir, e a estrela começa a se esfriar com a perda incessante de sua energia por radiação. Após um longo período de esfriamento, talvez  $10^6$  anos, a estrela se transforma em anã branca, com densidade central típica de  $10^7 \text{ g/cm}^3$  e temperatura de  $10^9 \text{ }^{\circ}\text{K}$  aproximadamente (Hamada e Salpeter, 1961). Segundo cálculos de Opik (1957), anãs brancas com  $M > 0,5 M_{\odot}$  consistem predominantemente de  $^{24}\text{Mg}$ . Por outro lado, Takarada *et al.* (1966) mostraram que o predomínio é de hélio, no caso de  $M < 0,4 M_{\odot}$ .

No caso de estrelas com  $M \geq 2 M_{\odot}$ , os últimos estágios

de evolução seguem um esquema diferente. Segundo Colgate e White (1966), a degenerescência dos eletrons torna-se cada vez mais alta, e o carôço estelar fica cada vez mais denso, porque o gás de eletrons não é capaz de contrabalançar, por si só, a contração gravitacional. Ocorre, em seguida, a captura eletrônica pelos núcleos situados no centro, reduzindo assim, sensivelmente, o número de eletrons livres, que são os responsáveis diretos pela pressão.

A estrêla atinge, neste ponto, o seu estado de pre-supernova. A captura eletrônica reforça ainda mais a tendência para alta densidade no centro, e isso conduz, por sua vez, a um número ainda maior de capturas eletrônicas. Em consequência, forma-se um número extremamente grande de neutrinos e antineutrinos, e os núcleos no centro tornam-se progressivamente ricos-em-neutron. O processo de captura eletrônica se verifica suficientemente rápido, com redução subsequente da pressão eletrônica, e o carôço estelar entra num processo de implosão (colapso hidrodinâmico). Os neutrinos e antineutrinos não mais podem escapar livremente do carôço e passam a transportar a energia gravitacional liberada para as camadas externas, aquecendo-as e ejetando-as com violentas ondas de choque. Após a explosão da supernova, as camadas mais centrais sofrem, então, uma reimplosão e, no caso de a densidade de massa do carôço fôr maior que o valor crítico de  $6 \times 10^9 \text{ g/cm}^3$  (Cameron, 1971), aparecerá, como produto final, uma estrêla de neutron. Contudo, a dinâmica das explosões de supernova ainda não está bem esclarecida, e os argumentos são bastante diversificados.

Se a estrela tiver massa superior a  $8 M_{\odot}$ , segundo Cameron (1971), então o estágio final será o buraco negro.

## 1.2. MATÉRIA CATALIZADA

Obviamente, a direção geral do desenvolvimento estelar é no sentido de consumo de combustível nuclear. Os fatores mais relevantes que regem este desenvolvimento são as mudanças na massa da estrela e na distribuição da composição química. Tais mudanças determinam a localização das fontes de energia nuclear e condicionam as propriedades térmicas e mecânicas da matéria.

Em vista da dificuldade de se efetuar um cálculo pormenorizado dos últimos estágios de evolução, o estado final da estrela é pesquisada, não traçando a evolução inteira em detalhe, mas sim, admitindo-se que a matéria tenha sido catalizada até o ponto final do processo termonuclear, isto é, supondo-se que todo o combustível nuclear tenha sido consumido. Tal maneira de atacar o problema elimina, pela raiz, a necessidade de se fazer hipóteses arbitrárias, visando à simplicidade matemática, acerca das fontes de energia, como por exemplo no modelo de Eddington (Eddington, 1926) e no modelo da fonte pontual.

Além disso, neste nosso modelo de estrela de neutron, admitimos, inclusive, a matéria catalizada quanto a decaimento beta,

o que equivale, em outras palavras, a aceitar que a estrela atinja o estado de estabilidade beta, antes de se esfriar até um valor da temperatura em que a energia térmica é desprezível em relação à energia de ligação.

### 1.3. MATÉRIA FRIA

Foi Landau (1932) quem levantou, pela primeira vez, a hipótese de que as estrelas, uma vez exauridas suas reservas naturais de energia, e depois de um longo período de esfriamento e de contração gravitacional, deveriam no final se transformar em caroços gigantes, inteiramente frios e densos. Propôs, então, que se investigassem as propriedades físicas da matéria fria e densa, em equilíbrio hidrostático, sugerindo, anos mais tarde, o chamado polítropo de ordem 3 como uma aproximação à estrutura estelar.

Com efeito, temperaturas típicas da matéria nas estrelas de neutron situam-se entre  $10^6$  e  $10^8$  °K, o que corresponde, em termos de energia, a  $10^{-4}$  e  $10^{-2}$  MeV, respectivamente. Tais energias são extremamente pequenas em relação às energias de Fermi, que são superiores a ou da ordem de 1 a 10 MeV. E muito menores ainda, se comparadas com as energias de ligação por partícula, que são da ordem de 100 MeV.

Desse modo, em primeira aproximação, a hipótese de tem-

peratura  $T = 0$  é seguramente boa, salvo durante o breve período imediatamente posterior à formação da estrêla, em que a temperatura pode ultrapassar a  $10^{10}$  °K, e também exceto na envoltória da estrêla, em que a densidade é baixa (cf. Barkat *et al.*, 1972). Em consequência, podemos aplicar ao mar de eletrons e de neutrons livres as equações relativas a um gás de Fermi completamente degenerado, e desprezar o efeito da temperatura na equação de estado, isto é, podemos considerar a estrêla de neutron um corpo frio.

O estado da matéria fria é, então, plenamente determinado pela sua densidade e composição química, a qual por sua vez depende também da densidade. Neste aspecto, a teoria que usamos é unidimensional, no sentido de que a equação de estado é unidimensional: função apenas de uma única variável, a saber, a densidade total local. Vale a pena lembrar que a hipótese de uma temperatura constante, mas diferente de zero, é inteiramente destituída de significado físico, desde que, em condições reais, a temperatura na superfície é consideravelmente mais baixa que a temperatura interna.

Por outro lado, se a temperatura da estrêla é nula, então, pelo teorema de Nernst (cf. Landau e Lifshitz, 1969), a sua entropia será igualmente nula.

#### 1.4. OUTRAS HIPÓTESES

Uma hipótese básica, que consideramos como hipótese de trabalho, é a de neutralidade de carga: a matéria da estrela de neutron, como um todo, tem igual densidade de número de cargas negativas e de cargas positivas. A rigor, isso decorre da necessidade de minimizar a energia total, visto que uma carga total não-nula dá origem a uma contribuição Coulombiana macroscópica, que é estritamente positiva.

A par disso, admitimos ausência de rotação. Supondo ainda que a distribuição de densidade seja esfêricamente simétrica, então a estrela, em equilíbrio, assumirá a forma esférica. Naturalmente, se levarmos em conta a rotação, a matéria apresentará simetria axial, e o problema de uma estrela de neutron em rotação exigirá um tratamento relativístico geral extremamente complicado. Na verdade, pela teoria de Einstein, é muito difícil descrever objetos plenamente relativísticos, girando relativisticamente (cf. Thorne, 1970). Grewing e Heintzmann (1973) mostraram que, no caso de rotação lenta e massas estelares muito grandes, o momento de inércia relativístico é sensivelmente maior que o valor fornecido pela teoria de Newton (por um fator 2, aproximadamente).

As camadas mais externas de uma estrela de neutron são dominadas por fortes campos magnéticos (cêrca de  $10^{13}$  Gauss, para uma densidade equivalente de  $5 \times 10^3$  g/cm<sup>3</sup>). Isto claramente complica o estudo da equação de estado e suas propriedades físicas. Entretanto, a energia de interação dos campos magnéticos com os

eletrons é da ordem de  $10^{-1}$  MeV e com os núcleos é da ordem de  $10^{-4}$  MeV, que são desprezíveis para densidades superiores a  $10^6$  g/cm<sup>3</sup> (Grewing e Heintzmann, 1973). Portanto, no presente trabalho, não levaremos em consideração os campos magnéticos, uma vez que estamos lidando com estrêlas de neutron suficientemente densas, em que sua influência pode ser tranquilamente desprezada.

A título de simplicidade, supomos que a estrêla de neutron seja constituída apenas pelas seguintes partículas fundamentais: protons, neutrons e eletrons. A menos que a densidade assuma valores extremamente elevados, tal simplificação é válida e representa uma boa aproximação para muitas situações reais. E a exemplo do que se faz nas teorias usuais de estrêlas de neutron, admitimos o número bariônico total conservado, e aceitamos como verdade a independência da carga em relação às forças nucleares, isto é, a invariância isotópica.

Por fim, consideramos modelos de estrêlas de neutron com densidades centrais compreendidas entre  $5 \times 10^{13}$  e  $8 \times 10^{14}$  g/cm<sup>3</sup>.



## CAPÍTULO II: EQUAÇÕES DA ESTRUTURA DAS ESTRÊLAS DE NEUTRON

A fim de aplicar as equações de Einstein na determinação da energia da matéria das estrêlas de neutron, limitamos nossa atenção à configurações momentaneamente estáticas. Em consequência, o campo gravitacional associado com a matéria será também momentaneamente estático. Tal restrição se justifica diante do fato de que a escala de tempo hidrodinâmico é muito menor que as escalas correspondentes para os processos térmicos ou nucleares. Na hipótese, portanto, de um sistema estático e esfêricamente simétrico, utilizamos a solução interior de Schwarzschild para obter as equações de equilíbrio hidrostático das estrêlas de neutron. Apresentamos também as mesmas equações sob forma mais conveniente, tendo em vista a integração numérica por computador eletrônico.

### 2.1. EQUAÇÕES DE EINSTEIN

A Teoria Geral da Relatividade nos fornece uma relação entre a geometria do espaço-tempo e a distribuição de matéria e de campos. Tal relação é a análoga relativística da equação de

Poisson (cf., p. ex., Tolman, 1934):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = K T_{\mu\nu} \quad (1)$$

onde  $R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\nu\sigma}$  é o tensor simétrico de Ricci, e  $R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma}$  é o tensor curvatura de Riemann, dado por:

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\sigma} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \quad (2)$$

com os símbolos de Christoffel relacionados com o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  através de:

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \left( \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right) \quad (3)$$

em que  $g_{\mu\nu}$  é definido por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (4)$$

com  $g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma} = \delta^{\sigma}_{\mu}$

Por outro lado,  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  é a curvatura escalar do espaço;  $T_{\mu\nu}$  o tensor energia-momento;  $\Lambda$  a constante cosmológica; e  $K$  é proporcional à constante gravitacional  $G$  ( $K = 8\pi G/c^4$ ).

As equações (1) são as conhecidas equações de campo de

Einstein. Colocando a constante cosmológica idênticamente igual a zero (\*), as equações (1) reduzem-se a:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = K T_{\mu\nu} \quad (5)$$

que são as equações de Einstein na sua forma mais simples, e constituem um sistema de equações não-lineares. Portanto, o princípio de superposição não se aplica a campos gravitacionais, e para  $T_{\mu\nu}$  arbitrário, não existe solução geral para as equações de Einstein.

## 2.2. SOLUÇÃO INTERIOR DE SCHWARZSCHILD

Para sistemas com simetria esférica, o elemento de linha apresenta a seguinte forma padrão (Lemaître, 1931):

$$ds^2 = - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) + e^\nu (cdt)^2 \quad (6)$$

onde  $\lambda = \lambda(r, t)$  e  $\nu = \nu(r, t)$

---

(\*) Observações recentes em relação aos objetos quase-estelares ou quasares sugerem que  $\Lambda$  possa ser realmente não-nulo, de valor estimado de  $10^{-55} \text{ cm}^{-2}$ . Fisicamente, isto implica na existência de uma pressão e de uma densidade de energia devido ao vácuo (cf. Zel'dovich e Novikov, 1971).

Se, além disso, o sistema fôr momentaneamente estático, o elemento de linha ainda será dado pela expressão (6), mas as funções  $\lambda$  e  $\nu$  agora dependem de  $r$  apenas:

$$\lambda = \lambda(r) \quad ; \quad \nu = \nu(r)$$

O tensor métrico, neste caso, assume a forma diagonal :

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -e^\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^\nu \end{pmatrix} \quad (7)$$

A função  $e^{\lambda(r)}$  define assim o desvio do espaço-tempo a partir do Euclídiano, ao passo que a função  $e^{\nu(r)}$  caracteriza as variações na taxa de fluxo de tempo.

Schwarzschild (1916) determinou as funções  $e^{\lambda(r)}$  e  $e^{\nu(r)}$  para a região interior de uma distribuição estática, esfericamente simétrica.

Considerando a matéria constituída de fluido perfeito, o tensor energia-momentum adquire também a forma diagonal, quando referido a um sistema de coordenadas localmente galileano, em que o gás se encontra em repouso. A lei de Pascal permite escrever:

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p$$

Por outro lado:

$$T_0^0 = c^2 d = \epsilon$$

onde  $p$  e  $\epsilon$  são respectivamente os valores próprios da pressão e da densidade de energia da matéria (incluindo a energia de repouso de tôdas as partículas). Então:

$$(T_{\mu}^{\nu}) = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \quad (8)$$

Para êste caso particular, as equações de Einstein admitem uma solução geral, a saber, a chamada solução interior de Schwarzschild.

Substituindo  $T_{\mu\nu}$  pela equação (8) e calculando todos os elementos envolvidos com o auxílio de (2) e (3), (c.f., p. ex., Tolman, 1934), as equações (5) fornecem:

$$\kappa p = e^{-\lambda} (r^{-1} \frac{dv}{dr} + r^{-2}) - r^{-2} \quad (9.a)$$

$$\kappa \epsilon = e^{-\lambda} (r^{-1} \frac{d\lambda}{dr} - r^{-2}) + r^{-2} \quad (9.b)$$

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{p + \epsilon}{2} \frac{dv}{dr} \quad (9.c)$$

Não havendo singularidades na métrica, equação (9.b) pode ser integrada imediatamente, resultando em:

$$e^{-\lambda} = 1 - \kappa r^{-1} \int_0^r \epsilon r'^2 dr' \quad (10)$$

A fim de determinarmos a função  $e^v$ , vamos primeiramente calcular as expressões para  $d\lambda/dr$  e  $dv/dr$ . Derivando a equação (10), encontramos:

$$\frac{d\lambda}{dr} = e^\lambda K r \left( \epsilon - r^{-3} \int_0^r \epsilon r'^2 dr' \right) \quad (11)$$

Da equação (9.a), tiramos:

$$\frac{dv}{dr} = e^\lambda (K r p + r^{-1} - e^{-\lambda} r^{-1})$$

Com o auxílio da equação (10), vem:

$$\frac{dv}{dr} = e^\lambda K r \left( p + r^{-3} \int_0^r \epsilon r'^2 dr' \right)$$

Ou:

$$\frac{dv}{dr} = e^\lambda K r (p + \epsilon) - \frac{d\lambda}{dr}$$

onde fizemos uso da relação (11). A função  $e^v$  é então dada por

$$e^v = \exp \left( \int_0^r \{K r' e^\lambda (p + \epsilon) - d\lambda/dr'\} dr' \right) \quad (12)$$

No caso de  $\epsilon$  constante, as equações (10) e (12) constituem a chamada solução interior de Schwarzschild.

## 2.3. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO HIDROSTÁTICO

Para pontos exteriores à estrêla, onde  $T_{\mu\nu} = 0$ , Schwarzschild mostrou que:

$$e^{-\lambda} = 1 - 2GM/rc^2 \quad (13)$$

onde  $M$  é a massa da estrêla.

A condição de que a função  $e^{-\lambda}$  seja contínua na superfície é suficiente para se determinar a energia total da estrêla. Lançando mão das equações (10) e (13), temos:

$$1 - 2GM/rc^2 = 1 - Kr^{-1} \int_0^R \epsilon r'^2 dr'$$

em que  $R$  é o raio da estrêla. Como  $E = Mc^2$ , resulta:

$$E = 4\pi \int_0^R \epsilon r^2 dr \quad (14)$$

As energias gravitacionais já estão incluídas na equação (14), através do caráter não-Lorentziano da métrica.

A estrutura estelar pode ser imediatamente determinada com a ajuda das equações (9) e (14), se a equação de estado

$$\epsilon = \epsilon(\rho) \quad (15)$$

ou equivalentemente  $p = p(\epsilon) \quad (16)$

fôr explicitamente conhecida. Na equação (15),  $\rho$  é a densidade bariônica total, dada por:

$$\rho = \rho_n + \rho_p \quad (17)$$

onde  $\rho_n$  e  $\rho_p$  são as densidades de número de neutrons e de protons, respectivamente.

Contudo, a configuração das estrêlas de neutron é comumente especificada pela função

$$\rho = \rho(r)$$

e, para encontrar tal função, substituímos na equação (9.c) a pressão por:

$$p = \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\epsilon}{\rho} \right) \quad (18.a)$$

ou

$$p = \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \rho - \epsilon \quad (18.b)$$

que é a relação entre a pressão e a densidade de número total, no caso de estado degenerado. O resultado, então, é:

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \left( \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho^2} \right)^{-1} e^{\lambda} Kr \left\{ p + r^{-3} \int_0^r \epsilon r'^2 dr' \right\} \quad (19)$$

As equações (14) e (19) constituem as principais equações da configuração das estrêlas de neutron, e são resolvidas sob as seguintes condições de contorno:

$$\rho = \rho_c, \quad E = 0 \quad \text{para} \quad r = 0$$



$$p = 0 \quad \text{para } r = R$$

Uma maneira alternativa de obter a função  $\rho = \rho(r)$  (cf. Kodama e Yamada, 1971a), é admitir primeiramente a independência linear entre as componentes  $\rho_i$  e a conservação do número total de bárions de cada espécie  $N_i$ , dado por:

$$N_i = 4\pi \int_0^r \rho_i e^{\lambda/2} r^2 dr \quad (i=1,2) \quad (20)$$

Aplicando, então, o princípio variacional ( $\delta E = 0$ ) com a condição vincular  $\delta N_i = 0$  ( $i=1,2$ ), obtém-se para cada componente  $i$ :

$$\frac{d\rho_i}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{|D^i|}{|D|} e^\lambda Kr \left\{ p + r^{-3} \int_0^r \epsilon r'^2 dr' \right\} \quad (21)$$

onde  $|D|$  é o determinante da matriz  $D$ ,  $n \times n$ , cujos elementos são definidos por

$$D_{jk} = \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho_j \partial \rho_k}$$

e  $|D^i|$  é o determinante da matriz  $D^i$ , também  $n \times n$ , obtida a partir de  $D$  pela substituição da  $i$ -ésima coluna  $\partial^2 \epsilon / \partial \rho_i \partial \rho_j$  por  $\partial \epsilon / \partial \rho_j$  ( $j = 1, 2$ ).

Em seguida, impõe-se a condição de energia mínima em cada ponto, o que equivale a tratar as componentes  $\rho_i$  não mais como independentes, mas sim relacionadas entre si pela equação (17) e por:

$$\eta = \frac{1}{\rho} (\rho_n - \rho_p) \quad (22)$$

que é o excesso de neutrons, tal que  $\partial\epsilon/\partial\eta = 0$ . Desta condição resulta:

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho_n} = \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho_p} \quad (23)$$

Portanto, derivando a equação (17) em relação a  $r$  e com o auxílio da relação (23), chega-se imediatamente ao resultado (19).

#### 2.4. EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

A fim de facilitar a integração numérica por computador eletrônico, colocamos a equação (19) sob forma mais apropriada, definindo antes uma nova variável  $y_2$  como se segue:

$$y_2 = r^{-3} \int_0^r \epsilon r'^2 dr' \quad (24)$$

Com as substituições de  $e^\lambda$  e  $p$  por suas expressões correspondentes - equações (10) e (18b) - a equação (19) assume o aspecto seguinte:

$$\frac{dy_1}{dr} = - \frac{1}{2} \frac{|D^i|}{|D|} Kr (1 - Kr^2 y_2)^{-1} (|D^i| y_1 - \epsilon + y_2) \quad (25)$$

onde, por conveniência, fizemos  $\rho = y_1$ .

Por outro lado, da equação (24), tiramos:

$$\frac{dy_2}{dr} = -r^{-1} (3y_2 - \epsilon) \quad (26)$$

As equações (25) e (26) juntas são equivalentes à equação (19), e constituem um sistema de duas equações diferenciais si multâneas:

$$\frac{dy_1}{dr} = f_1(r, y_1, y_2) \quad (27.a)$$

$$\frac{dy_2}{dr} = f_2(r, y_1, y_2) \quad (27.b)$$

### CAPÍTULO III: EQUAÇÃO DE ESTADO DAS ESTRELAS DE NEUTRON

Vimos que a estrutura da estrela de neutron pode ser determinada pelas equações (14) e (19), desde que se conheça a equação de estado  $\epsilon = \epsilon(\rho)$ . Para as configurações consideradas, não existe uma equação de estado que seja comum a todos os valores de  $r$ . A razão é que, ao curso da integração, ocorrem mudanças na composição química da matéria e até mesmo transições de fase, o que implica na modificação correspondente na forma da equação de estado.

Assim, classificamos a densidade de matéria das estrelas de neutron em três regiões típicas: nuclear, subnuclear e supranuclear. Calculamos separadamente uma equação de estado para a faixa subnuclear e uma outra para a faixa nuclear, e tendo em mente as incertezas envolvidas, extrapolamos esta última para o regime supranuclear. A equação de estado de toda a matéria da estrela de neutron é, então, encontrada através da determinação de uma função contínua que reproduza, nas respectivas faixas, as equações de estado parciais, mantida sempre a condição de pressão e potencial químico contínuos. Como resultado, achamos uma transição de fase entre o domínio subnuclear, de maior compressibilidade, e o domínio nuclear, de menor compressibilidade.

### 3.1 - DENSIDADE SUBNUCLEAR

A região de densidade subnuclear ( $500 < d < 5 \cdot 10^{13} \text{ g/cm}^3$ ) pode ser pesquisada em duas faixas distintas: uma, caracterizada pela fase "núcleo-eletron" ( $500 < d < d_1$ , onde  $d_1$  é o valor da densidade a partir do qual surgem neutrons livres\*); outra, marcada pela existência de um mar de neutrons livres e correspondente à fase "núcleo-eletron-neutron" ( $d_1 < d < 5 \cdot 10^{13} \text{ g/cm}^3$ ).

#### a) DENSIDADE SUBNUCLEAR SEM NEUTRONS LIVRES

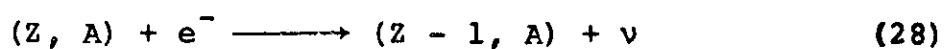
Na região de densidade  $d < d_1$ , admitimos que os barions se agrupem em núcleos de uma mesma espécie nuclear, e que tais núcleos, segundo hipótese levantada por Ruderman (1969), se dispõem em estrutura de rede cristalina, imersos num gás de eletrons degenerados. Para densidade  $d > 500 \text{ g/cm}^3$ , os eletrons podem ser tratados em primeira aproximação como partículas livres e, assim, eles constituem uma distribuição homogênea de cargas negativas. A hipótese de neutralidade de carga implica obviamente em  $\rho_e = \rho_p$ ,

---

\* Por neutrons livres queremos nos referir àqueles neutrons que existem fora dos núcleos. Evidentemente, eles mantêm interação entre si.

onde  $\rho_e$  representa a densidade de número de eletrons. Quando a densidade for superior a  $10^6$  g/cm<sup>3</sup>, os eletrons passam a adquirir uma energia de Fermi maior que a sua energia de repouso e entram na região de degenerescência relativística.

A uma densidade da ordem de  $10^7$  g/cm<sup>3</sup>, com a energia de Fermi dos eletrons alcançando aproximadamente 1 MeV, o processo  $\beta$  inverso



torna-se energeticamente favorável: um eletron é capturado pelo núcleo  $(Z, A)$  e um dos protons do núcleo se transforma em neutron.

O processo descrito em (28) faz com que os núcleos fiquem cada vez mais ricos em neutron, razão por que esse processo é conhecido como neutronização da matéria. Naturalmente, com a densidade crescente, a neutronização se acentua, de modo que a natureza dos núcleos presentes se desvia mais e mais da dos núcleos ordinários.

Por causa da presença dos núcleos, os eletrons passam a ganhar uma energia de correção Coulombiana por unidade de volume,  $\epsilon_C$ , resultante da interação eletrón-núcleo. Além disso, devido aos efeitos do encobrimento de eletrons, a distribuição de carga negativa sofre leves desvios a partir da distribuição uniforme, dando origem a uma outra correção  $E_{en}$  por eletrón que, pela aproximação de Thomas-Fermi, sabemos ser proporcional a  $Z^{4/3}$  (Salpeter, 1961).

Dessa forma, a energia dos eletrons, por unidade de volume

me  $E_e$ , tem por expressão:

$$E_e = \epsilon_F + \epsilon_C + \epsilon_{en}$$

onde  $\epsilon_F$  é a contribuição da energia média do gás de Fermi e  $\epsilon_{en}$  é a energia de encobrimento por unidade de volume.

Contudo, tendo-se em vista que  $\epsilon_{en}$  é da mesma ordem de grandeza que a energia de ligação dos eletrons atômicos, podemos desprezar este termo de correção, desde que na fórmula de massa nuclear não deixemos de levar em conta a energia de ligação eletrônica.

A expressão da densidade de energia total para um sistema formado por um gás degenerado de eletrons e por núcleos de um mesmo número atômico  $Z$  e um mesmo número de massa  $A$  pode ser escrita simplesmente como:

$$\epsilon_1 = M(Z,A) c^2 \rho_C + \epsilon_F + \epsilon_C \quad (29)$$

O primeiro termo representa a energia dos núcleos de massa  $M(Z,A)$  e de densidade de número  $\rho_C = \rho/A$ .

No caso relativístico, a energia média por unidade de volume do gás de Fermi de eletrons completamente degenerados é dada por (cf. Landau e Lifschitz, 1969):

$$\epsilon_F = \frac{m_e^4 c^5}{32\pi^2 \hbar^3} (\sinh \theta - \theta) \quad (30)$$



onde:

$$\theta = 4 \ln \{x + (1 + x^2)^{1/2}\} \quad (31)$$

sendo  $x$  o chamado parâmetro relatividade, dado por:

$$x = \frac{\hbar}{m_e c} (3\pi^2 \rho_e)^{1/3}$$

e  $m_e$  é a massa de repouso do eletrón;  $c$  a velocidade da luz no vácuo; e  $\hbar$  a constante de Planck dividida por  $2\pi$ . Na expressão (30), já está incluída a energia de repouso do eletrón.

No caso não-relativístico ( $x < 1$ ), podemos reescrever a equação (31):

$$\theta = 4 \ln(1 + t)$$

onde:

$$t = 2x \{(1 + x^2)^{1/2} + (1 - x)\}^{-1}$$

Desenvolvendo em série binomial, encontramos:

$$\theta = 4 (t - t^2/2 + t^3/3 - t^4/4 + \dots)$$

Da mesma forma, expandindo equação (30), vem :

$$\epsilon_F = \frac{m_e^4 c^5}{32\pi^2 \hbar^3} (\theta^3/3! + \theta^5/5! + \dots) \quad (32)$$



A energia de Fermi  $E_F$ , dada por

$$E_F = m_e c^2 \{(1 + x^2)^{1/2} - 1\}$$

é relacionada com a energia média do gás de Fermi  $\epsilon_F$ , através de :

$$\frac{\epsilon_F}{\rho} = \frac{3}{5} E_F + m_e c^2 \quad (\text{n\~{a}o relativ\~{i}stico)} \quad (33.a)$$

$$\frac{\epsilon_F}{\rho} = \frac{3}{4} E_F + m_e c^2 \quad (\text{relativ\~{i}stico)} \quad (33.b)$$

Em relaça~o ao termo de correça~o Coulombiana  $\epsilon_C$ , usamos a aproximaça~o da esfera de Wigner-Seitz e escolhemos a rede cúbica de corpo centrado como estrutura cristalina dos núcleos, tendo em vista a minimizaça~o da energia total (cf. Salpeter, 1961). Assim, a energia de interaçã~o por unidade de volume é simplesmente:

$$\epsilon_C = - 0,902 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \hbar c \alpha Z^{2/3} \rho_e^{4/3} \quad (34)$$

onde  $\alpha$  é a constante de estrutura fina.

Por outro lado, admitindo que os núcleos existentes nã~o difiram muito dos núcleos ordinários, de modo tal que possam ser descritos por meio das fórmulas padrões de massa nuclear, podemos entã~o escrever:

$$M(Z, A) = \Delta m(Z, A) - m_e Z + m_u A$$

em que  $\Delta m(Z, A)$  é o excesso de massa atômica, isto é, o excesso de

massa acrescido da massa de repouso dos eletrons, e  $m_u$ , a unidade atômica de massa. Para o valor de  $\Delta m(Z, A)$ , podemos, em princípio, utilizar qualquer uma das inúmeras fórmulas de massa existentes. Dessas fórmulas, algumas se baseiam no modelo de gôta líquida (p. ex., Myers e Swiatecki), outras se fundamentam no modelo de camada (p. ex., de Shalit e Talmi). Neste trabalho, escolhemos a fórmula de massa proposta por Garvey *et al.* (1969), que fizeram uso das relações conhecidas entre massas nucleares e que partiram da hipótese do parâmetro de aspereza  $R$  ser igual a zero.

A razão de nossa escolha é que a fórmula de Garvey *et al.* apresenta, dentre todas, o menor desvio médio quadrático  $\sigma$  dos valores de  $R_{\text{calc}}$  a partir dos valores de  $R_{\text{exp}}$  (Wing, 1968). Não obstante isso, a extrapolação desta fórmula de massa para a região longe do vale de estabilidade beta é duvidosa. Contudo, ela é usada aqui para estimar a massa dos núcleos ricos-em-neutron, a fim de assegurar a consistência das fórmulas nas regiões perto e longe do vale de estabilidade beta.

A condição de que os núcleos  $(Z, A)$  estejam em equilíbrio com o gás de eletrons permite determinar, para cada  $\rho$ , os valores de  $A$  e de  $Z$ , tais que minimizem primeiro em  $A$  e depois em  $Z$  a expressão:

$$E_1 = \epsilon_1 - m_u c^2 \rho \quad (35)$$

A justificativa de se otimizar a expressão (35) ao invés da (29) é que o ajustamento posterior dos pontos obtidos se torna mais fá-

cil sem o comportamento linear em  $\rho$ . Salpeter (1961), por sua vez, maximizou em relação a A e a Z a quantidade

$$b = \frac{B(Z, A) - Z E_F^i}{A}$$

onde  $B(Z, A)$  é a energia de ligação do núcleo  $(Z, A)$ , e  $E_F^i$  a energia de Fermi do gás de elétrons menos a diferença de energia de repouso entre neutron e hidrogênio. Os resultados de nossos cálculos encontram-se na tabela I. Comparamos os resultados com os obtidos por Salpeter (tabela II) e também com os de Baym *et al.* (1971), que fizeram uso da fórmula de Myers e Swiatecki (tabelas III.a e III.b).

A densidade  $d_1$  é agora facilmente determinada pela condição de  $\delta < 0$ , sendo  $\delta$  a energia de ligação do neutron no interior do núcleo  $(Z, A)$ :

$$\delta = M(Z, A-1) + m_n - M(Z, A) \quad (36)$$

onde  $m_n$  é a massa de repouso do neutron. Obviamente, quando  $\delta > 0$ , não há fluxo de neutrons livres. O valor de  $d_1$  é fornecido na tabela IV, junto com os encontrados por outros pesquisadores.

#### b) DENSIDADE SUBNUCLEAR COM NEUTRONS LIVRES

Nesta região de densidade ( $d_1 < d < 5 \cdot 10^{13} \text{ g/cm}^3$ ), encon

tramos neutrons livres, núcleos ricos-em-neutron e eletrons em estado de equilíbrio. A densidade de número de neutrons livres  $\rho_l$ , por sua vez, aumenta com a densidade crescente. É claro que a existência de neutrons livres determina o aparecimento de outros termos na expressão da densidade de energia total da matéria. Admitindo-se ausência de interação entre os núcleos e o mar de neutrons livres, bem como desprezível o número de protons fora dos núcleos, a densidade de energia total tem por expressão:

$$\epsilon_2 = M(Z, A) c^2 \rho_c + \epsilon_C + \epsilon_F + m_n c^2 \rho_l + f(\rho_l) \quad (37)$$

Os três primeiros termos na equação acima têm o mesmo significado que na expressão (29). O quarto termo dá a contribuição da energia de repouso dos neutrons livres, ao passo que o último representa a energia de interação neutron-neutron.

A fim de calcular a energia de interação neutron-neutron, lançamos mão da fórmula semi-empírica de massa nuclear de Kodama e Yamada (1971b), extrapolando sua faixa de validade para a região de densidade  $d < 5 \cdot 10^{13} \text{ g/cm}^3$ . Isto é permitido, porque o comportamento das energias nucleares a baixa densidade também é levado em conta na fórmula de massa. Das quatro fórmulas apresentadas pela referência acima, escolhemos a fórmula  $F_3$ , visto que ela corresponde a um estado de densidade infinitesimal com homogeneidade microscópica (isto é, sem *clusters*), quando o raio do volume médio por nucleon se torna infinito.

A fórmula  $F_3$  é a seguinte:

$$F_3 = \left\{ a_1 + a_3 \left( \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho_n + \rho_p} \right)^2 \right\} (\rho_n + \rho_p) \quad (38)$$

com os parâmetros  $a_1$  e  $a_3$  dados por:

$$a_1 = 7040,773 + 588,5867 \xi - 15635,38 (4 - \xi)^{-1/2} + 12430,63 (4 - \xi)^{-2} \quad \text{MeV}$$

$$a_3 = -1044,180 - 130,3555 \xi + 2088,361 (4 - \xi)^{-1/2} \quad \text{MeV}$$

sendo

$$\xi = \left\{ \frac{4\pi}{3} (\rho_n + \rho_p) \right\}^{1/3} \quad \text{fm}^{-1}$$

Na expressão (38), o termo  $a_1$  é o chamado termo de volume e  $a_3$  é o termo de simetria. Os efeitos de esfera dura nas interações nucleon-nucleon já são levados em consideração.

No caso da energia de interação neutron-neutron, fazemos  $\rho_p = 0$  e  $\rho_n = \rho_\ell$  na equação (37), e obtemos:

$$f(\rho_\ell) = (a_1 + a_3) \rho_\ell \quad (39)$$

A exemplo do que fizemos no item a, a condição de equilíbrio nos permite minimizar a expressão:

$$E_2 = \epsilon_2 - m_u c^2 \rho \quad (40)$$

lembrando que, neste caso, o processo de minimização se faz em relação a três parâmetros:  $A$ ,  $Z$  e o excesso de neutrons  $\eta$ . Os resultados são fornecidos na tabela V.

Langer *et al.* (1969) minimizaram primeiro em  $Z$ , depois em  $A$ , a quantidade

$$g = B(Z, A) - Z E_F^e + A E_F^n$$

onde  $E_F^e$  e  $E_F^n$  são as energias de Fermi do gás de elétron e do gás de nêutron, respectivamente. Seus resultados, confrontados com os nossos, são apresentados na tabela VI.

### 3.2. DENSIDADE NUCLEAR

À proporção que a densidade da matéria sobe, o nível de Fermi do gás degenerado de nêutrons fica cada vez mais alto, e com isso inibe a ejeção de nêutrons por parte dos núcleos ricos-em-nêutron, na medida em que reduz o espaço de fase acessível aos nêutrons emitidos.

Para uma densidade da ordem de  $5 \cdot 10^{13} \text{ g/cm}^3$  (Langer *et al.*, 1969), os núcleos ricos-em-nêutron se tornam instáveis e começam a se desintegrar: seus nucleons passam a engrossar o número de partículas do gás circundante. A partir de  $5 \cdot 10^{13} \text{ g/cm}^3$ , conseqüentemente, os núcleos desaparecem da matéria.

A faixa de densidade nuclear é considerada como aquela que vai de  $5 \cdot 10^{13} \text{ g/cm}^3$  a  $6 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ . Neste regime, admitimos a existência de uma fase homogênea "nêutron-proton-eletron" para a matéria, sendo que os nêutrons constituem a parte maior das partí-

culas presentes. A presença de muons  $\mu^-$  e híperons  $\Sigma^-$  na parte superior deste domínio é desprezada.

A densidade de energia total tem, desse modo, as seguintes contribuições:

$$\epsilon_3 = m_n c^2 \rho_n + m_p c^2 \rho_p + \epsilon_F + F_3 \quad (41)$$

onde os dois primeiros termos são as energias de repouso dos bárions,  $\epsilon_F$  a energia média do gás de Fermi, formado pelos elétrons ultra-relativísticos, e  $F_3$  é a energia de interação bariônica, dada pela fórmula de Kodama e Yamada (1971b).

Os resultados, com a minimização de:

$$E_3 = \epsilon_3 - m_u c^2 \rho \quad (42)$$

são mostrados na tabela VII.

### 3.3. DENSIDADE SUPRANUCLEAR

A matéria com densidade  $d > 6 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$  é dita estar na faixa de densidade supranuclear. A tais densidades, surgem outras partículas, diferentes das que consideramos até agora, como, por exemplo, os muons e os híperons. Segundo cálculos de Sahakian (1971), já a partir de  $3,35 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$  os leptons  $\mu^-$  e os hípe

rons  $\Sigma^-$  começam a aparecer, em  $2 \cdot 10^{15}$  g/cm<sup>3</sup> surgem os híperons  $\Lambda$  e em  $5,6 \times 10^{15}$  g/cm<sup>3</sup>, os híperons  $\Sigma^0$ . É por este motivo que o domínio supranuclear é também conhecido como domínio hiperônico.

Neste domínio, não existem ainda dados experimentais suficientes que permitam fundamentar uma relação simples entre a pressão e a densidade. Zel'dovich (1961) sugeriu, então, uma equação de estado, na forma de:

$$p = (L - 1)c^2 d \quad (43)$$

onde  $p$  é a pressão e  $b$  um parâmetro sujeito à restrição  $b < 2$ . Leung e Wang (1973) introduziram o chamado espectro de massa bariônica efetiva e encontraram uma forma assintótica, válida para  $d \sim 10^{17}$  g/cm<sup>3</sup>, dada por:

$$d \approx (5 + 2\alpha)p \quad (44)$$

sendo  $\alpha$  um parâmetro.

Por outro lado, como já observamos na Introdução, a descrição das interações nucleon-nucleon por intermédio de um potencial, neste regime, se torna bastante duvidosa. Em vista disso, sem ultrapassar muito as incertezas que os outros métodos apresentam, decidimos simplesmente estender a faixa de validade da equação(41), extrapolando-a para o domínio hiperônico, pelo menos até um valor de  $d \sim 10^{15}$  g/cm<sup>3</sup>, que é o limite superior do domínio de densidade de interesse neste nosso trabalho. É evidente que, fazendo isso, nós nos conformamos com um tratamento apenas qualitativo do proble



na matéria a densidade supranuclear.

A tabela VIII apresenta os resultados a que chegamos.

### 3.4. TRANSIÇÃO DE FASE

A minimização das densidades de energia total, em cada domínio discutido, conduz a uma relação entre  $\epsilon$  e  $\rho$ , que fisicamente representa o lugar geométrico dos estados de equilíbrio do sistema, no espaço determinado por  $\rho_n$ ,  $\rho_p$  e  $\epsilon$ . Tal relação é mostrada esquematicamente na figura (1).

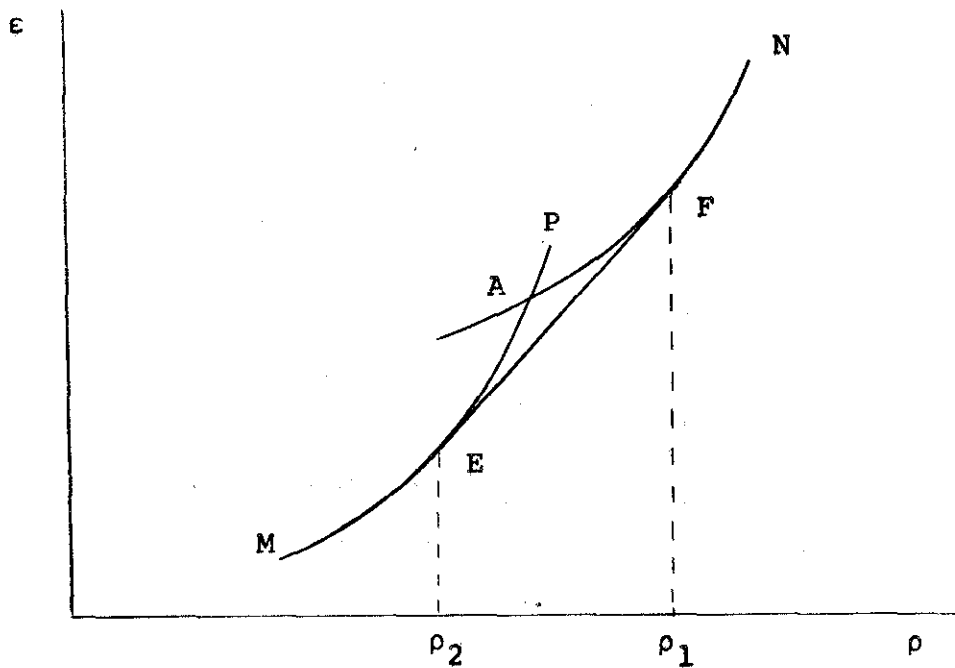


Figura (1)

É evidente da figura (1) que o ponto de interseção A entre a curva correspondente à faixa subnuclear e aquela referente à região nuclear constitui um ponto de descontinuidade para a pressão. Novamente, a condição de equilíbrio exige uma configuração de energia mínima. Isto significa que, à medida em que a matéria é comprimida a altas densidades, ela evolui no espaço  $\rho_n$ ,  $\rho_p$  e  $\epsilon$ , ao longo da trajetória MAN, ao invés de MAP.

Todavia, lembrando que  $p = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}\right) \rho - \epsilon$  e que  $\rho = 1/v$ , onde  $v$  é o volume por partícula, então, o gráfico (1) pode ser traduzido para o diagrama (2), em que  $p$  é plotada contra  $v$  (também esquematicamente).

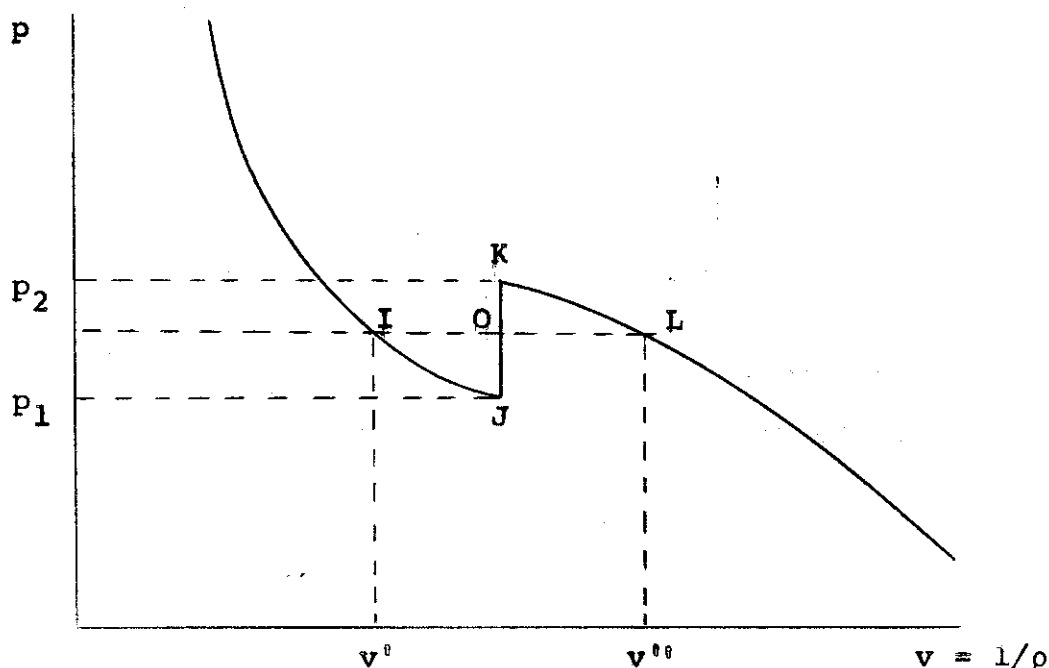


Figura (2)

O gráfico (2) apresenta estreita semelhança com as iso-  
termas da equação de van der Waals.

Foi mencionado no início deste capítulo que devemos im-  
por a condição de continuidade sobre a pressão e o potencial quími-  
co. A razão é que desejamos, *a priori*, levar em conta a possibili-  
dade da existência simultânea de duas fases da matéria das estrê-  
las de neutron, em estado de equilíbrio químico e termodinâmico.

Com efeito, se admitirmos que a matéria no domínio nucle-  
ar e a matéria no domínio subnuclear constituem duas fases distin-  
tas e homogêneas, podemos, então, aplicar a elas as seguintes con-  
dições de equilíbrio (cf., p.ex., Landau e Lifshitz, 1969; e Reif,  
1965):

$$p^{(1)} = p^{(2)} \quad (45.a)$$

$$\mu_i^{(1)} = \mu_i^{(2)} \quad (45.b)$$

Nas equações (45), os índices 1 e 2 denotam as fases, e  $\mu_i$  é o po-  
tencial químico da partícula de espécie  $i$ , dado por:

$$\mu_i = \left. \frac{\partial G}{\partial N_i} \right|_{S,V} = \left. \frac{\partial G}{\partial N_i} \right|_{p,T}$$

em que  $G$  é a energia livre de Gibbs, definido por :

$$G = E - TS + pV$$

sendo  $E$  a energia da estrêla,  $V$  o volume,  $S$  a entropia e  $T$  a tempe-  
ratura.

Voltando ao gráfico (2), podemos ver que, para um dado valor de  $p$ , compreendido entre  $p_1$  e  $p_2$ , encontramos três valores de  $v$  (ou equivalentemente, de  $\rho$ ). Entretanto a condição de estabilidade contra flutuações de volume reduz este número a dois valores possíveis, a saber:  $v'$  e  $v''$ . Por outro lado, a condição de equilíbrio exige que a energia livre de Gibbs por partícula,  $g$ , seja um mínimo. Prova-se, facilmente, que isto é satisfeito, desde que as áreas IJO e OKL da figura (2) sejam iguais, o que corresponde a uma forma alternativa de expressar as condições (45).

Dessa forma, o gráfico (2) assume o aspecto:

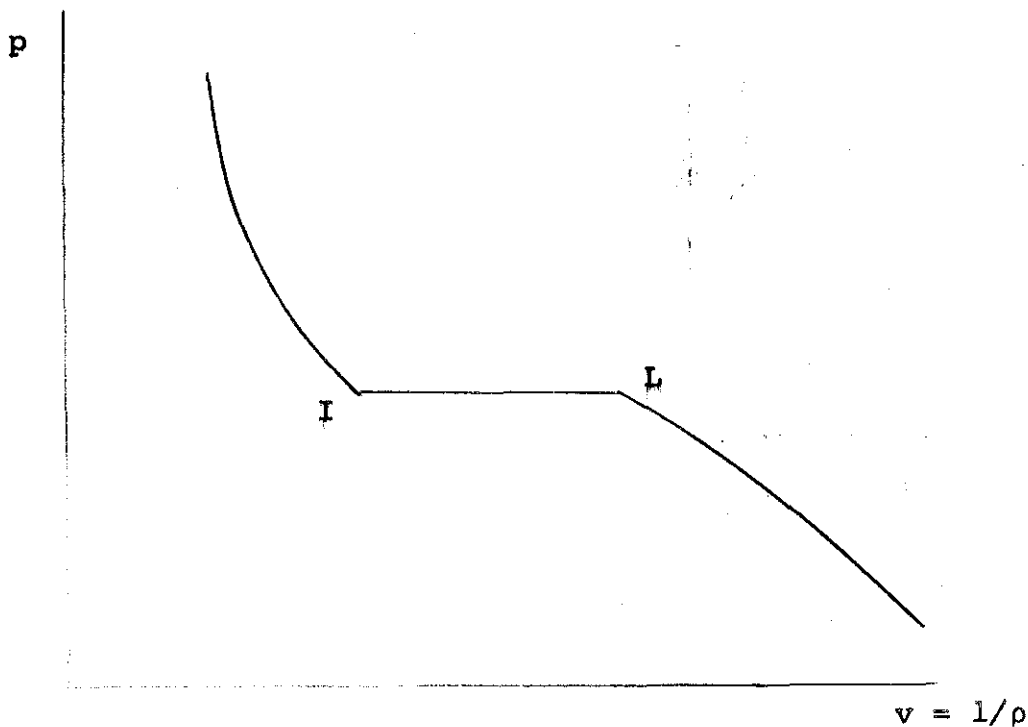


Figura (3)

A transição de fase ocorre, portanto, à pressão e temperatura constantes, e se realiza, mantendo-se as condições (45) satisfeitas. Ora, os pontos da transformação de fase no gráfico  $\epsilon \times \rho$ , correspondentes aos pontos IL do gráfico  $p \times v$ , podem ser obtidos de uma maneira simples, se lembrarmos que, no caso de uma teoria unidimensional como a nossa, as equações (45) se escrevem :

$$\mu^I = \mu^L \quad (46.a)$$

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \rho - \epsilon\right)_I = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \rho - \epsilon\right)_L \quad (46.b)$$

Como:

$$\mu^I = \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right|_I \quad \text{e} \quad \mu^L = \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right|_L$$

a equação (46.b) fornece imediatamente:

$$\epsilon_L - \epsilon_I = \mu^I (\rho_L - \rho_I) \quad ,$$

mostrando que a densidade de energia varia linearmente com a densidade de número bariônico, em que o coeficiente angular é igual ao potencial químico.

Consequentemente, satisfazer às condições (45) equivale a interligar, no gráfico  $\epsilon \times \rho$ , as duas curvas por intermédio de uma tangente comum EF (figura (1)), cujos pontos de contato,  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , determinam a transição de fase. Para achar tais pontos, preparamos um programa, a fim de se realizar este cálculo através do

computador. Encontramos, como resultado:  $\rho_1 = 0,2295 \times 10^{-1} \text{ fm}^{-3}$  e  $\rho_2 = 0,3683 \times 10^{-3} \text{ fm}^{-3}$ .

Pode-se, por outro lado, mostrar facilmente que os pontos  $\rho_1$  e  $\rho_2$  independem do comportamento linear da densidade de energia total em relação a  $\rho$ . Foi baseado nesse fato que, por simplicidade, minimizamos as expressões de  $E$ , ao invés das expressões correspondentes de  $\epsilon$ .

### 3.5. EQUAÇÕES DE ESTADO APROXIMADAS

Em princípio, podemos resolver as equações diferenciais (14) e (19) da estrutura estelar, usando as expressões que derivamos nas seções anteriores para a densidade de energia total. Contudo, tal procedimento levanta graves dificuldades quanto a tempo de cálculo.

Diante disso, é natural que procuremos expressões mais simples, embora aproximadas, analíticas ou não, que nos permitam uma integração rápida das equações de equilíbrio hidrostático.

Assim, notamos que, na faixa subnuclear sem neutrons livres, as contribuições dominantes à energia total provêm da energia de Fermi do gás de eletrons e da energia dos núcleos. Conseqüentemente, podemos escrever a densidade de energia total diretamente como a soma das duas contribuições:

$$\epsilon' = \epsilon_F + M(Z, A)c^2 \rho/A \quad (47)$$

A quantidade  $\epsilon'$  difere de  $\epsilon_1$  por menos de 0,01%. Entre - tanto, os problemas não páram aí. Os valores de A e de Z dependem da densidade de número total  $\rho$ . Diante disso, é imperioso dividir convenientemente a faixa das densidades em subfaixas, cada uma delas caracterizada por um mesmo valor de A e de Z (portanto, de um mesmo  $\eta$ ) e uma mesma espécie nuclear, todos previamente calculados. Em boa aproximação, admitimos que  $\epsilon$  varie suavemente ao se passar de uma subfaixa para outra, e que em cada uma das subfaixas seja possível a aplicação da equação (47).

Desse modo, a derivada primeira de  $\epsilon'$  tem uma expressão bem simples:

$$\frac{d\epsilon'}{d\rho} = M(Z, A)c^2/A + 0,5(1 - \eta) \frac{d\epsilon_F}{d\rho_p}$$

onde:

$$\frac{d\epsilon_F}{d\rho_p} = m_e c^2 (1 + x^2)^{1/2}$$

sendo  $x$  o parâmetro relatividade.

De forma análoga, a derivada segunda é dada por:

$$\frac{d^2\epsilon'}{d\rho^2} = \{0,5(1 - \eta)\}^2 \frac{d^2\epsilon_F}{d\rho_p^2}$$

com

$$\frac{d^2 \epsilon_F}{d\rho^2} = \pi^2 m_e c^2 (\hbar/m_e c)^3 \{x (1 + x^2)^{1/2}\}^{-1}$$

Por outro lado, no domínio subnuclear com neutrons livres, resolvemos plotar os dados em escala log-log e ajustar a curva obtida a um polinômio de ordem  $N_1$ , minimizando a expressão:

$$F_1 = \sum_{i=1}^L \left\{ \ln G_i - \sum_{j=1}^{N_1} a_j (\ln \rho_i)^{j-1} \right\}^2 / (\ln G_i)^2 \quad (48)$$

onde os  $G_i$  são os valores encontrados da densidade de energia total para  $\rho = \rho_i$ , acrescidos de um termo linear  $\alpha \rho_i$ , sendo  $\alpha$  uma constante convenientemente escolhida, tal que para todo  $\rho_i$  tenhamos  $\ln G_i > 0$ . Os coeficientes  $a_j$  são os coeficientes do polinômio que minimizam a equação (48). O fator  $(\ln G_i)^{-2}$  é meramente um peso estatístico.

Dessa maneira, a densidade de energia total na faixa subnuclear com neutrons livres tem por expressão:

$$\epsilon_{\text{sub}} = \exp \left\{ \sum_{j=1}^{N_1} a_j (\ln \rho)^{j-1} \right\} - \alpha \rho + m_u c^2 \rho \quad (49)$$

Para a minimização da quantidade (48), optamos pelo método de Powell (1965), que é essencialmente um método iterativo, tendo em vista sua rápida convergência. Os valores finais dos  $N_1$  coeficientes  $a_j$  são dados na tabela IX.

Quanto ao domínio nuclear e subnuclear, plotamos os da-



dos em escala linear, e ajustamos a curva a um polinômio de ordem  $N_2$ , extremando a quantidade:

$$F_2 = \sum_{i=1}^K \{G_i - \sum_{j=1}^{N_2} b_j \rho_i^{j-1}\}^2 / G_i^{1/2} \quad (50)$$

em que agora o peso estatístico é dado por  $G_i^{-1/2}$ .

Os valores finais dos  $N_2$  coeficientes  $b_j$ , depois da minimização de  $F_2$ , são fornecidos na tabela IX, junto com os  $a_j$ .

Assim, a densidade de energia total nesta faixa pode ser simplesmente escrita como:

$$\epsilon_{\text{nuc}} = \sum_{j=1}^{N_2} b_j \rho^{j-1} + m_u c^2 \rho \quad (51)$$

## CAPÍTULO IV: ESTRUTURA DAS ESTRÊLAS DE NEUTRON

A equação de estado total que obtivemos no capítulo anterior nos permite agora determinar a estrutura das estrêlas de neutron. Para isso, integramos numericamente as equações de equilíbrio hidrostático, pelo método de Runge-Kutta-Gill (Gill, 1950), com densidade central assumindo valores entre  $5 \cdot 10^{13}$  a  $8 \cdot 10^{14}$  g/cm<sup>3</sup>. Dessa maneira, encontramos a função  $\rho = \rho(r)$  para uma família de modelos de estrêlas de neutron, e em cada caso, determinamos a massa e o raio da estrêla. Calculamos também o número total de prótons e de neutrons, bem como o índice adiabático e a energia de ligação por partícula.

### 4.1. CONFIGURAÇÃO DA ESTRÊLA

A configuração da estrêla é caracterizada fundamentalmente pela função  $\rho = \rho(r)$ , que fornece em cada ponto o valor da densidade de número bariônico total. Graças à equação de estado que derivamos no capítulo III, estamos agora em condições de determiná-la, bastando para isso integrar numericamente as equações (27).

O método de integração que escolhemos é o processo de quatro se-  
quências de RKG, por ser o mais apropriado a situações estáticas .

No método RKG, uma escolha judiciosa do passo para a in-  
tegração é de importância crucial. Como não desejamos fazer, de an-  
temão, uma estimativa do raio da estrela, não podemos admitir um  
passo constante. Em consequência, um valor variável foi adotado ,  
com a condição de ser pequeno sempre que a massa ou a densidade  
de número bariônico total mudar rapidamente. Desse modo, escolhemos  
o passo como dado simplesmente por:

$$D = \delta \left( \frac{1}{m} \frac{dm}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right)^{-1} \quad (52)$$

onde  $\delta$  é um parâmetro introduzido para satisfazer às necessidades  
tanto da precisão quanto do tempo de cálculo. No caso, fizemos  $\delta$   
igual a 0,01.

Obviamente, D não pode ser medido em fermis. A unidade  
que mais convém é, inegavelmente, o quilômetro. Mas, nas equações  
(27),  $\epsilon$  é medido em  $\text{MeV}/\text{fm}^3$ . É possível superar tal dificuldade ,  
se notarmos que a quantidade

$$\frac{K}{r} \int_0^r \epsilon r'^2 dr'$$

é adimensional (cf. equação (10)). Então, uma escolha apropriada  
da constante  $K = 8\pi G/c^4$  nos permitirá medir a densidade da energia  
total em  $\text{MeV}/\text{fm}^3$  e a distância em quilômetros. Um cálculo elemen-  
tar mostra que a constante K deve ser igual a:  $K=3,31556 \times 10^{-5} \text{ fm}/\text{MeV}$ .

Separamos a integração numérica em duas partes distintas: a primeira, do centro da estrela até o ponto  $r = r_1$ , onde ocorre a transição de fase; a segunda, do ponto  $r_1$  até a superfície da estrela, onde a pressão é nula.

Na 1ª parte, entretanto, surge de imediato uma dificuldade: para  $r = 0$ ,  $y_2$  diverge! Neste caso, temos que expandir a função  $\epsilon = \epsilon(r)$  em série de potências, de modo que:

$$y_2(r) = r^{-3} \int_0^r \left( \epsilon(0) + \frac{d\epsilon}{dr'}(0) r' + \dots \right) r'^2 dr'$$

Obviamente:

$$y_2(0) = \epsilon(0)/3 \quad (53)$$

Assim, as condições iniciais para o processo RKG, nesta 1ª parte, são:

$$r = 0$$

$$y_1(0) = \rho_c$$

$$y_2(0) = \epsilon(\rho_c)/3$$

A última igualdade foi escrita com o auxílio de  $\epsilon(r=0) = \epsilon(\rho=\rho_c)$ .

Os cálculos desta 1ª parte cessam quando  $\rho$  atinge o valor  $\rho_1$ , correspondente ao primeiro ponto da transição de fase no plano  $\epsilon\rho$ .

Para a 2ª parte da integração, tomamos como valores ini-

ciais o valor de  $\rho$  referente ao segundo ponto da transição de fase, e os valores de  $r$  e de  $y_2$  correspondentes aos valores finais da etapa anterior. Temos, assim:

$$r = r_1$$

$$y_1(r_1) = \rho_2$$

$$y_2 = y_2(r_1)$$

#### 4.2. RAIOS DA ESTRELA

Levanta-se agora um problema importante: até que valor de  $r$  devemos continuar com a integração;

Em primeiro lugar, lembremos que na superfície da estrela a pressão do gás degenerado de elétrons é nula. Podemos, então, com o auxílio da equação (18.a) fazer uma estimativa do valor da densidade para a qual a pressão se anula. Com efeito:

$$p = \rho^2 \frac{\partial E}{\partial \rho} = 0$$

ou:

$$\frac{\partial E}{\partial \rho} = 0 \quad (54)$$

onde  $E$  representa a energia total de um elétron e é dada por:

$$E = E_C + \langle E_F \rangle \quad (55)$$

Na igualdade (53),  $E_C$  é igual a  $\epsilon_C/\rho$  e  $\langle E_F \rangle$  é a energia média de um elétron livre, que no limite não-relativístico tem por expressão (cf. equação (33.a)):

$$\langle E_F \rangle = \frac{3}{5} E_F = \frac{3}{5} m_e c^2 (x^2/2)$$

Da relação (52), resulta imediatamente que  $\langle E_F \rangle = - E_C/2$ . Ou, depois de transformações simples:

$$d \approx A Z$$

No caso de  $^{56}\text{Fe}$ , a densidade para a qual a pressão se anula é igual aproximadamente a  $1,5 \times 10^3 \text{ g/cm}^3$ . Como encontramos  $^{56}\text{Fe}$  em todas as densidades inferiores a  $1,6 \times 10^5 \text{ g/cm}^3$ , podemos, portanto, restringir o processo RKG aos valores de  $r \leq R$ , sendo  $R$  correspondente a  $d = 1,5 \times 10^3 \text{ g/cm}^3$ . Tomamos este valor de  $R$  como sendo o raio da estrela.

#### 4.3. NÚMERO DE PROTONS E DE NEUTRONS; MASSA TOTAL

O número de prótons  $N_p$  e de nêutrons  $N_n$  são fornecidos através das equações (20). Explicitamente:

$$N_p = 4\pi \int_0^R \rho_p e^{\lambda/2} r^2 dr$$

$$N_n = 4\pi \int_0^R \rho_n e^{\lambda/2} r^2 dr$$

Para calcular tais integrais, podemos incorporar  $N_p$  e  $N_n$  ao próprio processo de RKG, bastando para isso aumentar o número de componentes para 4 e fazer  $N_p = y_3$  e  $N_n = y_4$ . Em consequência, obtemos:

$$\frac{dy_3}{dr} = 4\pi \rho_p e^{\lambda/2} r^2 = f_3(r, y_1, y_2) \quad (56.a)$$

$$\frac{dy_4}{dr} = 4\pi \rho_n e^{\lambda/2} r^2 = f_4(r, y_1, y_2) \quad (56.b)$$

Obviamente, os valores iniciais para  $r = 0$  são:

$$y_3 = y_4 = 0$$

$$\frac{dy_3}{dr} = \frac{dy_4}{dr} = 0$$

$N_p$  e  $N_n$  são expressos em termos do número bariônico solar, definido como  $N_\odot = M_\odot/m_u = 1,1967 \times 10^{57}$  barions.

Nas figuras (4) - (6), plotamos a densidade de protons,  $\rho_p$ , e a densidade de neutrons,  $\rho_n$ , em relação a  $r$ , para vários valores da densidade central.

Por sua vez, a massa total da estrela pode ser calculada com o auxílio da equação (14).

$$M = E/c^2 = (4\pi/c^2) \int_0^R \epsilon r^2 dr$$

Ou:

$$M = (4\pi/c^2) R^3 y_2(R)$$

A massa total, em unidade de  $M_\odot$ , é plotada contra a densidade central na figura (7). Contudo, a existência da transição de fase em  $\rho_1 = 0,023 \text{ fm}^{-3}$  ( $d_1 = 3,8 \times 10^{13} \text{ g/cm}^3$ ) e a falta de confiança na equação de estado para densidades superiores a  $8 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$  limitam o gráfico ao intervalo  $5 \times 10^{13} < d_c < 8 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ .

#### 4.4. ENERGIA DE LIGAÇÃO E ÍNDICE ADIABÁTICO

Para discutir equilíbrio e estabilidade da estrela, é de interesse determinar tanto a energia de ligação por partícula,  $E_{\text{lig}}$ , quanto o índice adiabático,  $\gamma$ .

Com o auxílio das equações (14) e (20), a energia de ligação por partícula é calculada pela expressão:

$$E_{\text{lig}} = \frac{\{m_n N_n + (m_p + m_e) N_p\} - E}{N} \quad (57)$$

onde  $N$  é o número bariônico total, isto é:

$$N = N_n + N_p$$

Na figura (8), plotamos  $E_{\text{lig}}$  versus o logaritmo da den-



tidade de número central  $\rho_c$ , e podemos ver que os pontos extremos encontrados coincidem com os da figura (7). Com efeito, isto é o que tem que ser, como pode ser visto, derivando simplesmente a equação (57) em relação a  $\rho_c$ .

O índice adiabático  $\gamma$  é definido como:

$$\gamma = \frac{d(\ln p)}{d(\ln \rho)} \quad (58)$$

Por outro lado, a compressibilidade  $\chi$  é definida por:

$$\frac{1}{\chi} = \rho \frac{dp}{d\rho} \quad (59)$$

Assim, o índice adiabático é relacionado com a compressibilidade através de:

$$\gamma = \frac{1}{p \chi} \quad (60)$$

As figuras (9) e (10) mostram a variação de  $\gamma$  em relação a  $\rho$  para duas configurações distintas.

## CAPÍTULO V: ANÁLISE DOS RESULTADOS

Antes de entrarmos na discussão dos resultados deste trabalho, é conveniente lembrar que, no domínio das configurações superdensas, o método de extrapolação é o meio único e básico de conhecimento. Como tal, torna-se inevitável o aparecimento de incômodas incertezas, na própria expressão quantitativa dos dados do problema. Obviamente, os resultados que encontramos refletem esta situação de imprecisão essencial.

### 5.1. EQUAÇÃO DE ESTADO

O surgimento de uma transição de fase entre o regime nuclear e o domínio subnuclear traz como consequência imediata um fato fisicamente interessante: existe um estado da matéria em que as duas fases (nuclear e subnuclear) se encontram em contato e em equilíbrio químico.

Diante da transformação de fase, que ocorre no plano  $\epsilon\rho$  em  $\rho_1 = 0,023 \text{ fm}^{-3}$  ( $d_1 = 3,8 \times 10^{13} \text{ g/cm}^3$ ) e  $\rho_2 = 0,37 \times 10^{-3} \text{ fm}^{-3}$  ( $d_2 = 6,2 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$ ), calculamos a equação de estado na faixa subnuclear, considerada como sendo o intervalo:

$$0 < d < 6,2 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$$

em que o limite superior coincide aproximadamente com o valor da densidade limiar ( $6 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$ ), a partir da qual tem início a emissão de neutrons livres por parte dos núcleos ricos-em-neutron (cf. tabela II).

É possível, portanto, concluir que a equação de estado, obtida através de nosso modelo, consiste praticamente de apenas duas fases da matéria: a nuclear, formada por um todo homogêneo de neutrons, protons e eletrons, e a subnuclear, constituída de núcleos, envolvidos por um mar de eletrons livres.

Como é evidente nas tabelas III e V, os núcleos -mente perto do limite superior da fase subnuclear, tornam-se muito ricos em neutrons, em comparação com os núcleos ordinários. Isto significa que a aplicação da fórmula de massa é um tanto ou quanto duvidosa. No entanto, esta incerteza não afeta muito as propriedades macroscópicas da estrela de neutron, uma vez que a energia total não será muito diferente dos valores calculados com a fórmula de massa. Por outro lado, para o cálculo do valor da densidade limiar do fluxo de neutrons livres, tal incerteza assume um papel importante, e sua influência é bastante sensível.

A interação entre núcleos e neutrons livres, que desprezamos neste nosso trabalho, tem somente o efeito de deslocar no sentido descendente o valor que encontramos para a densidade limiar da ejeção de neutrons livres. A fim de calcular este efeito, todavia, é indispensável um cálculo de muitos corpos, complicado e

mesmo assim, de credibilidade limitada. A alternativa é, pois, construir uma teoria para tratar tal interação numa maneira mais ou menos simples, porém segura, por exemplo, encarando-a como uma per-turbação à fórmula de massa nuclear, devido ao gás de neutrons.

O limite inferior da fase nuclear ( $3,8 \times 10^{13} \text{ g/cm}^3$ ) é levemente mais baixo que o encontrado por Bethe *et al.* ( $4,34 \times 10^{13} \text{ g/cm}^3$ ) e por Langer *et al.* ( $5 \cdot 10^{13} \text{ g/cm}^3$ ). Ambos usaram a teoria de muitos corpos de Brueckner. Vale a pena, desse modo, notar a semelhança quantitativa entre o cálculo de muitos corpos e nosso mé-todo extremamente simples.

Encontramos uma transição de fase muito grande, entre as fases nuclear e subnuclear. A existência de tão larga transição constitui um ponto de dúvida, por causa da interação núcleo-neu-tron que não levamos em consideração. Esta interação abaixa a ener-gia total e provavelmente reduz a transição de fase a níveis mais modestos. Com efeito, alguns trabalhos (cf. Baym *et al.*, 1971) mos-tram que a região nuclear é suavemente prolongada até a região sub-nuclear, com a formação de núcleos extremamente pesados ( $A = 10^3$ ). Contudo, a própria energia não mudará muito, de modo que novamente as propriedades macroscópicas da estrela de neutron não sofrerão modificações substanciais.

## 5.2 CONFIGURAÇÃO

Nas figuras (11) - (13), mostramos a distribuição de densidade de três estrelas de neutron típicas. Podemos ver claramente o efeito da transição de fase na região de superfície. A camada superficial, com densidade subnuclear (constituída, portanto, de núcleos e nuvem de elétrons livres), apresenta uma cauda curta, para densidade central de  $5 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ . Esta camada superficial não exerce influência palpável, nem na massa, nem na energia de ligação por partícula.

Com a transição de fase, é bem nítida a identificação do chamado caroço da estrela, cujas propriedades determinam efetivamente o comportamento da estrela. Acredita-se que o caroço se encontra numa fase de superfluidez, com os prótons apresentando supercondutividade. A fase de superfluidez pode ser importante no tratamento da rotação. Contudo, trabalhos mais recentes (Canuto e Chitre, 1973; Pandharipande, 1973; Ostgaard, 1973) mostram ser possível o aparecimento de uma solidificação da matéria de neutron. Para Canuto e Chitre, p.ex., tal solidificação aparece para densidades superiores a  $1,6 \times 10^{15} \text{ g/cm}^3$ .

Na tabela X, apresentamos as propriedades de alguns modelos de estrela de neutron. Na tabela XI, comparamos nossos resultados com os encontrados por Börner e Cohen (1973), e por Cohen et

*al.* (1969). Mostramos, também, na figura (14) a distribuição de densidade de uma configuração instável, com densidade central igual a  $0,085 \text{ fm}^{-3}$ . Neste caso, a cauda é bem mais longa, com mais de 5000 km.

Nossos cálculos indicam uma massa mínima de  $0,06 M_{\odot}$ , à densidade central de  $0,09 \text{ fm}^{-3}$ . Este valor é próximo ao obtido por Kodama e Yamada ( $0,05 M_{\odot}$ ) e por Cohen *et al.* ( $0,065 M_{\odot}$ ). O valor máximo de  $M$  por nós encontrado é  $1,05 M_{\odot}$ , mas este resultado é condicionado pelas limitações da equação de estado nesta região de densidade correspondente. Comparamos este valor com os encontrados por Canuto e Chitre, 1973 ( $1,39 M_{\odot}$ ); Kodama e Yamada, 1971a ( $1,2 M_{\odot}$ ); Oppenheimer e Volkoff, 1939 ( $0,75 M_{\odot}$ ); Cohen *et al.*, 1969 ( $1,92 M_{\odot}$ ). O aparecimento de picos na figura (7) é relacionado com a estabilidade da estrela face a contrações radiais, de modo que as estrelas estáveis pelo menos têm que satisfazer a  $dM/d\rho_c > 0$ .

Colocamos também a figura (15), em que o raio da estrela é plotado contra a sua massa. Vemos, como é de se esperar, que quanto maior o raio, menor a massa, e vice-versa.

## CONCLUSÃO

A partir de um modelo simples de estrela de neutron (estável face a decaimento beta, sem rotação, com temperatura igual a zero, etc.), determinamos uma equação de estado para a matéria a densidade subnuclear, nuclear e supranuclear, minimizando as expressões da energia total correspondente a cada uma das regiões de densidade. Para a energia de interação nucleon-nucleon, utilizamos a fórmula semi-empírica de Kodama e Yamada, ao invés de aplicar a teoria de muitos corpos de Brueckner.

Se lembrarmos que trabalhamos em terreno de amplas incertezas, podemos, então, afirmar que os resultados a que chegamos não diferem muito apreciavelmente dos obtidos por outros pesquisadores. Exceto em um ponto:

As condições de equilíbrio químico permitiram encontrar uma transição de fase entre a região de alta compressibilidade (fase subnuclear) e o domínio de baixa compressibilidade (fase nuclear). Aparece, portanto, no nosso modelo, um estado da matéria em que a fase nuclear coexiste, em equilíbrio, com a fase subnuclear. Tal transição de fase está relacionada, entre outros fatores, à competição entre a energia de superfície nuclear e a energia de compressibilidade nuclear.

Os pontos da transformação de fase ( $d_1 = 3,8 \times 10^{13} \text{ g/cm}^3$  e  $d_2 = 6,2 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$ ) determinam o limite inferior da faixa nuclear e o limite superior da região subnuclear, respectivamente. Isto significa que, pelo nosso trabalho, o ponto em que os núcleos desaparecem para dar lugar a uma fase homogênea de neutrons, protons e eletrons é ligeiramente inferior aos valores encontrados por Langer *et al.* ( $5 \times 10^{13} \text{ g/cm}^3$ ) e por Bethe *et al.* ( $4,34 \times 10^{13} \text{ g/cm}^3$ ). Esta pequena diferença entre o nosso resultado e os dois acima mostra ser bastante compensador o uso da fórmula semi-empírica.

Por outro lado, como nossos cálculos mostraram que só a partir de  $6 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$  é que os neutrons livres começam a surgir, então, esta fase subnuclear se caracteriza praticamente por nucleos e o mar de eletrons livres apenas, visto que já em  $6,2 \times 10^{13} \text{ g/cm}^3$  tem início a transição de fase.

Contudo, se se levar em conta a interação núcleo-neutron que desprezamos neste trabalho, a transformação de fase provavelmente irá se processar para pontos mais próximos um do outro, visto que tal interação fornece uma contribuição negativa para a energia total.

Sugerimos, em consequência, que trabalhos futuros procurem incorporar nos cálculos a interação entre os núcleos e os neutrons livres, bem como levar em consideração um tratamento da matéria a temperaturas diferentes de zero (para estudo das propriedades termostáticas da matéria nuclear, cf. Kupper *et al.*, 1974).



Por fim, sugerimos que o decaimento beta seja também incluído. Uma maneira de se fazer isso, por exemplo, é aplicar a chamada "gross theory" (cf. Takahashi, 1969).

TABELA I

$\rho$ (fm <sup>-3</sup> )	$E_1$ (MeV)
$1 \times 10^{-12}$	$-0,11 \times 10^{-11}$
$1 \times 10^{-11}$	$-0,11 \times 10^{-10}$
$1 \times 10^{-10}$	$-0,11 \times 10^{-9}$
$1 \times 10^{-9}$	$-0,10 \times 10^{-8}$
$1 \times 10^{-8}$	$-0,90 \times 10^{-8}$
$1 \times 10^{-7}$	$-0,56 \times 10^{-7}$
$1 \times 10^{-6}$	$0,20 \times 10^{-6}$
$1 \times 10^{-5}$	$0,17 \times 10^{-4}$
$1 \times 10^{-4}$	$0,45 \times 10^{-3}$
$2 \times 10^{-4}$	$0,11 \times 10^{-2}$
$3 \times 10^{-4}$	$0,19 \times 10^{-2}$
$3,5 \times 10^{-4}$	$0,23 \times 10^{-2}$
$3,6 \times 10^{-4}$	$0,24 \times 10^{-2}$

TABELA II

$\log_{10} d$	Salpeter		Nosso Trabalho	
	Z - A	$E_F$ (MeV)	Z - A	$E_F$ (MeV)
7,15	26-56	0,6	28-62	0,5
8,63	28-62	2,5	28-64	2,4
9,15	28-64	3,9	28-64	3,9
9,69	28-66	6,1	34-84	5,9
9,87	28-68	7,0	34-84	6,8
10,13	30-76	8,5	32-82	8,3
10,28	30-78	9,5	32-82	9,3
10,84	30-80	14,8	28-78	14,4
11,28	32-90	20,6	40-122	19,7
11,53	38-120	24,0	38-120	24,0

TABELA III.a

d(g/cm <sup>3</sup> )	Baym <i>et al.</i>		Nosso Trabalho	
	Z - A	$\mu_e$ (MeV)	Z - A	$\mu_e$ (MeV)
$8,1 \times 10^6$	26-56	0,95	26-56	0,95
$2,7 \times 10^8$	28-62	2,6	28-64	2,45
$1,2 \times 10^9$	28-64	4,2	28-64	4,2
$8,2 \times 10^9$	34-84	7,7	34-84	7,7
$2,2 \times 10^{10}$	32-82	10,6	32-82	10,6
$4,8 \times 10^{10}$	30-80	13,6	30-80	13,3
$1,6 \times 10^{11}$	28-78	20,0	42-124	19,3
$1,8 \times 10^{11}$	26-76	20,2	40-122	19,8
$1,9 \times 10^{11}$	42-124	20,5	40-122	20,2
$2,7 \times 10^{11}$	40-122	22,9	38-120	22,5
$3,7 \times 10^{11}$	38-120	25,2	36-118	24,6
$4,3 \times 10^{11}$	36-118	26,2	36-118	26,0

TABELA III-b

d(g/cm <sup>3</sup> )	Baym <i>et al.</i>		Nosso Trabalho	
	Z - A	$\mu_e$ (MeV)	Z - A	$\mu_e$ (MeV)
8,5 x 10 <sup>6</sup>	26-56	0,96	26-56	0,96
1,3 x 10 <sup>8</sup>	28-62	2,0	28-62	2,0
2,8 x 10 <sup>8</sup>	26-58	2,6	28-64	2,5
1,1 x 10 <sup>9</sup>	28-64	4,1	28-64	4,1
1,3 x 10 <sup>9</sup>	28-66	4,2	28-64	4,2
1,9 x 10 <sup>9</sup>	28-68	4,7	36-86	4,6
6,2 x 10 <sup>9</sup>	34-84	7,0	34-84	7,0
1,7 x 10 <sup>10</sup>	32-82	9,8	32-82	9,8
3,8 x 10 <sup>10</sup>	30-80	12,5	30-80	12,5
1,3 x 10 <sup>11</sup>	28-78	18,5	42-124	18,0
2,2 x 10 <sup>11</sup>	26-76	21,5	40-122	21,2
3,1 x 10 <sup>11</sup>	24-74	24,0	38-120	23,6
3,7 x 10 <sup>11</sup>	36-118	25,0	36-118	25,0

Com Energia de Rêde Desprezada

TABELA IV

	$d(10^{11} \text{ g/cm}^3)$
Bethe <i>et al.</i>	2
Langer <i>et al.</i>	3
Sahakian	2,49
Baym <i>et al.</i>	4,3
Barkat <i>et al.</i>	3,7
Heintzmann <i>et al.</i>	4,69
Nosso Trabalho	6

TABELA V

$\rho$ ( $10^{-2} \text{ fm}^{-3}$ )	$E_2$ ( $10^{-2} \text{ MeV}$ )	Z - A	$\rho$ ( $10^{-2} \text{ fm}^{-3}$ )	$E_2$ ( $10^{-2} \text{ MeV}$ )	Z - A
0,04	0,27	36-118	1,9	13,65	38-120
0,05	0,35	36-118	2,0	14,38	38-120
0,06	0,43	36-118	2,1	15,11	38-120
0,1	0,74	36-118	2,2	15,85	38-120
0,2	1,50	38-120	2,3	16,59	38-120
0,3	2,24	38-120	2,4	17,34	38-120
0,4	2,97	38-120	2,5	18,09	38-120
0,5	3,64	38-120	2,6	18,86	36-118
0,6	4,41	38-120	2,7	19,62	36-118
0,7	5,12	38-120	2,8	20,40	36-118
0,8	5,83	38-120	2,9	21,18	36-118
0,9	6,54	38-120	3,0	21,97	36-118
1,0	7,24	38-120	3,1	22,79	36-118
1,1	7,95	38-120	3,2	23,57	36-118
1,2	8,65	38-120	3,3	24,39	36-118
1,3	9,36	38-120	3,4	25,21	36-118
1,4	10,06	38-120	3,5	26,04	36-118
1,5	10,78	38-120	3,6	26,88	36-118
1,6	11,49	38-120	3,7	27,72	36-118
1,7	12,20	38-120	3,8	28,58	36-118
1,8	12,92	38-120	3,9	29,45	36-118

TABELA VI

Densidade ( $10^{11}$ g/cm <sup>3</sup> )	Langer <i>et al.</i>		Nosso Trabalho	
	Z - A	$\rho_c$ ( $10^{33}$ cm <sup>-3</sup> )	Z - A	$\rho_c$ ( $10^{33}$ cm <sup>-3</sup> )
3,03	39-124	1,47	38-120	1,5
3,36	40-125	1,52	38-120	1,66
3,88	40-126	1,56	36-118	1,96
4,41	40-127	1,60	36-118	2,19
5,81	40-129	1,68	36-118	2,17
7,56	41-131	1,76	36-118	2,07
9,94	41-134	1,84	36-118	2,06
11,90	41-135	1,90	36-118	1,97
16,90	42-138	2,03	36-118	1,96
22,60	42-141	2,14	38-120	1,78
33,10	43-146	2,30	38-120	1,82
42,30	43-149	2,41	38-120	1,63
53,20	44-152	2,52	38-120	1,59
62,10	44-154	2,59	38-120	1,61
83,00	44-157	2,72	38-120	1,44
103,00	45-160	2,82	38-120	1,46
155,00	45-165	2,98	38-120	1,46
206,00	46-169	3,11	38-120	1,46
400,00	48-186	3,67	38-120	1,73
496,00	50-201	4,10	36-118	2,08
503,00	50-203	4,14	36-118	2,05
508,00	51-204	4,09	36-118	2,32
512,00	51-204	3,11	36-118	2,34



TABELA VII

$\rho$ (fm <sup>-3</sup> )	$E_3$ (MeV)	$\rho$ (fm <sup>-3</sup> )	$E_3$ (MeV)
0,01	0,073	0,19	3,266
0,02	0,144	0,20	3,614
0,03	0,219	0,21	3,985
0,04	0,302	0,22	4,379
0,05	0,395	0,23	4,795
0,06	0,498	0,24	5,236
0,07	0,613	0,25	5,701
0,08	0,741	0,26	6,191
0,09	0,884	0,27	6,707
0,10	1,042	0,28	7,248
0,11	1,215	0,29	7,815
0,12	1,406	0,30	8,410
0,13	1,614	0,31	9,031
0,14	1,834	0,32	9,681
0,15	2,085	0,33	10,358
0,16	2,350	0,34	11,064
0,17	2,634	0,35	11,799
0,18	2,940	0,36	12,564

TABELA VIII

$\rho$ (fm <sup>-3</sup> )	$E_4$ (MeV)	$\rho$ (fm <sup>-3</sup> )	$E_4$ (MeV)
0,37	13,36	0,49	25,39
0,38	14,18	0,50	26,61
0,39	15,04	0,51	27,87
0,40	15,93	0,52	29,17
0,41	16,84	0,53	30,50
0,42	17,80	0,54	31,87
0,43	18,78	0,55	33,28
0,44	19,80	0,56	34,72
0,45	20,84	0,57	36,20
0,46	21,93	0,58	37,73
0,47	23,04	0,59	39,29
0,48	24,20	0,60	40,89

TABELA IX

coeficientes $a_j$ ( $j=1,8$ )	coeficientes $b_j$ ( $j=1,9$ )
$a_1 = 0,1667187 \times 10^1$	$b_1 = 0,2546914 \times 10^{-1}$
$a_2 = 0,1602206 \times 10^{-1}$	$b_2 = 0,4683517 \times 10^1$
$a_3 = -0,6299009 \times 10^{-5}$	$b_3 = 0,4399016 \times 10^2$
$a_4 = 0,5875396 \times 10^{-8}$	$b_4 = 0,1086567 \times 10^3$
$a_5 = 0,2685473 \times 10^{-11}$	$b_5 = 0,3074796 \times 10^2$
$a_6 = -0,1546984 \times 10^{-14}$	$b_6 = -0,7407819 \times 10^2$
$a_7 = 0,1296387 \times 10^{-18}$	$b_7 = 0,1688046 \times 10^{-1}$
$a_8 = 0,2253407 \times 10^{-21}$	$b_8 = 0,8191403$
	$b_9 = 0,2304980 \times 10^1$

TABELA X

Densidade central ( $\text{fm}^{-3}$ )	Raio (km)	$M/M_{\odot}$	$E_{\text{lig}}$ (MeV)	$N_{\text{p}}/N_{\odot}$	$N_{\text{n}}/N_{\odot}$
0,09	149	0,06	8,73	$9,29 \times 10^{-4}$	$5,91 \times 10^{-2}$
0,1	42,2	0,07	11,1	$7,54 \times 10^{-4}$	$6,98 \times 10^{-2}$
0,2	12,5	0,209	23	$3,07 \times 10^{-3}$	0,209
0,3	11,2	0,384	34,7	$1,65 \times 10^{-3}$	0,387
0,4	10,8	0,567	47,4	$1,73 \times 10^{-2}$	0,575
0,5	10,6	0,732	58,1	$2,8 \times 10^{-2}$	0,746

TABELA XI

$d_c$	Cohen <i>et al.</i>		Nosso Trabalho	
	Massa	Raio	Massa	Raio
$10^{14,5}$	1,72	13,68	0,38	12,9
$10^{14,06}$	0,1338	76,4	1,7	1510
$10^{14}$	1,45	2,233	1,69	1050

Log $d_c$	Börner e Cohen				Nosso Trabalho	
	BBS		BJ		Massa	Raio
	Massa	Raio	Massa	Raio		
14,7	0,73	11,0	1,38	12,33	1,45	10,6
14,3	0,14	47,9	0,14	270	0,42	12,6

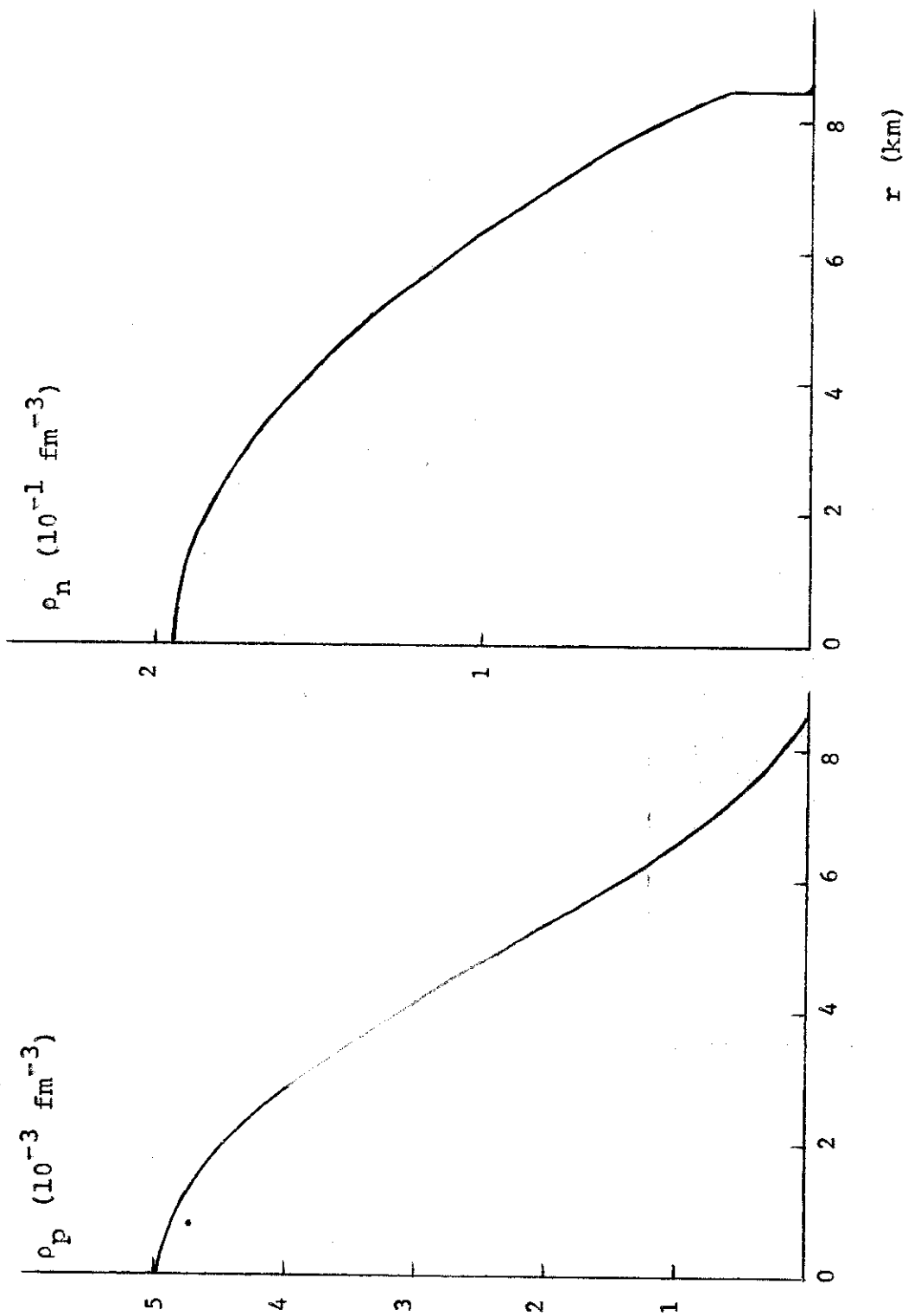


Figura (4)

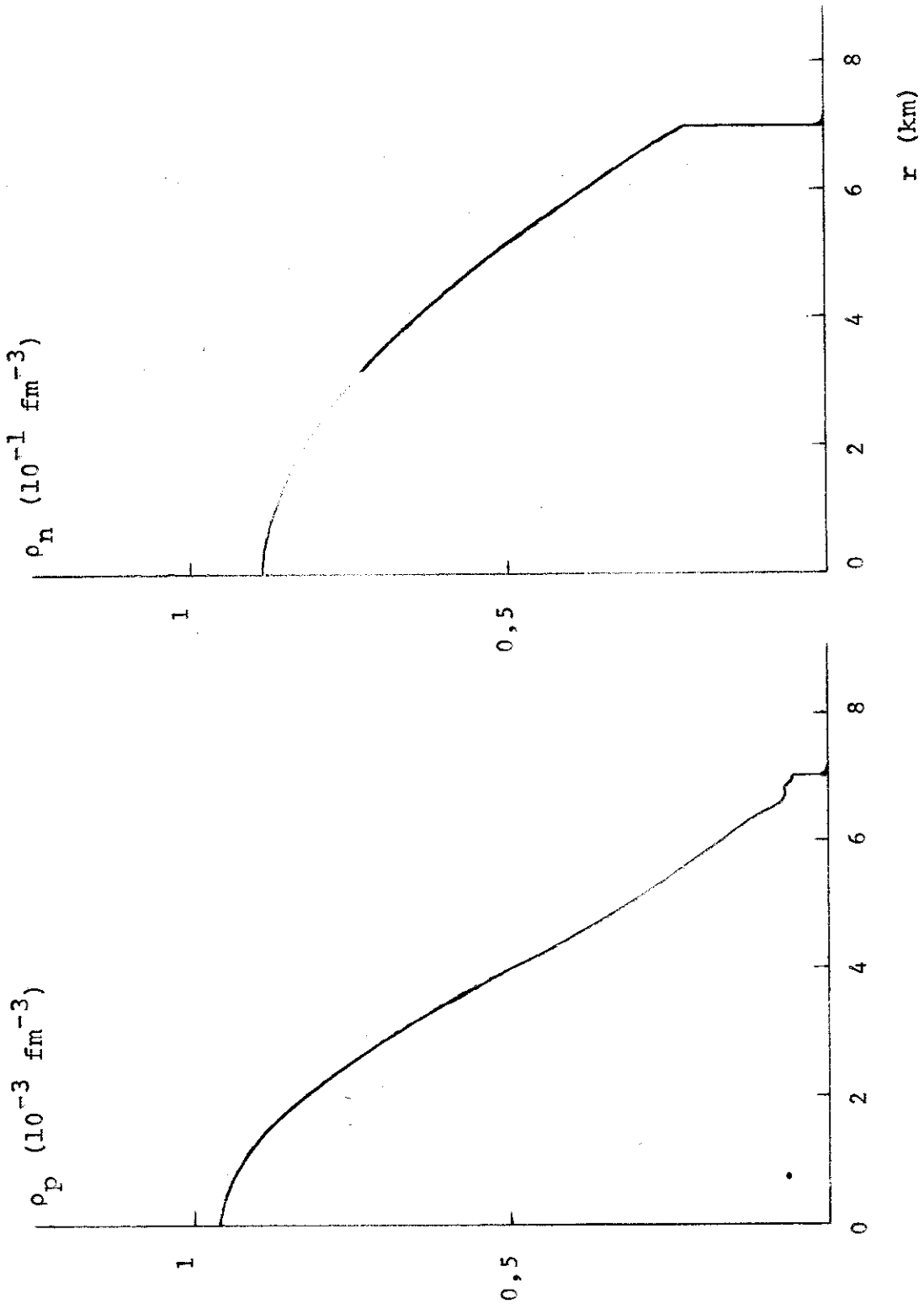


Figura (5)

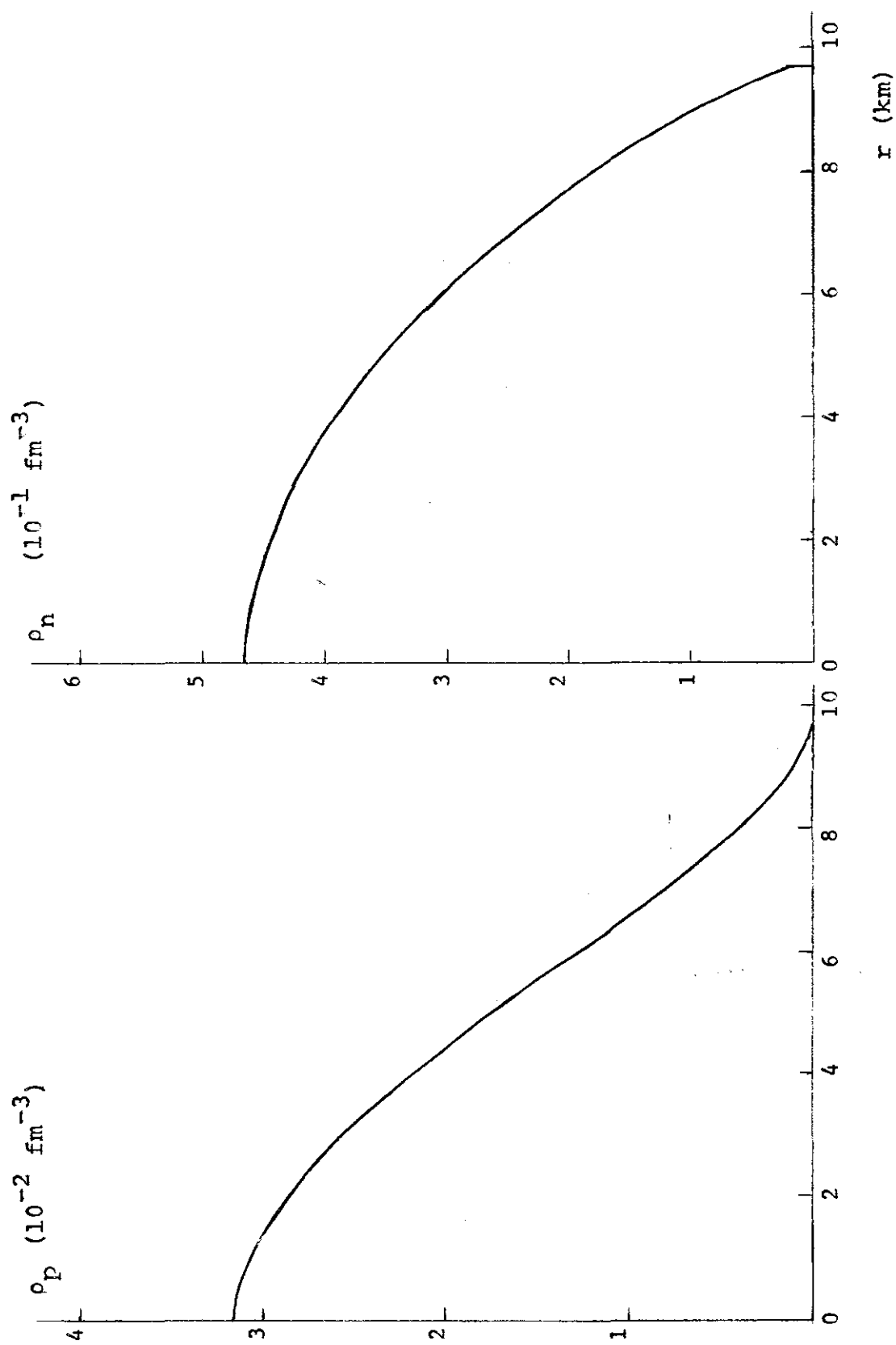


Figura (6)



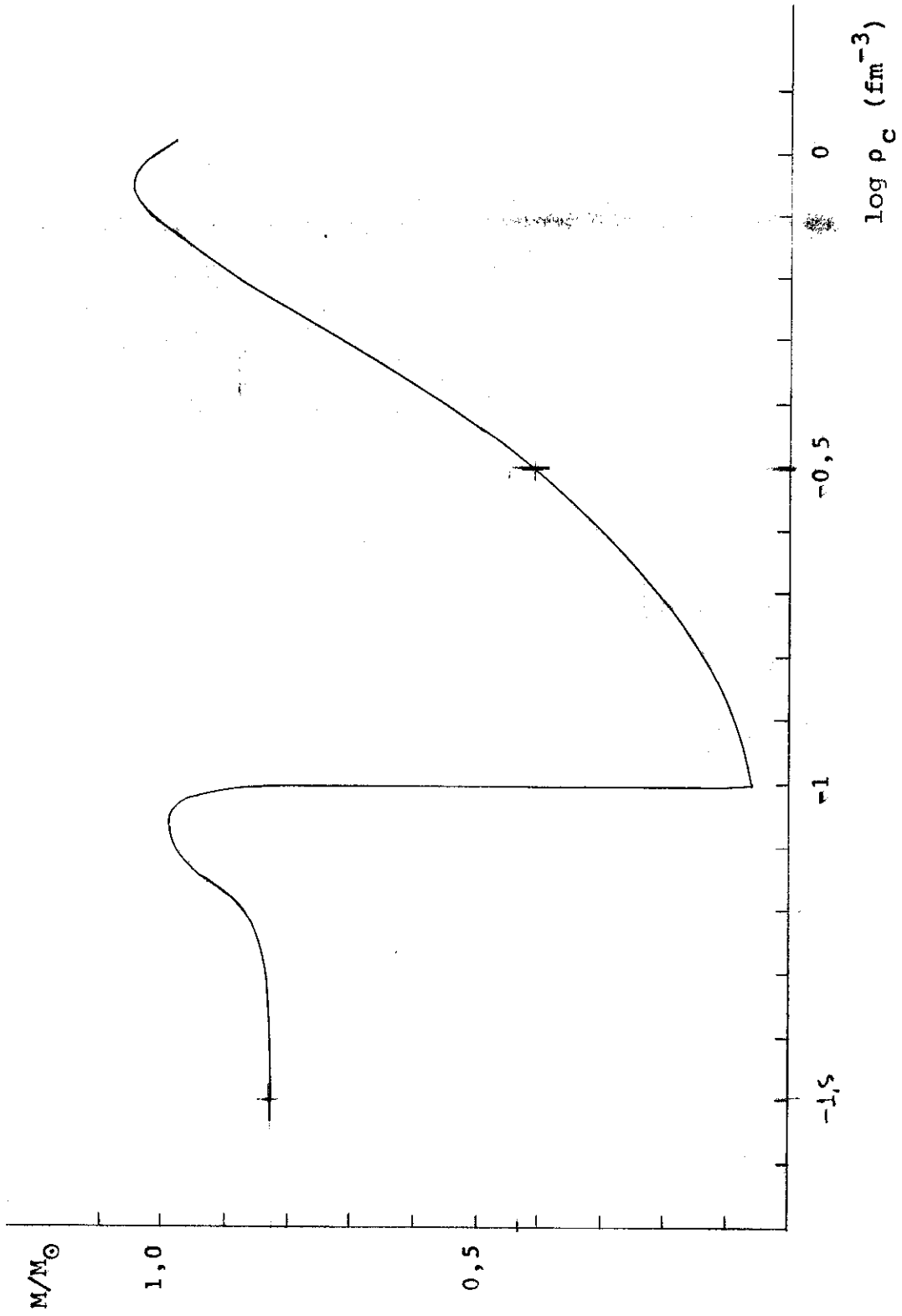


Figura (7)

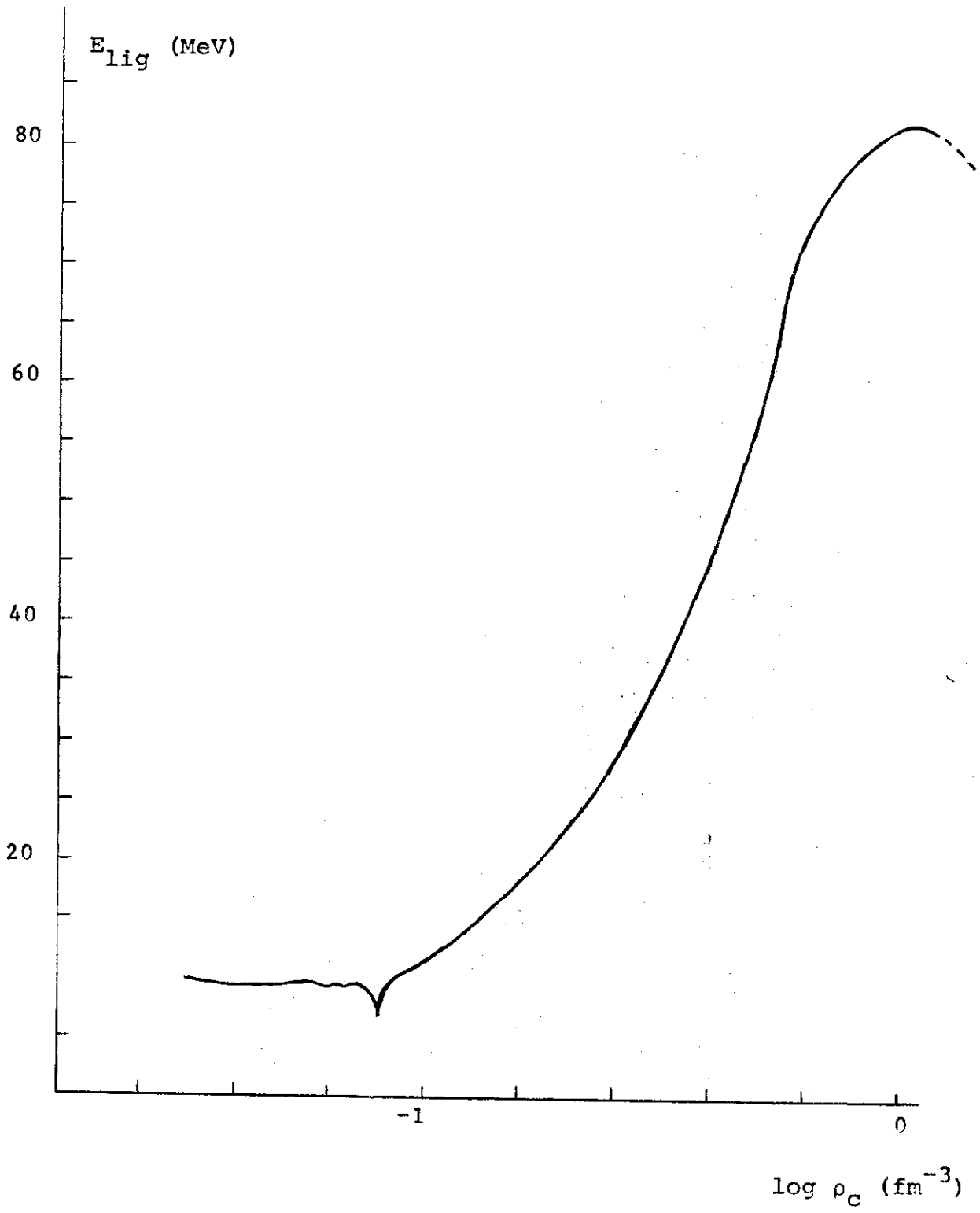


Figura (8)

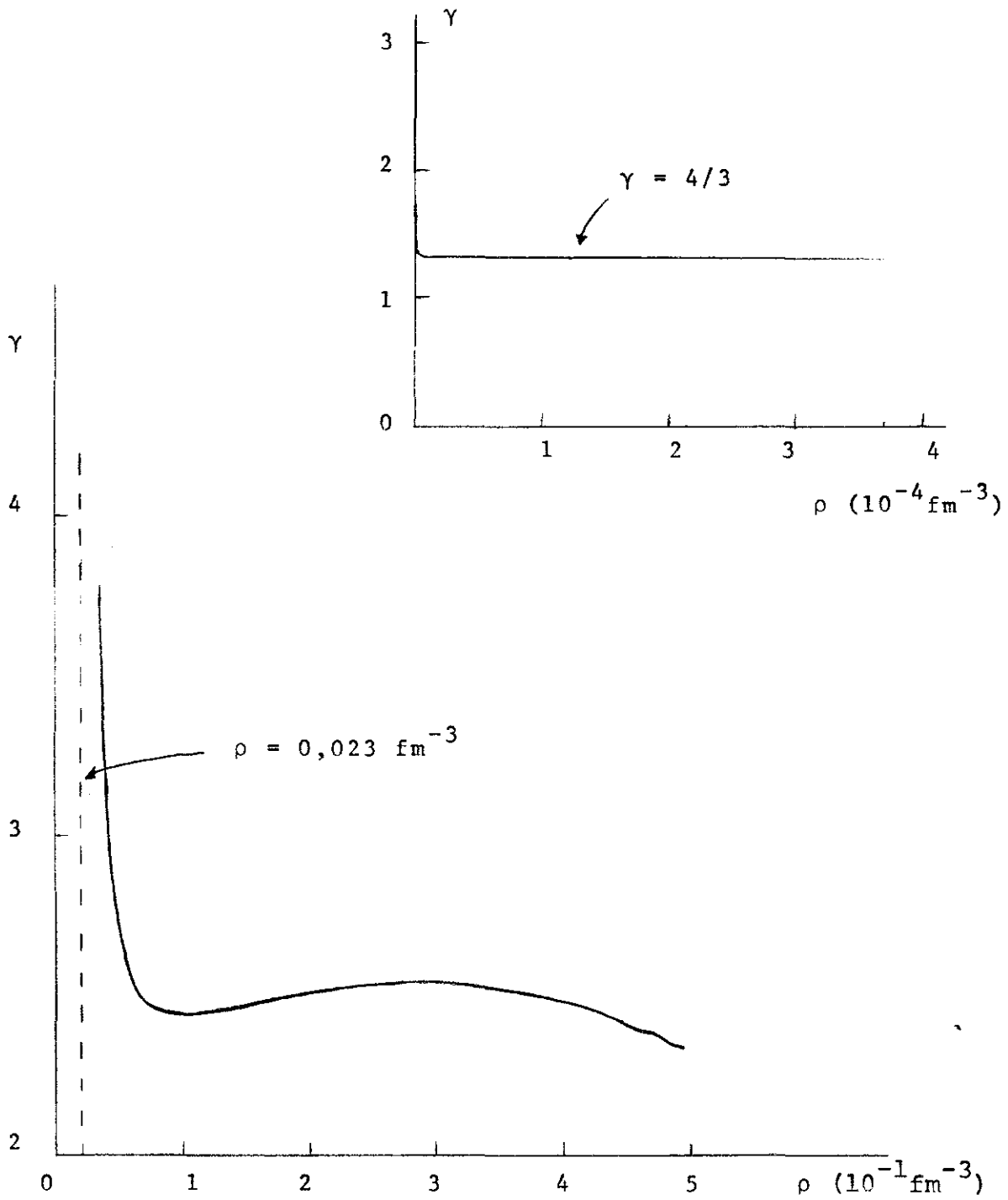


Figura (9)

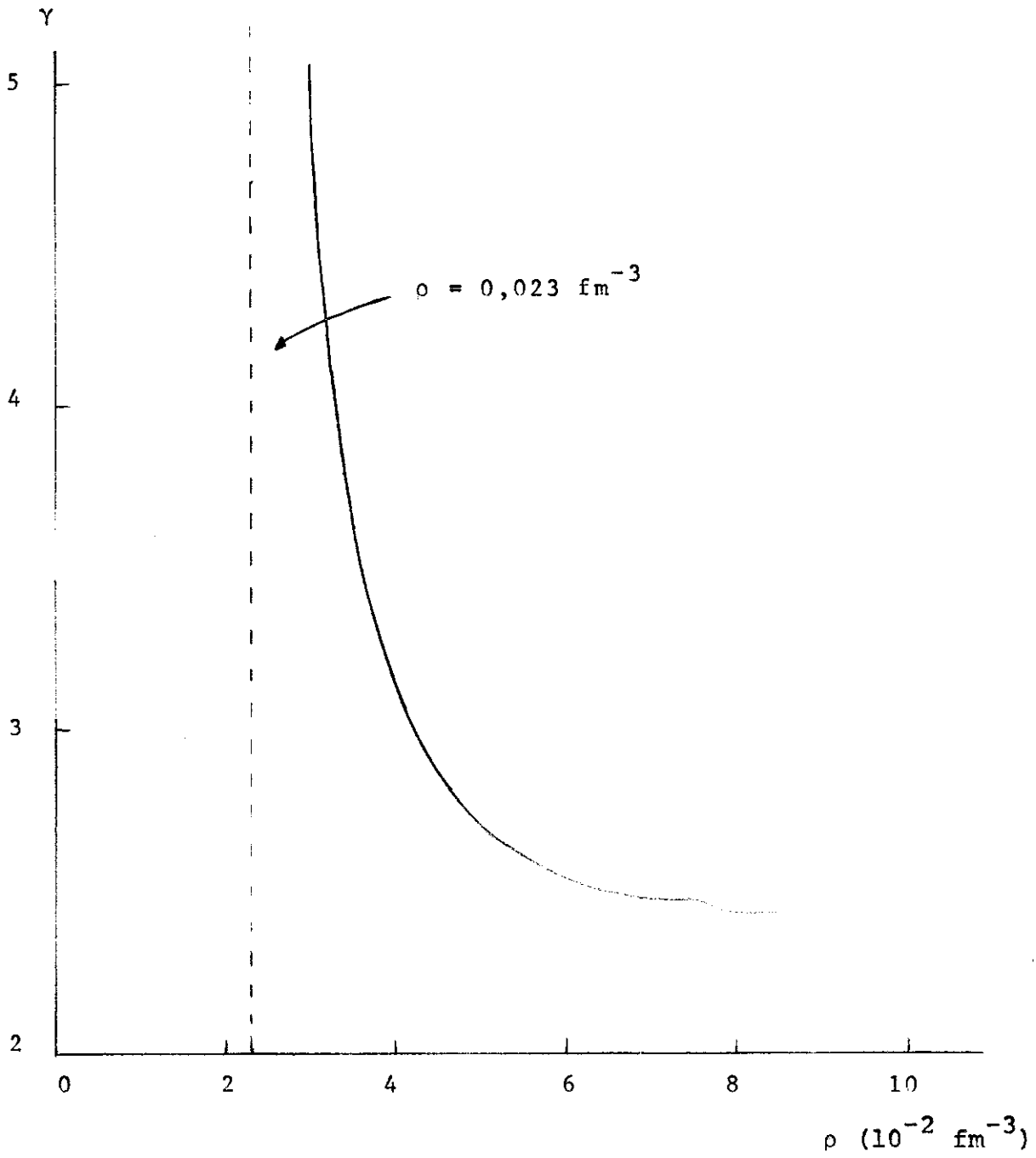


Figura (10)

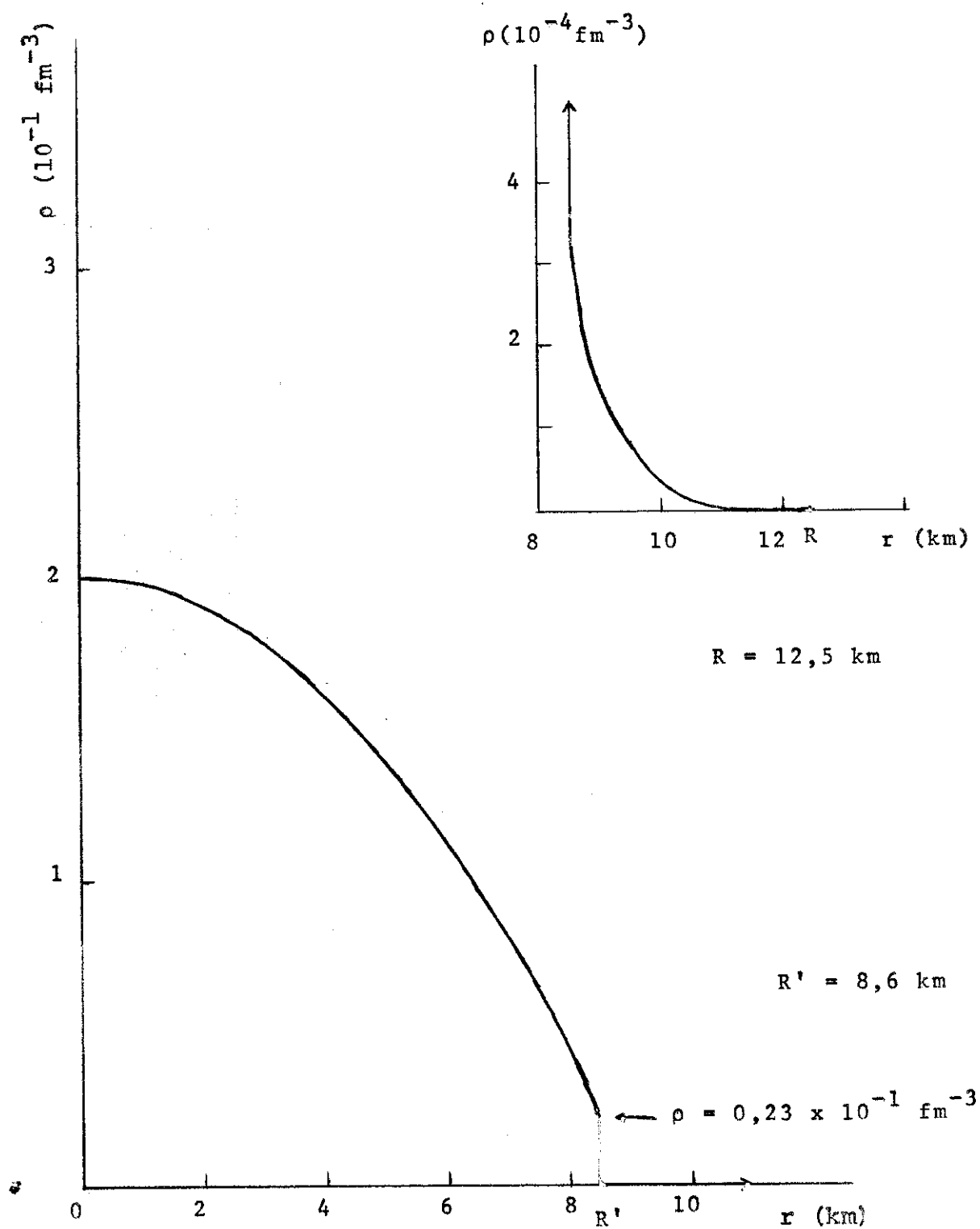


Figura (11)

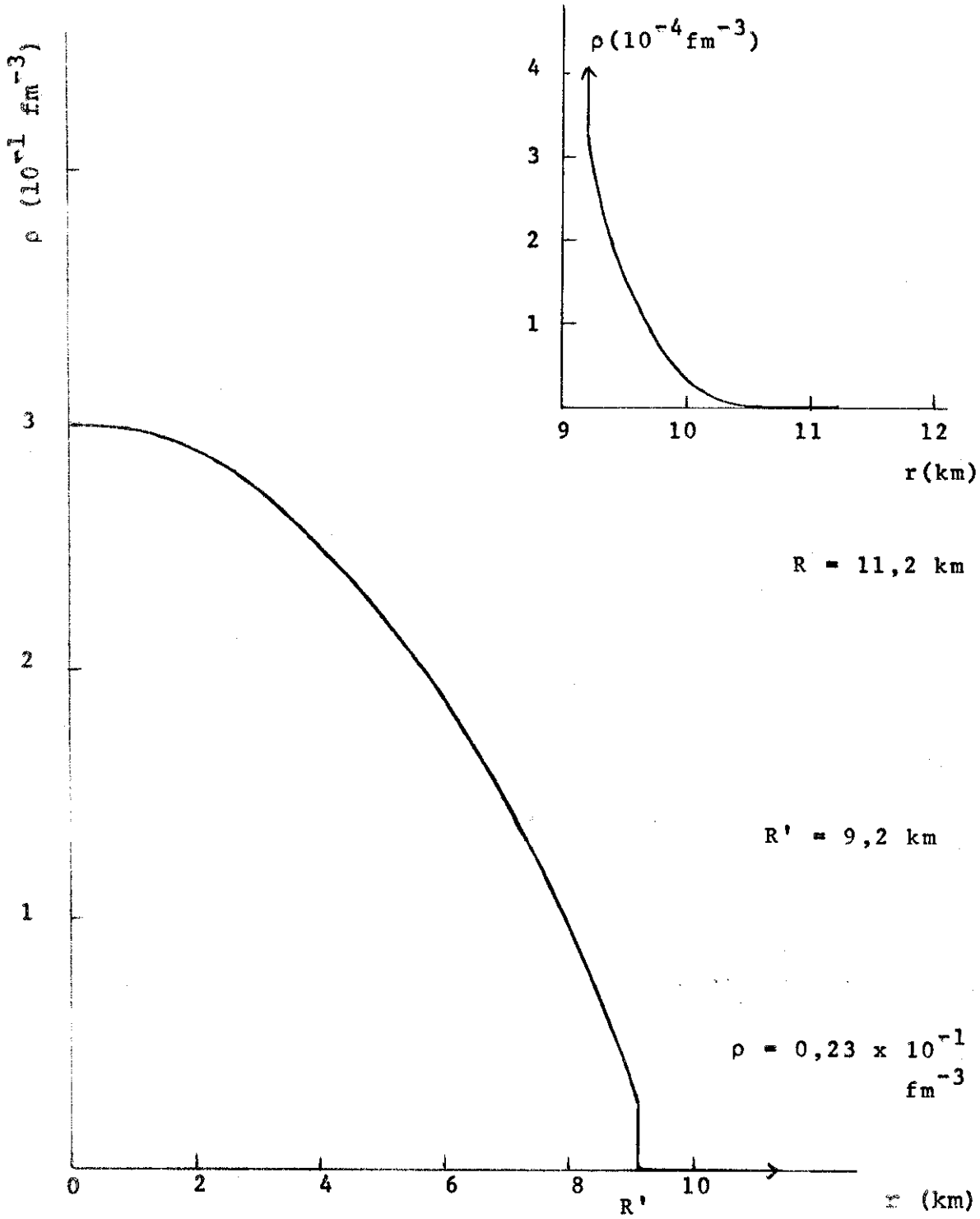


Figura (12)

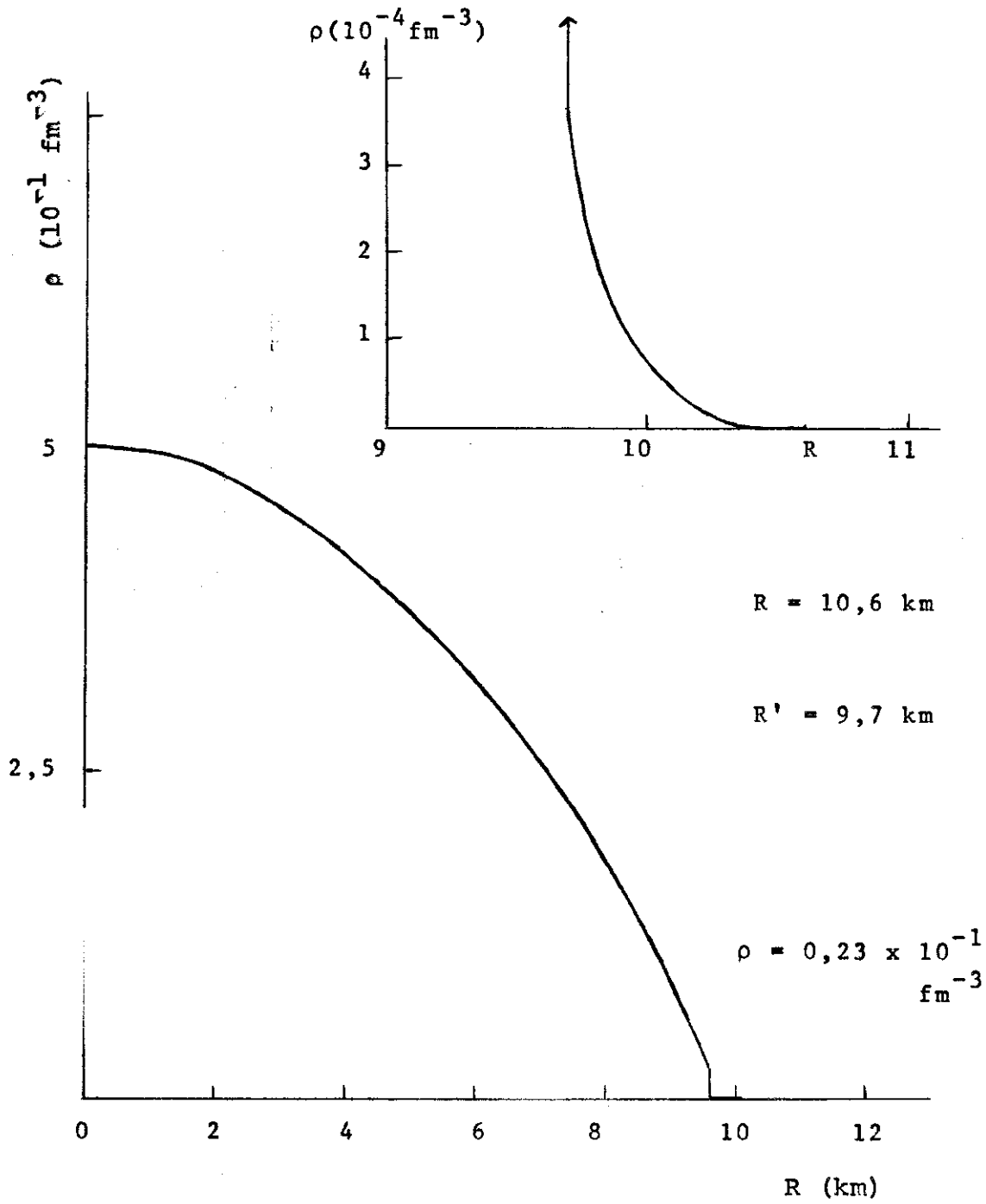


Figura (13)

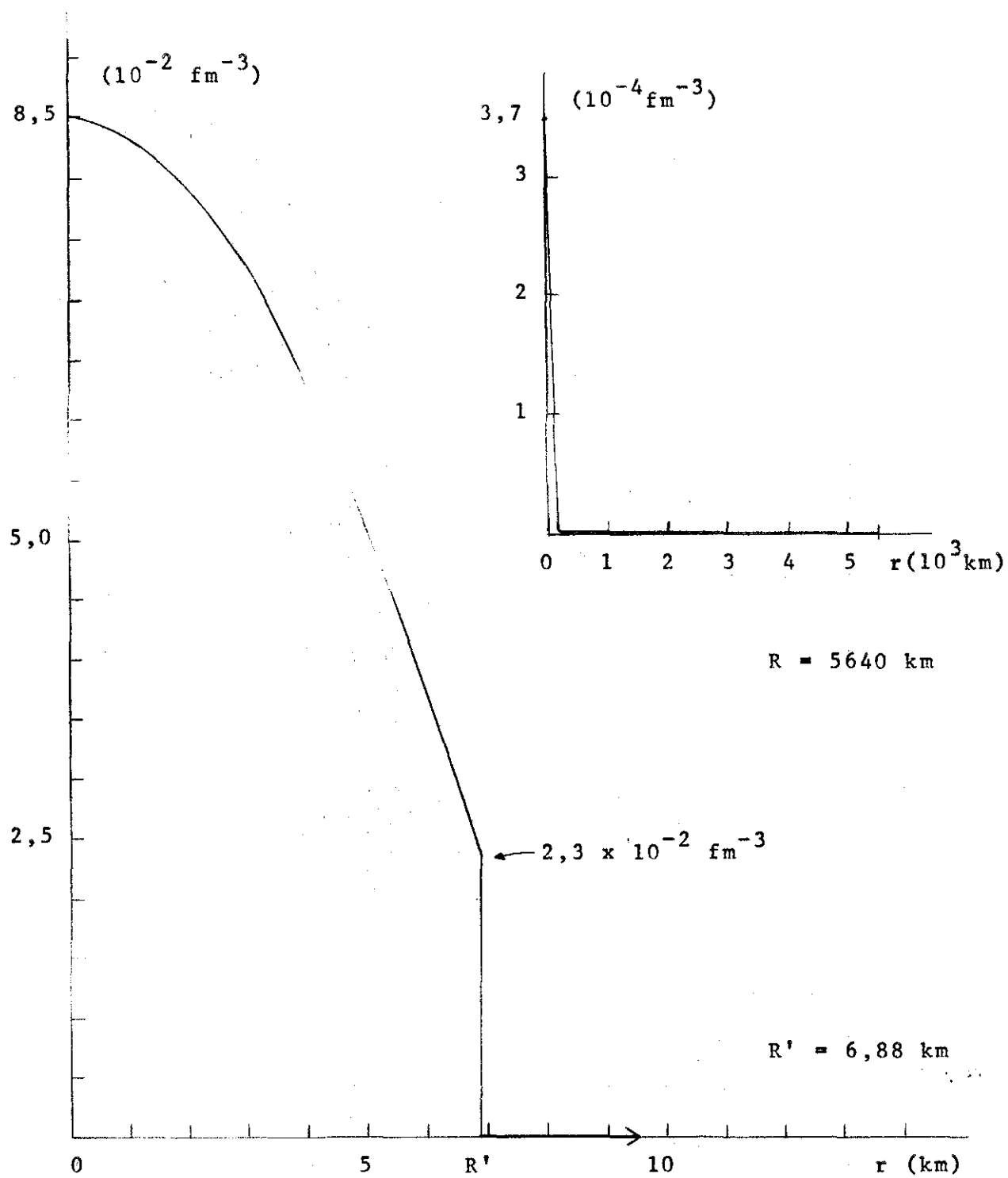


Figura (14)



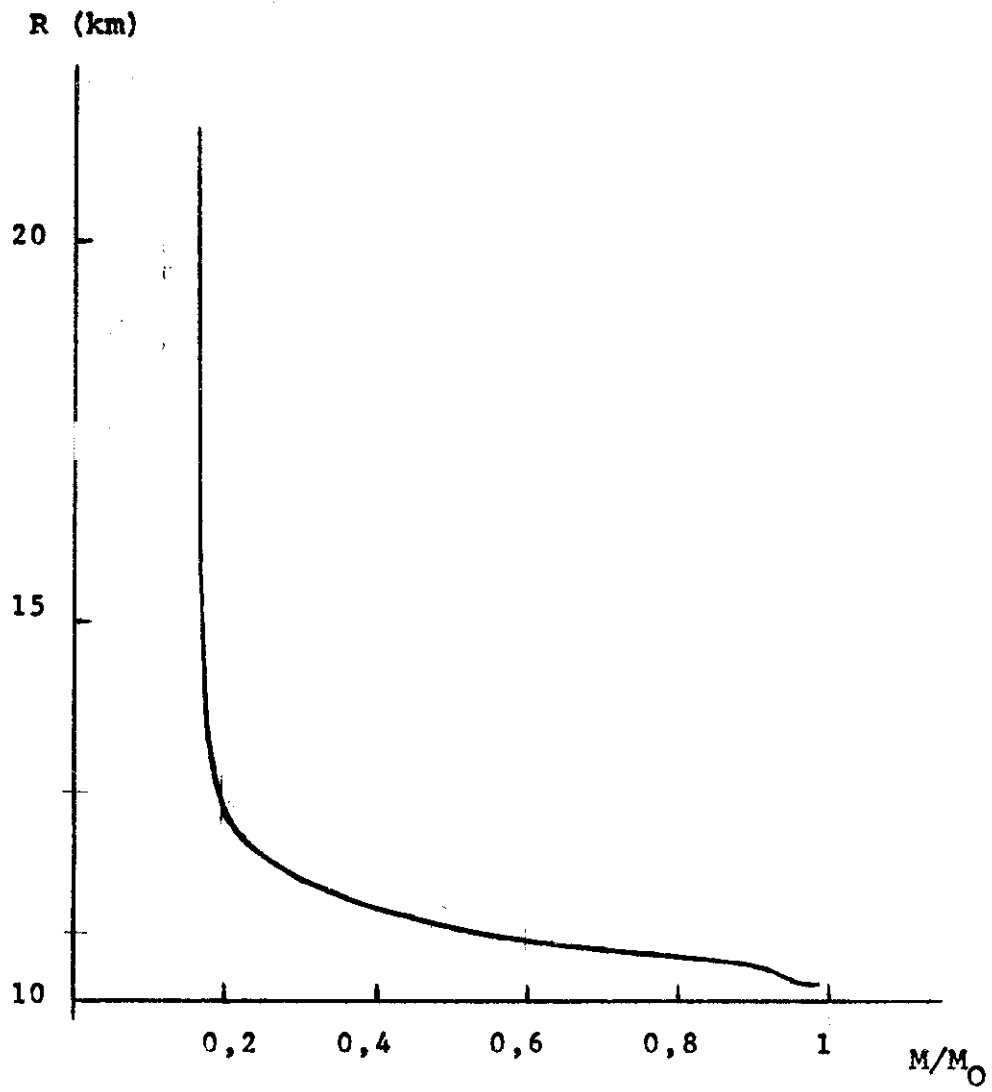


Figura (15)

## REFERÊNCIAS:

- Ambartsoumian, V.A., "Nouvelles de L'Académie des Sciences de la R.S.S. d'Arménie" 11, 9 (1958).
- Arnett, W.D. , *Canadian J. Phys.* 44, 2553 (1966).
- Arnett, W.D. , *Canadian J. Phys.* 45, 1621 (1967).
- Barkat, Z.; Buchler, J.R.; Ingber, L.; *Ap. J.* 176, 723 (1972).
- Baym, G.; Pethich, C.; Sutherland, P., *Ap. J.* 170, 299 (1971).
- Bethe, H.A., *Phys. Rev.* 55, 434 (1939).
- Bethe, H.A.; Börner, G.; Sato, K., *Astron. & Astrophys.* 7, 279 (1970)
- Börner, G.; Cohen, J.M., *Ap. J.*, 185, 959 (1973).
- Burbidge, E.M.; Burbidge, G.R., *Handbuch der Phys.* , 51, 134 (1958).
- Cameron, A.G.W., *Conference* (1971).
- Canuto, V.; Chitre, S.M., *Phys. Rev. Let.* 30, 20, 999 (1973).
- Chandrasekhar, S., *Zs. f. Ap.* 5, 321 (1932).
- Chiu, H.Y., "Neutrino Astrophysics", Cap. 8, Gordon and Breach , (1965).
- Clark, D.H., *Nature*, 246, 28 (1973).
- Clayton, D.D., "Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis", Cap. 5, McGraw-Hill (1968).
- Cohen, J.M.; Langer, W.D.; Rosen, L.C.; Cameron, A.G.M. "Neutron Star Models Based on An Improved Equation of State" (1969).

- Colgate, S.A.; White, R.H., *Ap. J.* 143, 626 (1966).
- Eddington, A., "The Internal Constitution of The Stars", Cambridge University Press, (1926).
- Garvey, G.T.; Gerace, W.J.; Jaffe, R.L.; Talmi, I.; Kelson, I., *Rev. Mod. Phys.* 41, S1 (1969).
- Gil, S., *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 47, 97 (1951).
- Grewing, M.; Heintzmann, H., *Z. Naturforsch.*, 28 a, 377, (1973).
- Hamada, T.; Salpeter, E.E., *Ap. J.* 134, 683 (1961).
- Hamada, T.; Johnston, I.D., *Nucl. Phys.* 34, 383 (1962).
- Hayashi, C.; Hoshi R.; Sugimoto, D., "Evolution of the Stars", *Prog. Theor. Phys.*, Supp. 22 (1962).
- Hewish, A.; Bell, S.J.; Pilkington J.D.H.; Scott P.F.; Collins, R.A., *Nature* 217, 709 (1968).
- Kodama, T.; e Yamada, M., *Prog. Theor. Phys.* 47, 2, 444 (1971 a).
- Kodama, T., e Yamada, M., *Prog. Theor. Phys.* 45, 6, 1763 (1971 b).
- Küpper, W.A.; Wegmann, G.; Hilf, E.R., "Thermostatic Properties of Nuclear Matter", Lawrence Berkeley Laboratory (preprint).
- Landau, L.D., *Physik Z. Sowjetunion* 1, 285 (1932).
- Landau, L.D., Lifshitz, E., "Statistical Physics", (1969).
- Langer, W.D.; Rosen, L.C.; Cohen J.M.; Cameron A.G.W., *Astrophys. Space Sci.* 5, 259 (1969).
- Lemaitre, G.E., *Monthly Notices* 91, 490 (1931).
- Levinger, J.S., Simmons, L.M., *Phys. Rev.* 124, 916 (1961).
- Leung, Y.C.; Wang, G.G., *Ap. J.* 181, 895 (1973).
- Nemeth, J.; Sprung, D.W.L., *Phys. Rev.* 176, 1496 (1968).
- Öpik, E.I., "Nuclear Process in Stars", *Inostr. Lit.*, Moscou(1957).
- Oppenheimer, J.R.; Volkoff, G.M., *Phys. Rev.* 55, 374 (1939).
- Ostgaard, E., *Phys. Lett.* 47 B, 4, 303 (1973).

- Pandharipande, V.R.; Bethe, H.A., *Phys. Rev.* C7, 1312 (1973).
- Pandharipande, V.R., *Nucl. Phys.* A217, 1 (1973).
- Powell, P., *Comp. J.* 7, 303 (1965).
- Reid, R., *Ann. Phys.* 50, 411 (1968).
- Reif, R., "Fundamentals of Statistical and Thermal Physics" Cap.8, (1965).
- Ruderman, M., *Nature* 223, 598 (1969).
- Sahakian, G.S., *Problèmes de Cosmogonie Contemporaine*, Cap. III, Edições Mir (1971).
- Salmona, A., *Phys. Rev.* 154, 1218 (1967).
- Salpeter, E.E., *Ap. J.* 134, 3, 669 (1961).
- Schwarzschild, K., *Berl. Ber.* Vol. 189 (1916).
- Takahashi, K.; Yamada, M., *Prog. Theor. Phys.* 41, 1470 (1969).
- Takarada, K.; Sato, H.; Hayashi, C., *Prog. Theor. Phys.* 36, 504 (1966).
- Thorne, K.S., *Proceedings of Course 47 of International School of Physics "Enrico Fermi"*, Academic Press (1970).
- Tolman, R.C., "Relativity, Thermodynamics and Cosmology", Oxford (1934).
- Weizsacker, C.F., *Phys. Zs.* 39, 633 (1938).
- Wing, J., *Nucl. Phys.* A120, 369 (1968).
- Zel'dovich, Y.B., *Zh. Eksp. Teoret. Fiz.* 41, 1609 (1961).
- Zel'dovich, Y.B.; Novikov, I.D., "Relativistic Astrophysics", Vol. I, Cap. 11, The University of Chicago Press (1971).

## L E G E N D A S

- TABELA I - Equação de estado na região subnuclear sem neutrons livres (sem a parte linear).
- TABELA II - Comparação com os resultados de Salpeter no domínio subnuclear sem neutrons livres.
- TABELA III - Comparação com os resultados de Bayn *et al.* na faixa subnuclear sem neutrons livres;  $\mu_e$  denota o potencial químico do eletron (IIIa).  
Comparação com os resultados de Bayn *et al.*, também na faixa subnuclear sem neutrons livres, mas com a energia de rãde desprezada (IIIb).
- TABELA IV - Valores para a densidade limiar de emissão de neutrons livres.
- TABELA V - Equação de estado na região subnuclear com neutrons livres (sem a parte linear).
- TABELA VI - Comparação com os resultados de Langer *et al.*, na faixa subnuclear com neutrons livres;  $\rho_c$  denota densidade de número de núcleos.
- TABELA VII - Equação de estado no domínio nuclear (sem a parte linear).

TABELA VIII - Idem para o domínio supranuclear.

TABELA IX - Valores dos coeficientes  $a_j$  e  $b_j$ .

TABELA X - Propriedades de alguns modelos de estrêlas de neutron.

TABELA XI - Comparação com os resultados de Börner e Cohen, e de Cohen *et al.* A massa está em unidades de  $10^{33}$  g, o raio em km,  $d_c$  é a densidade central, medida em  $\text{g/cm}^3$ ; BBS e BJ denotam a equação de Bethe, Börner e Sato (1970), e de Bethe e Johnson (1973), respectivamente.

Figura ( 4 ) - Distribuição de densidade de número de proton e de neutron para densidade central de  $0.2 \text{ fm}^{-3}$ . Apenas a parte referente ao caroço da estrêla é representada.

Figura ( 5 ) - Idem, para densidade central igual a  $0.09 \text{ fm}^{-3}$ .

Figura ( 6 ) - Idem, para densidade central igual a  $0.5 \text{ fm}^{-3}$ .

Figura ( 7 ) - Gráfico de variação da massa da estrêla em relação ao logarítmo da densidade central.

Figura ( 8 ) - Gráfico da energia de ligação por partícula versus o logarítmo da densidade central.

Figura ( 9 ) - Gráfico do índice adiabático versus a densidade, para uma estrêla de densidade central igual a  $0.5 \text{ fm}^{-3}$ .

Figura (10) - Idem para uma estrela de densidade central igual a  $0.085 \text{ fm}^{-3}$ .

Figura (11) - Configuração de uma estrela com densidade central igual a  $0.2 \text{ fm}^{-3}$ ;  $R'$  denota a distância do centro da estrela, em que ocorre a transição de fase.

Figura (12) - Idem, para densidade central de  $0.3 \text{ fm}^{-3}$ .

Figura (13) - Idem, para densidade central de  $0.5 \text{ fm}^{-3}$ .

Figura (14) - Idem, para uma configuração instável, com densidade central de  $0.085 \text{ fm}^{-3}$ .

Figura (15) - Gráfico da variação do raio da estrela em relação a sua massa.