

CRIAÇÃO DE PARTÍCULAS EM UNIVERSOS EM EXPANSÃO
E A QUESTÃO DA ISOTROPIZAÇÃO DO COSMOS

TESE DE MESTRADO

a ser defendida

por

CARLOS AUGUSTO PINTO GALVÃO

no

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

-1974-

T 523.1
G 182

CRIAÇÃO DE PARTÍCULAS EM UNIVERSOS EM EXPANSÃO
E A QUESTÃO DA ISOTROPIZAÇÃO DO COSMOS

TESE DE MESTRADO

a ser defendida

por

CARLOS AUGUSTO PINTO GALVÃO

no

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

-1974-

INDICE

DEDICATÓRIA	I
AGRADECIMENTOS	II
RESUMO	III
CONVENÇÕES E NOTAÇÃO	IV
1 - INTRODUÇÃO	1
2 - UNIVERSOS EM EXPANSÃO	5
2.1 - O MODELO DE FRIEDMANN	5
2.2 - O MODELO ANISOTROPICO DE KASNER	10
2.3 - O MODELO MIXMASTER	12
3 - O CAMPO ESCALAR EM ESPAÇOS CURVOS	19
3.1 - GENERALIDADES: O CAMPO DE KLEIN-GORDON NO ESPAÇO PLANO	19
3.2 - A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON EM ESPAÇOS RIEMANIANOS	21
3.3 - A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON EM MODELOS COSMOLÓGICOS	27
3.3.1 - MODELO DE FRIEDMANN FECHADO	27
3.3.2 - MODELO DE KASNER	31
3.3.3 - UNIVERSO MIXMASTER	32
3.4 - O CAMPO ESCALAR COMO FONTE DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN	34
4 - QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ESCALAR EM ESPAÇOS CURVOS HOMOGENEOS	39
4.1 - QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DO CAMPO ESCALAR EM ESPAÇOS CURVOS	39
4.2 - ESPAÇOS CONFORMALMENTE PLANOS	45

5 - CRIAÇÃO DE PARTICULAS EM CAMPOS GRAVITACIONAIS CLASSICOS	49
5.1 - MODELO DE FRIEDMANN QUASI-EUCLIDEANO	49
5.2 5.1.1 - CRIAÇÃO DE FOTONS NO MODELO DE FRIEDMANN QUASI-EUCLIDEANO	52
5.2 - MODELO DE KASNER	56
5.3 - MODELO MIXMASTER	59
5.4 - O TENSOR MOMENTUM-ENERGIA	61
5.5 - CRIAÇÃO DE PARTICULAS, ISOTROPIZAÇÃO E COLAPSO GRAVITACIONAL	64
6 - CRIAÇÃO DE PARTICULAS ESCALARES POR CAMPOS ELETROMAGNETICOS E GRAVITACIONAIS CLASSICOS	65
6.1 - INTERAÇÃO ELETROMAGNETICA DE PARTICULAS ESCALARES	65
6.1.1 - ESPAÇOS PLANOS	67
6.1.2 - ESPAÇOS COM CURVATURA NÃO NULA	69
6.2 - FORMALISMO UNIFICADO	73
7 - PERTURBAÇÕES ANISOTROPICAS EM UNIVERSOS DE FRIEDMANN	85
7.1 - TEORIA DAS PERTURBAÇÕES	85
7.2 - PERTURBAÇÕES ANISOTROPICAS EM UNIVERSOS DE FRIEDMANN QUASI-EUCLIDEANO	89
7.3 - INFLUENCIA DAS PERTURBAÇÕES SOBRE O CAMPO ESCALAR	97
7.4 - REAÇÃO DAS PARTICULAS CRIADAS SOBRE A METRICA	99
CONCLUSÕES	104
APENDICES	106
REFERENCIAS	122

I

À

CLAUDINA PINTO GALVÃO

E

MARIA JOSÉ

AGRADECIMENTOS

Mario Novello me orientou neste trabalho, e foi mais além me fazendo descobrir "o prazer de investigar as imensidões cósmicas". É acima de tudo um amigo, e qualquer palavra de agradecimento me parece insignificante.

Serei sempre grato ao Prof. Roberto Moreira Xavier de Araújo pela sua inestimável ajuda nos meus primeiros dias no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas e pelas suas frequentes palavras de estímulo e encorajamento.

Agradeço também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior que me proporcionou bolsa de estudos durante os últimos dois anos nos quais este trabalho foi realizado.

Nas pessoas do Magnífico Reitor Dr. Genário Alves Fonseca e do Pró-Reitor Dr. Domingos Gomes de Lima, agradeço à Universidade Federal do Rio Grande do Norte, que permitiu minha permanência no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas pelo período de 1971 a 1974.

A idéia da formação de um grupo de estudos de física e matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Norte, que constituiu a base dos atuais Institutos de Matemática e de Física nasceu dos Professores José Henriques Bittencourt, Gilvan Trigueiro, Dirceu Victor de Holanda, Milton Dantas de Medeiros, Geraldo de Pinho Pessoa e Juarez Paschoal de Azevedo. A eles, o meu reconhecimento e minha gratidão pelos ensinamentos e pelos estímulos que me proporcionaram durante o nosso convívio na universidade.

Aos amigos do Centro Latino Americano de Física, Delia Valério Ferreira, Rosali Pacheco Fernandez, Silvia Gonçalves Penna e Carlos Lopes da Conceição, que colaboraram pacientemente na redação deste trabalho, meus sinceros agradecimentos. Também à Nara Pereira Terra do CBPF, pelas inestimáveis ajudas.

Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas agradeço a acolhida e as condições de trabalho que me proporcionou.

RESUMO

Estudamos neste trabalho a generalização do campo de Klein-Gordon para variedades riemanianas, suas propriedades sob transformação conformes e o processo de criação de partículas escalares em universos em expansão. Analisamos a interação entre um campo escalar quantizado e campos eletromagnéticos e gravitacionais clássicos, e suas consequências sobre o fenômeno da criação de partículas. Estudamos também, a evolução de perturbações anisotrópicas produzidas pela propagação de ondas gravitacionais em universos do tipo de Friedmann quasi-euclidianos. Mostramos como as perturbações influenciam o processo de criação de partículas e como as partículas criadas pelas perturbações reagem sobre o universo. Além disso mostramos que, de modo geral, o processo de criação de partículas não funciona como um mecanismo de isotropização do universo.

IV

CONVENÇÕES E NOTAÇÃO

Índices gregos variam de 0 a 4

Índices latinos variam de 1 a 3

Assinatura da métrica: (+ - - -)

Símbolos de Christoffel: $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$

Operador de derivação covariante: ∇_{μ}

Barra dupla significando derivação covariante e
barra simples significando derivação ordinária:

$$\nabla_{\mu} F_{\nu} \equiv \nabla_{\nu} F_{\mu} = F_{\nu|\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\epsilon} F_{\epsilon}$$

$$F_{\lambda||\beta||\alpha} - F_{\lambda||\alpha||\beta} = R_{\lambda\rho\beta\alpha} F^{\rho} \quad \text{onde } R_{\lambda\rho\beta\alpha} \text{ é o}$$

tensor de Riemann.

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\mu}^{\alpha}$$

CONSTANTES E UNIDADES

$$\begin{aligned} \text{Constante gravitacional: } G &= (6.673 \pm 0.003) \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gseg}^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Constante de Hubble: } H = 55 \text{ km seg}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = (1,7 \times 10^{28} \text{ cm})^{-1}$$

$$\text{PARSEC: } 1 \text{ pc} = 3.08 \times 10^{13} \text{ Km}$$

1 - INTRODUÇÃO

Na década de 1960 a 1970 ocorreram descobertas de caráter fundamental, que marcaram o desenvolvimento da cosmologia relativista moderna. A primeira delas foi a descoberta das fontes de rádio quasi-estelares^(1,2). A natureza destes objetos é ainda indeterminada, mas há evidências de que estas fontes se encontram realmente a distancias cosmológicas, sendo portanto os objetos mais distantes de nós até hoje observados. A segunda foi a medida de uma radiação de micro-ondas de "background"⁽³⁾, consistente com um espectro de radiação de "corpo negro" de 3°K. Verificou-se que esta radiação é isotrópica, com uma precisão de uma parte em 10^3 . Esta radiação seria remanescente de um estágio primordial quente do universo ("primeval fireball"). A possibilidade da ocorrência de tal estágio estimulou o estudo dos modelos cosmológicos anisotrópicos. As principais linhas de estudo destes modelos, naquela época, eram dirigidas para o problema da produção de elementos nos estágios iniciais do universo.

O modelo chamado de "hot big-bang", proposto por Gamow, Alpher e Bethe⁽²⁾ teve então uma prova substancial. Esse modelo fornece dados que estão em bom acordo com as observações como, por exemplo, a existência e isotropia da radiação de

"corpo negro", a isotropia e homogeneidade do universo, abundância promordial de hélio, etc. Nesse modelo, no entanto se torna muito difícil e arbitrário explicar a formação de galáxias. Isto se deve a uma de suas hipóteses fundamentais segundo a qual o universo teria se originado em um estado de rápida expansão com condições de quase isotropia e homogeneidade de temperatura e densidade. Com estas condições, não fica clara a origem de perturbações na densidade da matéria com amplitudes suficientes para sua condensação em galáxias. Misner⁽⁴⁾ e outros sugeriram então que o universo teria se originado em um estado altamente caótico, no qual poderiam estar presentes todos os tipos de anisotropias e in-homogeneidades.

Surge então uma das questões mais importantes da cosmologia: "porque o universo é atualmente tão isotrópico?" Misner propôs que processos físicos que teriam ocorrido nos estágios primordiais da evolução do universo foram os responsáveis pela redução da anisotropia. Dentre estes processos o mais importante seria a interação de neutrinos excitados termicamente e pares eletron-positron ("viscosidade" dos neutrinos) durante a fase na qual o universo estava a uma temperatura de 10^{10} °K. Os argumentos de Misner foram contestados por vários autores os quais mostraram que a viscosidade dos neutrinos só seria capaz de fazer decrescer a anisotropia se esta não fosse inicialmente muito intensa⁽⁵⁾.

Uma outra linha de trabalho sobre modelos anisotrópicos foi desenvolvida por Lifshitz, Khalatnikov e Belinskii⁽⁶⁾. Eles mostraram a existência de um "estágio de vazio" perto da singularidade dos modelos anisotrópicos, durante o qual a matéria não afeta a evolução do universo. Mostraram também que o comportamento assintótico da métrica perto da singularidade, em cada ponto da hipersuperfície singular, é do tipo "mixmaster" proposto por Misner⁽⁴⁾.

Muito recentemente um outro mecanismo de isotropização foi sugerido por Parker⁽⁷⁾ e Zel'dovich⁽⁸⁾. Trata-se do processo de criação de partículas, através do qual a energia de anisotropia da geometria é convertida em matéria. A origem do estudo deste fenômeno, no entanto, data de 1939, quando Schrödinger⁽⁹⁾ publicou um trabalho sobre a propagação de ondas clássicas em universos em expansão. Neste trabalho ele verificou que devido a variação da métrica com o tempo ocorre o fenômeno de "backscattering" ou reflexão das ondas. No contexto de uma teoria quântica, a amplificação de ondas é traduzida em termos de criação de partículas.

Parker⁽⁷⁾ estudou a criação de partículas em universos de Friedmann quasi-euclidianos, e mostrou que não há criação de partículas de massa nula. Isto se deve à invariância conforme da equação do campo e ao fato de que a métrica isotrópica é conformalmente plana, conforme Zel'dovich⁽¹⁰⁾ demonstrou. A criação de partículas sem massa requer uma métrica anisotrópica.

Dentre os efeitos cosmológicos do fenômeno de criação de partículas é de importância fundamental a reação das partículas criadas sobre a métrica. Estimativas semi-qualitativas de Zel'dovich⁽⁸⁾ mostraram que a produção de partículas perto da singularidade de um modelo cosmológico anisotrópico pode acumular uma energia suficiente para a isotropização da expansão. No caso do modelo mixmaster se manifesta um outro aspecto do fenômeno: a mistura dos modos de vibração do campo. Segundo Hu⁽¹²⁾, a mistura de modos favorece a troca de energia entre partículas criadas em diferentes modos e tende a tornar mais efetivo o amortecimento da anisotropia.

O nosso trabalho se desenvolve no sentido de esclarecer alguns aspectos do fenômeno da criação de partículas, especificamente a influencia de campos eletromagnéticos sobre o processo, e a reação das partículas criadas sobre a métrica. Mostramos que a presença de campos eletromagnéticos inibe o processo de criação de partículas e também, que a reação das partículas criadas sobre a métrica não funciona, de modo geral, como um mecanismo de isotropização.

2 - UNIVERSOS EM EXPANSÃO

Neste capítulo faremos um estudo sumário das métricas de Friedmann, Kasner e Mixmaster as quais serão utilizadas nos capítulos seguintes. As componentes do tensor de Ricci para os diversos casos estão calculadas e tabeladas no Apêndice A.

2.1 - O MODELO DE FRIEDMANN

As soluções de Friedmann para as equações de Einstein se baseiam na hipótese de que o Universo é homogêneo e isotrópico.

Os dados astronômicos existentes revelam que no estágio atual o nosso Universo apresenta um alto grau de homogeneidade e isotropia, em escalas da ordem de 10^8 anos luz. Estes dados provêm de várias fontes; observa-se por exemplo, que a atual taxa de expansão do Universo é da ordem de 55 km/seg megaparsec em todas as direções, e que as fontes de rádio extragaláticas são distribuídas quase que isotropicamente. Além destes fatos, recentemente foi detetada uma radiação de fundo de micro-ondas, a qual se apresenta altamente isotrópica.

Estes fatos fazem com que a métrica de Friedmann assumam um papel importante na descrição do estágio atual de evolução do Universo.

A homogeneidade do espaço significa que por qualquer ponto do espaço-tempo pode-se imaginar uma hipersuperfície tridimensional do tipo espaço, chamada de hipersuperfície de homogeneidade, sobre a qual as condições físicas são as mesmas em cada ponto. Isto é, a pressão, a densidade, a curvatura e a taxa de expansão local observada são as mesmas em todos os pontos.

A isotropia requer que, em qualquer evento, um observador ligado a um sistema de coordenadas co-movente não pode distinguir nenhuma de suas direções espaciais através de medidas físicas locais. É claro então que a velocidade da matéria em qualquer ponto deve ser perpendicular à hipersuperfície de homogeneidade, porque em caso contrário seria possível definir uma direção privilegiada o que iria de encontro à hipótese de isotropia.

Vamos escrever a métrica de Friedmann sob a forma (12)

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - a^2(t) \left[dx^2 + \sigma^2(x) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \\ &= dt^2 - a^2(t) dl^2 \end{aligned} \quad (2-1)$$

onde dl^2 é a métrica do tri-espaço, cuja curvatura K (constante e independente do tempo) pode tomar os valores 0, +1 ou -1 conforme se tenha

$$\sigma(\chi) = \begin{cases} \chi & (K=0) \\ \text{sen } \chi & (K=+1) \\ \text{senh } \chi & (K=-1) \end{cases} \quad (2-2)$$

$K = 0$ corresponde a uma hipersuperfície tri-dimensional plana euclideana. Neste caso, $0 \leq \chi < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$, e o volume do tri-espaço calculado por $V = \int \sqrt{-g} d^3\chi$ é infinito.

$K = +1$ corresponde ao modelo espacialmente "fechado". Tem-se neste caso $0 \leq \chi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. O volume do tri-espaço é proporcional a $a^3(t)$.

$K = -1$ corresponde ao modelo espacialmente "aberto". Tem-se $0 \leq \chi < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. O volume do tri-espaço é infinito.

A hipótese da distribuição homogênea e isotrópica das galáxias, consideradas como "pontos" em um volume de dimensões da ordem de 10^8 anos-luz sugere considerar um tensor momentum-energia do tipo associado a um fluido perfeito, com pressão p e densidade ρ que podem depender apenas do tempo, e cujas linhas de fluxo são curvas (χ, θ, ϕ) constantes, de modo que o sistema de coordenadas é co-movente. Tal tensor pode ser escrito sob a forma

$$T_{\mu\nu} = \rho V_{\mu} V_{\nu} - p h_{\mu\nu} \quad (2-3)$$

onde

$$V_{\mu} = \delta_{\mu}^0, \quad V_{\mu} V^{\mu} = +1 \quad (2-4)$$

e

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_{\mu} V_{\nu} \quad (2-5)$$

é o tensor de projeção no tri-espaco ortogonal a V_μ . O tensor $T_{\mu\nu}$ satisfaz a lei de conservação

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (2-6)$$

Usando as curvaturas calculadas no Apêndice A, as equações de Einstein

$$G_{\mu\nu} = - T_{\mu\nu} \quad (2-7)$$

se tornam

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^3} &= \frac{\rho}{3} \\ - 2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{K}{a^2} &= p \end{aligned} \quad (2-8)$$

Dois tipos de equação de estado $p = p(\rho)$ são particularmente importantes

$$\begin{aligned} p &= 0 \\ p &= \frac{1}{3} \rho \end{aligned} \quad (2-9)$$

O primeiro caso, $p = 0$, corresponde a considerarmos uma distribuição incoerente de matéria no universo. O segundo corresponde a um universo fotonico, onde a radiação eletromagnética é dominante. As soluções das equações de Einstein correspondentes estão tabeladas abaixo parametrizadas por $dt = ad\eta$.

$p = 0, \rho_M a^3 \sim \text{const.}$			$p = \frac{1}{3} \rho_Y, \rho_M a^4 \sim \text{const.}$	
K	$a(\eta)$	$t(\eta)$	$a(\eta)$	$t(\eta)$
+1	$1 - \cos \eta$	$\eta - \text{sen } \eta$	$\text{sen } \eta$	$1 - \cos \eta$
0	$\frac{1}{2} \eta^2$	$\frac{1}{6} \eta^3$	η	$\frac{1}{2} \eta^2$
-1	$\cos h\eta - 1$	$\text{sen } h\eta - \eta$	$\text{sen } h\eta$	$\cos h\eta - 1$

Definindo⁽¹²⁾ os tensores de rotação $\omega_{\mu\nu}$ e de "Shear" $\sigma_{\mu\nu}$, e o escalar de expansão θ , respectivamente por

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h_{[\mu}^{\lambda} h_{\nu]}^{\epsilon} V_{\lambda\|\epsilon} \quad (2-10)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h_{(\mu}^{\lambda} h_{\nu)}^{\epsilon} V_{\lambda\|\epsilon} - \frac{1}{3} \theta h_{\mu\nu} \quad (2-11)$$

$$\theta = V^{\alpha}_{\|\alpha} \quad (2-12)$$

com V_{μ} e $h_{\mu\nu}$ dados por (2-4) e (2-5), verifica-se que as soluções de Friedmann têm rotação e "Shear" nulos, mas a expansão é não nula e igual a \dot{V}/V .

É importante observar que as soluções isotrópicas só existem quando a densidade ρ é diferente de zero e que o modelo de Friedmann apresenta uma singularidade global em $t = 0$

2.2 - O MODELO ANISOTRÓPICO DE KASNER

Pode-se arguir sobre a importancia de modelos a nisotrópicos do universo, levando-se em conta o alto grau de isotropia do estágio atual do universo. Na realidade, o fato do modelo isotrópico fornecer uma descrição razoável do atual estágio não significa que tal modelo seja adequado para descrever os estágios iniciais de evolução do universo.

Lifshitz e Khalatnikov⁽⁶⁾ mostraram que em regiões próximas da singularidade dos modelos cosmológicos a influencia da matéria sobre a dinâmica da expansão do universo é desprezível, podendo surgir uma fase altamente anisotrópica. Este estágio de evolução foi por eles denominado de "estágio de vazio" e pode ser descrito pelo modelo anisotrópico de Kasner

Escrevamos a métrica de Kasner sob a forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dx^2 - b^2(t) dy^2 - c^2(t) dz^2 \quad (2-13)$$

Usando as curvaturas tabeladas no Apêndice A (eqs. A-18), as equações de Einstein para o vazio se escrevem

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} &= 0 \\ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} &= 0 \\ \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} &= 0 \\ \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{c}}{c} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c} \frac{\dot{b}}{b} &= 0 \end{aligned} \quad (2-14)$$

Fazendo agora

$$\begin{aligned} a(t) &= \left(\frac{t}{t_0}\right)^{p_1} \\ b(t) &= \left(\frac{t}{t_0}\right)^{p_2} \\ c(t) &= \left(\frac{t}{t_0}\right)^{p_3} \end{aligned} \quad (2-15)$$

as equações (2-14) conduzem às seguintes relações entre os números p_1 , p_2 , p_3 :

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= 1 \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2-16)$$

Os três números (p_1, p_2, p_3) desempenham um papel fundamental no estudo da métrica de Kasner. Das equações (2-16) pode-se concluir que apenas um dos três números é independente; os três não podem ser simultaneamente iguais podendo ser iguais aos pares apenas nos casos $(0, 0, 1)$ e $(-1/3, 2/3, 2/3)$. Em qualquer outra situação os três são diferentes, sendo um deles negativo e os outros dois positivos.

Cada hipersuperfície $t = \text{constante}$ é plana. O escalar de expansão θ é diferente de zero e igual a \dot{V}/V onde $V = abc$, o que identifica um universo em expansão; os tensores de "Shear" e rotação são nulos, e o modelo apresenta uma singularidade em $t = 0$.

Como mencionamos no início desta secção Lifshitz

et al. concluíram que nas proximidades da singularidade dos modelos cosmológicos se origina um "estágio de vazio" durante o qual a matéria não influencia na dinâmica da expansão do Universo.

Observe-se, no entanto, que esta conclusão foi obtida com a hipótese da matéria ser descrita por um tensor momentum-energia do tipo de um fluido perfeito e com uma equação de estado satisfazendo a condição $p \leq \frac{2}{3} \rho$.

Conforme mostraremos no capítulo 3, este resultado não é válido se considerarmos a presença de matéria descrita por um campo escalar dependente apenas do tempo. Neste caso, a influência da matéria não pode ser desprezada, e não ocorre a existência do "estágio de vazio".

2.3 - UNIVERSO MIXMASTER

De acordo com Misner⁽¹³⁾, vamos escrever a métrica do universo Mixmaster sob a forma

$$ds^2 = dt^2 - \sum_{i=1}^3 (\ell_i(t))^2 (\sigma^i)^2 \quad (2-17)$$

onde σ^i são formas diferenciais satisfazendo a relação (Bianchi tipo IX)

$$d\sigma^i = \frac{1}{2} \epsilon^i_{jk} \sigma^j \wedge \sigma^k \quad (2-18)$$

A métrica (2-17) representa modelos cosmológicos anisotrópicos, homogêneos, sem rotação mais gerais possíveis.

Uma maneira de parametrizar as formas σ^i é usando os ângulos de Euler (θ, ϕ, ψ) ,

$$\begin{aligned}\sigma^1 &= -\sin \psi \, d\theta + \cos \psi \, \sin \theta \, d\phi \\ \sigma^2 &= \cos \psi \, d\theta + \sin \psi \, \sin \theta \, d\phi \\ \sigma^3 &= d\psi + \cos \theta \, d\phi\end{aligned}\tag{2-19}$$

onde

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq 4\pi\tag{2-19A}$$

Com esta parametrização, $(x^1, x^2, x^3) \equiv (\theta, \phi, \psi)$, os elementos não nulos do tensor métrico são

$$\begin{aligned}g_{00} &= 1 \\ g_{11} &= l_1^2 \sin^2 \psi + l_2^2 \cos^2 \psi \\ g_{22} &= \sin^2 \theta (l_1^2 \cos^2 \psi + l_2^2 \sin^2 \psi) + l_3^2 \cos^2 \theta \\ g_{12} &= g_{21} = (l_1^2 - l_2^2) \sin \psi \cos \psi \sin \theta \\ g_{33} &= l_3^2 \\ g_{23} &= g_{32} = l_3^2 \cos \theta\end{aligned}\tag{2-20}$$

A dinâmica do universo é descrita pela variação das funções $l_i(t)$ com o tempo, de acordo com as equações de Einstein.

Belinskii et al.⁽⁶⁾ obtiveram soluções aproximadas das equações de Einstein para o vazio ($R_{\mu\nu} = 0$) as quais devido à sua importancia; sumarizamos à seguir. Outros detalhes sobre universos mixmaster podem ser encontrados em⁽¹⁴⁾.

Introduzindo o elemento de tempo cósmico $d\tau$ e as funções ρ_1 , ρ_2 e ρ_3 pelas relações

$$d\tau = \frac{1}{l_1 l_2 l_3} dt, \quad l_i = e^{\rho_i} \quad (2-21)$$

as equações de Einstein para o vazio tomam a forma

$$\begin{aligned} 2 \rho_1'' &= (l_1^2 - l_3^2)^2 - l_1^4 \\ 2 \rho_2'' &= (l_3^2 - l_1^2) - l_3^4 \\ 2 \rho_3'' &= (l_1^2 - l_2^2) - l_3^4 \end{aligned} \quad (2-22)$$

$$\frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)'' = \rho_1' \rho_2' + \rho_2' \rho_3' + \rho_3' \rho_1' \quad (2-23)$$

onde a "linha" significa derivada com a relação τ . Combinando o sistema (2-22) com a equação (2-23) obtem-se uma equação que contém apenas derivadas primeiras das funções ρ_i , e representa uma integral primeira do sistema (5):

$$4 (\rho_1' \rho_2' + \rho_2' \rho_3' + \rho_3' \rho_1') = l_1^4 + l_2^4 + l_3^4 - 2l_1^2 l_2^2 - 2l_2^2 l_3^2 - 2l_3^2 l_1^2 \quad (2-24)$$

As seguintes soluções aproximadas das equações acima são de interesse.

- a) Desprezando os termos da direita do sistema (2-22), o que equivale a considerar tri-espacos planos, obtem-se uma soluçao do tipo Kasner

$$\ell_i \sim t^{p_i} \quad , \quad \sum_{i=1}^3 p_i = \sum_{i=1}^3 p_i^2 = 1$$

- b) Mantendo os termos em ℓ_1^4 , obtem-se uma soluçao para a qual o sistema muda de um regime de Kasner para outro:

$$\ell_1^2 = \frac{2|p_1|\lambda}{\cos h(2|p_1|\lambda\tau)}$$

$$\ell_2^2 = B^2 e^{2\lambda(p_2 - |p_1|)\tau} \cos h(2|p_1|\tau)$$

$$\ell_3^2 = C^2 e^{2\lambda(p_3 - |p_1|)\tau} \cos h(2|p_1|\tau)$$

(B, C e λ são constantes de integraçao). O comportamento assintótico deste sistema é

$$\tau \rightarrow +\infty \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell_1 \sim t^{p_1} \\ \ell_2 \sim t^{p_2} \\ \ell_3 \sim t^{p_3} \\ (V = \ell_1 \ell_2 \ell_3 = \lambda t) \end{array} \right. .$$

$$\tau \rightarrow -\infty \quad \left\{ \begin{array}{l} l_1 \sim t^{p'_1} \\ l_2 \sim t^{p'_2} \\ l_3 \sim t^{p'_3} \\ (V = l'_1 l'_2 l'_3 = \lambda' t) \end{array} \right.$$

que indica que o sistema se comporta assintoticamente como dois regimes tipo Kasner. Nas expressões acima tem-se

$$p'_1 = \frac{|p_1|}{1-2|p_1|}, \quad p'_2 = -\frac{2|p_1|-p_2}{1-2|p_1|}, \quad p'_3 = \frac{p_3-2|p_1|}{1-2|p_1|}$$

$$\lambda' = (1-2|p_1|)\lambda$$

c) Se uma das três funções, ρ_3 por exemplo, é desprezível comparada com as outras, tem-se então

$$(\rho_1 + \rho_2)'' = 0$$

$$(\rho_1 - \rho_2)'' = e^{4\rho_2} - e^{4\rho_1}$$

$$\rho'_3 (\rho_1 + \rho_3)' = -\rho'_1 \rho'_2 + \frac{1}{4} (e^{2\rho_1} - e^{2\rho_2})^2$$

$$\text{Introduzindo a variável } \xi = \xi e^{\frac{2a_0^2}{\xi_0} (\tau - \tau_0)} \quad \circ$$

sistema acima admite como solução

$$l_1 = a_0 \sqrt{\frac{\xi}{\xi_0}} \left(1 + \frac{A}{\sqrt{\xi}} \operatorname{sen} (\xi - \xi_0) \right)$$

$$l_2 = a_0 \sqrt{\frac{\xi}{\xi_0}} \left(1 - \frac{A}{\sqrt{\xi}} \sin(\xi - \xi_0) \right)$$

$$l_3 = c \bar{e} A^2 (\xi_0 - \xi)$$

(a_0 , A e ξ_0 são constantes de integração).

Estas soluções correspondem a uma fase durante a qual dois eixos experimentam pequenas oscilações e um terceiro decresce monotonicamente.

3 - O CAMPO ESCALAR EM ESPAÇOS CURVOS

O nosso propósito neste capítulo é estudar a generalização da equação de Klein-Gordon para espaços com curvatura não nula. Consideraremos por enquanto o campo não quantizado e real. Obteremos soluções explícitas para a equação de movimento nos casos das métricas estudadas no capítulo anterior. O problema de considerar o campo escalar como fonte das equações de Einstein será analisado no caso particular em que o campo depende apenas do tempo.

3.1 - GENERALIDADES: A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON NO ESPAÇO PLANO

Sabe-se que um campo escalar $\phi(x^\mu)$ é apropriado para a descrição de partículas sem spin com carga nula (ϕ real) ou com carga não nula (ϕ complexo). As equações que descrevem a evolução de um campo escalar carregado (não Hermitiano) de acordo com a teoria da relatividade especial, podem ser obtidos a partir da Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \phi^*_{|\mu} \phi^{|\mu} - m^2 \phi^* \phi \quad (3-1)$$

As equações de Euler-Lagrange $\partial\mathcal{L}/\partial f - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial f_{|\mu}} = 0$

($f = \phi, \phi^*$) conduzem às equações de Klein-Gordon para os campos ϕ e ϕ^* ,

$$\begin{aligned} (\square + m^2) \phi &= 0 \\ (\square + m^2) \phi^* &= 0 \end{aligned} \quad (3-2)$$

onde $\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ é o operador D'Alambertiano usual.

O tensor momentum-energia $T_{\mu\nu}(x)$ associado com o campo pode ser obtido pela expressão

$$T_{\mu\nu} = \phi^*_{,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \phi_{,\nu} - \delta_{\mu}^{\nu} \mathcal{L} \quad (3-3)$$

que resulta em

$$T_{\mu\nu} = \dot{\phi}^*_{,\mu} \phi_{,\nu} + \phi^*_{,\nu} \dot{\phi} - \delta_{\mu}^{\nu} \mathcal{L} \quad (3-4)$$

As componentes T_{00} e T_{0i} ,

$$T_{00} = \dot{\phi}^* \dot{\phi} + \nabla \phi^* \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^* \phi \quad (3-5)$$

$$T_{0i} = \dot{\phi}^* \phi_{,i} + \phi^*_{,i} \dot{\phi}$$

representam as densidades de energia e momentum associados com o campo. A lei de conservação de energia e momentum é expressa pela relação

$$T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0 \quad (3-6)$$

Além da lei de conservação expressa por (3-6), uma outra lei de conservação proveniente (via Teorema de Noether) da invariância da Lagrangiana por transformação de gauge do tipo $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$; $\phi^* \rightarrow e^{-i\alpha} \phi^*$, pode ser expressa em

termos da corrente $j_\mu(x)$ dada por

$$j_\mu(x) = i(\Phi^* \partial_\mu \Phi - \partial_\mu \Phi^* \Phi) \quad (3-7)$$

Um cálculo direto usando a equação de movimento mostra que

$$j^\mu_{|\mu} = 0 \quad (3-8)$$

Consideremos agora o campo escalar como um campo quantizado. Introduzindo as regras de comutação canônicas

$$[\Phi(\vec{x}, t), \Phi(\vec{x}', t)] = [\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = 0 \quad (3-9)$$

$$[\Phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$$

onde $\pi = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\Phi}$ é o momentum conjugado ao campo Φ , e representando os campos Φ e Φ^\dagger por

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[a_k e^{-ik_\mu x^\mu} + b_k^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} \right] \quad (3-10)$$

$$\Phi^\dagger(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[a_k^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} + b_k e^{-ik_\mu x^\mu} \right]$$

segue-se que os operadores a_k , a_k^\dagger e b_k , b_k^\dagger satisfazem as regras de comutação

$$\begin{aligned} [a_k, a_{k'}^\dagger] &= [b_k, b_{k'}^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ [a_k, b_k] &= [a_k^\dagger, b_{k'}^\dagger] = 0 \\ [a_k, b_{k'}^\dagger] &= [a_k^\dagger, b_{k'}] = 0 \end{aligned} \quad (3-11)$$

a_k e a_k^\dagger são respectivamente, os operadores de aniquilação e criação de partículas, e b_k e b_k^\dagger os correspondentes operadores para as anti-partículas.

3.2 - A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON EM ESPAÇOS RIEMANIANOS

A generalização mais simples da equação de Klein-Gordon para espaços riemânicos é feita substituindo-se o operador D'Alambertiano pelo correspondente operador de Laplace-Beltrami definido por

$$\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \quad (3-12)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right] \quad (3-13)$$

isto é,

$$(g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + m^2) \Phi(x) = 0 \quad (3-14)$$

Com a equação de Klein-Gordon escrita na forma acima, dizemos que o campo escalar $\Phi(x)$ está "minimalmente acoplado" com o campo gravitacional. A equação (3-14) pode ser obtida através da Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} - m^2 \Phi^2) \quad (3-14a)$$

O momentum conjugado ao campo Φ é definido da ma

meira usual,

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}|_0} = \sqrt{-g} g^{0\mu} \Phi|_{\mu} \quad (3-15)$$

e a densidade Hamiltoniana é

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi \dot{\Phi}|_0 - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} \left(g^{\mu\nu} \Phi|_{\mu} \Phi|_{\nu} + m^2 \Phi^2 \right) \end{aligned} \quad (3-16)$$

Em termos do momentum π definido acima, a Hamiltoniana fica sob a forma

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{(-g)g^{00}} (\pi - \sqrt{-g} g^{0i} \Phi|_i) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j,k} g^{jk} \Phi|_j \Phi|_k + m^2 \Phi^2 \right\} \end{aligned} \quad (3-17)$$

A equação (3-14) para o caso em que $m=0$, não é invariante por transformações conformes, uma propriedade que é comum às equações para partículas de massa de repouso nula com spin qualquer⁽¹⁵⁾. Por várias razões que ficarão claras durante o desenvolvimento deste trabalho, é desejável que a equação de Klein-Gordon com $m=0$ seja invariante por transformações conformes e, por este motivo vamos estabelecer as modificações necessárias na equação $\nabla^{\mu} \nabla_{\mu} \Phi = 0$ para que ela seja conformalmente invariante⁽¹⁶⁾

Definimos uma transformação conforme pelas equações:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &\rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu} \\ \phi &\rightarrow \bar{\phi} = \bar{\Omega}^{-1}(x) \phi \end{aligned} \quad (3-18)$$

Então,

$$\begin{aligned} \bar{\square} \bar{\phi} &= \frac{1}{\Omega^4 \sqrt{-g}} \left[\Omega^{-2} g^{\mu\nu} \Omega^4 \sqrt{-g} \phi (\bar{\Omega}^{-1} \phi)_{|\mu} \right]_{|\nu} \\ &= \frac{1}{\Omega^4 \sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi_{|\mu})_{|\nu} \Omega + \frac{1}{\Omega^4 \sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi_{|\mu}) \Omega_{|\nu} \\ &\quad - \frac{1}{\Omega^4 \sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi)_{|\mu} \Omega_{|\nu} = \frac{1}{\Omega^4 \sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi) \Omega_{|\mu} \Omega_{|\nu} \end{aligned}$$

Usando

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi)_{|\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{|\mu} \phi + \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi)_{|\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi)_{|\mu}$$

no terceiro termo da expressão acima, e simplificando o resultado, encontramos

$$\bar{\square} \bar{\phi} = \frac{1}{\Omega^2} \square \phi - \frac{\square \Omega}{\Omega^4} \phi$$

Mas, pode-se verificar que

$$\frac{1}{6} \bar{R} \bar{\phi} = \frac{1}{6} \frac{R}{\Omega^3} \phi + \frac{\square \Omega}{\Omega^4} \phi$$

onde R é o escalar de curvatura. Logo,

$$\bar{\square} \bar{\phi} + \frac{1}{6} \bar{R} \bar{\phi} = \frac{1}{\Omega^3} (\square \phi + \frac{1}{6} R \phi) = 0$$

Portanto, a equação (3-14) com $m=0$ fica invariante pela transformação conforme definida por (3-18) se introduzirmos o termo $\frac{1}{6} R \phi$. É claro que a equação modificada se reduz a equação Klein-Gordon usual se a curvatura do espaço for nula. Escrevendo-se a equação de Klein-Gordon sob a forma

$$g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi + \frac{1}{6} R \phi = 0 \quad (3-19)$$

diremos que o campo ϕ está "conformalmente acoplado" com a geometria do espaço.

De modo geral, se considerarmos uma variedade Riemanniana de dimensão n, R_n , a equação

$$(g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} + \frac{(n-2)R}{4(n-1)}) \phi = 0 \quad (3-20)$$

será invariante sob grupo de todas as transformações conformes da métrica. Se V_n é um espaço plano associado a R_n por uma transformação conforme, a equação (3-20) em R_n é equivalente à equação $g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi = 0$ em V_n , o que de certa forma justifica a adoção de (3-20). No caso de variedades Riemannianas R_n arbitrárias, a adoção de (3-20) como generalização da equação de Klein-Gordon justifica-se pela sua invariância pelo grupo de

transformações conformes da métrica

Escreveremos então a equação de Klein-Gordon generalizada em uma variedade Riemanniana sob a forma

$$g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi + m^2 \phi + \frac{n-2}{4(n-1)} R\phi = 0 \quad (3-21)$$

e a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = g^{\mu\nu} \phi_{|\mu} \phi_{|\nu} - m^2 \phi^2 - \frac{n-2}{4(n-1)} R\phi^2 \quad (3-22)$$

O correspondente tensor momentum-energia é obtido pelo princípio variacional

$$\delta I = \delta \int \sqrt{-g} \mathcal{L} d^4x \equiv \int T_{\alpha\beta}^{(c)} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x \quad (3-23)$$

$$= \int T_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x + \frac{n-2}{4(n-1)} \int \phi^2 \delta R \sqrt{-g} d^4x$$

onde $T_{\alpha\beta}$ é dado por $T_{\alpha\beta} = \phi_{|\alpha} \phi_{|\beta} - g_{\alpha\beta} \mathcal{L}$. Usando as relações

$$\delta R_{\alpha\beta} = (\delta \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu})_{|\beta} - (\delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu})_{|\mu}$$

$$\delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left[\delta g_{\mu\alpha}{}_{|\beta} + \delta g_{\mu\beta}{}_{|\alpha} - \delta g_{\alpha\beta}{}_{|\mu} \right]$$

obtem-se

$$\delta R = \left[R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} + \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha}) - g_{\alpha\beta} \square \right] \delta g^{\alpha\beta}$$

Usando agora a identidade

$$\nabla_{\alpha} (f \nabla_{\beta} M^{\mu\nu}) - \nabla_{\beta} (M^{\mu\nu} \nabla_{\alpha} f) = f \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} M^{\mu\nu} - M^{\mu\nu} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} f$$

que é válida para qualquer escalar f e qualquer tensor $M^{\mu\nu}$.
obtemos

$$\int \sqrt{-g} \phi^2 \delta R d^4x = \int \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} \left[R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} + \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha}) - g_{\alpha\beta} \square \right] \phi^2 d^4x$$

onde usamos $\delta g^{\alpha\beta} \parallel_{\rho} = \nabla_{\rho} \delta^{\alpha\beta} = 0$ na fronteira da região de integração. Finalmente,

$$T_{\alpha\beta}^{(c)} = T_{\alpha\beta} + \frac{n-2}{4(n-1)} (R_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} \square + \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta}) \phi^2 \quad (3-24)$$

que é o tensor momentum-energia associado ao campo escalar real $\phi(x)$ obedecendo a equação de Klein-Gordon (3-21) conformalmente acoplado à geometria da variedade riemanniana. Este tensor tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^{(c)} &= T_{\beta\alpha}^{(c)} \\ T^{(c)} &\equiv T_{\alpha}^{(c)\alpha} = m^2 \phi^2 \\ T^{(c)}_{\alpha\beta} \parallel_{\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (3-25)$$

Para o caso que nos interessa, $n = 4$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (g^{\alpha\beta} \phi_{|\alpha} \phi_{|\beta} - m^2 \phi^2 - \frac{1}{6} R \phi^2) . \\ T_{\alpha\beta} &= \phi_{|\alpha} \phi_{|\beta} - g_{\alpha\beta} \mathcal{L} + \frac{1}{6} (R_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} \square + \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta}) \phi^2 \\ g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \phi + m^2 \phi + \frac{1}{6} R \phi &= 0 , \end{aligned}$$

onde omitimos o superscripto (c) em $T_{\alpha\beta}$, usado para indicar que o tensor $T_{\alpha\beta}^{(c)}$ foi construído com o campo ϕ satisfazendo a equação (3-21) invariante por transformações conformes quando $m=0$.

As expressões obtidas acima serão usadas na versão quantizada da teoria do campo escalar em variedades riemannianas. Por enquanto, utilizaremos a equação sem o termo conforme.

3.3 - A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON EM MODELOS COSMOLÓGICOS

3.3.1 - MODELO DE FRIEDMANN FECHADO

A métrica neste caso é a (2-1) com $\epsilon = +1$ e $\sigma(\chi) = \text{sen } \chi$,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[d\chi^2 + \text{sen}^2\chi (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] \quad (3-26)$$

e a equação (3-14) toma a forma

$$\frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} \left(a^3 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{1}{a^2 \text{sen}^3\chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\text{sen}^2\chi \frac{\partial \phi}{\partial \chi} \right) - \frac{1}{a^2 \text{sen}^2\chi \text{sen}^2\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen}\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{a^2 \text{sen}^2\chi \text{sen}^2\theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} + m^2 \phi = 0 \quad (3-27)$$

Façamos $m=0$ por simplicidade. As soluções de (3-27) podem ser procuradas por separação de variáveis:

$$\phi(\vec{x}, t) \sim F(t) \pi(\chi) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \quad (3-28)$$

onde as funções $Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos usuais. Segue-se então que as funções $F(t)$ e $\pi(\chi)$ satisfazem as equações diferenciais

$$\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} \left(a^3 \frac{dF}{dt} \right) + \lambda^2 F = 0 \quad (3-29)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{d}{d\chi} \left(\sin^2 \chi \frac{d\pi}{d\chi} \right) + \left[\lambda^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{\sin^2 \chi} \right] \pi = 0 \quad (3-30)$$

onde λ^2 é uma constante de separação.

Em geral, a equação (3-29) não admite solução sob forma fechada.

Escrevamos a equação (3-29) sob a forma

$$a^2 \frac{d^2 F}{dt^2} + 3a \dot{a} \frac{dF}{dt} + \lambda^2 F = 0 \quad (3-31)$$

e façamos sucessivamente as seguintes mudanças nas variáveis independentes e dependentes:

$$\begin{aligned} dt &= a d\eta \\ F &= a f \end{aligned} \quad (3-32)$$

A equação (3-31) toma a forma

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \left(\lambda^2 + \frac{a''}{a} \right) f = 0 \quad (3-33)$$

onde as "linhas" significam derivação com relação a η . Soluções aproximadas desta equação podem ser obtidas pela extensão

do método WKB (ver apêndice B-I) desde que a''/a seja lentamente variável com η . No caso em que $\lambda^2 \gg |\frac{a''}{a}|$ a equação (3-33) tem uma solução aproximada sob a forma

$$f(\eta) = A \cos \lambda \eta + B \sin \lambda \eta \quad (3-34)$$

e a função $F(t)$ é portanto

$$F_\lambda(t) = \frac{A}{a(t)} \cos \left(\lambda \int^t \frac{dt'}{a(t')} \right) + \frac{B}{a(t)} \sin \left(\lambda \int^t \frac{dt'}{a(t')} \right) \quad (3-35)$$

Note-se na equação acima que a amplitude e a frequência variam com $\bar{a}^{-1}(t)$.

Consideremos agora a equação (3-30)

$$\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{d}{d\chi} \left(\sin^2 \chi \frac{d\pi}{d\chi} \right) + \left[\lambda^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{\sin^2 \chi} \right] \pi = 0$$

$(0 \leq \chi \leq \pi)$

É possível construir dois tipos de solução para esta equação (ver Apêndice C): uma solução polinomial bem comportada para todos os valores de χ , e uma outra singular na origem. A solução polinomial é obtida fazendo-se

$$\lambda^2 = (\ell+n)(\ell+n+2) \equiv L(L+2) \quad (3-36)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Neste caso as soluções são

$$\pi_{\ell n}(\chi) = \sin \chi G_n^{\ell+1}(\cos \chi) \quad (3-37)$$

onde $G_n^{\ell+1}(\cos \chi)$ é um polinômio de Gegenbauer.

Segue-se que a parte angular da equação (3-27) tem como soluções

$$Q_{n\ell}^m(\chi, \theta, \phi) = Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \Pi_{\ell n}(\chi) \quad (3-38)$$

Estas funções podem ser normalizadas de modo que

$$\int Q_{n\ell}^{m'}(\zeta) Q_{n\ell}^m(\zeta) \sqrt{h} d^3\zeta = \delta_{\ell\ell'} \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (3-39)$$

onde $h = \det \left(\frac{1}{a^2} g_{ij} \right) = \det (h_{ij})$, e neste caso as funções $Q_{n\ell}^m(\chi, \theta, \phi)$ são chamadas de harmônicos esféricos quadri-dimensionais (ver Apêndice C). A solução mais geral de (3-27) é portanto da forma

$$\phi(\vec{x}, t) = \sum_{n, \ell, m} A_{n\ell m} F_{\ell n}(t) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \Pi_{\ell n}(\chi) \quad (3-40)$$

onde $A_{n\ell m}$ são constantes.

Consideremos agora $m \neq 0$. A equação (3-29) fica modificada tomando a forma

$$\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} \left(a^3 \frac{dF}{dt} \right) + \frac{L(L+2)}{a^2} F + m^2 F = 0 \quad (3-41)$$

ou

$$\frac{d^2 F}{dt^2} + 3H \frac{dF}{dt} + \left(\frac{L(L+2)}{a^2} + m^2 \right) F = 0 \quad (3-42)$$

onde

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (3-43)$$

é a "constante de Hubble". A transformação

$$F(t) = \bar{a}^{3/2} y(t)$$

conduz a

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left[m^2 + \frac{L(L+2)}{a^2} - \frac{3}{4} H^2 - \frac{3}{2} \frac{\ddot{a}}{a} \right] y = 0 \quad (3-44)$$

Soluções aproximadas desta equação podem ser obtidas pelo método descrito no Apêndice C. Entraremos em detalhes sobre estas soluções quando estudarmos a versão quantizada no campo escalar.

3.3.2 - MODELO DE KASNER

De acordo com (2-15) temos

$$ds^2 = dt^2 - t^{2p_1} dx^2 - t^{2p_2} dy^2 - t^{2p_3} dz^2$$

com os números p_1 , p_2 e p_3 satisfazendo às relações (2-16).

Neste caso, é possível escrever a solução da equação (3-14) sob a forma de uma expansão de Fourier

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[\alpha(k) \phi_k(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \alpha^*(k) \phi_k^*(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \quad (3-45)$$

onde $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ e $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ é o vetor de ondas constante. A parte temporal de (3-45) satisfaz a equação

$$\frac{d^2\phi_k}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d\phi_k}{dt} + \omega_k^2(t) \phi_k = 0 \quad (3-46)$$

onde

$$\omega_k^2(t) = m^2 + \frac{k_1^2}{t^2 p_1} + \frac{k_2^2}{t^2 p_2} + \frac{k_3^2}{t^2 p_3} \quad (3-47)$$

Observamos que neste caso a influência da expansão anisotrópica sobre os momenta das partículas aparece claramente em (3-47).

3.3.3 - UNIVERSO MIXMASTER

O problema do campo escalar em um universo Mixmaster com métrica (2-17) foi recentemente amplamente analisado por Hu⁽¹²⁾. Vamos sumarizar alguns dos seus resultados devido as particularidades que o modelo Mixmaster introduz. A equação (3-14) toma a forma

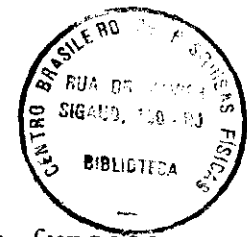
$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + 2\Gamma \frac{d\phi}{dt} - {}^{(3)}\Delta\phi + m^2\phi = 0 \quad (3-48)$$

onde

$$\Gamma \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\dot{\lambda}_i(t)}{\lambda_i(t)} \quad (3-49)$$

As soluções da equação (3-48) podem ser escritas sob a forma

$$\Phi(\vec{x}, t) = \sum_k \left[C(k) \phi_k(t) W_k(\vec{x}) + C^*(k) \phi_k^*(t) W_k^*(\vec{x}) \right] \quad (3-50)$$



onde as funções $W_k(\vec{x})$ formam um conjunto completo de funções independentes do tempo. Com a métrica parametrizada pelos ângulos de Euler (θ, ϕ, ψ) , de acordo com (2-19), as funções $W_k(\theta, \phi, \psi)$ são combinações lineares das funções de representação do grupo de rotação tri-dimensional, $e^{iM\phi} d^j_{KM}(\theta) e^{iK\psi}$ ($k \equiv (J, M, K)$, J é inteiro, $M = -J, \dots, J$ e $K = 0, 1, \dots, J$) A normalização é escolhida de modo que se tenha

$$\int d\theta d\phi d\psi \sin\theta W_k^*(\theta, \phi, \psi) W_{k'}(\theta, \phi, \psi) = \delta_{kk'}, \quad (3-51)$$

Com $\phi(\vec{x}, t)$ dado por (3-50), as funções $\phi_k(t)$ satisfazem a equação

$$\frac{d^2 \phi_k}{d\tau^2} + \sum_{k'} \mathcal{H}_{kk'} \phi_{k'} = 0 \quad (3-52)$$

onde introduzimos a variável τ definida por $dt = \ell_1 \ell_2 \ell_3 \tau = V d\tau$ e $\mathcal{H}_{kk'} = \int d^3x \sin\theta W_k^*(\vec{x}) \mathcal{H} W_{k'}(\vec{x})$ onde \mathcal{H} é o operador

$$\mathcal{H} = V^2 (-(^3)\Delta + m^2)$$

Na equação (3-52) está claro que um dado modo k se acopla com vários outros (em número finito - aqueles com os mesmos J e M e mesma paridade de K se J for inteiro). Observe-mos que o acoplamento de modos não ocorre nos casos estudados anteriormente (Friedmann e Kasner).

3.4 - O CAMPO ESCALAR COMO FONTE DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

O problema de determinar as condições necessárias e suficientes para que um campo escalar seja fonte das equações de Einstein (geometrização do campo escalar) foi considerado por vários autores⁽²⁰⁾. Até o presente não se conhece uma solução explícita para o problema quando se considera um campo escalar geral $\Phi = \Phi(\vec{x}, t)$, dependente da posição e do tempo. Se considerarmos um campo escalar de massa de repouso nula dependente apenas do tempo, $\Phi = \Phi(t)$, isto é, o campo no seu modo de vibração mais baixo, é possível obter soluções simples para as equações de Einstein consistentes com as simetrias de modelos homogêneos anisotrópicos. Para um campo escalar satisfazendo as condições acima, a Lagrangeana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \Phi_{|\alpha} \Phi_{|\beta} \quad (3-53)$$

e o tensor momentum-energia fica sob a forma

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \Phi_{|\mu} \Phi_{|\nu} - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= \Phi_{|\mu} \Phi_{|\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Phi_{|\alpha} \Phi_{|\alpha} \end{aligned} \quad (3-54)$$

A equação do campo escalar $\nabla^\mu \nabla_\mu \Phi = \Phi_{|\mu} \|^{\mu} = 0$ fica, neste caso

$$\Phi_{|0} \|^0 = 0 \quad (3-55)$$

Das equações de Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}$

obtém-se

$$R_{\mu\nu} = - \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (3-56)$$

Combinando com (3-54), obtemos

$$R_{\mu\nu} = - \Phi_{|\mu} \Phi_{|\nu} \quad (3-57)$$

Façamos agora a hipótese que a métrica gerada pelo campo $\Phi(t)$ é uma métrica anisotrópica do tipo Kasner

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dx^2 - b^2(t) dy^2 - c^2(t) dz^2 \quad (3-58)$$

com $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$ dados por

$$\begin{aligned} a(t) &= \left(\frac{t}{t_0} \right)^{P_1} \\ b(t) &= \left(\frac{t}{t_0} \right)^{P_2} \\ c(t) &= \left(\frac{t}{t_0} \right)^{P_3} \end{aligned} \quad (3-59)$$

A equação (3-55) resulta em

$$\ddot{\Phi} + \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) \dot{\Phi} = 0 \quad (3-60)$$

e as equações de Einstein (3-57) nos dão

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} &= - \dot{\Phi}^2 \\ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} &= 0 \\ \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \frac{\dot{b}}{b} &= 0 \\ \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} &= 0 \end{aligned} \quad (3-62)$$

Usando (3-59), o sistema (3-62) acima nos dá

$$\begin{aligned} p_1 (p_1 + p_2 + p_3 - 1) &= 0 \\ p_2 (p_1 + p_2 + p_3 - 1) &= 0 \\ p_3 (p_1 + p_2 + p_3 - 1) &= 0 \end{aligned} \quad (3-63)$$

e daí segue que

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \quad (3-64)$$

que é uma relação entre os expoentes análoga à relação entre os expoentes da solução de Kasner para o vazio. Com este resultado, a equação (3-60) fica

$$\ddot{\phi} + \frac{1}{t} \dot{\phi} = 0 \quad (3-65)$$

A solução desta equação é

$$\phi(t) = M \ln \left(\frac{t}{t_0} \right) \quad (3-66)$$

onde M é uma constante e t_0 é um instante inicial dado. Com este resultado e (3-64), a equação (3-61) resulta em

$$\frac{1}{t^2} \left[(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - (p_1 + p_2 + p_3) \right] = \frac{M^2}{t^2}$$

ou

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 + M^2 \quad (3-67)$$

Observe-se a semelhança entre (3-67) e a relação entre a soma dos quadrados dos números p_1 , p_2 e p_3 correspondentes à solu-

ção de Kasner do vázio a qual pode ser obtida como o caso particular dos nossos resultados quando $M=0$, que corresponde a ausência do campo escalar. Uma consequência imediata da presença da constante M no segundo membro de (3-67) é a possibilidade de termos os tres números p_1 , p_2 e p_3 todos positivos. É interessante observar que os eixos se expandem segundo funções do tempo diferentes das funções que surgem na solução de Kasner do vázio, e no entanto o volume evolui do mesmo modo nos dois casos,

$$V = a(t) b(t) c(t) = V \quad (\text{Kasner})$$

A equação de estado associada com tal universo cheio de matéria descrita por um campo escalar pode ser facilmente obtida. A pressão p e a densidade ρ podem ser calculadas pelas expressões

$$\rho = T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \quad (3-68)$$

$$p = -\frac{1}{3} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \quad (3-69)$$

com $h_{\mu\nu}$ e V_μ definidos por (2-4) e (2-5),

Usando o tensor $T_{\mu\nu}$ dado por (3-54), temos que

$$\begin{aligned} \rho &= (\Phi_{|\mu} \Phi_{|\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Phi_{|\lambda} \Phi^{|\lambda}) \delta_0^\mu \delta_0^\nu \\ &= \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 p &= -\frac{1}{3} (g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} - \delta_0^\mu \delta_0^\nu T_{\mu\nu}) - \frac{1}{3} (T - T_{00}) \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2
 \end{aligned}$$

A equação de estado é portanto

$$p = \rho \quad (3-70)$$

que é consequência do campo escalar ser função apenas do tempo.

Lifshitz e Khalatnikov⁽⁶⁾ mostraram que em regiões próximas da singularidade a matéria, descrita por um tensor momentum-energia de um fluido ideal, não é importante dando origem ao que eles chamaram de um "estágio de vazio". Este resultado no entanto só é válido para equações de estado satisfazendo à condição $p \leq \frac{2}{3} \rho$.

No nosso caso, com a equação de estado $p = \rho$, ambos os membros da equação (3-54) são da ordem de t^{-2} , e por este motivo a influência da matéria não pode ser desprezada em regiões próximas da singularidade. Concluimos que a presença da matéria descrita pelo campo escalar $\Phi(t)$ afeta de maneira decisiva a dinâmica do universo nas regiões próximas da singularidade, proibindo por exemplo a existência do "estágio de vazio".

4 - QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ESCALAR EM ESPAÇOS CURVOS HOMOGENEOS

Vamos considerar um campo escalar real quantizado $\Phi(x)$, satisfazendo a equação de Klein-Gordon covariante (3-14) em uma variedade riemanniana. A métrica do espaço será considerada dada, e não quantizada. Isto é, será considerada como um campo gravitacional clássico externo. Utilizaremos o processo de quantização canônica, como em espaços planos. Não entraremos em detalhes sobre os problemas matemáticos que surgem na definição dos operadores de campo (como distribuições). Uma discussão sobre este aspecto do problema pode ser encontrada em ⁽²⁰⁾

4.1 - QUANTIZAÇÃO CANONICA DO CAMPO ESCALAR EM ESPAÇOS CURVOS

Escrevamos a métrica do espaço sob a forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) h_{ij} dx^i dx^j \quad (4-1)$$

Como já vimos, a equação de Klein-Gordon (3-14) se escreve

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{a^2} {}^{(3)}\Delta \Phi + m^2 \Phi = 0 \quad (4-2)$$

Supondo que ${}^{(3)}\Delta$ possui um conjunto completo de autofunções com autovalores $-k^2$ a solução de (4-2) pode ser escrita sob a forma

$$\Phi(x) = \int d\mu(k) \{ A_k \Phi_k(t) \psi_k(\vec{x}) + A_k^\dagger \Phi_k^*(t) \psi_k(\vec{x}) \} \quad (4-3)$$

Nesta expressão $\mu(k)$ é um símbolo de medida a ser especificado em cada caso particular, isto é, para cada escolha de k , de tal modo que uma função arbitrária no espaço das soluções de (4-2) possa ser escrita sob a forma $F(x) = \int d\mu(k) f(k) \Phi_k(x)$, e A_k e A_k^\dagger são operadores independentes das coordenadas.

Vamos introduzir as relações de comutação em tempos iguais

$$\begin{aligned} \left[\Phi(\vec{x}, t), \Phi(\vec{x}', t) \right] &= \left[\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t) \right] = 0 \\ \left[\Phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t) \right] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned} \quad (4-4)$$

onde $\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$ é uma "função delta" usual (uma densidade escalar), \vec{x} e \vec{x}' são coordenadas espaciais em uma mesma hiper-superfície, e $\pi = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\Phi}$ é o momentum conjugado a Φ . Pode-se verificar que a equação de Heisenberg $\dot{F} = i \left[H, F \right]$ com H da do por (3-17) conduz à equação de movimento correta para o campo Φ . Além disso, um cálculo direto mostra que as relações de comutação (4-4) são consistentes com as equações de movimento, no sentido de que sendo válidas num dado instante, continuarão válidas em todos os instantes.

Como consequência das relações de comutação (4-4), os operadores A_k e A_k^\dagger satisfazem a

$$\begin{aligned} [A_k, A_{k'}] &= [A_k^\dagger, A_{k'}^\dagger] = 0 \\ [A_k, A_{k'}^\dagger] &= \delta(k, k') \end{aligned} \quad (4-5)$$

Introduzindo a mudança de variáveis

$$\tau = \int^t a^{-3} dt, \quad \frac{d}{d\tau} = a^3 \frac{d}{dt} \quad (4-6)$$

a parte dependente do tempo de (4-2) satisfaz à equação

$$\frac{d^2 \phi_k}{d\tau^2} + a^6 \omega_k^2(t) \phi_k = 0 \quad (4-7)$$

onde

$$\omega_k^2(t) = \frac{k^2}{a^2} + m^2 \quad (4-8)$$

De (4-3), (4-4) e (4-5) segue que devemos ter

$$\phi_k \phi_{k'}^* - \phi_k^* \phi_k' = i \quad (4-9)$$

onde a "linha" significa derivação com relação a τ .

A equação (4-7) com a condição (4-9) não determina univocamente as funções $\phi_k(t)$, e conseqüentemente os operadores A_k e A_k^\dagger . Diferentes escolhas das funções $\phi_k(t)$ conduzem a diferentes operadores A_k e A_k^\dagger . Neste ponto está a

dificuldade de se interpretar estes operadores como operadores de aniquilação e criação de quantas do campo livre e de se construir um espaço de Fock dos vetores estado. Em geral, se definirmos um estado de vácuo num instante t_0 por $A_k(t_0)|o\rangle_{t_0} = 0$, em instantes posteriores teremos $A_k(t)|o\rangle_{t_0} \neq 0$.

Uma situação na qual é possível interpretar sem ambiguidade os operadores A_k^\dagger e A_k como operadores de criação e aniquilação ocorre quando a métrica satisfaz a condição limite de ser plana em $t \rightarrow -\infty$. Neste caso, $\phi_k(t)$ se comporta como $e^{-i\omega_k^{(0)}t}$, $\omega_k^{(0)} = \omega_k(t \rightarrow -\infty) = \text{constante}$, e os operadores podem então ser interpretados como operadores de criação e aniquilação dos quanta do campo. Nestas condições, é possível definir um estado de vácuo por $A_k|o\rangle_{t_0} = 0$ para todo k , e construir um espaço de Fock dos vetores estado. Chamando de a o valor limite de $a(t)$, a solução da equação de Klein-Gordon pode ser escrita sob a forma

$$\Phi(\vec{x}, t) \sim \int \frac{d^3k}{\sqrt{\omega_k}} \left[A_k^{(0)} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-i\omega_k a^{-1}t} + A_k^{(0)\dagger} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{i\omega_k a^{-1}t} \right] \quad (4-10)$$

Estendendo a solução para valores arbitrários de t ,

$$\Phi(\vec{x}, t) \sim \int \frac{d^3k}{\sqrt{\omega_k}} \left[A_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \phi_k(t) + A_k^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \phi_k^*(t) \right] \quad (4-11)$$

e pondo

$$\phi_k(t) = \beta_k^*(t) e^{i\omega_k a^{-1}t} + \alpha_k^*(t) e^{-i\omega_k a^{-1}t} \quad (4-12)$$

com

$$\alpha_k(t_0) = 1 \quad , \quad \beta_k(t_0) = 0 \quad (4-13)$$

a condição (4-9) conduz a

$$|\alpha_k(t)|^2 - |\beta_k(t)|^2 = 1 \quad (4-14)$$

Esta condição assegura que as regras de comutação (4-5) são válidas para todo t .

Comparando-se as expressões (4-11) e (4-10), e usando (4-12), encontra-se

$$A_k = \alpha_k^*(t) A_k^{(0)} + \beta_k(t) A_{-k}^{(0)\dagger} \quad (4-15)$$

Com a condição (4-14), a transformação (4-15) é uma transformação de Bogoliubov⁽²²⁾ dependente do tempo. Quando $\beta_k(t)$ é diferente de zero pode-se concluir da equação (4-10) que pares de partículas nos modos k e $-k$ são criados ou destruídos durante a expansão do universo (devido a homogeneidade da métrica, o momentum total do campo escalar $P_i = \int d^2x \sqrt{-g} T_j^0$ é conservado). Basicamente, este é o processo de criação de par-

tículas. A sua origem está na forma não usual da dependência temporal dos operadores do campo, a qual por sua vez é uma consequência da presença do campo gravitacional não estático. Este processo deve ser distinguido dos processos nos quais certas partículas são transformadas em outras. No caso que estamos considerando as partículas são criadas a partir de vácuo. Este efeito é possível devido a instabilidade do vácuo, isto é, devido ao fato de que a cada instante do tempo pode ser associado um estado de vácuo e uma correspondente representação de Fock. Estas representações não são unitariamente equivalentes.

O operador de número de partículas num instante t no modo k , é definido por

$$N_k(t) \equiv A_k^\dagger(t) A_k(t) \quad (4-16)$$

usando (4-15) o número médio de partículas é dado por

$$\begin{aligned} \langle N_k(t) \rangle &= \langle_{t_0} 0 | N_k(t) | 0 \rangle_{t_0} \\ &= \langle N_k(t_0) \rangle + |\beta_k(t)|^2 (1 + 2 \langle N_k(t_0) \rangle) \end{aligned} \quad (4-17)$$

onde $\langle N_k(t_0) \rangle$ é o número médio de partículas no instante t_0 . Se $\langle N_k(t_0) \rangle = 0$ então

$$\langle N_k(t) \rangle = |\beta_k(t)|^2 \quad (4-18)$$

A função $|\beta_k(t)|^2$ pode assim ser interpretada como o número médio de partículas criadas devido à expansão do universo.

A expressão (4-18) nos mostra que a existência de partículas no instante inicial t_0 induz um acréscimo no número de partículas criadas por um fator de $1 + 2 \langle N_k(t_0) \rangle$. Conforme Parker⁽⁷⁾ mostrou, a probabilidade de se observar um número não nulo de partículas no modo k no instante t é

$$P_k = \frac{|\beta_k(t)|^2}{1 + |\beta_k(t)|^2} \quad (4-19)$$

4.2 - ESPAÇOS CONFORMALMENTE PLANOS

Suponhamos agora que o espaço com tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ é conformalmente plano. Então, de acordo com (3-18),

$$g_{\alpha\beta} = \Omega^{+2}(x) \eta_{\alpha\beta} \quad (4-20)$$

onde $\eta_{\alpha\beta}$ é o tensor da métrica de Minkowskii .

Consideremos a equação do campo escalar $\phi(x)$ no espaço com métrica $g_{\alpha\beta}$, incluindo o termo $\frac{1}{6} R$ (equação (3-20) com $n=4$),

$$\nabla_\mu \nabla_\mu \phi + \frac{1}{6} R + m^2 \phi = 0 \quad (4-21)$$

Efetuada a transformação conforme definida em (3-18), e usando os resultados da seção 2 do capítulo 3, a equação acima toma a forma

$$\eta^{\mu\nu} \bar{\Phi}_{|\mu| \nu} - \Omega^{-4} m^2 \bar{\Phi} = 0 \quad (4-22)$$

Esta equação tem a forma da equação usual para o campo escalar de acordo com a relatividade espacial, com "massa" $\Omega^{-4}(x) m$. Deste resultado podemos concluir que quando $m = 0$, não há influência no campo gravitacional sobre o campo $\bar{\Phi}$ e, portanto, não pode haver criação de partículas de massa nula devido a presença do campo gravitacional.

É possível demonstrar que a transformação conforme (3-20) preserva a quantização canônica, isto é, se Φ é seu momentum canonicamente conjugado π satisfazem às relações de comutação canônicas, então $\bar{\Phi}$ e $\bar{\pi}$ satisfazem relações análogas.

Suponhamos então que

$$\begin{aligned} \left[\bar{\Phi}(\vec{x}, t), \bar{\pi}(\vec{x}', t) \right] &= i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \\ \left[\bar{\Phi}(\vec{x}, t), \bar{\Phi}(\vec{x}', t) \right] &= \left[\bar{\pi}(\vec{x}, t), \bar{\pi}(\vec{x}', t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4-23)$$

A Lagrangeana correspondente a equação (4-22) é.

$$\bar{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\beta} \bar{\Phi}_{|\alpha} \bar{\Phi}_{|\beta} - \Omega^{-4} m^2 \bar{\Phi}^2) \quad (4-24)$$

de modo que o momentum canonicamente conjugado a $\bar{\phi}$ é

$$\bar{\pi} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\bar{\phi}}} = \bar{\phi} \Big|_0 \quad (4-25)$$

Mas, o momentum conjugado a ϕ é

$$\begin{aligned} \pi &= \sqrt{-g} g^{0\alpha} \phi_{,\alpha} \\ &= (\bar{\Omega}^4) \Omega^{+2} \eta^{0\alpha} \phi_{,\alpha} = \Omega^{-2} \phi_{,0} \\ &= (\bar{\Omega}^1) \bar{\pi} + \Omega^{-2} \Omega \Big|_0 \bar{\phi} \end{aligned}$$

Logo,

$$\left[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t) \right] = \Omega^{-1}(\vec{x}, t) \Omega(\vec{x}', t) \left[\phi(\vec{x}, t), \bar{\pi}(\vec{x}', t) \right] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$$

De modo análogo,

$$\left[\phi(\vec{x}, t), \bar{\phi}(\vec{x}', t) \right] = 0 \quad \text{e} \quad \left[\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t) \right] = 0$$

O inverso pode ser demonstrado do mesmo modo, isto é, se (ϕ, π) são canonicamente conjugados então $(\bar{\phi}, \bar{\pi})$ também serão.

Verifica-se facilmente que a equação de Heisenberg $\dot{\bar{\pi}}(\vec{x}, t) \Big|_0 = i [\bar{H}(t), \bar{\pi}(\vec{x}, t)]$ e as relações de comutação entre $\bar{\phi}$ e $\bar{\pi}$ conduzem a equação de movimento (4-22) para o campo $\bar{\phi}$. Como consequência das regras de comutação entre $\bar{\phi}$ e $\bar{\pi}$, ϕ e π também satisfazem às regras de comutação canônicas. Um cálculo direto mostra que, com a Hamiltoniana obtida pela Lagrangeana (2-17) a equação de Heisenberg conduz a equação de movimen-

to (4-21), para o campo Φ . Além disso, as regras de comutação entre Φ e π se propagam consistentemente com a equação de movimento devido a propagação das regras de comutação entre $\bar{\Phi}$ e $\bar{\pi}$ no espaço de Minkowskii.

5 - CRIAÇÃO DE PARTICULAS EM CAMPOS GRAVITACIONAIS CLÁSSICOS

Após o trabalho de Parker sobre a criação de partículas em universos em expansão, vários autores obtiveram resultados semi-quantitativos sobre a criação de partículas em diversos modelos cosmológicos. Dentre êles destacam-se os trabalhos de Zel'dovich e Starobinski⁽¹⁰⁾ (modelo de Kasner), Gibb e Mamaev⁽¹¹⁾ (modelo de Friedmann, quasi - Euclideano) e Hu⁽¹²⁾ (modelo Mixmaster). Parte dos resultados apresentados nestes trabalhos serão reproduzidos devido a sua importancia para os nossos desenvolvimentos posteriores.

Serão feitos também alguns comentários sobre a divergência do tensor momentum-energia do campo escalar, que é atualmente um problema de interesse central na teoria do campo escalar em variedades riemanianas, e sobre a influencia da presença do campo escalar na singularidade dos modelos cosmológicos.

5.1 - MODELO DE FRIEDMANN QUASI - EUCLIDEANO

A métrica neste caso é a (4-1) com $h_{ij} = \delta_j^i$

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = a^2(\eta) \left[d\eta^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \right] \quad (5-1)$$

onde fizemos $d\eta = a^{-1} dt$. Usando a Lagrangeana (3-22) com $n = 4$,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \left\{ g^{\alpha\beta} \phi_{|\alpha} \phi_{|\beta} - (m^2 + \frac{1}{6} R) \phi^2 \right\} \quad (5-2)$$

a equação de Klein-Gordon toma a forma

$$\frac{1}{a^4} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{a^2} \Delta^{(3)} \Phi + \left(m^2 - \frac{\ddot{a}}{a} \right) \Phi = 0 \quad (5-3)$$

Fazendo $\Phi = a^{-1} \tilde{\Phi}$ obtem-se

$$\tilde{\Phi}'' - \Delta^{(3)} \tilde{\Phi} + m^2 a^2(\eta) \tilde{\Phi} = 0 \quad (5-4)$$

onde a "linha" significa derivação com relação a η .

As soluções de (5-4) podem ser representadas na forma

$$\tilde{\Phi}(\eta, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int U(\vec{k}, \eta) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3k + c.c. \quad (5-5)$$

Para $U(\vec{k}, \eta)$ resulta a equação

$$U'' + (m^2 a^2(\eta) + k^2)U = 0 \quad (5-6)$$

a qual com as condições iniciais

$$U_{\pm}(0) = \omega_0^{\pm \frac{1}{2}} \quad U'_{\pm}(0) = \pm i\omega_0^{\pm \frac{1}{2}} \quad (5-7)$$

$$\omega_0^2 = k^2 + m^2 a^2(0)$$

tem uma solução obtida por interações da equação de Volterra,

$$U^{\pm}(\eta, \vec{k}) = \frac{e^{\pm i\omega_0 \eta}}{\sqrt{\omega_0}} + \frac{m^2}{\omega_0} \int_0^{\eta} d\eta' (a(\eta) - a(\eta')) \text{sen } \omega_0(\eta - \eta') U^{\pm}(\eta', \vec{k}) \quad (5-8)$$

($\eta = 0$ deve ser interpretado como um certo instante a partir do qual o tempo começou a ser medido).

Introduzindo as relações de comutação canônicas e os operadores de criação e aniquilação, Gribb e Mamaev diagonalizaram a Hamiltoniana introduzindo novos operadores por uma transformação de Bogoliubov (ver cap. VI). Para a densidade de partículas criadas eles obtiveram

$$n(\eta) \sim \frac{1}{a^2(\eta)} \int d^3 k \frac{|\lambda(\eta, \vec{k})|^2}{1 - |\lambda(\eta, \vec{k})|^2} \quad (5-9)$$

onde $\lambda(\eta, \vec{k})$ é o parâmetro da transformação de Bogoliubov (ver cap. VI). No caso em que a equação de estado é $p = \frac{1}{3} \rho$ tem-se $a(\eta) \sim \eta^2$ e $n(\eta)$ pode ser estimado como

$$n(\eta) \sim \frac{3 m^2}{64 \pi a^2(\eta)} \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^2 \quad (5-10)$$

Notemos que $p = \frac{1}{3} \rho$ corresponde a um estágio na qual a radiação eletromagnética é dominante. Esta radiação, no entanto, não pode ter sido criada a partir do vácuo porque um universo com a métrica (5-1) não é capaz de criar fótons, se a equação de movimento para os fótons for invariante por transformações conformes. De modo geral não há criação de partículas de massa zero com spin qualquer em espaços conformalmente planos se a equação de movimento for conformalmente invariante.

Para o caso particular da métrica (5-1) vamos mostrar que não há criação de fótons usando o artifício de transformar as equações da eletrodinâmica num espaço curvo nas equações da eletrodinâmica em meios materiais, num espaço plano.

5.1.1 - CRIAÇÃO DE FOTONS NO MODELO DE FRIEDMANN QUASI-EUCLIDEANO

Na ausência de cargas e correntes as equações de Maxwell, em forma covariante, em um espaço com tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ se escrevem

$$F_{\alpha\beta||\gamma} + F_{\beta\gamma||\alpha} + F_{\gamma\alpha||\beta} = 0 \quad (5-11)$$

$$\left[\sqrt{-g} F^{\lambda\sigma} \right]_{||\sigma} = 0$$

ou, como se sabe,

$$F_{\alpha\beta|\gamma} + F_{\beta\gamma|\alpha} + F_{\gamma\alpha|\beta} = 0 \quad (5-12)$$

$$\left[\sqrt{-g} F^{\lambda\sigma} \right]_{|\sigma} = 0$$

Tamm⁽²³⁾ mostrou que é possível se escrever estas equações de tal modo que elas se apresentam formalmente equivalentes às equações da eletrodinâmica clássica em um meio material, no espaço-tempo plano. Esta interpretação consiste no seguinte: usando um sistema de coordenadas cartesianas e introduzindo $E_{\alpha} = F_{\alpha 0}$, $B_{\alpha} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma}$, $D_{\alpha} = \sqrt{-g} F^{0\alpha}$, $H_{\alpha} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} F^{\beta\gamma}$ as equações (5-12) podem ser escritas sob a forma

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= - \frac{\partial B}{\partial t} & \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial D}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \nabla \cdot \vec{D} &= 0 \end{aligned} \quad (V-13)$$

onde $t \equiv x^0$ e

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j - (\vec{G} \times \vec{H})_i \quad (5-14)$$

$$B_i = \mu_{ij} H_j + (\vec{G} \times \vec{H})_i$$

$$\epsilon_{ij} = \mu_{ij} = -\sqrt{-g} \frac{g^{ij}}{g_{00}} \quad (5-15)$$

e \vec{G} é um vetor cujas componentes são dadas por

$$G_k = -\frac{g_{0k}}{g_{00}} \quad (5-16)$$

Destas equações verifica-se que as características da geometria do espaço aparecem apenas sob a forma de equações constitutivas, (5-14) e (5-15).

Neste formalismo, as componentes do tensor momentum-energia do campo eletromagnético

$$T_{\mu}^{(EM)\nu} = \frac{1}{4\pi} (F_{\mu\alpha} F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\sigma} \delta_{\mu}^{\nu}) \quad (5-17)$$

são dadas por

$$T_0^{(EM)0} = \frac{1}{8\pi\sqrt{-g}} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \quad (5-18)$$

$$T_0^{(EM)i} = \frac{1}{4\pi\sqrt{-g}} (\vec{E} \times \vec{H})_i \quad (5-19)$$

$$T_i^{(EM)0} = \frac{1}{4\pi\sqrt{-g}} (\vec{D} \times \vec{H})_i \quad (5-20)$$

$$T_i^{(EM)j} = \frac{-1}{4\pi\sqrt{-g}} (E_i D_j + H_i B_j - \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \delta_i^j) \quad (5-21)$$

Usando-se (5-14) e (5-15), a densidade de energia do campo eletromagnético fica dada por

$$\sqrt{-g} T_0^0 = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{ij} (E_i E_j + H_i H_j) + \vec{G} \cdot \vec{S} \quad (5-22)$$

com

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} \quad (5-23)$$

Com a métrica dada por (5-1), temos que

$$\vec{G} = 0 \quad (5-24)$$

$$\epsilon_{ij} = \mu_{ij} = -\sqrt{a^6} \frac{-a^{-2}}{a^2} = 1$$

e as equações constitutivas (5-14) nos dão

$$D_i = E_i, \quad B_i = H_i \quad (5-25)$$

de modo que as equações do campo, (5-13), ficam

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial \eta} & \nabla \times \vec{B} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial \eta} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (5-26)$$

Logo, é possível introduzir um potencial vetor \vec{A} , como é usual, o qual pode ser representado pela expressão de Fourier

$$\vec{A}(\vec{x}, \eta) = \sum_{\vec{k} \lambda=1,2} \vec{e}_k^{(\lambda)} \left(a_{k\lambda} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k \eta)} + a_{k\lambda}^* e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k \eta)} \right) \quad (5-27)$$

onde ω_k é a frequência do modo k do campo, independente do tempo, e $\vec{e}_k^{(\lambda)}$ é o vetor de polarização.

O processo de quantização canônico pode ser introduzido, da maneira usual, com os operadores $a_{k\lambda}$ e $a_{k\lambda}^\dagger$ satisfazendo

$$\left[a_{k\lambda}, a_{k'\lambda'} \right] = \left[a_{k\lambda}^\dagger, a_{k'\lambda'}^\dagger \right] = 0 \quad (5-28)$$

$$\left[a_{k\lambda}, a_{k'\lambda'}^\dagger \right] = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}$$

A energia total do campo fica dada por

$$W = \int \sqrt{-g} T_0^0 d^3x = \sum_{k,\lambda} \omega_k \left(a_{k\lambda}^\dagger a_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (5-29)$$

$$\equiv \sum_{k,\lambda} \omega_k \left(N_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (5-30)$$

onde introduzimos o operador $N_{k\lambda} = a_{k\lambda}^\dagger a_{k\lambda}$

Os operadores $a_{k\lambda}^\dagger$ e $a_{k\lambda}$ podem ser interpretados como operadores de criação e aniquilação de fons. Note-se que em termos das coordenadas (t, \vec{x}) , a dependencia temporal de (5-27) é da forma $\exp \{ \pm i\omega_k \int^t a^\pm(t') dt' \}$.

É claro que o operador de número de fons $N_{k\lambda}$ é independente do tempo, o que significa que o número de fons é uma constante do movimento. Portanto, não há criação de fons no universo com a métrica (5-1).

5.2 - MODELO DE KASNER

Com a métrica dada por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dx^2 - b^2(t) dy^2 - c^2(t) dz^2 \quad (5-31)$$

e representando o campo escalar pela expansão de Fourier

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[A_k \phi_k(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + A_k^\dagger \phi_k^*(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \quad (5-32)$$

onde $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ e $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$, segue que $\phi_k(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\ddot{\phi}_k + \frac{\dot{V}}{V} \dot{\phi}_k + (\omega_k^2(t) + \frac{1}{6} R) \phi_k = 0 \quad (5-33)$$

onde

$$\omega_k^2(t) = m^2 + \frac{k_1^2}{a^2} + \frac{k_2^2}{b^2} + \frac{k_3^2}{c^2} \quad (5-34)$$

e, como consequência das regras de comutação

$$\phi_k \dot{\phi}_k^* - \dot{\phi}_k \phi_k^* = \frac{i}{V} \quad (5-35)$$

onde $V = abc$.

Introduzindo a mudança de variáveis

$$dt = V^{1/3} d\eta, \quad \phi_k = \frac{\chi_k(\eta)}{V^{1/3}(\eta)}$$

a equação (5-33) se reduz a

$$\chi_k'' + [\Omega_k^2(\eta) + Q(\eta)] \chi_k = 0 \quad (5-36)$$

onde a "linha" significa derivada com relação a η , e

$$\Omega_k^2(\eta) = v^{2/3} \Omega_k^2(\eta)$$

$$Q(\eta) = \frac{1}{18} \left[\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right)^2 + \left(\frac{a'}{a} - \frac{c'}{c} \right)^2 + \left(\frac{b'}{b} - \frac{c'}{c} \right)^2 \right]$$
(5-37)

Zel'dovich e Starobinski⁽¹⁰⁾ procuraram soluções de (5-36) usando o seguinte procedimento: escrevendo $\chi_k(\eta)$ sob a forma

$$\chi_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_k}} (\alpha_k(\eta) e_- + \beta_k(\eta) e_+) \quad (5-38)$$

onde

$$e_{\pm} = e^{\pm i \int^{\eta} \Omega_k d\eta'} \quad (5-39)$$

e, impondo a condição

$$\chi_k'(\eta) = -i \frac{\Omega_k}{\sqrt{2\Omega_k}} (\alpha_k(\eta) e_- - \beta_k(\eta) e_+) \quad (5-40)$$

tem-se que, devido a (5-35),

$$|\alpha_k(\eta)|^2 - |\beta_k(\eta)|^2 \equiv 1 \quad (5-41)$$

De (5-36) obtem-se para $\alpha_k(\eta)$ e $\beta_k(\eta)$ o sistema de equações

$$\alpha_k' = \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_k'}{\Omega_k} - i \frac{Q}{\Omega_k} \right) e_+^2 \beta_k - i \frac{Q}{2\Omega_k} \alpha_k$$

$$\beta_k' = \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_k'}{\Omega_k} + i \frac{Q}{\Omega_k} \right) e_-^2 \alpha_k + i \frac{Q}{2\Omega_k} \beta_k$$
(5-42)

onde as condições iniciais são $\alpha_k = 1$ e $\beta_k = 0$ para $\eta \rightarrow -\infty$.

Introduzindo as variáveis

$$\begin{aligned} s_k &= |\beta_k|^2 \\ \mu_k &= \alpha_k \beta_k^* e_-^2 + \alpha_k^* \beta_k e_+^2 \\ \tau_k &= i(\alpha_k \beta_k^* e_-^2 - \alpha_k^* \beta_k e_+^2) \end{aligned} \quad (5-43)$$

segue que,

$$\begin{aligned} \frac{ds_k}{d\eta} &= \frac{1}{2} \frac{\Omega_k}{\Omega_k} \mu_k + \frac{1}{2} \frac{Q}{\Omega_k} \tau_k \\ \frac{d\mu_k}{d\eta} &= -\frac{\Omega_k}{\Omega_k} (1+2s_k) - \left(\frac{Q}{\Omega_k} + 2\Omega_k\right) \tau_k \\ \frac{d\tau_k}{d\eta} &= \frac{Q}{\Omega_k} (1+2s_k) + \left(\frac{Q}{\Omega_k} + 2\Omega_k\right) \mu_k \end{aligned} \quad (5-44)$$

As condições iniciais são agora $s_k = \mu_k = \tau_k = 0$ para $\eta \rightarrow -\infty$.

Quando $\Omega_k \rightarrow \infty$, a solução assintótica deste sistema é

$$s_k \sim \Omega_k^{-2}, \quad \mu_k \sim \Omega_k^{-2}, \quad \tau_k \sim \Omega_k^{-1} \quad (5-45)$$

na região quasi-clássica $|\Omega_k| \ll \Omega_k^2$. Como vimos, no capítulo anterior $s_k = |\beta_k|^2$ pode ser interpretado como o número de partículas criadas no modo k , devido à expansão do universo.

Temos portanto,

$$|\beta_k|^2 \sim \Omega_k^{-2} \quad (5-46)$$

$$\Omega_k \rightarrow \infty, \quad |\Omega'_k| \ll \Omega_k^2$$

5.3 - MODELO MIXMASTER

A métrica neste caso é a (2-17):

$$ds^2 = dt^2 - \sum_{i=1}^3 \ell_i^2(t) (\sigma^i)^2$$

Com as funções $W_k(\vec{x})$ satisfazendo (3-51) o campo escalar pode ser representado por

$$\Phi(x) = \sum_k \left[A_k \phi_k(t) W_k(\vec{x}) + A_k^\dagger \phi_k^*(t) W_k^*(\vec{x}) \right] \quad (5-47)$$

A mudança de variáveis $dt = V^{1/3} d\eta$, $\phi_k = \frac{\chi_k}{V^{1/3}}$ onde $V = \ell_1 \ell_2 \ell_3$ conduz à equação

$$\frac{d^2 \chi_k}{d\eta^2} + \sum_{k'} \left[(\Omega^2)_{kk'} + Q \delta_{kk'} \right] \chi_{k'} = 0 \quad (5-48)$$

onde

$$\Omega^2 = V^{2/3} (-{}^{(3)}\Delta + m^2) \quad (5-49)$$

$$Q(\eta) = \frac{1}{6} V^{2/3} R - V^{-1/3} \frac{d^2}{d\eta^2} V^{1/3} \quad (5-50)$$

e

$$(\Omega^2)_{kk'} + Q\delta_{kk'} = \int d^3x \sin \theta W_k^*(\vec{x}) (\Omega^2 + Q) W_{k'}(\vec{x}) \quad (5-51)$$

Conforme observamos no capítulo IV, durante a

sua evolução o universo mixmaster induz um acoplamento de modos do campo escalar (5-48). Como consequência, partículas criadas num dado modo aparecerão acopladas a outros modos durante a evolução do sistema. Isto é, se num dado instante inicial t_i vemos uma onda com frequência puramente positiva num dado modo k , em instantes posteriores encontraremos frequências positivas e negativas de outros modos e a componente negativa do modo k .

A transformação de Bogoliubov dos operadores A_k e A_k^\dagger neste caso tem uma forma mais geral:

$$A_k(t) = \sum_{k'} \left[\alpha_{kk'}(t) A_{k'}(t_0) + \beta_{kk'}(t) A_{k'}^\dagger(t_0) \right] \quad (5-52)$$

A condição de preservação das regras de comutação entre os operadores A_k e A_k^\dagger conduz as relações

$$\sum_j (\alpha_{kj} \alpha_{k',j}^* - \beta_{kj} \beta_{k',j}^*) = \delta_{kk'} \quad (5-53)$$

$$\sum_j (\alpha_{kj} \beta_{k',j} - \beta_{kj} \alpha_{k',j}) = 0$$

onde matrizes $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ não são diagonais, o que justifica a afirmação feita no parágrafo anterior.

A mistura de modos possibilita a troca de energia entre partículas em diferentes estados do sistema. De acordo com Hu, este mecanismo favorece a extração da "energia de anisotropia" do universo mixmaster, funcionando eventualmente como um mecanismo de isotropização do universo.

5.4 - O TENSOR MOMENTUM-ENERGIA

No capítulo 3 vimos que o tensor momentum-energia associado a um campo escalar real conformalmente acoplado ao campo gravitacional tem a forma

$$T_{\alpha\beta} = \phi_{|\alpha} \phi_{|\beta} - g_{\alpha\beta} \mathcal{L} + \frac{1}{6} (R_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} \square + \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta}) \phi^2$$

onde \mathcal{L} é densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \phi_{|\mu} \phi_{|\nu} - m^2 \phi^2 - \frac{1}{6} R\phi^2)$$

Entende-se por uma teoria semi-clássica da gravitação uma teoria baseada nas equações de Einstein nas quais os termos de fonte são os valores médios $\langle T_{\mu}^{\nu}(x) \rangle$ do operador tensorial $T_{\mu}^{\nu}(x)$ de uma teoria quântica de campos que descreve o conteúdo de matéria do universo. Isto é,

$$R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu} R = - \langle T_{\mu}^{\nu} \rangle \quad (5-54)$$

Além da questão do significado de uma teoria quântica de toda matéria do universo, tal teoria semi-clássica apresenta sérias dificuldades conceituais como, por exemplo, a validade do acoplamento de quantidades clássicas com quânticas na equação (5-54). Mesmo admitindo que há sentido falar num estado quântico da matéria em um modelo cosmológico, uma outra dificuldade nesta teoria está na definição dos valores médios de $T_{\mu}^{\nu}(x)$ que quando as equações de movimento para os campos

podem ser resolvidas por separação de variáveis, são formalmente expressas em termos de integrais divergentes.

Para um universo do tipo de Kasner, por exemplo, tem-se que

$$T_{\mu}^{\nu}(x) = g^{\nu\rho} \Phi_{|\mu} \Phi_{|\rho} - \frac{1}{2} \left[\delta_{\mu}^{\nu} g^{\rho\sigma} \Phi_{|\rho} \Phi_{|\sigma} - \delta_{\mu}^{\nu} (m^2 + \frac{1}{6} R) \Phi^2 \right] + \frac{1}{6} (R_{\mu}^{\nu} - \delta_{\mu}^{\nu} \square^{\mu\rho} \nabla_{\mu} \nabla_{\rho}) \Phi^2 \quad (5-55)$$

onde $\square^{\alpha\beta} \equiv g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta}$. A componente T_0^0 fica dada então por

$$T_0^0 = \frac{1}{2} \left[(\Phi_{|0})^2 + \frac{1}{a^2} (\Phi_{|1})^2 + \frac{1}{b^2} (\Phi_{|2})^2 + \frac{1}{c^2} (\Phi_{|3})^2 \right] + \frac{1}{2} (m^2 + \frac{1}{6} R) \Phi^2 - \frac{1}{6} R_0^0 \Phi^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{a^2} \Phi^2_{\parallel 1} + \frac{1}{b^2} \Phi^2_{\parallel 2} + \frac{1}{c^2} \Phi^2_{\parallel 3} \right) \quad (5-56)$$

Usando a expansão de Fourier (5-32) e as regras de comutação (5-5) para os operadores A_k e A_k^{\dagger} o valor médio de T_0^0 pode ser calculado introduzindo-se o estado de vácuo que é aniquilado por A_k . Um cálculo direto conduz a

$$\begin{aligned} \langle 0 | (\Phi_0)^2 | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k |\dot{\Phi}_k|^2 \\ \langle 0 | (\Phi_{|i})^2 | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k k_i^2 |\Phi_k|^2 \quad (i=1,2,3) \\ \langle 0 | \Phi^2 | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k |\Phi_k|^2 \\ \langle 0 | \Phi^2_{\parallel 1} | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \left\{ -a\dot{a} \frac{d}{dt} \int d^3k |\Phi_k|^2 \right\} \\ \langle 0 | \Phi^2_{\parallel 2} | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \left\{ -b\dot{b} \frac{d}{dt} \int d^3k |\Phi_k|^2 \right\} \\ \langle 0 | \Phi^2_{\parallel 3} | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \left\{ -c\dot{c} \frac{d}{dt} \int d^3k |\Phi_k|^2 \right\} \end{aligned}$$

de modo que

$$\langle 0 | T_0^0 | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left\{ \frac{1}{2} (|\dot{\phi}_k|^2 + \omega_k^2 |\phi_k|^2) - \frac{1}{6} (R_0^0 - \frac{1}{2} R) |\phi_k|^2 - \frac{1}{6} \frac{\dot{V}}{V} \frac{d}{dt} |\phi_k|^2 \right\} \quad (5-57)$$

Um outro cálculo conduz a

$$\begin{aligned} \langle 0 | T_1^1 | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left\{ \frac{k_1^2}{a^2} |\phi_k|^2 + \frac{1}{2} (|\dot{\phi}_k|^2 - \omega_k^2 |\phi_k|^2) \right. \\ &+ \frac{1}{6} (R_1^1 - \frac{1}{2} R) |\phi_k|^2 + \frac{1}{6} \frac{1}{V} \frac{d}{dt} (V \frac{d}{dt} |\phi_k|^2) \\ &\left. + \frac{1}{6} \frac{\dot{a}}{a} \frac{d}{dt} |\phi_k|^2 \right\} \quad (5-58) \end{aligned}$$

e a expressões análogas para $\langle 0 | T_2^2 | 0 \rangle$ e $\langle 0 | T_3^3 | 0 \rangle$.

Para construir uma teoria razoável com base neste formalismo, Zel'dovich e Starobinskii⁽¹⁰⁾ propuzeram um processo de regularização, no caso do modelo de Kasner, que consiste em subtrair uma determinada quantidade de cada modo de $\langle T_\mu^\nu \rangle$, de tal maneira que a expressão resultante seja convergente. Parker e Fulling⁽²⁵⁾ propuzeram o processo de "regularização adiabática" (adiabaticidade na dependencia temporal da métrica) o qual apesar de conceitualmente diferente conduz aos mesmos resultados que o processo de Zel'dovich e Starobinskii. O método de Parker e Fulling não é aplicável a modelos anisotrópicos, e ambos são válidos apenas quando as partículas tem massa não nula.

Uma outra possibilidade de se abordar o problema é a construção de um método de renormalização. Utiyama e DeWitt⁽²⁶⁾ trataram do problema no caso de um campo quantizado geral em um espaço-tempo assintoticamente plano. Apesar de sua generalidade e covariância, tal estudo não tem grande interesse cosmológico devido as condições de contorno, as quais se fazem necessárias em virtudes do uso de conceitos como matriz S e funções de Green no espaço de momenta. Até o presente, não se conhece nada de conclusivo sobre o assunto.

5.5 - CRIAÇÃO DE PARTÍCULAS, ISOTROPIZAÇÃO E COLAPSO GRAVITACIONAL

Baseando-se em uma análise feita para o modelo de Friedmann euclideano Parker⁽⁷⁾ introduziu a hipótese de que: "se num universo em expansão um tipo de partícula é dominante, depois de um longo intervalo de tempo a expansão será de tal modo a minimizar a taxa média de criação daquelas partículas". Segundo Parker, como uma consequência natural "a reação das partículas criadas modificará a expansão de tal maneira a reduzir a taxa de criação".

Zel'dovich⁽¹⁰⁾ afirma que é muito provável que a reação das partículas criadas sobre a métrica conduza a isotropização de um estágio de contração do universo e que, é impro-

vável que tal reação conduza a uma transição de uma contração para uma expansão.

Zel'dovich sugere também a possibilidade da reação conduzir a transição entre um estágio de expansão anisotrópica do tipo de Kasner à uma expansão isotrópica em tempos da ordem de $t_p = \sqrt{Gh/c^5} \sim 10^{-13}$ seg (G é a constante gravitacional, h é a constante de Plank e c é a velocidade da luz).

No estudo da criação de partículas no universo Mixmaster, Hu também é levado à hipótese de que o processo de criação de partículas atua como um possível mecanismo de isotropização do universo reforçado pela conclusão de que além da criação de partículas o universo mixmaster induz acoplamento e mistura de modos de vibração.

Tais hipóteses no entanto se encontram em nível de especulação e são reflexos das tentativas de se encontrar um mecanismo de isotropização do universo. Tal mecanismo deve ser coerente com a hipótese do universo haver passado por uma fase inicial altamente anisotrópica (universo caótico de Misner) e com os dados experimentais existentes atualmente, que nos mostram um universo essencialmente isotrópico. A idéia é supor que a anisotropia foi a causa da criação da matéria existente no universo e que esta anisotropia foi amortecida devido à evolução do processo de criação, com uma consequente redução da taxa de criação de partículas.

No que se refere à influência do processo de criação de partículas sobre a singularidade cosmológica, muito pouco tem sido feito. Cumpre salientar o trabalho de Parker e Fulling⁽²⁷⁾. Considerando um campo gravitacional clássico (modelo de Friedmann fechado), minimalmente acoplado a um campo escalar neutro quantizado, e não levando em conta as divergências do valor médio do tensor momentum-energia, eles calcularam explicitamente a reação das partículas criadas sobre a métrica mostrando que existem estados para os quais efeitos quânticos de coerência dão origem a termos de pressão negativa em $\langle T_{\mu}^{\nu}(x) \rangle$. Tais termos podem ser significativamente grandes de modo a violar as condições de energia dos teoremas de singularidade. Mostraram ainda que se o estado quântico é um auto-estado do operador de número de partículas, e, se um número finito de modos é dominante, o efeito do processo de criação de partículas é apenas de aumentar a energia e portanto acelerar o colapso. Por outro lado, se o estado for uma superposição coerente de auto-estados do operador de número de partículas, a contribuição das partículas criadas pode causar a diminuição da energia e portanto amortecer a contração.

6 - CRIAÇÃO DE PARTICULAS ESCALARES POR CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS E GRAVITACIONAIS CLÁSSICOS: FORMALISMO UNIFICADO

Vamos considerar um campo escalar carregado $\Phi(x)$ interagindo minimalmente com um campo eletromagnético e conformalmente com um campo gravitacional externos. As fontes dos campos gravitacional e eletromagnético serão supostas especificadas independentemente do campo escalar, e nos limitaremos a uma situação semi-clássica na qual apenas o campo Φ é quantizado.

6.1 - INTERAÇÃO ELETROMAGNÉTICA DE PARTÍCULAS ESCALARES

6.1.1 - ESPAÇOS PLANOS

A Lagrangeana para o sistema pode ser escrita sob a forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\Phi + \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_I \quad (6-1)$$

onde \mathcal{L}_Φ , \mathcal{L}_{EM} e \mathcal{L}_I são, respectivamente, as Lagrangeanas dos campos escalar, eletromagnético e de interação, dadas por

$$\mathcal{L}_\Phi = \Phi^\dagger_{|\mu} \Phi^{|\mu} + m^2 \Phi^\dagger \Phi \quad (6-2)$$

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{2} W_\mu{}_{|\nu} W^{\mu\nu} \quad (6-3)$$

$$\mathcal{L}_I = ie(\Phi^\dagger_{|\mu} \Phi - \Phi^\dagger \Phi_{|\mu}) W^\mu + e^2 W_\mu W^\mu \Phi^\dagger \Phi \quad (6-4)$$

$$= -j_\mu(x) W^\mu(x) \quad (6-5)$$

onde definimos a corrente $j_\mu(x)$ por

$$j_\mu(x) = ie \left[(\phi^\dagger|_\mu + ie\phi^\dagger W_\mu)\phi - \phi^\dagger (\phi|_\mu - ie W_\mu\phi) \right] \quad (6-6)$$

A Hamiltoniana do campo escalar se escreve

$$H(x) = \int d^3x \{ \pi^\dagger(x) \pi(x) + \nabla\phi^\dagger \cdot \nabla\phi + m^2 \phi^\dagger \phi + ie(\phi^\dagger|_\mu \phi - \phi^\dagger \phi|_\mu)W^\mu - e^2 W_\mu W^\mu \phi^\dagger \phi \} \quad (6-8)$$

onde $\pi = \partial\mathcal{L} / \partial\phi|_0 = \dot{\phi}|_0$ e $\pi^\dagger = \partial\mathcal{L} / \partial\phi^\dagger|_0 = \dot{\phi}^\dagger|_0$ são os momentos conjugados aos campos ϕ e ϕ^\dagger respectivamente.

Considerando-se um campo eletromagnético arbitrário $W^\mu(x) = (W^0(x), W^1(x), W^2(x), W^3(x))$, a equação de movimento para o campo ϕ é

$$\square\phi - 2ie W^\mu\phi|_\mu - e^2 W^\mu W_\mu\phi + m^2\phi = 0 \quad (6-8)$$

A partir da equação (6-8) acima é possível concluir que campos puramente magnéticos não criam partículas. Façamos $W^\mu = (0, \vec{W}(\vec{x}))$ e $\phi(x) \sim \sum A_k \phi_k(t) \psi_k(\vec{x}) + H.C.$. Segue que $\phi_k(t) \sim e^{\pm i\omega_k t}$, $\omega_k = \text{constante}$, e que a função $\psi_k(x)$ satisfaz a equação diferencial

$$(-\nabla^2 - 2ie W^i(\vec{x}) \partial_i - e^2 \vec{W}(\vec{x}) \cdot \vec{W}(\vec{x}) + m^2)\psi_k = \omega_k^2 \psi_k \quad (6-9)$$

Portanto, o campo $\phi(x)$ admite como solução da parte temporal funções da forma $e^{\pm i\omega_k t}$. De acordo com o que vimos nos capítulos anteriores este resultado indica que o número de partículas é constante no tempo.

A presença de campos elétricos muda substancialmente este aspecto do problema. Consideremos um campo elétrico homogêneo não estacionário cujo potencial vetor é dado por $W^\mu = (0, \vec{W}(t))$. (É importante notar que esta condição quebra a invariância de gauge da teoria). A equação de movimento para o campo toma a forma

$$\square \phi + 2ie \sum_{i=1}^3 W_i(t) \phi_{|i} + e^2 \vec{W}(t) \cdot \vec{W}(t) \phi + m^2 \phi = 0 \quad (6-10)$$

Expandindo o campo escalar sob a forma $\phi(x) \sim \sum_k A_k \phi_k(t) \psi_k(\vec{x})$, onde $\psi_k(\vec{x})$ são autofunções do operador Laplaciano $\nabla^2 \psi_k(\vec{x}) - S_k^2 \psi_k(\vec{x}) = 0$, encontramos que a função $\phi_k(t)$ satisfaz a equação

$$\ddot{\phi}_k(t) + \omega_k^2 \phi_k(t) = 0 \quad (6-11)$$

onde

$$\omega_k^2(t) = m^2 + (k_1 - eW_1(t))^2 + (k_2 - eW_2(t))^2 + (k_3 - eW_3(t))^2 \quad (6-12)$$

A dependência de ω_k no tempo significa que o número de partículas não é constante no tempo. Isto é, pode ocorrer criação e/ou aniquilação das partículas descritas pelo campo ϕ .

6.1.2 - ESPAÇOS COM CURVATURA NÃO NULA

Introduzindo o campo gravitacional a Lagrangiana no campo ϕ se escreve

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= g^{\mu\nu} \Phi^\dagger_{|\mu} \Phi_{|\nu} - (m^2 + \frac{1}{6} R) \Phi^\dagger \Phi - ie g^{\mu\nu} (\Phi^\dagger_{|\mu} \Phi - \Phi^\dagger \Phi_{|\mu}) W_\nu \\ &+ e^2 g^{\mu\nu} W_\mu W_\nu \Phi^\dagger \Phi \end{aligned} \quad (6-13)$$

e a equação de movimento para o campo Φ é

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\sqrt{-g} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} g_{\alpha\beta}) - 2ie g^{\alpha\beta} W_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x^\beta} \\ - e^2 g^{\alpha\beta} W_\alpha W_\beta \Phi + (m^2 + \frac{1}{6} R) \Phi = 0 \end{aligned} \quad (6-14)$$

Como vimos em capítulos anteriores a equação acima é invariante por transformações conformes se $m = 0$ e não há campos eletromagnéticos presentes. A presença do campo eletromagnético quebra a invariância conforme da equação (6-14) como pode-se verificar facilmente. Pela transformação conforme

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi = \Omega^{-1} \Phi \\ g_{\mu\nu} &\rightarrow g_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \\ W^\mu &\rightarrow W^\mu = \Omega^{-2} W^\mu \end{aligned} \quad (6-15)$$

temos que

$$\begin{aligned} \square \bar{\Phi} - 2ie \bar{g}^{\mu\nu} \bar{W}_\mu \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x^\nu} - e^2 \bar{g}^{\mu\nu} \bar{W}_\mu \bar{W}_\nu \bar{\Phi} + (m^2 + \frac{1}{6} \bar{R}) \bar{\Phi} = \\ = \Omega^{-3} \left[\square \Phi - 2ie g^{\mu\nu} W_\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} - e^2 g^{\mu\nu} W_\mu W_\nu \Phi + (m^2 + \frac{1}{6} R) \Phi \right] \\ + \Omega^{-1} m^2 \Phi - \Omega^{-4} \frac{\partial \Omega}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} W_\mu \Phi \end{aligned} \quad (6-16)$$

Este resultado mostra que a equação (6-14) não é invariante pela transformação conforme definida por (6-15) mesmo quando $m=0$.

Vimos na seção anterior que na ausência do campo gravitacional um campo magnético puro não é capaz de produzir partículas escalares. Esta propriedade só é mantida na presença do campo gravitacional no caso de espaços homogêneos conformalmente planos. Se em (6-16) com $m=0$ fizermos $W_\mu = (0, \vec{W}(\vec{x}))$ e $g_{\mu\nu} = \Omega^{-2}(t) \eta_{\mu\nu}$ onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowskii e t é o tempo global, o termo responsável pela quebra da invariância conforme desaparece. A equação (6-14) pode então ser transformada na equação para uma partícula sem massa em um campo magnético puro no espaço de Minkowskii. Como sabemos, neste caso não há produção de partículas escalares. É importante salientar que isto não é verdadeiro para outros tipos de métricas $g_{\mu\nu}(x)$.

Com o objetivo de analisar a influencia no campo eletromagnético sobre o processo de produção de partículas, vamos considerar o caso no qual o potencial vetor tem a forma $W_\mu = (0, 0, 0, \theta(t))$ e um modelo cosmológico com um plano de anisotropia do tipo⁽³⁰⁾.

$$ds^2 = dt^2 - B^2(t)(dx^2 + dy^2) - A^2(t) dz^2 \quad (6-17)$$

A equação de movimento do campo escalar sem o termo $\frac{1}{6} R$ toma a forma

$$\ddot{\Phi} + \frac{\dot{V}}{V} \dot{\Phi} - \frac{1}{B^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2i e \frac{\theta}{A^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left(\frac{e\theta}{A} \right)^2 \Phi + m^2 \Phi = 0 \quad (6-18)$$

onde $V = A B^2$. Usando a decomposição para o campo ϕ em termos de $\phi_{\mathbf{k}}(t)$ e $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \sim e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ obtemos

$$\ddot{\phi} + \frac{\dot{V}}{V} \dot{\phi}_{\mathbf{k}} + \Omega_{\mathbf{k}}^2(t) \phi_{\mathbf{k}} = 0 \quad (6-19)$$

onde

$$\Omega_{\mathbf{k}}^2(t) = m^2 + \frac{1}{B^2} (k_1^2 + k_2^2) + \frac{1}{A^2} (k_3 - e\theta(t))^2 \quad (6-20)$$

Como vimos no capítulo 5.2, no limite de grandes valores de \vec{k} e a condição $|\dot{\Omega}_{\mathbf{k}}| \ll \Omega_{\mathbf{k}}^2$ é satisfeita então uma boa aproximação para o número de partículas criadas é

$$\eta_{(EM,G)} \approx \Omega_{\mathbf{k}}^{-2} \quad (6-21)$$

Comparando (6-21) com a correspondente expressão para $n_{\mathbf{g}}$, obtida de (6-21) no limite $\theta \rightarrow 0$, vemos que a presença do campo eletromagnético inibe a criação de partículas com momentum na direção transversal à direção do campo elétrico. Se considerarmos as novas partículas criadas como um fluido perfeito com densidade $\rho_{(EM,G)} \approx n_{(EM,G)}$ e a aproximação ultra-relativista para a equação de estado, $p = \frac{1}{3} \rho$, pode-se mostrar que⁽⁶⁾ $T_0^0 \approx -T_3^3 \gg T_1^1, T_2^2$. Portanto, se o número de partículas com momento no plano XY aumenta, a anisotropia diminui. Mas, como vimos, a presença do campo eletromagnético inibe a criação de partículas no plano XY, o que significa que o processo de isotropização diminui.

6.2 - FORMALISMO UNIFICADO

Vamos considerar um modelo cosmológico do tipo de Kasner,

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)dx^2 - B^2(t)dy^2 - C^2(t)dz^2 \quad (6-22)$$

e um campo eletromagnético cujo potencial vetor é da forma

$$W_\mu = (0, W_1(t), W_2(t), W_3(t)) \quad (6-23)$$

o qual pode ou não ser fonte do campo gravitacional, nos quais vamos impor as condições limites

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (A, B, C) = \text{constante} \quad (6-24)$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} W_i(t) = W_i^\pm = \text{constante} \quad (6-25)$$

A equação de movimento para o campo escalar é a equação (6-14). Com a Lagrangeana (6-13) e os momentos conjugados a Φ e Φ^\dagger definidos por $\pi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\Phi}|_0 = \dot{\Phi}|_0$ e $\pi^\dagger = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\Phi}^\dagger|_0$ a Hamiltoniana para o campo escalar fica sob a forma

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \int d^3x \sqrt{-g} \left(\dot{\Phi} + \Phi - \left(\frac{1}{A^2} \frac{\partial\Phi^\dagger}{\partial x} \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial\Phi^\dagger}{\partial y} \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{1}{C^2} \frac{\partial\Phi^\dagger}{\partial z} \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) \right. \\ & - ie \left(\frac{W_1}{A^2} \frac{\partial\Phi^\dagger}{\partial x} + \frac{W_2}{B^2} \frac{\partial\Phi^\dagger}{\partial y} + \frac{W_3}{C^2} \frac{\partial\Phi^\dagger}{\partial z} \right) \Phi \\ & - ie\Phi^\dagger \left(\frac{W_1}{2} \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{W_2}{2} \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{W_3}{2} \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) - e^2 \left(\frac{W_1^2}{A^2} + \frac{W_2^2}{B^2} + \frac{W_3^2}{C^2} \right) \Phi^\dagger \Phi \\ & \left. + (m^2 + \frac{1}{6} R) \Phi^\dagger \Phi \right) \end{aligned} \quad (6-26)$$

Usando a decomposição $\Phi_{\pm}(x) \sim e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \phi_{\pm}(t)$ para o campo escalar segue que, da equação de movimento

$$\ddot{\phi}_{\pm}(\vec{k}, t) + \frac{\dot{V}}{V} \dot{\phi}_{\pm}(\vec{k}, t) + \Omega_k^2(t) \phi_{\pm}(\vec{k}, t) = 0 \quad (6-27)$$

onde

$$\Omega_k^2(t) = m^2 + \frac{1}{6} R + \frac{1}{A^2} (k_1 - eW_1)^2 + \frac{1}{B^2} (k_2 - eW_2)^2 + \frac{1}{C^2} (k_3 - eW_3)^2 \quad (6-28)$$

Introduzindo as novas variáveis τ e $\psi_{\pm}(\vec{k}, \tau)$ por

$$\tau = \int \frac{dt}{V^{1/3}(t)}, \quad \phi_{\pm} = V^{-1/3} \psi_{\pm} \quad (6-29)$$

onde $V = A.B.C.$, a equação (6-27) se reduz a

$$\psi_{\pm}(\vec{k}, \tau) + \Lambda_k^2(\tau) \psi_{\pm}(\vec{k}, \tau) = 0 \quad (6-30)$$

onde

$$\begin{aligned} \Lambda_k^2(\tau) &= V^{2/3} \Omega_k^2(\tau) + Q(\tau) \\ &= V^{2/3} \Omega_k^2(\tau) + \frac{1}{18} \left[\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right)^2 + \left(\frac{A'}{A} - \frac{C'}{C} \right)^2 + \left(\frac{B'}{B} - \frac{C'}{C} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (6-31)$$

onde a "linha" significa derivação com relação a τ .

Observemos que as amplitudes $\psi_{\pm}(\vec{k}, \tau)$ satisfazem às condições assintóticas

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \psi_{\pm}(\vec{k}, \tau) = e^{\pm \Lambda_k^{(\pm)} \tau} \quad (6-32)$$

onde

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \Lambda_k(\tau) = \Lambda_k^{(\pm)} \quad (6-33)$$

As amplitudes $\psi_{\pm}(\vec{k}, \tau)$, devido às condições assintóticas acima, satisfazem a uma série de propriedades as quais vamos demonstrar a seguir em virtude da simplificação que introduzirão em cálculos posteriores.

Da equação (6-30), temos que

$$\psi_+^* \psi_+'' + \Lambda_k^2(\tau) |\psi_+|^2 = 0$$

$$\psi_+ \psi_+^{*''} + \Lambda_k^2(\tau) |\psi_+|^2 = 0$$

donde

$$\psi_+^* \psi_+'' - \psi_+ \psi_+^{*''} = 0 \quad (6-34)$$

Esta última expressão pode ser escrita sob a forma

$$\frac{d}{d\tau} (\psi_+^* \psi_+' - \psi_+ \psi_+^{*'}) = 0$$

integrando, obtemos

$$\psi_+^* \psi_+' - \psi_+ \psi_+^{*'} = f(\vec{k}) \quad (6-35)$$

onde $f(\vec{k})$ é independente de τ e pode portanto ser obtida calculando-se (6-35) no limite $t \rightarrow -\infty$. Obtemos então

$$\psi_+^* \psi_+' - \psi_+ \psi_+^{*'} = 2i \Lambda_k^{(-)} \quad (6-36)$$

Com procedimento análogo, podemos mostrar que

$$\psi_-^* \psi_-' - \psi_- \psi_-^{*'} = -2i \Lambda_k^{(-)} \quad (6-37)$$

e que

$$\psi_+^* \psi_- = \psi_+^* \psi_- \quad (6-38)$$

Tirando sucessivamente ψ_+ e ψ_- de (6-38), substituindo em (6-36) e (6-37), respectivamente, e somando os resultados obtemos

$$(\psi_+^* \psi_- - \psi_+ \psi_-^*)(|\psi_+|^2 - |\psi_-|^2) = \quad (6-39)$$

usando agora as equações diferenciais para ψ_+ e ψ_- , e procedendo como anteriormente, obtemos

$$\psi_+ \psi_-^* - \psi_+^* \psi_- = -2i\Lambda_k^{(-)} \quad (6-40)$$

Logo, de (6-39) segue que

$$|\psi_+|^2 = |\psi_-|^2 \quad (6-41)$$

e da mesma forma pode-se mostrar que

$$|\psi_+^*|^2 = |\psi_-^*|^2 \quad (6-42)$$

Vamos escrever os campos ϕ e ϕ^\dagger sob a forma

$$\phi(\vec{x}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \frac{d^3k}{\sqrt{\Lambda_k^{(-)}}} \left[A_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \psi_-(\vec{k}, \tau) + B_k^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \psi_+(-\vec{k}, \tau) \right] \quad (6-43)$$

$$\phi^\dagger(\vec{x}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \frac{d^3k}{\sqrt{\Lambda_k^{(-)}}} \left[B_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \psi_+(-\vec{k}, \tau) + A_k^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \psi_-(\vec{k}, \tau) \right] \quad (6-44)$$

onde (A_k, A_k^\dagger) e (B_k, B_k^\dagger) são operadores que satisfazem a relações

de comutação análogas às relações de comutação (3-11) entre os operadores de criação e aniquilação de partículas e anti-partículas, respectivamente.

Um cálculo direto, usando as expressões acima e as propriedades das amplitudes $\psi_{\pm}(\vec{k}, \tau)$ deduzidas anteriormente na expressão (6-26) da Hamiltoniana, resulta em

$$\begin{aligned}
 H(\tau) = & \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{\Lambda_k^{(-)}} (|\psi'_+(\vec{k}, \tau)|^2 + \Lambda_k^2(\tau) |\psi_+(\vec{k}, \tau)|^2) (A_k^\dagger A_k + B_{-k}^\dagger B_{-k}) \\
 & + (\psi'_+(\vec{k}, \tau) \psi_-^*(\vec{k}, \tau) + \Lambda_k^2(\tau) \psi_+(\vec{k}, \tau) \psi_-^*(\vec{k}, \tau)) A_k^\dagger B_{-k}^\dagger \\
 & + (\psi_-^*(\vec{k}, \tau) \psi'_+(\vec{k}, \tau) + \Lambda_k^2(\tau) \psi_-^*(\vec{k}, \tau) \psi_+(\vec{k}, \tau)) B_{-k} A_k \quad (6-45)
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 H(\tau) = & \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{\Lambda_k^{(-)}} \left\{ \begin{aligned} & \tilde{U}(\vec{k}, \tau) (A_k^\dagger A_k + B_{-k}^\dagger B_{-k}) \\ & + V(\vec{k}, \tau) A_k^\dagger B_{-k}^\dagger + V^*(\vec{k}, \tau) B_{-k} A_k \end{aligned} \right\} \quad (6-46)
 \end{aligned}$$

onde fizemos

$$\tilde{U}(\vec{k}, \tau) \equiv |\psi'_+(\vec{k}, \tau)|^2 + \Lambda_k^2(\tau) |\psi_+(\vec{k}, \tau)|^2 \quad (6-47)$$

$$V(\vec{k}, \tau) \equiv \psi'_+(\vec{k}, \tau) \psi_-^*(\vec{k}, \tau) + \Lambda_k^2(\tau) \psi_+(\vec{k}, \tau) \psi_-^*(\vec{k}, \tau) \quad (6-48)$$

Devido à presença das termos não diagonais a Hamiltoniana (6-46) não define um operador auto-adjunto em um espaço de Hilbert. Podemos no entanto, diagonalizá-la introduzin

do novos operadores de criação e aniquilação através de uma transformação de Bogoliubov, dependente do tempo, que preserve as regras de comutação. Vamos introduzir então novos operadores $(a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^\dagger)$ e $(b_{\vec{k}}, b_{\vec{k}}^\dagger)$ de criação e aniquilação de partículas e anti-partículas respectivamente, pelas transformações

$$A_{\vec{k}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{1-|\lambda(\vec{k}, \tau)|^2}} \left[a_{\vec{k}}^\dagger(\tau_1) + \lambda^*(\vec{k}, \tau) b_{-\vec{k}}(\tau_1) \right] \quad (6-49a)$$

$$A_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{1-|\lambda(\vec{k}, \tau)|^2}} \left[a_{\vec{k}}(\tau_1) + \lambda(\vec{k}, \tau) b_{-\vec{k}}^\dagger(\tau_1) \right] \quad (6-49b)$$

$$B_{\vec{k}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{1-|\lambda(-\vec{k}, \tau)|^2}} \left[b_{\vec{k}}^\dagger(\tau_1) + \lambda^*(-\vec{k}, \tau) a_{-\vec{k}}(\tau_1) \right] \quad (6-49c)$$

$$B_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{1-|\lambda(-\vec{k}, \tau)|^2}} \left[b_{\vec{k}}(\tau_1) + \lambda(-\vec{k}, \tau) a_{-\vec{k}}^\dagger(\tau_1) \right] \quad (6-49d)$$

τ_1 é um instante inicial dado (eventualmente, $\tau_1 \rightarrow -\infty$), e $\lambda(\vec{k}, \tau)$ é uma função que deve satisfazer à condição

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \lambda(\vec{k}, \tau) = 0 \quad (6-50)$$

Neste limite os operadores $(A_{\vec{k}}, A_{\vec{k}}^\dagger)$ e $(B_{\vec{k}}, B_{\vec{k}}^\dagger)$ coincidem com os operadores de criação de quantas do campo livre.

Substituindo as expressões (49 a,d) na Hamiltoniana obtemos

$$\begin{aligned}
H(\tau) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{\Lambda_k^{(-)}} \frac{1}{1-|\lambda(\vec{k}, \tau)|^2} & \left\{ U(\vec{k}, \tau) \left[a_k^\dagger a_k + b_{-k}^\dagger b_{-k} + |\lambda(\vec{k}, \tau)|^2 (b_{-k}^\dagger b_{-k}^\dagger \right. \right. \\
& + a_k a_k^\dagger) \left. \right] + V(\vec{k}, \tau) \lambda^*(\vec{k}, \tau) (a_k^\dagger a_k + b_{-k}^\dagger b_{-k}^\dagger) \\
& + V^*(\vec{k}, \tau) \lambda(\vec{k}, \tau) (a_k^\dagger a_k + b_{-k}^\dagger b_{-k}^\dagger) + \left[V^*(\vec{k}, \tau) \lambda^2(\vec{k}, \tau) + \right. \\
& 2 U(\vec{k}, \tau) \lambda(\vec{k}, \tau) + V(\vec{k}, \tau) \left. \right] a_k^\dagger b_{-k}^\dagger + \left[V(\vec{k}, \tau) \lambda^{*2}(\vec{k}, \tau) + \right. \\
& \left. \left. 2 U(\vec{k}, \tau) \lambda^*(\vec{k}, \tau) + V^*(\vec{k}, \tau) \right] a_k b_{-k} \right\}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
H(\tau) = \frac{1}{2} \frac{d^3k}{\Lambda_k^{(-)}} \frac{1}{1-|\lambda(\vec{k}, \tau)|^2} & \left\{ \left[U(\vec{k}, \tau) (1+|\lambda(\vec{k}, \tau)|^2) + \right. \right. \\
& V(\vec{k}, \tau) \lambda^*(\vec{k}, \tau) + V^*(\vec{k}, \tau) \lambda(\vec{k}, \tau) \left. \right] (a_k a_k^\dagger + b_{-k} b_{-k}^\dagger) + \\
& (V^*(\vec{k}, \tau) \lambda^2(\vec{k}, \tau) + 2U(\vec{k}, \tau) \lambda(\vec{k}, \tau) + V(\vec{k}, \tau)) a_k b_{-k} + \\
& \left. \left. (V(\vec{k}, \tau) \lambda^{*2}(\vec{k}, \tau) + 2U(\vec{k}, \tau) \lambda^*(\vec{k}, \tau) + V^*(\vec{k}, \tau)) a_k b_{-k} \right\} \quad (6-51)
\end{aligned}$$

Levando em conta que $U(\vec{k}, \tau)$ é real concluímos que a condição de diagonalização da Hamiltoniana (6-51) é

$$V^*(\vec{k}, \tau) \lambda^2(\vec{k}, \tau) + 2U(\vec{k}, \tau) \lambda(\vec{k}, \tau) + V(\vec{k}, \tau) = 0 \quad (6-52)$$

onde

$$\lambda(\vec{k}, \tau) = \frac{-U(\vec{k}, \tau) \pm \sqrt{U^2(\vec{k}, \tau) - |V(\vec{k}, \tau)|^2}}{V^*(\vec{k}, \tau)} \quad (6-53)$$

O sinal da raiz quadrada na expressão acima deve ser escolhido de tal modo que a condição (6-50) seja satisfeita. Usando (6-32) e (6-47,48) encontra-se que o sinal deve ser positivo. Ficamos então com

$$\lambda(\vec{k}, \tau) = \frac{-U(\vec{k}, \tau) + \sqrt{U^2(\vec{k}, \tau) - |V(\vec{k}, \tau)|^2}}{V^*(\vec{k}, \tau)} \quad (6-54)$$

O número total de partículas criadas no modo \vec{k} pode ser calculado introduzindo-se o estado de vácuo $|0\rangle_{\tau_1}$ que é aniquilado por a_k e b_k definidos em (6-49a, d). Um cálculo direto conduz a

$$\begin{aligned} N_k(\tau) &= {}_{\tau_1} \langle 0 | A_k^\dagger A_k | 0 \rangle_{\tau_1} = {}_{\tau_1} \langle 0 | B_{-k} B_{-k} | 0 \rangle_{\tau_1} \\ &= \frac{|\lambda(\vec{k}, \tau)|^2}{1 - |\lambda(\vec{k}, \tau)|^2} \end{aligned} \quad (6-55)$$

Usando as propriedades das amplitudes $\psi_{\pm}(\vec{k}, \tau)$ encontra-se facilmente que $U^2(\vec{k}, \tau) - |V(\vec{k}, \tau)|^2 = 4 \Lambda_k^2(\tau) \Lambda_k^{2(-)}$, de modo que

$$|\lambda(\vec{k}, \tau)|^2 = \frac{U(\vec{k}, \tau) - 2 \Lambda_k(\tau) \Lambda_k^{(-)}}{U(\vec{k}, \tau) + 2 \Lambda_k(\tau) \Lambda_k^{(-)}} \quad (6-56)$$

Levando esta expressão em (6-55) obtemos

$$N_k(\tau) = \frac{U(\vec{k}, \tau) - 2 \Lambda_k(\tau) \Lambda_k^{(-)}}{4 \Lambda_k(\tau) \Lambda_k^{(-)}} \quad (6-57)$$

O tensor momentum-energia para o campo escalar

pode ser construído pelo mesmo processo que usamos para obter a expressão (3-24). O resultado é

$$T_{\alpha\beta}(x) = \phi_{|\alpha}^{\dagger} \phi_{|\beta} + \phi_{|\beta}^{\dagger} \phi_{|\alpha} - g_{\alpha\beta} \mathcal{L} + \frac{1}{6} (R_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} \square + \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta}) \phi^{\dagger} \phi - ie (\phi_{|\alpha} \phi - \phi^{\dagger} \phi_{|\alpha}) W_{\beta} + e^2 W_{\alpha} W_{\beta} \phi^{\dagger} \phi \quad (6-58)$$

onde \mathcal{L} é a lagrangeana (6-13).

Com este resultado pode-se verificar facilmente que o momentum total das partículas criadas é nulo, isto é,

$$\begin{aligned} \langle \tau_1^i | T_0^i | 0 \rangle_{\tau_1} &\equiv \langle \tau_1^i | P^i | 0 \rangle_{\tau_1} = 0 \\ (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (6-59)$$

Este resultado está em acordo com (6-55), onde verificamos que o número total de partículas criadas é igual ao número de anti-partículas.

Vamos agora calcular os valores médios do operador densidade de corrente $J^{\mu}(x)$ definido por

$$J^{\mu}(x) = i g^{\mu\nu} : (\phi_{|\nu}^{\dagger} + ie \phi^{\dagger} W_{\nu}) \phi - \phi^{\dagger} (\phi_{|\nu} - ie W_{\nu} \phi) : \quad (6-60)$$

onde $:$ indica ordenação normal dos operadores. Como pode-se verificar sem dificuldades,

$$\langle \tau_1^0 | J^0 | 0 \rangle_{\tau_1} = 0 \quad (6-61)$$

Calculemos o valor médio da componente J^1 explicitamente:

$$J^1 = -\frac{i}{A^2} : \left((\Phi|_1 + ie \Phi^\dagger W_1) \Phi - \Phi^\dagger (\Phi|_1 - ie W_1 \Phi) \right) :$$

Utilizando as expressões (6-43, 44) para os campos e a transformação (6-49a, d) para os operadores (A_k, A_k^\dagger) e (B_k, B_k^\dagger) temos que

$$\int d^3x \langle o|_{\tau_1} : \Phi^\dagger \Phi : |o\rangle_{\tau_1} = \frac{1}{2} \int d^3k \frac{1}{1-|\lambda(\vec{k}, \tau)|^2} \left\{ 2 |\lambda(\vec{k}, \tau)|^2 |\psi_+(k, \tau)|^2 + \lambda(\vec{k}, \tau) \psi_-(\vec{k}, \tau) \psi_+(\vec{k}, \tau) + \lambda^*(\vec{k}, \tau) \psi_-^*(\vec{k}, \tau) \psi_+^*(\vec{k}, \tau) \right\}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \lambda \psi_- \psi_+^* + \lambda^* \psi_-^* \psi_+ &= (-U + 2 \Lambda_k \Lambda_k^{(-)}) \left(\frac{V \psi_- \psi_+^* + V^* \psi_-^* \psi_+}{|V|^2} \right) \\ &= - (U - 2 \Lambda_k \Lambda_k^{(-)}) \frac{2 \Lambda_k^2 |\psi_+|^4 + 2 |\psi_+|^2 |\psi_+|^2 - 4 \Lambda^2^{(-)}}{(U + 2 \Lambda_k \Lambda_k^{(-)}) (U - 2 \Lambda_k \Lambda_k^{(-)})} \\ &= - \frac{\Lambda_k^2 |\psi_+|^4 + |\psi_+|^2 |\psi_+|^2 - 2 \Lambda^2^{(-)}}{\Lambda_k \Lambda_k^{(-)}} \end{aligned}$$

Substituindo este resultado na expressão acima obtemos

$$d^3x \langle o|_{\tau_1} : \Phi^\dagger \Phi : |o\rangle_{\tau_1} = - \int d^3k \frac{\Lambda_k^{(-)} - \Lambda_k(\tau) |\psi_+(\vec{k}, \tau)|^2}{\Lambda_k^{(-)} - \Lambda_k(\tau)}$$

Do mesmo modo,

$$\int d^3x \langle o_{\tau_1} | : \phi_{\vec{k}_1}^\dagger \phi - \phi^\dagger \phi : | o_{\tau_1} \rangle = \frac{i}{2} \int d^3k \frac{k_1}{1 - |\lambda(\vec{k}, \tau)|^2} \left\{ 2|\lambda(\vec{k}, \tau)|^2 |\psi_+(\vec{k}, \tau)|^2 \right. \\ \left. + \lambda(\vec{k}, \tau) \psi_-(\vec{k}, \tau) \psi_+^*(\vec{k}, \tau) + \lambda^*(\vec{k}, \tau) \psi_-^*(\vec{k}, \tau) \psi_+(\vec{k}, \tau) \right\} \\ = -\frac{i}{2} \int d^3k k_1 \frac{\Lambda_k^{(-)} - \Lambda_k(\tau) |\psi_+(\vec{k}, \tau)|^2}{\Lambda_k^{(-)} \Lambda_k(\tau)}$$

Com estes resultados, a expressão (6-61) se escreve

$$\langle o_{\tau_1} | J^1 | o_{\tau_1} \rangle = \frac{-1}{A^2(\tau)} \int \frac{d^3k}{\Lambda_k^{(-)} \Lambda_k(\tau)} (k_1 + e W_1(\tau)) (\Lambda_k^{(-)} - \Lambda_k(\tau) |\psi_+(\vec{k}, \tau)|^2) \quad (6-62)$$

Os valores médios de J^2 e J^3 podem ser calculados pelo mesmo procedimento. Estas quantidades podem ser utilizadas para se calcular a reação das partículas criadas sobre a métrica e sobre o campo eletromagnético, o que será objetivo de futuras investigações.

Seguindo⁽²⁹⁾, e chamando de ω_k a probabilidade relativa de criação de um par, e de C_k a probabilidade de que não seja criado nenhum par, a probabilidade absoluta de criação de um par será $C_k \omega_k$. Além disso, devemos ter $C_k + \omega_k = 1$. Como pode-se ter um número qualquer de partículas escalares em um dado estado k , o número de partículas criadas pode ser dado em termos das probabilidades ω_k e C_k por

$$H_k = C_k \sum_n n \omega_k^n = \frac{C_k \omega_k}{(1 - \omega_k)} = \frac{\omega_k}{1 - \omega_k}$$

Deste resultado, com (6-55), podemos concluir que $|\lambda(\vec{k}, \tau)|^2$ é a probabilidade relativa de criação de um par. Este resultado está de acordo com o resultado de Parker, citado no cap. 4, equação (4-19), se identificarmos β_k com $\lambda/\sqrt{1-|\lambda|^2}$.

7 - PERTURBAÇÕES ANISOTRÓPICAS EM UNIVERSOS DE FRIEDMANN

O nosso objetivo neste capítulo é estudar o comportamento de perturbações anisotrópicas de um modelo de Friedmann quasi - euclidiano e sua influencia sobre a criação de partículas. Faremos inicialmente um estudo sobre a teoria de perturbações de um modelo cosmológico seguindo Lifshitz⁽⁶⁾. A seguir, especializaremos este estudo para o caso de perturbações anisotrópicas geradas pela propagação de um certo tipo de ondas gravitacionais. As soluções gerais para as equações de Einstein perturbadas serão obtidas para diferentes equações de estado. Estudaremos a influencia das perturbações sobre um campo escalar real, conformalmente acoplado ao campo gravitacional e, finalmente, analisaremos a influencia das partículas criadas devido às perturbações sobre a métrica.

7.1 - TEORIA DAS PERTURBAÇÕES

Consideremos uma métrica genérica $g_{\alpha\beta}^{(0)}(x)$, solução das equações de Einstein, à qual é adicionada uma pequena perturbação $\delta g_{\alpha\beta}(x)$ de modo que

$$g_{\alpha\beta}^{(0)} + \delta g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{(0)} + \delta g_{\alpha\beta} \quad (7-1)$$

$$= g_{\alpha\beta}^{(0)} + \epsilon h_{\alpha\beta} \quad (7-2)$$

onde introduzimos a notação $\delta g_{\alpha\beta} = \epsilon h_{\alpha\beta}$, com $\epsilon^2 \ll \epsilon$, para as perturbações das componentes contravariantes do tensor métrico.

O tensor $h_{\alpha\beta}$ é considerado como um tensor definido no espaço da métrica não perturbada $g_{\alpha\beta}^{(0)}$, de modo que as operações de derivação covariante são feitas com o tensor $g_{\alpha\beta}^{(0)}$. Mantendo apenas os termos até primeira ordem em ϵ temos que $\delta g^{\alpha\beta} = -\epsilon h^{\alpha\beta}$, isto é

$$g_{\alpha\beta}^{(0)} \rightarrow g^{\alpha\beta} \approx g_{\alpha\beta}^{(0)} - \epsilon h^{\alpha\beta} \quad (7-3)$$

A correção para o determinante $g = \det(g_{\alpha\beta}^{(0)})$ pode ser calculada como se segue. Sabemos que

$$g = \sum_{\lambda} g_{\lambda\sigma}^{(0)} \Delta^{\lambda\sigma} \quad (7-4)$$

onde σ é um índice de coluna, fixo, e $\Delta^{\lambda\sigma}$ é o cofator de $g_{\lambda\sigma}^{(0)}$. Então, usando $\frac{\partial g^{(0)}}{\partial g_{\lambda\sigma}^{(0)}} = \Delta^{\lambda\sigma}$, tem-se que

$$g = \frac{\partial g^{(0)}}{\partial g_{\lambda\sigma}^{(0)}} \delta g_{\lambda\sigma} = \epsilon \Delta^{\lambda\sigma} h_{\lambda\sigma}$$

Mas, por definição, $(g^{\lambda\sigma}) = \frac{\Delta^{\lambda\sigma}}{g}$ de modo que

$$\delta g = \epsilon g^{\lambda\sigma} h_{\lambda\sigma} = \epsilon g^{\lambda\sigma} h_{\lambda\sigma} \quad (7-5)$$

onde $h \equiv h_{\lambda}^{\lambda}$. Portanto

$$g \rightarrow g \approx g^{(0)} (1 + \epsilon h) \quad (7-6)$$

Calculemos então a correção para os símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \{g_{\mu\rho|\nu} + g_{\nu\rho|\mu} - g_{\mu\nu|\rho}\} \\
&\approx \frac{1}{2} (g^{\alpha\rho} - \varepsilon h^{\alpha\rho}) (g_{\mu\rho} + \varepsilon h_{\mu\rho})_{|\nu} + (g_{\nu\rho} + \varepsilon h_{\nu\rho})_{|\mu} - (g_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu})_{|\rho} \\
&\approx \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \frac{\varepsilon}{2} g^{\alpha\rho} (h_{\mu\rho|\nu} + h_{\nu\rho|\mu} - h_{\mu\nu|\rho}) \\
&\quad - \frac{\varepsilon}{2} h^{\alpha\rho} (g_{\mu\rho|\nu} + g_{\nu\rho|\mu} - g_{\mu\nu|\rho}) \quad (7-7)
\end{aligned}$$

Pondo $h_{\mu\rho|\nu} = h_{\mu\rho||\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} h_{\sigma\rho} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\nu} h_{\mu\nu}$ e expressões análogas para $h_{\nu\rho|\mu}$ e $h_{\mu\nu|\rho}$ no segundo termo de (7-7) encontra-se que

$$h_{\mu\rho|\nu} + h_{\nu\rho|\mu} - h_{\mu\nu|\rho} = h_{\mu\rho||\nu} + h_{\nu\rho||\mu} - h_{\mu\nu||\rho} + 2 \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} h_{\sigma\rho}$$

que substituído em (7-7) resulta em

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &\approx \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + g^{\alpha\beta} (h_{\mu\rho||\nu} + h_{\nu\rho||\mu} - h_{\mu\nu||\rho}) + \varepsilon \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} h_{\sigma\rho} g^{\alpha\rho} \\
&\quad - \frac{1}{2} h^{\alpha\rho} (g_{\mu\rho|\nu} + g_{\nu\rho|\mu} - g_{\mu\nu|\rho}) \quad (7-8)
\end{aligned}$$

Por um cálculo direto, verificando-se facilmente que o terceiro termo de (7-8) se anula com o último, obtemos finalmente

$$\begin{aligned}
\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \\
&\approx \frac{\varepsilon}{2} (h_{\mu||\nu}^{\alpha} + h_{\nu||\mu}^{\alpha} - h_{\mu\nu}^{\alpha}) \quad (7-9)
\end{aligned}$$

Com este resultado, podemos calcular as correções para os tensores $R_{\beta\lambda\rho}^{\alpha}$, $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}$ e R_{μ}^{ν} . Temos que

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu}^{(0)} + \delta R_{\mu\nu} \\
&\approx (\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha})|_{\alpha} - (\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} + \delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha})|_{\nu} \\
&+ (\Gamma_{\tau\alpha}^{\alpha} \delta \Gamma_{\tau\alpha}^{\alpha}) (\Gamma_{\mu\nu}^{\tau} + \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\tau}) - (\Gamma_{\tau\nu}^{\alpha} + \delta \Gamma_{\tau\nu}^{\alpha}) (\Gamma_{\mu\alpha}^{\tau} + \delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\tau}) \\
&\approx R_{\mu\nu}^{(0)} + (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha})|_{\alpha} - (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha})|_{\nu} + (\delta \Gamma_{\tau\alpha}^{\alpha}) \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} + (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\tau}) \Gamma_{\tau\alpha}^{\alpha} \\
&- (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\tau}) \Gamma_{\tau\nu}^{\alpha} - (\delta \Gamma_{\tau\nu}^{\alpha}) \Gamma_{\mu\alpha}^{\tau} \\
&\approx R_{\mu\nu}^{(0)} + (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha})|_{\alpha} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\tau} (\delta \Gamma_{\mu\tau}^{\alpha}) - (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha})|_{\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\tau} (\delta \Gamma_{\mu\tau}^{\alpha}) \\
&\approx R_{\mu\nu}^{(0)} + (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha})|_{\alpha} - (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha})|_{\nu}
\end{aligned}$$

Usando (7-9) obtém-se

$$\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}^{(0)} \\
&\approx \frac{\varepsilon}{2} (h_{\mu\|\nu\|\alpha}^{\alpha} + h_{\nu\|\mu\|\alpha}^{\alpha} - h_{\mu\nu}^{\|\alpha} - h_{\|\mu\|\nu}) \quad (7-10)
\end{aligned}$$

Desta última expressão encontra-se facilmente

$$\delta R = g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \approx \varepsilon (h^{\alpha\nu}{}_{\|\nu\|\alpha} - h^{\|\alpha}{}_{\|\alpha}) \quad (7-11)$$

Usando a relação

$$R_{\mu}^{\nu} + \delta R_{\mu}^{\nu} \approx (g^{\lambda\nu} - \varepsilon h^{\lambda\nu}) (R_{\mu\lambda} + \delta R_{\mu\lambda})$$

obtem-se

$$\delta R_{\mu}^{\nu} \approx g^{\nu\lambda} \delta R_{\mu\lambda} - \varepsilon h^{\nu\lambda} R_{\mu\lambda} \quad (7-12)$$

O cálculo da correção para o tensor $R_{\beta\gamma\rho}^{\alpha}$ é análogo ao que foi feito para se obter $R_{\mu\nu}$. Apresentaremos apenas o resultado:

$$\delta R_{\beta\gamma\rho}^{\alpha} \approx \frac{\epsilon}{2} (h_{\beta\parallel\rho\parallel\gamma}^{\alpha} + h_{\rho\parallel\beta\parallel\gamma}^{\alpha} - h_{\beta\rho}^{\parallel\alpha} - h_{\gamma\parallel\beta\parallel\rho}^{\alpha} - h_{\beta\parallel\gamma\parallel\rho}^{\alpha} + h_{\beta\gamma}^{\parallel\alpha} \parallel_{\rho}) \quad (7-13)$$

7.2 - PERTURBAÇÕES ANISOTRÓPICAS NO UNIVERSO DE FRIEDMANN QUASI-EUCLIDIANO

Vamos escrever a métrica perturbada sob a forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - (a(t) + \alpha(t))^2 dx^2 - (a(t) + \beta(t))^2 dy^2 - (a(t) + \gamma(t))^2 dz^2 \\ &\approx dt^2 - (a^2(t) + a(t)\alpha(t)) dx^2 - (a^2(t) + a(t)\beta(t)) dy^2 \\ &\quad - (a^2(t) + a(t)\gamma(t)) dz^2 \end{aligned} \quad (7-14)$$

Isto é equivalente a se considerar um tensor de perturbações da forma

$$\begin{aligned} h_{0\mu} &= 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (7-15) \\ h_{ij} &= a(t) (\alpha(t) \delta_{1i} \delta_{1j} + \beta(t) \delta_{2i} \delta_{2j} + \gamma(t) \delta_{3i} \delta_{3j}) \\ &\quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

A condição $h_{0\mu} = 0$ assegura que o sistema de referência continua sendo um sistema síncrono. As correções para o tensor $R_{\mu\nu}$ devido as perturbações (7-15) podem ser facilmente calculadas como segue:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{00} &= - \frac{\ddot{a} + \ddot{\alpha}}{a + \alpha} - \frac{\ddot{a} + \ddot{\beta}}{a + \beta} - \frac{\ddot{a} + \ddot{\gamma}}{a + \gamma} \\ &- \left[\frac{\ddot{a}}{a} - \left(-\frac{\ddot{\alpha}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \alpha \right) \right] - \left[\frac{\ddot{a}}{a} - \left(-\frac{\ddot{\beta}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \beta \right) \right] \\ &- \left[\frac{\ddot{a}}{a} - \left(-\frac{\ddot{\gamma}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \gamma \right) \right] \\ &- 3 \frac{\ddot{a}}{a} + \left[-\frac{1}{a} (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta} + \ddot{\gamma}) + \frac{\ddot{a}}{a^2} (\alpha + \beta + \gamma) \right] = R_{00}^{(0)} + \delta R_{00} \end{aligned}$$

e portanto

$$\delta R_{00} \approx \left[-\frac{1}{a} \ddot{\theta}(t) + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\theta}(t) \right] \quad (7-16)$$

onde

$$\theta(t) = \alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t) \quad (7-17)$$

Para R_{11} temos

$$\begin{aligned} \bar{R}_{11} &= \frac{\ddot{a} + \ddot{\alpha}}{a + \alpha} + \frac{\dot{a} + \dot{\alpha}}{a + \alpha} \cdot \frac{\dot{a} + \dot{\beta}}{a + \beta} + \frac{\dot{a} + \dot{\alpha}}{a + \alpha} \cdot \frac{\dot{a} + \dot{\gamma}}{a + \gamma} \\ &\approx \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a} \right) + \left[\frac{\ddot{\alpha}}{a} - \frac{\ddot{a}}{a^2} \alpha + \frac{\dot{a}}{a^2} \dot{\alpha} - \frac{\dot{a}^2}{a^3} \alpha + \frac{\dot{a}}{a^2} \dot{\theta} - \frac{\dot{a}^2}{a^3} \theta \right] \\ &= R_{11}^{(0)} + \delta R_{11} \end{aligned}$$

Logo,

$$\delta R_{11} \approx \left[\frac{\ddot{\alpha}}{a} + \frac{\dot{a}}{a^2} \dot{\alpha} - \left(\frac{\ddot{a}}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^3} \right) \alpha + \left(\frac{\dot{a}}{a^2} \dot{\theta} - \frac{\dot{a}^2}{a^3} \theta \right) \right] \quad (7-18)$$

Um cálculo análogo conduz a

$$\delta R_{22} \approx \left[\frac{\ddot{\beta}}{a} + \frac{\dot{a}}{a^2} \dot{\beta} - \left(\frac{\ddot{a}}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^3} \right) \beta + \left(\frac{\dot{a}}{a^2} \dot{\theta} - \frac{\dot{a}^2}{a^3} \theta \right) \right] \quad (7-19)$$

$$\delta R_{33} \approx \left[\frac{\ddot{\gamma}}{a} + \frac{\dot{a}}{a^2} \dot{\gamma} - \left(\frac{\ddot{a}}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^3} \right) \gamma + \left(\frac{\dot{a}}{a^2} \dot{\theta} - \frac{\dot{a}^2}{a^3} \theta \right) \right] \quad (7-20)$$

Com estes resultados segue que

$$\delta R_{\theta\theta} = \left[\frac{2}{a} \ddot{\theta} + 4 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \dot{\theta} - \left(4 \frac{\dot{a}^2}{a^3} + 2 \frac{\ddot{a}}{a} \right) \theta \right] \quad (7-21)$$

Com base nestes resultados estudaremos a influência das perturbações sobre um campo escalar real para determinar como as partículas criadas, devido às perturbações, reagem sobre a métrica.

Chamemos de ${}^{(1)}_{\delta} G_{\mu}^{\nu}$ a correção do tensor de Ricci introduzida pelas perturbações definidas em (7-15) e, ${}^{(1)}_{\delta} T_{\mu}^{\nu}$ a correspondente correção do tensor momentum-energia. Com a presença das perturbações a métrica torna-se anisotrópica podendo então criar partículas de massa nula. Vamos chamar de ${}^{(2)}_{\delta} \langle T_{\mu}^{\nu} \rangle$ a correção do tensor momentum-energia introduzida pelas partículas criadas e de ${}^{(2)}_{\delta} G_{\mu}^{\nu}$ a correspondente reação sobre o tensor de Ricci, e assim por diante, de tal forma que as equações de Einstein perturbadas possam ser escritas como uma série de potências em um pequeno parâmetro ϵ ,

$${}^{(0)}G_{\mu}^{\nu} + \epsilon \delta {}^{(1)}G_{\mu}^{\nu} + \epsilon^2 \delta {}^{(2)}G_{\mu}^{\nu} + \dots = - {}^{(0)}T_{\mu}^{\nu} - \epsilon \delta {}^{(1)}T_{\mu}^{\nu} - \epsilon^2 \delta {}^{(2)}T_{\mu}^{\nu} - \dots \quad (7-22)$$

O parâmetro ϵ deve satisfazer a $\epsilon^2 \ll |\epsilon|$ e ficará fixado dependendo da escolha da região onde (7-22) seja válida.

Em (7-22) temos que as equações ${}^{(0)}G_{\mu}^{\nu} = - {}^{(0)}T_{\mu}^{\nu}$ determinam a métrica não perturbada, a qual supomos conhecida. Devemos ter a seguir

$${}^{(1)}_{\delta} G_{\mu}^{\nu} = - {}^{(1)}_{\delta} T_{\mu}^{\nu} \quad (7-23)$$

Neste ponto, vamos impor que as perturbações (7-15) sejam produzidas pela propagação de ondas gravitacionais. Assim temos ${}^{(1)}_{\delta} T_{\mu}^{\nu} = 0$, e a equação (7-23) se escreve

$${}^{(1)}_{\delta} G_{\mu}^{\nu} = 0 = {}^{(1)}_{\delta} R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} {}^{(1)}_{\delta} R = 0 \quad (7-23a)$$

Usando agora (7-16, 21) obtemos o sistema de equações

$$\ddot{\theta} - \frac{\ddot{a}}{a} \theta = 0 \quad (7-24a)$$

$$\ddot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\psi} - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \psi - \ddot{\theta} + \frac{\ddot{a}}{a} \theta = 0 \quad (7-24b)$$

$$\psi = \alpha, \beta \text{ ou } \gamma$$

Somando as equações para $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $\gamma(t)$, obtemos uma equação subsidiária para $\theta(t)$ na forma $F(a, \dot{a}, \ddot{a}) \ddot{\theta} + H(a, \dot{a}, \ddot{a}) \theta = 0$ que representa a condição de compatibilidade entre o sistema (7-24b) com a equação (7-24a). Adotaremos a escolha possível

$$\theta(t) = \alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t) = 0 \quad (7-25)$$

Esta condição, juntamente com $h_{\mu 0} = 0$, equivale a se considerar ondas gravitacionais no modo mais baixo de vibração, no "gauge" transversal de traço nulo.

O sistema de equações (7-24b) se reduz a um sistema de tres equações desacopladas, com as funções α , β , γ satisfazendo à condição (7-25):

$$\psi + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\psi} - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \psi = 0 \quad (7-26)$$

$$\psi = \alpha, \beta \text{ ou } \gamma$$

$$\alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t) = 0$$

Vamos considerar tres casos possiveis para a função $a(t)$:

$$a(t) \sim t^{\frac{1}{2}} \quad (7-27a)$$

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3}} \quad (7-27b)$$

$$a(t) \sim t^{\frac{1}{3}} \quad (7-27c)$$

que correspondem, respectivamente, às equações de estado

$$p = \frac{1}{3} \rho \quad (7-28a)$$

$$p = 0 \quad (7-28b)$$

$$p = \rho \quad (7-28c)$$

As correspondentes soluções da equação (7-26) podem ser obtidas sem dificuldades:

1º caso: $a \sim t^{\frac{1}{2}}$, $p = \frac{1}{3} \rho$

A equação (7-26) se reduz a

$$t \ddot{\psi} + \frac{1}{2} \dot{\psi} = 0 \quad (7-29)$$

A solução geral é

$$\psi(t) = c_1 + c_2 t^{\frac{1}{2}} \quad (7-30)$$

2º caso: $a \sim t^{\frac{2}{3}}$, $p = 0$

A equação (7-26) se escreve

$$t^2 \ddot{\psi} + \frac{2}{3} t \dot{\psi} - \frac{2}{9} \psi = 0 \quad (7-31)$$

e a solução geral é

$$\psi(t) = A_1 t^{\frac{1}{3}} + A_2 t^{\frac{2}{3}} \quad (7-32)$$

3º caso: $a \sim t^{\frac{1}{3}}$, $p = \rho$

A equação (7-26) se escreve

$$t^2 \ddot{\psi} + \frac{1}{3} t \dot{\psi} + \frac{1}{9} \psi = 0 \quad (7-33)$$

e a solução geral é

$$\psi(t) = B_1 t^{\frac{1}{3}} + B_2 t^{\frac{1}{3}} \log t \quad (7-34)$$

Com estas soluções podemos construir as funções $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $\gamma(t)$, satisfazendo à condição (7-25):

1º caso: $a \sim t^{\frac{1}{2}}$

Escolhemos

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= c_1 = 0 \\ \beta(t) &= c_2 t^{\frac{1}{2}} \\ \gamma(t) &= -c_2 t^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{7-35}$$

Neste caso, os elementos do tensor métrico perturbado são

$$\begin{aligned}\bar{g}_{11} &\approx a^2 \left(1 + \frac{\alpha}{a}\right) \approx a^2 = g_{11} \\ \bar{g}_{22} &\approx a^2 \left(1 + \frac{\beta}{a}\right) \approx a^2 (1 + c_2) \\ \bar{g}_{33} &\approx a^2 \left(1 + \frac{\gamma}{a}\right) \approx a^2 (1 - c_2)\end{aligned}\tag{7-36}$$

Estes resultados mostram que as perturbações podem ser removidas por uma transformação do sistema de referência, compatível com a condição $h_{0\mu} = 0$.

2º caso: $a \sim t^{\frac{2}{3}}$

Escolhendo

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= A_1 t^{\frac{1}{3}} \\ \beta(t) &= A_2 t^{\frac{2}{3}} \\ \gamma(t) &= -A_1 t^{\frac{1}{3}} - A_2 t^{\frac{2}{3}}\end{aligned}\tag{7-37}$$

os elementos do tensor métrico perturbado se escrevem

$$\begin{aligned}
g_{11} &\approx a^2(1 + A_1 t^{-1}) \\
g_{22} &\approx a^2(1 + A_2) \\
g_{33} &\approx a^2(1 - (A_1 + A_2) t^{-1})
\end{aligned}
\tag{7-38}$$

Dos resultados acima podemos concluir que apesar das perturbações introduzirem uma anisotropia no plano XZ, o universo com $a \sim t^{\frac{2}{3}}$ é estável sob as perturbações (7-37), no sentido de que as perturbações evanescem a medida que o universo evolui isto é: a solução $a \sim t^{\frac{2}{3}}$ ($p=0$) só é válida para valores de t tais que $t \gg 1$ e, de (7-38), tem-se $\alpha, \beta \sim t^{-1}$.

3º caso: $a \sim t^{\frac{1}{3}}$

Escolhendo

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= B_1 t^{\frac{1}{3}} \\
\beta(t) &= B_2 t^{\frac{1}{3}} \log t \\
\gamma(t) &= -B_1 t^{\frac{1}{3}} - B_2 t^{\frac{1}{3}} \log t
\end{aligned}
\tag{7-39}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
g_{11} &\approx a^2(1 + B_1) \\
g_{22} &\approx a^2(1 + B_2 \log t) \\
g_{33} &\approx a^2(1 - B_2 \log t)
\end{aligned}
\tag{7-40}$$

Estes resultados mostram que as perturbações geram uma anisotropia no plano YX, e crescem à medida que o universo evolui, e portanto o universo não é estável sob estas perturbações.

7.3 - INFLUENCIA DAS PERTURBAÇÕES SOBRE O CAMPO ESCALAR

Com a métrica perturbada, a equação do campo escalar real $\Phi(x)$ conformalmente acoplado ao campo gravitacional se escreve

$$\bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \Phi + (m^2 + \frac{1}{6} \bar{R}) \Phi = 0 \quad (7-41)$$

ou, desenvolvendo,

$$(\overset{(0)}{g})^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) \Phi_{|\mu|\nu} - (\overset{(0)}{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha \delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) \Phi_{|\alpha} + (m^2 + \frac{1}{6} (\overset{(0)}{R} + \delta R)) \Phi = 0 \quad (7-42)$$

Mantendo apenas termos até primeira ordem em $h_{\mu\nu}$ e considerando que, devido à condição (7-25) tem-se que $\delta R \approx 0$, $h^{\mu\nu} \overset{(0)}{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha \Phi_{|\alpha} = 0 = \overset{(0)}{g}^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Phi_{|\alpha}$, obtemos de (7-42),

$$\overset{(0)}{g}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi + (m^2 + \frac{1}{6} \overset{(0)}{R}) \Phi - h^{\mu\nu} \Phi_{|\mu|\nu} = 0 \quad (7-43)$$

Representando o campo escalar por (5-32),

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[A_k \Phi_k(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} + A_k^\dagger \Phi_k^*(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right] \quad (7-44)$$

a equação (7-42) conduz a

$$\ddot{\Phi}_k + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Phi}_k + \left[m^2 + \frac{1}{a^2} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) + \frac{1}{6} \overset{(0)}{R} \right] \Phi_k + \frac{1}{a^3} \left[\alpha(t) k_1^2 + \beta(t) k_2^2 + \gamma(t) k_3^2 \right] \Phi_k \approx 0 \quad (7-45)$$

ou

$$\ddot{\phi}_k + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi}_k + (\Omega_k^2(t) + \frac{1}{6} R^{(0)}) \phi_k = 0 \quad (7-45)$$

onde

$$\Omega_k^2(t) = m^2 + \frac{1}{a^2} \left[(1 + \frac{\alpha}{a}) k_1^2 + (1 + \frac{\beta}{a}) k_2^2 + (1 + \frac{\gamma}{a}) k_3^2 \right]$$

Introduzindo as variáveis η e $\chi_k(\eta)$ por $dt = a d\eta$ e $\phi_k = \chi_k(\eta)/a(\eta)$, a equação (7-46) se reduz a

$$\chi_k''(\eta) + a^2(\eta) \Omega_k^2(\eta) \chi_k(\eta) = 0 \quad (7-48)$$

onde a "linha" significa derivação com relação a η .

A solução de (7-47) pode ser expressa formalmente por uma equação integral do tipo da equação de Volterra. Escrevamos a equação (7-48) sob a forma

$$\chi_k'' + (\omega_k^2 + \Delta_k^2) \chi_k = 0 \quad (7-49)$$

onde

$$\begin{aligned} \omega_k^2(\eta) &= a^2(\eta) m^2 + k^2 \\ \Delta_k^2(\eta) &= \frac{1}{a(\eta)} \left[\alpha(\eta) k_1^2 + \beta(\eta) k_2^2 + \gamma(\eta) k_3^2 \right] \end{aligned} \quad (7-50)$$

Fazendo $\omega_k^2(\eta_0) = a^2(\eta_0) m^2 + k^2$, onde η_0 é um dado instante inicial a partir do qual começamos a observar as partículas, a equação (7-49) pode ser escrita sob a forma

$$\omega_k + \omega_k^2(\eta_0) \chi_k = \left[(a^2(\eta_0) - a^2(\eta) m^2 - \Delta_k^2(\eta)) \right] \quad (7-51)$$

A solução de (7-51) pode ser obtida por itera-

ções da equação integral

$$\chi_k(\eta) = \frac{A}{\omega_k(\eta_0)} \operatorname{sen} \omega_k(\eta_0)\eta + \frac{B}{\omega_k(\eta_0)} \cos \omega_k(\eta_0)\eta$$

$$+ \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{m^2 [a^2(\eta_0) - a^2(\eta')] - \Delta_k^2(\eta')}{\omega_k(\eta_0)} \operatorname{sen} \omega_k(\eta_0)(\eta - \eta') \chi_k(\eta') d\eta'$$
(7-52)

Fazendo $\eta_0 \equiv 0$ e impondo as condições iniciais

$$\chi_k(0) = 0 \text{ e } \chi'_k(0) = \sqrt{\omega_k(0)}$$

tem-se que $A = 1$ e $B = 0$ de modo que a equação (7-52) toma a forma

$$\chi_k(\eta) = \frac{\operatorname{sen} \omega_k(0)\eta}{\omega_k(0)} + \int_0^{\eta} \frac{m^2 [a^2(0) - a^2(\eta')] - \Delta_k^2(\eta')}{\omega_k(0)} \operatorname{sen} \omega_k(0)(\eta - \eta') \chi_k(\eta') d\eta'$$
(7-53)

Com esta expressão é possível estimar a reação das partículas criadas sobre a métrica.

7. 4 - REAÇÃO DAS PARTÍCULAS CRIADAS SOBRE A MÉTRICA

Vamos considerar o universo de Friedmann quasi-euclideano com $a(t) \sim t^{\frac{1}{3}}$, ($p = \rho$), as perturbações $\alpha(t)$,

$\beta(t)$ e $\gamma(t)$ dadas por (7-39) e nos restringir a caso $m = 0$.

Tomando $\chi_k(\eta) = \frac{\operatorname{sen} \omega_k(0)\eta'}{\omega_k(0)}$ como primeira apro

ximação em (7-52) e considerando apenas pequenos valores de η , num cálculo direto conduz a

$$\chi_k(\eta) \sim \omega_k^2(o) \left\{ \eta - (k_2^2 - h_3^2) \eta^3 \log \eta \right\} \quad (7-54)$$

Para calcular as componentes de tensor momentum-energia associado com as partículas criadas, vamos seguir a prescrição de Zel'dovich e Starobinskii⁽¹⁰⁾ e fazer uma primeira regularização, subtraindo os termos proporcionais a ω_k^2 e k_i^2 em (5-57, 58). Vamos supor que os outros termos divergentes que ainda permanecem podem ser regularizados de algum modo.

Um cálculo direto, usando (7-54) em (5-57, 58), conduz a

$$\begin{aligned} \langle 0 | T_0^0 | 0 \rangle &\sim \langle 0 | T^1 | 0 \rangle \sim f(k) t^{\frac{2}{3}} - F(k) t^{\frac{2}{3}} \log t \\ \langle 0 | T_2^2 | 0 \rangle &\sim f(k) t^{\frac{2}{3}} - (F(k) t^{\frac{2}{3}} \log t - H(k) t^{\frac{2}{3}}) \\ \langle 0 | T_3^3 | 0 \rangle &\sim f(k) t^{\frac{2}{3}} - (F(k) t^{\frac{2}{3}} \log t + H(k) t^{\frac{2}{3}}) \end{aligned} \quad (7-55)$$

onde voltamos à variável t , e $f(k)$, $F(k)$ e $H(k)$ são integrais divergentes nas componentes do momentum \vec{k} :

$$f(k) \sim \int d^3k \omega_k(o), \quad F(k) \sim \int d^3k \omega_k(o) (k_2^2 - k_3^2), \quad H(k) \sim \int d^3k \omega_k(o) k_1^2$$

Observemos que $F(k)$ e $H(k)$ sã aparecem nas expressões (7-55) devido à presença das perturbações.

Antes de introduzir as expressões (7-55) como fon

te de novas perturbações nas equações de Einstein, vamos subtrair os termos proporcionais $f(k) t^{\frac{2}{3}}$. Tais termos apareceriam mesmo na ausência das perturbações e não podem, portanto, ser associados com as partículas criadas devido às perturbações.

De (7-22) segue que as equações para as novas perturbações do tensor métrico são

$$\delta^{(2)} R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} \delta^{(2)} R \approx - \delta^{(2)} \langle T_{\mu}^{\nu} \rangle \quad (7-56)$$

onde

$$\begin{aligned} \delta \langle T_0^0 \rangle &\sim \delta \langle T_1^1 \rangle \sim F(k) t^{\frac{2}{3}} \log t \\ \delta \langle T^2 \rangle &\sim - (F(k) t^{\frac{2}{3}} \log t - H(k) t^{\frac{2}{3}}) \\ \delta \langle T^3 \rangle &\sim - (F(k) t^{\frac{2}{3}} \log t + H(k) t^{\frac{2}{3}}) \end{aligned} \quad (7-57)$$

Chamando de $\alpha'(t)$, $\beta'(t)$ e $\gamma'(t)$ às novas perturbações do tensor métrico, e utilizando o mesmo procedimento que conduziu ao sistema de equações (7-24, a,b) encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}}{a^2} \theta' - \frac{\dot{a}^2}{a^3} \theta &\approx - F(k) t^{\frac{2}{3}} \log t \\ \frac{1}{a} \ddot{\alpha}' + \frac{\dot{a}}{a^2} \dot{\alpha}' - \left(\frac{\ddot{a}}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^3} \right) \alpha' - \frac{1}{a} \ddot{\theta}' + \frac{\dot{a}}{a^2} \dot{\theta}' &\approx - F(k) t^{\frac{2}{3}} \log t \\ \frac{1}{a} \ddot{\beta}' + \frac{\dot{a}}{a^2} \dot{\beta}' - \left(\frac{\ddot{a}}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^3} \right) \beta' - \frac{1}{a} \ddot{\theta}' + \frac{\dot{a}}{a^2} \dot{\theta}' &\approx (F(k) t^{\frac{2}{3}} \log t - H(k) t^{\frac{2}{3}}) \\ \frac{1}{a} \ddot{\gamma}' + \frac{\dot{a}}{a^2} \dot{\gamma}' - \left(\frac{\ddot{a}}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^3} \right) \gamma' - \frac{1}{a} \ddot{\theta}' + \frac{\dot{a}}{a^2} \dot{\theta}' &\approx (F(k) t^{\frac{2}{3}} \log t + H(k) t^{\frac{2}{3}}) \end{aligned} \quad (7-58a, b, c, d)$$

onde

$$\theta'(t) = \alpha'(t) + \beta'(t) + \gamma'(t) \quad (7-59)$$

Multiplicando convenientemente cada uma das equações do sistema acima por $a(t)$ ou $a^2(t)$, verificamos que os termos em $\log t$ ficam multiplicados por t^n com $n > 1$. Na aproximação em que $t \ll 1$ estes termos podem ser desprezados, e, o sistema (7-59) fica sob a forma

$$\begin{aligned} \dot{\theta}' - \frac{\dot{a}}{a} \theta' &\approx 0 \\ \ddot{\alpha}' + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\alpha}' - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \alpha' - \ddot{\theta}' + \frac{\ddot{a}}{a} \theta' &\approx 0 \\ \ddot{\beta}' + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\beta}' - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \beta' - \ddot{\theta}' + \frac{\ddot{a}}{a} \theta' &\approx -H(k) t^{-\frac{1}{3}} \\ \ddot{\gamma}' + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\gamma}' - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \gamma' - \ddot{\theta}' + \frac{\ddot{a}}{a} \theta' &\approx H(k) t^{-\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (7-60 \text{ a,b,c,d})$$

Somando as três últimas equações do sistema (7-60) e considerando a primeira, encontramos uma condição de compatibilidade entre o sistema (7-60 b,c,d) e a equação (7-60a):

$$\theta' + \frac{\ddot{a}}{a} \theta' \approx 0 \quad (7-61)$$

A única solução de (7-61) compatível com (7-60a) é $\theta'(t) \sim t^{\frac{1}{3}}$. Com este resultado obtemos para α' , β' e γ' o sistema de equações desacopladas

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}' + \frac{1}{3} t^{-1} \dot{\alpha}' + \frac{1}{9} t^{-2} \alpha' &\approx 0 \\ \ddot{\beta}' + \frac{1}{3} t^{-1} \dot{\beta}' + \frac{1}{9} t^{-2} \beta' &\approx -H(k) t^{-\frac{1}{3}} \\ \ddot{\gamma}' + \frac{1}{3} t^{-1} \dot{\gamma}' + \frac{1}{9} t^{-2} \gamma' &\approx H(k) t^{-\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (7-62)$$

Omitindo as constantes (arbitrárias) estas equações têm como soluções

$$\begin{aligned}\alpha' (t) &\sim t^{\frac{1}{3}} \\ \beta' (t) &\sim t^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{1}{3}} \log t - H(k) t^{\frac{5}{3}} \\ \gamma' (t) &\sim -t^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{3}} \log t + H(k) t^{\frac{5}{3}}\end{aligned}\tag{7-63}$$

Nestas expressões podemos identificar os termos proporcionais a $t^{\frac{5}{3}}$ como as perturbações introduzidas no tensor métrico pelas partículas criadas devido a presença das ondas gravitacionais. Dentro de nossas aproximações estes termos são extremamente pequenos e, além disto, não tendem a isotropizar a métrica perturbada.

Podemos concluir a partir dos nossos resultados os casos como um mecanismo de isotropização do universo. Observemos que este resultado não é geral, isto é, não exclui o processo de criação de partículas dos possíveis processos de isotropização do cosmos.

CONCLUSÕES

As contribuições deste trabalho ao problema da criação de partículas escalares em universos em expansão podem ser sumarizadas no seguinte:

- 1 - Obtivemos uma solução exata das equações de Einstein tendo como fonte um campo escalar dependente apenas do tempo (modo mais baixo de vibração). Tal solução é anisotrópica e os coeficientes da métrica são potências do tempo cujos expoentes obedecem às relações que contêm a solução de Kasner para o vácuo no caso limite do campo escalar nulo. Verificamos que o volume evolui do mesmo modo que no caso da solução de Kasner. Verificamos também que, em consequência do campo escalar ser função apenas do tempo, a equação de estado é a equação relativista extrema $p = \rho$. Finalmente, mostramos que a presença da matéria descrita pelo campo escalar em regiões próximas da singularidade afeta a evolução da dinâmica do universo impedindo a existência de um "estágio de vácuo".
- 2 - Utilizando a analogia formal entre as equações de Maxwell escritas em uma variedade riemanniana com as mesmas equações escritas em um meio material em um espaço plano mostramos, de maneira simples, que em universo do tipo de Friedmann quasi-euclídeo não pode haver criação de fótons, um resultado que já é conhecido mas obtido por outro tipo de cálculo.
- 3 - Estudamos interação entre um campo escalar quantizado, com carga não nula, e campos eletromagnéticos e gravitacionais

clássicos. Mostramos que a presença de um campo eletromagnético homogêneo inibe o processo de criação de partículas^(*). Construímos um método unificado, baseado no formalismo Hamiltoniano, para tratar o problema da criação de partículas por campos eletromagnéticos e gravitacionais homogêneos, e calculamos expressões explícitas para o valor médio dos operadores de número de partículas e densidade de corrente. Os coeficientes da transformação de Bogoliubov que diagonalizam a Hamiltoniana do campo escalar foram identificados em termos da probabilidade de criação de um par de partículas.

- 4 - Finalmente, estudando a evolução de perturbações anisotrópicas produzidas por ondas gravitacionais no gauge transversal de traço nulo em universos do tipo de Friedmann quasi-euclídeos; obtivemos soluções exatas das equações de Einstein perturbadas nos casos em que a equação de estado é $p = \frac{1}{3} \rho$, $p = 0$ e $p = \rho$. No primeiro caso, verificamos que as perturbações podem ser removidas por uma transformação de coordenadas; no segundo, as perturbações geram um plano de anisotropia, mas são funções do tempo que evanescem rapidamente. No terceiro caso as perturbações geram um plano de anisotropia, e crescem a medida que o universo evolui. Para este último caso, calculando a reação das partículas criadas sobre a métrica verificamos que tal reação não é capaz de isotropizar a métrica perturbada. A partir deste resultado concluímos que o processo de criação de partículas, em geral, não funciona como um mecanismo de isotropização do universo, o que contraria certas afirmativas otimistas encontradas anteriormente na literatura.

(*) Esta parte do trabalho foi feita em colaboração com o Dr. Mario Novello.

APÊNDICE A - FORMAS DIFERENCIAIS

Os tensores de Riemann das métricas usadas no texto podem ser calculadas facilmente pelo método de Cartan, utilizando a teoria das formas diferenciais⁽³¹⁾. Este método, pelo menos para métricas com um certo grau de simetria, é muito mais eficiente que os métodos tradicionais. Dado um conjunto $\{\theta^A\}$ de vetores de base covariantes, escreveremos a métrica como

$$ds^2 = g_{AB} \theta^A \theta^B \quad (A-1)$$

Definindo-se as formas ω^A_B por

$$\omega^A_B = \gamma^A_{BC} \theta^C \quad (A-2)$$

verifica-se que

$$d\theta^A = -\omega^A_B \wedge \theta^B \quad (A-3)$$

e

$$dg_{AB} = \omega_{AB} + \omega_{BA} \quad (A-4)$$

γ^A_{BC} são chamados de coeficientes Ricci ou coeficiente de rotação. O símbolo \wedge indica o produto externo (ou de Grassman) cujas propriedades relacionaremos a seguir. A equação (A-3) é chamada de "primeira equação de Cartan!"

Definindo-se as 2-formas de curvatura Ω^A_B por

$$\Omega^A_B = d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B \quad (A-5)$$

mostra-se que

$$\omega^A_B = \frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D \quad (A-6)$$

onde R^A_{BCD} são as componentes do tensor de Riemann. A equação (A-5) é a "segunda equação de Cartan".

Para o nosso caso particular, dado o sistema de coordenadas x^A , é conveniente usar como base local os vetores $\vec{e}^A = \text{grad } x^A$, de modo que $\theta^A = dx^A$ e $g_{AB} = (\vec{e}_A \cdot \vec{e}_B) = \text{constante}$. Da equação (A-3) tem-se que

$$\omega_{AB} = -\omega_{BA} \quad (A-7)$$

Então, dados θ^A e g_{AB} , podemos calcular as formas ω^A_B e, de (A-5) e (A-6) obter as componentes do tensor de Riemann por inspeção. (Observemos que as formas ω^A_B são determinadas unicamente pelas equações (A-3) e (A-4)).

SUMÁRIO DAS FÓRMULAS BÁSICAS

- a) Se α e β são duas formas diferenciais de ordem m e n , respectivamente, e f é um escalar, então

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{m+n} \beta \wedge \alpha$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^m \alpha \wedge d\beta$$

$$d(f\alpha) = fd\alpha + df \wedge \alpha$$

$$d^2 \alpha = 0$$

b) Equações de Cartan

$$\begin{aligned}d\theta^A &= -\omega^A_B \wedge \theta^B \\dg_{AB} &= \omega_{AB} + \omega_{BA} \\ \Omega^A_B &= d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B \\ &= \frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D\end{aligned}$$

Vamos calcular as curvaturas da métrica de Friedmann usando esta técnica:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + \sigma^2(\chi) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)]$$

Escolhendo

$$\begin{aligned}\theta^0 &= dt \\ \theta^1 &= a(t) d\chi \\ \theta^2 &= a(t) \sigma(\chi) d\theta \\ \theta^3 &= a(t) \sigma(\chi) \text{sen}\theta d\phi\end{aligned} \tag{A-8}$$

a métrica se escreve

$$ds^2 = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2 \tag{A-9}$$

Tem-se então,

$$\begin{aligned}d\theta^2 &= 0 \\ d\theta^1 &= \dot{\frac{a}{a}} \theta^0 \wedge \theta^1 \\ d\theta^2 &= \frac{\dot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^2 + \frac{\sigma}{a\sigma} \theta^1 \wedge \theta^2 \\ d\theta^3 &= \frac{\dot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^3 + \frac{\sigma}{a\sigma} \theta^1 \wedge \theta^3 + \frac{\cot\theta}{a\sigma} \theta^2 \wedge \theta^3\end{aligned} \tag{A-10}$$

onde a "linha" significa derivação com relação a χ , e o ponto significa derivação com relação a t .

Usando a equação (A-3) obtem-se, por inspeção do sistema (A-10),

$$\begin{aligned}
 \omega^1_0 &= \omega^0_1 = \frac{\dot{a}}{a} \theta^1 \\
 \omega^2_0 &= \omega^0_2 = \frac{\dot{a}}{a} \theta^2 \\
 \omega^3_0 &= \omega^0_3 = \frac{\dot{a}}{a} \theta^3 \\
 \omega^2_1 &= -\omega^1_2 = \frac{\sigma'}{a} \theta^2 \\
 \omega^3_1 &= -\omega^1_3 = \frac{\sigma'}{a} \theta^3 \\
 \omega^3_2 &= -\omega^2_3 = \frac{\cot\theta}{a\sigma} \theta^3
 \end{aligned} \tag{A-11}$$

donde se obtém, por derivação

$$\begin{aligned}
 d\omega^1_0 &= \frac{\ddot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^1 \\
 d\omega^2_0 &= \frac{\ddot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^2 + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\sigma'}{a} \theta^1 \wedge \theta^2 \\
 d\omega^3_0 &= \frac{\ddot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^3 + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\sigma'}{a\sigma} \theta^1 \wedge \theta^3 + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\cot\theta}{a\sigma} \theta^2 \wedge \theta^3 \\
 d\omega^2_1 &= \frac{\sigma''}{a^2\sigma} \theta^1 \wedge \theta^3 \\
 d\omega^3_1 &= \frac{\sigma''}{a^2\sigma} \theta^1 \wedge \theta^3 + \frac{\sigma' \cot\theta}{a^2 \sigma^2} \theta^2 \wedge \theta^3 \\
 d\omega^3_2 &= \frac{1}{a^2\sigma^2} \theta^1 \wedge \theta^3
 \end{aligned} \tag{A-12}$$

As 2-formas de curvatura Ω^A_B são obtidas agora pela equação (A-5) e o sistema (A-12):

$$\begin{aligned}
\Omega_1^0 &= \frac{\ddot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^1 \\
\Omega_2^0 &= \frac{\ddot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^2 \\
\Omega_3^0 &= \frac{\ddot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^3 \\
\Omega_2^1 &= \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{\sigma''}{a^2 \sigma} \right] \theta^1 \wedge \theta^2 \\
\Omega_3^1 &= \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{\sigma''}{a^2 \sigma} \right] \theta^1 \wedge \theta^3 \\
\Omega_3^2 &= \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{1 + \sigma'^2}{a^2 \sigma^2} \right] \theta^2 \wedge \theta^3
\end{aligned} \tag{A-13}$$

Usando agora a equação (A-6), obtem-se

$$\begin{aligned}
R_{101}^0 &= R_{202}^0 = R_{303}^0 = \frac{\ddot{a}}{a} \\
R_{212}^1 &= R_{313}^1 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{\sigma''}{a^2 \sigma} \\
R_{323}^2 &= \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{1 + \sigma'^2}{\sigma^2} \right)
\end{aligned} \tag{A-14}$$

Destes últimos resultados segue que

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -3 \frac{\ddot{a}}{a} \\
R_{11} &= \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2}{a} \left(\frac{\sigma''}{\sigma} - \dot{a}^2 \right) \\
R_{22} &= R_{33} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\sigma''}{\sigma} - \dot{a}^2 \right) + \frac{1}{a^2} \left(\dot{a}^2 - \frac{1}{\sigma^2} - \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} \right) \\
R &= -6 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{4}{a^2} \left(\frac{\sigma''}{\sigma} - \dot{a}^2 \right) + \frac{2}{a^2} \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} - \dot{a}^2 \right)
\end{aligned} \tag{A-15}$$

onde $R = g^{AB} R_{AB}$ é o escalar de curvatura.

Definindo

$$\epsilon = \frac{1}{6} R^{(3)} = \frac{1}{6} \left[4 \frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{2}{\sigma^2} (1 + \sigma^2) \right] \quad (\text{A-16})$$

onde $R^{(3)}$ é a curvatura do tri-espaco, podemos escrever

$$R = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\epsilon}{a^2} \right] \quad (\text{A-17})$$

Finalmente, os elementos do tensor de Ricci

$$G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2} R g_{AB} \text{ se escrevem}$$

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{3}{a^2} (\dot{a}^2 + \epsilon) \\ G_{11} &= -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{1}{a^2} (2 \frac{\sigma''}{\sigma} + 3 \epsilon) \\ G_{22} &= G_{33} = -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\epsilon}{a^2} \end{aligned} \quad (\text{A-18})$$

Curvaturas da Métrica de Kasner

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dx^2 - b^2(t) dy^2 - c^2(t) dz^2$$

$$\begin{aligned} R_{00} &= - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} \right) \\ R_{11} &= \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} \\ R_{22} &= \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \\ R_{33} &= \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{c}}{c} \frac{\dot{b}}{b} \\ R &= -2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} \right) - 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \right) \end{aligned} \quad (\text{A-19})$$

Curvaturas da Métrica Mixmaster

$$ds^2 = dt^2 - \sum_{i=1}^3 \ell_i^2(t) (\sigma^i)^2, d\sigma^i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma^j \wedge \sigma^k$$

$$R_{00} = - \sum_{i=1}^3 \frac{\ddot{\ell}_i}{\ell_i}$$

$$R_{11} = \frac{(\dot{\ell}_1 \ell_2 \ell_3)^{\cdot}}{\ell_1 \ell_2 \ell_3} - \frac{1}{(\ell_1 \ell_2 \ell_3)^2} \left[\ell_1^4 - (\ell_2^2 - \ell_3^2)^2 \right]$$

$$R_{22} = \frac{(\ell_1 \dot{\ell}_2 \ell_3)^{\cdot}}{\ell_1 \ell_2 \ell_3} - \frac{1}{(\ell_1 \ell_2 \ell_3)^2} \left[\ell_2^4 - (\ell_1^2 - \ell_3^2)^2 \right]$$

$$R_{33} = \frac{(\ell_1 \ell_2 \dot{\ell}_3)^{\cdot}}{\ell_1 \ell_2 \ell_3} - \frac{1}{(\ell_1 \ell_2 \ell_3)^2} \left[\ell_3^4 - (\ell_2^2 - \ell_1^2)^2 \right]$$

(A-20)

$$R = -2 \sum_{i=1}^3 \frac{\ddot{\ell}_i}{\ell_i} + \frac{\dot{\ell}_1 \dot{\ell}_2}{\ell_1 \ell_2} + \frac{\dot{\ell}_2 \dot{\ell}_3}{\ell_2 \ell_3} + \frac{\dot{\ell}_1 \dot{\ell}_3}{\ell_1 \ell_3} +$$

$$+ \frac{1}{\ell_1 \ell_2 \ell_3^2} \left[\ell_1^4 + \ell_2^4 + \ell_3^4 - \frac{1}{2} (\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2)^2 \right]$$

APÊNDICE B - A CLASSIFICAÇÃO DE BIANCHI

Definição: Dada uma transformação infinitesimal de coordenadas $\bar{x}^\mu = x^\mu + \epsilon^A \xi_A^\mu(x)$, onde ϵ^A são os parâmetros da transformação, a condição para que esta transformação seja uma isometria é que os vetores $\vec{\xi}_A$ sejam vetores de Killing, isto é,

$$\xi_{A\alpha;\beta} + \xi_{A\beta;\alpha} = 0.$$

Estes vetores podem ser interpretados como operadores⁽³²⁾ e como consequência, podem ser desenvolvidos na base $\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\}$, fazendo-se $\vec{\xi}_A = \xi_A^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$. Pode-se mostrar então que o comutador de Lie de dois vetores de Killing $\vec{\xi}_A$ e $\vec{\xi}_B$ é dado por

$$[\vec{\xi}_A, \vec{\xi}_B] = \left(\xi_A^\mu \frac{\partial \xi_B^\alpha}{\partial x^\mu} - \xi_B^\mu \frac{\partial \xi_A^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (B-1)$$

$$= C_{AB}^D \vec{\xi}_D \quad (B-2)$$

onde os coeficientes C_{AB}^D são os coeficientes de estrutura da álgebra de Lie gerada pelos vetores de Killing $\vec{\xi}_A$.

Consideremos então um espaço-tempo cujo tri-espaço admite um grupo de isometrias tri-paramétrico. Identificando-se os vetores $\vec{\xi}_i$ com os vetores de base \vec{e}_i , pode-se mostrar que as constantes de estrutura definidas por (B-2) são iguais aos coeficientes de Ricci γ_{BC}^A , definidos em (A-2) como os coeficientes da expansão das formas ω na base das formas θ^A .

Usando-se a equação (A-3) tem-se então

$$d\theta^A = C_{BC}^A \theta^B \wedge \theta^C \quad (B-3)$$

A expressão acima é característica de espaços homogêneos tri-dimensionais e os diferentes tipos de universo podem ser caracterizados pelas constantes de estrutura associadas aos grupos de isométrias.

Baseando-se neste esquema, temos a seguinte classificação para espaços homogêneos, criada por Bianchi.

CLASSIFICAÇÃO DE BIANCHI

TIPO	CONSTANTES DE ESTRUTURA
I	$C_{BC}^A = 0$
II	$C_{23}^1 = -C_{32}^1 = 1$
III	$C_{23}^2 = -C_{32}^2 = 1$
IV	$C_{13}^1 = -C_{31}^1 = C_{23}^1 = -C_{32}^1 = C_{23}^2 = -C_{32}^2 = 1$
V	$C_{13}^1 = -C_{31}^1 = C_{23}^2 = -C_{32}^2 = 1$
VI	$C_{13}^1 = -C_{31}^1 = 1 ; C_{32}^2 = -C_{23}^2 = -h \quad (h \neq 0, 1)$
VII	$C_{32}^1 = -C_{23}^1 = C_{13}^2 = -C_{31}^2 = 1$ $C_{23}^2 = -C_{32}^2 = h \quad (h^2 < 4)$
VIII	$C_{23}^1 = -C_{32}^1 = C_{12}^3 = -C_{21}^3 = C_{13}^2 = -C_{31}^2 = 1$
IX	$C_{BC}^A = \epsilon_{BC}^A$

Dentro deste esquema de classificação, as métricas que usamos no texto são

Friedmann	{	aberto	:	Tipo V
		euclideano	:	Tipo I
		fechado	:	Tipo IX

Kasner : Tipo I

Mixmaster : Tipo IX

Um esquema mais sofisticado que o de Bianchi foi desenvolvido por Behr⁽³³⁾ e pode ser encontrado em⁽³⁴⁾ modificado com a introdução de uma classe de grupos mais ampla.

APÊNDICE C - EXTENSÃO DO MÉTODO WKB

Recentemente Chakraborty⁽³⁵⁾ desenvolveu uma extensão do método WKB que permite obter soluções aproximadas, em todas as ordens, da equação diferencial

$$\frac{d^2 F(x)}{dx^2} + \lambda^2(x) F(x) = 0 \quad (C-1)$$

desde que $\lambda^2(x)$ seja lentamente variável. O método consiste essencialmente no seguinte: fazendo

$$x_1 = \int \lambda(x) dx, \quad e \quad F_1 = \lambda^{1/2} F \quad (C-2)$$

a equação (C-1) se reduz a

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_1}{dx^2} + (1 + \sigma_2) F_1 &= 0 \\ \sigma_2 &= -\frac{1}{\lambda^{1/2}} \frac{d^2}{dx^2} \lambda^{1/2}, \quad 1 + \sigma_2 = \lambda_1^2 \end{aligned} \quad (C-3)$$

Se $|\sigma_2| \ll 1$ a solução de (C-3) é a solução WKB usual

$$F(x) = \frac{1}{\lambda^{1/2}} \left[A e^{i \int \lambda dx'} + B e^{-i \int \lambda dx'} \right] \quad (C-4)$$

Fazendo agora

$$x_2 = \int (1 + \sigma_2) \lambda dx = \int \lambda_1 dx \quad (C-5)$$

$$F_2 = \lambda^{1/2} (1 + \sigma_2)^{1/4} F$$

a equação (C-3) se reduz a

$$\frac{d^2 F}{dx_2^2} + (1 + \sigma_4) F_2 = 0 \quad (C-6)$$

$$\sigma_4 = - \frac{1}{(1 + \sigma_2)^{1/4}} \frac{(1 + \sigma_4)^{1/4}}{dx_2^2}, \quad 1 + \sigma_4 = \lambda_2^2$$

Se $|\sigma_4| \ll 1$ então é possível construir uma solução melhor que a (C-4).

De modo geral, podemos escrever

$$\frac{d^2 F_n}{dx_n^2} + \lambda_n^2 F_n = 0 \quad (C-7)$$

onde

$$F_n = \lambda^{1/2} F_{n-1}$$

$$= [\lambda^2 (1 + \sigma_2) (1 + \sigma_4) \dots (1 + \sigma_{2n-2})]^{1/4} F \quad (C-8)$$

$$dx_n = [\lambda^2 (1 + \sigma_2) (1 + \sigma_4) \dots (1 + \sigma_{2n-2})]^{1/4} dx$$

$$\lambda_n^2 = (1 + \sigma_{2n})$$

Então

$$F(x) = \frac{1}{[\lambda^2 (1 + \sigma_2) (1 + \sigma_4) \dots (1 + \sigma_{2n})]^{1/4}} \left\{ A e^{i \int [\lambda^2 (1 + \sigma_2) (1 + \sigma_4) \dots (1 + \sigma_{2n})]^{1/2} dx'} \right.$$

$$\left. + B e^{-i \int [\lambda^2 (1 + \sigma_2) (1 + \sigma_4) \dots (1 + \sigma_{2n})]^{1/2} dx'} \right\} \quad (C-9)$$

onde

$$\sigma_{2n+2} = - \frac{1}{(1+\sigma_{2n})^{1/4}} \cdot \frac{d^2}{dx_n^2} (1+\sigma_{2n})^{1/4} \quad (\text{C-10})$$

e

$$|\sigma_{2n+2}| \ll 1 \quad (\text{C-11})$$

A solução (C-9) é correta até a ordem n das derivadas do parâmetro λ^2 com relação a x_n .

APÊNDICE D - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (3-30):

$$\frac{1}{\text{sen}^2 \chi} \frac{d}{d\chi} \left(\text{sen}^2 \chi \frac{d\Pi}{d\chi} \right) + \left[\lambda^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{\text{sen}^2 \chi} \right] \Pi = 0$$

Fazendo a substituição

$$Z = \cos \chi \quad (\text{D-1})$$

a equação acima fica

$$(1-Z^2) \frac{d^2 \Pi}{dZ^2} - 3Z \frac{d\Pi}{dZ} + \left[\lambda^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{1-Z^2} \right] \Pi = 0 \quad (\text{D-2})$$

Pondo agora

$$\Pi(Z) = (1-Z^2)^{\frac{\ell}{2}} \Phi(Z) \quad (\text{D-3})$$

obtemos

$$(1-Z^2) \frac{d^2 \Phi}{dZ^2} - (2\ell+3)Z \frac{d\Phi}{dZ} + \left[\lambda^2 - \ell(\ell+2) \right] \Phi = 0 \quad (\text{D-4})$$

Fazendo finalmente

$$X = \frac{1}{2} (1-Z) \quad (\text{D-5})$$

obtemos

$$X(1-X) \frac{d^2 \Phi}{dX^2} + \left[\frac{3}{2} + \ell - (3+2\ell)X \right] \frac{d\Phi}{dX} + \ell^2 + \ell(\ell+2) \Phi = 0 \quad (\text{D-6})$$

que é uma equação hipergeométrica cujas soluções são dadas por por (36)

$$\Phi_1(x) = \mathcal{F} \left(\ell + \alpha + 1, \ell - \alpha + 1; \ell + \frac{3}{2}; x \right) \quad (\text{D-7a})$$

$$\Phi_2(x) = X^{-\left(\ell + \frac{1}{2}\right)} \mathcal{F} \left(\alpha + \frac{7}{2}, -\alpha + \frac{1}{2}; -\ell + \frac{1}{2}; x \right) \quad (\text{D-7b})$$

onde

$$\alpha^2 = \lambda^2 + 1 \quad (D-8)$$

A função hipergeométrica ϕ_1 , é bem comportada em $x = \chi = 0$ e singular em $\chi = \Pi$ ($x=1$). Se $x = \ell + n + 1$ (n inteiro) ϕ_1 se torna um polinômio. ϕ_2 de modo geral é singular em $x = 0$ e $x = 1$.

A partir das funções ϕ_1 e ϕ_2 , é possível construir uma solução que é singular apenas na origem⁽³⁶⁾.

$$\phi = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 \quad (D-9)$$

onde

$$c_1 = \Gamma(\ell + \alpha + 1) \Gamma(\ell - \alpha + 1) \Gamma(-\ell - \frac{1}{2})$$

$$c_2 = \Gamma(-\alpha + \frac{1}{2}) \Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \Gamma(\ell + \frac{1}{2})$$

Um processo prático para construir soluções de (3-30) é o seguinte: fazendo $\ell = 0$, temos que

$$\frac{1}{\text{sen}^2 \chi} \frac{d}{d\chi} \left(\text{sen}^2 \chi \frac{d\pi_0}{d\chi} \right) + \lambda^2 \pi_0 = 0 \quad (D-11)$$

A substituição $\pi_0 = \frac{\xi_0}{\text{sen} \chi}$ conduz a

$$\frac{d^2 \xi_0}{d\chi^2} + \alpha^2 \xi_0 = 0 \quad (D-12)$$

$$(\alpha^2 = \lambda^2 + 1)$$

Para esta última equação, podemos construir as seguintes soluções regulares em $\chi = 0$

$$\cdot \begin{matrix} (1) \\ \Pi_0 \end{matrix} = \frac{\text{sen } \alpha\chi}{\text{sen } \chi} \quad (\text{D-13})$$

$$\begin{matrix} (2) \\ \Pi_0 \end{matrix} = \frac{\text{cos } \alpha\chi}{\text{sen } \chi}$$

e a solução regular em $\chi = \Pi$,

$$\begin{matrix} (3) \\ \Pi_0 \end{matrix} = \frac{\text{sen} \alpha(\pi - \chi)}{\text{sen } \chi} \quad (\text{D-14})$$

Verifica-se facilmente que as soluções para $\ell \neq 0$ podem ser obtidas por

$$\Pi_\ell(\chi) = (-1)^\ell \text{sen}^\ell \chi \frac{d^\ell \Pi_0}{d(\text{cos } \chi)^\ell} = \text{sen}^\ell \chi \left(\frac{1}{\text{sen } \chi} \frac{d}{d\chi} \right)^\ell \Pi_0(\chi) \quad (\text{D-15})$$

com Π_0 dado por (D-13) ou (D-14).

REFERENCIAS

- 1) G. Burbidge, M. Burbidge, "Quasi-Stellar Objects", W.H. Freeman, San Francisco, 1967.
- 2) D.W. Sciama, "Modern Cosmology", Cambridge Univ. Press, London, 1972.
- 3) A. Penzias, R. Wilson, Phys. Rev. Letters 11, 557 (1967).
- 4) C.W. Misner, Ap. J. 151, 431 (1968).
- 5) A.G. Doroshkevich, Ya. B. Zel'dovich, I.D. Novikov, Sov. Phys. JETP 26, 408 (1968).
J.M. Stewart, M.N.R.A.S. 145, 347 (1969).
- 6) E.M. Lifshitz, I. M. Novikov, Adv. in Phys., 12, 185 (1963)
V.A. Belinskii, E.M. Lifshitz, I.M. Khalatnikov, Adv. in Phys., 19, 525 (1970).
- 7) L. Parker, Phys. Rev. Letters, 21, 562 (1968).
Phys. Rev. 183, 1057 (1969)
Phys. Rev. D3, 346 (1971)
- 8) Ya. B. Zel'dovich, JETP Letters 12, 307 (1970)
- 9) E. Schrödinger, "Expanding Universes", Cambridge Univ. Press, London, 1956.
- 10) Ya. B. Zel'dovich, A.A. Starobinskii, Sov. Phys. JETP, 34, 6, 1159 (1972).
- 11) A.A. Grib, S.G. Mamaev
Sov. J. of Nuclear Phys. 10, 6, 722 (1970)
14, 4, 450 (1972)
- 12) B.L. Hu, Tese de Doutorado, Universidade de Princeton, 1972.
- 13) M. Novello, "Tópicos de Cosmologia Relativista", Monografia XXXIV, CBPF, 1974.
- 14) C.W. Misner, Phys. Rev. Letters 22, 107 (1969).
- 15) M. Ryan, "Hamiltonian Cosmology", Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- 16) R. Penrose, "Les Houches Lectures 1963", Ed. por B. DeWitt, Gordon and Breach, New York, 1966.
- 17) T. Fulton, R. Rohrlich, Rev. Mod. Phys., 34, 442 (1962).

- 18) E. Erdelyi, "Higher Transcendental Function", Vol. II, Mc McGraw Hill, New York, 1963.
- 19) M. Bander, C. Itzykson, Rev. Mod. Phys., 38, 2, (1966).
- 20) G. Ludwig, J. Math. Phys., 12, 7 (1971).
K. Kuchar, Czech. J. Phys. B 13, 551 (1963).
- 21) S.A. Fulling, Tese, Universidade de Princeton, 1973;
Phys. Rev. D7, 10, 2850 (1973).
- 22) F.A. Berezin, "The Method of Second Quantization",
Academic Press, New York; 1966.
- 23) I.E. Tamm, J. Russ. Phys. Chem. Soc. 56, 248 (1924)
- 24) A.M. Volkov, A.A. Izmet's'ev, G.V. Skrotskii, Sov. Phys.
JETP 32, 4, 686, (1971).
- 25) L. Parker, S.A. Fulling, Phys. Rev. D9, 2, 341, (1972).
- 26) R. Utyama, B.S. DeWitt, J. Math. Phys. 3, 608 (1972)
- 27) L. Parker, S.A. Fulling, Phys. Rev. D7, 8 2357 (1973).
- 28) S.S. Schweber, "Introduction to Relativistic Quantum
Fields", Harper and Row, New York, 1966.
- 29) N.B. Narozhniy, A.I. Nikishov, Sov. J. of Nuclear
Phys. 11, 5, 596 (1970).
- 30) D.R. Brill, Phys. Rev. 133, 3B, 845 (1964).
- 31) W. Israel, "Differential Forms in General Relativity",
Dublin Institute for Advanced Studies, 1970.
- 32) F.K. Manasse, C.W. Misner, J. Math. Phys., 4, 751 (1963).
- 33) C.G. Behr, M. Math. Phys., 9, 497 (1968).
- 34) M.A.H. MacCallun, "Cargèse Lectures in Physics", Vol. 6, Ed.
por E. Schatzman, Gordon and Breach, New York, 1973.
- 35) B. Chakraborty, J. Math. Phys., 14, 2, 1973.
- 36) E.T. Whittaker, N.G. Watson, "Course of Modern Analysis"
Cambridge Univ. Press, London, 1927.