

Tese de
Mestrado

**Um Estudo da Não-Gaussianidade
da Radiação C3smica de Fundo**

Wilmar A. Cardona

Centro Brasileiro de Pesquisas F3sicas-CBPF
Rio de Janeiro, Maio de 2012

A minha família, com carinho.

Agradecimentos

Ao povo brasileiro por me brindar com a oportunidade de continuar minha formação neste país de tamanha riqueza cultural. Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelos recursos necessários para concluir meu projeto de pesquisa. Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) por oferecer as instalações adequadas para minha atividade científica. Ao grupo de Cosmologia Orientada para Observação, particularmente aos professores Marcelo Rebouças e Armando Bernui por discussões e ideias que ajudaram na elaboração deste trabalho. Com o professor Marcelo Rebouças estou especialmente grato por orientar meu trabalho durante o mestrado; por me motivar a pesquisar e me apresentar vários tópicos de pesquisa além do tratado neste trabalho; por ler e examinar com cuidado o documento final da minha dissertação; e por me apresentar alguns aspectos culturais e históricos do Brasil. A minha família pelo apoio incondicional e pela motivação constante para terminar com sucesso esta etapa.

Resumo

A degenerescência de modelos do universo primordial pode vir a ser resolvida através do estudo de funções espectrais com informações estatísticas adicionais ao espectro de potências do campo de flutuações de temperatura da radiação cósmica de fundo (RCF), ou seja, estudando a não-Gaussianidade (NG) das anisotropias da RCF. Como as medições da RCF contêm contribuições para NG que não têm uma origem primordial é importante usar diferentes estimadores estatísticos que podem fornecer informações sobre esses contaminantes.

Dois indicadores estatísticos para medir NG da RCF em grandes escalas angulares foram introduzidos recentemente na literatura. A partir de um mapa da RCF são gerados mapas de “skewness” e “kurtosis”, S e K, respectivamente. Esses indicadores foram usados em mapas não-Gaussianos simulados da RCF com NG do tipo local. Foi determinado, via análise χ^2 relativo ao caso Gaussiano, que os indicadores são sensíveis para detectar a NG do tipo local com amplitude $f_{\text{NL}}^{\text{local}} \gtrsim 500$, ou seja, os indicadores não são efetivos para detecção de NG do tipo local nos limites do WMAP. Por outro lado, o espectro de potências angulares, S_ℓ e K_ℓ , dos mapas S e K, apresenta oscilações possivelmente induzidas pelas intersecções nos dados da RCF que definem as funções $S(\theta, \phi)$ e $K(\theta, \phi)$.

Nesta tese fizemos uma extensão do trabalho [1] em três aspectos usando 12000 mapas simulados da RCF com NG do tipo local. Primeiro, construímos os indicadores S e K com um método modificado (método de células) sem intersecções nos dados da RCF que definem as funções $S(\theta, \phi)$ e $K(\theta, \phi)$. Mostramos que com esta abordagem modificada o espectro de potências angulares, S_ℓ e K_ℓ , não apresenta as oscilações que ocorrem no uso do método anterior (método de calotas esféricas). Em segundo lugar, examinamos a

sensibilidade a NG do tipo local nos limites do WMAP dos indicadores S e K modificados. A análise χ^2 mostra que com esta nova abordagem os indicadores S e K tampouco são efetivos na detecção de NG do tipo local com amplitude $-10 < f_{\text{NL}}^{\text{local}} < 74$. Contudo, a análise comparativa evidencia que o método de células define indicadores S e K mais sensíveis para detectar NG nos limites do WMAP que o método de calotas esféricas. Em terceiro lugar, a sensibilidade para a detecção de NG do tipo local dos indicadores S e K modificados foi determinada. Mostrou-se que são mais efetivos na detecção de NG do tipo local quanto menor for o número de células empregado na sua definição. Por exemplo, usando 48 células os indicadores S e K podem detectar NG do tipo local $f_{\text{NL}}^{\text{local}} \gtrsim 500$, enquanto que para 192 células tais indicadores são efetivos apenas para $f_{\text{NL}}^{\text{local}} \gtrsim 3000$.

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Introdução	1
1 O modelo padrão: cosmologia FLRW	5
1.1 Introdução	5
1.2 A estrutura geométrica	6
1.3 A dinâmica do universo	9
1.4 Comparação com as observações	14
1.5 O problema das condições iniciais no MP	19
1.5.1 A planeza	19
1.5.2 O horizonte	21
1.5.3 Outros problemas	26
2 O paradigma inflacionário	28
2.1 Introdução	28
2.2 O inflaton	29
2.3 Condições de rolamento lento e o regime inflacionário	33
2.4 Os modelos inflacionários	40
2.4.1 Modelos com um campo escalar	40
2.4.2 Modelos alternativos	44
3 Perturbações cosmológicas no cenário inflacionário	48
3.1 Introdução	48
3.2 Flutuações quânticas de um campo escalar	49
3.2.1 Solução para um cenário de Sitter	54
3.2.2 Solução para um cenário quase de Sitter	56

3.2.3	O espectro de potências	58
3.3	O universo não-homogêneo	62
3.3.1	O problema do calibre	62
3.3.2	Perturbações da métrica	66
3.3.3	Perturbações no tensor energia-momentum	69
3.3.4	Variáveis invariantes de calibre	72
3.3.5	Outras variáveis invariantes de calibre	76
3.3.6	A evolução das perturbações cosmológicas	78
4	Testando a inflação com a RCF	88
4.1	Introdução	88
4.2	O espectro de potências das perturbações da métrica	89
4.2.1	Perturbações escalares	90
4.2.2	Perturbações tensoriais	94
4.3	Relação com as observações	96
5	Estatística, cosmologia e mapas simulados da RCF	103
5.1	Introdução	103
5.2	Um pouco de estatística das perturbações cosmológicas	105
5.2.1	Funções de correlação e funções espectrais	105
5.2.2	O espectro de potências angulares	113
5.3	Estimativa da NG primordial: o biespectro	115
5.4	Mapas simulados das flutuações de temperatura da RCF	119
5.4.1	“Receita” para a simulação de mapas da RCF com NG do tipo local	122
6	Não-Gaussianidade primordial da RCF	130
6.1	Introdução	130
6.2	NG primordial e observações da RCF	132
6.3	Indicadores S e K: método de calotas esféricas	134
6.4	Indicadores S e K: método de células	138
6.5	Conclusões	149
	Apêndices	152
A	Perturbações das equações de Einstein	153
A.1	Perturbação das conexões	154
A.2	Perturbações do tensor de Ricci	155

A.3	Perturbações do escalar de Ricci	156
A.4	Perturbações do tensor de Einstein	157
B	Equação de movimento e tensor energia–momentum do in- flaton	159
B.1	Equação de movimento	159
B.2	Tensor energia–momentum	160

Lista de Figuras

1.1	Relação linear entre as velocidades radiais e as distâncias para o levantamento de galáxias feito por Hubble	15
1.2	Esquema da recombinação e espectro da RCF medido pelo instrumento FIRAS no COBE e ajustado com o espectro de um corpo negro	17
1.3	Os Parâmetros de densidade para a matéria Ω_M e para a energia escura Ω_Λ	18
1.4	Diagrama conforme do espaço FLRW	22
1.5	Diagrama conforme da RCF	23
1.6	Diagrama conforme espaço-tempo inflacionário.	25
2.1	Evolução das escalas durante o regime inflacionário.	30
2.2	Esquema do potencial no regime inflacionário.	38
2.3	Esquema de um potencial típico dos modelos inflacionários de campo “grande”	42
2.4	Um esquema de um potencial típico dos modelos inflacionários de campo “pequeno”.	43
2.5	Um esquema de um potencial típico dos modelos inflacionários híbridos.	44
3.1	Hipersuperfícies de tempo conforme constante	64
4.1	Mapa ILC das flutuações de temperatura da RCF.	96
4.2	Espectro de potências angulares da RCF.	100
4.3	Restrições do WMAP para r e n_s	102
5.1	Algumas configurações dos vetores de onda nas funções forma do biespectro.	118

5.2	Mapa gaussiano simulado das flutuações de temperatura da RCF ($f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 0$).	128
5.3	Mapa não-gaussiano simulado das flutuações de temperatura da RCF com NG do tipo local ($f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 5000$).	128
6.1	Mapa S construído com um número de calotas $N_c = 3072$ usando um mapa não-gaussiano simulado da RCF ($f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 500$) com $N_{\text{side}} = 512$	136
6.2	Espectro de potências angulares dos mapas S (acima) e os mapas K (em baixo) $f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 0, 500, 1000, 5000$	139
6.3	Partição Healpix da esfera	141
6.4	Mapa S (acima) e K (abaixo) construídos usando o método de células com $N'_{\text{side}} = 2$ (48 células). Cada divisão colorida nos mapas é uma célula.	143
6.5	Mapa S (acima) e K (abaixo) construídos usando o método de células com $N'_{\text{side}} = 4$ (192 células). Cada divisão colorida nos mapas é uma célula.	144
6.6	Espectro de potências angulares dos mapas K (acima) e S (abaixo) com $N'_{\text{side}} = 2$ (48 células), e $f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 0, -10, 11, 53, 74$ e 100.	147
6.7	Espectro de potências angulares dos mapas K (acima) e S (abaixo) com $N'_{\text{side}} = 2$ (48 células), e $f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 0, 200, 400, 500, 1000, 3000, 5000$	148

Lista de Tabelas

1.1	Relação entre o parâmetro de densidade, a curvatura e a geometria.	13
6.1	Significância estatística do espectro de potências angulares dos mapas S e K com $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ nos limites do WMAP. Mapas S e K construídos com o método de células.	149
6.2	Significância estatística do espectro de potências angulares dos mapas S e K com $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ nos limites do WMAP. Mapas construídos com o método de células e o método de calotas esféricas.	149
6.3	Significância estatística do espectro de potências angulares dos mapas S e K construídos com método de células e diferentes $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$	149

Introdução

Na atualidade a cosmologia vive um momento estimulante. Por um lado, o desenvolvimento técnico-científico do final do século passado tem permitido aumentar consideravelmente o volume e a precisão dos dados observacionais que possibilitam testar os modelos cosmológicos. Por outro lado, pelo menos três das questões que a cosmologia está tentando resolver podem dar origem a nova física.

Uma primeira questão é o entendimento do que causa a expansão acelerada do universo, descoberta em 1998 e que resultou na concessão do prêmio Nobel de Física em 2011. Encontra-se na literatura, dentre outras, propostas como a constante cosmológica, campos escalares com uma equação de estado dependente do tempo, e modificações da teoria da gravidade, mas não existe ainda uma explicação consensual para esta descoberta.

Uma outra questão importante para a cosmologia surgiu de um outro fato observacional. As curvas de rotação das galáxias, por exemplo, indicam que pode existir um outro tipo de matéria que não emite radiação eletromagnética, mas que interage gravitacionalmente. A natureza desta componente do universo, chamado de matéria escura, tampouco foi determinada.

Em terceiro lugar, está o problema de explicar a formação das estruturas (por exemplo, estrelas, galáxias, aglomerados de galáxias) que observamos no universo. A proposta teórica que tem tido mais sucesso na explicação da formação das estruturas é o paradigma inflacionário que supõe a existência de um regime acelerado posterior ao Big Bang. As flutuações quânticas durante esse período de expansão acelerada foram a semente para formação das estruturas que observamos no universo. Além de ser uma possível explicação para a formação das estruturas no universo, o paradigma inflacionário soluciona algumas das dificuldades do modelo padrão da cosmologia (MP) tais

como a planeza e o horizonte. No entanto, existem outros modelos inflacionários com motivações teóricas diferentes (por exemplo, os que consideram mais de um campo escalar, acoplamento não-mínimo com a gravidade, gravidade modificada, termos cinéticos não-canônicos) aos modelos inflacionários simples que também podem provocar uma etapa de expansão acelerada no universo primordial.

Projetos e colaborações internacionais estão fazendo medidas observacionais, em uma quantidade e com uma precisão sem precedente, que são usados para testar os modelos do universo. Em particular, examinando as propriedades estatísticas dos levantamentos de galáxias e dos dados das flutuações de temperatura da radiação cósmica de fundo (RCF) pode-se testar os diferentes modelos do universo primordial.

O estudo do espectro de potências das flutuações de temperatura da RCF indica uma distribuição aproximadamente gaussiana expressa, por exemplo, nas restrições observacionais no índice espectral ($n_s \approx 1$) e na razão r da amplitude das perturbações tensoriais e escalares ($r < 0.4$). Contudo, apesar de descartar vários modelos inflacionários, são numerosos os modelos do universo primordial que satisfazem essas restrições observacionais, e se faz necessário estudar as funções espectrais com informações estatísticas adicionais ao espectro de potências para quebrar essa degenerescência, em outras palavras, estudar o desvio de gaussianidade nos modelos inflacionários.

A forma padrão de estudar o desvio de gaussianidade nos dados das flutuações de temperatura da RCF é usar o biespectro, um estimador estatístico ótimo e que resulta ter umas propriedades uteis para testar os modelos do universo primordial. Os modelos inflacionários simples supõem:

1. A existência de um campo escalar que é o conteúdo energético dominante no universo primordial;
2. Que a energia cinética do campo escalar é tal que as suas flutuações se propagam à velocidade da luz;
3. Que o potencial do campo escalar é aproximadamente constante durante o regime inflacionário;
4. Um estado de vácuo inicial para o campo escalar chamado de vácuo de Bunch–Davies.

Os modelos inflacionários simples predizem um nível de não-gaussianidade

(NG) do tipo local com uma amplitude não-detectável ($f_{\text{NL}}^{\text{local}} \lesssim 10^{-6}$)¹ com a precisão dos instrumentos atuais. Portanto, se detectarmos de forma observacionalmente convincente NG do tipo local com grau $f_{\text{NL}}^{\text{local}} \gg 1$ todos os modelos inflacionários simples poderiam ser excluídos como modelos do universo primordial. Por outro lado, a não-deteccção de NG do tipo local ($f_{\text{NL}}^{\text{local}} \simeq 0$) excluiria todos os modelos inflacionários alternativos para descrever o universo primordial. Assim, a detecccção ou não-detecccção de NG do tipo local é uma forma eficaz de testar os modelos do universo primordial.

Nesta dissertação² fazemos um estudo da NG da RCF. No Capítulo 1 apresentamos alguns aspectos teóricos e observacionais do MP e discutimos algumas das suas dificuldades.

Mostra-se que a inflação pode solucionar alguns problemas do MP. No Capítulo 2 estudamos o modelo inflacionário mais simples que pode causar esse regime acelerado no universo primordial. Também apresentamos brevemente alguns modelos inflacionários alternativos.

Além de ser uma solução para as particulares condições iniciais do MP, o paradigma inflacionário permite explicar as estruturas que observamos no universo. Observações, por exemplo, das flutuações de temperatura da RCF ($\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$) são compatíveis com um tratamento perturbativo do problema da formação de estruturas. No Capítulo 3 tratamos a teoria das perturbações cosmológicas.

Existe um grande número de modelos inflacionários na literatura cuja validade deve ser testada através das observações astro-cosmológicas. No Capítulo 4 mostramos brevemente como as flutuações de temperatura da RCF são utilizadas para testar os modelos inflacionários. Particularmente, concentramos nossa atenção no índice espectral das perturbações escalares n_s e na razão r da amplitude das perturbações tensoriais e escalares.

Dados observacionais cada vez mais precisos e numerosos demandam uma análise estatística mais sofisticada para testar os modelos do universo. Sendo a estatística um ingrediente fundamental para a cosmologia atual, no Capítulo 5 apresentamos de forma sucinta algumas ferramentas estatísticas usadas

¹Este parâmetro é definido na Seção 5.3.

²Para acompanhar o conteúdo desta dissertação sem problema, o leitor precisa alguma familiaridade com a teoria da Relatividade Geral e um conhecimento de física ao nível da graduação.

em cosmologia e também nesta dissertação. O biespectro é tratado no contexto das flutuações de temperatura da RCF. Como os mapas não-gaussianos simulados da RCF com NG do tipo local são usados no estudo da NG e também nesta dissertação, neste capítulo apresentamos um algoritmo para gerá-los com vista a utilizá-los na análise de dois indicadores estatísticos da NG no capítulo final da dissertação.

Finalmente, no Capítulo 6 estudamos a NG das flutuações de temperatura da RCF usando mapas simulados da RCF e dois estimadores estatísticos introduzidos recentemente na literatura [2]. A cada mapa da RCF, no que esses dois indicadores são utilizados, correspondem mapas de “skewness” e “kurtosis”, S e K, respectivamente. Em [1] os indicadores foram usados em 6000 mapas não-gaussianos simulados da RCF com NG do tipo local. A análise estatística foi feita usando o espectro de potências angulares dos mapas S e K, S_ℓ e K_ℓ , e a sensibilidade dos indicadores estimada via χ^2 relativo a mapas S e K gerados a partir de mapas gaussianos simulados. O espectro de potências angulares, S_ℓ e K_ℓ , exibe oscilações possivelmente ocasionadas pela superposição de conjuntos de dados usados para a definição dos mapas S e K. Além disto, a análise feita em [1] mostrou que os indicadores não são sensíveis a amplitudes $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ nos limites do WMAP, isto é, $-10 < f_{\text{NL}}^{\text{local}} < 74$; os indicadores detectam NG do tipo local $f_{\text{NL}}^{\text{local}} \gtrsim 500$. Nesta dissertação modificamos a definição dos indicadores usando a partição Healpix da esfera para evitar a superposição dos conjuntos de dados utilizados para gerar os mapas S e K. Mostra-se que S_ℓ e K_ℓ , com os indicadores S e K assim definidos, não apresentam oscilações. Por outro lado, a análise estatística revela que os indicadores S e K modificados tampouco detectam NG do tipo local nos limites do WMAP e que a sua sensibilidade é para NG com $f_{\text{NL}}^{\text{local}} \gtrsim 500$. Os principais resultados deste capítulo constituem a contribuição original desta dissertação e estão sendo preparados para publicação.

Capítulo 1

O modelo padrão: cosmologia FLRW

1.1 Introdução

Com o desenvolvimento técnico-científico do final do século XX o estudo do universo mudou completamente: a cosmologia já não é mais uma área de pesquisa majoritariamente teórica. Hoje em dia, ao redor do mundo, existem vários projetos e colaborações internacionais tentando procurar evidência observacional — cada vez mais precisa — que permita testar os modelos do universo. É o caso das missões PLANCK [3, 4] e EUCLID [5] da European Space Agency (ESA), o Large Hadron Collider (LHC) [6] da European Organization for Nuclear Research (CERN), o Wide-Field Infrared Survey Telescope (WFIRST) [7, 8] da National Aeronautics and Space Administration (NASA), o South Pole Telescope (SPT) [9, 10], o Hobby-Eberly Telescope Dark Energy Experiment (HETDEX) [11], a Cosmic Inflation Probe (CIP) [12], a missão CMBPol [13] da NASA, o Large Synoptic Survey Telescope (LSST) [14], o Wigglez Dark Energy Survey (Wigglez) [15, 16], dentre outros. Todos esses projetos buscam responder a questões fundamentais para a cosmologia, tais como: qual é a natureza da matéria escura? Por que o universo está se expandindo aceleradamente? Como se formaram as estruturas no universo? Qual é a física que melhor descreve o universo primordial?.

Neste capítulo¹ será descrito brevemente o modelo que até agora tem tido mais sucesso no estudo do universo: a cosmologia Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) ou, simplesmente, modelo padrão da cosmologia (MP).² Na Seção 1.2 é feito o desenvolvimento dos principais aspectos geométricos do MP. Na Seção 1.3 são descritas as equações que governam a dinâmica do universo neste modelo. Depois, na Seção 1.4, descrevemos as suas principais evidências observacionais. Finalmente, na Seção 1.5 se tratam alguns dos problemas do MP nas suas condições iniciais; em particular destacamos os problemas da planeza e do horizonte. Resolver estes dois problemas foi uma grande motivação para o surgimento do paradigma inflacionário, que será tratado no Capítulo 2.

1.2 A estrutura geométrica

A cosmologia descreve a estrutura e a dinâmica do universo. No entanto, para estudar o universo são feitas algumas hipóteses simplificadoras que são consistentes com as observações.

Um dos pilares do MP é o Princípio Cosmológico (PC). Este afirma que nosso universo é homogêneo e isotrópico³ em uma escala $\sim 100 h^{-1}$ Mpc.⁴ No MP, o universo é considerado como uma variedade quadridimensional. Pode-se mostrar que em uma variedade quadridimensional a métrica⁵ mais geral que

¹Ao longo da dissertação usamos unidades onde $c = \hbar = k$ (constante de Boltzmann) = 1 de forma tal que $1 m = 5.068 \times 10^{15} GeV^{-1}$, $1 Kg = 5.610 \times 10^{26} GeV$, $1 s = 1.519 \times 10^{24} GeV^{-1}$ e $1 K = 8,617 \times 10^{-14} GeV$.

²Cabe apontar que existem outras propostas para a descrição do universo. Entre elas poderia se mencionar os chamados modelos não homogêneos [17], os modelos cíclicos [18], os modelos com dimensões extras [19], os modelos quase-estacionários [20] (ver [21] para uma réplica a [20]), e modelos desenvolvidos com teorias alternativas à Relatividade Geral [22, 23].

³Um espaço homogêneo é invariante sob translações. Um espaço isotrópico é invariante sob rotações. Um espaço que é isotrópico em cada ponto, é homogêneo. Mas um espaço invariante sob translações em cada ponto não é necessariamente invariante sob rotações.

⁴ $1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc} \sim 30.857 \times 10^{18} \text{ km}$; para ter uma ideia dessa escala basta lembrar que a distância até Andromeda, a galaxia mais próxima à nossa, é $\approx 0.8 \text{ Mpc}$. A constante h , segundo os dados do WMAP 7, é 0.710 ± 0.025 [24].

⁵Nesta dissertação usamos a assinatura $(-, +, +, +)$ para a métrica do espaço-tempo 4 dimensional.

considera as condições do PC é a célebre métrica FLRW,⁶

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (1.1)$$

onde

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.2)$$

é a métrica para a esfera unitária, r, θ, ϕ são coordenadas comoveis,⁷ t o tempo cósmico, $a(t)$ o fator de escala e K é a constante de curvatura de hipersuperfícies tridimensionais: $K = 1, -1, 0$ para geometrias esféricas, hiperbólicas e planas, respectivamente. A métrica FLRW também pode ser reescrita na forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[d\chi^2 + f(\chi)^2 d\Omega^2 \right], \quad (1.3)$$

onde a relação entre r e χ é dada por

$$r = f(\chi) = \left\{ \begin{array}{ll} \sin \chi & \longrightarrow K = 1 \\ \chi & \longrightarrow K = 0 \\ \sinh \chi & \longrightarrow K = -1 \end{array} \right\}. \quad (1.4)$$

Se consideramos uma trajetória radial para um fóton emitido em (t, χ) e detectado em $(t_0, 0)$, podemos usar a métrica (1.3) com $ds = 0$ para encontrar

$$\chi = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.5)$$

Se tomamos duas cristas consecutivas de uma onda eletromagnética e consideramos que o fator de escala $a(t)$ é aproximadamente constante durante o período de um sinal luminoso, encontramos que

⁶Ver [25] para mais detalhes formais sobre esta métrica.

⁷Em um sistema de coordenadas comóvel, observadores com coordenadas comoveis constantes estão em repouso com respeito à expansão do Universo.

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a_0}{a_1}, \quad (1.6)$$

onde λ_0 e λ_1 são os comprimentos de onda da radiação eletromagnética observada e emitida, respectivamente; $a_0 \equiv a(t_0)$ e $a_1 \equiv a(t)$, referem-se ao fator de escala no instante da detecção e da emissão, respectivamente.

Definindo o “red-shift” ou deslocamento para o vermelho z como

$$z \equiv \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - 1, \quad (1.7)$$

pode-se escrever a expressão (1.6) como uma relação entre o deslocamento para o vermelho e o fator de escala

$$z + 1 = \frac{a_0}{a_1}. \quad (1.8)$$

O fator de escala $a(t)$ é uma função importante porque sua forma funcional, como se verá depois, diz em que regime o universo se encontra. Supondo que $a(t)$ seja uma função analítica, pode ser expandida numa série de Taylor

$$a(t) = a_0 \left\{ 1 + \frac{t - t_0}{t_H} - \frac{q_0}{2} \left(\frac{t - t_0}{t_H} \right)^2 + \dots \right\}, \quad (1.9)$$

onde

$$t_H \equiv \frac{a(t_0)}{\dot{a}(t_0)}, \quad (1.10)$$

é o tempo de Hubble e

$$q_0 \equiv - \left[\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \right]_{t_0}, \quad (1.11)$$

é o parâmetro de desaceleração.⁸ Da equação (1.11) pode ser inferido que quando $q_0 < 0$ ter-se-ia um universo acelerado porque, nesse caso, $\ddot{a} > 0$.

O fator de escala também é usado para definir uma grandeza chamada de parâmetro de Hubble, expressa por

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.12)$$

com a qual o tempo de Hubble t_H pode ser reescrito como

$$t_H = H^{-1}(t_0). \quad (1.13)$$

Para finalizar esta seção definimos o horizonte de partícula, uma grandeza que será importante no tratamento do cenário inflacionário no Capítulo 2. Tomando a métrica FLRW (1.1) e considerando a origem do tempo cósmico como $t = 0$, ter-se-ia que a maior coordenada radial $r_{max}(t)$ desde a qual um observador no tempo t receberia sinais viajando com a velocidade da luz é

$$\int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{r_{max}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (1.14)$$

sendo $r_{max}(t)$ chamado de horizonte de partícula. A distância própria correspondente ao horizonte de partícula seria

$$d_{max}(t) = a(t) \int_0^{r_{max}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (1.15)$$

1.3 A dinâmica do universo

Se o interesse da cosmologia é o estudo do universo em grande escala, é necessário determinar quais são as interações fundamentais que devem ser consideradas para tal fim. Na atualidade, são conhecidas quatro interações

⁸ \dot{a} indica a derivada com respeito ao tempo cósmico t do fator de escala $a(t)$.

fundamentais na natureza: forte, fraca, eletromagnética e gravitacional. As interações forte e fraca, confinadas ao interior do núcleo, têm intervalos de ação que não ultrapassam os 10^{-15} m e 10^{-16} m, respectivamente. Porém, a escala que o PC considera é da ordem de 10^{24} m.. Portanto, essas interações são desprezíveis no contexto cosmológico. Em relação à interação eletromagnética o que pode ser dito é que não há evidência de que as partes do universo não sejam eletricamente neutras na escala que está sendo considerada e, portanto, como a carga elétrica e as correntes são as fontes do campo eletromagnético, não haveria uma interação eletromagnética a ser considerada. Como consequência, a única interação da natureza que deveria ser considerada, no contexto cosmológico, é a interação gravitacional.

A teoria padrão para a descrição da interação gravitacional é a Relatividade Geral (RG). Segundo ela, há uma relação entre a geometria do espaço-tempo e o conteúdo energético. Para descrever o conteúdo energético no MP é usado o tensor energia-momentum de um fluido perfeito expresso por

$$T_{\mu\nu} = P g_{\mu\nu} + (P + \rho) U_\mu U_\nu \quad \text{ou} \quad T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho, P, P, P), \quad (1.16)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo, P , ρ , U_μ são a pressão, a densidade e a quadrivelocidade do fluido, respectivamente. Um fluido ideal cuja pressão é uma função somente da densidade é chamado de fluido barotrópico. No MP é admitido que as componentes energéticas do Universo são fluidos ideais barotrópicos com uma equação de estado da forma

$$P = w\rho, \quad (1.17)$$

com w uma constante que depende do fluido considerado: $w = 1/3, 0$ para radiação e matéria, respectivamente; se $w < -1/3$, o fluido é associado com a energia escura.⁹

As conexões $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ da métrica $g_{\mu\nu}$ são definidas como

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\rho} \right). \quad (1.18)$$

⁹Uma revisão sobre energia escura pode ser encontrada em [26]. Outras referências que o leitor pode achar úteis são [27, 28, 29].

Com as conexões (1.18) é possível definir o tensor de Riemann

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda_{\beta\mu}, \quad (1.19)$$

o tensor de Ricci — uma contração do tensor de Riemann (1.19) —

$$R_{\mu\nu} \equiv \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\alpha} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\alpha}, \quad (1.20)$$

e o escalar de Ricci — uma contração do tensor de Ricci —

$$R \equiv g^{\mu\alpha} R_{\alpha\mu} = R^\mu{}_\mu. \quad (1.21)$$

As equações de Einstein para um universo cujo conteúdo material é descrito por um fluido perfeito (1.16) são

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \quad ; \quad \kappa^2 \equiv \frac{8\pi}{M_p^2} \quad ; \quad M_p^2 \equiv \frac{1}{G}, \quad (1.22)$$

sendo Λ e M_p , respectivamente, a constante cosmológica e a massa de Planck; $G_{\mu\nu}$ é o chamado tensor de Einstein definido como

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (1.23)$$

As equações de Einstein (1.22) relacionam o conteúdo energético do universo (lado direito) com a sua geometria (lado esquerdo). Definindo o tensor energia-momentum para a constante cosmológica como

$$T_{\mu\nu}^{vac} \equiv -\frac{\Lambda g_{\mu\nu}}{\kappa^2}, \quad (1.24)$$

a equação (1.22) pode ser reescrita como

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (1.25)$$

sendo $T_{\mu\nu}$ o tensor energia-momentum total, quer dizer, resultado da soma de todas as contribuições, incluindo a da constante cosmológica.

Da componente temporal das equações de Einstein (1.25) é possível obter uma das equações fundamentais do MP, chamada na literatura de equação de Friedman e expressa por

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa^2 \rho}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (1.26)$$

onde ρ e K são a densidade total de energia e a constante de curvatura, respectivamente. Das componentes espaciais de (1.25) e da equação de Friedman (1.26) obtemos uma outra equação importante para o MP, a equação de aceleração ou equação de Raychaudhuri

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3P). \quad (1.27)$$

Por outro lado, se usamos a identidade

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2, \quad (1.28)$$

junto com a equação de Friedman (1.26) na equação de aceleração (1.27), podemos escrever

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2}(\rho + P) + \frac{K}{a^2}. \quad (1.29)$$

Definindo o parâmetro de densidade Ω_i para cada tipo de matéria como

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{\rho_i(t)}{\rho_c(t)}; \quad \rho_c \equiv \frac{3H^2}{\kappa^2}; \quad \rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{\kappa^2}, \quad (1.30)$$

sendo i um índice para os diferentes tipos de matéria, ρ_c a densidade crítica, e ρ_Λ a densidade de energia da constante cosmológica, a equação de Friedman (1.26) pode ser reescrita na forma

$$\Omega_{Tot}(t) - 1 = \frac{K}{a^2 H^2(t)}, \quad (1.31)$$

onde

$$\Omega_{Tot}(t) = \sum_i \Omega_i. \quad (1.32)$$

Assim, da equação (1.31), vê-se que quando $\Omega_{Tot}(t)$ é igual a um, o universo é plano. Na tabela (1.1) pode se observar a relação entre o parâmetro de densidade Ω_{Tot} e a constante de curvatura K .

Densidade	Curvatura	Geometria
$\Omega_{Tot} > 1$	$K = 1$	esférica
$\Omega_{Tot} = 1$	$K = 0$	plana
$\Omega_{Tot} < 1$	$K = -1$	hiperbólica

Tab. 1.1: Relação entre o parâmetro de densidade, a curvatura e a geometria.

Lembrando a identidade de Bianchi¹⁰ para o tensor de Ricci,

$$2R_{\sigma;\alpha}^{\alpha} - R_{;\sigma} = 0, \quad (1.33)$$

e aplicando-a nas equações de Einstein (1.25), mostra-se que o tensor energia-momentum deve satisfazer

$$T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0, \quad (1.34)$$

que é igual à equação de continuidade

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (1.35)$$

Resolvendo essa equação diferencial com o uso da equação de estado (1.17), encontram-se expressões para a evolução da densidade ρ para os diferentes tipos de matéria

$$\rho_i = \rho_{0i} a^{-3(1+w)}; \quad \left\{ \begin{array}{l} w = 1/3 \longrightarrow \rho_{\gamma} \propto a^{-4} \\ w = 0 \longrightarrow \rho_M \propto a^{-3} \\ w = -1 \longrightarrow \rho_{\Lambda}(a) = \rho_{\Lambda}(a_0) \end{array} \right\}, \quad (1.36)$$

¹⁰O símbolo “;” na equação (1.33) denota a derivada covariante.

onde γ , M e Λ se referem a radiação, matéria não-relativista e constante cosmológica, respectivamente.

Com as relações que foram estabelecidas até agora, também é possível obter uma expressão para o fator de escala $a(t)$ nos diferentes regimes na história do universo, quer dizer, dominância de radiação, matéria e energia escura. Para a constante de curvatura $K = 0$ e $w \neq -1$, as equações (1.36) e (1.26) dão como resultado para o fator de escala

$$a(t) \propto (t - t_0)^{\frac{2}{3(1+w)}}. \quad (1.37)$$

Uma situação de interesse se apresenta quando o universo se expande aceleradamente. A condição para que isso aconteça pode ser obtida das equações (1.17) e (1.27); o universo se expandirá aceleradamente se

$$w < -1/3, \quad (1.38)$$

portanto, ele deve ser dominado por uma componente do tipo da energia escura.¹¹ Se o fluido que domina o conteúdo energético do universo tem uma equação de estado $w = -1$, chamada de constante cosmológica, diz-se que o universo está em uma etapa de Sitter; nessa situação e com $K = 0$, vê-se das equações (1.36) e (1.26), que o fator de escala $a(t)$ é expresso por

$$a(t) \propto e^{Ht}, \quad (1.39)$$

uma solução que será importante no contexto inflacionário.

1.4 Comparação com as observações

Há uma consistência notável entre o MP e as observações.¹² Em 1929, um aspecto fundamental do MP foi esclarecido. Observando o deslocamento para o vermelho (1.7) das galáxias, Edwin Hubble [33] mostrou que nosso Universo

¹¹Embora existam tentativas de explicar a expansão acelerada sem recorrer à energia escura, por exemplo, modificando a Relatividade Geral.

¹²O leitor pode achar úteis as referências [30, 21, 31] e o livro [32].

está em expansão.¹³ Hubble interpretou as suas medições como um efeito Doppler e mostrou que existe uma relação linear — hoje conhecida como lei de Hubble — entre a velocidade própria da galáxia v_p e a sua distância \mathfrak{R} à origem de um sistema de coordenadas comóvel que pode se escrever como

$$\frac{d\mathfrak{R}}{dt} = H_0\mathfrak{R} + v_p, \quad (1.40)$$

onde H_0 é a constante de Hubble¹⁴ que indica a taxa de expansão do universo no tempo presente. A relação¹⁵ é mostrada na figura (1.1).

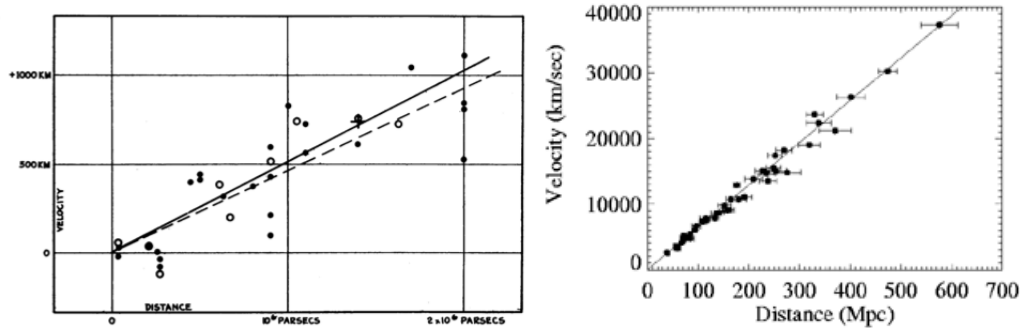


Fig. 1.1: Relação linear entre as velocidades radiais e as distâncias para o levantamento de galáxias feito por Hubble (esquerda) e para dados recentes (direita). As figuras são das referências [33] e [36].

Outros trabalhos fundamentais no desenvolvimento do MP estão relacionados à abundância de elementos leves no universo. G. Gamov, R. A. Alpher e H. Bethe em [37], [38] e [39] analisaram as reações nucleares que deveriam ter tido lugar no universo primordial e conseguiram ajustar as observações da abundância de elementos químicos tais como Hidrogênio, Hélio e Lítio. A física da nucleosíntese primordial está um pouco fora da linha geral desta dissertação e não será tratada com profundidade. Contudo, o leitor pode encontrar mais detalhes sobre a nucleosíntese primordial e a sua relação com

¹³Mais detalhes sobre a descoberta em [34].

¹⁴Detalhes sobre a sua medição em [35].

¹⁵A referência [36] contém um diagrama de Hubble para distâncias no intervalo 0 – 600 Mpc construído com dados mais recentes; a relação linear ainda é confirmada nessa escala.

a predição da radiação cósmica de fundo (RCF) em [40]. Umás outras referências mais recentes são [41], [42] e [43].

Uma das evidências observacionais mais importantes para o MP é a descoberta da RCF por A. Penzias e R. Wilson [44] em 1965, quando detectaram um excesso na temperatura da antena de aproximadamente 3.5 K que era isotrópico, não polarizado e independente das estações do ano. Entende-se que esta radiação vem da época da recombinação; depois que os elétrons e núcleons se juntaram para formar os elementos leves, os fótons conseguiram se propagar livremente através do Universo transparente.¹⁶ O espectro dessa radiação coincide com o espectro de um corpo negro a uma temperatura ~ 2.7 K. Considerando que o universo foi primeiro dominado pela radiação, e usando a equação de Friedman (1.26) como função da temperatura junto com o valor observado da constante de Hubble H_0 e o valor $K = 0$ para a constante de curvatura, estima-se que a temperatura da RCF deve estar — hoje — em um intervalo 1 – 10 K¹⁷. Na figura (1.2) pode ser observado o espectro completo da RCF medido pelo instrumento FIRAS no COBE e um esquema da época da recombinação. Como consequência de todas estas observações o MP ganhou maior credibilidade e acabou se impondo frente ao modelo estacionário desenvolvido por F. Hoyle, H. Bondi e T. Gold.

Observações recentes indicam que é plausível assumir as hipóteses de homogeneidade e isotropia no MP.¹⁸ Diferentes levantamentos de galáxias feitos por grupos de pesquisa ao redor do mundo como o 2dF Galaxy Redshift Survey [56], o CfA Redshift Survey [57], e o Sloan Digital Sky Survey [58, 59], indicam que o universo é homogêneo na distribuição de massa em uma escala ~ 100 Mpc. Por outro lado as observações da RCF, feitas primeiro pelo (COBE) [60, 61] e depois pelo Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) [62], sugerem que o universo é isotrópico porque as anisotropias $\frac{\Delta T}{T}$ detectadas na temperatura da RCF são $\sim 10^{-5}$.

¹⁶A situação que precede um universo transparente pode ser imaginada em analogia com a propagação da radiação em um meio condutor que se estuda nos cursos de eletromagnetismo. Nesse caso se diz que o universo é opaco.

¹⁷Segundo os dados do Cosmic Background Explorer (COBE) [45] a temperatura da RCF é 2.726 ± 0.010 K (95% IC).

¹⁸Recentemente Zhang e Stebbins [48] mostraram que o Princípio Copernicano (uma versão fraca do PC) deve ser satisfeito em uma escala ~ 1 Gpc ou maior porque do contrário haveriam efeitos observacionais diferentes dos registrados pelo Atacama Cosmology Telescope (ACT) [49, 50] e o SPT. Outras referências que examinam o PC são [51], [52],

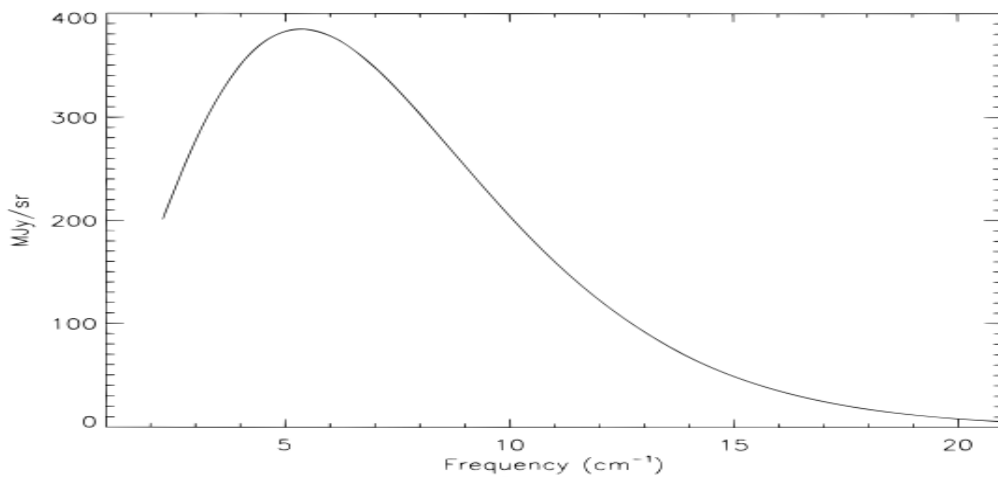
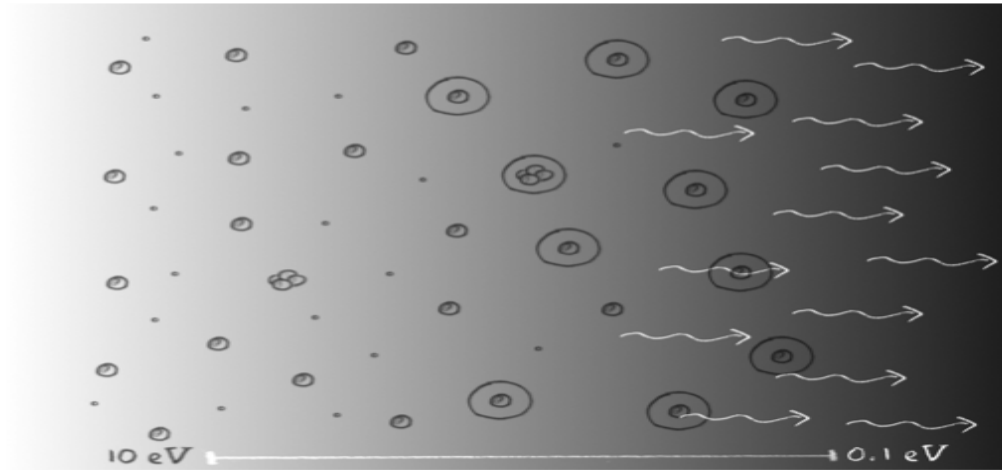


Fig. 1.2: Um esquema da época da recombinação (acima). Figura da referência [46]. Espectro da RCF (em baixo) medido pelo instrumento FIRAS no COBE e ajustado com o espectro de um corpo negro com temperatura ~ 2.7 K. As incertezas são tão pequenas que estão dentro da linha de ajuste. A figura é da referência [47].

Finalmente, deve-se dizer que observações recentes de supernovas (SNe) tipo Ia [64], [65] e [66], Baryonic Acoustic Oscillations (BAO) [67, 68] e RCF [62], indicam que

[53], [54] e [55].

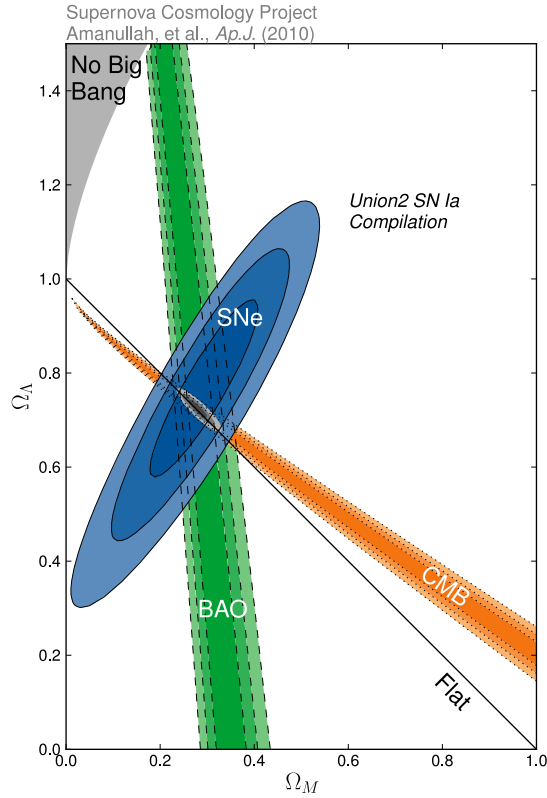


Fig. 1.3: Os Parâmetros de densidade para a matéria Ω_M e para a energia escura Ω_Λ . A linha preta $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$, corresponde a um Universo com uma geometria plana. As observações de SNe, BAO e RCF coincidem em uma região que favorece um Universo plano com $\Omega_M \approx 0.3$ e $\Omega_\Lambda \approx 0.7$. Figura da referência [63].

$$\Omega_{Tot} = \Omega_\gamma + \Omega_M + \Omega_\Lambda \approx 1, \quad (1.41)$$

tendo para a radiação $\Omega_\gamma \approx 0$, para a matéria (bariônica e não bariônica) $\Omega_M \approx 0.267 \pm 0.028$ e para a energia escura $\Omega_\Lambda \approx 0.734 \pm 0.029$. Na figura (1.3), além das regiões permitidas de parâmetros dadas pelas diferentes observações, pode-se observar a linha preta

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1, \quad (1.42)$$

que corresponde a um universo plano. Portanto, no contexto do MP e da equação de Friedman (1.31), poderíamos dizer que o Universo é aproximadamente plano e está se expandindo aceleradamente,¹⁹ porque seu conteúdo energético é dominado por um tipo de matéria Ω_Λ que tem pressão negativa e usualmente é chamada de energia escura.²⁰

1.5 O problema das condições iniciais no MP

Como foi notado na Seção 1.4, as observações indicam que o universo é plano, homogêneo e isotrópico. Para ser compatível com essas observações o MP requer umas condições iniciais bastante particulares nas equações que descrevem a dinâmica do universo que foram discutidas na Seção 1.3. Nesta seção vamos colocar em evidência a origem desses problemas,²¹ principalmente os problemas da planeza e do horizonte.

No entanto, antes de tratar os problemas associados com as condições iniciais do MP, vamos precisar um pouco o significado de tais condições como é feito em [76]. Pode-se-ia concluir, das equações de evolução do universo, que o MP tem uma singularidade em $t = 0$: quando $t \rightarrow 0$, a temperatura $T \rightarrow \infty$. Assim, o problema das condições iniciais não pode ser definido em $t = 0$. Entretanto, quando $T \sim M_p$ ou maior, as equações do MP — baseadas na RG — não fazem sentido porque uma teoria quântica da gravidade — e não a RG que é válida em um regime energético menor — deveria ser usada nesse contexto. Portanto, é razoável que as condições iniciais sejam especificadas em um cenário em que a temperatura $T_0 < M_p$,²² quer dizer, para tempos tais que $t \geq t_i \gg 10^{-43}$ s.

1.5.1 A planeza

O problema da curvatura do universo pode ser formulado olhando a evolução do parâmetro de densidade definido em (1.30). Usando a equação de estado

¹⁹Esta descoberta foi reconhecida com o premio Nobel no ano 2011.

²⁰A energia escura é usualmente associada com a energia do vácuo. Embora esta consideração traga consigo o problema da constante cosmológica [69, 70, 71, 72].

²¹Esta seção estará baseada em [73], [74], [75] e [46].

²²Por exemplo $T_0 = 10^{17}$ GeV

para um fluido barotrópico (1.17) e introduzindo o parâmetro de Hubble, a equação de aceleração (1.27) pode ser reescrita como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}H^2\Omega_{Tot}(1+3w). \quad (1.43)$$

Também, usando a identidade (1.28) junto com a equação de Friedman (1.31) e a equação aceleração (1.43), é simples observar que

$$\frac{d\Omega_{Tot}}{d\ln a} = (1+3w)\Omega_{Tot}(\Omega_{Tot}-1). \quad (1.44)$$

Vê-se que, um universo plano ($\Omega_{Tot} = 1$) será sempre plano dado que $\frac{d\Omega_{Tot}}{d\ln a} = 0$. Se o universo não é plano, resolvendo a equação (1.44), encontra-se

$$\Omega_{Tot}(x) = \frac{1}{1 - \alpha \exp^{(1+3w)x}} \quad ; \quad x \equiv \ln a, \quad (1.45)$$

e α é uma constante de integração. Da equação (1.45) é possível mostrar que

$$\frac{d|\Omega_{Tot}-1|}{dx} > 0 \quad se \quad (1+3w) > 0, \quad (1.46)$$

quando o universo é dominado pela radiação $w = \frac{1}{3}$ ou pela matéria $w = 0$. Assim, a equação (1.46) deixa claro que um universo plano é um ponto fixo instável, ou seja, qualquer desvio de uma geometria plana será amplificada pela subsequente expansão cosmológica. Portanto, uma geometria aproximadamente plana no presente é uma condição inicial muito particular para o universo descrito pelo MP. O que aconteceu no universo para que a função $\Omega_{Tot}(t)$ estivesse tão perto de um no passado? A equação (1.46) permite pensar que se, para um tempo anterior à dominância da radiação, um fluido com uma equação de estado tipo energia escura

$$w < -\frac{1}{3}, \quad (1.47)$$

foi dominante, ter-se-ia um regime em que

$$\frac{d|\Omega_{Tot} - 1|}{dx} < 0, \quad (1.48)$$

e a condição inicial de universo plano do MP estaria dada.

Uma outra forma de olhar este problema é com o raio de curvatura

$$R_k^2 \equiv \frac{a^2}{|K|}, \quad (1.49)$$

grandeza que pode ser obtida reescrevendo a equação de Friedman (1.31) como

$$R_k^2 = \frac{1}{H^2|\Omega_{Tot} - 1|}. \quad (1.50)$$

As observações sugerem que o universo tem uma densidade de energia que está muito perto da densidade crítica ($\Omega_{Tot} \simeq 1$). Portanto, conclui-se da equação (1.50) que o raio de curvatura do universo é muito maior que o raio de Hubble (H_0^{-1}) no presente

$$R_k^2(t_0) \gg \frac{1}{H_0^2}. \quad (1.51)$$

Assim, a parte do Universo que podemos observar tem uma geometria aproximadamente plana.

1.5.2 O horizonte

A métrica FLRW (1.1) pode ser reescrita em termos do tempo conforme τ como

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[-d\tau^2 + \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \right], \quad (1.52)$$

onde

$$d\tau \equiv \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.53)$$

Lembrando a definição do horizonte (1.14), vê-se que o horizonte do universo d_H é a sua idade no tempo conforme

$$d_H(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^\tau d\tau' = \tau. \quad (1.54)$$

Na métrica (1.52) as geodésicas dos fótons são descritas como na métrica de Minkowski com o tempo conforme. Entretanto, existe uma grande diferença entre o espaço de Minkowski e o FLRW: um espaço FLRW tem idade finita, quer dizer, não tem um passado infinito. Um diagrama conforme do espaço FLRW é mostrado na figura (1.4); nele a singularidade inicial seria uma superfície de tempo conforme constante $\tau = 0$ e nosso horizonte seria a largura de nosso cone de luz do passado projetado sobre a superfície definida pela singularidade inicial.

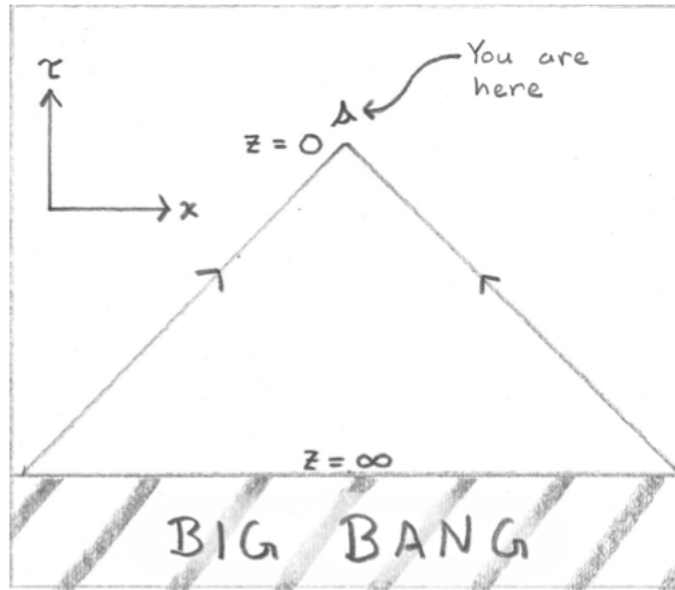


Fig. 1.4: Diagrama conforme do espaço FLRW. Figura da referência [46].

Dois eventos no espaço-tempo conforme estão causalmente conectados se eles compartilham um passado causal: os seus cones de luz do passado se superpõem. Contudo, se consideramos dois pontos da superfície do último espalhamento da RCF ($z \approx 1100$) separados de 180° (ver figura (1.5)), notamos que os seus cones de luz do passado não se superpõem, quer dizer, são causalmente desconectados. Esses dois pontos na superfície do último espalhamento ocupam universos observáveis completamente separados e desconectados. Então, formula-se o problema do horizonte: como esses pontos atingiram o observado equilíbrio térmico ($\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$) se eles jamais compartilharam um passado causal? O universo, de alguma forma, deve ter atingido um equilíbrio quase perfeito em escalas muito maiores à escala de algum horizonte local.

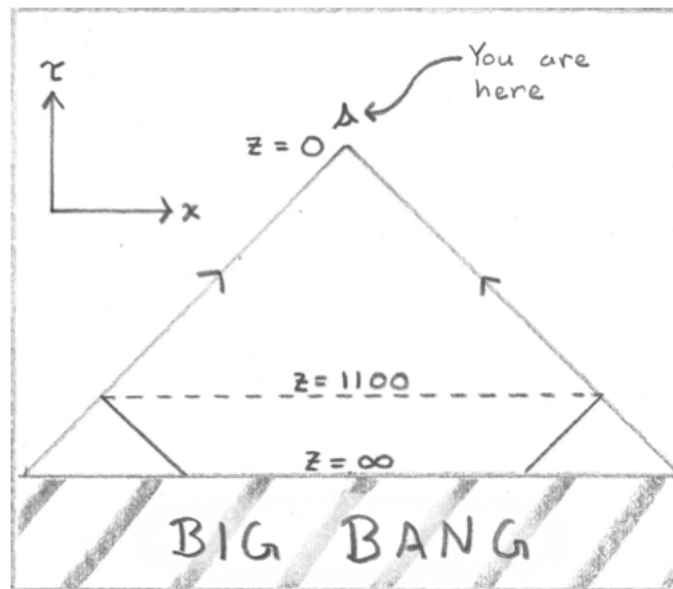


Fig. 1.5: Diagrama conforme da RCF. Figura da referência [46].

Para entender um pouco melhor esta situação, vamos olhar um exemplo simples. Observou-se na Seção (1.3) que quando a componente dominante do universo é a constante cosmológica, o fator de escala se incrementa exponencialmente como na equação (1.39). Nesse caso, vê-se da equação (1.53) que o tempo conforme seria

$$\tau \propto -\frac{1}{aH}. \quad (1.55)$$

O tempo conforme seria negativo durante o período inflacionário e tenderia a zero pelo final do mesmo. Assim, ter uma época inflacionária — ou de expansão acelerada — anterior à época de dominância da radiação significa que $\tau = 0$ não seria a singularidade inicial mas a transição entre a expansão inflacionária e a época dominada pela radiação. A singularidade inicial é afastada para tempos conformes negativos, e pode ser afastada arbitrariamente atrás no tempo, tanto quanto durar a expansão acelerada. Na figura (1.6) aparece um esquema da estrutura causal conforme de um espaço-tempo inflacionário. Observa-se que em $\tau = 0$ os dois pontos da superfície de último espalhamento não compartilham regiões do espaço-tempo conforme. No entanto, a inflação afasta a singularidade de tal forma que os conos de luz dos dois pontos considerados tenham uma intersecção em um tempo conforme negativo posterior à singularidade e possam compartilhar um passado causal resolvendo assim o problema do horizonte.

Da equação de Friedmann (1.31), da expressão (1.54) para o horizonte do universo e da definição (1.53) do tempo conforme é possível mostrar que o problema do horizonte e o problema da planeza estão relacionados. Para uma equação de estado constante $w = const.$, a razão de uma distância comóvel λ e o horizonte do universo d_H está relacionada com a curvatura por uma lei de conservação

$$\left(\frac{\lambda}{d_H}\right)^2 |\Omega - 1| = const.. \quad (1.56)$$

No caso em que o universo evolui se afastando de uma geometria plana, a condição (1.46) obrigaria a razão de uma distância comóvel com o horizonte do universo a satisfazer

$$\frac{d(\frac{\lambda}{d_H})}{dx} < 0. \quad (1.57)$$

Portanto, a condição

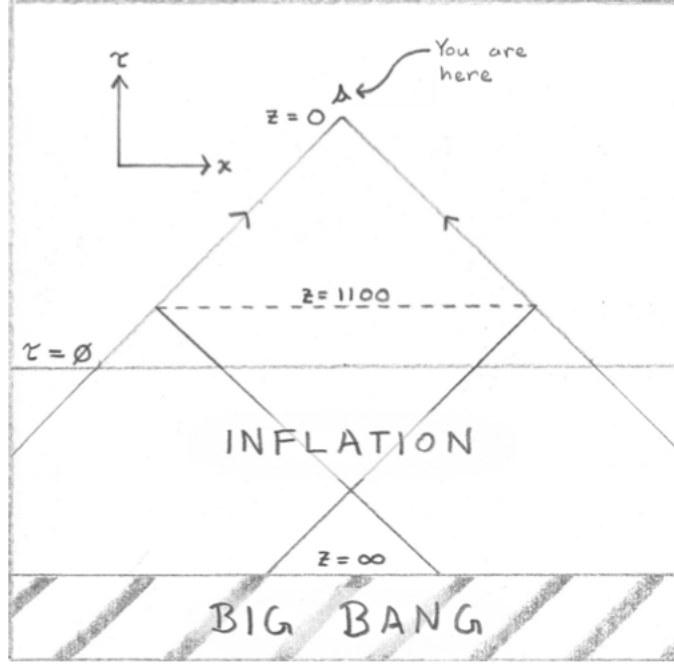


Fig. 1.6: Diagrama conforme espaço-tempo inflacionário. Figura da referência [46].

$$\frac{d|\Omega_{Tot} - 1|}{dx} < 0 \quad \text{se} \quad (1 + 3w) < 0, \quad (1.58)$$

que soluciona o problema da planeza, também solucionaria o problema do horizonte porque implicaria que

$$\frac{d(\frac{\lambda}{d_H})}{dx} > 0, \quad (1.59)$$

quer dizer, deve-se ter uma etapa na evolução do universo na qual o horizonte diminui ou, equivalentemente, o universo expande-se aceleradamente²³ tendo uma equação de estado que satisfaz $1 + 3w < 0$.

²³Nota-se que da equação de Raychaudhuri (1.27), a equação (1.58) é equivalente a ter uma expansão acelerada. Assim, para etapas dominadas pela radiação ou pela matéria se tem um universo que evolui se afastando de uma geometria plana, mas para etapas em que o universo está se acelerando acontece o contrario.

1.5.3 Outros problemas

Em uma escala de ~ 100 Mpc, as observações indicam que o universo é homogêneo e isotrópico. No entanto, em escalas menores encontramos inhomogeneidades na distribuição de massa tais como planetas, estrelas, galáxias, etc.. Não existe ainda uma explicação definitiva e satisfatória da origem e evolução dessas perturbações na densidade dentro do MP. No entanto, uma propriedade importante do paradigma inflacionário é que ele permite o surgimento de irregularidades na distribuição de massa no universo que posteriormente levaram à formação das estruturas que observamos. No Capítulo 3 serão aprofundados esses aspectos do paradigma inflacionário.

Um outro problema que afronta o MP tem a sua origem na relação entre a física de altas energias além do modelo padrão da física de partículas e a cosmologia.²⁴ Além da desejada assimetria entre bárions e antibárions produzida pelas teorias de grande unificação (GUT), um aspecto menos favorável está presente nestas teorias. Se as temperaturas no universo primordial atingiram valores maiores à escala de temperatura de uma quebra de simetria, essa simetria deveria ter sido restaurada. Assim, as GUT predizem que o universo deve ter passado por uma serie de transições de fase que devem ter deixado alguma evidência. De fato, estudos nas GUT indicam que uma possibilidade de testar a existência dessas transições de fase cosmológicas é a busca de defeitos topológicos que são vestígios do universo primordial. Desses defeitos topológicos, os mais relevantes são as paredes de domínio, as cordas cósmicas e os monopolos magnéticos.²⁵

As paredes de domínio — defeitos topológicos bidimensionais — surgem sempre que há quebra espontânea de uma simetria discreta e a sua existência é fortemente restrita pela sua contribuição para a densidade de massa no universo e pela isotropia da RCF. Por outro lado, as cordas cósmicas — defeitos unidimensionais — aparecem sempre que há quebra de uma simetria $U(1)$ e a sua detecção não seria catastrófica para o MP. Finalmente, encontra-se na literatura que quando qualquer grupo semi-simples ($SU(5)$, $O(10)$, $E_6 \dots$) é dividido em um subgrupo que contem explicitamente um fator $U(1)$, soluções tipo monopolo magnético — defeitos adimensionais — existem. Devido a que

²⁴Ver [77] para uma introdução a esse assunto.

²⁵Algumas referências que tratam com maior profundidade as transições de fase cosmológicas são [78], [79], [80] e [81].

as GUT pretendem unificar as interações forte, fraca e eletromagnética em um só grupo que finalmente é separado em $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, parece que a existência de monopolos é uma predição genérica das GUT. Como no caso das paredes de domínio, a existência dos monopolos magnéticos é fortemente restringida pelas observações da densidade de energia do universo.

Dentre outros problemas do MP, encontram-se: a assimetria na densidade bariônica, os gravitinos primordiais, a dimensionalidade do espaço-tempo, e o problema da constante cosmológica. Estes problemas estão um pouco fora da linha geral deste trabalho e não serão tratados com profundidade; o leitor interessado pode achar útil a referência [82].

Neste capítulo foi feita uma apresentação geral do MP incluindo alguns aspectos geométricos, as equações que descrevem a dinâmica do universo, a consistência do modelo com as observações, e o problema das condições iniciais. Dentre os problemas do MP foram destacados os concernentes à planeza e ao horizonte. Foi mostrado que uma etapa de expansão acelerada anterior à época de dominância da radiação é uma possível solução para estes problemas. No próximo capítulo trataremos os aspectos gerais desta etapa inflacionária.

Capítulo 2

O paradigma inflacionário

2.1 Introdução

Na Seção 1.5 se mostrou que, no contexto do MP, uma etapa de expansão acelerada anterior ao período de dominância da radiação, seria suficiente para resolver algumas inconsistências no MP, tais como os problemas da planeza (ver Subseção 1.5.1) e do horizonte (ver Subseção 1.5.2). Dentro do MP tal expansão acelerada seria o resultado do predomínio de uma componente de energia com pressão negativa. Desenvolvido, dentre outros, por Gliner [83], Starobinsky [84], Guth [76], Linde [85], [86], e Albrecht e Steinhardt [87], o paradigma inflacionário é um mecanismo que tem tido sucesso em dar possíveis soluções as dificuldades do MP.¹

Neste capítulo vamos apresentar os aspectos gerais do paradigma inflacionário.² A Seção (2.2) será dedicada ao inflaton — o campo escalar responsável pelo conteúdo material do universo na época inflacionária — e as suas equações de movimento. As condições que devem ser satisfeitas pelo inflaton e o seu potencial, para provocar uma expansão acelerada, serão tratadas na Seção (2.3). Finalmente, na Seção (2.4), vamos apresentar brevemente alguns modelos inflacionários.

¹Na Seção 1.5 são apresentados os principais problemas do MP.

²Duas referências, sem muitos detalhes técnicos, que enfatizam a relação entre a física de partículas e a inflação se encontram em [73, 88]. Referências mais técnicas são [46], [89], [90], [75], [91]. Uma revisão do paradigma inflacionário pode ser encontrada em [74].

2.2 O inflaton

Definiremos inflação como um regime em que o universo se expande aceleradamente, quer dizer, quando a segunda derivada do fator de escala $a(t)$ é positiva. Esta definição pode ser escrita dentro do MP lembrando a equação de Raychaudhuri (1.27), como a violação da condição de energia forte de um fluido perfeito:

$$a\ddot{t} > 0 \quad \rightarrow \quad \rho + 3P < 0, \quad (2.1)$$

sendo ρ e P a densidade e a pressão do fluido, respectivamente.

Uma grandeza importante na dinâmica do regime inflacionário é o raio comóvel de Hubble ou horizonte comóvel de Hubble, definido como

$$R_{CH} \equiv \frac{R_H}{a} = (aH)^{-1}, \quad (2.2)$$

sendo

$$R_H = H^{-1}, \quad (2.3)$$

o raio de Hubble, também chamado de horizonte de Hubble. Quando o universo é dominado por um fluido com uma densidade de energia aproximadamente constante, da equação de Friedman (1.26) com $K = 0$, vê-se que o parâmetro de Hubble H definido em (1.12) também é aproximadamente constante pela relação de proporcionalidade que existe entre essas duas grandezas. Como consequência desse comportamento quase constante do parâmetro de Hubble H e a definição (2.3), o raio de Hubble também permanece quase constante durante o regime inflacionário enquanto que o fator de escala, da definição do parâmetro de Hubble (1.12), cresce exponencialmente. Nota-se então, que durante a inflação o raio comóvel de Hubble (2.2) decresce com o tempo cósmico. Assim, a inflação pode ser definida como um período em que o horizonte comóvel de Hubble decresce, quer dizer,

$$\frac{dR_{CH}}{dt} = \frac{d(aH)^{-1}}{dt} < 0. \quad (2.4)$$

Em um sistema de coordenadas comóvel as distâncias comóveis não dependem do tempo cósmico, quer dizer, permanecem constantes. Contudo, observa-se da equação (2.4) que durante o regime inflacionário o horizonte comóvel de Hubble não é constante senão que diminui com o tempo cósmico. Na figura (2.1) se ilustra a evolução das escalas durante o regime inflacionário. Uma linha reta e horizontal representa uma distância comóvel L e uma curva que desce e sobe quando o tempo se incrementa representa o horizonte comóvel de Hubble R_{CH} . No primeiro ramo da figura R_{CH} começa acima de L mas devido ao seu comportamento decrescente (2.4) durante o regime inflacionário atinge um valor mínimo menor que L . Após a expansão acelerada do regime inflacionário o universo entra no cenário descrito pelo MP e continua se expandindo, mas com o horizonte comóvel de Hubble crescendo até ultrapassar a escala comóvel L .

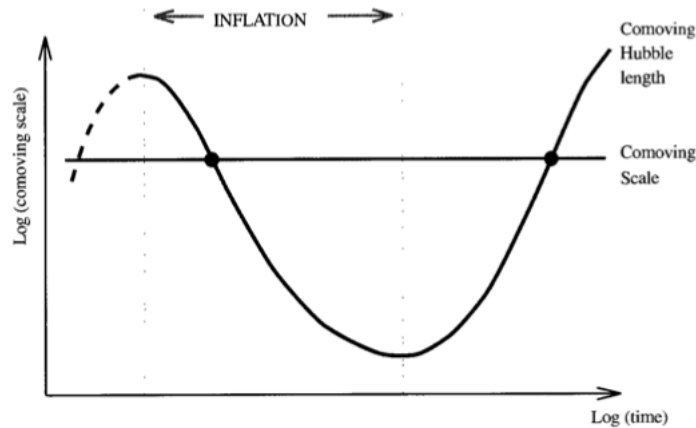


Fig. 2.1: *Evolução das escalas durante o regime inflacionário. Figura da referência [75].*

Discutimos na Seção (1.5) que uma época inflacionária anterior ao cenário Big Bang pode resolver alguns problemas do MP com sucesso. Porém, nada foi dito sobre os processos físicos que poderiam produzir essa inflação. Nota-se que um fluido tipo constante cosmológica ($w = -1$) não pode ser responsável por esta aceleração porque se o universo tivesse sido dominado por uma componente com uma densidade de energia constante nessa época, o universo ainda estaria dominado por essa componente de energia: a matéria e a radiação são diluídas exponencialmente (ver equação (1.36)) no contexto do MP. Assim, conclui-se que para atingir uma etapa de transição entre o período

inflacionário e o equilíbrio térmico — característico do MP — a energia do vácuo, suposta responsável pela etapa inflacionária, deve ser dependente do tempo [46]. Um regime com energia do vácuo dependente do tempo pode ser obtido usando um campo escalar. No contexto inflacionário esse campo escalar é usualmente chamado de inflaton.³

Para descrever a dinâmica do inflaton, usa-se a teoria de campos. Uma forma geral da ação com acoplamento mínimo⁴ entre o inflaton $\varphi(x, t)$ e a métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$ pode ser expressa por

$$S_{total} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa^2} f(R) + L_\varphi \right); \quad \kappa^2 \equiv 8\pi G, \quad (2.5)$$

e

$$L_\varphi = F(\varphi, g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi) - V(\varphi), \quad (2.6)$$

e $f(R)$ é uma função do escalar de Ricci R , $F(\varphi, g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi)$ é uma função do inflaton e das suas derivadas, $V(\varphi)$ é o potencial do inflaton⁵, d^4x é o elemento de volume na variedade quadridimensional e g é o determinante da métrica. Contudo, neste capítulo vamos tratar apenas a abordagem mais simples, quer dizer, aquela em que a função

$$f(R) = R, \quad (2.7)$$

e

$$F(\varphi, g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi) = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi, \quad (2.8)$$

³Os campos escalares desempenham um papel fundamental nos mecanismos de quebra espontânea de simetria entre as interações fundamentais. Contudo, não foram detectados campos escalares na natureza até hoje [75].

⁴Quer dizer, não existem termos do tipo $R\varphi$, $R_{\mu\nu} \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi$ que misturam termos relacionados à curvatura com termos relacionados ao campo escalar na ação.

⁵O potencial descreve as auto-interações do campo escalar. Como será visto depois neste capítulo, toda a física de interesse para a inflação está contida na forma do potencial. Alguns potenciais típicos dos modelos inflacionários são $V(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$, $V(\varphi) = \frac{1}{2} \lambda (\varphi^2 - \sigma^2)^2$ e $V(\varphi) = \frac{1}{2} \lambda \varphi^4$, sendo λ uma constante.

de tal forma que a ação (2.5) fica⁶

$$S_{total} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa^2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right). \quad (2.9)$$

Com o princípio de mínima ação e a equação (2.9) se obtém a equação de movimento para o inflaton,⁷ também chamada na literatura de equação de Klein–Gordon. Considera-se um campo escalar homogêneo $\varphi(x, t) = \varphi(t)$ de tal forma que a equação de Klein–Gordon pode ser expressa por

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} = 0, \quad (2.10)$$

de onde se observa que um campo escalar sob a ação de um potencial satisfaz uma equação de movimento semelhante à equação de movimento de um oscilador harmônico amortecido

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.11)$$

sendo x a posição do oscilador, β a constante de amortecimento e ω_0 a frequência natural do oscilador. Em analogia com a equação de movimento de um oscilador harmônico amortecido (2.11), nota-se da equação (2.10) que o movimento do campo escalar φ sob a ação do potencial $V(\varphi)$ contém um termo de “ fricção ”

$$3H\dot{\varphi}, \quad (2.12)$$

associado com a expansão do universo.

No paradigma inflacionário, considera-se que o universo é dominado por um campo escalar descrito como um fluido perfeito. Como a matéria, a radiação, e a constante cosmológica, este campo escalar deve ter associada uma equação de estado, quer dizer, uma expressão para a densidade de energia e a pressão.

⁶O primeiro termo da ação (2.9) é chamado também de ação de Einstein–Hilbert.

⁷Ver apêndice (B) para detalhes da derivação das equações de movimento e do tensor energia–momentum para o inflaton.

Estas grandezas são fornecidas pelo tensor energia–momentum do inflaton. Da ação (2.9) temos

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi + V(\varphi) \right). \quad (2.13)$$

Usando a métrica FLRW (1.1) em (2.13) para obter o tensor energia–momentum misto $T_\nu^\mu = g^{\mu\sigma}T_{\sigma\nu}$ encontramos que a densidade do inflaton (1.16) é

$$T_0^0 = -\rho_\varphi \quad ; \quad \rho_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad (2.14)$$

e a pressão

$$T_1^1 = P_\varphi \quad ; \quad P_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi). \quad (2.15)$$

Das equações (2.14) e (2.15) é simples ver que a equação de estado do inflaton pode ser expressa por

$$w_\varphi \equiv \frac{P_\varphi}{\rho_\varphi} = \frac{\dot{\varphi}^2 - 2V(\varphi)}{\dot{\varphi}^2 + 2V(\varphi)}. \quad (2.16)$$

Na próxima seção vamos estudar quais são as condições que deve satisfazer o potencial do inflaton $V(\varphi)$ de tal forma que o regime inflacionário possa ser atingido.

2.3 Condições de rolamento lento e o regime inflacionário

Como foi mencionado anteriormente, um período inflacionário pode ser definido pela violação da condição de energia forte (2.1). Isso, em outras palavras, implica que a equação de estado (2.16) do inflaton deve satisfazer $w_\varphi < -\frac{1}{3}$. Vê-se facilmente da equação (2.16) que esta condição é satisfeita se

$$V(\varphi) \gg \dot{\varphi}^2 \quad \longrightarrow \quad P_\varphi \simeq -\rho_\varphi \quad \longrightarrow \quad w_\varphi \simeq -1, \quad (2.17)$$

quer dizer, se a energia potencial do inflaton é muito maior do que a sua energia cinética. Neste caso, ter-se-ia uma equação de estado similar àquela de uma constante cosmológica, condição suficiente para um regime acelerado.

Para entender melhor a condição (2.17) no campo escalar e a sua energia potencial vamos fazer uma analogia com um sistema formado por uma partícula de massa unitária, energia total E e cuja posição é designada pela coordenada x ; vamos supor que a partícula se encontra sob a ação de um potencial $V(x)$. Nesse caso a energia total da partícula se escreve

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x), \quad (2.18)$$

que seria a expressão semelhante à densidade de energia do universo, representada pela densidade de energia do inflaton (2.14), devido a que no regime inflacionário é assumido que o campo escalar é a componente energética dominante no universo.

Se consideramos que a partícula está isolada, sua energia total permanece constante. Vamos supor que a energia potencial da partícula é muito maior que a sua energia cinética, quer dizer,

$$V(x) \gg \frac{1}{2}\dot{x}^2, \quad (2.19)$$

condição semelhante a (2.17) se fazemos as correspondências $V(\varphi) \rightarrow V(x)$ e $\varphi \rightarrow x$.

Como consequência da condição (2.19), a energia total da partícula é expressa por

$$E \approx V(x), \quad (2.20)$$

que na analogia seria equivalente a

$$\rho_\varphi \approx V(\varphi). \quad (2.21)$$

A equação (2.20) indica que a energia potencial também seria constante e aproximadamente igual à energia total. Desta forma se conclui que a partícula teria uma energia cinética desprezível, quer dizer,

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 \rightarrow 0 \quad \text{ou} \quad \dot{x} \rightarrow 0. \quad (2.22)$$

Se a condição (2.22) é satisfeita, a partícula está quase em repouso ($x \approx \text{const.}$) e a sua aceleração deve satisfazer

$$\ddot{x} \ll 1, \quad (2.23)$$

quer dizer, que na analogia o campo escalar deveria satisfazer

$$\ddot{\varphi} \ll 1, \quad (2.24)$$

se o potencial $V(\varphi)$ é aproximadamente constante.

Com as duas condições (2.17) e (2.24), e a expressão para a densidade do inflaton (2.21) nessas condições, a equação de Friedman (1.26) para um universo plano se reescreve

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right) \quad \longrightarrow \quad H^2 \simeq \frac{\kappa^2}{3} V(\varphi), \quad (2.25)$$

e a equação de movimento (2.10) se transforma em

$$3H\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} \simeq 0. \quad (2.26)$$

Da equação (2.26) e da condição (2.17) temos⁸ ainda,

⁸ V' denota a derivada do potencial com respeito ao campo escalar.

$$9H^2\dot{\varphi}^2 \simeq V'^2 \quad \rightarrow \quad H^2V \gg V'^2 \quad \rightarrow \quad \frac{V'^2}{V} \ll H^2. \quad (2.27)$$

Desta forma, devido à equação de Friedman no regime inflacionário (2.25) podemos considerar $H^2 \approx V$ em (2.27) e obter uma primeira condição que o potencial deve satisfazer no regime inflacionário:

$$\left(\frac{V'}{V}\right)^2 \ll 1. \quad (2.28)$$

Por outro lado, de (2.27) e (2.25) podemos encontrar uma segunda relação para o potencial durante o regime inflacionário,

$$H^2V \gg V'^2 \quad \rightarrow \quad V^2 \gg V'^2 \quad \rightarrow \quad 2VV' \gg 2V'V'', \quad (2.29)$$

de onde obtemos

$$\left(\frac{V''}{V}\right) \ll 1. \quad (2.30)$$

Na literatura o regime acelerado da época inflacionária usualmente é caracterizado por dois parâmetros, chamados de parâmetros de rolamento lento,⁹ que dão informação sobre a forma do potencial no regime inflacionário. As condições (2.28) e (2.30), que o potencial deve satisfazer no regime inflacionário, podem ser reescritas definindo esses parâmetros de rolamento lento ϵ e η como

$$\epsilon \equiv \frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \quad \eta \equiv \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{V''}{V}\right), \quad (2.31)$$

⁹Parâmetros que dependem do modelo considerado.

onde o parâmetro ϵ mede a inclinação no potencial e o parâmetro η mede a sua curvatura.¹⁰ Das condições (2.28) e (2.30), o período inflacionário poderia ser caracterizado como

$$\epsilon \ll 1 \quad e \quad |\eta| \ll 1 \quad (2.32)$$

Para estimar quão longo é o período inflacionário se define o número de e-foldings por

$$N(t) \equiv \ln \frac{a(t_{end})}{a(t)} = \int_t^{t_{end}} H dt, \quad (2.33)$$

onde t e t_{end} denominam o tempo inicial e o tempo final da etapa inflacionária, respectivamente. Considerando que as condições de rolamento lento (2.32) são satisfeitas e usando as equações (2.25) e (2.26) junto com $dt = \dot{\varphi} d\varphi$ em (2.33), tem-se que

$$N(t) \simeq \kappa^2 \int_{\varphi_{end}}^{\varphi} \frac{V}{V'} d\varphi, \quad (2.34)$$

onde φ_{end} é definido por $\epsilon(\varphi_{end}) = 1$.

Considerando as condições (2.32), esquematiza-se a forma do potencial $V(\varphi)$ durante o regime inflacionário como na figura (2.2). Se inicialmente o campo escalar é quase homogêneo; se o termo de “fricção” (2.12), devido à expansão do universo, na equação de movimento do campo escalar (2.10) não é desprezível; e se o potencial é aproximadamente plano ($\epsilon \ll 1$), ter-se-ia que a densidade de energia (2.14) é dominada pela energia potencial e o campo escalar seria aproximadamente constante, quer dizer, a sua energia cinética seria desprezível. Durante este período, a dinâmica do universo aproxima um regime de domínio de constante cosmológica ($w_\varphi \approx -1$); ademais, como consequência da expansão acelerada, o universo é conduzido para a homogeneidade e a isotropia (ver Seção 1.5). Após um período de tempo as condições de rolamento lento (2.32) não são mais satisfeitas, quer dizer, o campo escalar

¹⁰Em outras palavras os parâmetros de rolamento lento ϵ e η medem a taxa de crescimento e a concavidade do potencial, respectivamente.

não se encontra mais sob a ação do potencial aproximadamente constante; em termos dos parâmetros de rolamento lento essa situação se descreve por

$$\epsilon > 1 \quad e \quad |\eta| > 1, \quad (2.35)$$

condições que indicam o fim do regime inflacionário.

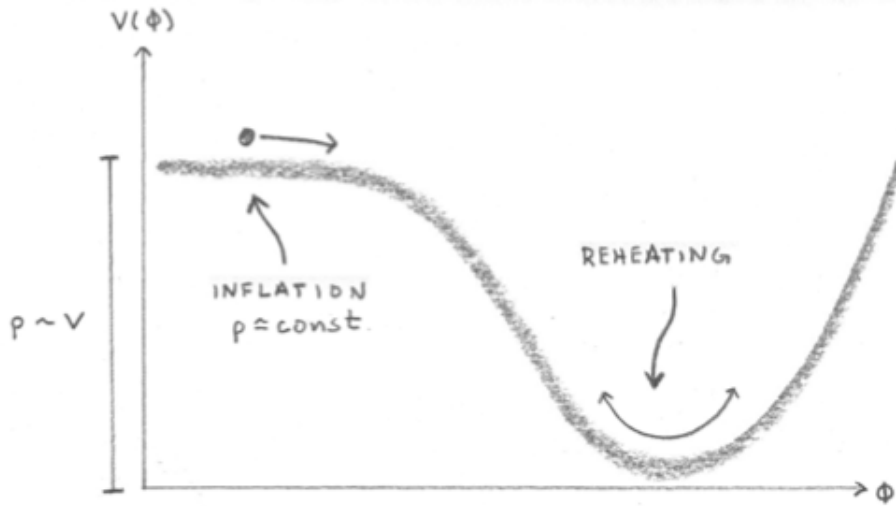


Fig. 2.2: Esquema do potencial no regime inflacionário. A figura é da referência [46].

Quando a etapa inflacionária termina a equação de movimento do inflaton é expressa por (2.10), que como foi comentado anteriormente é semelhante à equação de movimento de um oscilador harmônico amortecido. Nesse regime a energia cinética do inflaton não é mais desprezível e pelo contrario, como consequência das condições (2.35) no potencial $V(\varphi)$ e a conservação da energia,¹¹ a energia cinética passa a ser a contribuição dominante da densidade de energia (2.14) do inflaton com o potencial atingindo um valor mínimo. Durante esse período de dominância da energia cinética — e valor mínimo do potencial — a pressão (2.15) do inflaton é expressa por

¹¹O potencial deve crescer ou diminuir segundo a definição (2.31) de ϵ . Entretanto, devido à conservação da energia, a energia potencial do inflaton não pode ser maior que a sua energia total e portanto o potencial deve decrescer após a etapa inflacionária.

$$P_\varphi \simeq \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2. \quad (2.36)$$

Devido à dinâmica “oscilatória” do inflaton descrita pela equação (2.10), a pressão média do inflaton nesse período seria

$$\langle P_\varphi \rangle \approx 0, \quad (2.37)$$

quer dizer, o inflaton teria uma equação de estado tipo matéria não relativista ($w_\varphi \approx 0$) nesse regime. A equação de continuidade (1.35) para a densidade média do inflaton neste período se escreve

$$\frac{d\bar{\rho}_\varphi}{dt} + 3H\bar{\rho}_\varphi = 0. \quad (2.38)$$

No entanto, acredita-se que durante este período de dominância de energia cinética, o inflaton se acopla com as partículas do modelo padrão da física de partículas em um processo chamado na literatura de reaquecimento¹² e que depende do modelo inflacionário considerado. O acoplamento entre o inflaton e essas outras partículas, quer dizer, o decaimento do inflaton nelas, é considerado adicionando um termo na equação (2.38) que daria conta dessa troca de energia entre o inflaton e as partículas do modelo padrão da física de partículas. Desta forma a densidade média do inflaton satisfaria a equação

$$\frac{d\bar{\rho}_\varphi}{dt} + (3H + \Gamma_\varphi)\bar{\rho}_\varphi = 0, \quad (2.39)$$

onde Γ_φ é o parâmetro de acoplamento e depende do modelo inflacionário estudado.

Assim, no final da etapa de dominância do campo escalar toda a energia responsável pela expansão acelerada no regime inflacionário é liberada em

¹²Dentro deste processo que antecede o MP podem ser reconhecidas três partes: a) dinâmica não inflacionária do campo escalar, b) decaimento das partículas do inflaton, c) termalização dos produtos dos decaimentos [75]. Algumas referências sobre o reaquecimento são [92], [93], [94] e [95].

energia térmica, quer dizer, o inflaton decai nas partículas do modelo padrão da física de partículas. Devido a que esses decaimentos são processos não adiabáticos, haveria um aumento da entropia do universo durante esse período de reaquecimento [90].

2.4 Os modelos inflacionários

Nossa apresentação do paradigma inflacionário tem sido baseada em uma discussão de uma possível ação para o inflaton (2.9) — de fato, a mais simples que pode ser proposta — junto com as condições de rolamento lento que devem ser satisfeitas pelo potencial para atingir um regime acelerado. Portanto, vê-se que a especificação da ação do inflaton (potencial e termos cinéticos) e o seu acoplamento com a gravidade são fundamentais na definição de um modelo inflacionário particular.¹³ Nesta seção vamos descrever brevemente alguns tipos de modelos inflacionários.

2.4.1 Modelos com um campo escalar

Definiremos um esquema de classificação geral para estes tipos de modelos inflacionários como é feito em [91], [96] e [97]. Dividiremos os modelos em três tipos gerais: campo “grande”, campo “pequeno”, e os modelos híbridos. Um potencial genérico nestes modelos pode ser caracterizado por dois parâmetros independentes: uma “altura” Λ^4 , correspondendo à densidade de energia do vácuo durante a inflação, e uma “largura” μ , correspondendo à mudança no valor do campo $\Delta\varphi$ durante a inflação:

¹³Acredita-se que a época inflacionária aconteceu em uma escala de energia $\sim 10^{12}$ TeV. A história do universo — de $\sim 10^{-10}$ s até hoje — é baseada em fatos observacionais e modelos físicos bem sucedidos como o modelo padrão da física de partículas, a RG e a dinâmica de fluidos. No entanto, antes de 10^{-10} s a energia do universo excede — em várias ordens de magnitude — a energia atingida pelos aceleradores (~ 1 TeV) de partículas e esses modelos não podem ser mais testados diretamente. Assim, uma descrição da inflação deve supor que as leis físicas conhecidas (conservação da energia, conservação da carga, leis da termodinâmica, relatividade geral, etc.) são as mesmas em escalas de energia maiores a 1 TeV [89].

$$V(\varphi) = \Lambda^4 f\left(\frac{\varphi}{\mu}\right). \quad (2.40)$$

Os modelos diferem na forma da função f .

Campo “grande”

Modelos de campo “grande” têm potenciais típicos do chamado cenário inflacionário caótico [86]. Neste cenário o campo escalar é deslocado do mínimo do potencial por uma quantidade que é da ordem da massa de Planck M_p . Tais modelos são caracterizados por $V''(\varphi) > 0$, e $-\epsilon < \eta - \epsilon \leq \epsilon$. Potenciais típicos dos modelos de campo grande são os potenciais tipo polinômio

$$V(\varphi) = \Lambda^4 \left(\frac{\varphi}{\mu}\right)^p, \quad (2.41)$$

e os potenciais exponenciais

$$V(\varphi) = \Lambda^4 \exp\left(\frac{\varphi}{\mu}\right). \quad (2.42)$$

No cenário inflacionário caótico é assumido que o universo surgiu de um estado quântico com uma densidade de energia similar à densidade de Planck. Ter-se-ia então¹⁴ que $V(\varphi) \approx M_p^4$ e portanto, de acordo com a equação de movimento do inflaton (2.10) e em analogia com o caso de um oscilador harmônico amortecido, um termo de “fricção” não desprezível devido a que pela equação (2.25) $H^2 \simeq V$. Desta forma o inflaton seria aproximadamente constantes sob a ação do seu potencial.

O exemplo mais simples de um modelo inflacionário caótico corresponde a um campo escalar com potencial quadrático

¹⁴Em unidades de Planck a constante da gravitação G , a constante de Planck reduzida \hbar , a velocidade da luz no vácuo c , a constante de Coulomb k e a constante de Boltzmann k_B são iguais a um. Nesse sistema de unidades o comprimento de Planck l_p e a massa de Planck M_p estão relacionados por $M_p = \frac{1}{l_p}$.

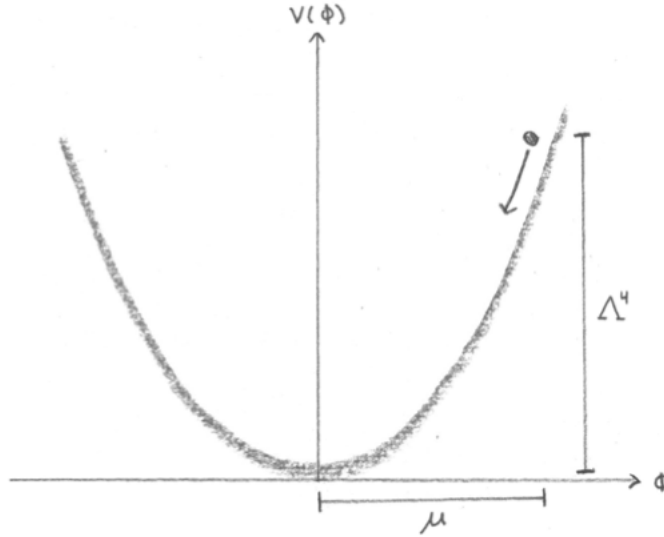


Fig. 2.3: Esquema de um potencial típico dos modelos inflacionários de campo “grande”. Figura da referência [46].

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2, \quad (2.43)$$

onde m representa a massa do inflaton. Um esquema deste potencial é mostrado na figura (2.3).

Campo “pequeno”

Os potenciais típicos nestes tipos de modelos inflacionários são associados com os chamados modelos de inflação nova [85, 87] e inflação natural [98]. O campo escalar inicia perto de um ponto de equilíbrio instável no seu potencial e permanece aproximadamente constante sob a ação do seu potencial até atingir um mínimo estável. Estes modelos de campo pequeno são caracterizados por $V''(\varphi) < 0$ e $\eta < -\epsilon$, sendo ϵ próximo a zero. Um potencial genérico dos modelos de campo pequeno pode ser escrito como

$$V(\varphi) = \Lambda^4 \left[1 - \left(\frac{\varphi}{\mu} \right)^p \right]. \quad (2.44)$$

A figura (2.4) mostra um potencial típico dos modelos inflacionários de campo “pequeno”.

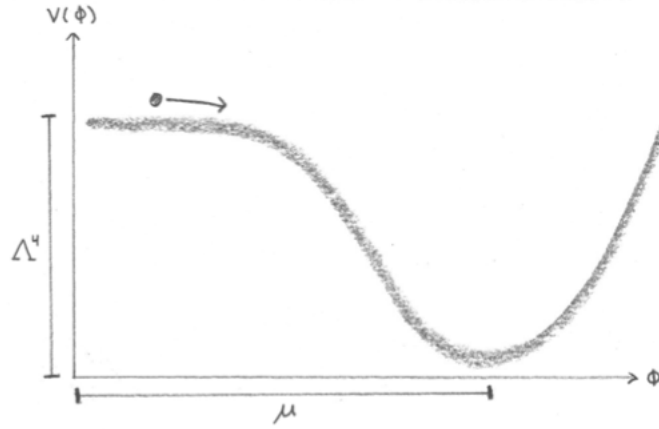


Fig. 2.4: Um esquema de um potencial típico dos modelos inflacionários de campo “pequeno”. Figura da referência [46].

Modelos híbridos

Os modelos híbridos [99] são característicos de modelos que estudam a inflação no contexto da supersimetria e da supergravidade. Nestes modelos o campo escalar responsável pelo regime inflacionário evolui para um mínimo do potencial com energia do vácuo diferente de zero. O regime acelerado termina pela instabilidade de um segundo campo escalar. Os modelos híbridos são caracterizados por $V''(\varphi) > 0$ e $0 < \epsilon < \eta - \epsilon$. Um potencial genérico nestes modelos é

$$V(\varphi) = \Lambda^4 \left[1 + \left(\frac{\varphi}{\mu} \right)^p \right]. \quad (2.45)$$

A figura (2.5) mostra um potencial típico de um modelo inflacionário híbrido.

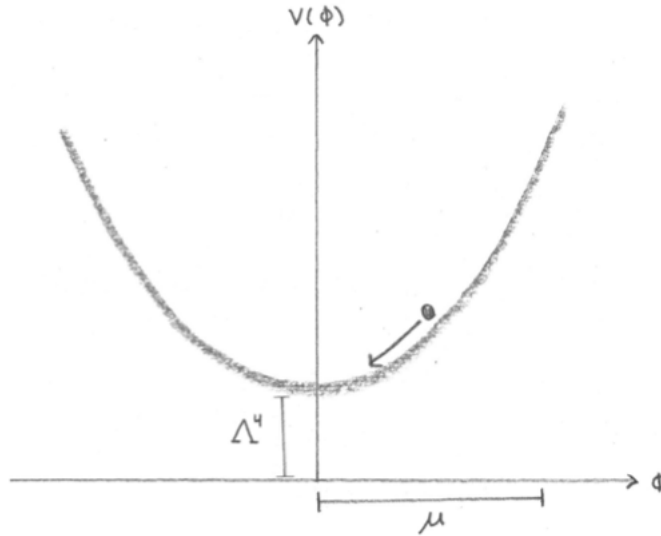


Fig. 2.5: Um esquema de um potencial típico dos modelos inflacionários híbridos. Figura da referência [46].

2.4.2 Modelos alternativos

O uso de campos escalares para a uma descrição do conteúdo material no universo não é a única forma de obter um regime inflacionário. Um grande número de modelos inflacionários fenomenológicos tem sido propostos com diferentes motivações teóricas e previsões observacionais. Vamos comentar brevemente algumas destas propostas.

Acoplamento não mínimo com a gravidade

Na Seção 2.2 foram encontradas as equações de movimento para a ação mais simples (2.9) de um campo escalar com acoplamento mínimo com a gravidade. Foi mostrado na Seção 2.3 que esta abordagem produz um regime acelerado se o potencial satisfaz as condições de rolamento lento (2.32). No entanto, uma situação mais geral poderia incluir termos com acoplamento direto entre o inflaton e termos relacionados à curvatura na ação, produzindo os chamados modelos com acoplamento não mínimo. Nestes modelos o período inflacionário seria devido a esses acoplamentos e ao potencial. Con-

tudo, esses modelos podem ser transformados em modelos com acoplamento mínimo por uma redefinição do campo. Um exemplo destes modelos é

$$S_{total} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa^2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} \xi R \varphi^2 - V(\varphi) \right). \quad (2.46)$$

Gravidade modificada

Após quase um século, a RG continua sendo a teoria padrão para a descrição da interação gravitacional. Apesar do seu sucesso, alternativas à RG tem surgido na literatura.¹⁵ A ideia relevante no contexto inflacionário é que se a ação de Einstein–Hilbert (o termo da ação (2.9) linear no escalar de Ricci) fosse modificada¹⁶ em energias altas ($\gg 1$ TeV), essas modificações poderiam ser responsáveis por um regime acelerado no universo primordial. Contudo, os modelos que modificam a gravidade também podem ser transformados em modelos com acoplamento mínimo entre campo escalar e a gravidade.

Termo cinético não–canônico

A ação (2.9) considerada na Seção 2.2 para descrever a dinâmica do campo escalar durante o período inflacionário contem um termo cinético canônico da forma

$$X \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi. \quad (2.47)$$

No entanto, poder-se-ia imaginar que a teoria subjacente da física de altas energias — na época inflacionária — tivesse campos com termos cinéticos não canônicos e a densidade lagrangiana do campo escalar fosse da forma

$$L_\varphi = F(\varphi, X) - V(\varphi), \quad (2.48)$$

¹⁵Uma revisão recente sobre as teorias modificadas da gravitação encontra-se em [23].

¹⁶Por exemplo: teorias escalar–tensoriais, teorias da gravitação não locais e com derivadas superiores e teorias da gravitação com dimensões extras.

com $F(\varphi, X)$ uma função do inflaton φ e as suas derivadas. Nestes modelos,¹⁷ a inflação poderia ser produzida preponderantemente pelo termo cinético e não pelo potencial. Usualmente, a densidade lagrangiana do inflaton dos modelos K-essence é restringida à forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} f(\varphi) p(X). \quad (2.49)$$

Mais de um campo escalar

Uma outra possibilidade para a produção de um regime inflacionário no universo primordial é a presença de outros campos escalares diferentes ao inflaton. Com esta proposta as possibilidades para a dinâmica inflacionária são mais numerosas.¹⁸ A densidade lagrangiana mais simples que pode ser escrita neste contexto é

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) - V(\varphi, \psi). \quad (2.50)$$

Observa-se que existem várias alternativas ao modelo de campo escalar com acoplamento mínimo com a gravidade estudado nas Seções 2.2 e 2.3 que podem causar um regime de expansão acelerada no universo, anterior ao início do Big Bang, e dar uma possível solução aos problemas do MP. Porém, uma questão surge naturalmente: como podemos determinar quais desses modelos são mais adequados para descrever o universo primordial?. Nos Capítulos 4–6 trataremos a relação dos modelos inflacionários com as observações, particularmente o teste desses modelos usando as anisotropias do CMB.

Neste capítulo se definiu o paradigma inflacionário como uma época em que o universo se expandiu aceleradamente. Mostrou-se que um campo escalar pode produzir um regime com energia do vácuo dependente do tempo necessário para ter uma época de expansão acelerada — anterior ao início do Big Bang — que resolveria algumas dificuldades do MP apontados na Seção 1.5. O paradigma inflacionário foi ilustrado usando o modelo mais simples de um campo escalar com acoplamento mínimo com a gravidade. Ressaltou-se a importância da forma do potencial no regime inflacionário, dando as

¹⁷Conhecidos na literatura como modelos K-essence [26].

¹⁸Uma revisão destes modelos inflacionários multi-campo encontra-se em [100].

chamadas condições de rolamento lento que devem ser satisfeitas pelo potencial para haver uma expansão acelerada. Finalmente, foram mencionadas algumas características gerais de alguns modelos inflacionários.

Tal como foi apresentado, o paradigma inflacionário consegue resolver o problema da planeza e do horizonte no MP. No entanto, um dos aspectos mais interessantes da inflação é que ela pode gerar inomogeneidades que podem responder pela formação das estruturas no universo. Para entender melhor este fato, no Capítulo 3 estudaremos as flutuações do campo escalar e da métrica.

Capítulo 3

Perturbações cosmológicas no cenário inflacionário

3.1 Introdução

Como foi mencionado na Subseção 1.5.3, existem – em escalas menores do que aquelas em que o PC parece ser válido – não-homogeneidades na distribuição de matéria (aglomerados de galáxias, estrelas, etc.) que não são explicadas pelo MP. Por outro lado, observações feitas pela WMAP [62] mostraram que existem pequenas não-homogeneidades na RCF que o MP tampouco explica. Além de resolver os problemas da curvatura (Subseção 1.5.1) e do horizonte (Subseção 1.5.2), o cenário inflacionário, apresentado no Capítulo 2, oferece uma possível explicação para a formação das perturbações observadas na distribuição de matéria e na RCF. Segundo o paradigma inflacionário haveria uma relação entre as flutuações quânticas do inflaton e as perturbações na densidade das componentes energéticas que são observadas.

Neste capítulo¹ faremos um breve tratamento das perturbações cosmológicas no cenário inflacionário. Na Seção 3.2 descreveremos as flutuações quânticas de um campo escalar genérico. Algumas observações sobre o estudo do universo não homogêneo serão feitas na Seção 3.3.

¹Este capítulo está baseado nas referências [46], [89], [91], [90] e [101].

3.2 Flutuações quânticas de um campo escalar

Nesta seção consideramos um campo escalar genérico $\chi(\tau, \mathbf{x})$ com um potencial efetivo $V(\chi)$ e estudamos as suas flutuações. Como é usual no estudo das perturbações cosmológicas, as grandezas físicas são expandidas² em uma parte que descreve o comportamento homogêneo — quer dizer, que não depende das coordenadas espaciais — clássico e uma perturbação responsável pelo comportamento não-homogêneo. No caso do campo escalar temos

$$\chi(\tau, \mathbf{x}) = \chi(\tau) + \delta\chi(\tau, \mathbf{x}), \quad (3.1)$$

sendo τ o tempo conforme definido em (1.53).

A evolução de um campo escalar genérico na presença de um potencial é expressa pela equação de Klein–Gordon³

$$\square\chi = \frac{\partial V}{\partial\chi}, \quad \square\chi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu [\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\chi]. \quad (3.2)$$

No caso de um campo escalar genérico em um universo FLRW a equação (3.2) é escrita como

$$\chi'' + 2\mathcal{H}\chi' - \nabla^2\chi = -a^2\frac{\partial V}{\partial\chi}, \quad (3.3)$$

onde “ $'$ ” denota a derivada com respeito ao tempo conforme⁴ e

$$\mathcal{H} \equiv \frac{a'}{a}. \quad (3.4)$$

²Na Subseção 3.3.1 definimos a perturbação de uma grandeza tensorial genérica. Ver equações (3.64), (3.65) e (3.66).

³A equação (2.10) é a equação de Klein–Gordon para um campo escalar homogêneo em um universo FLRW expressa utilizando o tempo cósmico t .

⁴Para fazer a transformação de derivadas em relação ao tempo cósmico t para o tempo conforme τ de uma função $f(t)$ devem ser consideradas as seguintes relações: $\dot{f}(t) = \frac{f'(\tau)}{a(\tau)}$ e $\ddot{f}(t) = \frac{f''(\tau)}{a^2(\tau)} - \mathcal{H}\frac{f'(\tau)}{a^2(\tau)}$.

Perturbando a equação de Klein–Gordon (3.2) com respeito ao campo escalar, quer dizer, ignorando as perturbações na métrica, tem-se

$$\delta\chi'' + 2\mathcal{H}\delta\chi' - \nabla^2\delta\chi = -a^2\frac{\partial^2 V}{\partial\chi^2}\delta\chi. \quad (3.5)$$

Pode-se propor uma solução para a perturbação do campo escalar genérico expandindo $\delta\chi$ como uma soma de ondas planas no espaço de Fourier

$$\delta\chi(\tau, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} [\chi_{\mathbf{k}}(\tau)a_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \chi_{\mathbf{k}}^*(\tau)a_{\mathbf{k}}^* \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})], \quad (3.6)$$

sendo $a_{\mathbf{k}}$ e $a_{\mathbf{k}}^*$ constantes, e $\chi_{\mathbf{k}}(\tau)$ as funções modo; \mathbf{x} e \mathbf{k} são coordenadas comoveis e vetores de onda comoveis, respectivamente. Substituindo (3.6) em (3.5) obtemos que cada função modo satisfaz uma equação de movimento expressa por

$$\chi_{\mathbf{k}}'' + 2\mathcal{H}\chi_{\mathbf{k}}' + k^2\chi_{\mathbf{k}} = -a^2\frac{\partial^2 V}{\partial\chi^2}\chi_{\mathbf{k}}. \quad (3.7)$$

Contudo, é conveniente redefinir a função modo $\chi_{\mathbf{k}}(\tau)$ como

$$u_k(\tau) \equiv a(\tau)\chi_{\mathbf{k}}(\tau), \quad (3.8)$$

de tal forma que a equação de movimento (3.7) é reescrita como

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} + m_\chi^2 a^2\right) u_k = 0, \quad (3.9)$$

onde

$$m_\chi^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial\chi^2}, \quad (3.10)$$

é a massa efetiva do campo escalar $\chi(\tau, \mathbf{x})^5$.

A equação (3.9) pode ser analisada em dois casos limites, sem especificar o comportamento do fator de escala $a(\tau)$:

1. *Limite ultravioleta ou de comprimento de onda curto*: $k \gg \frac{a''}{a}$. Neste caso a equação (3.9) é aquela de um oscilador harmônico simples

$$u_k'' + k^2 u_k = 0, \quad (3.11)$$

cuja solução⁶ pode ser escrita

$$u_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}} [A_k \exp(-ik\tau) + B_k \exp(ik\tau)]. \quad (3.12)$$

2. *Limite infravermelho ou de comprimento de onda longo*: $k \ll \frac{a''}{a}$. Com esta condição a equação (3.9) se transforma em

$$u_k'' - \left(\frac{a''}{a} - m_\chi^2 a^2 \right) u_k = 0. \quad (3.13)$$

Quando o campo escalar não tem massa ($m_\chi^2 = 0$), a equação (3.13) se reduz a

$$u_k'' a = a'' u_k, \quad (3.14)$$

com uma solução trivial

$$u_k(\tau) = B_+(k) a(\tau), \quad (3.15)$$

⁵Na equação de movimento (3.9) não aparece $u_{\mathbf{k}}$ porque a equação somente depende da magnitude de $|\mathbf{k}|$.

⁶Para transformar a equação (3.9) em (3.11) também foram consideradas as condições de rolamento lento tratadas na Seção 2.3. Com estas condições, durante o período inflacionário o potencial do campo escalar deve ser aproximadamente constante. Portanto o termo de massa (3.10) é desprezível no limite ultravioleta.

sendo $B_+(k)$ uma constante. Assim, da definição (3.8) vemos que no limite infravermelho e para um campo escalar sem massa, as amplitudes das flutuações do campo escalar $\chi_{\mathbf{k}}(\tau)$ são constantes,

$$\chi_{\mathbf{k}}(\tau) = B_+(k). \quad (3.16)$$

Quantização

A quantização das flutuações $\delta\chi(\tau, \mathbf{x})$ do campo escalar genérico $\chi(\tau, \mathbf{x})$ se faz de uma forma análoga à quantização de um oscilador harmônico simples. Multiplicando a equação (3.6) pelo fator de escala $a(\tau)$, usando a definição (3.8) e promovendo as constantes $a_{\mathbf{k}}$ e $a_{\mathbf{k}}^*$ a operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$, tem-se que o operador associado com as flutuações do campo escalar é expresso por

$$\widetilde{\delta\chi}(\tau, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[u_{\mathbf{k}}(\tau) \hat{a}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + u_{\mathbf{k}}^*(\tau) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right], \quad (3.17)$$

onde definimos

$$\widetilde{\delta\chi}(\tau, \mathbf{x}) \equiv a(\tau) \delta\chi(\tau, \mathbf{x}). \quad (3.18)$$

Os operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ em (3.18) satisfazem as relações de comutação

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] &= 0, \\ [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'\dagger}] &= \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Por outro lado, das relações canônicas de comutação entre o operador $\widetilde{\delta\chi}$ e o seu momentum conjugado $\Pi = \widetilde{\delta\chi}'$

$$\begin{aligned} [\widetilde{\delta\chi}(\tau, \mathbf{x}), \Pi(\tau, \mathbf{y})] &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [\widetilde{\delta\chi}(\tau, \mathbf{x}), \widetilde{\delta\chi}(\tau, \mathbf{y})] &= 0, \\ [\Pi(\tau, \mathbf{x}), \Pi(\tau, \mathbf{y})] &= 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

encontra-se uma condição de normalização para as funções modo redefinidas em (3.8) expressa por

$$u_k^* u_k' - u_k u_k^{*'} = -i. \quad (3.21)$$

Para a solução (3.12), obtida no limite ultravioleta, a condição de normalização (3.21) é se reduz a

$$|A_k|^2 + |B_k|^2 = 1, \quad (3.22)$$

que é uma das duas condições necessárias para a completa determinação da solução para as funções modo u_k . Uma outra condição vem da escolha do vácuo, quer dizer, da definição do estado que corresponde a um número nulo de partículas. Usualmente a escolha é feita tal que, no limite ultravioleta, a solução (3.12) tenha a forma

$$u_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}} \exp(-ik\tau), \quad (3.23)$$

quer dizer,

$$A_k = 1 \quad , \quad B_k = 0, \quad (3.24)$$

condição que também é conhecida na literatura como vácuo de Bunch–Davies.

Com a escolha (3.24) do vácuo, é possível encontrar a amplitude $\chi_{\mathbf{k}}$ das flutuações do campo escalar sem massa no limite infravermelho. Usando o valor da solução (3.23) no limite ultravioleta e no momento em que a flutuação sai do horizonte⁷ ($k = aH$), junto com a redefinição (3.8) e o fato que as soluções no limite infravermelho e no limite ultravioleta devem ter o mesmo valor quando as flutuações saírem do horizonte, temos que

$$|B_+(k)| = |\chi_{\mathbf{k}}| = \frac{1}{a\sqrt{2k}} = \frac{H}{\sqrt{2k^3}}. \quad (3.25)$$

⁷Devido à expansão do universo.

3.2.1 Solução para um cenário de Sitter

Em uma etapa de Sitter o fator de escala $a(t)$ tem a forma

$$a(t) \propto \exp(Ht),$$

conforme (1.39). Considerando que $a(t_0) = 1$ e a definição do tempo conforme

$$d\tau \equiv \frac{dt}{a(t)},$$

em (1.53), encontra-se que durante uma etapa de Sitter o tempo conforme é expresso por pela equação (1.55)

$$\tau = -\frac{1}{aH}.$$

Após manipulação algébrica simples encontramos de (1.55) a identidade

$$\frac{a''}{a} - m_\chi^2 a^2 = \frac{2}{\tau^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m_\chi^2}{H^2} \right), \quad (3.26)$$

expressão que permite reescrever a equação diferencial (3.9) para as funções modo $u_k(\tau)$ como

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{\nu_\chi^2 - \frac{1}{4}}{\tau^2} \right) u_k = 0, \quad (3.27)$$

sendo

$$\nu_\chi^2 = \frac{9}{4} - \frac{m_\chi^2}{H^2}. \quad (3.28)$$

Se a massa efetiva m_χ do campo escalar $\chi(\tau, \mathbf{x})$ não depende do tempo, a equação (3.27) é uma equação diferencial de Bessel cuja solução para um ν_χ real é

$$u_k(\tau) = \sqrt{-\tau} \left[c_1(k) H_{\nu_\chi}^{(1)}(-k\tau) + c_2(k) H_{\nu_\chi}^{(2)}(-k\tau) \right], \quad (3.29)$$

onde $c_1(k)$ e $c_2(k)$ são constantes de integração, e $H_{\nu_\chi}^{(1)}$ e $H_{\nu_\chi}^{(2)}$ são as funções de Hankel de primeira e segunda espécies, respectivamente.

Para distâncias no sub-horizonte, quer dizer, quando a condição $k \gg aH$ ($-k\tau \gg 1$) é satisfeita, a solução (3.29) deveria ter a forma limite⁸ (3.23). As funções de Hankel de primeira e segunda espécies, neste limite, satisfazem as relações

$$H_{\nu_\chi}^{(1)}(x \gg 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left(i\left[x - \frac{\pi}{2}\nu_\chi - \frac{\pi}{4}\right]\right), \quad (3.30)$$

$$H_{\nu_\chi}^{(2)}(x \gg 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left(-i\left[x - \frac{\pi}{2}\nu_\chi - \frac{\pi}{4}\right]\right). \quad (3.31)$$

Como consequência do limite (3.23) nas relações (3.30) e (3.31), a solução exata para as funções modo $u_k(\tau)$ em uma etapa de Sitter é expressa por

$$u_k(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(i\frac{[\nu_\chi + \frac{1}{2}]\pi}{2}\right) \sqrt{-\tau} H_{\nu_\chi}^{(1)}(-k\tau). \quad (3.32)$$

Por outro lado, o comportamento da solução (3.32) no super-horizonte — quer dizer, quando a condição $k \ll aH$ ($-k\tau \ll 1$) é satisfeita — pode ser deduzido. Em virtude de a função de Hankel de primeira espécie satisfazer neste limite a aproximação

$$H_{\nu_\chi}^{(1)}(x \ll 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) 2^{\nu_\chi - \frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\nu_\chi)}{\Gamma(3/2)} x^{-\nu_\chi}, \quad (3.33)$$

a solução no super-horizonte é

⁸Esse limite é equivalente a fazer a escolha do vácuo Bunch–Davies, quer dizer, aquele estado quântico de mínima energia visto por um observador inercial correspondendo a um número nulo de partículas [46].

$$u_k(\tau) = \exp(i \frac{[\nu_\chi - \frac{1}{2}]\pi}{2}) 2^{\nu_\chi - \frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\nu_\chi)}{\Gamma(3/2)} \frac{1}{\sqrt{2k}} (-k\tau)^{\frac{1}{2} - \nu_\chi}. \quad (3.34)$$

Portanto, no caso de um campo escalar genérico massivo em uma etapa de Sitter e no super-horizonte, a amplitude das flutuações do campo escalar genérico $|\chi_{\mathbf{k}}|$ não é uma constante como em (3.25), mas uma função do tempo conforme τ expressa por

$$|\delta\chi_k| = 2^{\nu_\chi - \frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\nu_\chi)}{\Gamma(3/2)} \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{a(\tau)H} \right)^{\frac{3}{2} - \nu_\chi}. \quad (3.35)$$

3.2.2 Solução para um cenário quase de Sitter

Durante o regime inflacionário o parâmetro de Hubble não é exatamente constante, como no cenário de Sitter, mas tem uma dependência temporal expressa por

$$\dot{H} = -\epsilon H^2, \quad (3.36)$$

sendo ϵ o parâmetro de rolamento lento definido na Seção 2.3; diz-se, neste caso, que o universo está em um regime de expansão quase de Sitter. Resolvendo a equação diferencial (3.36) encontramos que nesse regime

$$H = \frac{1}{\epsilon t}, \quad (3.37)$$

e da definição do parâmetro de Hubble (1.12), com H em (3.37), o fator de escala é

$$a(t) = t^{1/\epsilon}. \quad (3.38)$$

Da definição (1.53) do tempo conforme τ , encontra-se que durante uma etapa quase de Sitter o tempo conforme é expresso por

$$\tau = \frac{\epsilon t^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}}{\epsilon - 1} = \frac{t^{-\frac{1}{\epsilon}}}{H(\epsilon - 1)} = \frac{1}{H(\epsilon - 1)a(t)}, \quad (3.39)$$

de onde podemos escrever o fator de escala no tempo conforme como

$$a(\tau) = -\frac{1}{H} \frac{1}{\tau(1 - \epsilon)}. \quad (3.40)$$

A equação diferencial (3.9) para as funções modo $u_k(\tau)$ requer o cálculo de $\frac{a''}{a}$. Isto pode ser feito para (3.40) simplesmente transformando as derivadas no tempo conforme a derivadas no tempo cósmico, usando a identidade (1.28) e a equação (3.36). Obtém-se

$$\frac{a''}{a} = \frac{2 - \epsilon}{\tau^2(1 - \epsilon)^2}. \quad (3.41)$$

Considerando que durante o regime inflacionário $\epsilon \ll 1$, podemos fazer uma expansão de Taylor em (3.41) e obter

$$\frac{a''}{a} \simeq \frac{2}{\tau^2} \left(1 + \frac{3}{2}\epsilon\right). \quad (3.42)$$

Após álgebra simples encontramos a identidade

$$\frac{a''}{a} - m_\chi^2 a^2 = \frac{2}{\tau^2} \left(1 + \frac{3}{2}\epsilon - \frac{1}{2} \frac{m_\chi^2}{H^2(1 - \epsilon)^2}\right), \quad (3.43)$$

expressão que permite obter de novo a equação de Bessel na forma (3.27), mas com

$$\nu_\chi^2 = \frac{9}{4} + 3\epsilon - \frac{m_\chi^2}{H^2(1 - \epsilon)^2}. \quad (3.44)$$

Definindo

$$\eta_\chi \equiv \frac{m_\chi^2}{3H^2}, \quad (3.45)$$

e tomando somente o primeiro termo da expansão de Taylor de $\frac{1}{(1-\epsilon)^2}$, a equação (3.44) se transforma em

$$\nu_\chi \approx \frac{3}{2} \left(1 + \frac{4}{3}(\epsilon - \eta_\chi) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.46)$$

Se consideramos que $\eta_\chi \ll 1$, podemos fazer uma nova expansão de Taylor obter

$$\nu_\chi \simeq \frac{3}{2} + \epsilon - \eta_\chi. \quad (3.47)$$

Assim, no cenário quase de Sitter as funções modo $u_k(\tau)$ tem uma solução da forma (3.32) mas com ν_χ em (3.47). No super-horizonte, considerando que $\epsilon \ll 1$ e $\eta \ll 1$, a amplitude das flutuações do campo escalar genérico $|\chi_{\mathbf{k}}|$ é expressa por

$$|\delta\chi_{\mathbf{k}}| \approx \frac{H(t)}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{a(\tau)H(t)} \right)^{\frac{3}{2}-\nu_\chi} = \frac{H(t)}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{a(\tau)H(t)} \right)^{\eta_\chi-\epsilon}, \quad (3.48)$$

quer dizer, a dependência temporal do fator de escala introduz uma correção, com respeito à expressão para a amplitude no cenário de Sitter, posta em evidência em

$$|\delta\chi_{\mathbf{k}}| \simeq \frac{H(t)}{\sqrt{2k^3}} \left[1 + (\eta_\chi - \epsilon) \ln \left(\frac{k}{a(\tau)H(t)} \right) \right], \quad (3.49)$$

onde foi usada a expansão de Taylor da função $a^x \approx 1 + x \ln a$.

3.2.3 O espectro de potências

As funções de correlação,⁹ ou as suas transformadas de Fourier, as chamadas funções espectrais, são as ferramentas usuais para caracterizar a amplitude das flutuações de um campo aleatório. Consideremos que um campo aleatório $f(t, \mathbf{x})$ pode ser expandido no espaço de Fourier como

⁹Para um melhor entendimento desta subseção é aconselhável ler antes a Seção 5.2.

$$f(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) f_{\mathbf{k}}(t), \quad (3.50)$$

uma expansão que tem uma forma similar à solução da equação (3.6). A amplitude das flutuações do campo $f(t, \mathbf{x})$ é escrita em termos da sua função de correlação de dois pontos. Contudo, a amplitude das flutuações do campo aleatório também pode ser escrita em termos da transformada de Fourier da função de correlação de dois pontos, quer dizer, o espectro de potências $\mathcal{P}_f(k)$. O espectro de potências mede a amplitude das flutuações em uma escala k dada e para o campo $f(t, \mathbf{x})$ é definido como

$$\langle f_{\mathbf{k}_1} f_{\mathbf{k}_2}^* \rangle \equiv (2\pi)^3 \mathcal{P}_f(k) \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \quad (3.51)$$

onde $\langle \ , \ \rangle$ denota o valor médio do “ensemble”. O valor quadrático médio do campo $f(t, \mathbf{x})$ pode ser escrito usando (3.50) e a definição (3.51) como

$$\langle f^2(t, \mathbf{x}) \rangle = \int \frac{k^2}{2\pi^2} \mathcal{P}_f(k) dk = \int \Delta_f^2(k) d \ln k, \quad (3.52)$$

onde definimos

$$\Delta_f^2(k) \equiv \frac{k^3 \mathcal{P}_f(k)}{2\pi^2}. \quad (3.53)$$

Para descrever a inclinação do espectro de potências do campo $f(t, \mathbf{x})$, define-se o índice espectral¹⁰ n_f

$$n_f(k) - 1 \equiv \frac{d \ln \Delta_f^2}{d \ln k}. \quad (3.54)$$

¹⁰O índice espectral é um observável, ou seja, uma grandeza que pode ser extraída dos dados observacionais para testar modelos do universo. Como veremos no Capítulo 4, medir o índice espectral é equivalente a testar as propriedades estatísticas das perturbações escalares ou tensoriais para um dado modelo inflacionário. Por exemplo, um índice espectral igual a um para as perturbações escalares de um dado modelo do universo primordial corresponde a uma distribuição Gaussiana destas perturbações.

Lembrando a expansão (3.17) para a flutuação $\widetilde{\delta\chi}$ de um campo escalar genérico, as relações de comutação (3.19) dos operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$, e o fato que no vácuo o operador $a_{\mathbf{k}}$ age como

$$a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0, \quad (3.55)$$

calculamos

$$\langle 0|\widetilde{\delta\chi}^\dagger\widetilde{\delta\chi}|0\rangle, \quad (3.56)$$

para encontrar que

$$\langle \delta\chi_{\mathbf{k}_1}\delta\chi_{\mathbf{k}_2}^* \rangle = \frac{|u_k|^2}{a^2}\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \quad (3.57)$$

Assim, de acordo com a definição (3.51), tem-se que o espectro de potências para as flutuações de um campo escalar genérico é expresso por

$$\Delta_{\delta\chi}^2 = \frac{k^3}{2\pi^2}\mathcal{P}_{\delta\chi}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2}\langle |\delta\chi_k|^2 \rangle. \quad (3.58)$$

Um caso importante é aquele de um campo escalar sem massa em um cenário de Sitter, no qual $\nu_\chi = \frac{3}{2}$ (ver equação (3.28)). Essas condições na equação (3.32) junto com a definição (3.8) dão como resultado

$$\delta\chi_k = (-H\tau)\left(1 - \frac{i}{k\tau}\right)\frac{\exp(-ik\tau)}{\sqrt{2k}}. \quad (3.59)$$

Da equação (3.59) podemos calcular o espectro de potências de um campo escalar sem massa em uma etapa de Sitter no super-horizonte ($-k\tau \ll 1$). Usando os dois primeiros termos da expansão em serie de Taylor para a exponencial em (3.59)

$$\exp(-ik\tau) \approx 1 - ik\tau,$$

e usando a equação (3.58) encontramos que neste caso o espectro de potências é

$$\Delta_{\delta\chi}^2(k) = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2, \quad (3.60)$$

quer dizer, o espectro de potências das flutuações de um campo escalar sem massa em uma etapa de Sitter no super-horizonte é invariante de escala; em outras palavras, a amplitude das flutuações $\delta\chi_k$ do campo escalar é a mesma independentemente do vetor de onda k que a caracteriza. Isto também pode ser notado do cálculo do índice espectral $n_{\delta\chi}$ para as flutuações do campo escalar; da definição (3.54) temos

$$\frac{d \ln \Delta_{\delta\chi}^2}{d \ln k} = 0, \quad (3.61)$$

quer dizer, o índice espectral $n_{\delta\chi} = 1$ e se diz que o espectro de potências é plano.

Um outro caso relevante é o correspondente a um campo escalar massivo em um cenário quase de Sitter. A amplitude para as flutuações do campo escalar genérico nesse regime no super-horizonte é expressa pela equação (3.48). Portanto, da equação (3.58) o espectro de potências neste caso é

$$\Delta_{\delta\chi}^2(k) \simeq \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{3-2\nu_\chi}, \quad (3.62)$$

com ν_χ expresso pela equação (3.47). Nota-se que a diferença do espectro de potências das flutuações de um campo escalar sem massa em um regime de Sitter, o espectro de potências de um campo escalar massivo em um cenário quase de Sitter não é exatamente invariante de escala. Isto pode ser visto calculando o índice espectral $n_{\delta\chi}$; para o espectro de potências (3.62) temos, da definição (3.54) e usando ν_χ em (3.47), que

$$n_{\delta\chi} - 1 = \frac{d \ln \Delta_{\delta\chi}^2}{d \ln k} = 3 - 2\nu_\chi = 2\eta_\chi - 2\epsilon, \quad (3.63)$$

quer dizer, o espectro de potências é aproximadamente independente do vetor de onda que caracteriza a amplitude das flutuações $\delta\chi_{\mathbf{k}}$: a amplitude da flutuação no super-horizonte é aproximadamente independente do tempo

em que as flutuações cruzam o horizonte. Neste caso se diz que o espectro de potências é aproximadamente plano.

3.3 O universo não-homogêneo

No cenário inflacionário que foi apresentado no Capítulo 2 consideramos que a densidade de energia do universo é dominada pelo campo escalar. Portanto, qualquer perturbação do inflaton implica uma perturbação no tensor energia-momentum que por sua vez, pela relação entre conteúdo energético e geometria nas equações de campo de Einstein (1.25), gera perturbações na métrica. Por outro lado, essas perturbações na métrica têm um efeito na evolução das flutuações do inflaton através da equação de Klein-Gordon (3.2) perturbada. Assim, no cenário inflacionário, as perturbações do inflaton e da métrica estão acopladas e devem ser estudadas em conjunto. No entanto, até agora somente estudamos as perturbações do campo escalar. Nesta seção faremos algumas observações sobre as perturbações na métrica e no tensor energia-momentum e a sua evolução com o tempo. Também trataremos o problema da escolha do calibre no estudo do universo não-homogêneo.¹¹

3.3.1 O problema do calibre

Um modelo homogêneo do universo não é suficiente para abarcar toda a complexidade da atual distribuição de matéria e energia observada. Assim, precisa-se de uma forma para descrever anisotropias e inomogeneidades no universo. O procedimento padrão é considerar que as grandezas físicas podem ser expressas como uma soma de uma grandeza que corresponde a um cenário isotrópico e homogêneo e uma perturbação que depende não somente do tempo mas também do espaço. No entanto, essa abordagem do universo não-homogêneo traz como consequência ambiguidades na escolha das coordenadas — o chamado problema de calibre na teoria das perturbações cosmológicas — como explicaremos brevemente no que se segue.

¹¹Duas revisões sobre a teoria das perturbações cosmológicas são [102] e [103]. Uma revisão mais recente é [104].

De acordo com a abordagem mencionada acima, uma grandeza tensorial genérica pode se escrever como

$$T(\tau, x^i) = T_0(\tau) + \delta T(\tau, x^i), \quad (3.64)$$

onde $T_0(\tau)$ corresponde a um universo homogêneo e isotrópico, e a perturbação $\delta T(\tau, x^i)$ pode ser expandida na forma¹²

$$\delta T(\tau, x^i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vartheta^n}{n!} \delta T_n(\tau, x^i), \quad (3.65)$$

sendo $0 < \vartheta < 1$ uma constante. Nota-se que da equação (3.64) poderíamos definir — localmente — uma perturbação em uma grandeza tensorial como

$$\delta T(\tau, x^i) = T(\tau, x^i) - T_0(\tau), \quad (3.66)$$

quer dizer, como a diferença entre grandezas em variedades diferentes: $T(\tau, x^i)$ na variedade que representa o universo “real” — com não-homogeneidades e anisotropias — e $T_0(\tau)$ que é associada com um universo “ideal” homogêneo e isotrópico (ver figura (3.1)). Para calcular essa diferença em (3.66) é necessário comparar as duas grandezas no mesmo ponto do espaço-tempo. Porém, como as duas grandezas estão em variedades diferentes, precisa-se de uma aplicação que identifique univocamente um par de pontos nas duas geometrias. Tal aplicação é uma escolha de calibre e uma mudança dessa aplicação é uma transformação de calibre.¹³

¹²Observações das flutuações de temperatura da RCF mostram que $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$, o que sugere que é possível fazer um tratamento perturbativo das não-homogeneidades no universo.

¹³A Relatividade Geral é uma teoria de calibre em que as transformações de calibre são as transformações genéricas de coordenadas. Deve-se mencionar que não existe um sistema de coordenadas preferido na presença de perturbações, a única condição que deve ser satisfeita é que no limite de perturbações nulas a métrica FLRW de um universo homogêneo e isotrópico seja restabelecida. Um sistema de coordenadas satisfazendo essa condição chama-se de calibre. Alguns calibres usados com frequência na literatura são: o simultâneo, o Newtoniano, o de densidade uniforme, o comovel e o espacialmente plano. Uma definição desses calibres se encontra na referência [89].

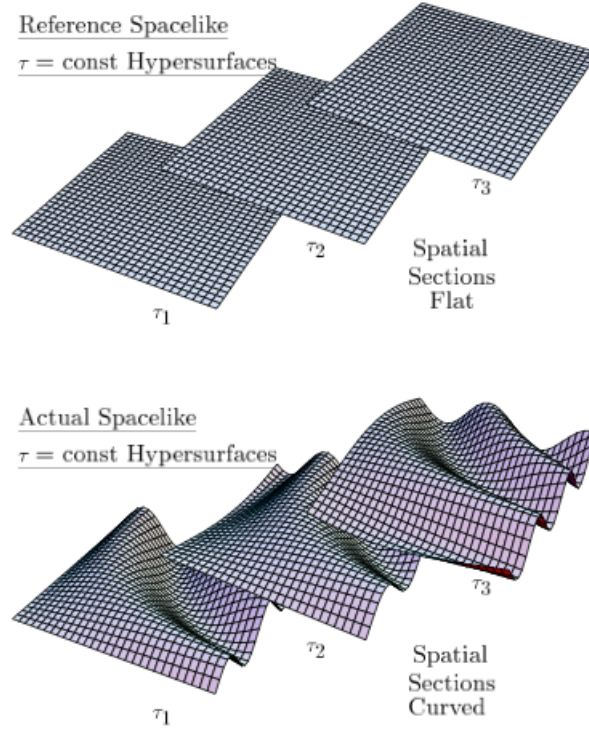


Fig. 3.1: *Hipersuperfícies de tempo conforme constante em um universo plano, isotrópico e homogêneo (acima) e em um universo com inhomogeneidades e anisotropias (abaixo). A figura é da referência [91].*

Devido à liberdade na escolha do sistema de coordenadas surge o conhecido problema do calibre. Uma transformação de calibre implica a variação da perturbação (3.66) de uma grandeza tensorial dada, quer dizer, a perturbação toma diferentes valores segundo a escolha do calibre, ainda que a perturbação seja examinada no mesmo ponto. Tem-se duas alternativas para resolver esse problema:

1. Identificar combinações que representam grandezas invariantes de calibre.
2. Escolher um calibre e fazer todas as contas nele.

Nas Subseções 3.3.4 e 3.3.6 serão usadas as duas alternativas. Para finalizar esta subseção faremos alguns comentários sobre as transformações de calibre

e as perturbações.

Transformações de calibre

Considera-se, como é feito em [101], uma transformação infinitesimal nas coordenadas

$$\tilde{x}^\mu(\lambda) = x^\mu - \xi_{(1)}^\mu - \frac{1}{2} \left(\xi_{(1),\nu}^\mu \xi_{(1)}^\nu + \xi_{(2)}^\mu \right), \quad (3.67)$$

onde

$$\xi_{(r)}^\mu = \xi_{(r)}^\mu(\tau, x^i), \quad (3.68)$$

são campos vetoriais que definem a transformação de coordenadas; $r = 1, 2$ indica a ordem da perturbação e τ é o tempo conforme definido em (1.53). É possível escrever as componentes destes vetores na forma

$$\xi_{(r)}^0 = \alpha_{(r)}, \quad (3.69)$$

e

$$\xi_{(r)}^i = \partial^i \beta_{(r)} + d_{(r)}^i \quad ; \quad \partial_i d^{(r)i} = 0. \quad (3.70)$$

A função $\xi_{(r)}^0$ — a componente temporal da transformação — define para cada $\alpha_{(r)}$ fixo hipersuperfícies de tempo τ constante e as funções $\xi_{(r)}^i$ definem linhas coordenadas espaciais nestas hipersuperfícies.

Pode ser mostrado¹⁴ que para uma quantidade tensorial genérica T , escrita de acordo com (3.65) como

$$T(\tau, x^i) = T_0 + \delta T(\tau, x^i) = T_0 + \delta^{(1)} T(\tau, x^i) + \frac{1}{2} \delta^{(2)} T(\tau, x^i), \quad (3.71)$$

¹⁴Para aspectos formais sobre as transformações de grandezas tensoriais sob transformações de calibre da ordem superior são uteis as referências [105] e [106].

as perturbações não são grandezas invariantes de calibre. Na primeira ordem temos que a perturbação se transforma como

$$\widetilde{\delta^{(1)}T} = \delta^{(1)}T + L_{\xi_{(1)}}T_0, \quad (3.72)$$

e na segunda ordem

$$\widetilde{\delta^{(2)}T} = \delta^{(2)}T + 2L_{\xi_{(1)}}\delta^{(1)}T + L_{\xi_{(1)}}^2T_0 + L_{\xi_{(2)}}T_0, \quad (3.73)$$

sendo $L_{\xi_{(r)}}$ a derivada de Lie na direção do vetor $\xi_{(r)}$.

Como um exemplo, considera-se a densidade de energia ρ . Com uma transformação de coordenadas de acordo com (3.69) e (3.70), a perturbação na densidade de energia, segundo (3.72) e (3.73), deve transformar-se em primeira ordem como

$$\widetilde{\delta^{(1)}\rho} = \delta^{(1)}\rho + \rho'_0\alpha_{(1)}, \quad (3.74)$$

e em segunda ordem como

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta^{(2)}\rho} = & \delta^{(2)}\rho + \rho'_0\alpha_{(2)} + \alpha_{(1)} \left(\rho''_0\alpha_{(1)} + \rho'_0\alpha'_{(1)} + 2\delta^{(1)}\rho' \right) \\ & + \xi_{(1)}^i \left(\rho'_0\alpha_{,i}^{(1)} + 2\delta\rho_{,i} \right). \end{aligned} \quad (3.75)$$

onde “'” indica derivada com respeito ao tempo conforme τ .

3.3.2 Perturbações da métrica

Discutimos na Seção 1.4 que as observações sugerem que o universo é homogêneo, isotrópico e plano em grandes escalas. Notou-se também que uma métrica com essas características é a celebre métrica FLRW. Devido ao acoplamento entre a geometria e o conteúdo energético através das equações de Einstein, as perturbações do inflaton motivam o estudo das perturbações na métrica FLRW. No caso plano, a forma mais geral da métrica FLRW perturbada até segunda ordem pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
g_{00} &= -a^2(\tau)(1 + 2\phi^{(1)} + \phi^{(2)}), \\
g_{0i} &= a^2(\tau) \left(\hat{\omega}_i^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\omega}_i^{(2)} \right), \\
g_{ij} &= a^2(\tau) \left[(1 - 2\psi^{(1)} - \psi^{(2)})\delta_{ij} + \left(\hat{\chi}_{ij}^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{\chi}_{ij}^{(2)} \right) \right], \quad (3.76)
\end{aligned}$$

onde $\phi^{(r)}$, $\hat{\omega}_i^{(r)}$, $\psi^{(r)}$ e $\hat{\chi}_{ij}^{(r)}$ são as perturbações da métrica e $(r) = (1), (2)$ denota a ordem da perturbação. O procedimento padrão é dividir as perturbações em escalares, vetoriais e tensoriais¹⁵ de acordo com as suas propriedades de transformação no espaço tridimensional com métrica δ_{ij} ; as perturbações escalares estão relacionadas a um potencial escalar, as vetoriais a vetores solenoidais — quer dizer, sem divergência — e as tensoriais a tensores sem traço. As funções nas perturbações vetoriais e tensoriais em (3.76) podem ser escritas respectivamente como

$$\hat{\omega}_i^{(r)} = \partial_i \omega^{(r)} + \omega_i^{(r)}, \quad (3.77)$$

e

$$\hat{\chi}_{ij}^{(r)} = D_{ij} \chi^{(r)} + \partial_i \chi_j^{(r)} + \partial_j \chi_i^{(r)} + \chi_{ij}^{(r)}, \quad (3.78)$$

com ω_i e χ_i sendo vetores solenoidais, quer dizer, satisfazendo

$$\partial^i \omega_i^{(r)} = \partial^i \chi_i^{(r)} = 0, \quad (3.79)$$

$\chi_{ij}^{(r)}$ um tensor simétrico transversal e sem traço, quer dizer, satisfazendo

$$\partial^i \chi_{ij}^{(r)} = 0 \quad , \quad \chi_i^{i(r)} = 0, \quad (3.80)$$

e

¹⁵A razão para fazer tal divisão entre as perturbações é que na ordem linear esses diferentes modos estão desacoplados e a sua evolução pode ser estudada independentemente. Na segunda ordem essa propriedade não é mais satisfeita porque as perturbações da primeira ordem se acoplam para gerar perturbações de segunda ordem.

$$D_{ij} = \partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2, \quad (3.81)$$

um operador sem traço.

Devido à amplitude decrescente e por não serem geradas na presença de campos escalares — tais como o inflaton —, as perturbações vetoriais de primeira ordem podem ser ignoradas. As perturbações tensoriais de primeira ordem dão uma contribuição desprezível para as perturbações de segunda ordem e também podem ser ignoradas.¹⁶ Portanto, no que se segue vão ser ignorados $\omega_i^{(1)}$, $\chi_i^{(1)}$ e $\chi_{ij}^{(1)}$. Sob estas condições a métrica FLRW perturbada toma a forma

$$\begin{aligned} g_{00} &= -a^2(\tau)(1 + 2\phi^{(1)} + \phi^{(2)}), \\ g_{0i} &= a^2(\tau) \left(\partial_i \omega^{(1)} + \frac{1}{2} \partial_i \omega^{(2)} + \frac{1}{2} \omega_i^{(2)} \right), \\ g_{ij} &= a^2(\tau) \left[(1 - 2\psi^{(1)} - \psi^{(2)}) \delta_{ij} + D_{ij} \left(\chi^{(1)} + \frac{1}{2} \chi^{(2)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\partial_i \chi_j^{(2)} + \partial_j \chi_i^{(2)} + \chi_{ij}^{(2)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Para obter a forma contravariante da métrica (3.82) basta impor a condição $g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$ até a segunda ordem. Após um pouco de álgebra se obtém

¹⁶O fato de as perturbações vetoriais e tensoriais serem desprezíveis na presença de campos escalares é apresentado em detalhes na referência [104]. Contudo, como se verá no Capítulo 4, a amplitude das perturbações tensoriais da primeira ordem na métrica é usada para testar os modelos inflacionários.

$$\begin{aligned}
g^{00} &= -a^{-2}(\tau) \left(1 - 2\phi^{(1)} - \phi^{(2)} + 4(\phi^{(1)})^2 - \partial^i \omega^{(1)} \partial_i \omega^{(1)} \right) , \\
g^{0i} &= a^{-2}(\tau) \left[\partial^i \omega^{(1)} + \frac{1}{2} \left(\partial^i \omega^{(2)} + \omega^{i(2)} \right) + 2 \left(\psi^{(1)} - \phi^{(1)} \right) \partial^i \omega^{(1)} \right. \\
&\quad \left. - \partial^i \omega^{(1)} D_k^i \chi^{(1)} \right] , \\
g^{ij} &= a^{-2} \left[\left(1 + 2\psi^{(1)} + \psi^{(2)} + 4(\psi^{(1)})^2 \right) \delta^{ij} - D^{ij} \left(\chi^{(1)} + \frac{1}{2} \chi^{(2)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\partial^i \chi^{j(2)} + \partial^j \chi^{i(2)} + \chi^{ij(2)} \right) - \partial^i \omega^{(1)} \partial^j \omega^{(1)} \right. \\
&\quad \left. - 4\psi^{(1)} D^{ij} \chi^{(1)} + D^{ik} \chi^{(1)} D_k^j \chi^{(1)} \right] . \tag{3.83}
\end{aligned}$$

Com as métricas (3.82) e (3.83) é possível calcular as perturbações nas conexões — também chamados de símbolos de Christoffel — $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ e no tensor de Einstein G_ν^μ até a segunda ordem.¹⁷

3.3.3 Perturbações no tensor energia–momentum

Nesta subseção consideraremos as consequências das flutuações do campo escalar no tensor energia–momentum. Como é usual será feita a hipótese de fluido perfeito, quer dizer, o conteúdo energético é descrito por um tensor energia–momentum da forma (1.16), que também pode se escrever

$$T_\nu^\mu = (P + \rho)U^\mu U_\nu + P\delta_\nu^\mu , \tag{3.84}$$

onde a quadrivelocidade U^μ satisfaz a restrição

$$g^{\mu\nu}U_\mu U_\nu = -1 \quad \text{ou} \quad g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1 . \tag{3.85}$$

O tensor energia–momentum¹⁸ em (3.84) depende da quadrivelocidade U^μ ,

¹⁷No Apêndice A o leitor pode encontrar as expressões detalhadas destas grandezas reproduzidas da referência [101].

¹⁸A tensão anisotrópica Π_ν^μ não é considerada na equação (3.84) porque para um fluido perfeito ou para campos escalares minimamente acoplados com a gravidade — como no modelo inflacionário tratado no Capítulo 2 — essa quantidade é nula. Perturbações que consideram tensão anisotrópica são apresentadas em [104].

da densidade ρ e da pressão P . Portanto, para obter as perturbações em (3.84) até a segunda ordem, deve-se perturbar U^μ , ρ e P até a segunda ordem também. Para a quadrivelocidade temos

$$U^\mu = \frac{1}{a} \left(\delta_0^\mu + v_{(1)}^\mu + \frac{1}{2} v_{(2)}^\mu \right). \quad (3.86)$$

Usando as expressões para a métrica (3.82) e a quadrivelocidade (3.86) na condição de normalização (3.85), podemos escrever as perturbações na quadrivelocidade em termos das perturbações na métrica como

$$v_{(1)}^0 = -\phi^{(1)}, \quad (3.87)$$

e

$$v_{(2)}^0 = -\phi^{(2)} + 3(\phi^{(1)})^2 + 2\partial_i \omega^{(1)} v_{(1)}^i + v_i^{(1)} v_{(1)}^i. \quad (3.88)$$

A parte espacial da perturbação na quadrivelocidade $v_{(r)}^i$ pode — similarmente ao caso das perturbações vetoriais na métrica — ser escrita como a soma de uma contribuição irrotacional e uma outra sem divergência da forma

$$v_{(r)}^i = \partial^i v_{(r)} + v_{(r)L}^i \quad ; \quad \partial_i v_{(r)L}^i = 0. \quad (3.89)$$

Para calcular as componentes covariantes da quadrivelocidade se usa a métrica (3.82) e a expressão contravariante da quadrivelocidade (3.86) em

$$U_\mu = g_{\mu\nu} U^\nu, \quad (3.90)$$

para obter

$$\begin{aligned} U_0 &= a \left(-1 - \phi^{(1)} - \frac{1}{2} \phi^{(2)} + \frac{1}{2} (\phi^{(1)})^2 - \frac{1}{2} v_i^{(1)} v_{(1)}^i \right), \\ U_i &= a \left(v_i^{(1)} + \partial_i \omega^{(1)} + \frac{1}{2} v_i^{(2)} + \frac{1}{2} \omega_i^{(2)} - \phi^{(1)} \partial_i \omega^{(1)} - 2\psi^{(1)} v_i^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + D_{ij} \chi^{(1)} v_{(1)}^j \right). \end{aligned} \quad (3.91)$$

Considerando a abordagem mencionada na Subseção 3.3.1 e de acordo com as equações (3.64) e (3.65), a densidade de energia $\rho(\tau, x^i)$ pode ser expressa como

$$\rho(\tau, x^i) = \rho_0(\tau) + \delta\rho(\tau, x^i) = \rho_0(\tau) + \delta^{(1)}\rho(\tau, x^i) + \frac{1}{2}\delta^{(2)}\rho(\tau, x^i). \quad (3.92)$$

Além da hipótese do fluido perfeito mencionada anteriormente, é usual supor que a equação de estado w na equação (1.17) é constante. Assim, uma decomposição similar a (3.92) pode ser feita para a pressão P do fluido,

$$\delta P = w\delta\rho. \quad (3.93)$$

Finalmente, com as perturbações da quadrivelocidade, da densidade e da pressão encontradas anteriormente, é possível calcular, utilizando a equação (3.84), as perturbações para o tensor energia–momentum até a segunda ordem. Se

$$T_\nu^\mu = T_\nu^{\mu(0)} + \delta^{(1)}T_\nu^\mu + \delta^{(2)}T_\nu^\mu, \quad (3.94)$$

as perturbações nas diferentes componentes são expressas por

$$T_0^{0(0)} + \delta^{(1)}T_0^0 = -\rho_0 - \delta^{(1)}\rho, \quad (3.95)$$

$$\delta^{(2)}T_0^0 = -\frac{1}{2}\delta^{(2)}\rho - (1+w)\rho_0 v_i^{(1)} v_{(1)}^i - (1+w)\rho_0 \partial_i \omega^{(1)} v_{(1)}^i, \quad (3.96)$$

$$T_0^{i(0)} + \delta^{(1)}T_0^i = -(1+w)\rho_0 v_{(1)}^i, \quad (3.97)$$

$$\delta^{(2)}T_0^i = -(1+w)\rho_0 \left[\frac{1}{2}v_{(2)}^i + \left(\psi^{(1)} + \frac{\delta^{(1)}\rho}{\rho_0} v_{(1)}^i \right) \right], \quad (3.98)$$

$$T_j^{i(0)} + \delta^{(1)}T_j^i = w\rho_0 \left(1 + \frac{\delta^{(1)}\rho}{\rho_0} \right) \delta_j^i, \quad (3.99)$$

e

$$\delta^{(2)}T_j^i = \frac{1}{2}w\delta^{(2)}\rho\delta_j^i + (1+w)\rho_0v_{(1)}^i(v_j^{(1)} + \partial_j\omega^{(1)}). \quad (3.100)$$

Observa-se das equações (3.96), (3.98) e (3.100) que as perturbações de segunda ordem contêm contribuições de dois tipos diferentes: umas que são intrinsecamente de segunda ordem e outras que são o produto de duas perturbações de primeira ordem. Isto mostra que as perturbações de primeira ordem se comportam como fonte para as perturbações de segunda ordem.

3.3.4 Variáveis invariantes de calibre

Na abordagem padrão do estudo do universo não-homogêneo existe um inconveniente que surge da liberdade na escolha do sistema de coordenadas: as perturbações das grandezas físicas dependem da escolha do calibre. Notou-se na Subseção 3.3.1 que há duas alternativas para solucionar esse problema. Em uma delas, define-se variáveis que são invariantes de calibre.¹⁹ Na outra, faz-se uma escolha de calibre para realizar todos os cálculos nele. Contudo, a segunda opção traz como consequência a possível aparição de perturbações sem significado físico, quer dizer, que estão associadas somente com a escolha do sistema de coordenadas; similarmente, perturbações físicas na densidade de energia podem ser ignoradas se uma hipersuperfície de tempo constante é escolhida de tal forma que coincida com uma hipersuperfície de densidade de energia constante. Nesta subseção definiremos algumas combinações lineares — formadas por perturbações na métrica, na densidade de energia e no inflaton — que são invariantes de calibre e que serão fundamentais no estudo da não Gaussianidade primordial da RCF.

Para um universo plano, a curvatura espacial intrínseca em hipersuperfícies de tempo conforme τ constante é expressa por [107]

$${}^{(3)}R = \frac{4}{a^2}\nabla^2\hat{\psi}^{(1)}, \quad (3.101)$$

sendo

¹⁹Como foi feito na referência [107].

$$\hat{\psi}^{(1)} = \psi^{(1)} + \frac{1}{6} \nabla^2 \chi^{(1)}, \quad (3.102)$$

com $\hat{\psi}^{(1)}$ usualmente chamada de perturbação na curvatura.²⁰ Embora a perturbação na curvatura (3.102) não seja invariante de calibre, pois a perturbação

$$\psi = \psi^{(1)} + \frac{1}{2} \psi^{(2)}, \quad (3.103)$$

na métrica (3.82) tampouco o é, mostra-se²¹ que sob uma transformação de calibre (ver equações (3.69) e (3.70)) ela se transforma em primeira ordem como

$$\widetilde{\psi}^{(1)} = \psi^{(1)} - \frac{1}{3} \nabla^2 \beta_{(1)} - \frac{a'}{a} \alpha_{(1)}, \quad (3.104)$$

e, em segunda ordem,

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}^{(2)} &= \psi^{(2)} + \alpha_{(1)} \left[2 \left(\psi^{(1)'} + 2 \frac{a'}{a} \psi^{(1)} \right) - \left(\frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2} \right) \alpha_{(1)} - \frac{a'}{a} \alpha'_{(1)} \right] \\ &+ \xi_{(1)}^i \left(2 \psi_{,i}^{(1)} - \frac{a'}{a} \alpha_{,i}^{(1)} \right) - \frac{1}{3} \left(-4 \psi^{(1)} + \alpha_{(1)} \partial_0 + \xi_{(1)}^i \partial_i \right. \\ &+ \left. 4 \frac{a'}{a} \alpha_{(1)} \right) \nabla^2 \beta_{(1)} - \frac{1}{3} \left(2 \omega_{(1)}^{,i} - \alpha_{(1)}^i + \xi_{(1)}^{i'} \right) \alpha_{,i}^{(1)} - \frac{1}{3} \left(2 \chi_{ij}^{(1)} \right. \\ &+ \left. \xi_{i,j}^{(1)} + \xi_{j,i}^{(1)} \right) \xi_{(1)}^{j,i} - \frac{a'}{a} \alpha_{(2)} - \frac{1}{3} \nabla^2 \beta_{(2)}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Em particular, uma transformação de calibre

$$\tau \rightarrow \tau + \alpha_{(1)} \quad , \quad \xi_{(1)}^i = 0, \quad (3.106)$$

²⁰A equação (3.101) é deduzida na referência [107] com uma notação diferente da usada aqui.

²¹Ver por exemplo as referências [91] e [108].

transforma a perturbação na curvatura (3.102) da forma

$$\widetilde{\hat{\psi}}^{(1)} = \hat{\psi}^{(1)} - \mathcal{H}\alpha_{(1)}, \quad (3.107)$$

onde foi usada a transformação

$$\widetilde{\chi}^{(1)} = \chi^{(1)} + 2\beta_{(1)}. \quad (3.108)$$

A função $\alpha_{(1)}$, que define a transformação (3.106), pode ser escolhida de tal forma que não se tenham perturbações na densidade. Assim, da equação (3.74), com $\widetilde{\delta}^{(1)}\rho = 0$, tem-se

$$\alpha_{(1)} = -\frac{\delta^{(1)}\rho}{\rho'_0}. \quad (3.109)$$

É simples mostrar das equações (3.107) e (3.74) que sob uma transformação de calibre (3.106), definida pela função (3.109), a grandeza

$$-\zeta^{(1)} \equiv \widetilde{\hat{\psi}}^{(1)}|_{\rho} = \hat{\psi}^{(1)} + \mathcal{H}\frac{\delta^{(1)}\rho}{\rho'_0}, \quad (3.110)$$

é invariante de calibre. Nota-se que $-\zeta^{(1)}$ coincide com a perturbação na curvatura $\hat{\psi}^{(1)}$ quando um calibre no qual não se tem perturbações na densidade é escolhido.²²

Se o conteúdo energético for composto por vários fluidos, as perturbações na curvatura associadas com cada componente da densidade de energia ρ_i , na aproximação linear, são

$$\zeta_i^{(1)} = -\hat{\psi}^{(1)} - \mathcal{H}\left(\frac{\delta^{(1)}\rho_i}{\rho'_i}\right), \quad (3.111)$$

²²Por outro lado, se um calibre no qual não há perturbações na curvatura — quer dizer, um calibre com $\hat{\psi}^{(1)} = 0$ — é escolhido, $-\zeta^{(1)}$ corresponde às perturbações na densidade em hipersuperfícies de curvatura uniforme.

enquanto a perturbação total na curvatura — em primeira ordem — pode ser escrita como

$$\zeta^{(1)} = \sum_i \frac{\rho'_i}{\rho} \zeta_i^{(1)}. \quad (3.112)$$

Considerando perturbações na métrica e na densidade de energia até a segunda ordem como nas equações (3.103) e (3.92) é possível mostrar que a perturbação na curvatura em hipersuperfícies de densidade total uniforme, quer dizer, onde $\delta^{(1)}\rho = \delta^{(2)}\rho = 0$, pode ser expressa por

$$\begin{aligned} -\zeta^{(2)} \equiv \widetilde{\hat{\psi}^{(2)}}|_\rho &= \hat{\psi}^{(2)} + \mathcal{H} \frac{\delta^{(2)}\rho}{\rho'} - 2\mathcal{H} \frac{\delta^{(1)}\rho'}{\rho'} \frac{\delta^{(1)}\rho}{\rho'} - 2 \frac{\delta^{(1)}\rho}{\rho'} \left(\hat{\psi}^{(1)'} + 2\mathcal{H}\hat{\psi}^{(1)} \right) \\ &+ \left(\frac{\delta^{(1)}\rho}{\rho'} \right)^2 \left(\mathcal{H} \frac{\rho''}{\rho'} - \mathcal{H}' - 2\mathcal{H}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.113)$$

sendo

$$\hat{\psi}^{(2)} = \psi^{(2)} + \frac{1}{6} \nabla^2 \chi^{(2)} \quad (3.114)$$

a perturbação na curvatura espacial intrínseca de segunda ordem.

Quando há diferentes fluidos contribuindo para a densidade de energia, cada fluido contribuirá para a perturbação na curvatura com

$$\begin{aligned} -\zeta_i^{(2)} &= \hat{\psi}^{(2)} + \mathcal{H} \frac{\delta^{(2)}\rho_i}{\rho'_i} - 2\mathcal{H} \frac{\delta^{(1)}\rho'_i}{\rho'_i} \frac{\delta^{(1)}\rho_i}{\rho'_i} - 2 \frac{\delta^{(1)}\rho_i}{\rho'_i} \left(\hat{\psi}^{(1)'} + 2\mathcal{H}\hat{\psi}^{(1)} \right) \\ &+ \left(\frac{\delta^{(1)}\rho_i}{\rho'_i} \right)^2 \left(\mathcal{H} \frac{\rho''_i}{\rho'_i} - \mathcal{H}' - 2\mathcal{H}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.115)$$

Segundo as relações anteriores, vê-se que a perturbação — invariante de calibre — na curvatura em hipersuperfícies de densidade uniforme até a segunda ordem pode ser expressa por

$$-\zeta = -\zeta^{(1)} - \frac{1}{2}\zeta^{(2)}. \quad (3.116)$$

3.3.5 Outras variáveis invariantes de calibre

Uma quantidade invariante de calibre que será de utilidade na parametrização da não gaussianidade da RCF no Capítulo 5 é o potencial de Bardeen Φ [107] definido em primeira ordem como

$$\Phi^{(1)} = -\phi^{(1)} + \frac{1}{a} \left[\left(-\omega^{(1)} + \frac{\chi^{(1)'}}{2} \right) a \right]', \quad (3.117)$$

onde $\phi^{(1)}$, $\omega^{(1)}$, $\chi^{(1)}$ são as perturbações na métrica (3.76) e a é o fator de escala. Como é mostrado na referência [102], existe uma relação muito simples na primeira ordem entre a perturbação na curvatura em hipersuperfícies de densidade uniforme $\zeta^{(1)}$ e o potencial de Bardeen $\Phi^{(1)}$ na era dominada pela matéria expressa por

$$\Phi^{(1)} = \frac{3}{5}\zeta^{(1)}. \quad (3.118)$$

Uma outra variável invariante de calibre é a chamada perturbação na curvatura em hipersuperfícies comóveis \mathcal{R} , definida em primeira ordem como

$$\mathcal{R}^{(1)} = \hat{\psi}^{(1)} + \mathcal{H} \frac{\delta^{(1)}\varphi}{\varphi'}. \quad (3.119)$$

A relação entre a perturbação na curvatura em hipersuperfícies de densidade uniforme $\zeta^{(1)}$ e a perturbação na curvatura em hipersuperfícies comóveis $\mathcal{R}^{(1)}$ é expressa por uma transformação de calibre

$$-\zeta^{(1)} = \mathcal{R}^{(1)} + \frac{2\rho}{9(\rho + P)} \left(\frac{k}{aH} \right)^2 \phi^{(1)}, \quad (3.120)$$

como se mostra na referência [109]. Nota-se da equação (3.120) que no super-horizonte ($k \ll aH$) as duas variáveis $\zeta^{(1)}$ e $\mathcal{R}^{(1)}$ satisfazem

$$\mathcal{R}^{(1)} \simeq -\zeta^{(1)}. \quad (3.121)$$

Esta relação pode ser encontrada usando a equação de continuidade (1.35), as condições de rolamento lento do inflaton (ver Capítulo 2) durante o regime inflacionário e a transformação de derivadas com respeito ao tempo cósmico e ao tempo conforme. Escritas no tempo cósmico t , as perturbações na curvatura $\zeta^{(1)}$ e $\mathcal{R}^{(1)}$ ficam

$$\zeta^{(1)} = \hat{\psi}^{(1)} + H \frac{\delta^{(1)}\rho}{\dot{\rho}}, \quad (3.122)$$

e

$$\mathcal{R}^{(1)} = \hat{\psi}^{(1)} + H \frac{\delta^{(1)}\varphi}{\dot{\varphi}}. \quad (3.123)$$

Com a equação de continuidade (1.35) podemos reescrever (3.122) como

$$\zeta^{(1)} = \hat{\psi}^{(1)} - \frac{\delta^{(1)}\rho}{3(\rho + P)}. \quad (3.124)$$

Das equações (2.14) e (2.15) para a densidade e a pressão do inflaton — no cenário tratado na Seção 2.2 — temos que

$$\rho + P = \dot{\varphi}^2. \quad (3.125)$$

Por outro lado, considerando que no super-horizonte as amplitudes das perturbações do inflaton são aproximadamente constantes²³ ($\delta\dot{\varphi} \approx 0$) e as condições de rolamento lento na equação do movimento do inflaton (2.26) se tem

$$\delta\rho \simeq V'\delta\varphi \quad \rightarrow \quad \delta\rho \simeq -3H\dot{\varphi}\delta\varphi, \quad (3.126)$$

e portanto, com (3.125) e (3.126) em (3.124) $\zeta^{(1)}$ fica

²³Ver Seção 3.2.

$$\zeta^{(1)} \simeq \hat{\psi}^{(1)} + H \frac{\delta^{(1)}\varphi}{\dot{\varphi}}, \quad (3.127)$$

que coincide com (3.123).

3.3.6 A evolução das perturbações cosmológicas

O objetivo principal deste trabalho é fazer um estudo da não gaussianidade primordial na RCF. Isso requer — como se verá nos próximos capítulos — conhecer a evolução temporal das não linearidades nas perturbações desde o período inflacionário até a atualidade. Na prática, isso permite prever o nível da não gaussianidade em diferentes cenários para a geração das perturbações cosmológicas. Nesta subseção trataremos a evolução da perturbação na curvatura invariante de calibre $-\zeta$, definida na Subseção 3.3.4, até a segunda ordem no super-horizonte.²⁴ Isso será feito através da equação de continuidade (1.35).

Consideremos um cenário em que o conteúdo energético do universo é composto por dois fluidos interagentes: um campo escalar homogêneo em uma fase em que a sua pressão média é nula (ver final da Seção 2.3) e radiação. Tal campo escalar tem, na média, uma equação de estado expressa por

$$w_\varphi = \left\langle \frac{P_\varphi}{\rho_\varphi} \right\rangle = 0, \quad (3.128)$$

quer dizer, o campo escalar se comporta como um fluido de partículas não-relativistas.²⁵ Por outro lado, cada componente energético tem um tensor

²⁴O limite de super-horizonte se usa porque, como se mostrará adiante no final do capítulo, nesse limite as perturbações da curvatura não dependem do tempo. Isto permite usar o valor da perturbação da curvatura no instante em que esta sai (entra) do horizonte. Nota-se que pelo efeito Sachs-Wolfe (Capítulo 4) as perturbações da curvatura estão relacionadas com um observável, a saber, as flutuações de temperatura da RCF. A RCF fornece informação sobre a física do universo primordial, em particular sobre a época da recombinação. Assim, estudando as propriedades estatísticas das perturbações da curvatura no horizonte podemos testar a física do universo primordial comparando com as observações da RCF.

²⁵No cenário considerado aqui, também é suposto que o campo escalar decai em radiação com uma taxa Γ .

energia-momentum $T_{(\varphi)}^{\mu\nu}$ e $T_{(\gamma)}^{\mu\nu}$ cuja soma é o tensor energia-momentum total do sistema e que satisfaz a lei de conservação

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.129)$$

Devido à interação entre os fluidos podemos escrever

$$T_{(\varphi);;\mu}^{\mu\nu} = Q_{(\varphi)}^{\nu}, \quad (3.130)$$

e

$$T_{(\gamma);;\mu}^{\mu\nu} = Q_{(\gamma)}^{\nu}, \quad (3.131)$$

onde os quadrivetores de transferência de energia-momentum $Q_{(\varphi)}^{\nu}$ e $Q_{(\gamma)}^{\nu}$ satisfazem, como consequência da lei de conservação (3.129),

$$Q_{(\varphi)}^{\nu} + Q_{(\gamma)}^{\nu} = 0. \quad (3.132)$$

É conveniente decompor os quadrivetores de transferência de energia-momentum como

$$Q_{(\varphi)}^{\nu} = \hat{Q}_{\varphi} u^{\nu} + f_{(\varphi)}^{\nu}, \quad (3.133)$$

e

$$Q_{(\gamma)}^{\nu} = \hat{Q}_{\gamma} u^{\nu} + f_{(\gamma)}^{\nu}, \quad (3.134)$$

sendo os quadrivetores f^{ν} ortogonais à quadrivelocidade U^{ν} do fluido, quer dizer,

$$U_{\nu} f^{\nu} = 0. \quad (3.135)$$

As equações de continuidade para o campo escalar e a radiação podem ser obtidas multiplicando ambos os lados das equações (3.133) e (3.134) pela quadrivelocidade U_{ν} . Este procedimento fornece para o campo escalar

$$U_\nu T_{(\varphi);\mu}^{\mu\nu} = \hat{Q}_\varphi, \quad (3.136)$$

e para a radiação

$$U_\nu T_{(\gamma);\mu}^{\mu\nu} = \hat{Q}_\gamma. \quad (3.137)$$

Mostra-se na referência [110] que, para o cenário considerado aqui, quer dizer, um campo escalar com pressão média nula e que decai em radiação, os coeficientes de transferência \hat{Q}_φ e \hat{Q}_γ são expressos em termos da taxa de decaimento Γ por

$$\hat{Q}_\varphi = -\Gamma\rho_\varphi, \quad (3.138)$$

e

$$\hat{Q}_\gamma = \Gamma\rho_\gamma. \quad (3.139)$$

Da equação (3.111) temos que a contribuição do campo escalar para a perturbação total da curvatura se escreve

$$\zeta_\varphi^{(1)} = -\hat{\psi}^{(1)} - \mathcal{H} \left(\frac{\delta^{(1)}\rho_\varphi}{\rho'_\varphi} \right), \quad (3.140)$$

e para a radiação

$$\zeta_\gamma^{(1)} = -\hat{\psi}^{(1)} - \mathcal{H} \left(\frac{\delta^{(1)}\rho_\gamma}{\rho'_\gamma} \right). \quad (3.141)$$

A perturbação total na curvatura $-\zeta^{(1)}$ na primeira ordem pode ser escrita, de acordo com a equação (3.112), em termos das perturbações de cada componente do sistema considerado,

$$\zeta^{(1)} = f\zeta_\varphi^{(1)} + (1-f)\zeta_\gamma^{(1)}, \quad (3.142)$$

com

$$f = \frac{\hat{\rho}'_\varphi}{\hat{\rho}'}, \quad (3.143)$$

e

$$1 - f = \frac{\hat{\rho}'_\gamma}{\hat{\rho}'}, \quad (3.144)$$

definindo as contribuições do campo escalar e a radiação para a perturbação na curvatura.

Como foi comentado anteriormente, usaremos as equações de continuidade (3.136) e (3.137) para obter a equação de movimento da perturbação da curvatura no super-horizonte até a segunda ordem. Começamos perturbando os coeficientes de transferência \hat{Q}_φ e \hat{Q}_γ até a primeira ordem

$$\hat{Q}_\varphi = Q_\varphi + \delta^{(1)}Q_\varphi, \quad (3.145)$$

$$\hat{Q}_\gamma = Q_\gamma + \delta^{(1)}Q_\gamma. \quad (3.146)$$

Posteriormente se perturba o lado esquerdo das equações de continuidade (3.136) e (3.137) usando as perturbações para a quadrivelocidade (3.86), (3.87) e (3.89); e as perturbações para o tensor energia-momentum (3.95), (3.97) e (3.99). Considerando somente as contribuições de primeira ordem e usando as conexões no Apêndice A para calcular as derivadas covariantes, é possível encontrar com este procedimento que, no limite de super-horizonte,²⁶ o campo escalar satisfaz

$$\delta^{(1)}\hat{\rho}'_\varphi + 3\mathcal{H}\left(\delta^{(1)}\rho_\varphi + \delta^{(1)}P_\varphi\right) - 3(\rho_\varphi + P_\varphi)\psi^{(1)'} = aQ_\varphi\phi^{(1)} + a\delta^{(1)}Q_\varphi, \quad (3.147)$$

e a radiação

²⁶Como apontado na referência [101], neste limite não são considerados termos com gradientes. No tratamento que se segue, termos desse tipo não serão mais considerados.

$$\delta^{(1)}\rho'_\gamma + 3\mathcal{H}\left(\delta^{(1)}\rho_\gamma + \delta^{(1)}P_\gamma\right) - 3(\rho_\gamma + P_\gamma)\psi^{(1)'} = aQ_\gamma\phi^{(1)} + a\delta^{(1)}Q_\gamma. \quad (3.148)$$

Seguindo a referência [111], considerando que no cenário considerado aqui

$$\delta^{(1)}P_\varphi = 0 \quad \text{e} \quad \delta^{(1)}P_\gamma = \frac{\delta^{(1)}\rho_\gamma}{3}, \quad (3.149)$$

porque tanto o campo escalar como a radiação têm equações de estado constantes, as equações (3.147) e (3.148) podem ser reescritas em termos das perturbações na curvatura $\zeta_\varphi^{(1)}$ e $\zeta_\gamma^{(1)}$, resultando

$$\zeta_\varphi^{(1)'} = \frac{a\mathcal{H}}{\rho'_\varphi} \left[\delta^{(1)}Q_\varphi - \frac{Q'_\varphi}{\rho'_\varphi} \delta^{(1)}\rho_\varphi + Q_\varphi \frac{\rho'}{2\rho} \left(\frac{\delta^{(1)}\rho_\varphi}{\rho'_\varphi} - \frac{\delta^{(1)}\rho}{\rho'} \right) \right], \quad (3.150)$$

e

$$\zeta_\gamma^{(1)'} = \frac{a\mathcal{H}}{\rho'_\gamma} \left[\delta^{(1)}Q_\gamma - \frac{Q'_\gamma}{\rho'_\gamma} \delta^{(1)}\rho_\gamma + Q_\gamma \frac{\rho'}{2\rho} \left(\frac{\delta^{(1)}\rho_\gamma}{\rho'_\gamma} - \frac{\delta^{(1)}\rho}{\rho'} \right) \right]. \quad (3.151)$$

Para generalizar as equações (3.150) e (3.151) até a segunda ordem vamos, por simplicidade e devido à invariância de calibre de ζ , escolher o calibre espacialmente plano definido por

$$\psi^{(r)} = \chi^{(r)} = 0. \quad (3.152)$$

Nesse calibre, as perturbações na curvatura em primeira ordem (3.111) associadas com o campo escalar e a radiação são

$$\zeta_\varphi^{(1)} = -\mathcal{H} \left(\frac{\delta^{(1)}\rho_\varphi}{\rho'_\varphi} \right), \quad (3.153)$$

e

$$\zeta_\gamma^{(1)} = -\mathcal{H} \left(\frac{\delta^{(1)}\rho_\gamma}{\rho'_\gamma} \right). \quad (3.154)$$

Usando as equações (3.153) e (3.154) junto com as equações de continuidade perturbadas até a primeira ordem (3.147) e (3.148) e escritas no calibre (3.152), a perturbação total na curvatura da segunda ordem (3.113) pode se reescrever como [101]

$$\zeta^{(2)} = -\mathcal{H} \frac{\delta^{(2)}\rho}{\rho'} - \left[f\zeta_\varphi^{(1)} + (1-f)\zeta_\gamma^{(1)} \right] \left[f^2\zeta_\varphi^{(1)} + (1-f)(2+f)\zeta_\gamma^{(1)} \right]. \quad (3.155)$$

De uma forma similar, as contribuições (3.115) do campo escalar e da radiação para a perturbação na curvatura da segunda ordem podem ser expressas por

$$\begin{aligned} \zeta_\varphi^{(2)} = & -\mathcal{H} \frac{\delta^{(2)}\rho_\varphi}{\rho'_\varphi} + [2 - 3(1 + w_\varphi)] (\zeta_\varphi^{(1)})^2 - 2 \left(a \frac{Q_\varphi \phi^{(1)}}{\rho'_\varphi} + a \frac{\delta^{(1)}Q_\varphi}{\rho'_\varphi} \right) \zeta_\varphi^{(1)} \\ & - \left[a \frac{Q'_\varphi}{\mathcal{H}\rho'_\varphi} - \frac{a}{2} \frac{Q_\varphi}{\mathcal{H}\rho'_\varphi} \frac{\rho'}{\rho} \right] (\zeta_\varphi^{(1)})^2, \end{aligned} \quad (3.156)$$

e

$$\begin{aligned} \zeta_\gamma^{(2)} = & -\mathcal{H} \frac{\delta^{(2)}\rho_\gamma}{\rho'_\gamma} + [2 - 3(1 + w_\gamma)] (\zeta_\gamma^{(1)})^2 - 2 \left(a \frac{Q_\gamma \phi^{(1)}}{\rho'_\gamma} + a \frac{\delta^{(1)}Q_\gamma}{\rho'_\gamma} \right) \zeta_\gamma^{(1)} \\ & - \left[a \frac{Q'_\gamma}{\mathcal{H}\rho'_\gamma} - \frac{a}{2} \frac{Q_\gamma}{\mathcal{H}\rho'_\gamma} \frac{\rho'}{\rho} \right] (\zeta_\gamma^{(1)})^2. \end{aligned} \quad (3.157)$$

A expressão (3.155) pode ser ainda escrita em uma outra forma lembrando que no cenário que estamos considerando as equações de estado para o campo escalar e para a radiação são respectivamente $w_\varphi = 0$ e $w_\gamma = \frac{1}{3}$; e usando as equações (3.156) e (3.157) para expressar a perturbação na densidade de energia total $\delta^{(2)}\rho$ que aparece em (3.155), encontramos

$$\begin{aligned}
\zeta^{(2)} &= f\zeta_\varphi^{(2)} + (1-f)\zeta_\gamma^{(2)} + f(1-f)(1+f) \left(\zeta_\varphi^{(1)} - \zeta_\gamma^{(1)} \right)^2 \\
&\quad + 2 \left(a \frac{Q_\varphi \phi^{(1)}}{\rho'} + a \frac{\delta^{(1)} Q_\varphi}{\rho'} \right) \left[\zeta_\varphi^{(1)} - \zeta_\gamma^{(1)} \right] \\
&\quad + \left(a \frac{Q'_\varphi}{\mathcal{H}\rho'} - \frac{a}{2} \frac{Q_\varphi}{\mathcal{H}\rho} \right) \left[\left(\zeta_\varphi^{(1)} \right)^2 - \left(\zeta_\gamma^{(1)} \right)^2 \right]. \tag{3.158}
\end{aligned}$$

Finalmente, temos as ferramentas necessárias para deduzir as equações que governam a evolução das perturbações na curvatura em grandes escalas correspondentes ao campo escalar e a radiação na segunda ordem. O procedimento é similar ao realizado no caso das perturbações de primeira ordem apresentado anteriormente. O primeiro passo é perturbar as equações de continuidade (3.136) e (3.137) até a segunda ordem na aproximação de super-horizonte. Com este procedimento se obtém

$$\begin{aligned}
\delta^{(2)} \rho'_\varphi &+ 3\mathcal{H} \left(\delta^{(2)} \rho_\varphi + \delta^{(2)} P_\varphi \right) - 3(\rho_\varphi + P_\varphi) \psi^{(2)'} - 6\psi^{(1)'} \left[\delta^{(1)} \rho_\varphi + \delta^{(1)} P_\varphi \right. \\
&\quad \left. + 2(\rho_\varphi + P_\varphi) \psi^{(1)} \right] = a \left(\delta^{(2)} Q_\varphi + Q_\varphi \phi^{(2)} - Q_\varphi (\phi^{(1)})^2 \right. \\
&\quad \left. + 2\phi^{(1)} \delta^{(1)} Q_\varphi \right), \tag{3.159}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\delta^{(2)} \rho'_\gamma &+ 3\mathcal{H} \left(\delta^{(2)} \rho_\gamma + \delta^{(2)} P_\gamma \right) - 3(\rho_\gamma + P_\gamma) \psi^{(2)'} - 6\psi^{(1)'} \left[\delta^{(1)} \rho_\gamma + \delta^{(1)} P_\gamma \right. \\
&\quad \left. + 2(\rho_\gamma + P_\gamma) \psi^{(1)} \right] = a \left(\delta^{(2)} Q_\gamma + Q_\gamma \phi^{(2)} - Q_\gamma (\phi^{(1)})^2 \right. \\
&\quad \left. + 2\phi^{(1)} \delta^{(1)} Q_\gamma \right). \tag{3.160}
\end{aligned}$$

O segundo passo consiste em escrever as equações (3.159) e (3.160) em termos das perturbações na curvatura (3.156) e (3.157), mas usando o calibre espacialmente plano (3.152). Como resultado, as equações de evolução das perturbações na curvatura na segunda ordem e em escalas bem fora do horizonte correspondentes ao campo escalar e a radiação são expressas por

$$\begin{aligned}
\zeta_\varphi^{(2)'} &= -\frac{a\mathcal{H}}{\rho'} \left[\left(\delta^{(2)}Q_\varphi - \frac{Q'_\varphi}{\rho'_\varphi} \delta^{(2)}\rho_\varphi \right) + Q_\varphi \frac{\rho'}{2\rho} \left(\frac{\delta^{(2)}\rho_\varphi}{\rho'_\varphi} - \frac{\delta^{(2)}\rho}{\rho'} \right) \right] \\
&\quad - 3aQ_\varphi \frac{\mathcal{H}}{\rho'_\varphi} (\phi^{(1)})^2 - 2a \frac{\mathcal{H}}{\rho'_\varphi} \delta^{(1)}Q_\varphi \phi^{(1)} - 2\zeta_\varphi^{(1)} \zeta_\varphi^{(1)'} \\
&\quad - 2 \left[\zeta_\varphi^{(1)} \left(a \frac{Q_\varphi \phi^{(1)}}{\rho'_\varphi} + a \frac{\delta^{(1)}Q_\varphi}{\rho'_\varphi} \right) \right]' \\
&\quad - \left[(\zeta_\varphi^{(1)})^2 \left(a \frac{Q'_\varphi}{\mathcal{H}\rho'_\varphi} - \frac{a}{2} \frac{Q_\varphi \rho'}{\mathcal{H}\rho'_\varphi \rho} \right) \right]', \tag{3.161}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\zeta_\gamma^{(2)'} &= -\frac{a\mathcal{H}}{\rho'} \left[\left(\delta^{(2)}Q_\gamma - \frac{Q'_\gamma}{\rho'_\gamma} \delta^{(2)}\rho_\gamma \right) + Q_\gamma \frac{\rho'}{2\rho} \left(\frac{\delta^{(2)}\rho_\gamma}{\rho'_\gamma} - \frac{\delta^{(2)}\rho}{\rho'} \right) \right] \\
&\quad - 3aQ_\gamma \frac{\mathcal{H}}{\rho'_\gamma} (\phi^{(1)})^2 - 2a \frac{\mathcal{H}}{\rho'_\gamma} \delta^{(1)}Q_\gamma \phi^{(1)} - 2\zeta_\gamma^{(1)} \zeta_\gamma^{(1)'} \\
&\quad - 2 \left[\zeta_\gamma^{(1)} \left(a \frac{Q_\gamma \phi^{(1)}}{\rho'_\gamma} + a \frac{\delta^{(1)}Q_\gamma}{\rho'_\gamma} \right) \right]' \\
&\quad - \left[(\zeta_\gamma^{(1)})^2 \left(a \frac{Q'_\gamma}{\mathcal{H}\rho'_\gamma} - \frac{a}{2} \frac{Q_\gamma \rho'}{\mathcal{H}\rho'_\gamma \rho} \right) \right]'. \tag{3.162}
\end{aligned}$$

Para finalizar, faremos um comentário sobre o procedimento usado na obtenção das equações da evolução da perturbação na curvatura ζ . Observa-se das equações (3.150), (3.161), (3.151) e (3.162), que expressam, respectivamente, as contribuições do campo escalar e a radiação para a perturbação da curvatura em hipersuperfícies de densidade uniforme na primeira e na segunda ordem, que quando se considera somente um fluido a perturbação na curvatura é aproximadamente constante no super-horizonte. Nesse cenário com só um fluido — o inflaton — o coeficiente de transferência Q_i e as suas perturbações $\delta^{(1)}Q_i$ e $\delta^{(2)}Q_i$ (com $i = \varphi, \gamma$) são nulos, e portanto

$$\zeta^{(1)'} = \zeta^{(2)'} \simeq 0. \tag{3.163}$$

Nota-se, também, que, devido à relação entre a perturbação na curvatura em hipersuperfícies de densidade uniforme ζ e a perturbação na curvatura em hipersuperfícies comóveis \mathcal{R} no super-horizonte (3.121), podemos escrever

$$-\zeta^{(1)'} \simeq \mathcal{R}^{(1)'} \simeq 0. \quad (3.164)$$

Esta relação permite testar os modelos inflacionários usando as observações da RCF. Pelo efeito Sachs–Wolfe (tratado no Capítulo 4), as flutuações de temperatura da RCF são proporcionais, na aproximação linear, às perturbações da curvatura. Pela sua origem, a RCF tem informação sobre o universo primordial, particularmente sobre a época da recombinação. Comparando as propriedades estatísticas das perturbações da curvatura no horizonte — para um dado modelo do universo primordial — com as das flutuações de temperatura da RCF se testa a física do universo primordial como estudaremos nos próximos capítulos.

Neste capítulo fizemos algumas considerações gerais sobre o estudo do universo não-homogêneo. Na abordagem estudada, as grandezas físicas são consideradas como a soma de uma grandeza homogênea e uma perturbação que não depende só do espaço mas também do tempo. Nessa abordagem foi encontrada uma solução exata — no regime de Sitter — para a equação de movimento das flutuações quânticas de um campo escalar genérico. Durante o período inflacionário é considerado que a densidade de energia do inflaton é a componente energética dominante. Portanto, flutuações do campo escalar terão como consequência perturbações no tensor energia–momentum que por sua vez, pelo acoplamento entre a geometria e a matéria via equações de Einstein, geram perturbações na métrica. Assim, neste capítulo também foram estudadas as perturbações na métrica e no tensor energia–momentum. Por outro lado, notou-se que o estudo do universo não-homogêneo com a abordagem tratada apresenta inconvenientes relacionados com a liberdade na escolha do calibre. No entanto, observou-se que o problema do calibre pode ser solucionado se os cálculos forem feitos em um calibre dado ou se são definidas variáveis independentes do calibre adotado. Nas Subseções 3.3.4 e 3.3.6 definimos a perturbação na curvatura $-\zeta$ em hipersuperfícies de densidade uniforme e encontramos a sua evolução temporal até a segunda ordem no super-horizonte. Mostrou-se também que no super-horizonte $-\zeta$ é aproximadamente constante e coincide com a perturbação na curvatura em

hipersuperfícies comóveis \mathcal{R} . Essas quantidades são invariantes de calibre e serão usadas no Capítulo 5 para o estudo da não gaussianidade primordial na RCF.

Capítulo 4

Testando a inflação com a RCF

4.1 Introdução

No Capítulo 2 mostrou-se que um regime de expansão acelerada posterior ao Big Bang pode resolver dificuldades do MP tais como o problema da planezza (Seção 1.5.1) e do horizonte (Seção 1.5.2). O cenário mais simples do paradigma inflacionário, isto é, um campo escalar com acoplamento mínimo com a curvatura, foi apresentado nas Seções 2.2 e 2.3; nota-se que neste cenário há várias possibilidades de causar um regime acelerado: o potencial do inflaton $V(\varphi)$ na ação (2.9), em princípio, é uma função que para resolver estes problemas deve satisfazer as condições de rolamento lento (2.31). Contudo, há várias funções $V(\varphi)$ que satisfazem estas condições. Na Seção 2.4 se mencionaram alguns modelos inflacionários alternativos que também podem produzir um regime acelerado no universo primordial. Assim, faz-se necessário testar os modelos inflacionários para reduzir ou eliminar essa degenerescência de modelos do universo primordial. Como foi mencionado no Capítulo 1, existem vários projetos e colaborações ao redor do mundo que buscam testar observacionalmente os modelos do universo.

O paradigma inflacionário propicia um possível mecanismo para a geração das inomogeneidades na distribuição de energia no universo que são observadas. Assim, levantamentos de galáxias tais como os feitos por 2dF Galaxy Redshift

Survey [56], CfA Redshift Survey [57] e o Sloan Digital Sky Survey (SDSS) [59, 58], e observações das anisotropias da RCF como as feitas pelo WMAP [62], das quais pode ser extraída informação sobre a não-homogeneidade da distribuição de matéria no universo, podem ser usados para testar os modelos inflacionários. Contudo, como esta dissertação é dedicada ao estudo da NG primordial da RCF, neste capítulo¹ somente apresentaremos testes do paradigma inflacionário relacionados às observações das anisotropias da RCF.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 4.2 apresentaremos uma descrição estatística das perturbações escalares e tensoriais da métrica (Subseção 3.3.2), a saber, o espectro de potências.² A relação entre as perturbações na métrica e as observações das anisotropias da RCF, assim como as restrições observacionais mais recentes aos modelos inflacionários, serão tratados na Seção 4.3.

4.2 O espectro de potências das perturbações da métrica

Considerando as flutuações na métrica como campos aleatórios³ é possível usar o seu espectro de potências para caracterizar a sua amplitude. Nesta seção consideraremos as perturbações escalares e tensoriais da métrica até a primeira ordem. Usaremos o cálculo da amplitude das perturbações de um campo escalar genérico, apresentado na Seção 3.2, no cenário inflacionário estudado anteriormente o qual considera que o conteúdo energético do universo é dominado pelo inflaton. Como as equações de Einstein (1.25) relacionam o conteúdo material do universo e a sua geometria, qualquer perturbação do inflaton (conteúdo material) tem associadas perturbações da métrica (geometria) como se verá no que segue.

¹A principal referência deste capítulo é [89]. O leitor também pode achar úteis algumas seções das referências [46] e [91].

²Para um melhor entendimento das ferramentas estatísticas usadas neste capítulo, o leitor pode ler antes a Seção 5.2.

³São considerados campos aleatórios porque, como é tratado no Capítulo 5, pela sua complexidade somente uma descrição estatística do universo é possível.

4.2.1 Perturbações escalares

Para encontrar a relação entre as perturbações escalares da métrica e as flutuações do inflaton usaremos as perturbações do tensor de Einstein δG_{ν}^{μ} que se encontram no Apêndice A (Seção A.4), e as perturbações do tensor energia–momentum para um fluido ideal genérico apresentadas na Subseção 3.3.3; usaremos também o calibre de Poisson definido por

$$\omega^{(r)} = \chi^{(r)} = \chi_i^{(r)} = 0. \quad (4.1)$$

As perturbações do tensor de Einstein em primeira ordem (A.22)–(A.24) no calibre de Poisson são

$$\delta^{(1)}G^0_0 = \frac{1}{a^2} \left[6 \mathcal{H}^2 \phi^{(1)} + 6 \mathcal{H} \psi^{(1)'} - 2 \nabla^2 \psi^{(1)} \right], \quad (4.2)$$

$$\delta^{(1)}G^0_i = \frac{1}{a^2} \left(-2 \mathcal{H} \partial_i \phi^{(1)} - 2 \partial_i \psi^{(1)'} \right), \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}G^i_j = \frac{1}{a^2} \left[\left(2 \mathcal{H} \phi^{(1)'} + 4 \frac{a''}{a} \phi^{(1)} - 2 \mathcal{H}^2 \phi^{(1)} + \nabla^2 \phi^{(1)} + 4 \mathcal{H} \psi^{(1)'} \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \psi^{(1)''} - \nabla^2 \psi^{(1)} \right) \delta^i_j - \partial^i \partial_j \phi^{(1)} + \partial^i \partial_j \psi^{(1)} \right], \quad (4.4) \end{aligned}$$

e as perturbações do tensor energia–momentum em primeira ordem (3.95)–(3.99) para o inflaton são expressas por

$$\delta^{(1)}T_0^0 = -\delta^{(1)}\rho_{\varphi}, \quad (4.5)$$

$$\delta^{(1)}T_0^i = -(1+w)\rho_{\varphi}v_{(1)}^i, \quad (4.6)$$

$$\delta^{(1)}T_j^i = w\delta^{(1)}\rho_\varphi\delta_j^i. \quad (4.7)$$

As equações de Einstein perturbadas até a primeira ordem

$$\delta^{(1)}G_\nu^\mu = \kappa^2\delta^{(1)}T_\nu^\mu, \quad (4.8)$$

podem se obter das equações (4.2)–(4.7). Das componentes $(i - j)$ não diagonais de (4.8) temos que

$$\psi^{(1)} = \phi^{(1)}, \quad (4.9)$$

resultado que é usado para escrever a componente $(0 - 0)$ de (4.8) como

$$\frac{1}{a^2} \left[6\mathcal{H}^2\psi^{(1)} + 6\mathcal{H}\psi^{(1)'} - 2\nabla^2\psi^{(1)} \right] = -\kappa^2\delta^{(1)}\rho_\varphi. \quad (4.10)$$

No final da Subseção 3.3.6 mostrou-se que no super-horizonte a perturbação na curvatura em hipersuperfícies de densidade uniforme ζ é aproximadamente constante. Portanto, pela definição (3.110) podemos inferir que no super-horizonte $\psi^{(1)}$ também é aproximadamente constante e $\psi^{(1)'}$ pode ser desconsiderado na equação (4.10). Por outro lado, podemos expandir os campos $\psi^{(1)}$ e $\delta^{(1)}\rho_\varphi$ em ondas planas como em (3.50) e obter de (4.10) uma equação para as amplitudes dos campos:

$$\frac{1}{a^2} \left[6\mathcal{H}^2\psi_{\mathbf{k}}^{(1)} - 2k^2\psi_{\mathbf{k}}^{(1)} \right] = -\kappa^2\delta^{(1)}\rho_{\varphi\mathbf{k}}, \quad (4.11)$$

onde foi desconsiderado o termo com $\psi^{(1)'}$. Para obter uma expressão para $\psi_{\mathbf{k}}^{(1)}$ de (4.11) no limite do super-horizonte, usamos o fato que $\mathcal{H} = aH$; substituindo e aplicando a condição $(k \ll aH)$ na equação resultante se obtém

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(1)} \simeq -\frac{\kappa^2\delta^{(1)}\rho_{\varphi\mathbf{k}}}{6H^2}, \quad (4.12)$$

que, usando a equação de Friedman (1.26) para um universo plano, fica

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(1)} \simeq -\frac{\delta^{(1)}\rho_{\varphi\mathbf{k}}}{2\rho_{\varphi}}, \quad (4.13)$$

que é uma relação entre as perturbações escalares da métrica e as perturbações na densidade de energia do inflaton no limite do super-horizonte.

Encontraremos uma relação entre a amplitude das flutuações do inflaton $\delta^{(1)}\varphi$ e a perturbação escalar da métrica $\psi^{(1)}$ utilizando a equação (4.13). Usando a equação de continuidade (1.35) podemos reescrever (4.13) como

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(1)} \simeq \frac{3H(1+w_{\varphi})\delta^{(1)}\rho_{\varphi\mathbf{k}}}{2\dot{\rho}_{\varphi}}. \quad (4.14)$$

Utilizando esta equação na definição (3.110), a equação de continuidade (1.35) e as expressões para a pressão (2.15) e a densidade (2.14) do inflaton, a amplitude — no espaço de Fourier — da perturbação da curvatura em hipersuperfícies de densidade uniforme é expressa por

$$\zeta_{\mathbf{k}}^{(1)} \simeq \frac{(5+3w_{\varphi})H\delta^{(1)}\varphi_{\mathbf{k}}}{2\dot{\varphi}}, \quad (4.15)$$

que, considerando a equação de estado do inflaton durante o regime inflacionário ($w_{\varphi} \simeq -1$), fica

$$\zeta_{\mathbf{k}}^{(1)} \simeq \frac{H\delta^{(1)}\varphi_{\mathbf{k}}}{\dot{\varphi}}. \quad (4.16)$$

A equação (4.16) nos permite calcular o espectro de potências (3.58) Δ_{ζ}^2 a partir de

$$\Delta_{\zeta}^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} \langle |\zeta_{\mathbf{k}}^{(1)}|^2 \rangle = \frac{k^3}{2\pi^2} \left\langle \frac{H^2}{\dot{\varphi}^2} |\delta^{(1)}\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \right\rangle, \quad (4.17)$$

que, usando a amplitude das flutuações do inflaton no cenário quase de Sitter⁴ (3.48), fica

$$\Delta_\zeta^2 = \left(\frac{H^2}{2\pi\dot{\varphi}} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{3-2\nu_\varphi}, \quad (4.18)$$

sendo

$$\nu_\varphi \simeq \frac{3}{2} + \epsilon - \eta_\varphi, \quad (4.19)$$

$$\eta_\varphi = \frac{m_\varphi^2}{3H^2}, \quad (4.20)$$

$$m_\varphi^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}, \quad (4.21)$$

conforme as equações (3.10), (3.45) e (3.47).

A equação (4.18) pode ser reescrita usando a equação (1.29) para um universo plano, junto com as equações (3.125) e (3.36), como

$$\Delta_\zeta^2 = \frac{H^2}{8\pi^2} \frac{\kappa^2}{\epsilon} \left(\frac{k}{aH} \right)^{3-2\nu_\varphi}; \quad \kappa^2 = \frac{8\pi}{M_p^2} = 8\pi G. \quad (4.22)$$

Com (4.18) podemos calcular o índice espectral das perturbações escalares (3.54) n_ζ

$$n_\zeta - 1 = \frac{d \ln \Delta_\zeta^2}{d \ln k} = 3 - 2\nu_\varphi. \quad (4.23)$$

⁴O cenário de Sitter considera um fluido com equação de estado constante $w = -1$ e como consequência o universo se expande exponencialmente. Contudo, este regime é pouco realista porque não apresenta transição para o período de dominância de radiação do MP. Por esta razão se consideram as soluções no cenário quase de Sitter que não apresenta essa dificuldade.

4.2.2 Perturbações tensoriais

Para calcular o espectro de potências das perturbações tensoriais na métrica adota-se um procedimento similar ao feito na Seção 4.2.1 com as perturbações escalares. Considerando só perturbações tensoriais de primeira ordem (ver equação (3.76)) temos

$$\begin{aligned} g_{00} &= -a^2(\tau), \\ g_{ij} &= a^2(\tau) [\delta_{ij} + \chi_{ij}^{(1)}]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

As condições (3.80) permitem apenas dois graus de liberdade ou polarizações⁵ +, × para a perturbação tensorial $\chi_{ij}^{(1)}$, a saber,

$$\chi_{11} = -\chi_{22} \equiv h_+, \quad (4.25)$$

e

$$\chi_{12} = \chi_{21} \equiv h_\times. \quad (4.26)$$

Como é mostrado com detalhe no capítulo 5 da referência [112], das equações de Einstein perturbadas até a primeira ordem (4.8) e com a métrica (4.24), a amplitude — no espaço de Fourier — de cada um dos modos de polarização h_+ e h_\times satisfaz a equação diferencial

$$h''_{\sigma\mathbf{k}} + 2\frac{a'}{a}h'_{\sigma\mathbf{k}} + k^2h_{\sigma\mathbf{k}} = 0, \quad (4.27)$$

onde $\sigma = +, \times$. Usando

⁵Como se verá adiante, as amplitudes das perturbações tensoriais da métrica satisfazem equações de onda similares às dos campos elétrico e magnético do eletromagnetismo. Para uma onda electromagnética que se propaga em uma dada direção, o campo elétrico pode oscilar em duas direções perpendiculares entre si e também à direção de propagação. Essas duas direções são chamadas de polarizações da onda electromagnética. Em analogia com o electromagnetismo, as ondas gravitacionais têm duas polarizações denotadas nesta dissertação por + e ×.

$$h_{\sigma\mathbf{k}} = 2\kappa \frac{v_{\sigma\mathbf{k}}}{a}, \quad \kappa^2 = \frac{8\pi}{M_p^2} = 8\pi G, \quad (4.28)$$

é possível transformar a equação (4.27) em

$$v''_{\sigma\mathbf{k}} + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) v_{\sigma\mathbf{k}} = 0, \quad (4.29)$$

que coincide com a equação de movimento (3.9) para as funções modo $u_{\mathbf{k}}$ de um campo escalar genérico sem massa. Usando a solução de (3.9) no cenário quase de Sitter tratado na Seção 3.2.2 temos — usando a equação (3.48) — que o espectro de potências das perturbações tensoriais⁶ da métrica é

$$\Delta_T^2 = 2 \times \frac{k^3}{2\pi^2} 4\kappa^2 \frac{H^2}{2k^3} \left(\frac{k}{aH}\right)^{3-2\nu_T} = \frac{2\kappa^2 H^2}{\pi^2} \left(\frac{k}{aH}\right)^{3-2\nu_T}, \quad (4.30)$$

onde o primeiro “2” no lado direito corresponde às duas polarizações e

$$\nu_T \simeq \frac{3}{2} + \epsilon. \quad (4.31)$$

O índice espectral das perturbações tensoriais é definido como

$$n_T \equiv \frac{d \ln \Delta_T^2}{d \ln k}, \quad (4.32)$$

que, com (4.30), fica

$$n_T = 3 - 2\nu_T. \quad (4.33)$$

As equações (4.23) e (4.33) permitem testar os modelos inflacionários. Os índices espectrais n_ζ e n_T são observáveis para os quais os modelos inflacionários fazem previsões. Por outro lado, como se verá na próxima seção, esses observáveis podem ser extraídos das observações de flutuações da RCF. As observações e as previsões teóricas podem ser comparadas através do efeito Sachs–Wolfe.

⁶Na equação (4.30) “ T ” refere-se a perturbações tensoriais.

4.3 Relação com as observações

A RCF foi detectada pela primeira vez por A. Penzias e R. Wilson [44] em 1965. Posteriormente, o satélite COBE [45] mostrou que a RCF tem um espectro de um corpo negro a uma temperatura 2.725 ± 0.002 K (ver figura (1.2)). O COBE também detectou anisotropias $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$ que foram observadas posteriormente pelo WMAP e vêm sendo observadas pela missão PLANCK [3, 4] com uma precisão muito maior. A figura (4.1) mostra um mapa das flutuações na temperatura da RCF, relativas à sua temperatura média atual $\bar{T}_0 = 2.725$, medidas pelo WMAP durante sete anos.⁷

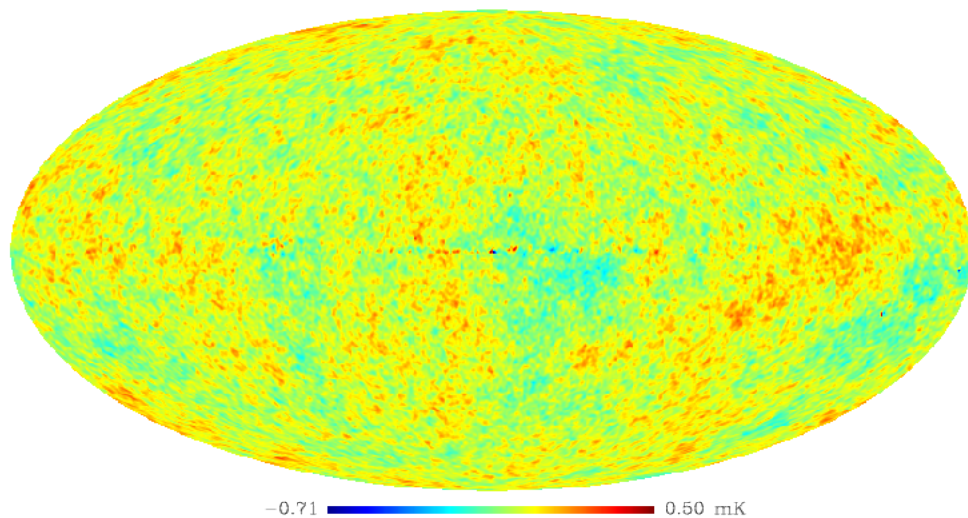


Fig. 4.1: Mapa ILC das flutuações de temperatura da RCF medidas pelo WMAP durante sete anos. Regiões azuis e vermelhas indicam, respectivamente, regiões no universo que são mais frias e mais quentes relativas à temperatura média da RCF. A figura é da referência [24].

Quando os satélites medem as flutuações de temperatura ΔT fazem uma

⁷A rigor, o mapa mostrado na figura (4.1) é um mapa de flutuações de temperatura da RCF cuja contaminação galáctica foi reduzida com um procedimento chamado de “Internal Linear Combination” (ILC). Esse procedimento minimiza a contaminação devida à emissão galáctica usando uma soma ponderada de 5 mapas de diferentes frequências.

varredura esférica do céu. Assim, com cada ponto da esfera celeste,⁸ quer dizer, para cada direção $\hat{\mathbf{n}}$, é associado um número que corresponde à média de várias medições de $\Delta T(\hat{\mathbf{n}})$. Portanto, tem-se uma função $\Theta(\mathbf{n}) = \Theta(\theta, \phi)$ sobre a esfera que pode ser expandida usando os harmônicos esféricos $Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}})$ como

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}) \equiv \frac{\Delta T(\hat{\mathbf{n}})}{T_0} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (4.34)$$

sendo os momentos multipolares expressos por

$$a_{\ell m} = \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\hat{n}) \Theta(\hat{n}), \quad (d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi), \quad (4.35)$$

e — porque $\Theta(\hat{\mathbf{n}})$ é um campo real — satisfazendo a condição de realidade⁹

$$a_{\ell-m} = a_{\ell m}^* (-1)^m, \quad (4.36)$$

quer dizer, o número de modos independentes é $2\ell + 1$. Uma ferramenta adicional à distribuição de flutuações de temperatura da RCF na análise estatística é o espectro de potências angulares¹⁰ que permite descrever a informação contida em milhões de pixels de um mapa da RCF de uma forma muito mais compacta. Os momentos multipolares $a_{\ell m}$ podem ser combinados para formar o espectro de potências angulares que é invariante sob rotações¹¹ e pode ser escrito na forma

$$C_{\ell}^{TT} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_m \langle a_{\ell m}^* a_{\ell m} \rangle, \quad \text{ou} \quad \langle a_{\ell m}^* a_{\ell' m'} \rangle = C_{\ell}^{TT} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (4.37)$$

⁸A rigor, são pequenas regiões da esfera celeste cujo tamanho depende da resolução do instrumento.

⁹O “ * ” nas equações (4.35) e (4.36) denota o complexo conjugado.

¹⁰Ver Seção 5.2.2 no Capítulo 5.

¹¹Como se mostra no Capítulo 5, a equação (4.37) supõe isotropia estatística.

onde “ TT ” indica que a função de correlação de dois pontos — ou equivalentemente, o espectro de potências angulares — só considera flutuações de temperatura, e $\delta_{\ell\ell'}$ e $\delta_{mm'}$ são símbolos delta de Kronecker.¹²

Para testar os modelos inflacionários usando os dados das observações (por exemplo, RCF ou densidade de galáxias) se relaciona a perturbação na curvatura em hipersuperfícies comóveis \mathcal{R} com o observável Q através de

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(\tau) = T_{\mathcal{Q}}(k, \tau, \tau_*) \mathcal{R}_{\mathbf{k}}(\tau_*), \quad (4.38)$$

onde $\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}$ é a amplitude no espaço de Fourier do observável Q , τ_* indica o tempo da saída do horizonte ($k = a(\tau_*)H(\tau_*)$), e $T_{\mathcal{Q}}$ é a função de transferência entre as flutuações da curvatura \mathcal{R} no tempo τ_* e as flutuações do observável Q em um tempo posterior τ .

Como é indicado na referência [112], as flutuações de temperatura da RCF estão relacionadas — na aproximação linear — com as perturbações na curvatura através da função de transferência $\Delta_{T\ell}(k)$ via

$$a_{\ell m} = 4\pi(-i)^\ell \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \Delta_{T\ell}(k) \mathcal{R}_{\mathbf{k}} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}). \quad (4.39)$$

A identidade

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}') = \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}'), \quad |\hat{\mathbf{k}}| = 1, \quad P_\ell(1) = 1, \quad (4.40)$$

onde P_ℓ é o polinômio de Legendre de grau ℓ e a definição do espectro de potências (3.51) junto com a equação (4.39) em (4.37) permitem escrever o espectro de potências angulares como

$$C_\ell^{TT} = \frac{2}{\pi} \int k^2 dk \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \Delta_{T\ell}(k) \Delta_{T\ell}(k), \quad (4.41)$$

¹²Estudos que misturam dados de flutuações de temperatura e polarizações da RCF também se encontram na literatura [89].

onde $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ é o espectro de potências para as perturbações na curvatura¹³ \mathcal{R} ; as funções de transferência $\Delta_{T\ell}$ são calculadas numericamente usando códigos tais como CAMB [113] e dependem dos parâmetros cosmológicos do modelo cosmológico a testar.

Como foi estudado por Sachs e Wolfe [114], as anisotropias na RCF existem devido à presença de flutuações na densidade de energia no universo. Em grandes escalas angulares ($\ell \ll 1000$) a função de transferência $\Delta_{T\ell}(k)$ é uma função de Bessel

$$\Delta_{T\ell}(k) = \frac{1}{3} j_{\ell}(k[\tau_0 - \tau_{\text{rec}}]), \quad (4.42)$$

onde τ_{rec} é o tempo da recombinação. Portanto, substituindo (4.42) na equação (4.41), o espectro de potências angulares em grandes escalas é

$$C_{\ell}^{TT} = \frac{2}{9\pi} \int k^2 dk P_{\mathcal{R}}(k) j_{\ell}^2(k[\tau_0 - \tau_{\text{rec}}]). \quad (4.43)$$

A função de Bessel tem um pico em $k[\tau_0 - \tau_{\text{rec}}] \approx \ell$, quer dizer, comporta-se de uma forma similar a uma função *delta* de Dirac. Considerando que modos com $k \approx \ell/(\tau_0 - \tau_{\text{rec}})$ dominam a integral na equação (4.43), podemos escrever

$$C_{\ell}^{TT} \propto k^3 P_{\mathcal{R}}(k) \Big|_{k \approx \ell/(\tau_0 - \tau_{\text{rec}})} \underbrace{\int d \ln x j_{\ell}^2(x)}_{\propto (\ell(\ell+1))^{-1}}, \quad (x \equiv k[\tau_0 - \tau_{\text{rec}}]), \quad (4.44)$$

que por sua vez permite escrever

$$\ell(\ell+1) C_{\ell}^{TT} \propto \Delta_{\mathcal{R}}^2(k) \Big|_{k \approx \ell/(\tau_0 - \tau_{\text{rec}})} \propto \ell^{n_{\mathcal{R}}-1}, \quad (4.45)$$

usando as equações (4.22) e (4.23).

Se o espectro de potências das flutuações \mathcal{R} é invariante de escala, quer dizer, o índice espectral $n_{\mathcal{R}} = 1$, então a quantidade

¹³Note que da equação (3.121) no super-horizonte $-\zeta^{(1)} \simeq \mathcal{R}^{(1)}$.

$$C_\ell \equiv \frac{\ell(\ell+1)}{2\pi} C_\ell^{TT} \quad (4.46)$$

é independente de ℓ . Na figura (6.7) mostra-se o espectro de potências angulares com os dados colhidos pelo WMAP durante sete anos.

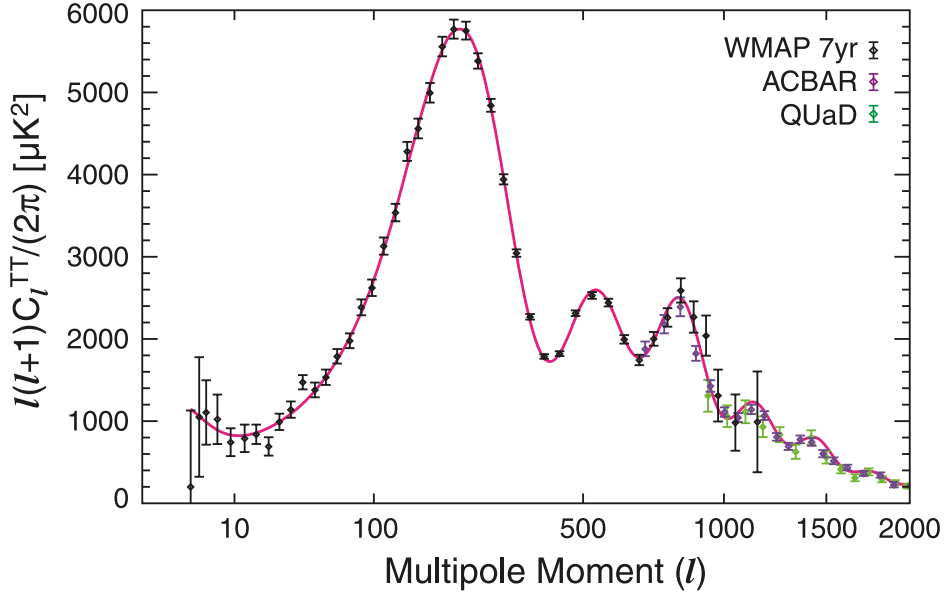


Fig. 4.2: Espectro de potências angulares das anisotropias na temperatura da RCF. A curva vermelha corresponde ao ajuste do modelo Λ CDM. A figura é da referência [115].

Quando se usa uma parametrização tipo lei de potências para o espectro de potências de \mathcal{R} ¹⁴

$$\Delta_s^2(k) \equiv \Delta_{\mathcal{R}}^2(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(k) = A_s \left(\frac{k}{k_\star} \right)^{n_s-1}, \quad (4.47)$$

onde A_s é uma constante e $k_\star = aH$ indica o valor de k na saída do horizonte, é possível restringir o índice espectral n_s das perturbações escalares e a razão r de amplitudes das perturbações tensoriais e escalares definida como

¹⁴Na equação (4.47) “s” denota perturbações escalares.

$$r \equiv \frac{\Delta_{\text{T}}^2(k_{\star})}{\Delta_{\text{s}}^2(k_{\star})}. \quad (4.48)$$

que usando as equações (4.30) e (4.22) ($\Delta_{\zeta}^2 = \Delta_{\mathcal{R}}^2 = \Delta_{\text{s}}^2$) é

$$r = 16\epsilon. \quad (4.49)$$

Segundo os dados reportados pela equipe do WMAP na referência [115], as restrições das anisotropias da RCF para n_s e r são

$$n_s = 0.967 \pm 0.014 \quad \text{e} \quad r < 0.36 \text{ (68\%)}. \quad (4.50)$$

A figura (4.3) mostra a região permitida (68% e 95%) pelos dados da RCF para a razão r das amplitudes das perturbações tensoriais e escalares, e para o índice espectral n_s das perturbações escalares. Nota-se de (4.50) que os dados da RCF indicam que o espectro de potências das perturbações na curvatura \mathcal{R} é aproximadamente invariante de escala ($n_s \approx 1$) como o cenário inflacionário prediz, e que as flutuações de temperatura da RCF são dominadas pelas perturbações escalares com $r < 0.4$.

Além da análise do espectro de potências angulares das anisotropias de temperatura da RCF, uma análise similar mas usando os modos de polarização da RCF pode ser feito; na referência [89] o leitor pode encontrar uma introdução a essas análises que não serão tratadas aqui.

Neste capítulo mostrou-se a relação que existe entre a perturbação da curvatura ζ e as perturbações do inflaton $\delta\varphi$, e foi apresentado o cálculo do espectro de potências para ζ . Também foram consideradas as perturbações tensoriais da métrica e o seu respectivo espectro de potências. Na Seção 4.3 tratou-se brevemente a evidência observacional dos modelos inflacionários relacionada com as anisotropias da RCF. Em particular, mostrou-se a relação entre o espectro de potências das perturbações escalares da métrica e o espectro de potências angulares das flutuações de temperatura na RCF. Notou-se que os dados do WMAP indicam um espectro de potências para as perturbações escalares que é aproximadamente invariante de escala consistente com as predições do paradigma inflacionário. Contudo, ainda são

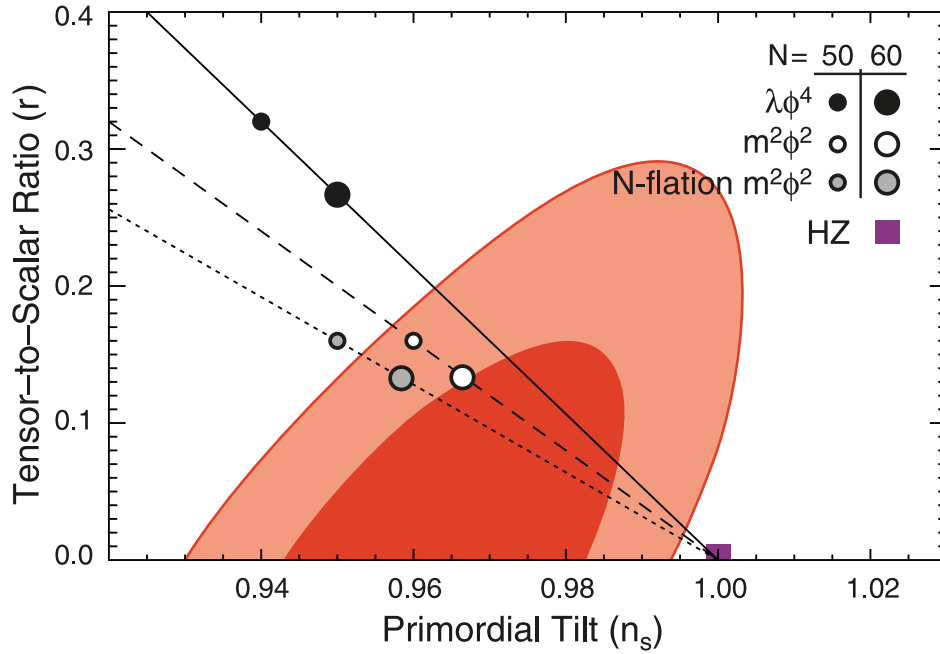


Fig. 4.3: Restrições do WMAP para a razão r das amplitudes de perturbações tensoriais e escalares e para índice espectral n_s das perturbações escalares. A figura é da referência [115].

numerosos os modelos inflacionários que satisfazem as restrições observacionais — não só as apresentadas aqui— e formas mais efetivas de restringir observacionalmente os modelos inflacionários se fazem necessárias. Testar a NG primordial dos modelos inflacionários e das anisotropias da RCF é uma possível solução para essa dificuldade.

Capítulo 5

Estatística, cosmologia e mapas simulados da RCF

5.1 Introdução

Observações cosmológicas recentes, particularmente os levantamentos de galáxias e as observações das anisotropias da RCF, permitem testar os modelos do universo primordial através das propriedades estatísticas dos dados obtidos dessas observações. Em particular, notou-se no Capítulo 4 que as observações da RCF feitas pelo WMAP são compatíveis com um espectro de potências que é aproximadamente invariante de escala ($n_s \approx 1$) ou, em outras palavras, as flutuações na temperatura da RCF apresentam uma distribuição aproximadamente gaussiana. Este fato é compatível não só com as previsões dos modelos inflacionários de só um campo escalar (Seção 2.2), mas também com outros modelos inflacionários com diferentes motivações teóricas [95], [116]. Assim, existe uma degenerescência nos modelos inflacionários que só pode ser resolvida pelas observações e, portanto, novas formas de testar a física do universo primordial são necessárias. Existem pelo menos quatro observáveis que podem ajudar a distinguir observacionalmente dentre esses modelos inflacionários, a saber: a) a dependência com a escala do espectro de potências definida como

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln \Delta_s^2}{d \ln k}, \quad \left(\Delta_s^2(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \right), \quad (5.1)$$

que, como se notou acima, não resolve a degenerescência, b) a detecção do modo de polarização das ondas gravitacionais primordiais, c) a razão r das amplitudes das perturbações tensoriais e escalares, e d) a não-gaussianidade (NG) primordial.

A detecção de um nível de NG primordial alto (por exemplo, $f_{\text{NL}}^{\text{local}} \gtrsim 30$) pela missão PLANCK nos dados das flutuações de temperatura da RCF pode ser determinante na discriminação dos modelos inflacionários.¹ Os modelos inflacionários simples supõem que:

1. Existe somente um campo escalar que é o conteúdo energético dominante do universo primordial;
2. A lagrangiana tem termos cinéticos canônicos ($\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi$);
3. As condições de rolamento lento (2.32) são satisfeitas;
4. Um determinado estado de vácuo inicial.²

Nas referências [117] e [118] foi mostrado que neste tipo de modelos inflacionários o nível de NG primordial pode ser expresso em termos dos parâmetros de rolamento lento e resulta ser desprezível ($f_{\text{NL}}^{\text{local}} \lesssim 10^{-6}$) e não-detectável com a precisão dos instrumentos atuais.³ Por outro lado, encontra-se na literatura que um nível detectável de NG primordial é produzido quando nos modelos inflacionários alguma ou várias das 4 condições acima não são satisfeitas [89]. Assim, o estudo da NG primordial é importante porque permite discriminar de uma forma eficaz os modelos do universo primordial.

Nesta dissertação⁴ nos concentraremos no estudo da NG primordial usando

¹Independente do índice espectral n_s das perturbações escalares e da razão r das amplitudes das perturbações tensoriais e escalares tratados no Capítulo 4.

²Por exemplo o vácuo de Bunch–Davies usado no Capítulo 3.

³O WMAP conseguiu medir níveis da NG primordial $f_{\text{NL}}^{\text{local}} \lesssim 10^2$. Espera-se que a missão PLANCK poderá reduzir a incerteza na estimativa observacional do nível de NG primordial por um fator 4.

⁴As principais referências para este capítulo são [101], [89], [119], [2], [120], [121], [115], [122] e [1].

os dados da RCF.⁵ A análise estatística dos dados obtidos das observações é fundamental para a cosmologia atual. Na Seção 5.2 apresentaremos algumas ferramentas estatísticas usadas nesta dissertação. Em particular, o biespectro é a forma padrão de predizer o nível de NG primordial nos modelos inflacionários e será estudado no contexto das observações da RCF na Seção 5.3. Finalmente, na Seção 5.4, estudamos os mapas simulados de flutuações de temperatura da RCF que são úteis para testar a sensibilidade dos estimadores estatísticos usados para a análise de NG dos dados da RCF e também para estimar quantitativamente a contribuição não primordial às flutuações de temperatura da RCF.

5.2 Um pouco de estatística das perturbações cosmológicas

Na atualidade existem vários projetos que fazem observações cosmológicas de diversa natureza que permitem testar os modelos do universo. Há um número enorme de dados para os quais a análise estatística é fundamental. Nesta seção, baseada nas notas de aula do professor Hiranya Peiris que se encontram no sitio web [127] da professora Licia Verde, apresentamos brevemente algumas ferramentas estatísticas usadas em cosmologia.

5.2.1 Funções de correlação e funções espectrais

Quando se estudam sistemas com um número de partículas comparável ao número de Avogadro (10^{23}) — um gás de partículas interagentes, por exemplo — não é possível resolver exatamente, pela sua complexidade, o sistema de equações diferenciais de movimento de cada uma das partículas. Para descrever tais sistemas se usa a mecânica estatística. Imagina-se que existe um conjunto de N de sistemas idênticos, que chamaremos de “ensemble”, tal que cada configuração do sistema original — por exemplo, na distribuição de energia entre as partículas — tem uma probabilidade de ocorrência.

⁵A NG primordial também pode ser estudada no contexto das perturbações na densidade de matéria ou “Large Scale Structure”. Algumas referências são [123], [124], [125] e [126].

Tendo a distribuição de probabilidade de uma dada grandeza física para as diferentes configurações do sistema é possível calcular as suas propriedades estatísticas.

Uma analogia pode ser estabelecida em cosmologia considerando que: a) só temos um universo para realizar observações ou medições e b) a sua complexidade não permite descrevê-lo exatamente, somente uma descrição estatística é possível. Imagina-se N universos idênticos ao nosso — conjunto chamado de ensemble — onde cada estado do nosso universo, quer dizer, uma configuração dos diferentes campos cosmológicos que descrevem o universo, tem associada uma probabilidade de ocorrência.⁶ Um desses campos cosmológicos, por exemplo, é a densidade de contraste, $\delta(\mathbf{x})$, usada para descrever a distribuição de massa no universo e definida como

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \frac{\delta\rho(\mathbf{x})}{\langle\rho\rangle} = \frac{\rho(\mathbf{x}) - \langle\rho\rangle}{\langle\rho\rangle}, \quad (5.2)$$

onde \mathbf{x} são as coordenadas espaciais comóveis, $\rho(\mathbf{x})$ é a densidade de matéria e $\langle\rho\rangle$ o seu valor médio.⁷ Para um dado modelo cosmológico é possível prever as propriedades estatísticas dos campos cosmológicos (densidade de contraste, flutuações na temperatura da RCF, etc.) que descrevem o estado do universo.⁸ Essas propriedades estatísticas são calculadas a partir de dados observacionais e comparadas com as predições teóricas dos diferentes modelos cosmológicos com o objetivo de testá-los.

Para descrever as propriedades estatísticas dos campos cosmológicos no universo observável se usam as funções de correlação ou as suas transformadas de Fourier, as funções espectrais, como apresentaremos abaixo.

Como a configuração de campos que descrevem o universo pode ser tratada como uma realização aleatória do “ensemble”, considera-se um campo alea-

⁶Em outras palavras, nessa interpretação, nosso universo é uma realização aleatória do ensemble.

⁷Deve-se entender $\langle \rangle$ como um valor médio no ensemble. No Capítulo 3 se usou a mecânica quântica para descrever as flutuações de um campo escalar no modelo inflacionário mais simples. Nesse contexto, $\langle \rangle$ também pode se entender como o valor esperado definido na mecânica quântica.

⁸Neste apêndice estudamos as propriedades estatísticas desses campos cosmológicos assumindo que as simetrias de isotropia e homogeneidade (princípio cosmológico) são respeitadas.

tório $g(\mathbf{x})$ ⁹ — em cada ponto \mathbf{x} , $g(\mathbf{x})$ é algum número aleatório — cujo valor médio é

$$\langle g(\mathbf{x}) \rangle = 0, \forall \mathbf{x}, \quad (5.3)$$

no ensemble.¹⁰ A probabilidade de ocorrência de cada configuração do campo $g(\mathbf{x})$ é um funcional $P[g(\mathbf{x})]$. As funções de correlação dos campos são valores esperados — ou valores médios — de produtos de campos em diferentes pontos do espaço. A função de correlação de dois pontos é

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\equiv \langle g(\mathbf{x}) g(\mathbf{y}) \rangle = \int Dg P[g] g(\mathbf{x}) g(\mathbf{y}) \\ &\equiv \prod_g \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P[g] g(\mathbf{x}) g(\mathbf{y}) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde Dg indica que a integral é uma integral funcional ou integral de trajetória sobre as diferentes configurações do campo.¹¹

Entende-se por homogeneidade estatística que as propriedades estatísticas de um campo aleatório $g(\mathbf{x})$ não devem diferir sob a ação de uma traslação por um vetor constante \mathbf{a} , definida pelo operador $\hat{T}_{\mathbf{a}}$ como

$$\hat{T}_{\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) \equiv g(\mathbf{x} - \mathbf{a}), \quad (5.5)$$

ou seja,

$$P[g(\mathbf{x})] = P[g(\mathbf{x} - \mathbf{a})], \quad (5.6)$$

a probabilidade de ocorrência da configuração $g(\mathbf{x})$ do campo não depende do ponto do espaço. Em termos da função de correlação (5.4), a condição de homogeneidade estatística se escreve

⁹No presente trabalho, por exemplo, estudou-se o campo das flutuações de temperatura da RCF.

¹⁰Se a condição (5.3) não for satisfeita, podemos considerar o campo $g(\mathbf{x}) - \langle g(\mathbf{x}) \rangle$ que satisfaz a condição sem problema.

¹¹Na integração comum se soma uma função $f(x)$ sobre um conjunto contínuo de valores x . Na integração funcional de um funcional $G[f]$ se soma sobre um conjunto contínuo de funções f .

$$\begin{aligned}\xi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \xi(\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{a}) \quad \forall \mathbf{a}, \\ \xi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \xi(\mathbf{x} - \mathbf{y}),\end{aligned}\tag{5.7}$$

equação que expressa que a função de correlação de dois pontos só depende do vetor separação dos dois pontos, quer dizer, a sua forma funcional é tal que só tem um argumento (o vetor $\mathbf{x} - \mathbf{y}$).

Entende-se por isotropia estatística de um campo $g(\mathbf{x})$ a invariância das propriedades estatísticas do campo aleatório sob a ação de uma rotação do sistema de coordenadas, definida pelo operador \hat{R} como

$$\hat{R}g(\mathbf{x}) \equiv g(\hat{R}^{-1}\mathbf{x}).\tag{5.8}$$

A isotropia estatística pode ser expressa como

$$P[g(\mathbf{x})] = P[\hat{R}g(\mathbf{x})],\tag{5.9}$$

ou seja, a probabilidade de ocorrência da configuração $g(\mathbf{x})$ do campo não depende da direção no espaço. Em termos da função de correlação (5.4), a isotropia estatística é escrita como

$$\xi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \xi(\hat{R}^{-1}\mathbf{x}, \hat{R}^{-1}\mathbf{y}), \quad \forall \hat{R}.\tag{5.10}$$

Combinando homogeneidade estatística (5.7) e isotropia estatística (5.10), temos que

$$\xi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \xi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \xi(\hat{R}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y})),\tag{5.11}$$

ou seja, a função de correlação deve satisfazer

$$\xi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \xi(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|),\tag{5.12}$$

expressão que significa que a função de correlação de dois pontos só depende da magnitude do vetor separação dos dois pontos, quer dizer, a sua forma funcional é tal que só tem um argumento ($|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$).

Sob determinadas condições também é possível examinar homogeneidade e isotropia estatística do campo $g(\mathbf{x})$ no espaço de Fourier. Podemos escrever

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} g(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (5.13)$$

e

$$g(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{x} g(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (5.14)$$

de onde se nota que, se o campo $g(\mathbf{x})$ é real, a condição

$$g(\mathbf{k}) = g^*(-\mathbf{k}), \quad (5.15)$$

onde “*” denota o complexo conjugado, é satisfeita. Sob uma traslação $\hat{T}_{\mathbf{a}}$, a equação (5.14) produz

$$\hat{T}_{\mathbf{a}} g(\mathbf{k}) = g(\mathbf{k}) \exp(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}), \quad (5.16)$$

onde se usou (5.5) e uma substituição simples. Se a função de correlação de dois pontos no espaço de Fourier é invariante sob traslações, deve satisfazer

$$\langle g(\mathbf{k}) g^*(\mathbf{k}') \rangle = \langle \hat{T}_{\mathbf{a}} g(\mathbf{k}) \hat{T}_{\mathbf{a}} g^*(\mathbf{k}') \rangle, \quad (5.17)$$

que usando (5.16)

$$\begin{aligned} \langle g(\mathbf{k}) g^*(\mathbf{k}') \rangle &= \langle g(\mathbf{k}) g^*(\mathbf{k}') \rangle \exp(-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{a}) \\ &= F(\mathbf{k}) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad \forall \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde a função $\delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ aparece para garantir que a função de correlação e $F(\mathbf{k})$ são funções reais.

Por outro lado, sob rotações a equação (5.14) produz

$$\hat{R}g(\mathbf{k}) = g(\hat{R}^{-1}\mathbf{k}), \quad (5.19)$$

onde foi usada a equação (5.8) e o fato que o produto escalar é invariante sob rotações, quer dizer $\hat{R}^{-1}\mathbf{k} \cdot \hat{R}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$. Se a função de correlação de dois pontos no espaço de Fourier é invariante sob rotações, deve satisfazer

$$\langle g(\mathbf{k}) g^*(\mathbf{k}') \rangle = \langle \hat{R}g(\mathbf{k}) [\hat{R}g(\mathbf{k}')]^* \rangle, \quad (5.20)$$

que usando (5.19) fica

$$\langle \hat{R}g(\mathbf{k}) [\hat{R}g(\mathbf{k}')]^* \rangle = \langle g(\hat{R}^{-1}\mathbf{k}) g^*(\hat{R}^{-1}\mathbf{k}') \rangle = F(\hat{R}^{-1}\mathbf{k}) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (5.21)$$

Combinando homogeneidade (5.18) e isotropia (5.21) estatística da função de correlação de dois pontos no espaço de Fourier, temos que

$$F(\hat{R}^{-1}\mathbf{k}) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = F(\mathbf{k}) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (5.22)$$

quer dizer,

$$F(\hat{R}^{-1}\mathbf{k}) = F(\mathbf{k}), \quad (5.23)$$

que é satisfeita somente se $F(\mathbf{k}) = F(k)$, ou seja, F é uma função real que só depende da magnitude do vetor de onda. Podemos definir o espectro de potências, $\mathcal{P}_g(k)$, de um campo homogêneo e isotrópico, $g(\mathbf{x})$, como

$$\langle g(\mathbf{k}) g^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \mathcal{P}_g(k) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (5.24)$$

Da definição (5.4) para a função de correlação de dois pontos no espaço real e a equação (5.13) obtemos

$$\xi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' \langle g(\mathbf{k}) g^*(\mathbf{k}') \rangle \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{y}). \quad (5.25)$$

Substituindo (5.24) em (5.25) encontramos que a função de correlação de dois pontos no espaço real está relacionada com o espectro de potências através de

$$\xi(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \mathcal{P}_g(k) \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})), \quad (5.26)$$

ou seja, a função de correlação de dois pontos no espaço real é a transformada de Fourier do espectro de potências. Tomando $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = k|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \cos \theta$; usando

$$\Delta_g^2(k) \equiv \frac{k^3 \mathcal{P}_g(k)}{2\pi^2}; \quad (5.27)$$

e também o resultado

$$\int_0^\pi \sin \theta \exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \cos \theta) d\theta = 2j_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|); \quad (5.28)$$

e usando o elemento de volume em coordenadas esféricas na equação (5.26), podemos escrever

$$\xi(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \int \Delta_g^2(k) d \ln k j_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|), \quad (5.29)$$

onde j_0 é a função de Bessel esférica de ordem zero. Nota-se da equação (5.29) que a variância do campo $g(\mathbf{x})$, $\xi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \langle g^2(\mathbf{x}) \rangle$, é expressa por

$$\xi(0) = \int \Delta_g^2(k) d \ln k. \quad (5.30)$$

Em geral, para uma função distribuição de probabilidade $f(\varsigma)$ de um campo aleatório $\varsigma(\mathbf{x}, t)$, temos

$$f(\varsigma) \geq 0 \quad e \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\varsigma) d\varsigma = 1. \quad (5.31)$$

Por outro lado, existem infinitos momentos que caracterizam a função de distribuição $f(\varsigma)$. Os primeiros 4 momentos são expressos por

$$\mu_1 = \langle \varsigma \rangle = \int \varsigma f(\varsigma) d\varsigma, \quad (5.32)$$

$$\mu_2 = \int (\varsigma - \langle \varsigma \rangle)^2 f(\varsigma) d\varsigma, \quad (5.33)$$

$$\mu_3 = \frac{1}{\mu_2^{3/2}} \int (\varsigma - \langle \varsigma \rangle)^3 f(\varsigma) d\varsigma, \quad (5.34)$$

$$\mu_4 = \frac{1}{\mu_2^2} \int (\varsigma - \langle \varsigma \rangle)^4 f(\varsigma) d\varsigma. \quad (5.35)$$

Para reproduzir uma função distribuição de probabilidade gaussiana somente são necessários os primeiros dois momentos μ_1 e μ_2 , ou seja, ela pode ser escrita como

$$f(\varsigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_2}} \exp\left(-\frac{(\varsigma - \mu_1)^2}{2\mu_2}\right). \quad (5.36)$$

Os momentos ímpares não nulos diferentes do valor médio μ_1 e os momentos pares $\mu_4, \mu_6, \mu_8, \dots$, que não podem se escrever em termos da variância μ_2 caracterizam a NG de uma função distribuição de probabilidade, como por exemplo, na assimetria na função de distribuição ou na presença de um máximo mais ou menos pronunciado que no caso gaussiano.

Como se notou anteriormente (ver equação (5.30)), a variância μ_2 de um campo aleatório com valor médio nulo está relacionada com o espectro de potências. Relações similares entre os momentos de uma função distribuição de probabilidade de um campo aleatório $g(\mathbf{x})$ e as suas funções espectrais — transformadas de Fourier das funções de correlação no espaço real — podem ser estabelecidas [128]. Temos

$$\mu_2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathcal{P}_g(k) d^3k, \quad (5.37)$$

$$\mu_3 = \frac{1}{\mu_2^{3/2}} \frac{1}{(2\pi)^6} \int B_g(k_1, k_2, k_3) d^3k_1 d^3k_2, \quad (5.38)$$

$$\mu_4 = \frac{1}{\mu_2^2} \frac{1}{(2\pi)^9} \int T_g(k_1, k_2, k_3, k_4) d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3, \quad (5.39)$$

onde $\mathcal{P}_g(k)$, $\mathcal{B}_g(k_1, k_2, k_3)$ e $\mathcal{T}_g(k_1, k_2, k_3, k_4)$ são, respectivamente, o espectro de potências, o biespectro e o triespectro do campo $g(\mathbf{x})$ que por sua vez podem ser definidos — supondo homogeneidade e isotropia estatística — usando as funções de correlação de dois, três e quatro pontos no espaço de Fourier como¹²

$$\langle g_{\mathbf{k}_1} g_{\mathbf{k}_2} \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathcal{P}_g(k), \quad (5.40)$$

$$\langle g_{\mathbf{k}_1} g_{\mathbf{k}_2} g_{\mathbf{k}_3} \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \mathcal{B}_g(k_1, k_2, k_3), \quad (5.41)$$

e

$$\langle g_{\mathbf{k}_1} g_{\mathbf{k}_2} g_{\mathbf{k}_3} g_{\mathbf{k}_4} \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \mathcal{T}_g(k_1, k_2, k_3, k_4). \quad (5.42)$$

5.2.2 O espectro de potências angulares

Se um campo aleatório f está definido sobre a esfera, é mais conveniente usar os harmônicos esféricos como uma base ortonormal, em lugar de ondas planas como na equação (5.13). Assim, para um campo $f(\hat{\mathbf{n}}) = f(\theta, \phi)$ temos

$$f(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (5.43)$$

¹²Note que a equação (5.40) pode ser transformada na equação (5.24) usando (5.15).

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário e, pela ortonormalidade dos harmônicos esféricos, os coeficientes multipolares $a_{\ell m}$ são expressos por

$$a_{\ell m} = \int d\hat{\mathbf{n}} f(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}), \quad (5.44)$$

e satisfazem

$$a_{\ell m}^* = (-1)^m a_{\ell -m} \quad (Y_{\ell m}^* = (-1)^m Y_{\ell -m}), \quad (5.45)$$

quando $f(\hat{\mathbf{n}})$ é um campo real.

De uma forma análoga à da Seção 5.2.1 discutiremos o espectro de potências para uma função sobre a esfera. A função de correlação de dois pontos neste caso é

$$\xi(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2) = \langle f(\hat{\mathbf{n}}_1) f(\hat{\mathbf{n}}_2) \rangle. \quad (5.46)$$

A isotropia estatística requer que a função de correlação de dois pontos (5.46) seja invariante sob rotações, quer dizer,

$$\langle Df(\hat{\mathbf{n}}_1) Df(\hat{\mathbf{n}}_2) \rangle = \langle f(\hat{\mathbf{n}}_1) f(\hat{\mathbf{n}}_2) \rangle, \quad (5.47)$$

onde $D = D(\alpha, \beta, \gamma)$ denota uma matriz de rotação sobre a esfera, sendo α , β e γ os ângulos de Euler. Substituindo (5.43) em (5.47) se obtém [101]

$$\langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2}^* \rangle = \sum_{m'_1, m'_2} \langle a_{\ell_1 m'_1} a_{\ell_2 m'_2}^* \rangle D_{m'_1 m_1}^{(\ell_1)} D_{m'_2 m_2}^{(\ell_2)*}. \quad (5.48)$$

Pode ser mostrado, da equação (5.48) e pelas propriedades das matrizes de rotação D , que se a função de correlação de dois pontos para os coeficientes multipolares tem a forma

$$\langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2}^* \rangle = \langle C_{\ell_1} \rangle \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{m_1 m_2}, \quad (5.49)$$

onde $\delta_{\ell_1 \ell_2}$ e $\delta_{m_1 m_2}$ são símbolos delta de Kronecker, e $\langle C_{\ell_1} \rangle$ é o espectro de potências angulares — análogo de $\mathcal{P}_g(k)$ na equação (5.24) — do campo $f(\hat{\mathbf{n}})$,

é invariante sob rotações na esfera. Portanto, a condição de isotropia estatística implica que a matriz de covariância $\langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2}^* \rangle$ de $a_{\ell m}$ seja diagonal. Com as equações (5.43) e (5.49) em (5.46) obtemos

$$\begin{aligned}
\langle f(\hat{\mathbf{n}}_1) f(\hat{\mathbf{n}}_2) \rangle &= \sum_{\ell_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-\ell_1}^{\ell_1} \sum_{\ell_2=0}^{\infty} \sum_{m_2=-\ell_2}^{\ell_2} \langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2}^* \rangle Y_{\ell_1 m_1}(\hat{\mathbf{n}}_1) Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{\mathbf{n}}_2) \\
&= \sum_{\ell} \langle C_{\ell} \rangle \sum_m Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}_1) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}_2), \\
&= \sum_{\ell} \langle C_{\ell} \rangle \frac{2\ell+1}{4\pi} P_{\ell}(\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2) = C(\theta), \tag{5.50}
\end{aligned}$$

onde $\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = \cos \theta$ e P_{ℓ} é o polinômio de Legendre de grau ℓ . Assim, a função de correlação de dois pontos para um campo aleatório com isotropia estatística e definido sobre a esfera só depende do ângulo entre duas direções. De (5.50) a variância do campo é expressa por

$$C(0) = \sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{4\pi} \langle C_{\ell} \rangle. \tag{5.51}$$

Finalmente, notamos que usando a ortogonalidade dos polinômios de Legendre em (5.50), podemos obter o espectro de potências angulares

$$\langle C_{\ell} \rangle = 2\pi \int_{-1}^1 d \cos \theta C(\theta) P_{\ell}(\cos \theta). \tag{5.52}$$

5.3 Estimativa da NG primordial: o biespectro

As predições do nível de NG primordial para os diferentes modelos inflacionários são importantes porque podem permitir discriminar quais modelos são compatíveis com as observações, mas existem na literatura várias formas de buscar a NG primordial [120]. Contudo, foi mostrado nas referências [129] e [130] que o biespectro, usado pela equipe do WMAP na análise de dados da RCF, é um estimador ótimo para a detecção da NG, no sentido de que

ele satura a desigualdade de Cramer–Rao.¹³ No que se segue se usará este estimador.

Uma forma de estudar o afastamento de uma distribuição da gaussianidade é através de momentos de ordem superior a μ_2 ou, equivalentemente, funções espectrais além do espectro de potências¹⁴ (Seção 5.2). A função de correlação de três pontos da perturbação da curvatura ζ no espaço de Fourier pode ser definida, conforme a equação (5.41), como

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \rangle \equiv (2\pi)^3 \mathcal{B}_\zeta(k_1, k_2, k_3) \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3), \quad (5.53)$$

onde $\mathcal{B}_\zeta(k_1, k_2, k_3)$ é o biespectro da perturbação da curvatura ζ . Porém, na literatura é usual encontrar o biespectro definido em termos do potencial de Bardeen Φ [107]. Isto porque pelo efeito Sachs–Wolfe, tratado no Capítulo 4, sabemos que em grandes escalas angulares ($\ell \sim 10$ ou $\theta \sim 7^\circ$) e na aproximação linear, existe uma relação entre as flutuações na temperatura da RCF e o potencial de Bardeen Φ expressa por

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Phi}{3} = -\frac{\zeta}{5}, \quad (5.54)$$

onde foi usada a relação (3.118) entre o potencial de Bardeen Φ e a perturbação da curvatura ζ na era dominada pela matéria.¹⁵ Usando as equações (5.53) e (3.118) podemos escrever

$$\langle \Phi(\mathbf{k}_1) \Phi(\mathbf{k}_2) \Phi(\mathbf{k}_3) \rangle = (2\pi)^3 \mathcal{B}_\Phi(k_1, k_2, k_3) \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3), \quad (5.55)$$

onde $\Phi(\mathbf{k})$ é a transformada de Fourier do potencial de Bardeen e \mathcal{B}_Φ o seu biespectro, que pode ser escrito como

¹³Em estatística, a desigualdade de Cramer–Rao estabelece um limite inferior para a variância de um dado estimador estatístico.

¹⁴Estas funções são identicamente nulas se a distribuição é gaussiana.

¹⁵Através da relação (5.54) se estabelece uma conexão entre as propriedades estatísticas do observável $\frac{\Delta T}{T}$ e as funções espectrais associadas com Φ ou ζ que são, em geral, dependentes do modelo inflacionário. Portanto, conhecendo as funções espectrais das perturbações da curvatura para algum modelo cosmológico do universo primordial, podemos rejeitar ou aceitar o modelo porque as propriedades estatísticas das flutuações na temperatura da RCF são conhecidas com alguma precisão.

$$\mathcal{B}_\Phi(k_1, k_2, k_3) = f_{\text{NL}} F(k_1, k_2, k_3), \quad (5.56)$$

onde a função $F(k_1, k_2, k_3)$ é chamada de forma do biespectro, e f_{NL} é uma constante sem dimensões chamada de amplitude do biespectro que pode ser restringida pelas observações da RCF como se discutirá adiante. Tanto a amplitude f_{NL} como a função forma $F(k_1, k_2, k_3)$ podem, em princípio, ser calculados teoricamente para diferentes modelos do universo primordial. Portanto, uma estimativa observacional da amplitude do biespectro é uma forma de testar observacionalmente os modelos do universo primordial.

A função

$$\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3), \quad (5.57)$$

na equação (5.55), impõe a condição

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0, \quad (5.58)$$

nos vetores de onda das perturbações da curvatura Φ , ou seja, eles formam triângulos no espaço de Fourier. Ao longo dos últimos 15 anos vários trabalhos foram feitos e resulta que o máximo da função de correlação ocorre para diferentes configurações triangulares dos vetores de onda $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ (ver figura 5.1). Algumas formas estudadas são:

1. Local ou “squeezed”: $k_1 \approx k_2 \gg k_3$.
2. Elongada: $k_1 = k_2 + k_3$.
3. Dobrada ou “folded”: $k_1 = 2k_2 = 2k_3$.
4. Isósceles: $k_2 = k_3$.
5. Equilátera: $k_1 = k_2 = k_3$.

Mostra-se que, a forma local, que pode ser expressa por [120]

$$F_{\text{local}}(k_1, k_2, k_3) = 2 [\mathcal{P}_\Phi(k_1) \mathcal{P}_\Phi(k_2) + \mathcal{P}_\Phi(k_2) \mathcal{P}_\Phi(k_3) + \mathcal{P}_\Phi(k_3) \mathcal{P}_\Phi(k_1)], \quad (5.59)$$

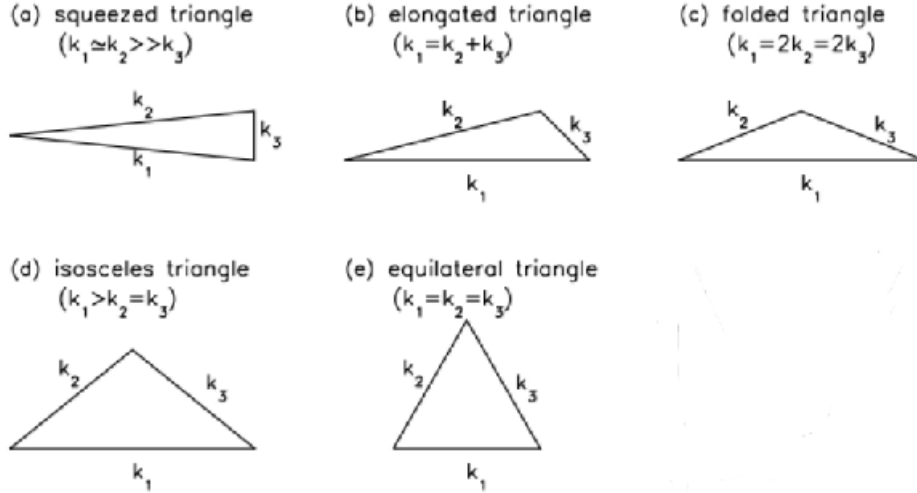


Fig. 5.1: Algumas configurações dos vetores de onda nas funções forma do biespectro: a) Local ou “squeezed”, b) Elongada, c) “folded”, d) Isósceles e f) Equilátera. Figura da referência [120].

onde \mathcal{P}_Φ é o espectro de potências do potencial de Bardeen. Em [117] e [118] foi mostrado que os modelos inflacionários mais simples — como o tratado na Seção 2.2 — predizem um biespectro da forma local cuja amplitude pode ser expressa em termos dos parâmetros de rolamento lento e é desprezível, isto é $f_{\text{NL}}^{\text{local}} \lesssim 10^{-6}$.

Um outro resultado de grande importância foi encontrado na referência [131]. Ele assegura que todos os modelos de um campo escalar independentemente da forma do potencial, do termo cinético e do estado de vácuo inicial, predizem que, no limite $k_1 = k_2$ e $k_3 \rightarrow 0$, o biespectro da forma local é

$$\mathcal{B}_\Phi(k_1, k_1, k_3 \rightarrow 0) \simeq \frac{5}{3}(1 - n_s)\mathcal{P}_\Phi(k_1)\mathcal{P}_\Phi(k_3), \quad (5.60)$$

ou seja, o biespectro da forma local das perturbações da curvatura Φ acopla flutuações de comprimento de onda curto (k_1) com flutuações com comprimento de onda longo k_3 ($\lambda \rightarrow \infty \Rightarrow k_3 \rightarrow 0$), através do espectro de potências \mathcal{P}_Φ . Usando (5.56) e o valor de $n_s = 0.967$ — limite do WMAP expresso em (4.50) —, de (5.60) obtemos

$$f_{\text{NL}}^{\text{local}} \simeq 0.01375, \quad (5.61)$$

e para um espectro de potências invariante de escala ($n_s = 1$)

$$f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 0, \quad (5.62)$$

de acordo com o esperado para uma distribuição gaussiana das flutuações de temperatura da RCF. Os limites observacionais mais recentes do WMAP para o parâmetro $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ são [115]

$$f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 32 \pm 21 \quad (1\sigma) \quad \text{e} \quad -10 < f_{\text{NL}}^{\text{local}} < 74 \quad (2\sigma), \quad (5.63)$$

e espera-se que a missão PLANCK reduza as incertezas no parâmetro $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ por um fator 4.

5.4 Mapas simulados das flutuações de temperatura da RCF

Os mapas simulados da RCF são importantes pelo menos por duas razões. A primeira é que permitem testar a sensibilidade dos estimadores estatísticos usados para a análise dos mapas obtidos a partir dos dados observacionais da RCF, como será feito no Capítulo 6. A segunda é porque permitem estimar quantitativamente a contribuição das anisotropias secundárias ou efeitos contaminantes das flutuações primordiais da RCF e também os efeitos instrumentais na estimativa observacional do nível de NG.

Das diferentes funções-forma do biespectro $F(k_1, k_2, k_3)$ das flutuações de temperatura da RCF, a que parece ter uma relevância maior é a do tipo local. Os modelos com só um campo escalar predizem um biespectro do tipo local com uma amplitude que não é detectável pelos instrumentos atuais. Assim, a detecção de um nível de NG alto ($f_{\text{NL}}^{\text{local}} \gtrsim 30$) será crucial para o esclarecimento da física que descreve o universo primordial.

Mapas simulados das flutuações de temperatura da RCF com NG do tipo local foram gerados pela equipe do WMAP para estimar a significância estatística dos dos estimadores de NG dos dados da RCF [132]. O algoritmo usado para gerar esses mapas foi modificado para ser mais preciso e eficiente assim como para produzir mapas de polarização [133]. Posteriormente, em [134], o algoritmo foi otimizado novamente reduzindo o consumo de memória e o tempo de computação. No que se segue apresentaremos brevemente o algoritmo usado para simular mapas de flutuações de temperatura da RCF com NG do tipo local.

Como foi notado na Seção 5.2.2, uma função $f(\hat{\mathbf{n}})$ sobre a esfera pode ser expandida em harmônicos esféricos como

$$f(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}),$$

conforme (5.43), onde $a_{\ell m}$ são os coeficientes multipolares. Por outro lado, como os harmônicos esféricos $Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}})$ são funções conhecidas, um conjunto de coeficientes multipolares $\{a_{\ell m}\}$ define uma função sobre a esfera através da equação (5.43). Com as observações das flutuações de temperatura da RCF (feitas, por exemplo, por COBE, WMAP ou PLANCK) são construídas funções discretas sobre a esfera celeste¹⁶ S^2 cujas projeções Mollweid são os mapas das flutuações de temperatura da RCF.¹⁷ Esses mapas por sua vez podem ser expandidos em harmônicos esféricos para obter conjuntos de coeficientes multipolares $\{a_{\ell m}\}$ que os caracterizam univocamente. Por outro lado, se um conjunto de coeficientes multipolares $\{a_{\ell m}\}$ é gerado — tendo em conta a física da RCF —, produz um mapa de flutuações de temperatura da RCF. Portanto, para simular um mapa da RCF deve-se implementar uma forma para gerar um conjunto de $\{a_{\ell m}\}$. Essa implementação deve considerar que pelo efeito Sachs–Wolfe (ver equação (5.54)) existe uma relação de proporcionalidade entre o campo de flutuações de temperatura da RCF,

¹⁶A esfera é dividida em pixels, cujo tamanho depende da resolução do instrumento e cuja forma depende da forma de divisão (ver, por exemplo, a partição Healpix da esfera, na figura (6.3), no Capítulo 6) da esfera. Com cada pixel se associa uma medição de temperatura da RCF. O conjunto de todas essas medições define uma função discreta sobre a esfera.

¹⁷Com esta consideração, de agora em diante consideraremos uma função sobre a esfera e um mapa como termos sinônimos.

$\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n})$, e o campo de perturbações da curvatura, $\Phi(\mathbf{r})$. De acordo com essa relação de proporcionalidade se conclui que as propriedades estatísticas de $\Phi(\mathbf{r})$ e do observável $\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n})$ são similares.

Como se discutiu no Capítulo 4, as observações de flutuações de temperatura da RCF indicam uma distribuição aproximadamente gaussiana ($n_s \approx 1$). Outro fato a considerar no algoritmo que simula os mapas da RCF é que os modelos inflacionários de só um campo escalar predizem uma NG do tipo local pequena ($f_{\text{NL}}^{\text{local}} \sim 10^{-6}$). Portanto, como o algoritmo pretende simular mapas da RCF com NG do tipo local é razoável fazer um tratamento perturbativo.

Como as observações indicam que a distribuição do campo $\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n})$ é aproximadamente gaussiana, a distribuição do potencial de Bardeen $\Phi(\mathbf{r})$ também deve satisfazer essa propriedade. Uma possível parametrização para o potencial de Bardeen $\Phi(\mathbf{r})$, que satisfaz essa condição, é

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_{\text{L}}(\mathbf{r}) + f_{\text{NL}}^{\text{local}} \Phi_{\text{NL}}(\mathbf{r}), \quad (5.64)$$

onde

$$\Phi_{\text{NL}}(\mathbf{r}) = \Phi_{\text{L}}^2(\mathbf{r}) - \langle \Phi_{\text{L}}^2(\mathbf{r}) \rangle, \quad (5.65)$$

é um campo não-gaussiano construído a partir do campo gaussiano $\Phi_{\text{L}}(\mathbf{r})$ com média nula no “ensemble”.¹⁸ Mostra-se, usando a transformada de Fourier do campo $\Phi(\mathbf{r})$ parametrizado por (5.64) e calculando a função de correlação de três pontos no espaço de Fourier, que a parametrização (5.64) reproduz a função forma $F(k_1, k_2, k_3)$ para a configuração local expressa pela equação (5.59).

Dados $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ e um campo gaussiano $\Phi_{\text{L}}(\mathbf{r})$, define-se, pela parametrização (5.64), um campo $\Phi(\mathbf{r})$. Esse campo pode ser expandido em harmônicos esféricos (para um dado \mathbf{r}) e caracterizado pelos seus coeficientes multipolares $\{\Phi_{\ell m}\}$. Pelo efeito Sachs-Wolfe (5.54), o conjunto $\{\Phi_{\ell m}\}$ está relacionado com o conjunto $\{a_{\ell m}\}$ que caracteriza um mapa de flutuações de temperatura da RCF com nível de NG $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$. Na próxima subseção apresentaremos como obter esse conjunto $\{a_{\ell m}\}$ dados $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ e $\Phi_{\text{L}}(\mathbf{r})$.

¹⁸Lembre-se que, da Seção 5.2, \langle, \rangle denota a média no “ensemble”.

5.4.1 “Receita” para a simulação de mapas da RCF com NG do tipo local

Para simular mapas da RCF com NG do tipo local, parametrizada como em (5.64), gera-se conjuntos de coeficientes multipolares lineares $\{a_{\ell m}^L\}$ e não lineares $\{a_{\ell m}^{NL}\}$ correspondentes aos campos $\Phi_L(\mathbf{r})$ e $\Phi_{NL}(\mathbf{r})$, respectivamente. No que se segue apresentaremos como obter esses conjuntos de coeficientes multipolares.

a) Coeficientes multipolares de um campo gaussiano

Como se tratou na Seção 5.2.1, para reproduzir um campo gaussiano somente são necessárias a média e a variância, quer dizer, os dois primeiros momentos μ_1 e μ_2 . O campo $\Phi_L(\mathbf{r})$, na parametrização (5.64), tem média $\langle \Phi_L(\mathbf{r}) \rangle = \mu_1 = 0$ de modo tal que só fica μ_2 para a sua caracterização. O segundo momento da distribuição está relacionado com o espectro de potências $\mathcal{P}_{\Phi_L}(k)$ do campo Φ_L (ver equação (5.37)) que por sua vez está relacionado, através da equação (5.26), com a função de correlação $\xi_{\Phi_L}(\mathbf{r})$

$$\langle \Phi_L(\mathbf{r}_1) \Phi_L(\mathbf{r}_2) \rangle \equiv \xi_{\Phi_L}(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \mathcal{P}_{\Phi_L}(k) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (5.66)$$

onde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ e $r = |\mathbf{r}|$. A exponencial em (5.66) pode ser expandida em harmônicos esféricos como

$$\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = 4\pi \sum_{\ell} \sum_m (i)^{-\ell} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}) j_{\ell}(kr), \quad (5.67)$$

onde j_{ℓ} é a função de Bessel esférica de ordem ℓ , $\hat{\mathbf{k}}$ e $\hat{\mathbf{r}}$ são vetores unitários no espaço de Fourier e no espaço real, respectivamente. Substituindo (5.67) em (5.66) e usando coordenadas esféricas para o elemento de volume, podemos reescrever

$$\xi_{\Phi_L}(r) = \frac{2}{\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}_1) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}_2) \int dk k^2 \mathcal{P}_{\Phi_L}(k) j_{\ell}(kr_1) j_{\ell}(kr_2). \quad (5.68)$$

Por outro lado, o campo $\Phi_L(\mathbf{r})$ pode ser expandido em harmônicos esféricos de forma tal que os seus coeficientes multipolares $\Phi_{L\ell m}(r)$ (ver equação (5.44)) são expressos por

$$\Phi_{L\ell m}(r) = \int d\Omega_{\hat{\mathbf{r}}} \Phi_L(\mathbf{r}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}). \quad (5.69)$$

onde $d\Omega_{\hat{\mathbf{r}}} = \sin\theta d\theta d\phi$. A função de correlação de dois pontos para os coeficientes multipolares $\Phi_{L\ell m}(r)$, pode ser expressa, usando (5.69) e (5.68), como

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{L\ell_1 m_1}(r_1) \Phi_{L\ell_2 m_2}^*(r_2) \rangle &= \int d\Omega_{\hat{\mathbf{r}}_1} d\Omega_{\hat{\mathbf{r}}_2} Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{r}}_1) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{\mathbf{r}}_2) \xi_{\Phi_L}(r) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \int d\Omega_{\hat{\mathbf{r}}_1} d\Omega_{\hat{\mathbf{r}}_2} Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{r}}_1) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{\mathbf{r}}_2) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}_1) \\ &\quad \times Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}_2) \int dk k^2 \mathcal{P}_{\Phi_L}(k) j_{\ell}(kr_1) j_{\ell}(kr_2). \end{aligned} \quad (5.70)$$

Usando a relação de ortonormalidade dos harmônicos esféricos, a matriz de covariância $\ell \times m$

$$P_{\Phi_L \ell}(r_1, r_2) \equiv \langle \Phi_{L\ell_1 m_1}(r_1) \Phi_{L\ell_2 m_2}^*(r_2) \rangle, \quad (5.71)$$

para os coeficientes multipolares de um campo gaussiano Φ_L é dada por

$$P_{\Phi_L \ell}(r_1, r_2) = \frac{2}{\pi} \delta_{\ell_1}^{\ell_2} \delta_{m_1}^{m_2} \int dk k^2 \mathcal{P}_{\Phi_L}(k) j_{\ell_1}(kr_1) j_{\ell_2}(kr_2). \quad (5.72)$$

Observa-se que a matriz de covariância (5.72) depende do espectro de potências do campo gaussiano Φ_L . Assim, para obter os coeficientes multipolares $\Phi_{L\ell m}$ a partir de um dado espectro de potências $\mathcal{P}_{\Phi_L}(k)$, primeiro se calcula a matriz de covariância $P_{\Phi_L \ell}(r_1, r_2)$ calculando a integral em (5.72) e depois usando a relação

$$\Phi_{L\ell m}(r) = P_{\Phi_L \ell}^{1/2} \cdot \mathbf{g}, \quad (5.73)$$

onde \mathbf{g} é um vetor cujas m componentes são variáveis aleatórias complexas e independentes com média nula e variância igual a um,¹⁹ para obter um vetor $\Phi_{L\ell m}(r)$ cujas componentes são os coeficientes multipolares do campo $\Phi_L(\mathbf{r})$.

b) Obter $\Phi_L(\mathbf{r})$

Devido a que os harmônicos esféricos são funções conhecidas, é possível reconstruir o campo gaussiano Φ_L como uma combinação linear

$$\Phi_L(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \Phi_{L\ell m}(r) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (5.74)$$

usando o conjunto de coeficientes multipolares $\{\Phi_{L\ell m}(r)\}$ encontrado no item anterior.

c) Calcular $\Phi_{NL}(\mathbf{r})$

A contribuição não-gaussiana na parametrização (5.64) se calcula com a função $\Phi_L(\mathbf{r})$ obtida no item anterior e a expressão

$$\Phi_{NL}(\mathbf{r}) = \Phi_L^2(\mathbf{r}) - \langle \Phi_L^2(\mathbf{r}) \rangle.$$

d) Coeficientes multipolares da contribuição não-gaussiana

Com a função $\Phi_{NL}(\mathbf{r})$ obtida no item anterior calculamos os coeficientes multipolares da contribuição não-gaussiana resolvendo a integral

$$\Phi_{NL\ell m}(r) = \int d\Omega_{\hat{\mathbf{r}}} \Phi_{NL}(\mathbf{r}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}). \quad (5.75)$$

¹⁹Programas como Mathematica ou Matlab têm embutidas rotinas com as quais é possível gerar esses vetores aleatórios.

e) **Calcular conjuntos** $\{a_{\ell m}^L\}$ e $\{a_{\ell m}^{NL}\}$

A equação (4.39) que expressa a relação, na aproximação linear, entre os coeficientes multipolares da função $\Theta(\hat{\mathbf{n}})$ que representa as flutuações de temperatura da RCF e as perturbações da curvatura \mathcal{R} pode ser escrita em termos dos coeficientes multipolares do potencial de Bardeen $\Phi(\mathbf{r})$ lembrando que existe uma relação de proporcionalidade entre Φ , ζ e \mathcal{R} . Assim, usando a) a expansão em harmônicos esféricos da transformada de Fourier do potencial de Bardeen

$$\Phi(\mathbf{k}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \Phi_{\ell m}(k) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}), \quad (5.76)$$

onde $\Phi_{\ell m}(k)$ são os coeficientes multipolares de $\Phi(\mathbf{k})$, b) a relação de ortogonalidade entre os harmônicos esféricos e c) coordenadas esféricas para o elemento de volume, (4.39) se transforma em

$$a_{\ell m} = \frac{(-i)^\ell}{2\pi^2} \int dk k^2 \Phi_{\ell m}(k) \Delta_{T\ell}(k). \quad (5.77)$$

onde $\Delta_{T\ell}(k)$ é a função de transferência. Podemos estabelecer uma relação entre os coeficientes multipolares $\Phi_{\ell m}$ e $a_{\ell m}$. A transformada de Fourier de $\Phi(\mathbf{k})$ é expressa por

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \Phi(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (5.78)$$

que, usando a equação (5.67) e coordenadas esféricas, se escreve

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \sum_{\ell} \sum_m (-i)^\ell Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}) \int dk k^2 j_\ell(kr) \int d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) \Phi(\mathbf{k}). \quad (5.79)$$

Substituindo (5.79) e (5.76) na equação (5.69) — com $\Phi_L \rightarrow \Phi$ — obtemos que

$$\begin{aligned} \Phi_{\ell m}(r) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\ell_1 \ell_2} \sum_{m_1 m_2} (-i)^{\ell_1} \int d\Omega_{\hat{\mathbf{r}}} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{r}}) \times \\ &\times \int dk k^2 j_{\ell_1}(kr) \Phi_{\ell_2 m_2}(k) \int d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}} Y_{\ell_1 m_1}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{\mathbf{k}}), \end{aligned} \quad (5.80)$$

que, usando as propriedades de ortogonalidade dos harmônicos esféricos, se reduz a

$$\Phi_{\ell m}(r) = \frac{(-i)^\ell}{2\pi^2} \int dk k^2 \Phi_{\ell m}(k) j_\ell(kr). \quad (5.81)$$

Por um procedimento análogo mas começando com a transformada inversa

$$\Phi(\mathbf{k}) = \int d^3r \Phi(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (5.82)$$

encontramos que

$$\Phi_{\ell m}(k) = 4\pi(i)^\ell \int dr r^2 \Phi_{\ell m}(r) j_\ell(kr). \quad (5.83)$$

Substituindo (5.83) na equação (5.77) obtemos

$$\begin{aligned} a_{\ell m} &= \frac{(-i)^\ell}{2\pi^2} \int dk k^2 4\pi(i)^\ell \int dr r^2 \Phi_{\ell m}(r) j_\ell(kr) \Delta_{T\ell}(k) \\ &= \frac{2}{\pi} \int dk k^2 \Delta_{T\ell}(k) j_\ell(kr) \int dr r^2 \Phi_{\ell m}(r) \\ &= \int dr r^2 \Delta_{T\ell}(r) \Phi_{\ell m}(r), \end{aligned} \quad (5.84)$$

onde

$$\Delta_{T\ell}(r) \equiv \frac{2}{\pi} \int dk k^2 \Delta_{T\ell}(k) j_\ell(kr), \quad (5.85)$$

é a função de transferência no espaço real.²⁰ Calculando a integral na equação (5.84) para cada conjunto de coeficientes multipolares $\{\Phi_{L\ell m}\}$ e $\{\Phi_{NL\ell m}\}$ calculados nos itens a) e d), respectivamente, obtemos conjuntos de coeficientes multipolares²¹ $\{a_{\ell m}^L\}$ e $\{a_{\ell m}^{NL}\}$ através das equações

$$a_{\ell m}^L = \int dr r^2 \Delta_{T\ell}(r) \Phi_{L\ell m}(r), \quad (5.86)$$

e

$$a_{\ell m}^{NL} = \int dr r^2 \Delta_{T\ell}(r) \Phi_{NL\ell m}(r). \quad (5.87)$$

Finalmente, um conjunto de coeficientes multipolares, $\{a_{\ell m}\}$, representando um mapa de flutuações de temperatura da RCF com um nível de NG do tipo local f_{NL}^{local} é obtido com combinação linear de (5.86) e (5.87)

$$a_{\ell m} = a_{\ell m}^L + f_{NL}^{\text{local}} \cdot a_{\ell m}^{NL}. \quad (5.88)$$

Com uma combinação linear do conjunto $\{a_{\ell m}\}$ — conforme (5.43) — obtemos uma função sobre a esfera cuja projeção Mollweid é um mapa simulado de flutuações de temperatura da RCF. Dois exemplos desses mapas, um gaussiano ($f_{NL}^{\text{local}} = 0$) e outro não-gaussiano, são mostrados nas figuras (5.2) e (5.3), respectivamente.

Neste capítulo estudamos algumas ferramentas usadas em cosmologia na análise estatística dos dados obtidos das observações. Como o objetivo principal desta dissertação é o estudo da NG primordial das flutuações de temperatura da RCF apresentamos o biespectro no contexto da RCF, que é um estimador estatístico padrão usado para calcular o nível de NG primordial nos modelos inflacionários. Também fizemos uma descrição do algoritmo usado para a geração de mapas simulados da RCF. Esses mapas são úteis para testar a sensibilidade dos estimadores estatísticos no estudo da NG e para estimar quantitativamente efeitos não primordiais nas flutuações de temperatura da RCF. No próximo capítulo usaremos conjuntos de mapas simulados da RCF

²⁰Lembre-se que as funções de transferência no espaço de Fourier podem ser calculadas, por exemplo, usando software CAMB [113].

²¹Os coeficientes lineares e não-lineares foram disponibilizados pelos autores de [134] em <http://planck.mpa-garching.mpg.de/cmb/fnl-simulations/>.

Mapa Gaussiano Simulado da RCF

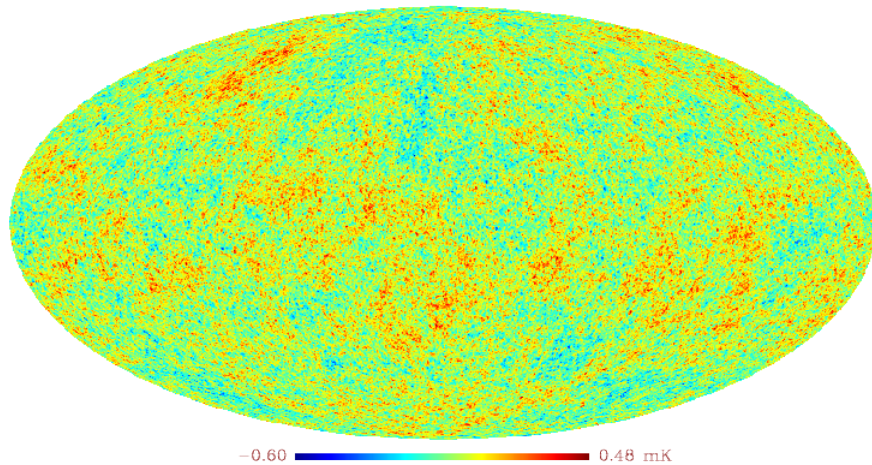


Fig. 5.2: Mapa gaussiano simulado das flutuações de temperatura da RCF ($f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 0$).

Mapa Simulado da RCF com NG do tipo local
 $f_{\text{NL}}=1000$

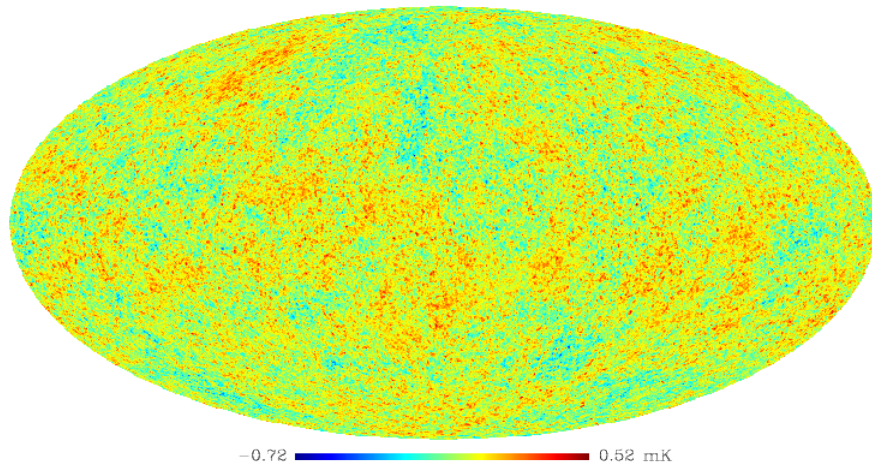


Fig. 5.3: Mapa não-gaussiano simulado das flutuações de temperatura da RCF com NG do tipo local ($f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 5000$).

gerados com o algoritmo apresentado neste capítulo para examinar alguns aspectos de dois indicadores de NG na RCF introduzidos recentemente.

Capítulo 6

Não–Gaussianidade primordial da RCF

6.1 Introdução

Como foi tratado anteriormente, existe um grande número de modelos inflacionários com diferentes motivações teóricas que satisfazem as restrições observacionais para o índice espectral n_s e para a razão r da amplitude das perturbações tensoriais e escalares. Essa degenerescência de modelos pode ser resolvida examinando as propriedades estatísticas que nos forneçam informações além do espectro de potências. Isto nos leva ao estudo do desvio de gaussianidade nos dados observacionais. A NG pode ser estudada usando dados dos levantamentos de galáxias e, como será feito neste capítulo, utilizando as medições de flutuações de temperatura da RCF.

Pode-se considerar que existem três grandes linhas de abordar a NG primordial da RCF. Na primeira usam-se estimadores estatísticos na análise dos dados observacionais para quantificar o nível de NG das flutuações de temperatura da RCF. Esta abordagem tem a vantagem de ser independente do modelo cosmológico. A principal desvantagem desse tipo de estudos de NG da RCF é que as medições da RCF contêm contribuições para NG que não têm uma origem primordial. Em uma outra abordagem examinam-se as predições teóricas dos diferentes modelos inflacionários para a amplitude e o tipo da NG primordial. Em particular, a amplitude da NG primordial, f_{NL} ,

é um observável cuja predição pode ser comparada com o valor extraído das medidas observacionais. Na terceira abordagem usam-se mapas simulados da RCF (Seção 5.4) para testar a sensibilidade e eficácia dos estimadores estatísticos na detecção de desvios da gaussianidade e também para obter informação sobre as possíveis contribuições contaminantes para NG das anisotropias secundárias ou efeitos não-lineares.¹

Neste capítulo apresentamos um estudo da NG primordial da RCF usando a terceira abordagem e cujos principais resultados estão sendo preparados para publicação. Começamos na Seção 6.2 examinando alguns aspectos da relação entre a NG primordial e as medições da RCF. Na seção 6.3 são apresentados dois estimadores estatísticos da NG introduzidos recentemente na literatura [2]. A partir de um mapa da RCF podemos construir mapas de “skewness” e “kurtosis”, S e K, respectivamente. Na referência [1] os indicadores S e K foram usados para estudar NG em mapas não-gaussianos simulados da RCF com NG do tipo local. Usando o espectro de potências angulares, S_ℓ e K_ℓ , dos mapas S e K como ferramenta para a análise da eficácia dos indicadores mostrou-se que eles são efetivos a NG do tipo local com amplitude $f_{\text{NL}}^{\text{local}} \gtrsim 500$, quer dizer, não são sensíveis para detecção de NG com amplitudes $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ nos limites do WMAP. Além disto, os espectros de potências angulares, S_ℓ e K_ℓ , apresentam oscilações possivelmente induzidas por superposições nos conjuntos de dados que definem as funções $S(\theta, \phi)$ e $K(\theta, \phi)$. Na Seção 6.4 usaremos mapas não-gaussianos simulados da RCF com NG do tipo local e faremos uma extensão do trabalho [1] em três aspectos. Primeiro, examinaremos se usando a partição Healpix da esfera (seções de igual área sem intersecções e denominadas de células nesta dissertação) para construir uma abordagem modificada dos indicadores, as oscilações em S_ℓ e K_ℓ desaparecem. Em segundo lugar examinaremos se os indicadores S e K assim modificados são sensíveis a NG do tipo local nos limites do WMAP. Um terceiro aspecto que trataremos será a determinação da sensibilidade para detecção de NG do tipo local dos indicadores S e K modificados usando χ^2 relativo ao caso gaussiano. Finalmente, na Seção 6.5 apresentamos nossas principais conclusões.

¹Note que além destas três abordagens, a NG da RCF também foi estudada no contexto da mecânica estatística não-extensiva [135], ver por exemplo as referências [136] e [137].

6.2 NG primordial e observações da RCF

O efeito Sachs–Wolfe, expresso na equação (5.54), permite comparar as previsões dos modelos inflacionários com as medidas da RCF. Desta forma examinar as propriedades estatísticas das perturbações da curvatura ζ é equivalente — salvo por uma constante de proporcionalidade — a examinar, em primeira ordem, as propriedades estatísticas das flutuações de temperatura da RCF.²

Como foi apresentado na Seção 5.2, para estudar as propriedades estatísticas das perturbações cosmológicas são usadas as funções de correlação ou as suas transformadas de Fourier, chamadas de funções espectrais. A função distribuição de probabilidade do campo de flutuações de temperatura da RCF, em geral, pode ser caracterizada pelos momentos estatísticos da distribuição³ que por sua vez estão relacionados com as funções espectrais (ver equações (5.37)–(5.39), por exemplo).

Um resultado importante é que quando a função distribuição de probabilidade é gaussiana, esta é caracterizada apenas pelos primeiros dois momentos, μ_1 e μ_2 , e pode ser escrita na forma (5.36). Portanto, os momentos ímpares não nulos, diferentes do valor médio μ_1 , e os momentos pares além da variância μ_2 caracterizam o desvio da gaussianidade na função distribuição de probabilidade das flutuações de temperatura da RCF. Por outro lado, como esses momentos de ordem superior a 2 correspondem a funções espectrais com informações estatísticas adicionais ao espectro de potências, a existência de funções espectrais tais como o biespectro ou o triespectro indica desvio de gaussianidade nas flutuações de temperatura da RCF.

No Capítulo 4 estudamos o espectro de potências angulares das flutuações de temperatura da RCF ou, dito em outras palavras, tratamos a compatibilidade dos dados da RCF com uma distribuição gaussiana. Além disso, os limites observacionais mais recentes mostram que a distribuição das flutuações de temperatura da RCF é aproximadamente gaussiana. Contudo, como foi mencionado na Seção 5.2, existe um grande número de modelos inflacionários compatíveis com os limites observacionais (4.50) para o índice

²Esse fato já foi usado no Capítulo 4 quando examinamos o espectro de potências das perturbações escalares e tensoriais da métrica.

³Os primeiros 4 momentos de uma função distribuição de probabilidade são expressos pelas equações (5.32)–(5.35).

espectral n_s — observável diretamente relacionado com o espectro de potências — e a razão r das amplitudes das perturbações tensoriais e escalares. Além disto, examinar só a função de correlação de dois pontos das flutuações na temperatura da RCF, $\langle \frac{\Delta T(\mathbf{n}_1)}{T} \frac{\Delta T(\mathbf{n}_2)}{T} \rangle$, ou equivalentemente o espectro de potências \mathcal{P}_ζ , não é suficiente para eliminar a degenerescência nos modelos inflacionários e se faz necessário o emprego funções espectrais de ordem superior no estudo das propriedades estatísticas das flutuações de temperatura da RCF.

Na prática, estimar as propriedades estatísticas das flutuações de temperatura $\frac{\Delta T}{T}$ correspondentes a perturbações primordiais na curvatura ζ não é simples porque existem vários efeitos que podem gerar flutuações na temperatura da RCF que não têm origem primordial. Conforme discutimos na Seção 5.2, a NG do tipo local tem uma importância particular porque o biespectro de todos os modelos inflacionários com um campo escalar tem um máximo na configuração do tipo local. Além disso, no limite $k_1 = k_2$ e $k_3 \rightarrow 0$ o biespectro é expresso pela equação (5.60) e tem uma amplitude, $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$, menor do que a detectável com a precisão dos instrumentos atuais. Nesse limite, o espectro de potências de flutuações de comprimentos de onda curto $\mathcal{P}_\Phi(k_1)$ está acoplado com o espectro de potências de flutuações com comprimento de onda longo $\mathcal{P}_\Phi(k_3)$. Assim, um mecanismo que acopla flutuações com comprimentos de onda curtos e longos pode gerar um biespectro da forma local e contribuir para a contaminação da NG. Encontram-se na literatura vários efeitos que satisfazem esta condição, os mais importantes são: a emissão de nossa galáxia, os efeitos Sunyaev–Zel’dovich térmico e cinético, o efeito Ostriker–Vishniac, efeitos de reionização cósmica, fontes pontuais, e acoplamento de lenteamento gravitacional com efeito Sachs–Wolfe integrado.⁴ Deve-se notar que a equação (4.39) que relaciona as perturbações da curvatura com as anisotropias da temperatura da RCF é válida só na aproximação linear e efeitos não lineares também podem contribuir para a NG das flutuações da RCF.

Diferentes ferramentas estatísticas podem fornecer informação sobre as diferentes contribuições para NG das flutuações da RCF. Essas ferramentas também podem confirmar os resultados obtidos com o biespectro e algu-

⁴Como é notado na referência [120], o efeito Sachs–Wolfe integrado tem sido identificado como a principal fonte de contaminação para as flutuações da RCF. Algumas referências sobre este e os outros efeitos contaminantes das flutuações da RCF podem ser encontradas nas referências [120], [115], [101] e [1].

mas vezes são mais simples de implementar. Por outro lado, como somente um indicador estatístico dificilmente pode ser sensível a todas as possíveis contribuições para NG da RCF é útil testar o desvio de gaussianidade das flutuações da RCF usando diferentes indicadores para quantificar o nível de NG e extrair informação sobre a sua possível origem. Na próxima seção apresentaremos dois indicadores estatísticos de NG da RCF introduzidos na literatura recentemente [2] e que serão objeto de estudo na Seção 6.4 por duas razões. Por um lado, não são eficazes para detectar NG do tipo local nos limites do WMAP. Por outro lado, a forma como são construídos os indicadores pode induzir correlações nos conjuntos de dados dos mapas da RCF onde são usados. Na Seção 6.4 modificaremos a construção destes indicadores estatísticos e examinaremos estes problemas. Também estimaremos a eficácia para detectar a NG do tipo local dos indicadores modificados.

6.3 Indicadores S e K: método de calotas esféricas

Como se notou anteriormente, a forma mais simples de descrever o desvio de uma distribuição gaussiana em um conjunto de dados é calcular “skewness”

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad (6.1)$$

e “kurtosis”

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3, \quad (6.2)$$

onde σ , μ_3 e μ_4 são, respectivamente, o segundo, o terceiro e o quarto momentos do conjunto de dados. Considerando este fato, na referência [2] foram introduzidos dois indicadores estatísticos para medir o desvio de gaussianidade em grandes escalas angulares ($\ell \sim 10$ ou $\theta \sim 7^\circ$) nos dados das flutuações de temperatura da RCF.

O procedimento para a construção dos indicadores é o seguinte:

1. Para um dado mapa das flutuações da RCF⁵ toma-se um conjunto discreto de pontos $j = 1, \dots, N_c$ homogeneamente distribuídos na esfera celeste S^2 como o centro de calotas esféricas de uma dada abertura γ .
2. Para cada calota calcula-se skewness S_j e kurtosis K_j definidos, respectivamente, por

$$S_j \equiv \frac{1}{N_p \sigma_j^3} \sum_{i=1}^{N_p} (T_i - \bar{T}_j)^3 \quad (6.3)$$

e

$$K_j \equiv \frac{1}{N_p \sigma_j^4} \sum_{i=1}^{N_p} (T_i - \bar{T}_j)^4 - 3, \quad (6.4)$$

onde N_p é o número de pixeis em cada calota, T_i a temperatura do i -pixel, \bar{T}_j a temperatura média da RCF na j -calota e σ_j a variância na j -ésima calota definida como

$$\sigma_j = \frac{1}{N_p - 1} \sum_{i=1}^{N_p} (T_i - \bar{T}_j)^2. \quad (6.5)$$

3. Com o conjunto de valores S_j e K_j de todas as calotas esféricas j se constrói⁶ duas funções discretas $S(\theta, \phi)$ e $K(\theta, \phi)$ definidas sobre a esfera celeste S^2 . Estas funções são uma medida da NG na direção (θ, ϕ) e as projeções Mollweid destas funções são mapas de skewness e kurtosis.⁷ Na figura (6.1) mostramos um exemplo de um mapa S associado a um mapa simulado da RCF (Seção 5.4) não-gaussiano ($f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 500$); figuras similares de mapas K e S se encontram nas referências [2], [121], [122] e [1].

⁵Por exemplo, o mostrado na figura (4.1).

⁶Considera-se $\Omega_j \equiv \Omega(\theta_j, \phi_j; \gamma) \in S^2$ uma calota esférica, com uma abertura de γ graus e centrada no ponto (θ_j, ϕ_j) , sendo $j = 1, \dots, N_c$. Define-se as funções escalares $S : \Omega_j \rightarrow \mathbb{R}$ e $K : \Omega_j \rightarrow \mathbb{R}$ que associam à j -ésima calota, centrada em (θ_j, ϕ_j) , dois números reais S_j e K_j dados pelas equações (6.3) e (6.4), respectivamente.

⁷Em toda esta dissertação estes mapas serão chamados de mapas S e K, respectivamente.

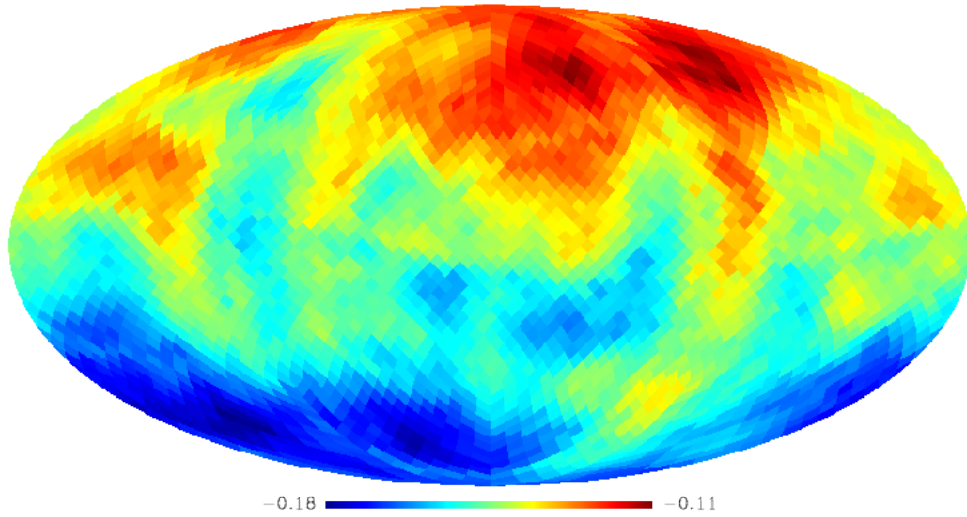


Fig. 6.1: Mapa S construído com um número de calotas $N_c = 3072$ usando um mapa não-gaussiano simulado da RCF ($f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 500$) com $N_{\text{side}} = 512$. Figura da referência [1].

Em [2] e [121] os indicadores S e K foram usados⁸ para testar a NG nos mapas da RCF completos com a contaminação galáctica reduzida do tipo “Internal Linear Combination” (ILC),⁹ “Harmonic Internal Linear Combination” (HILC) e “Needlet Internal Linear Combination” (NILC)¹⁰ e mapas da RCF nas frequências K (22.8 GHz), Ka (33.0 GHz), Q (40.7 GHz), V

⁸Para a construção das funções $S(\theta, \phi)$ e $K(\theta, \phi)$ foram usados os softwares Healpix e IDL. Usou-se um número de pontos homogeneamente distribuídos na esfera $N_c = 768, 3072, \text{ e } 12288$, e uma abertura das calotas $\gamma = 90^\circ$.

⁹Estes mapas minimizam a contaminação devida à emissão galáctica usando uma soma ponderada de 5 mapas de diferentes frequências como se explica em [62]. Esses mapas ILC têm um parâmetro N_{side} (explicação na Subseção 6.4) igual a 256, quer dizer, um número total de pixels igual a 786432. Assim, o número de pixels N_p na j -calota foi de 393216.

¹⁰O mapa HILC reduz a contaminação galáctica da RCF de uma forma similar àquela feita com o mapa ILC mas usando a minimização da variância harmônica para calcular as ponderações das diferentes frequências. O mapa NILC reduz a contaminação galáctica e extragaláctica implementando uma combinação linear restrita dos canais com menor variância e do filtro Wiener, usando "wavelets" esféricos, também chamados de "needlets". Detalhes sobre estes mapas podem ser encontrados em [138] e [139].

(60.8 GHz) e W (93.5 GHz), com e sem a máscara KQ75,¹¹ recomendada pela equipe do WMAP para testes de gaussianidade [140]. Usando a máscara KQ75 não foi encontrado um desvio considerável de uma distribuição gaussiana das flutuações de temperatura nos mapas estudados,¹² enquanto que sem a máscara os indicadores S e K evidenciaram uma NG.

Em [122] e [1] usaram-se os indicadores S e K em mapas simulados da RCF¹³ com uma NG do tipo local, caracterizada pelo parâmetro $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$, para examinar a sensibilidade dos indicadores conforme descrevemos abaixo.

1. As funções $S(\theta, \phi)$ e $K(\theta, \phi)$ podem ser expandidas em harmônicos esféricos como

$$\begin{aligned} K(\theta, \phi) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} b_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \\ S(\theta, \phi) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} b'_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (6.6)$$

com o correspondente espectro de potências angulares

$$\begin{aligned} K_{\ell} &= \frac{1}{2\ell + 1} \sum_m |b_{\ell m}|^2, \\ S_{\ell} &= \frac{1}{2\ell + 1} \sum_m |b'_{\ell m}|^2, \end{aligned} \quad (6.7)$$

que pode ser usado para quantificar a amplitude e a escala angular do desvio de gaussianidade.

¹¹A equipe do WMAP usa máscaras de pixels para excluir porções do céu contaminadas pela emissão galáctica: um valor 0 na máscara significa que o pixel é excluído do mapa da RCF e um valor 1 significa que o pixel é aceito. Descrição desta e outras máscaras se encontram em [62].

¹²Excepto pelos mapas nas frequências K e Ka — frequências nas que a emissão de nossa galáxia é mais intensa — que apresentam desvio de gaussianidade com e sem a máscara KQ75.

¹³Neste caso se usou mapas da RCF com $N_{\text{side}} = 512$. Os indicadores S e K foram construídos usando $N_c = 3072$, $\gamma = 90^\circ$, quer dizer, $N_p = 1.572.864$ pixels por calota.

2. Gerou-se conjuntos de 1000 mapas simulados da RCF caracterizados pelo parâmetro $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$. A partir de cada um desses mapas gerou-se um par de mapas S e K conforme o procedimento explicado anteriormente. Em [1] foram utilizados mapas com $f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 0, -10, 74, 500, 1000$ e 5000.
3. Calculou-se o espectro de potências angulares K_ℓ e S_ℓ , definidos em (6.7), para cada um dos mapas K e S gerados no item anterior.
4. Para cada conjunto de mapas S e K, correspondentes a um dado $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$, calculou-se a média \overline{S}_ℓ e \overline{K}_ℓ para cada componente do espectro de potências angulares. No caso dos mapas S e K correspondentes a mapas da RCF gaussianos ($f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 0$) também se calculou a variância de cada componente de S_ℓ e K_ℓ .
5. Finalmente, para quantificar o desvio coletivo de gaussianidade, para cada conjunto de dados S_ℓ e K_ℓ se calculou o χ^2 relativo ao caso gaussiano.

Na figura (6.2) mostra-se um exemplo do espectro de potências angulares de dois mapas S e K obtidos usando o procedimento acima (figuras similares se encontram na referência [1]). Na referência [1] quantifica-se via χ^2 que os indicadores S e K podem ser usados para detectar NG do tipo local em grandes escalas angulares ($\ell \sim 10$ ou $\theta \sim 7^\circ$) somente para amplitudes relativamente grandes, isto é, $f_{\text{NL}}^{\text{local}} \gtrsim 500$. Em particular, conforme [1] os indicadores não são suficientemente sensíveis nos limites observacionais para $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ determinados no experimento WMAP em (5.63). Este resultado, juntamente com os resultados obtidos em [2] e [121], sugere que a NG capturada pelos indicadores S e K não é apenas de uma origem primordial, embora possa ter uma contribuição deste tipo [1].

6.4 Indicadores S e K: método de células

Os indicadores S e K apresentados na Subseção 6.3 detectam a NG nos mapas da RCF, mas com amplitudes maiores do que as dos limites observacionais do WMAP (5.63), ou seja, para $f_{\text{NL}}^{\text{local}} \gtrsim 500$. Por outro lado, como se observa na figura (6.2), o espectro de potências angulares, S_ℓ e K_ℓ , dos mapas S e K apresenta oscilações. Uma possível causa para essas oscilações em S_ℓ e K_ℓ

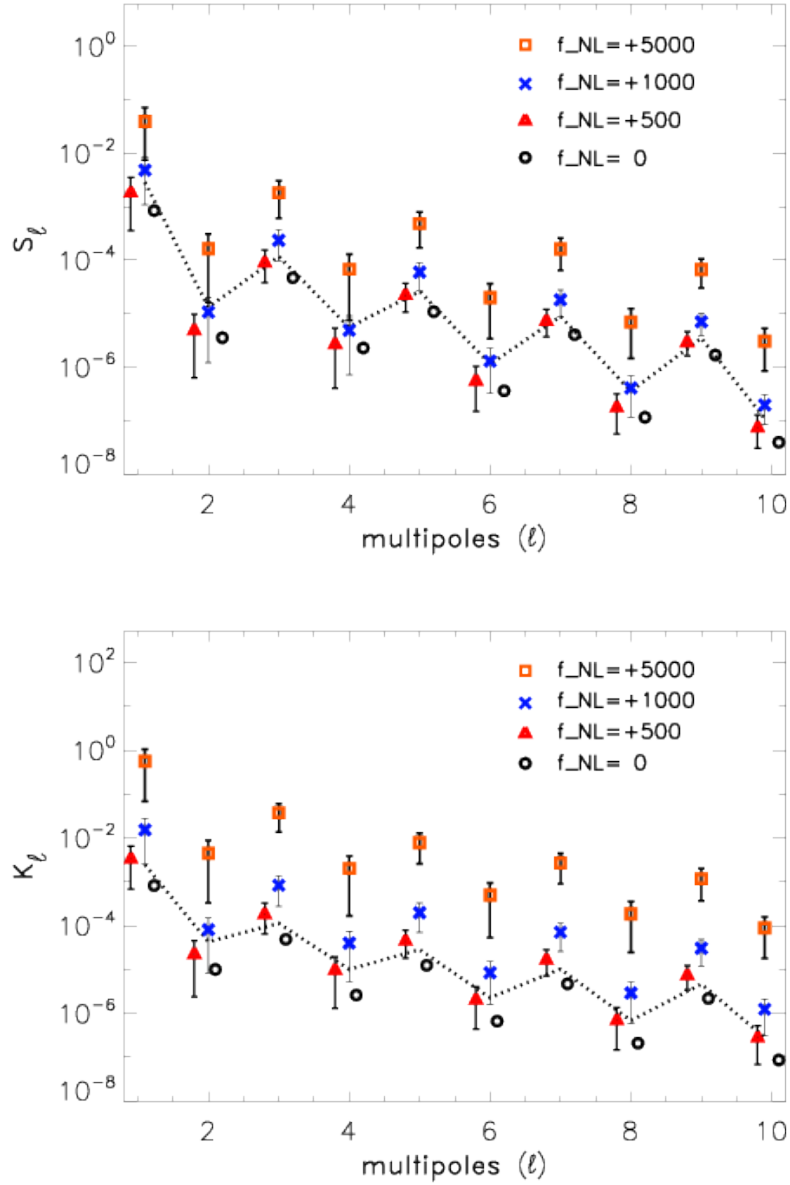


Fig. 6.2: Espectro de potências angulares dos mapas S (acima) e os mapas K (em baixo) $f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 0, 500, 1000, 5000$. Figura da referência [1].

poderia ser a forma como foram construídas as funções discretas $S(\theta, \phi)$ e $K(\theta, \phi)$ a partir dos dados. A superposição das calotas esféricas poderia, em princípio, ocasionar correlações nos dados das flutuações de temperatura da RCF, que por sua vez poderiam induzir as oscilações de S_ℓ e K_ℓ .

Nesta parte da dissertação vamos fazer uma extensão do trabalho [1] em três aspectos. Primeiro examinaremos se definindo as funções $S(\theta, \phi)$ e $K(\theta, \phi)$ com um método distinto do das calotas esféricas que se superpõem, as oscilações no espectro de potências angulares, S_ℓ e K_ℓ , desaparecem. Para isto, usaremos a partição Healpix¹⁴ da esfera a qual divide S^2 em regiões de igual área e sem intersecções.¹⁵ Nesta tese chamaremos de célula a cada uma destas regiões da divisão Healpix da esfera. Também nos referiremos ao método de construção das funções $S(\theta, \phi)$ e $K(\theta, \phi)$ que usa a partição Healpix da esfera como método de células. Na figura (6.3) mostramos quatro exemplos da divisão Healpix da esfera; no extremo superior esquerdo aparecem sombreados exemplos de duas células; e no extremo inferior direito, por exemplo, mostramos duas regiões sombreadas cada uma contendo 16 células. Um segundo aspecto que estudaremos será se os indicadores S e K, construídos com o método de células, são sensíveis para mapas simulados com $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ nos limites do $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ do WMAP. O terceiro aspecto será estimar para que amplitudes $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ os indicadores S e K com este novo método são sensíveis. Em particular, examinaremos se os indicadores S e K modificados podem capturar NG do tipo local na RCF com $f_{\text{NL}}^{\text{local}} \lesssim 500$.

O procedimento modificado para a construção dos indicadores S e K na nova versão é o seguinte:

1. Para um mapa da RCF com um dado N_{side} ¹⁶ fazemos uma partição Healpix da esfera.
2. Dividimos cada uma das 12 células em que é dividida inicialmente a esfera na partição Healpix em N'_{side} novas células (ver figura (6.3)). Assim, obtemos um total de $N'_p = 12 \times N'_{\text{side}}$ células em toda a esfera.

¹⁴Detalhes sobre o software HEALpix se encontram na referência [141] ou em <http://healpix.jpl.nasa.gov>.

¹⁵O fato de as funções $S(\theta, \phi)$ e $K(\theta, \phi)$ serem definidas em subconjuntos de dados sem intersecções é a principal diferença do outro método com calotas esféricas.

¹⁶Na partição Healpix da esfera, cada célula pode ser preenchida com pixels como mostra a figura (6.3). Denotaremos por N_{side} o número de pixels sobre a linha que une dois vértices opostos de uma célula.

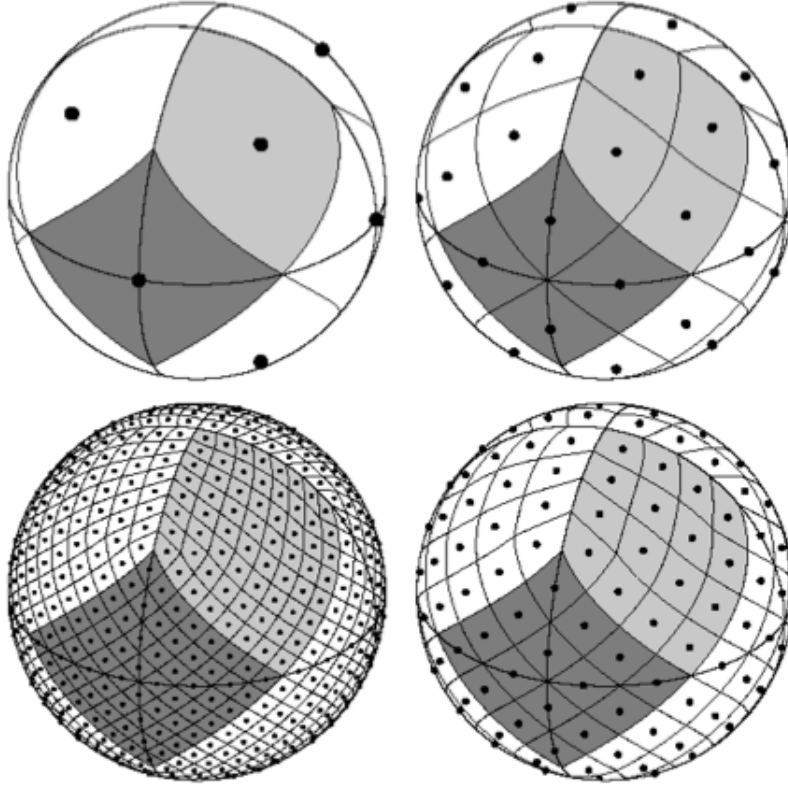


Fig. 6.3: Na partição Healpix a esfera é dividida inicialmente em 12 células; no extremo superior esquerdo aparecem sombreadas duas dessas células. O número total de pixeis que pode preencher a esfera é expresso por $N_{\text{pix}} = 12 \times N_{\text{side}}^2$ onde N_{side} é o número de pixeis sobre a linha que une dois vértices opostos de uma das 12 células iniciais; na figura se observa $N_{\text{side}} = 1, 2, 4, 8$, mas em geral se tem $N_{\text{side}} = 2^n$ com $n = 0, 1, 2, \dots$. Figura da referência [141].

3. Para definir $S(\theta, \phi)$ e $K(\theta, \phi)$ sobre a esfera, em cada uma das N'_p células calculamos “skewness” e “kurtosis” usando as equações (6.3) e (6.4) com N_p e σ_j sendo, respectivamente, o número de pixeis e a variância em cada célula.¹⁷

¹⁷Como usaremos mapas da RCF com $N_{\text{side}} = 512$, em cada uma das 12 células em que inicialmente se divide a esfera na partição Healpix há 262144 pixeis ou medições de temperatura da RCF. Portanto, cada uma das N'_{side} células, em que se subdivide uma

4. A união dos valores de S_j e K_j ($j = 1, 2, \dots, N'_p$) em cada uma das N'_p células define funções discretas $S(\theta, \phi)$ e $K(\theta, \phi)$ sobre a esfera que podem ser expandidas em harmônicos esféricos como em (6.6) e com espectro de potências angulares expresso por (6.7). A projeção Mollweid das funções $S(\theta, \phi)$ e $K(\theta, \phi)$ constitui mapas S e K. As figuras (6.4) e (6.5) são exemplos para $N'_{\text{side}} = 2$ (48 células) e $N'_{\text{side}} = 4$ (192 células), respectivamente.

Para examinar a sensibilidade dos indicadores S e K nesta nova abordagem realizaremos uma análise similar à feita em [1] e explicada na Seção 6.3. Neste caso usaremos conjuntos de 1000 mapas simulados da RCF com NG do tipo local (Seção 5.4) para vários valores do parâmetro $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$, a saber: $f_{\text{NL}}^{\text{local}} = -10, 0, 11, 53, 74, 100, 200, 400, 500, 1000, 3000$, e 5000. Calculamos o espectro de potências angulares, S_ℓ e K_ℓ , para cada um dos mapas S e K associados com cada um dos mapas não gaussianos ($f_{\text{NL}}^{\text{local}} \neq 0$) da RCF simulados. Comparando estes espectros de potências angulares com os correspondentes espectros de potências dos mapas S e K associados com os mapas gaussianos ($f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 0$) da RCF simulados podemos estimar a significância estatística do desvio de gaussianidade dos mapas não gaussianos da RCF simulados. O procedimento da análise feita¹⁸ é:

1. Gera-se conjuntos de 1000 mapas da RCF simulados, conforme a Seção 5.4, para os diferentes valores do parâmetro $f_{\text{NL}}^{\text{local}} = -10, 0, 11, 53, 74, 100, 200, 400, 500, 1000, 3000$, e 5000.
2. Para cada conjunto de 1000 mapas simulados da RCF para um dado $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$, geramos 1000 mapas S e 1000 mapas K usando o método de células.
3. Calculamos o espectro de potências angulares S_ℓ e K_ℓ para cada um dos 1000 mapas S e 1000 mapas K usando a equação (6.7).
4. Para cada componente de S_ℓ e K_ℓ calculamos o valor médio $\overline{K_\ell}$ e $\overline{S_\ell}$. No caso dos mapas S e K associados com os mapas gaussianos simulados da RCF com $f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 0$ também calculamos a variância de cada componente S_ℓ e K_ℓ .

célula inicial, tem $\frac{262144}{N'_{\text{side}}}$ pixels em que são dados valores das flutuações de temperatura da RCF.

¹⁸Cada um dos seguintes passos foi feito usando os softwares Healpix e IDL.

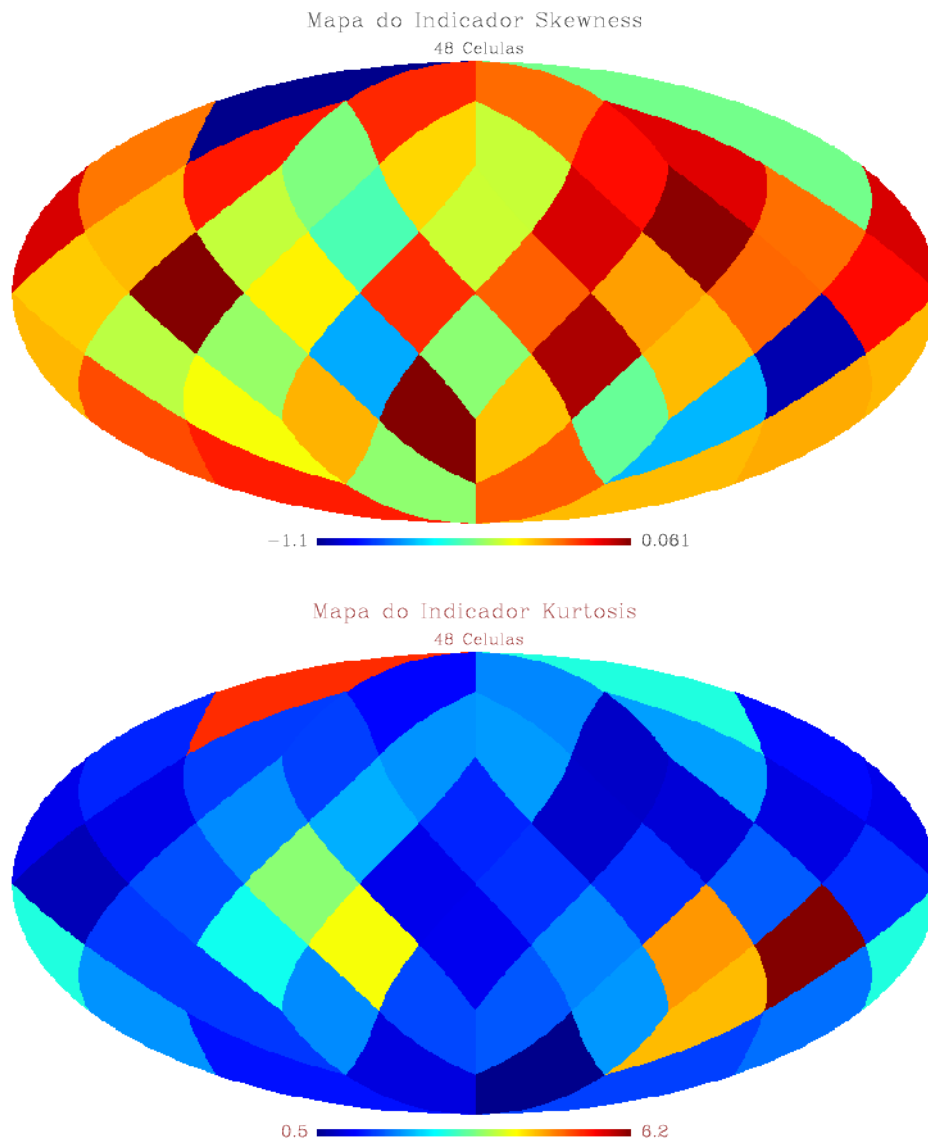


Fig. 6.4: Mapa S (acima) e K (abaixo) construídos usando o método de células com $N_{\text{side}}^l = 2$ (48 células). Cada divisão colorida nos mapas é uma célula.

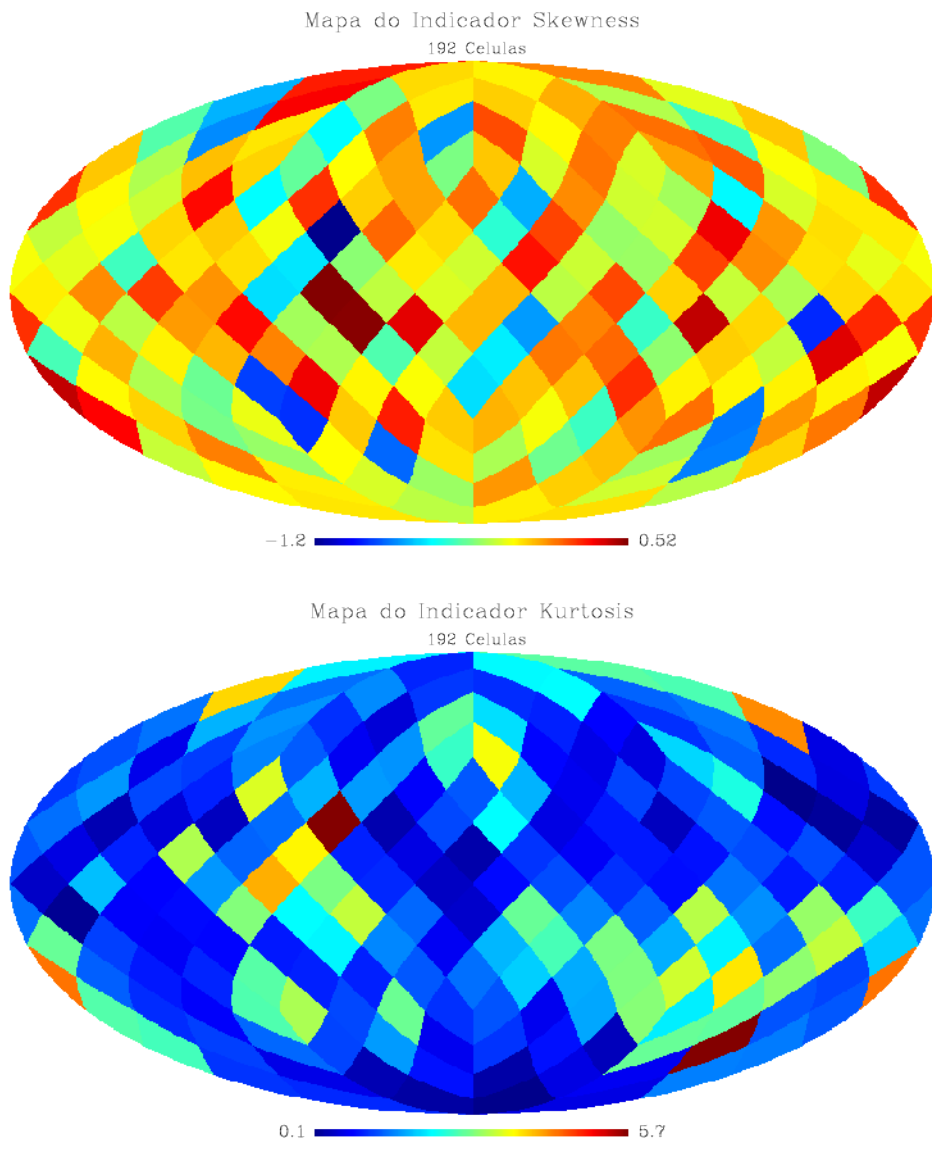


Fig. 6.5: Mapa S (acima) e K (abaixo) construídos usando o método de células com $N_{\text{side}}^T = 4$ (192 células). Cada divisão colorida nos mapas é uma célula.

5. Finalmente calculamos χ^2 para cada um dos conjuntos de mapas S e K gerados a partir dos mapas da RCF simulados de um dado $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ usando

$$\chi_{S_\ell}^2 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^4 \frac{(\overline{S_j^{\text{NG}}} - \overline{S_j^{\text{G}}})^2}{\sigma_j^{\text{G}^2}}, \quad (6.8)$$

$$\chi_{K_\ell}^2 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^4 \frac{(\overline{K_j^{\text{NG}}} - \overline{K_j^{\text{G}}})^2}{\sigma_j^{\text{G}^2}}, \quad (6.9)$$

onde G e NG denotam gaussiano ($f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 0$) e não-gaussiano, respectivamente.

Nas figuras (6.6) e (6.7) mostramos o espectro de potências S_ℓ e K_ℓ das funções $S(\theta, \phi)$ e $K(\theta, \phi)$ definidas usando o método de células para $N'_{\text{side}} = 2$, ou seja, 48 células.¹⁹ Essas figuras deixam claro que o espectro de potências angulares, S_ℓ e K_ℓ , não apresenta as oscilações que se observam na figura (6.2) obtida com o método de calotas esféricas. Isto parece indicar que as oscilações são induzidas pelas superposições dos conjuntos de dados que definem as funções $S(\theta, \phi)$ e $K(\theta, \phi)$ no método de calotas esféricas. As figuras (6.6) e (6.7) também colocam em evidência qualitativamente o afastamento de gaussianidade nos mapas simulados da RCF usados para gerar os mapas S e K. Vê-se da figura (6.6) que o afastamento é menos notório para mapas simulados da RCF com $f_{\text{NL}}^{\text{local}} \lesssim 100$. Isto parece indicar que os indicadores S e K construídos com o método de células tampouco são sensíveis para detectar a NG do tipo local com amplitude nos limites do WMAP.

Para examinar a eficácia na detecção de NG dos indicadores S e K definidos com o método de células calculamos $\chi_{S_\ell}^2$ e $\chi_{K_\ell}^2$ relativos ao caso gaussiano.²⁰

¹⁹Figuras similares foram obtidas usando $N'_{\text{side}} = 4$, mas para evitar repetição só apresentamos os resultados com $N'_{\text{side}} = 2$.

²⁰Por exemplo, no caso dos mapas S temos dois conjuntos de dados. Um conjunto contém os valores médios das componentes do espectro de potências angulares $\overline{S_\ell^{\text{G}}}$ correspondentes a mapas S gerados a partir de mapas de RCF gaussianos. Um outro conjunto contém os valores médios das componentes do espectro de potências angulares $\overline{S_\ell^{\text{NG}}}$ correspondentes a mapas S gerados a partir de mapas não-gaussianos da RCF. O χ^2 quantifica a probabilidade, $P \propto \exp(-\chi^2)$, de que os dois conjuntos $\overline{S_\ell^{\text{G}}}$ e $\overline{S_\ell^{\text{NG}}}$ coincidam. Assim, valores de $\chi^2 \ll 1$ — para mapas S gerados a partir de mapas de RCF de um dado $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ —

Na tabela (6.1) mostramos os resultados do χ^2 obtidos definindo S e K com 48 e 192 células e para $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ nos limites do WMAP. A tabela exhibe valores de $\chi^2 \ll 1$ em todos os casos, ou seja, os indicadores S e K construídos com o método de células tampouco são eficazes para detectar a NG do tipo local com amplitude $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ nos limites do WMAP.

Na tabela (6.2) comparamos os resultados do χ^2 obtidos usando o método de células (48 células) e o método de calotas esféricas (3072 calotas) nos limites do WMAP.²¹ Os resultados evidenciam um χ^2 maior em todos os casos para o método de células, isto é, uma menor probabilidade de que os conjuntos de, por exemplo, $\overline{S}_\ell^{\text{G}}$ e $\overline{S}_\ell^{\text{NG}}$, coincidam. Em outras palavras, a análise comparativa evidencia que o método de células define indicadores S e K mais sensíveis para detectar NG nos limites do WMAP que o método de calotas.

Por outro lado, a tabela (6.3) tem resultados do χ^2 para diferentes $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ e diferente número de células usado para definir S e K. Esta tabela deixa claro que a sensibilidade para a detecção de NG do tipo local é maior para indicadores S e K definidos com 48 células, porque o χ^2 é maior aproximadamente três ordens de magnitude em todos os casos que no caso com 192 células.²² Quando $\chi^2 \approx 1$, considera-se que os indicadores S e K são sensíveis para detectar a NG do tipo local. Nota-se da tabela (6.3) que esta condição é satisfeita pelos indicadores S e K construídos com 48 células para $f_{\text{NL}}^{\text{local}} \gtrsim 500$, enquanto que para 192 células temos $f_{\text{NL}}^{\text{local}} \gtrsim 3000$. Assim, indicadores S e K construídos com o método de células apresentam uma sensibilidade para detectar NG do tipo local maior quanto menor for o número de células empregado.

indicam que há uma probabilidade $P \rightarrow 1$ de que os dois conjuntos coincidam, em outras palavras, os indicadores S e K não capturam a NG para esse valor de $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$. Obviamente, uma análise similar também se faz para os mapas K.

²¹Os resultados apresentados na tabela (6.2) correspondentes ao método das calotas esféricas foram obtidos a partir de dados disponibilizados pelos autores de [1]. Assim, os χ^2 reportados aqui diferem daqueles em [1].

²²Uma consequência de construir funções $S(\theta, \phi)$ e $K(\theta, \phi)$ com um número de células menor é que os mapas correspondentes a estas funções têm uma resolução menor. Portanto, o espectro de potências, S_ℓ e K_ℓ , tem menos componentes que possam ser usadas na análise do χ^2 , ou seja, um menor número de células implica que o estudo da significância estatística se faz com menos pontos: 192 células permite ir até $\ell = 10$, mas 48 células só até $\ell = 4$.

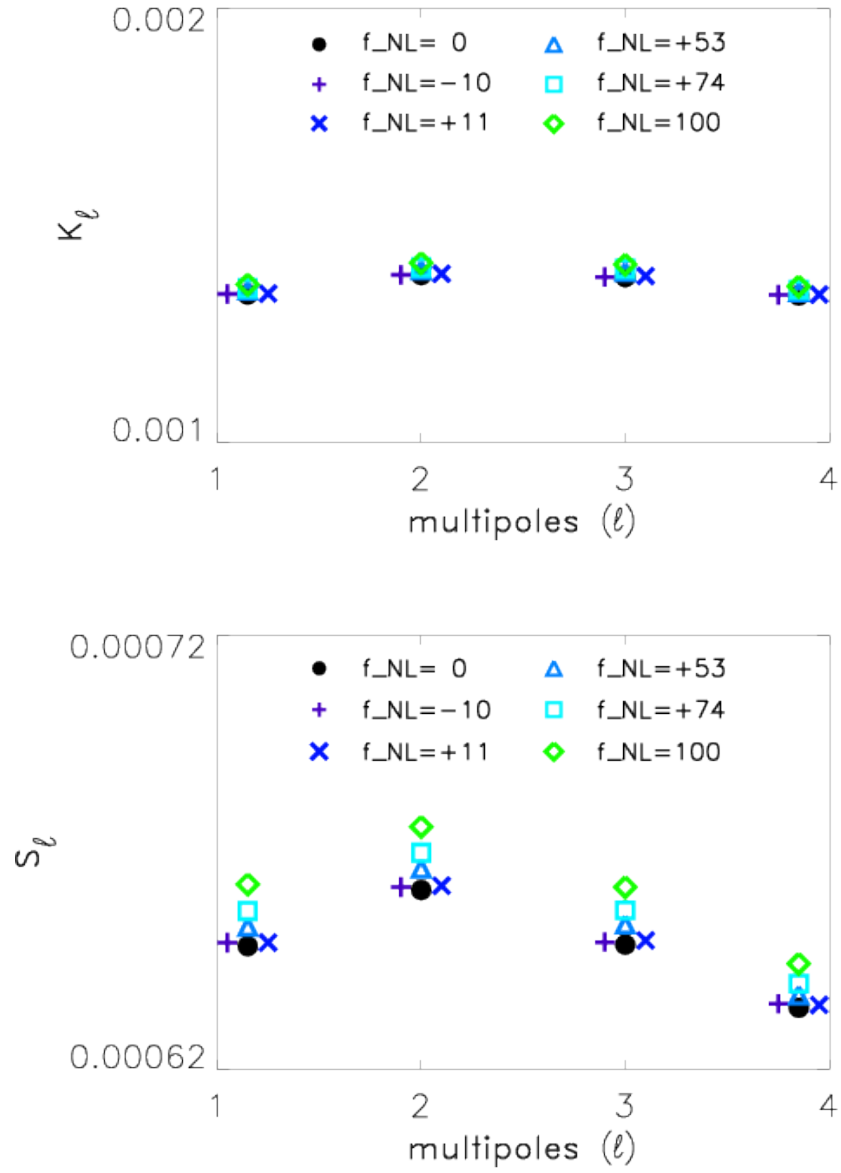


Fig. 6.6: Espectro de potências angulares dos mapas K (acima) e S (abaixo) com $N'_{\text{side}} = 2$ (48 células), e $f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 0, -10, 11, 53, 74$ e 100 .

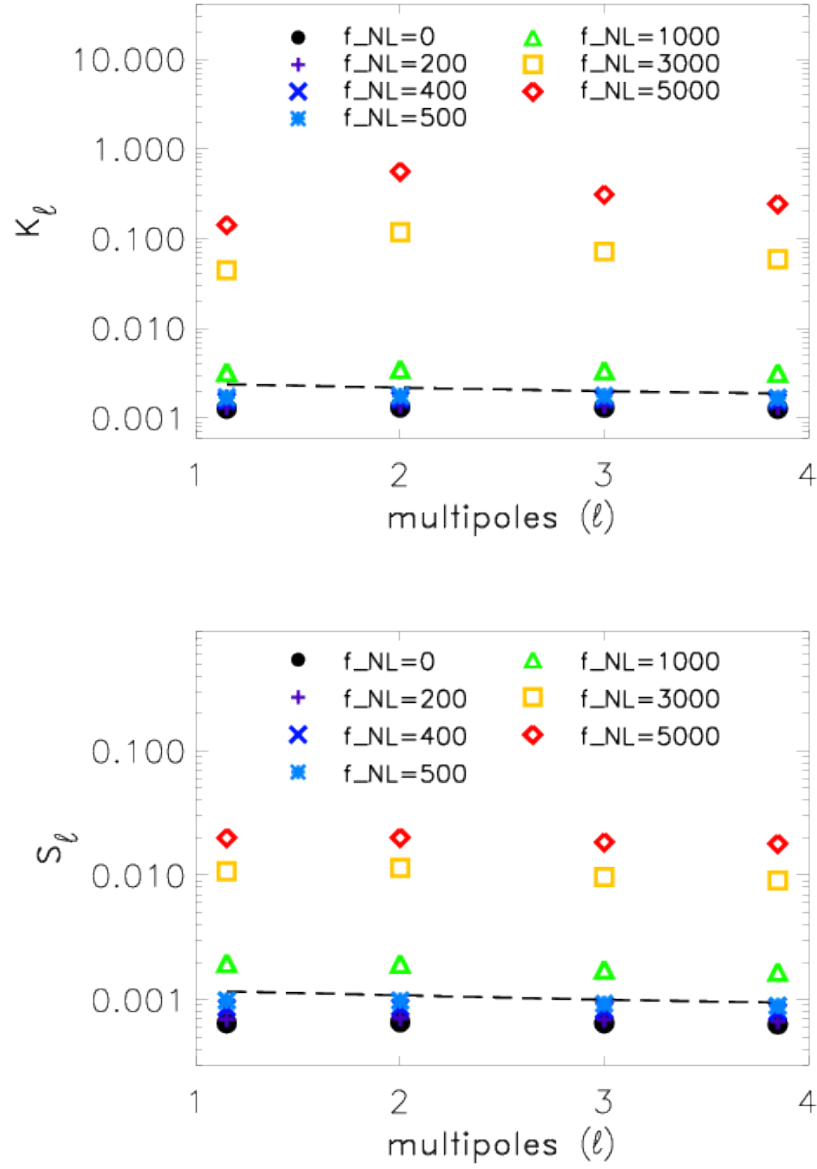


Fig. 6.7: Espectro de potências angulares dos mapas K (acima) e S (abaixo) com $N'_{\text{side}} = 2$ (48 células), e $f_{\text{NL}}^{\text{local}} = 0, 200, 400, 500, 1000, 3000, 5000$.

$f_{\text{NL}}^{\text{local}}$	48 células		192 células	
	$\chi_{S_\ell}^2$	$\chi_{K_\ell}^2$	$\chi_{S_\ell}^2$	$\chi_{K_\ell}^2$
-10	2.76×10^{-7}	8.37×10^{-7}	9.16×10^{-11}	1.26×10^{-10}
74	3.89×10^{-4}	4.16×10^{-4}	1.73×10^{-7}	2.17×10^{-7}

Tab. 6.1: Significância estatística do espectro de potências angulares dos mapas S e K com $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ nos limites do WMAP. Mapas S e K construídos com o método de células.

$f_{\text{NL}}^{\text{local}}$	48 células		3072 Calotas	
	$\chi_{S_\ell}^2$	$\chi_{K_\ell}^2$	$\chi_{S_\ell}^2$	$\chi_{K_\ell}^2$
-10	2.76×10^{-7}	8.37×10^{-7}	1.38×10^{-8}	3.45×10^{-9}
74	3.89×10^{-4}	4.16×10^{-4}	3.02×10^{-7}	1.5×10^{-6}

Tab. 6.2: Significância estatística do espectro de potências angulares dos mapas S e K com $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ nos limites do WMAP. Mapas construídos com o método de células e o método de calotas esféricas.

$f_{\text{NL}}^{\text{local}}$	48 células		192 células	
	$\chi_{S_\ell}^2$	$\chi_{K_\ell}^2$	$\chi_{S_\ell}^2$	$\chi_{K_\ell}^2$
100	1.27×10^{-3}	1.12×10^{-3}	5.68×10^{-7}	6.49×10^{-7}
500	7.66×10^{-1}	4.43×10^{-1}	3.52×10^{-4}	4.16×10^{-4}
1000	1.22×10	9.7	5.93×10^{-3}	2.43×10^{-2}
3000	8×10^2	1.31×10^4	2.83×10^{-1}	9.65×10
5000	3.02×10^3	2.67×10^5	1.04	1.23×10^2

Tab. 6.3: Significância estatística do espectro de potências angulares dos mapas S e K construídos com método de células e diferentes $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$.

6.5 Conclusões

Através do estudo das propriedades estatísticas dos dados de levantamentos de galáxias e de flutuações de temperatura da RCF pode-se testar os modelos do universo primordial. Embora haja vários modelos inflacionários que são descartados pelas restrições observacionais para o índice espectral n_s e para a razão r da amplitude das perturbações tensoriais e escalares, ainda há muitos modelos do universo primordial que satisfazem os limites observacionais sobre n_s e r .

Essa degenerescência de modelos do universo primordial pode vir a ser resolvida examinando funções espectrais com informações estatísticas adicionais ao espectro de potências do campo de flutuações de temperatura da RCF, ou seja, através do estudo do desvio de gaussianidade das anisotropias da RCF. Como as medições da RCF contêm contribuições para NG que não têm uma origem primordial, é importante usar diferentes estimadores estatísticos que podem fornecer informações sobre esses contaminantes.

Dois indicadores estatísticos para medir NG da RCF em grandes escalas angulares foram introduzidos recentemente na literatura [2]. Na referência [1] esses indicadores foram usados em mapas não-gaussianos simulados da RCF com NG do tipo local. Usando o método de calotas esféricas, a partir de um mapa da RCF são gerados mapas de “skewness” e “kurtosis”, S e K, respectivamente. Foi determinado, via análise χ^2 relativo ao caso gaussiano, que os indicadores são sensíveis para detectar a NG do tipo local com amplitude $f_{\text{NL}}^{\text{local}} \gtrsim 500$, ou seja, os indicadores não são efetivos para detecção de NG do tipo local nos limites do WMAP. Por outro lado, o espectro de potências angulares, S_ℓ e K_ℓ , dos mapas S e K, apresenta oscilações possivelmente induzidas pelas intersecções nos dados da RCF que definem as funções $S(\theta, \phi)$ e $K(\theta, \phi)$. Nesta dissertação fizemos uma extensão do trabalho [1] em três aspectos usando 12000 mapas simulados da RCF com NG do tipo local.

Primeiro, examinamos se usando o método de células (48 e 192 células) para construir uma abordagem modificada das funções $S(\theta, \phi)$ e $K(\theta, \phi)$, as oscilações em S_ℓ e K_ℓ desaparecem. As figuras (6.6) e (6.7) deixam claro que o espectro de potências angulares, S_ℓ e K_ℓ , obtido com o método de células não apresenta tais oscilações que ocorrem no uso do método de calotas esféricas. Isto parece indicar que as oscilações são induzidas pelas superposições dos conjuntos de dados que definem as funções $S(\theta, \phi)$ e $K(\theta, \phi)$ no método de calotas esféricas.

Em segundo lugar, examinamos se os indicadores S e K modificados são sensíveis a NG do tipo local nos limites do WMAP usando $\chi_{S_\ell}^2$ e $\chi_{K_\ell}^2$ relativo ao caso gaussiano. A tabela (6.1) exhibe valores de $\chi^2 \ll 1$ para $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ nos limites do WMAP. Isto mostra que os indicadores S e K construídos com o método de células tampouco são efetivos na detecção de NG do tipo local com amplitude $-10 < f_{\text{NL}}^{\text{local}} < 74$. Por outro lado, a análise comparativa (ver tabela (6.2)) evidencia um χ^2 maior para o método de células (48 células) do que para o método de calotas esféricas (3072 calotas), isto é, o método de

células define indicadores S e K mais sensíveis para detectar NG nos limites do WMAP que o método de calotas esféricas.

Em terceiro lugar, determinamos a sensibilidade para a detecção de NG do tipo local dos indicadores S e K modificados usando χ^2 relativo ao caso gaussiano para diferentes $f_{\text{NL}}^{\text{local}}$ e diferente número de células. A tabela (6.3) deixa claro que a sensibilidade para a detecção de NG do tipo local é maior para indicadores S e K definidos com 48 células porque χ^2 é maior aproximadamente três ordens de magnitude em todos os casos que no caso com 192 células. Por outro lado, esta tabela também mostra que os indicadores S e K construídos com 48 células são efetivos ($\chi^2 \approx 1$) para detecção de NG do tipo local $f_{\text{NL}}^{\text{local}} \gtrsim 500$, enquanto que para 192 células tais indicadores são efetivos apenas para $f_{\text{NL}}^{\text{local}} \gtrsim 3000$. Portanto, indicadores S e K construídos com o método de células têm uma sensibilidade para detectar NG do tipo local maior quanto menor for o número de células empregado.

Apêndices

Apêndice A

Perturbações das equações de Einstein

Foi discutido na Seção 3.3 que um modelo homogêneo do universo não é suficiente para descrever toda a complexidade da modelagem do universo. Particularmente, tratou-se a não-homogeneidade na distribuição de energia no universo. O procedimento padrão é considerar que as grandezas físicas podem ser expressas como soma de uma grandeza que corresponde a um cenário isotrópico e homogêneo com uma perturbação que depende do espaço e das coordenadas espaciais. As pequenas inhomogeneidades na distribuição de massa podem ser descritas através de perturbações da métrica do espaço-tempo, tópico que tratamos na Subseção 3.3.2. O tensor de Einstein, definido em (1.23), depende da métrica e suas derivadas e, portanto, perturbações da métrica geram perturbações no tensor de Einstein como discutiremos no que se segue.

As conexões definidas em (1.18) dependem da métrica e as suas derivadas. Assim, uma perturbação na métrica¹ $\delta^{(1)}g_{\alpha\rho}$ gera perturbações $\delta^{(1)}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ nas conexões. Perturbando a equação (1.18) em primeira ordem temos

¹Uma definição de uma perturbação em uma grandeza tensorial genérica está na Subseção 3.3.1.

$$\begin{aligned}\delta^{(1)}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} &= \frac{1}{2}\delta^{(1)}g^{\alpha\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\rho}}\right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}\left(\frac{\partial\delta^{(1)}g_{\rho\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial\delta^{(1)}g_{\beta\rho}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\delta^{(1)}g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\rho}}\right).\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

Por outro lado, o tensor de Ricci definido em (1.20) depende das conexões (1.18) e as suas derivadas. Da sua definição, a perturbação do tensor de Ricci é

$$\begin{aligned}\delta^{(1)}R_{\mu\nu} &= \partial_{\alpha}\delta^{(1)}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\mu}\delta^{(1)}\Gamma_{\nu\alpha}^{\alpha} + \delta^{(1)}\Gamma_{\sigma\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\sigma\alpha}^{\alpha}\delta^{(1)}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \\ &- \delta^{(1)}\Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\delta^{(1)}\Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma}.\end{aligned}\quad (\text{A.2})$$

Para o escalar de Ricci, definido em (1.21), a perturbação se escreve

$$\delta^{(1)}R = \delta^{(1)}g^{\mu\alpha}R_{\alpha\mu} + g^{\mu\alpha}\delta^{(1)}R_{\alpha\mu}.\quad (\text{A.3})$$

Finalmente, com as equações (A.2) e (A.3), podemos escrever a perturbação no tensor de Einstein (1.23) como

$$\delta^{(1)}G_{\mu\nu} = \delta^{(1)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta^{(1)}g_{\mu\nu}R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta^{(1)}R.\quad (\text{A.4})$$

Nas próximas seções reproduzimos da referência [101] as perturbações das conexões, do tensor de Ricci, do escalar de Ricci e do tensor de Einstein para a métrica FLRW plana perturbada em primeira ordem (3.82)².

A.1 Perturbação das conexões

As conexões para a métrica (1.52) ($K = 0$) são expressas por

²Expressões similares em segunda ordem se encontram na referência [101].

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= \frac{a'}{a}; & \Gamma_{0j}^i &= \frac{a'}{a} \delta^i_j; & \Gamma_{ij}^0 &= \frac{a'}{a} \delta_{ij}; \\ \Gamma_{00}^i &= \Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{jk}^i = 0.\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

onde a é o fator de escala e “'” denota a derivada com respeito ao tempo conforme τ definido em (1.53). As perturbações das conexões (A.1) com a métrica (3.82), em primeira ordem são

$$\delta^{(1)}\Gamma_{00}^0 = \phi^{(1)'}, \quad (\text{A.6})$$

$$\delta^{(1)}\Gamma_{0i}^0 = \partial_i \phi^{(1)} + \frac{a'}{a} \partial_i \omega^{(1)}, \quad (\text{A.7})$$

$$\delta^{(1)}\Gamma_{00}^i = \frac{a'}{a} \partial^i \omega^{(1)} + \partial^i \omega^{(1)'} + \partial^i \phi^{(1)}, \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned}\delta^{(1)}\Gamma_{ij}^0 &= -2 \frac{a'}{a} \phi^{(1)} \delta_{ij} - \partial_i \partial_j \omega^{(1)} - 2 \frac{a'}{a} \psi^{(1)} \delta_{ij} - \psi^{(1)'} \delta_{ij} \\ &- \frac{a'}{a} D_{ij} \chi^{(1)} + \frac{1}{2} D_{ij} \chi^{(1)'},\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

$$\delta^{(1)}\Gamma_{0j}^i = -\psi^{(1)'} \delta_j^i + \frac{1}{2} D_j^i \chi^{(1)'}, \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned}\delta^{(1)}\Gamma_{jk}^i &= -\partial_j \psi^{(1)} \delta_k^i - \partial_k \psi^{(1)} \delta_j^i + \partial^i \psi^{(1)} \delta_{jk} - \frac{a'}{a} \partial^i \omega^{(1)} \delta_{jk} \\ &+ \frac{1}{2} \partial_j D_k^i \chi^{(1)} + \frac{1}{2} \partial_k D_j^i \chi^{(1)} - \frac{1}{2} \partial^i D_{jk} \chi^{(1)}.\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

A.2 Perturbações do tensor de Ricci

As componentes do tensor de Ricci, definido em (1.20), para a métrica (1.52) ($K = 0$) são

$$R_{00} = -3 \frac{a''}{a} + 3 \left(\frac{a'}{a} \right)^2; \quad R_{0i} = 0; \quad (\text{A.12})$$

$$R_{ij} = \left[\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right] \delta_{ij}. \quad (\text{A.13})$$

Das equações (A.2), (A.5) e (A.6)–(A.11), as perturbações do tensor de Ricci são

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} R_{00} &= \frac{a'}{a} \partial_i \partial^i \omega^{(1)} + \partial_i \partial^i \omega^{(1)'} + \partial_i \partial^i \phi^{(1)} + 3\psi^{(1)''} + 3\frac{a'}{a} \psi^{(1)'} \\ &+ 3\frac{a'}{a} \phi^{(1)'}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} R_{0i} &= \frac{a''}{a} \partial_i \omega^{(1)} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \partial_i \omega^{(1)} + 2\partial_i \psi^{(1)'} + 2\frac{a'}{a} \partial_i \phi^{(1)} \\ &+ \frac{1}{2} \partial_k D^k \chi^{(1)'}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} R_{ij} &= \left[-\frac{a'}{a} \phi^{(1)'} - 5\frac{a'}{a} \psi^{(1)'} - 2\frac{a''}{a} \phi^{(1)} - 2\left(\frac{a'}{a} \right)^2 \phi^{(1)} - 2\frac{a''}{a} \psi^{(1)} \right. \\ &- \left. 2\left(\frac{a'}{a} \right)^2 \psi^{(1)} - \psi^{(1)''} + \partial_k \partial^k \psi^{(1)} - \frac{a'}{a} \partial_k \partial^k \omega^{(1)} \right] \delta_{ij} - \partial_i \partial_j \omega^{(1)'} \\ &+ \frac{a'}{a} D_{ij} \chi^{(1)'} + \frac{a''}{a} D_{ij} \chi^{(1)} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 D_{ij} \chi^{(1)} + \frac{1}{2} D_{ij} \chi^{(1)''} + \partial_i \partial_j \psi^{(1)} \\ &- \partial_i \partial_j \phi^{(1)} - 2\frac{a'}{a} \partial_i \partial_j \omega^{(1)} + \frac{1}{2} \partial_k \partial_i D^k \chi^{(1)} + \frac{1}{2} \partial_k \partial_j D^k \chi^{(1)} \\ &- \frac{1}{2} \partial_k \partial^k D_{ij} \chi^{(1)}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

A.3 Perturbações do escalar de Ricci

Com a métrica (1.52) ($K = 0$), o escalar de Ricci (1.21) é

$$R = \frac{6}{a^2} \frac{a''}{a}. \quad (\text{A.17})$$

Das equações (A.3), (3.82) e (A.14)–(A.16), a perturbação em primeira ordem do escalar de Ricci é

$$\begin{aligned}\delta^{(1)}R &= \frac{1}{a^2} \left(-6\frac{a'}{a}\partial_i\partial^i\omega^{(1)} - 2\partial_i\partial^i\omega^{(1)'} - 2\partial_i\partial^i\phi^{(1)} - 6\psi^{(1)''} \right. \\ &\quad - 6\frac{a'}{a}\phi^{(1)'} - 18\frac{a'}{a}\psi^{(1)'} - 12\frac{a''}{a}\phi^{(1)} + 4\partial_i\partial^i\psi^{(1)} \\ &\quad \left. + \partial_k\partial^i D^k{}_i\chi^{(1)} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

A.4 Perturbações do tensor de Einstein

As componentes do tensor de Einstein, para a métrica (1.52) ($K = 0$), são

$$G^0{}_0 = -\frac{3}{a^2} \left(\frac{a'}{a} \right)^2, \quad (\text{A.19})$$

$$G^i{}_j = -\frac{1}{a^2} \left(2\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right) \delta^i{}_j, \quad (\text{A.20})$$

$$G^0{}_i = G^i{}_0 = 0. \quad (\text{A.21})$$

Usando (A.14)–(A.16), (A.17), (3.82), (A.18), na equação (A.4), obtém-se que as perturbações do tensor de Einstein em primeira ordem são

$$\begin{aligned}\delta^{(1)}G^0{}_0 &= \frac{1}{a^2} \left[6 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \phi^{(1)} + 6\frac{a'}{a}\psi^{(1)'} + 2\frac{a'}{a}\nabla^2\omega^{(1)} - 2\nabla^2\psi^{(1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\partial_k\partial^i D^k{}_i\chi^{(1)} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$\delta^{(1)}G^0_i = \frac{1}{a^2} \left(-2 \frac{a'}{a} \partial_i \phi^{(1)} - 2 \partial_i \psi^{(1)'} - \frac{1}{2} \partial_k D^k_i \chi^{(1)'} \right), \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}G^i_j &= \frac{1}{a^2} \left[\left(2 \frac{a'}{a} \phi^{(1)'} + 4 \frac{a''}{a} \phi^{(1)} - 2 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \phi^{(1)} + \nabla^2 \phi^{(1)} + 4 \frac{a'}{a} \psi^{(1)'} \right. \right. \\ &+ \left. 2 \psi^{(1)''} - \nabla^2 \psi^{(1)} + 2 \frac{a'}{a} \nabla^2 \omega^{(1)} + \nabla^2 \omega^{(1)'} + \frac{1}{2} \partial_k \partial^m D^k_m \chi^{(1)} \right) \delta^i_j \\ &- \partial^i \partial_j \phi^{(1)} + \partial^i \partial_j \psi^{(1)} - 2 \frac{a'}{a} \partial^i \partial_j \omega^{(1)} - \partial^i \partial_j \omega^{(1)'} \\ &+ \frac{a'}{a} D^i_j \chi^{(1)'} + \frac{1}{2} D^i_j \chi^{(1)''} + \frac{1}{2} \partial_k \partial^i D^k_j \chi^{(1)} + \frac{1}{2} \partial_k \partial_j D^{ik} \chi^{(1)} \\ &\left. - \frac{1}{2} \partial_k \partial^k D^i_j \chi^{(1)} \right]. \quad (\text{A.24}) \end{aligned}$$

Apêndice B

Equação de movimento e tensor energia–momentum do inflaton

B.1 Equação de movimento

No Capítulo 2 apresentamos o modelo inflacionário mais simples, a saber, um campo escalar homogêneo $\varphi = \varphi(t)$ com acoplamento mínimo com a curvatura. A ação para o campo escalar é

$$S_\varphi = - \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + V(\varphi) \right) = \int d^4x L_\varphi(\varphi, \partial_\mu\varphi), \quad (\text{B.1})$$

onde

$$L_\varphi = -\sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + V(\varphi) \right), \quad (\text{B.2})$$

é a densidade lagrangiana, g o determinante da métrica $g^{\mu\nu}$ e

$$(\nabla\varphi)^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu\varphi \partial_\nu\varphi. \quad (\text{B.3})$$

Pelo princípio de mínima ação, a variação da ação (B.1) com respeito ao campo escalar φ produz as equações de Euler–Lagrange

$$\frac{\partial L_\varphi}{\partial \varphi} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial L_\varphi}{\partial \varphi_{,\alpha}} \right) = 0. \quad (\text{B.4})$$

Considerando que o determinante da métrica FLRW (1.1) é

$$g = -a^6 r^4 \sin^2 \theta \quad \longrightarrow \quad \sqrt{-g} = a^3 r^2 \sin \theta, \quad (\text{B.5})$$

e que o campo escalar φ só depende do tempo, temos da equação (B.2) que

$$\frac{\partial L_\varphi}{\partial \varphi} = -\sqrt{-g} \frac{dV}{d\varphi}, \quad (\text{B.6})$$

e

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial L_\varphi}{\partial \varphi_{,\alpha}} \right) = 3a^2 \dot{a} r^2 \sin \theta \dot{\varphi} + \sqrt{-g} \ddot{\varphi}. \quad (\text{B.7})$$

Das equações (B.6) e (B.7), a equação de Euler–Lagrange (B.4) se reduz, depois de dividir por $\sqrt{-g}$, a

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} = 0, \quad (\text{B.8})$$

que é a equação de movimento do campo escalar φ , também chamada de equação de Klein–Gordon.

B.2 Tensor energia–momentum

O tensor energia–momentum se define como

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\varphi}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (\text{B.9})$$

A variação da ação (B.1) com respeito à métrica $g^{\mu\nu}$ é

$$\delta S_\varphi = \int d^4x \left(-\delta(\sqrt{-g}) \left(\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + V(\varphi) \right) - \sqrt{-g} \delta \left(\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + V(\varphi) \right) \right), \quad (\text{B.10})$$

que usando

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{B.11})$$

e

$$\delta(\nabla\varphi)^2 = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{B.12})$$

pode ser expressa por

$$\delta S_\varphi = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + V(\varphi) \right) - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{B.13})$$

Finalmente, com a equação (B.13) na definição (B.9) encontramos que o tensor energia-momentum covariante para o campo escalar φ é

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi + V(\varphi) \right). \quad (\text{B.14})$$

Usando a métrica (1.1) e (B.14) podemos calcular a forma mista do tensor energia-momentum como

$$T_\nu^\rho = g^{\rho\mu}T_{\mu\nu} = \partial^\rho\varphi\partial_\nu\varphi - \delta_\nu^\rho \left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi + V(\varphi) \right). \quad (\text{B.15})$$

A componente puramente temporal do tensor energia-impulso (B.15) é a densidade de energia do campo escalar φ

$$\rho_\varphi = -T_0^0 = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad (\text{B.16})$$

e a sua componente puramente espacial é a pressão do campo escalar

$$P_\varphi = T_i^i = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi). \quad (\text{B.17})$$

Com as expressões (B.16) e (B.17), obtém-se para a equação de estado do campo escalar

$$w_\varphi = \frac{P_\varphi}{\rho_\varphi} = \frac{\dot{\varphi}^2 - 2V(\varphi)}{\dot{\varphi}^2 + 2V(\varphi)}. \quad (\text{B.18})$$

Bibliografia

- [1] A. Bernui and M. Rebouças. *Mapping the large-angle deviation from Gaussianity in simulated CMB maps*. Physical Review D, **85**, pp. 1 (2012). ISSN 1550-7998. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.85.023522>.
- [2] A. Bernui and M. Rebouças. *Searching for non-Gaussianity in the WMAP data*. Physical Review D, **79**, pp. 1 (2009). ISSN 1550-7998. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.79.063528>.
- [3] G. Efstathiou, C. Lawrence, J. Tauber, and Others. *Planck: the Scientific Programme*. ESA-SCI (2005), **1** (2005).
- [4] *September 28, 2011*. URL <http://www.rssd.esa.int/index.php?project=Planck>.
- [5] ESA. *Euclid. Mapping the geometry of the dark Universe*. Tech. Rep. July, European Space Agency (2011). URL <http://sci.esa.int/science-e/www/object/index.cfm?fobjectid=48983>.
- [6] *September 28, 2011*. URL <http://lhc.web.cern.ch/lhc/>.
- [7] J. Green *et al.* *Wide-Field InfraRed Survey Telescope WFIRST Interim Report* (2011). URL <http://arxiv.org/abs/1108.1374>.
- [8] *September 28, 2011*. URL <http://wfirst.gsfc.nasa.gov/>.
- [9] J. Ruhl. *The South Pole Telescope*. Proceedings of SPIE, pp. 11–29 (2004). ISSN 0277786X. 0411122, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0411122>.
- [10] *September 28, 2011*. URL <http://pole.uchicago.edu/index.php>.

- [11] *September 28, 2011.* URL http://hetdex.org/dark_energy/index.php.
- [12] *September 28, 2011.* URL <http://www.cfa.harvard.edu/cip/>.
- [13] *September 28, 2011.* URL <http://cmbpol.uchicago.edu/index.php>.
- [14] *September 28, 2011.* URL <http://www.lsst.org/lsst/>.
- [15] C. Blake *et al.* *The WiggleZ Dark Energy Survey.* *Astronomy & Geophysics*, **49**, pp. 5.19 (2008). ISSN 13668781. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1468-4004.2008.49519.x>.
- [16] *October 3, 2011.* URL <http://wigglez.swin.edu.au/site/>.
- [17] K. Bolejko, M.-N. Célérier, and A. Krasiński. *Inhomogeneous cosmological models: exact solutions and their applications* (2011). URL <http://arxiv.org/abs/1102.1449>.
- [18] P. J. Steinhardt and N. Turok. *A cyclic model of the universe.* *Science* (New York, N.Y.), **296**, pp. 1436 (2002). ISSN 1095-9203. URL <http://dx.doi.org/10.1126/science.1070462>.
- [19] J. Lidsey, D. Wands, and E. Copeland. *Superstring cosmology.* *Physics Reports*, **337**, pp. 343 (2000). URL <http://arxiv.org/abs/hep-th/9909061>.
- [20] G. Burbidge, F. Hoyle, and J. Narlikar. *A Different approach to Cosmology.* *Physics Today*, **April**, pp. 38 (1999).
- [21] A. Albrecht. *Reply to “A Different Approach to Cosmology”.* *Physics Today*, **April**, pp. 44 (1999).
- [22] S. Nojiri and S. D. Odintsov. *Unified cosmic history in modified gravity: From $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models.* *Physics Reports*, **505**, pp. 59 (2011). ISSN 03701573. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2011.04.001>.
- [23] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis. *Modified Gravity and Cosmology.* *Physics Reports*, **513**, pp. 1 (2012). URL <http://arxiv.org/abs/1106.2476>.
- [24] *September 4, 2011.* URL http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/dr4/best_params.cfm.

- [25] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, vol. 1 (Wiley New York, 1972).
- [26] E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa. *Dynamics of dark energy*. International Journal of Modern Physics D, **15**, pp. 1753 (2006).
- [27] L. M. Krauss. *What is dark energy ?* Nature, **431**, pp. 519 (2004).
- [28] C. Conselice. *The Universe's Invisible Hand*. Scientific American, **February**, pp. 25 (2007).
- [29] R. Caldwell and M. Kamionkowski. *Dark matter and dark energy*. Nature, **458**, pp. 587 (2009). URL <http://dx.doi.org/10.1051/eas/0936048>.
- [30] M. Tegmark. *Measuring spacetime: from the big bang to black holes*. Science (New York, N.Y.), **296**, pp. 1427 (2002). ISSN 1095-9203. URL <http://dx.doi.org/10.1126/science.1072184>.
- [31] J. T. Scott. *More Support for the Big Bang*. Physics Today, **March**, pp. 17 (1972).
- [32] S. Weinberg. *The First Three Minutes: A Modern View of the Origin of the Universe*, vol. 95 (BasicBooks, New York, 1977), 2nd ed.
- [33] E. Hubble. *A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **15**, p. 168 (1929). URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC522427/>.
- [34] J. H. Reynolds. *Physical and Observational Evidence for the Expanding Universe*. Nature, **130**, pp. 458 (1932).
- [35] A. R. Sandage. *Cosmology: A search for two numbers*. Physics Today, **February**, pp. 34 (1970).
- [36] *September 14, 2011*. URL <http://ned.ipac.caltech.edu/level5/Tyson/Tyson2.html>.
- [37] G. Gamow. *Expanding Universe and the Origin of Elements*. Physical Review, **70**, pp. 572 (1946). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.70.572.2>.

- [38] R. Alpher and G. Gamow. *The origin of chemical elements*. Physical Review, **73**, pp. 803 (1948). ISSN 0031-899X. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.73.803>.
- [39] R. Alpher and R. Herman. *Theory of the Origin and Relative Abundance Distribution of the Elements*. Reviews of Modern Physics, **22**, p. 153 (1950). URL http://rmp.aps.org/abstract/RMP/v22/i2/p153_1.
- [40] R. Alpher and R. Herman. *Reflections on Early Work on 'Big Bang' Cosmology*. Physics Today, **August**, pp. 24 (1988).
- [41] K. A. Olive, G. Steigman, and T. P. Walker. *Primordial nucleosynthesis: theory and observations*. Physics Reports, **334**, pp. 389 (2000).
- [42] G. Steigman. *Primordial nucleosynthesis: successes and challenges*. International Journal of Modern Physics E, **15**, pp. 1 (2006).
- [43] F. Iocco, G. Mangano, G. Miele, O. Pisanti, and P. D. Serpico. *Primordial nucleosynthesis: From precision cosmology to fundamental physics*. Physics Reports, **472**, pp. 1 (2009). ISSN 03701573.
- [44] A. Penzias and R. Wilson. *A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s*. The Astrophysical Journal, **142**, pp. 419 (1965). URL <http://articles.adsabs.harvard.edu/full/1965ApJ...142..419P>.
- [45] J. Mather *et al.* *Measurement of the cosmic microwave background spectrum by the COBE FIRAS instrument*. The Astrophysical Journal, **420**, pp. 439 (1994). URL <http://adsabs.harvard.edu/full/1994ApJ...420..439M>.
- [46] W. H. Kinney. *TASI Lectures on Inflation*. p. 52 (2009). URL <http://arxiv.org/abs/0902.1529>.
- [47] D. Fixsen *et al.* *The Cosmic Microwave Background Spectrum from the full COBE FIRAS data set*. The Astrophysical Journal, **473**, p. 576 (1996). URL <http://iopscience.iop.org/0004-637X/473/2/576>.
- [48] P. Zhang and A. Stebbins. *Confirmation of the Copernican Principle at Gpc Radial Scale and above from the Kinetic Sunyaev-Zel'dovich Effect Power Spectrum*. Physical Review Letters, **107**, pp. 1 (2011).

- ISSN 0031-9007. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.041301>.
- [49] A. Kosowsky. *The Atacama Cosmology Telescope*. New Astronomy Reviews, **47**, pp. 939 (2003). ISSN 13876473. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.newar.2003.09.003>.
- [50] *October 2, 2011*. URL <http://www.physics.princeton.edu/act/index.html>.
- [51] F. K. Hansen, a. J. Banday, and K. M. Górski. *Testing the cosmological principle of isotropy: local power-spectrum estimates of the WMAP data*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **354**, pp. 641 (2004). ISSN 00358711. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.08229.x>.
- [52] F. S. Labini and Y. V. Baryshev. *Testing the Copernican and Cosmological Principles in the local universe with galaxy surveys*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, **2010**, pp. 021 (2010). ISSN 1475-7516. URL <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2010/06/021>.
- [53] O. Lahav. *Observational tests for the cosmological principle and world models* (2000). URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0001061>.
- [54] J.-P. Uzan, C. Clarkson, and G. Ellis. *Time Drift of Cosmological Redshifts as a Test of the Copernican Principle*. Physical Review Letters, **100**, pp. 1 (2008). ISSN 0031-9007. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.191303>.
- [55] K. Yamamoto. *Measuring cosmological parameters with the SDSS QSO spatial power spectrum analysis to test the cosmological principle*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **341**, pp. 1199 (2003). ISSN 0035-8711. URL <http://dx.doi.org/10.1046/j.1365-8711.2003.06477.x>.
- [56] *October 2, 2011*. URL <http://magnum.anu.edu.au/~TDFgg/>.
- [57] *October 2, 2011*. URL <https://www.cfa.harvard.edu/~dfabricant/huchra/zcat/>.
- [58] J. Loveday. *The Sloan Digital Sky Survey* (2002). 0207189v1, URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0207189v1>.

- [59] *October 2, 2011.* URL <http://www.sdss.org/>.
- [60] *October 2, 2011.* URL <http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/>.
- [61] B. Goss Levi. *COBE measures anisotropy in cosmic microwave background radiation.* *Physics Today*, **June**, pp. 17 (1992).
- [62] *October 2, 2011.* URL <http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/>.
- [63] *September 4, 2011.* URL <http://supernova.lbl.gov/Union/>.
- [64] A. Riess *et al.* *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant.* *The Astronomical Journal*, **116**, p. 1009 (1998). URL <http://iopscience.iop.org/1538-3881/116/3/1009>.
- [65] S. Perlmutter *et al.* *Discovery of a supernova explosion at half the age of the universe.* *Nature*, **391**, pp. 51 (1998). URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9712212>.
- [66] S. Perlmutter. *Supernovae, Dark Energy, and the Accelerating Universe.* *Physics Today*, **April**, pp. 53 (2003). ISSN 00319228. URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.1580050>.
- [67] B. A. Bassett and R. Hlozek. *Baryon Acoustic Oscillations.* p. 42 (2009). 0910.5224, URL <http://arxiv.org/abs/0910.5224>.
- [68] C. J. Miller, R. C. Nichol, and D. J. Batuski. *Acoustic oscillations in the early universe and today.* *Science (New York, N.Y.)*, **292**, pp. 2302 (2001). ISSN 0036-8075. URL <http://dx.doi.org/10.1126/science.1060440>.
- [69] S. Weinberg. *The Cosmological constant problem.* *Reviews of Modern Physics*, **61**, pp. 1 (1989).
- [70] B. M. Tinsley. *The Cosmological Constant and Cosmological Change.* *Physics Today*, **June**, pp. 32 (1977).
- [71] T. Banks. *The cosmological constant problem.* *Physics Today*, **March**, pp. 46 (2004). ISSN 1539-0756.

- [72] P. J. Steinhardt and N. Turok. *Why the cosmological constant is small and positive*. Science (New York, N.Y.), **312**, pp. 1180 (2006). ISSN 1095-9203. URL <http://dx.doi.org/10.1126/science.1126231>.
- [73] A. Linde. *Particle physics and inflationary cosmology*. Physics Today, **September**, pp. 61 (1987).
- [74] K. A. Olive. *Inflation*. Physics Reports, **190**, pp. 307 (1990).
- [75] A. R. Liddle and D. H. Lyth. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, vol. 54 (Cambridge University Press, 2000).
- [76] A. H. Guth. *Inflationary Universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*. Physical Review D, **23**, pp. 347 (1981).
- [77] D. N. Schramm. *The early universe and high-energy physics*. Physics Today, **April**, pp. 27 (1983).
- [78] E. Kolb and M. Turner. *The Early Universe* (Addison-Wesley, California, 1990).
- [79] A. Linde. *Particle Physics and Inflationary Cosmology*. p. 270 (2005). 0503203, URL <http://arxiv.org/abs/hep-th/0503203>.
- [80] A. Linde. *Phase transitions in gauge theories and cosmology*. Reports on Progress in Physics, **42**, p. 389 (1979). URL <http://iopscience.iop.org/0034-4885/42/3/001>.
- [81] A. Vilenkin. *Cosmic Strings and Domain Walls*. Physics Reports, **121**, pp. 263 (1985). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015738590033X>.
- [82] A. Linde. *The inflationary universe*. Reports on Progress in Physics, **47**, pp. 925 (1984).
- [83] E. B. Gliner. *Inflationary universe and the vacuumlike state of physical medium*. Physics-USpekhi, **45**, pp. 213 (2002). ISSN 1063-7869. URL <http://dx.doi.org/10.1070/PU2002v045n02ABEH001108>.
- [84] A. A. Starobinsky. *Relict Gravitation Radiation Spectrum and Initial State of the Universe*. JETP Lett., **30**, pp. 682 (1979).

- [85] A. D. Linde. *A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems*. Physics Letters B, **108**, pp. 389 (1982).
- [86] A. Linde. *Chaotic inflation*. Physics Letters B, **129**, pp. 177 (1983). URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0370269383908377>.
- [87] A. Albrecht and P. Steinhardt. *Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking*. Physical Review Letters, **48**, pp. 1220 (1982). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.48.1220>.
- [88] B. Goss Levi. *New Inflationary Universe: an Alternative to Big Bang?* Physics Today, **May**, pp. 17 (1983).
- [89] D. Baumann. *TASI Lectures on Inflation*. p. 160 (2009). URL <http://arxiv.org/abs/0907.5424>.
- [90] R. Brandenberger. *Inflationary Cosmology: Progress and Problems*. URL <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9910410>.
- [91] A. Riotto. *Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations*. URL <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0210162>.
- [92] Y. Shtanov, J. Traschen, and R. Brandenberger. *Universe reheating after inflation*. Physical Review D, **51**, p. 5438 (1995). URL http://prd.aps.org/abstract/PRD/v51/i10/p5438_1.
- [93] L. Kofman and A. a. Starobinsky. *Towards the theory of reheating after inflation*. Physical Review D, **56**, pp. 3258 (1997). ISSN 0556-2821. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.56.3258>.
- [94] L. Kofman, A. Linde, and A. Starobinsky. *Reheating after inflation*. Physical Review Letters, **73**, pp. 3195 (1994). ISSN 1079-7114. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.73.3195>.
- [95] B. Bassett, S. Tsujikawa, and D. Wands. *Inflation dynamics and reheating*. Reviews of Modern Physics, **78**, pp. 537 (2006). ISSN 0034-6861. URL <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.78.537>.
- [96] W. Kinney, E. Kolb, A. Melchiorri, and A. Riotto. *Inflationary physics from the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*. Physical Review D,

- 69**, pp. 1 (2004). ISSN 1550-7998. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.69.103516>.
- [97] W. Kinney, E. Kolb, A. Melchiorri, and A. Riotto. *Inflation model constraints from the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe three-year data*. Physical Review D, **74**, pp. 1 (2006). ISSN 1550-7998. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.74.023502>.
- [98] K. Freese, J. Frieman, and A. Olinto. *Natural inflation with pseudo Nambu-Goldstone bosons*. Physical Review Letters, **65**, pp. 3233 (1990). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.65.3233>.
- [99] A. Linde. *Hybrid inflation*. Physical Review D, **49**, p. 748 (1994). URL http://prd.aps.org/abstract/PRD/v49/i2/p748_1.
- [100] D. Wands. *Multiple field inflation*. Inflationary Cosmology, **738/2007**, pp. 275 (2007). URL <http://www.springerlink.com/index/mx714w60572w5231.pdf>.
- [101] N. Bartolo, E. Komatsu, S. Matarrese, and A. Riotto. *Non-Gaussianity from inflation: theory and observations*. Physics Reports, **402**, pp. 103 (2004). ISSN 03701573. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2004.08.022>.
- [102] H. Kodama and M. Sasaki. *Cosmological Perturbation Theory*. Progress of Theoretical Physics Supplement, **78**, pp. 1 (1984).
- [103] V. Mukhanov, H. Feldman, and R. Brandenberger. *Theory of cosmological perturbations*. Physics Reports, **215**, pp. 203 (1992). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739290044Z>.
- [104] K. a. Malik and D. Wands. *Cosmological perturbations*. Physics Reports, **475**, pp. 1 (2009). ISSN 03701573. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2009.03.001>.
- [105] S. Sonogo and M. Bruni. *Gauge Dependence in the Theory of Non-Linear Spacetime Perturbations*. Communications in Mathematical Physics, **193**, pp. 209 (1998). ISSN 0010-3616. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s002200050325>.

- [106] M. Bruni, S. Matarrese, S. Mollerach, and S. Sonogo. *Perturbations of spacetime : gauge transformations and gauge invariance at second order and beyond*. Classical and Quantum Gravity, **14**, p. 2585 (1997). URL <http://iopscience.iop.org/0264-9381/14/9/014>.
- [107] J. Bardeen. *Gauge-invariant cosmological perturbations*. Physical Review D, **22**, p. 1882 (1980). URL http://prd.aps.org/abstract/PRD/v22/i8/p1882_1.
- [108] S. Matarrese and M. Bruni. *Relativistic second-order perturbations of the Einstein–de Sitter universe*. Physical Review D, **58** (1998). ISSN 0556-2821. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.58.043504>.
- [109] C. Gordon, D. Wands, B. Bassett, and R. Maartens. *Adiabatic and entropy perturbations from inflation*. Physical Review D, **63**, pp. 1 (2000). ISSN 0556-2821. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.63.023506>.
- [110] T. Hamazaki and H. Kodama. *Evolution of Cosmological Perturbations during Reheating*. Progress of Theoretical Physics, **96**, pp. 1123 (1996).
- [111] K. Malik, D. Wands, and C. Ungarelli. *Large-scale curvature and entropy perturbations for multiple interacting fluids*. Physical Review D, **67**, pp. 1 (2003). ISSN 0556-2821. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.67.063516>.
- [112] S. Dodelson. *Modern Cosmology* (Academic Press, San Diego, 2003).
- [113] *April 9, 2012*. URL <http://camb.info/>.
- [114] R. K. Sachs and A. M. Wolfe. *Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background*. Astrophysical Journal, **147**, p. 73 (1967).
- [115] E. Komatsu *et al.* *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (Wmap) Observations: Cosmological Interpretation*. The Astrophysical Journal Supplement Series, **192**, p. 18 (2011). ISSN 0067-0049. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0067-0049/192/2/18>.
- [116] A. Linde. *Inflation and string cosmology*. Fortschritte der Physik, **57**, pp. 418 (2009). ISSN 1521-3978. 0503195v1, URL <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/prop.200900054/abstract>.

- [117] V. Acquaviva, N. Bartolo, S. Matarrese, and A. Riotto. *Gauge-invariant Second-order perturbations and non-Gaussianity from inflation*. Nuclear Physics B, **667**, pp. 119 (2003). 0209156v3.
- [118] J. Maldacena. *Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models*. Journal of High Energy Physics, **2003**, p. 013 (2003). 0210603v5, URL <http://iopscience.iop.org/1126-6708/2003/05/013>.
- [119] E. Komatsu *et al.* *Non-Gaussianity as a probe of the physics of the primordial universe and the astrophysics of the low redshift universe*. In: *AGB Stars and Related Phenomena astro2010: The Astronomy and Astrophysics Decadal Survey*, vol. 2010, p. 158 (2009). arXiv:0902.4759v4, URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009arXiv0902.4759K>.
- [120] E. Komatsu. *Hunting for primordial non-Gaussianity in the cosmic microwave background*. Classical and Quantum Gravity, **27**, p. 124010 (2010). ISSN 0264-9381. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/27/12/124010>.
- [121] A. Bernui and M. J. Rebouças. *Non-Gaussianity in the foreground-reduced CMB maps*. Physical Review D, **81**, pp. 1 (2010). ISSN 1550-7998. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.81.063533>.
- [122] A. Bernui, M. J. Rebouças, and A. F. F. Teixeira. *Large-Angle Non-Gaussianity in Simulated High-Resolution CMB Maps*. International Journal of Modern Physics: Conference Series, **03**, p. 286 (2011). ISSN 2010-1945. URL <http://dx.doi.org/10.1142/S2010194511001383>.
- [123] V. Desjacques and U. Seljak. *Primordial non-Gaussianity from the large-scale structure*. Classical and Quantum Gravity, **27**, p. 124011 (2010). ISSN 0264-9381. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/27/12/124011>.
- [124] A. Slosar, C. Hirata, U. Seljak, S. Ho, and N. Padmanabhan. *Constraints on local primordial non-Gaussianity from large scale structure*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, **2008**, p. 031 (2008). ISSN 1475-7516. URL <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2008/08/031>.

- [125] L. Verde. *Non-Gaussianity from Large-Scale Structure Surveys*. p. 20 (2010). URL <http://arxiv.org/abs/1001.5217>.
- [126] L. Verde, L. Wang, A. F. Heavens, and M. Kamionkowski. *Large-scale structure, the cosmic microwave background and primordial non-Gaussianity*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **313**, pp. 141 (2000). ISSN 0035-8711. URL <http://dx.doi.org/10.1046/j.1365-8711.2000.03191.x>.
- [127] *May 11, 2012*. URL <http://icc.ub.edu/~liciaverde/HomePage.html>.
- [128] C. A. Valenzuela Toledo. *Non-Gaussianity and Statistical Anisotropy in Cosmological Inflationary Models*. Ph.D. thesis. URL <http://arxiv.org/abs/1004.5363>.
- [129] D. Babich. *Optimal Estimation of Non-Gaussianity*. Physical Review D, **72**, pp. 1 (2005). 0503375v2.
- [130] P. Creminelli, L. Senatore, and M. Zaldarriaga. *Estimators for local non-Gaussianities*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, **2007**, pp. 019 (2007). ISSN 1475-7516. URL <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2007/03/019>.
- [131] P. Creminelli and M. Zaldarriaga. *A single-field consistency relation for the three-point function*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, **2004**, pp. 006 (2004). ISSN 1475-7516. URL <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2004/10/006>.
- [132] E. Komatsu *et al.* *First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Tests of Gaussianity*. The Astrophysical Journal Supplement Series, **148**, p. 119 (2003). URL <http://iopscience.iop.org/0067-0049/148/1/119>.
- [133] M. Liguori, S. Matarrese, and L. Moscardini. *High-Resolution Simulations of Non-Gaussian Cosmic Microwave Background Maps in Spherical Coordinates*. The Astrophysical Journal, **597**, p. 57 (2003). URL http://iopscience.iop.org/0004-637X/597/1/57?v_showaffiliations=no.
- [134] F. Elsner and B. D. Wandelt. *Improved Simulation of Non-Gaussian Temperature and Polarization Cosmic Microwave Background Maps*.

- The Astrophysical Journal Supplement Series, **184**, pp. 264 (2009). ISSN 0067-0049. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0067-0049/184/2/264>.
- [135] C. Tsallis. *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*. Journal of statistical physics, **52**, pp. 479 (1988). URL <http://www.springerlink.com/index/T24G22415R2QW367.pdf>.
- [136] A. Bernui, C. Tsallis, and T. Villela. *Temperature fluctuations of the cosmic microwave background radiation: A case of non-extensivity?* Physics Letters A, **356**, pp. 426 (2006). ISSN 03759601. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2006.04.013>.
- [137] A. Bernui, C. Tsallis, and T. Villela. *Deviation from Gaussianity in the cosmic microwave background temperature fluctuations*. Europhysics Letters (EPL), **78**, p. 19001 (2007). ISSN 0295-5075. URL <http://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/78/19001>.
- [138] J. Kim, P. Naselsky, and P. Christensen. *CMB map derived from the WMAP data through harmonic internal linear combination*. Physical Review D, **77** (2008). ISSN 1550-7998. 0803.1394, URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.77.103002>.
- [139] J. Delabrouille *et al.* *A full sky, low foreground, high resolution CMB map from WMAP*. Astronomy and Astrophysics, **493**, pp. 835 (2009). ISSN 0004-6361. 0807.0773, URL <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:200810514>.
- [140] B. Gold *et al.* *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations: Galactic Foreground Emission*. The Astrophysical Journal Supplement Series, **180**, pp. 265 (2009). ISSN 0067-0049. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0067-0049/180/2/265>.
- [141] B. D. Wandelt, F. K. Hansen, and A. J. Banday. *The HEALPix Primer*. CM (2010). URL <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9905275>.