

TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES NO ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO

TESE DE MESTRADO

defendida por:

MARIO NOVELLO

no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Orientador: José Leite Lopes

em 29 de Maio de 1968

perante a banca integrada pelos senhores professores:

*José Leite Lopes*

*Colber Gonçalves de Oliveira*

*Mario Schenberg*

*Robert Lacaze*

## Í N D I C E

Dedicação	1
Agradecimento	2
Introdução:	
a) a história	3
b) a idéia	5
Definições e Notação	6
As distribuições da Teoria e suas Equações	11
A Solução de Ondas Planas	16
A Equação de Onda não-homogênea	17
Convolução Limitada	22
Campos de Wentzel	24
A "função" de Jordan-Pauli	32
Convolução Superficial	36
Parênteses Poisson Covariante	38
A Solução não-homogênea da Equação de Onda	41
Conclusão	43
Referências	44

## Agradecimento

ao Professor Leite Lopes que me orientou ao longo dêste trabalho e de quem partiu a idéia de sua realização..

Suas considerações científicas foram sempre acompanhadas de uma visão maior centralizada no homem. Nêste século em que a ciência se divorcia mais e mais de uma visão humanista, trabalhar com quem não perdeu esta visão é uma experiência notável.

À Coordenação do Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) é a Fundação FÓRD, que sustentaram financeiramente este trabalho, meus agradecimentos.

## 1 - Introdução

### a) A história

O trabalho intelectual é dialógico, isto é, êle se dirige para aquêles que o entendem. Essa consideração torna desnecessária uma introdução histórica. Pretendo, no entanto, situar-me, isto é, situar o físico, dentro de um esquema simplificado da sociedade que envolverá inevitavelmente a história.

Tem sido comum neste século, considerar a importância do cientista não pelo que êle diz sobre seu formalismo, mas pelo formalismo êle mesmo. Isso, diz-se, permite eliminar algum resquício metafísico que o pensamento do cientista possa ocultar.

Como diz B. Russel, ser chamado de metafísico, pelos cientistas, equivale a cair em desgraça pública.

Nos anos que se seguiram ao término da segunda grande guerra entretanto, começou a generalizar-se (vagarosamente) uma opinião não ortodoxa sobre esse ponto: talvez, disseram os físicos, o que eu penso sobre meu formalismo tenha uma importância prática que me tenha escapado até aqui.

Essa opinião sugeriu uma outra: a existência de uma batalha travada entre tecnocratas e cientistas - com uma grande vantagem para aquêles porque conscientes da luta - cujo prêmio é a orientação da pesquisa.

Não se deve considerar que essa luta seja restrita à ciência porque ela é geral - envolve nossa sociedade.

As necessidades criadas com as novas pesquisas, o instrumental fabulosamente dispendioso e a ligação por demais oficial com o governo transformaram a ciência, na prática, de caminho para a compreensão do real em uma atividade (tanto teórica quanto experimental) voltada para si mesma, isto é, para sua técnica. O interesse do governo em manter (leia-se: orientar) as pesquisas fundamentais reside na relação que elas possam ter com as necessidades do governo.

Se a liberdade de pesquisa persiste, como princípio supostamente intocável, na prática ela não o é.

O controle da ciência passará (de todo) às mãos de não-cientistas. Em breve, não fôsse a história dinâmica, ter-se-ia a eliminação do próprio cientista enquanto tal.

O bom relacionamento entre ciência da natureza e ciência humana possibilitaria a sobrevivência de ambas enquanto atividades críticas e creativas.

A técnica pode responder à questão "qual o caminho ?" por que ela é o instrumento da pesquisa. Mas a ciência só pode responder à questão como o gato de Alice no país das maravilhas: "depende do lugar para onde se quer ir".

A criação do lugar é o objetivo da ciência.

A estrada poderá ser eliminada quando lá chegarmos.

## b) A idéia

A necessidade de estabelecer um formalismo único para densidades de carga contínua e descontínua levou-nos a considerar as funções matemáticas que descreviam estas densidades como distribuições (no sentido de Schwartz). A generalização aos campos considerados como distribuições foi o passo óbvio imediato.

Não só ao campo e à densidade (de corrente) foi associada distribuição mas também à carga. A imagem de um infinito contido no finito (isto é, na singularidade) - que não pude furtar-me de criar - estabelece simbolicamente a orientação deste trabalho: o que é localizado em um nível da teoria deverá ser estender como um campo em um nível mais íntimo. A carga, como propriedade íntima da singularidade, deve ser tratada como uma distribuição.

A partícula investigada "de fora", isto é, na análise de seus movimentos externos pode ser entendida como localizada. Ao tratar a partícula como alguma coisa muito localizada, isto é, puntiforme, aparecem problemas. Eliezer, entre outros, enumera estas dificuldades e mostra como a simples passagem à teoria quântica não poderá resolvê-las. Dirac (1938) propõem uma das primeiras soluções elegante para contornar o problema da divergência do campo criado pelo eletrôn na sua linha de universo. Esta solução ainda deixava alguns pontos indesejáveis que Eliezer, Rohrlich e outros procuraram contornar.

O eletrôn puntiforme pôde, desse modo, se manter como um simbolismo válido cuja representação matemática a chamada função delta de Dirac permitia realizar operações de modo preciso e sem dificuldades. Associou-se uma densidade do eletrôn dada pela expressão  $\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ . Supunha-se que a  $\delta^3$  representava uma condensação peculiar a partículas "bastante localizadas".

O aparecimento de novas distribuições concentradas - por exemplo a  $\delta^3$  de Infeld - lançou uma questão interessante. Seria a característica de partículas "mais concentradas" que as caracterizadas pela  $\delta^3$ ?

A expressão da densidade do eletrôn como uma função-delta, que estabelece a imagem matemática do limite da esfera eletrônica ao eletrôn puntiforme, permitia operações matemáticas corretas. Essas expressões adquiriam sentido quando integradas, significando que o resultado independentia do modelo físico associado.

A idéia de Schwartz colocou a questão nos seguintes termos: devemos continuar a falar de funções que só adquirem sentido quando as integramos? Devemos continuar a falar de funções com valores locais bem determinados quando isso nem sempre é possível? Neste trabalho adotamos a resposta negativa: trataremos de distribuições. As entidades da Teoria Eletromagnética que usaremos - como corrente, potencial, campo - serão tensores-distribuição e não funções tensoriais.

## 2 - Definições e Notação

a) Seja  $R^n$  um espaço vetorial a n dimensões e  $\alpha$  uma p-forma diferenciável do tipo

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} a_{i_1 i_2 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

onde os  $a_k$  são funções de classe  $C^\infty$  e de suporte compacto.

Define-se como corrente de grau n-p um funcional linear e contínuo sobre uma p-forma e se denota  $T[\alpha]$

A linearidade consiste em ter-se, para números a b :

$$(a T_1 + b T_2) [\psi] = a T_1 [\psi] + b T_2 [\psi].$$

Por contínuo entende-se que se uma sucessão de funções  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$  tende para zero então a sucessão de números  $T[\psi_1], T[\psi_2], \dots, T[\psi_n], \dots$  tende para zero

### b) Distribuições

São funcionais lineares e contínuos sobre um espaço k de funções bem comportadas.

O significado da expressão "bem comportada" variará, o que dará origem a diferentes espaços k.

Consideraremos, neste trabalho, o espaço das funções contínuas com derivadas de qualquer ordem contínuas e de suporte compacto.

Poderíamos definir as distribuições ou como correntes de grau n ou como correntes de grau zero.

Scarfiello (5) mostrou que no tocante às transformações e fetuadas no espaço  $R^n$  das distribuições essas definições não são indistinguíveis.

Neste trabalho distribuições serão consideradas correntes de grau zero.



c) Distribuição com valor vetorial

É uma aplicação linear e contínua de  $k$  para  $E^n$  onde  $E^n$  é um espaço vetorial.

d) Transformações

Consideremos uma aplicação linear de  $R^n$  em  $R^m$

$$\mu: x \in R^n \quad + \quad y \in R^m$$

Seja  $\alpha$  uma  $p$ -forma diferenciável definida em  $R^m$ . A aplicação  $\mu$  define uma forma em  $R^n$  tal que

$$\mu^* \alpha(x) = \alpha(y)$$

onde

$$y = \mu x$$

e) Aplicação  $R^n \rightarrow R^n$

seja  $x, x' \in R^n$  tais que

$$x' = \mathcal{L}_V^\mu x$$

onde  $\mathcal{L}_V^\mu$  é uma transformação de Lorentz.

Se  $T^\mu$  é uma distribuição regular, temos

$$\begin{aligned} T^{\mu} [\psi'] &= \int T^{\mu}(x'), \psi'(x') d^4 x' \\ T^{\mu} [\psi'] &= \int \mathcal{L}_V^{\mu'} T^{\nu}(x) \psi(x) |L| d^4 x \\ T^{\mu} [\psi'] &= \mathcal{L}_V^{\mu} T^{\nu} [\psi] |L| \end{aligned}$$

esta expressão sugere a definição

$$L T^{\mu} [\psi'] = L ( T^{\mu} [\psi] )$$

que Schwartz introduz.

Pode-se estender estas definições para tensores-distribuição de qualquer ordem e mesmo para spinores.

### f) Notação

Como em todo simbolismo, é possível utilizar-se mais de uma notação para as distribuições. Nêste trabalho usaremos uma notação já tradicional (Leite Lopes, etc) em alguns casos será util entretanto considerar uma notação recentemente introduzida por Vignon (6).

#### 1 - Notação tradicional

Sendo  $T$  distribuição e  $\psi$  função de base temos escrito

$$T [ \psi ]$$

no caso de  $T$  ser regular

$$T [ \psi ] = \int_{R^n} T(x) \psi(x) dx$$

#### 2 - Notação de Vignon

Vignon introduziu uma notação que explicita a variável da função de base à qual a distribuição se refere. Para isso êle usa um formalismo tirado da teoria dos tensores e da convenção de soma de Einstein

$$T^x \psi_x = T [ \psi ]$$

A importância desta notação, além de simplificar certas expressões, aparece, por exemplo, quando a função de base depende de mais de uma variável e a  $T$  só atua em um número limitado delas.

Por exemplo:

$$T^x \psi_{xy}$$

Significando, quando  $\tilde{T}$  é regular,  $\int_R T(x) \psi(x, y) dx$

a extensão para tensores e várias variáveis é imediata. Utilizaremos a convenção de Vignon de variáveis no alto referirem-se a distribuição e em baixo a função

dêsse modo

$$T_{x, \alpha}^a; y, \beta, b; z$$

onde índices gregos são tensores. Índices latinos são spinores.

Significando

1 - tensor covariante, 1 - spinor contravariante em x

1 - tensor=distribuição contravariante, 1 - spinor-distribuição contravariante em y.

1 - escalar - distribuição em z

g) Aplicação do formalismo de Vignon

Mostraremos, a título de exemplificação, a invariância de  $\delta_4(x)$  por uma transformação de Lorentz própria.

$$(\text{def.}) \quad \delta_4(x) = \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) \delta(x_4)$$

se  $\mathcal{L}$  é transformação de Lorentz, temos

$$\mathcal{L} T[\psi] = \mathcal{L} \{ T[\psi] \}$$

$$\text{isto é } \mathcal{L} \delta_4^x \psi_x = \mathcal{L} \{ \delta_4^x \psi_x \}$$

onde x se refere a  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

$$(\text{def.}) \quad \mathcal{L} \delta_4^{x'} = \delta_4^{x'}$$

$$\delta_4^{x'} \psi_{x'} = \mathcal{L} \{ \delta_4^x \psi_x \} = \mathcal{L} \{ \psi(0) \} = \psi(0)$$

$$\delta_4^{x'} \psi_{x'} = \delta_4^x \psi_x$$

então  $\delta_4^{x'} = \delta_4^x$

É importante ressaltar aqui um detalhe que citei em b) quanto ao trabalho de Scarfiello.

Tem sido usual, em demonstrações como a que dei acima, não explicitar-se a natureza geométrica da função de base. Deixa-se implícito que se trata de um escalar.

Isso equivale a pensar a distribuição como uma 4-forma diferenciável. Se tivéssemos considerado a  $\Psi$  como uma 4-forma a distribuição seria um escalar.

Nêste caso

$$\mathcal{L}_T [\Psi] = |L| \mathcal{L}_T [\Psi(\mathcal{L}_x)]$$

o que, no caso considerado,  $|L| = 1$ , não conduz a nenhuma distinção.

### 3 - As distribuições da teoria e suas equações

#### I - A corrente $j^\mu$

a)  $j^\mu$  é uma distribuição vetorial, isto é

$$(1) \quad j'^\mu = \lambda^\mu_\nu j^\nu$$

onde  $\lambda^\mu_\nu$  é uma transformação de Lorentz .

A equação (1) deve ser entendida como

$$(2) \quad \mathcal{L} j^\mu [\psi] = \mathcal{L} \{ j^\mu [\psi] \}$$

Aceitaremos que  $j^\mu$  satisfaça a equação de continuidade

$$(3) \quad \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} [\psi] = 0$$

notando que

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} [\psi] = -j^\mu \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \right]$$

Para  $j^\mu$  regular, a (3) coincide com a expressão de continuidade usual, pois

$$(4) \quad j^\mu \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \right] = \int j^\mu(x) \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} d^4 x$$

Integrando por partes e lembrando que o suporte de  $\Psi$  é compacto tem-se no caso regular

$$j^\mu [\Psi] = - \int \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} (x) \Psi(x) d^4 x$$

e por (3)

$$(5) \quad \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

b) Teorema de conservação da carga

De (3) e pelo teorema de Green no  $R^4$  vira que

$$(6) \quad \int_{\sigma} j^\mu d\sigma_\mu$$

independe de  $\sigma$ , superfície do tipo espaço.

Considerando  $n_\mu = (1, 0, 0, 0)$

$$(7) \quad \int_{R^3} j^0 d^3 x = c \text{ te}$$

Costuma-se chamar carga a essa constante.

Um modo de definir carga distinto de (7) é

$$(8) \quad Q = \frac{j^0 [\Psi]}{\delta [\Psi]}$$

c) Uma distribuição nova:

Consideremos uma densidade  $j^0 = \rho$  do tipo deltiforme, isto é  $2\pi q \delta(x)$ , onde o fator  $2\pi$  foi posto por conveniência.

Se  $\rho$  é uma distribuição, sua transformada de Fourier define-se como

$$(9) \quad \bar{f} [\Psi] = 2\pi f [\varphi]$$

onde  $\bar{f}$  é a distribuição - transformada de Fourier da distribuição  $f$  e  $\Psi$

é a transformada de Fourier de  $\mathcal{P}$ .

É fácil mostrar que com a  $\mathcal{P}$  definida acima

$$(10) \quad \tilde{\mathcal{P}} = q$$

Para a distribuição

$$(11) \quad \mathcal{P} = 2\pi q \delta(x-h)$$

Tem-se

$$(12) \quad \tilde{\mathcal{P}} = q e^{ih\sigma}$$

Isso sugere-nos a definição de uma distribuição especial  $\Omega$  como a transformada de Fourier da densidade  $\mathcal{P}$ .

#### d) A carga

Quando a densidade  $\mathcal{P}$  fôr concentrada podemos associar a carga à distribuição  $\Omega$  e considerá-la como a distribuição-carga.

Quando a densidade  $\mathcal{P}$  fôr regular (no sentido das distribuições) podemos associar a carga ao valor de  $\Omega$  no ponto  $\sigma = 0$  o que é possível devido à regularidade de  $\Omega$  e lembra o fator da forma para ze ro-momentum transfer. da interação p-e.

Pode parecer estranho que a "natureza" da carga dependa do tipo de densidade com que ela se apresenta.

Entretanto, a passagem de uma distribuição irregular para uma regular introduz uma qualidade nova com propriedades distintas.

A necessidade de definição única para a natureza da carga reside em nossa procura de unificação.

A definição da carga ora como uma distribuição, ora como um número aguça a diferença existente entre o nível contínuo e o nível des contínuo.

#### e) Generalização

A toda distribuição-densidade  $\mathcal{P}$  podemos associar uma distribuição transformada de Fourier  $\Omega$  que pode ser pensada, em algumas situações, como a tradução, para o formalismo das distribuições, da gran deza da qual  $\mathcal{P}$  é a densidade.

Isso sugere uma interpretação interessante quando a densi dade é definida em um espaço complexo.

Seja

$$(13) \quad g(S) = 2\pi \delta(S - S_0)$$

Uma distribuição definida em um espaço  $Z$  complexo.

Ponhamos

$$S_0 = i\lambda'$$

com  $\lambda$  real

É fácil mostrar que

$$(14) \quad \Omega = \tilde{g}(x) = e^{-\lambda x}$$

Dêsse modo, um fenômeno que pode ser descrito por uma expressão do tipo (14) admite uma densidade (no sentido dado acima) do tipo  $\delta$  no espaço complexo.

De um modo geral um fenômeno descrito por

$$(15) \quad e^{iax} e^{-bx}$$

Terá uma densidade dada por

$$(16) \quad \delta(S - (a + bi))$$

#### f) Observação

O formalismo visto acima permite uma imagem interessante.

Ao penetrar na singularidade do campo nos deparamos com um novo tipo de campo: a distribuição-carga que se estende, sem singularidade, por todo o espaço  $\sigma$ .

Como se dentro do finito percebéssemos o infinito.

#### II - O potencial-distribuição $A^\mu$

a)  $A^\mu$  é um 4-vetor.

Se  $\lambda^\mu_\nu$  é uma transformação de Lorentz

$$A'^\mu = \lambda^\mu_\nu A^\nu$$



b) Equação para  $A^\mu$

$$(17) \quad A^\mu [\square \Psi] = -\frac{4\pi}{c} j^\mu [\Psi]$$

onde  $\Psi \in K$

Como duas distribuições idênticas na vizinhança de todo ponto são iguais, podemos por

$$(17') \quad \square A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$$

Imporemos também

$$(18) \quad A^\mu \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} \right] = 0, \quad \forall \Psi \in K$$

III - O tensor-distribuição - anti-simétrico  $F^{\mu\nu}$

Definição

$$(19) \quad F^{\mu\nu} [\Psi] = A^\mu \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial x^\nu} \right] - A^\nu \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} \right]$$

Da definição (19) e do fato de  $A^\mu$  ser um 4-vetor é fácil mostrar que

$$(20) \quad F^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} l_\alpha l_\beta$$

$F^{\mu\nu}$  satisfaz às equações abaixo

$$(21) \quad F^{\mu\nu} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} \right] = \frac{4\pi}{c} j^\nu [\Psi]$$

$$(22) \quad F^{\mu\nu} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial x^\lambda} \right] + F^{\nu\lambda} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} \right] + F^{\lambda\mu} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial x^\nu} \right] = 0$$

#### 4 - A solução de ondas planas

A equação (17) reduz-se a

$$(23) \quad \square A^\mu = 0$$

quando não há corrente.

Uma solução da equação (23) pode ser escrita como

$$(24) \quad A^\alpha = A_0^\alpha e^{iK_\mu x^\mu}$$

com

$$(25) \quad K_\mu K^\mu = 0$$

Pode-se ver por (24) que a distribuição solução de (23) dá origem à transformada de Fourier.

Apliquemos (24) a uma  $\Psi \in K$

$$A^{\alpha x} \Psi_x = A_0^\alpha \int e^{iK_\mu x^\mu} \Psi_x d^4x$$

onde deveríamos escrever, com rigor  $A^{\alpha Kx}$  ao invés de  $A^{\alpha x}$

Ora,

$$(27) \quad \tilde{\Psi}(K) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \Psi(x) e^{iK_\mu x^\mu} d^4x$$

De (26) e (27) segue

$$(28) \quad A^{\mu x} \Psi_x = A_0^\mu \tilde{\Psi}_\sigma (2\pi)^2$$

Conclusão -

As funções para as quais existe transformada de Fourier são tão relacionadas com as funções de base para a distribuição-onda plana.

## 5 - A equação de onda não-homogênea (Distribuições de Methée)

Um dos métodos mais importantes para resolver a equação não-homogênea de D'Allembert é o chamado método da função de Green. Sabe-se que a solução encontrada não é uma função mas uma distribuição.

Methée ( 2 ) estabelece um método para conseguir-se distribuições invariantes (para as transformações de Lorentz) concentradas no cône de luz, que se mostrou eficaz para o cálculo das soluções de (17').

Recordaremos aqui alguns tópicos do trabalho de Methée que serão úteis para nossas considerações posteriores.

### a) Resumo do trabalho de Methée

A toda distribuição  $T$  invariante (Lorentz) em  $R^n$  - O corresponde um par de distribuições  $(T^+, T^-)$  em  $R$  que coincidem sobre a semi-reta  $u < 0$  é tais que

$$(29) \quad T = f_+^* T^+ \quad \text{em } C \bar{\Omega}_3$$

$$(30) \quad T = f_-^* T^- \quad \text{em } C \bar{\Omega}_1$$

$$\text{onde } u = x_\alpha x^\alpha$$

$\Omega_1$  é o semi-cône de luz do futuro

$\Omega_3$  é o semi-cône de luz do passado

$C \bar{\Omega}_1$  é o complemento de  $\Omega_1$  no  $R^4$ .

Ao par  $(\delta_\xi^k, 0)$  onde  $k$  é a ordem de derivação da  $\delta$  concentrada em  $u = \xi$ , associa-se uma distribuição em  $R^n$  - O chama da  $H_\xi^k$ .

Podemos estender a definição a todo  $R^n$  bastando para isso considerá-la nula fora da região de definição.

Quando fazemos  $\xi$  tender a zero aparece um problema.

O limite

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} H_\xi^k$$

pode conter termos divergentes.

Associa-se então ao par  $(\mathcal{O}^{nk}, \mathcal{O})$  a parte finita daquêlê limite, isto é

$$(\mathcal{O}^{nk}, \mathcal{O}) \longleftrightarrow \text{Pf} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{\varepsilon}^k$$

onde  $\longleftrightarrow$  significa associada.

No caso particular  $n = 4$ ,  $k = 0$ , Methée mostra que a parte infinita de

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{\varepsilon}^0$$

é nula.

Nêste caso

$$(31) \quad H_{\varepsilon}^0 \longleftrightarrow (\mathcal{D}^0, \mathcal{O})$$

definida no  $R^4$  e concentrada no semi-cône de luz superior.

Analogamente defini-se

$$(32) \quad \bar{H}^0 \longleftrightarrow (\mathcal{O}, \mathcal{D}^0)$$

concentrada no semi-cône de luz inferior.

$$(33) \quad \mathcal{H}^0 \longleftrightarrow (\mathcal{D}^0, \mathcal{D}^0)$$

concentrada no cône de luz.

Methée (op. cit.) mostra que

$$(34) \quad \square H^0 = 2\pi \mathcal{D}^0$$

$$(35) \quad \square \bar{H}^0 = 2\pi \mathcal{D}^0$$

Segue-se então a importantêta conclusão:

As distribuições-de-Methée  $H^0$  e  $\bar{H}^0$  não tem têrmos divergentes e são "funções de Green" para o problema de D'Allembert.

Usualmente considera-se como função de Green  $(x \frac{2}{u})$  que possui têrmos divergentes responsáveis por efeitos de auto-interação.

O approach de Methée permite eliminar as divergências a priori.

De (34) e (35) segue

$$(36) \quad \square (H^{\circ} - \bar{H}^{\circ}) = 0$$

Methée mostra que toda distribuição concentrada no cone de luz e solução de

$$\square T = 0$$

é um múltiplo da distribuição

$$H^{\circ} - \bar{H}^{\circ}$$

Segue-se daí, como veremos adiante, que a chamada função de Jordán-Pauli (que notaremos D) deve ser escrita

$$(37) \quad D = K (H^{\circ} - \bar{H}^{\circ})$$

b) Aplicações desses resultados

Como  $H^{\circ}$  é concentrado, tem sentido sua convolução com uma distribuição  $j^{\mu}$ , por exemplo.

Mostraremos que a chamada solução retardada se escreve

$$(38) \quad A_{\text{ret}}^{\mu} = -\frac{2}{c} j^{\mu} * H^{\circ}$$

Que (38) é solução de (17') sai da definição de convolução e das propriedades

$$(39) \quad \square (f * g) = (\square f) * g = f * (\square g)$$

$$(40) \quad \delta * f = f * \delta = f$$

Resta mostrar que (38) é a solução retardada.

Podemos ver pela equação (31) que efetivamente ela é retardada.

$$(41) \quad A_{\text{ret}}^{\mu}(x) = -\frac{2}{c} \int j^{\mu}(x') H^{\circ}(x - x') d^4 x'$$

o que resulta claro pela figura 1

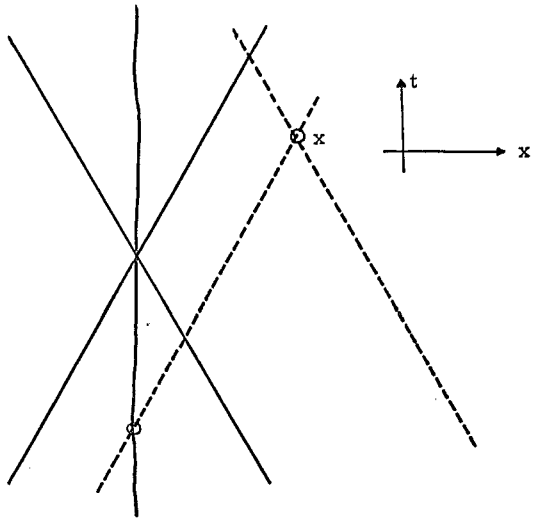


FIGURA 1

Linha de Universo de partícula carregada  
côno de luz de x

Do mesmo modo

$$(42) \quad A_{av}^{\mu} = \frac{-2}{c} j^{\mu} * \bar{H}^{\circ}$$

Podemos definir um campo ligado

$$(43) \quad A_{lig}^{\mu} = \frac{1}{2} (A_{ret}^{\mu} + A_{av}^{\mu})$$

Vê-se que

$$(44) \quad A_{lig}^{\mu} = \frac{-1}{c} j^{\mu} * \mathcal{H}^{\circ}$$

Define-se o campo irradiado como

$$(45) \quad A_{rad}^{\mu} = \frac{1}{2} (A_{ret}^{\mu} - A_{av}^{\mu})$$

isto é

$$(46) \quad A_{rad}^{\mu} \equiv \frac{-1}{c} j^{\mu} * (H^{\circ} - \bar{H}^{\circ})$$

Pondo

$$(47) \quad D = \frac{-1}{2} (H^0 - \bar{H}^0)$$

Vem

$$(48) \quad A_{\text{rad}}^{\mu} = \frac{2}{c} j^{\mu} * D$$

Veremos adiante que a D dada por (47) é a função de Jordan-Pauli (37) com  $k = -1/2$

## 6 - Convolução Limitada

Já utilizamos, na seção anterior, a convolução como um método de criar uma nova distribuição a partir de duas outras. Recordaremos aqui que

$$h(x) = f(x) * g(x)$$

implica em

$$(49) \quad h(x) = \int_{\mathbb{R}^4} f(x') g(x-x') d^4 x'$$

Esta integração estendida a todo espaço-tempo pode ser feita, por exemplo, entre duas superfícies do tipo espaço tomando os limites  $t_1 \rightarrow +\infty$ ,  $t_2 \rightarrow -\infty$  onde  $t_1$  e  $t_2$  estão na figura 2

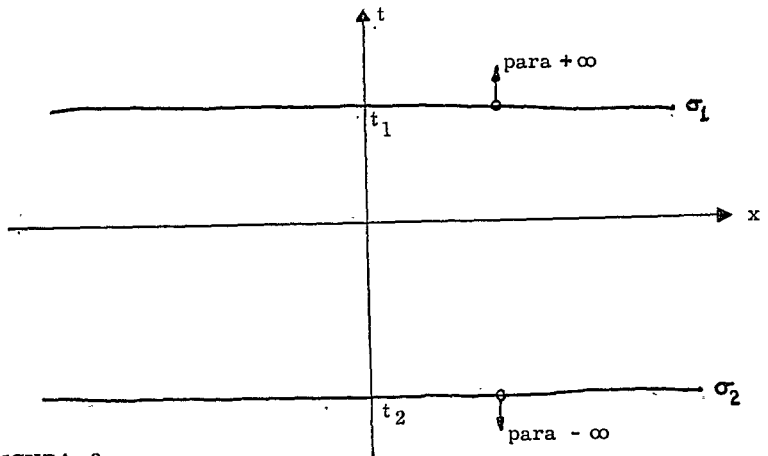


FIGURA 2

Superfícies do tipo espaço ( $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ ) no  $\mathbb{R}^4$ .



Em algumas ocasiões será interessante considerar-se somente um dos limites. Veremos na seção seguinte, quando estudarmos os campos de Wentzel, uma aplicação desse approach.

Definiremos uma convolução limitada - e notaremos

$$(50) \quad T_1 \overset{\sigma}{*} T_2$$

quando a região de integração se estende do infinito passado até  $\sigma$  e

$$(51) \quad T_1 \underset{\sigma}{*} T_2$$

quando se estender desde  $\sigma$  até o infinito futuro.

Definiremos

$$(50') \quad T_1 \overset{\sigma}{*} T_2 = \int_{-\infty}^{\sigma} T_1(x-x') T_2(x') d^4 x'$$

$$(51') \quad T_1 \underset{\sigma}{*} T_2 = \int_{\sigma}^{\infty} T_1(x-x') T_2(x') d^4 x'$$

A aparente perda de simetria destas definições (que podem ser mantidas em certos casos especiais) poderiam torná-las inúteis. Elas terão aplicação e, entre outras, facilitarão nosso simbolismo.

Propiedades destas convoluções

$$(52) \quad \frac{d}{d x_{\alpha}} ( T_1 \overset{\sigma}{*} T_2 ) = \frac{d T_1}{d x_{\alpha}} \overset{\sigma}{*} T_2$$

$$(53) \quad \frac{d}{d x_{\alpha}} ( T_1 \underset{\sigma}{*} T_2 ) = \frac{d T_1}{d x_{\alpha}} \underset{\sigma}{*} T_2$$

$$(54) \quad T_1 \overset{\sigma}{*} T_2 + T_1 \underset{\sigma}{*} T_2 = T_1 * T_2$$

## 7 - Campos de Wentzel

a) Definiremos dois tipos de campo de Wentzel

$$(55) \quad A_{\mu}^W(x, \sigma^-) = \frac{2}{c} \int_{-\infty}^{\sigma} D(x-x') j_{\mu}(x') d^4 x'$$

isto é

$$(55') \quad A_{\mu}^W(x, \sigma^-) = \frac{2}{c} D *_{\sigma} j_{\mu}$$

e

$$(56) \quad A_{\mu}^W(x, \sigma^+) = \frac{2}{c} D *_{\sigma} j_{\mu}$$

b) Relações com os campos avançado e retardado

Mostraremos que

$$(57) \quad A_{\mu}^W(x, \sigma^-) = A_{\mu}^{\text{rad}}(x, \sigma^-) \quad \text{quando} \quad -\infty < x_0 < y_0(\sigma)$$

$$(58) \quad A_{\mu}^W(x, \sigma^-) = \frac{1}{2} A_{\mu}^{\text{ret}}(x, \sigma^-) \quad \text{quando} \quad x_0 > y_0(\sigma)$$

$$(59) \quad A_{\mu}^W(x, \sigma^+) = A_{\mu}^{\text{rad}}(x, \sigma^+) \quad \text{quando} \quad y_0(\sigma) < x_0 < +\infty$$

$$(60) \quad A_{\mu}^W(x, \sigma^+) = \frac{-1}{2} A_{\mu}^{\text{av}}(x, \sigma^+) \quad \text{quando} \quad x_0 < y_0(\sigma)$$

Utilizaremos para demonstrar essas expressões o formalismo introduzido na seção anterior e as definições da seção 5.

Consideremos a expressão (55').

Seja  $-\infty < x_0 < y_0(\sigma)$  (ver figura 3)

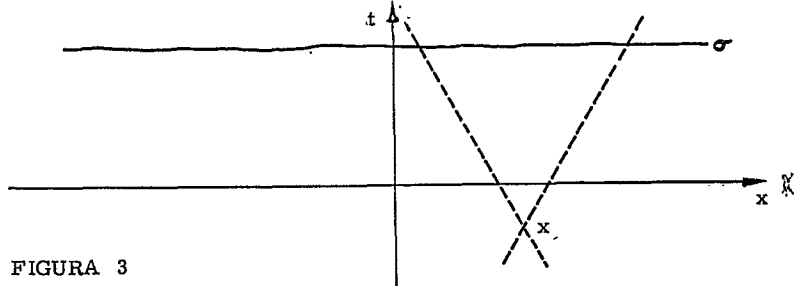


FIGURA 3

Da definição anterior e da equação (48) é imediato que

$$A_{\mu}^w(x, \sigma^-) = A_{\mu}^{\text{rad}}(x, \sigma^-)$$

Se o ponto  $x$  estiver situado acima de  $\sigma$  como na figura 4

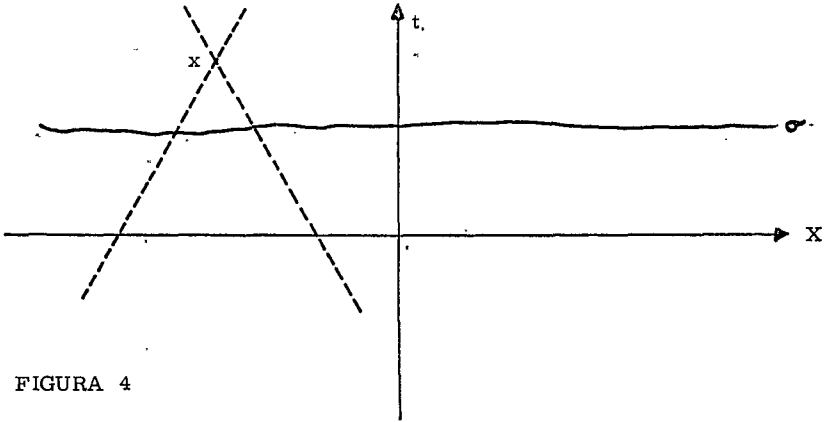


FIGURA 4

vê-se que só as contribuições do passado serão levadas em conta pois a integração deverá ser feita desde  $-\infty$  até  $\sigma$ .

Como

$$D = -\frac{1}{2}(H^0 - \bar{H}^0)$$

teremos

$$(61) \quad A_{\mu}^w(x, \sigma^-) = -\frac{1}{c} H^0 * j_{\mu}$$

isto é 
$$A_{\mu}^w(x, \sigma^-) = \frac{1}{2} A_{\mu}^{\text{ret}}(x, \sigma^-)$$

Demonstração de (59)

Seja  $y_0(\sigma) < x_0 < +\infty$  como na figura 5

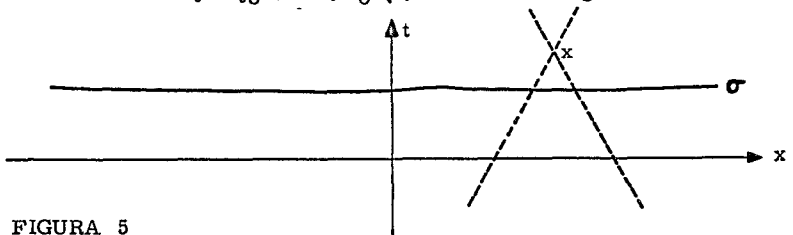


FIGURA 5

$$A_{\mu}^w(x, \sigma^+) = \frac{2}{c} D \underset{\sigma}{*} j_{\mu}$$

$$A_{\mu}^w(x, \sigma^+) = \frac{-1}{c} (H^{\circ} - \bar{H}^{\circ}) \underset{\sigma}{*} j_{\mu}$$

N o caso em consideração temos

$$A_{\mu}^w(x, \sigma^+) = A_{\mu}^{\text{rad}}(x, \sigma^+)$$

pois.

$$A_{\mu}^{\text{rad}}(x, \sigma^+) = \frac{2}{c} D \underset{\sigma}{*} j_{\mu}$$

A verificação de (60) pode ser feita do mesmo modo.

Seja  $x_0 < y_0(\sigma)$  (ver figura 6)

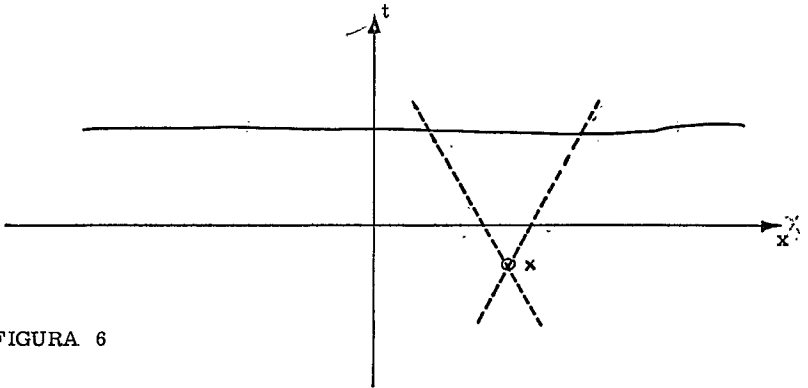


FIGURA 6

Como é claro através da figura 6, só haverá contribuição para o campo de Wentzel avançado da parte superior do cône de luz de  $x$

$$A_{\mu}^w(x, \sigma^+) = \frac{1}{c} \bar{H}^{\circ} \underset{\sigma}{*} j_{\mu}$$

isto é

$$A_{\mu}^w(x, \sigma^+) = \frac{-1}{2} A_{\mu}^{\text{av}}$$

É importante ressaltar que embora  $A_\mu^W$  satisfaça à equação

$$\square A_\mu^W = 0$$

é um campo que interage com as cargas.

Em particular  $A_\mu^W(x, \sigma^-)$  interage com as cargas do passado e  $A_\mu^W(x, \sigma^+)$  com as do futuro

### c) Aplicação ao eletrão puntiforme

Para um eletrão puntiforme a corrente  $j^\mu$  pode ser escrita

$$(62) \quad j^\mu(x) = e c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz^\mu}{ds} \delta(x - z(s)) ds$$

Distingue-se aí três casos.

1º Caso: ponto  $x$  no interior do semi-côno de luz do futuro de  $z(s)$  como na figura 7

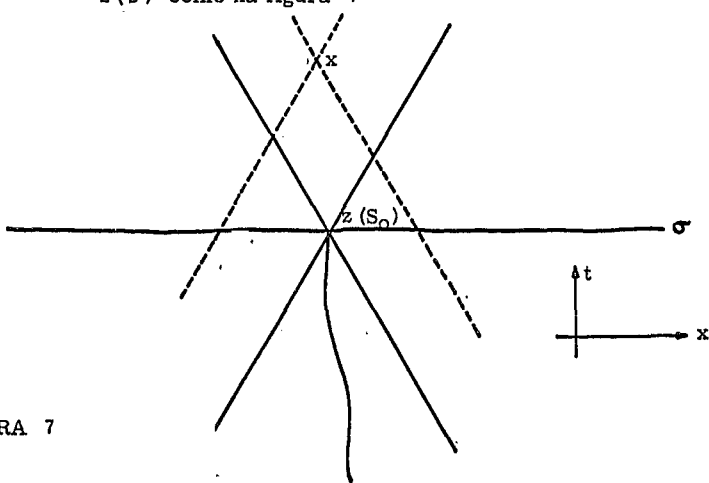


FIGURA 7

Neste caso

$$A_{\mu}^w(x, \sigma^-) = 0$$

pois

$$D(x - z(s)) = 0$$

nestas condições.

2º caso: ponto  $x$  fora do cône de luz de  $z(s_0)$ .

Ver figura 8.

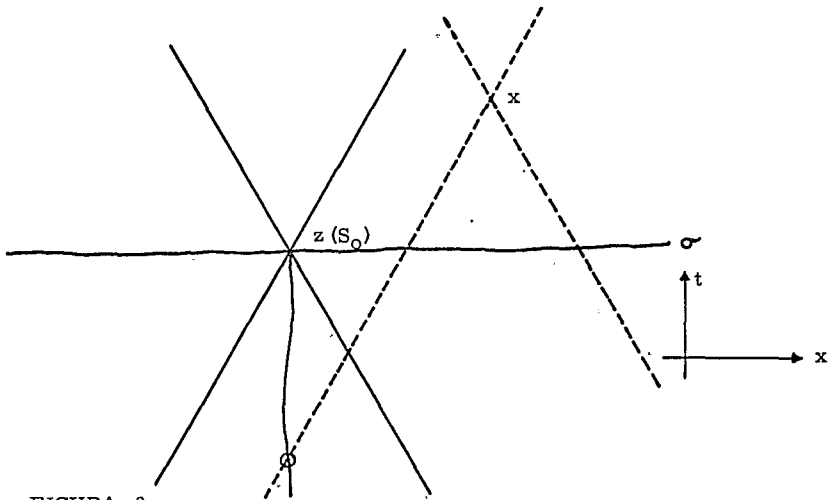


FIGURA 8.

É fácil ver que só a parte  $H^0$  de  $D$  contribuirá para a integral. O campo é retardado.

$$A_{\mu}^w(x, \sigma^-) \cong \frac{1}{2} A_{\mu}^{\text{ret}}(x)$$

3º caso : ponto no interior do semi-cône de luz do passado (figura 9)

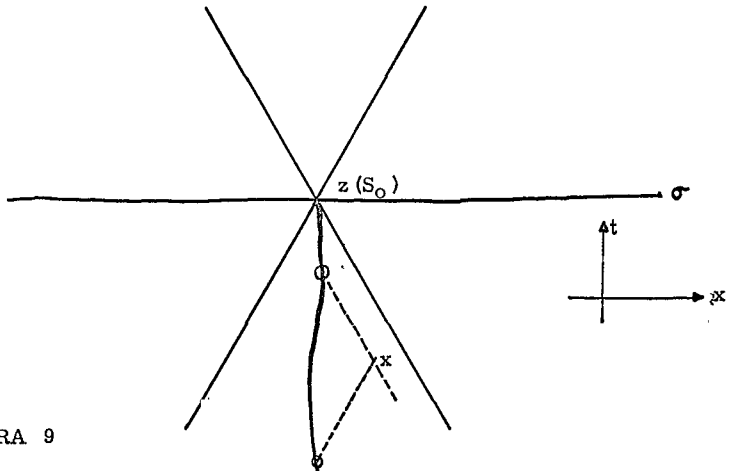


FIGURA 9

Vê-se que há duas contribuições. O campo de Wentzel reduz-se a

$$\frac{1}{2} \{ A_{\mu}^{\text{ret}} - A_{\mu}^{\text{av}} \}$$

que é o campo irradiado  $A_{\mu}^{\text{rad}}$

Concluimos que o campo de Wentzel  $A_{\mu}^{\text{W}}(x, \sigma^{-})$  depende da posição do ponto  $x$  em relação ao cône de luz em  $z(s_0)$ .

Isso sugere uma interpretação interessante em relação ao campo que atua sobre o elétron criado por ele mesmo. A idéia de Lorentz restringe este campo ao retardado, a de Dirac ao campo de irradiação, isto é a uma combinação particular dos campos retardado e avançado.

Lorentz considera que o elétron "deve ser atingido" vindo por fora do cône de luz de uma posição  $x$  qualquer até  $z(s_0)$  - o cône tomado em relação a  $z(s_0)$ .

Dirac sugere que deve-se atingir o elétron vindo por dentro do cône de luz do passado.

Há uma questão interessante quando aplicamos este tratamento ao campo de Wentzel avançado

Consideremos os três casos anteriores.

1º caso: ponto  $x$  no interior do semi-cône de luz do futuro de  $z(s_0)$  como na figura 10.

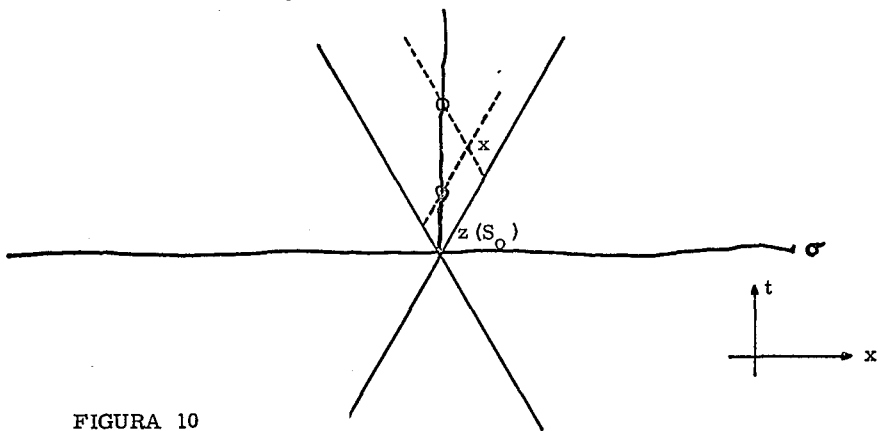


FIGURA 10

$$\text{Como } A_{\mu}^w(x, \sigma^+) = \frac{2}{c} \int_{\sigma}^{+\infty} D(x-x') j_{\mu}(x') d^4 x'$$

no caso em consideração existe duas contribuições (avanzada e retardada)

$$\text{Como } A_{\mu}^{\text{rad}}(x) = \frac{2}{c} \int_{\sigma}^{+\infty} D(x-x') j_{\mu}(x') d^4 x'$$

nêste caso, então tem-se

$$A_{\mu}^w(x, \sigma^+) = A_{\mu}^{\text{rad}}(x)$$

2º caso: ponto  $x$  fora do cône de luz de  $z(s_0)$  - figura 11

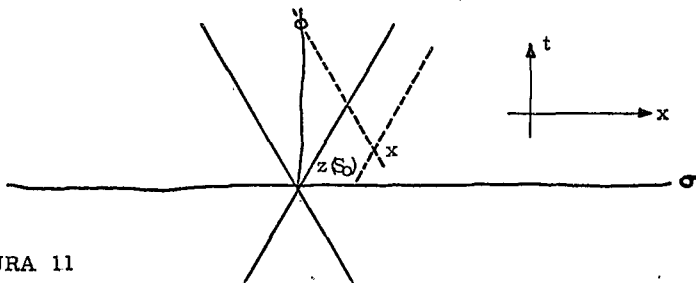


FIGURA 11



Como  $D = -\frac{1}{2} (H^0 - \bar{H}^0)$   
 vê-se que só haverá contribuição da parte de  $H^0$

$$A_{\mu}^W(x, \sigma^+) = \frac{1}{c} \int_{\sigma}^{\infty} \bar{H}^0(x-x') j_{\mu}(x') d^4 x'$$

isto é  $A_{\mu}^W(x, \sigma^+) = -\frac{1}{2} A_{\mu}^{av}(x)$

3º caso: ponto no interior do semi-côno de luz do passado (figura 12)

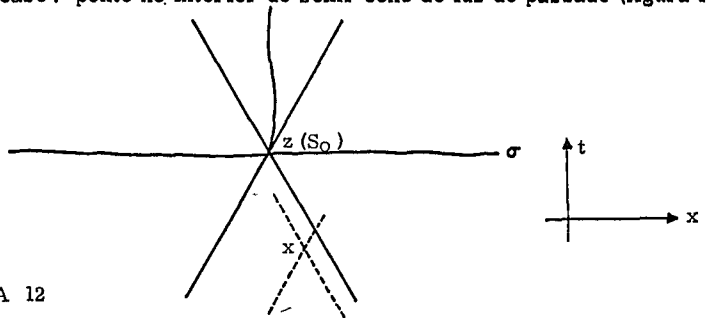


FIGURA 12

É fácil ver que o campo aí será nulo

$$A_{\mu}^W(x, \sigma^+) = 0$$

Uma situação curiosa aparece se superpusermos os campos  
 Wentzel avançado e retardado (figura 13)

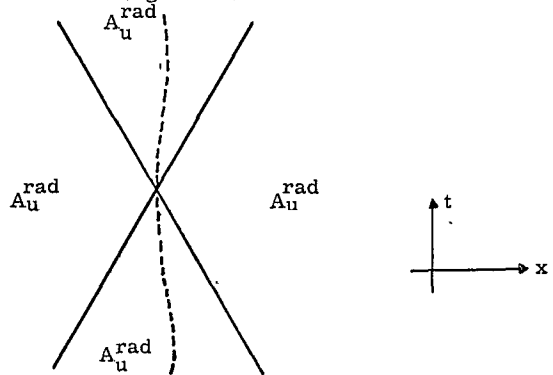


FIGURA 13

Qualquer que seja a posição do ponto  $x$  em relação a  $z(s_b)$ , se considerarmos os campos de Wentzel avançado e retardado, o campo que atuará em  $x$  será o campo irradiado.

8 - A "função" de Jordan-Pauli

Na seção 5 introduzimos uma distribuição invariante, concentrada no cône de luz e solução da equação de D'Allembert. Methée mostrou (op. cit.) que uma distribuição com essas propriedades é um múltiplo de  $H^0 - \bar{H}^0$

$$\text{Chamemos } D' \text{ de } -\frac{1}{2} (H^0 - \bar{H}^0)$$

Mostraremos que essa  $D'$  é a função de Jordan-Pauli.

Costuma-se definir (53) a função de Jordan-Pauli por três propriedades

$$(64) \quad \square D = 0$$

(65)  $D$  é concentrada no cône de luz e Lorentz-invariante

$$(66) \quad \int_{\sigma} \frac{\partial D(x - x')}{\partial x'_{\mu}} d\sigma_{\mu} = 1$$

onde  $\sigma$  é uma superfície do tipo espaço contendo o ponto  $x$

Mostraremos que essas propriedades são super-abundantes, isto é, se uma distribuição satisfaz (64) e (65) satisfará também (66).

De (64) e (65) e da consideração de Methée vista acima temos

$$D = k (H^0 - \bar{H}^0)$$

Aplicando o teorema de Green para o espaço quadri-dimensional à distribuição  $H^0$  como na figura 14 tem-se:

(observação : nas considerações que seguem  $\sigma$  representará - a menos que se diga explicitamente que não - superfícies do tipo espaço).

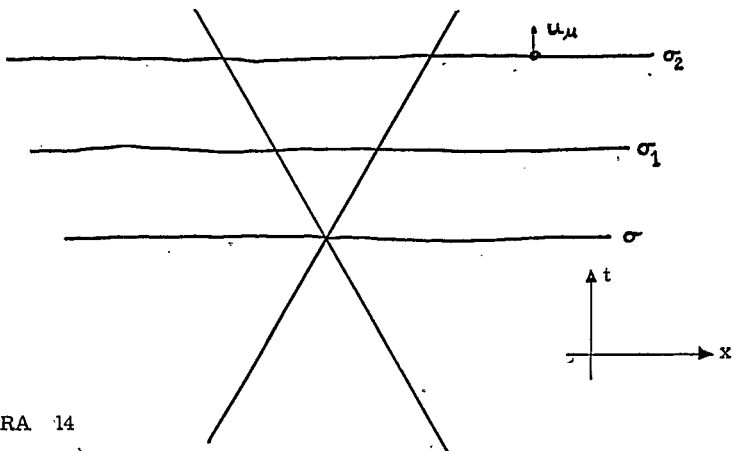


FIGURA 14

$$(67) \quad \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \square H^0 d^4 x = \int_{\sigma_2} \frac{\partial H^0}{\partial x^\mu} d\sigma^\mu - \int_{\sigma_1} \frac{\partial H^0}{\partial x^\mu} d\sigma^\mu.$$

como  $\square H^0 = 2\pi \delta_0$

temos

$$(68) \quad \int_{\sigma_1} \frac{\partial H^0}{\partial x^\mu} d\sigma^\mu = \int_{\sigma_2} \frac{\partial H^0}{\partial x^\mu} d\sigma^\mu$$

O cálculo de  $\int_{\sigma} \frac{\partial H^0}{\partial x^\mu} d\sigma^\mu$

pode ser feito considerando-se  $\sigma$  o limite de  $\sigma_1$

Consideremos agora a integração entre os limites  $\sigma_3$   $\sigma_1$

(figura. 15)

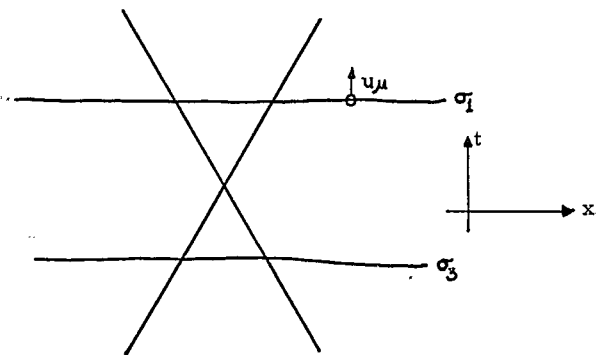


FIGURA 15

$$(69) \quad \int_{\sigma_3}^{\sigma_1} \square H^0 d^4 x = \int_{\sigma_1} \frac{\partial H^0}{\partial x_\mu} d\sigma_\mu - \int_{\sigma_3} \frac{\partial H^0}{\partial x_\mu} d\sigma_\mu$$

Daí

$$(70) \quad \int_{\sigma_1} \frac{\partial H^0}{\partial x_\mu} d\sigma_\mu = 2\pi$$

Então

$$(71) \quad \int_{\sigma} \frac{\partial H^0}{\partial x_\mu} d\sigma_\mu = 2\pi$$

para  $\sigma$  contendo a origem.

Para qualquer superfície  $\sigma'$  do tipo espaço no passado da origem tem-se

$$(72) \quad \int_{\sigma'} \frac{\partial H^0}{\partial x_\mu} d\sigma_\mu = 0$$

Analogamente mostra-se que

$$(73) \quad \int_{\sigma} \frac{\partial \bar{H}^0}{\partial x_\mu} d\sigma_\mu = -2\pi$$

onde  $\sigma$  contém a origem.

$$(74) \quad \int_{\sigma_3} \frac{\partial \bar{H}^0}{\partial x_\mu} d\sigma_\mu = \int_{\sigma_4} \frac{\partial \bar{H}^0}{\partial x_\mu} d\sigma_\mu$$

conforme a figura 16

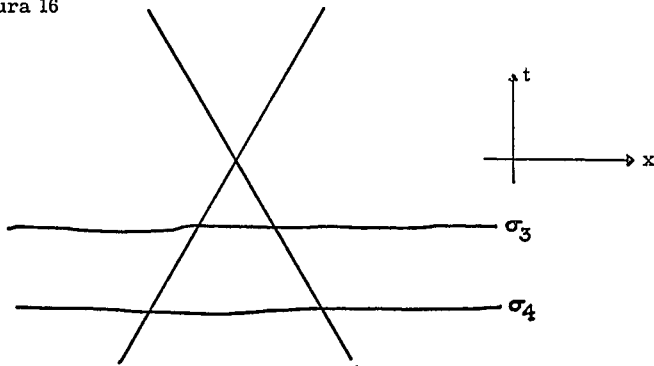


FIGURA 16

Para qualquer superfície  $\sigma'$  no futuro da origem tem-se

$$(75) \quad \int_{\sigma'} \frac{\partial \bar{H}^0}{\partial x_\mu} d\sigma_\mu = 0$$

Dêsses resultados, pondo  $D = -\frac{1}{2} (\dot{H}^0 - \bar{H}^0)$

$$(76) \quad -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial D}{\partial x_\mu} d\sigma_\mu = 1$$

onde  $\sigma$  contém a origem.

observação: para que (76) coincida com (66) deveríamos definir a D

$$\text{como } -\frac{1}{2\pi} (\dot{H}^0 - \bar{H}^0)$$

Omitiremos o  $\pi$  na nossa definição e ao invés de considerarmos a (66) consideraremos a (76)

## 9 - Convolução Superficial

Há vários modos de criar novas distribuições a partir de duas outras. Já vimos algumas dêles e aqui estabeleceremos outro.

Definiremos convolução superficial - e notaremos

$$(77) \quad T_1 \underset{*}{\overset{\sigma}{\circ}} T_2$$

à expressão

$$(77') \quad T_1 \underset{*}{\overset{\sigma}{\circ}} T_2 = \int_{\sigma} dx_{\alpha} \left\{ \frac{\partial T_1(x-x')}{\partial x'_{\alpha}} T_2(x') - T_1(x-x') \frac{\partial T_2(x')}{\partial x'_{\alpha}} \right\}$$

onde  $\sigma$  é superfície do tipo espaço.

É fácil ver que (77) independe de  $\sigma$  se

$$\begin{cases} \square T_1 = 0 \\ \square T_2 = 0 \end{cases}$$

Aplicando a definição (77) às distribuições  $A^{\mu}$  e D tem-se

$$(78) \quad D \underset{*}{\overset{\sigma}{\circ}} A^{\mu} = \int_{\sigma} \left\{ \frac{\partial D(x-x')}{\partial x'_{\alpha}} A^{\mu}(x') - D(x-x') \frac{\partial A^{\mu}(x')}{\partial x'_{\alpha}} \right\} d\sigma_{\alpha}$$

Para  $x \in \sigma$  o segundo têrmo se anula e temos

$$(79) \quad D \underset{*}{\overset{\sigma}{\circ}} A^{\mu} = \int_{\sigma} \frac{\partial D(x-x')}{\partial x'_{\alpha}} A^{\mu}(x') d\sigma_{\alpha}$$

Mas

$$(80) \quad \int_{\sigma} A^{\mu}(x') \frac{\partial D(x-x')}{\partial x'_{\alpha}} d\sigma_{\alpha} = A^{\mu}(x)$$

em virtude de ( 66 ).

Logo,

$$(81) \quad D \frac{\sigma}{*} A^H = A^H$$

o que sugere a interpretação de  $D$  como uma  $\delta$  para a convolução superficial

## 10 - Parênteses de Poisson covariante

É sabido que para um campo livre, isto é que obedeça a equação (23) é possível encontrar uma expressão para o parênteses de Poisson

$$(82) \quad [A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')] ]$$

em dois pontos quaisquer do espaço-tempo.

Define-se o parênteses (82) por

$$(83) \quad [A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')] ] = \int d^3 y \left\{ \frac{\delta A_{\mu}(\vec{x}, t)}{\delta A_{\lambda}(\vec{y}, t)} \frac{\delta A_{\nu}(\vec{x}', t')}{\delta \pi_{\lambda}(\vec{y}, t)} - \frac{\delta A_{\mu}(\vec{x}, t)}{\delta \pi_{\lambda}(\vec{y}, t)} \cdot \frac{\delta A_{\nu}(\vec{x}', t')}{\delta A_{\lambda}(\vec{y}, t)} \right\}$$

A demonstração de que o parênteses para o campo livre vale

$$(84) \quad [A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')] ] = c \delta_{\mu\nu} D(x - x')$$

é bem conhecida (Leite Lopes, 3)

Daremos aqui como exemplificação do método que temos utilizado, uma demonstração de (84)

a) Da definição (83) segue que

$$\square [A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')] ] = 0$$

b) Como o campo é livre, devemos esperar que (82) dependa sômente dos pontos  $x$  e  $x'$  e de constantes.

c) De (83) segue que (82) é anti-simétrica na troca de  $x$  por  $x'$

$$[A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')] ] = - [A_{\mu}(x'), A_{\nu}(x)] ]$$



d) Da propriedade

$$[A_u(x), A_v(x')] = - [A_v(x'), A_u(x)]$$

e da anterior temos

$$[A_\mu(x'), A_\nu(x)] = [A_\nu(x'), A_\mu(x)]$$

o que implica em o parênteses ser nulo quando  $\mu \neq \nu$ .

e) O campo se propagando ao longo do cône de luz permite-nos esperar que grandezas do campo em pontos que não estão no mesmo cône de luz sejam independentes. Isso implica em o parênteses ser concentrado no cône de luz de  $x$ .

Dessas considerações segue que

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = \text{cte} \cdot \delta_{\mu\nu} \cdot D(x - x')$$

onde  $D$  é a "função" de Jordan-Pauli.

Poder-se-ia procurar utilizar o método anterior para calcular o parênteses em certos casos especiais - como, por exemplo, em dois pontos  $x$  e  $x'$  no futuro de uma superfície  $\sigma$  do tipo espaço (figura 17). Isto é, tentar obter

$$[ A_{\mu}^W(x, \sigma^-), A_{\mu}^W(x', \sigma^-) ]$$

levando em conta que

$$A_{\mu}^W(x; \sigma^-) = \frac{1}{2} A_{\mu}^{\text{ret}}(x, \sigma^-) \text{ quando } x_0 > y_0(\sigma).$$

É fácil ver, no entanto, que mesmo neste caso especial, o parênteses depende, além de  $x$  e  $x'$  de  $\sigma$ .

## 11 - A solução não homogênea da equação de onda

Vimos como as distribuições de Methée são úteis para esta belecer-se a solução formal das equações de onda. Veremos agora como aplicar tais distribuições a um caso "concreto".

Ver-se-á que é possível saber o resultado da aplicação de  $H^0$  (ou  $\bar{H}^0$ ) a uma  $\Psi$  de base sem termos uma expressão para  $H^0$ .

Seguiremos as considerações de Methée.

É possível transformar distribuições no  $R^4$  em distribuições no  $R^1$ . Vejamos como.

Vimos que se  $f$  é uma função de  $R^4 \rightarrow R^1$  podemos, limitando-nos à restrição de  $f$  em  $C\bar{\Omega}_3$  (ou  $C\bar{\Omega}_1$ ) escrever:

$$f_+ T [\Psi] = T [f_+^* \Psi]$$

onde  $T$  está definido em  $C\Omega_3 \subset R^4$  e  $f_+ T$  é uma distribuição no  $R^1$

Para  $H^0$ :

$$H^0 [\Psi] = f_+^* \delta_0 [\Psi] = \delta_0 [f_+ \Psi]$$

onde  $\Psi$  é uma forma diferenciável.

Methée mostrou que podemos calcular  $f_+ \Psi$  no semi-côno do futuro substituindo as variáveis  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  por novas variáveis  $x_1, x_2, x_3, u$  onde  $u = x_\alpha x^\alpha$ , para  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ .

O resultado obtido contém a

$$f_+ \alpha = du \int_{\Omega_1} \frac{\varphi(x_1, x_2, x_3, \sqrt{u+r^2})}{2\sqrt{u+r^2}} d^3 x$$

onde  $\alpha$  é uma forma do tipo

$$\alpha = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 .$$

$$\alpha = \Psi(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

Dêsse modo;

$$H^0[\Psi] = \int_{\Omega_1} \frac{\Psi(x_1, x_2, x_3, \sqrt{r^2})}{2 \sqrt{r^2}} d^3x$$

onde

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Aplicação ao campo retardado do eletron puntiforme

$$A_{\mu}^{\text{ret}}(x) = -\frac{2}{c} j_{\mu} * H^0$$

com

$$j_{\mu}(x) = ec \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz_{\mu}}{ds} \delta(x-z(s)) ds$$

$$A_{\mu}^{\text{ret}}(x) [\Psi(x)] = -\frac{2}{c} j_{\mu}(x) H^0(y) [\Psi(x+y)]$$

$$j_{\mu}(x) [\Psi(x+y)] = ec \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz_{\mu}}{ds} \Psi(z(s)+y) ds$$

Chamando  $j_{\mu}(x) [\Psi(x+y)]$  de  $\alpha$  temos

$$H^0(y) [\alpha] = ec \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{\Omega_1} d^3y \frac{dz_{\mu}}{ds} \frac{\Psi(\vec{z}(s) + \vec{y}, S + \sqrt{r^2})}{2 \sqrt{r^2}}$$

Para o campo:

$$A_{\mu}^{\text{ret}}(x) [\Psi(x)] = -e \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{\Omega_1} d^3y \frac{dz_{\mu}}{ds} \frac{\Psi(\vec{z}(s) + \vec{y}, S + \sqrt{r^2})}{2 \sqrt{r^2}}$$

Caso particular  $\mu = 0$

$$A_0^{\text{ret}}[\Psi(x)] = -e \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{\Omega_1} d^3y \frac{\Psi(\vec{z}(s) + \vec{y}, S + \sqrt{r^2})}{\sqrt{r^2}}$$

com

$$r^2 = x_1^2 + y_0^2 + y_2^2$$

## Conclusão

Vimos que a substituição da solução tradicional da função de Green para a equação de onda pelas distribuições de Methée conduzem à eliminação a priori das divergências. A aplicação dessa consideração ao eletrón puntiforme conduz ao interessante resultado: o potencial não diverge na linha de universo do eletrón. É fácil ver que o campo  $F^{\mu\nu}$  também não diverge. Para isso basta considerar-se que

$$F_{\mu\nu}^{\text{ret}}(x) = -\frac{2}{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} (j_\nu * H^0) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} (j_\mu * H^0) \right\}$$

que deve ser entendido como

$$F_{\mu\nu}^{\text{ret}}[\psi] = -\frac{2}{c} \{ j_\nu - j_\mu \} * H^0 \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \right]$$

$$\text{Como } (j_\nu - j_\mu) * H^0$$

é finito sempre, segue que  $F_{\mu\nu}^{\text{ret}}$  também o é.

Vimos em 7-c que os campos de radiação surgem naturalmente se considerarmos os campos de Wentzel avançado e retardado como tendo uma participação equivalente no campo que age sobre o eletrón.

Essa equivalência não é, desse modo, imposta como uma necessidade de evitar infinitos (como na teoria de Dirac), mas como um critério de eliminar um pré-conceito - útil ao nível das relações cotidianas do homem - mas, talvez, desnecessário numa teoria do eletrón.

## REFERÊNCIAS

- 1 - Gelfand, I. M. - Chilov, G. E. .  
"Les distributions" tome I - Dunod
- 2 - Methée, P. D.  
"Sur les distributions invariantes dans le groupe de Lorentz"  
Tesis - comm. math. helv. vol. 28 fasc. 3 - 1954.
- 3 - Lopes, J. Leite  
Fundamentos da eletrodinâmica clássica" c. b. p. f. 1959.
- 4 - Lopes, J. Leite  
"Las simetrias en fisica fundamental: una revisión elemental" - Escuela latinoamericana de física - 1966
- 5 - Scarfiello, R.  
"Sur le changement de variables dans les distributions et leurs transformées de fourier" - Il nuovo cimento, vol. XXII n. 4 - 1954 - pag. 471.
- 6 - Vignon, B.  
"Sur une notation des distributions" Ann. inst. Henri Poincaré vol. 8 n. 1 - pag. 95 - 1967
- 7 - Infeld, L - Plebanski, J.  
"On a further modification of dirac's  $\delta$  function" bull. acad. pol. sci. - cl. 3 vol. 5 n. 1 - pag. 51 - 1957
- 8 - Eliezer, C. J.  
"Rev. Mod. Phys. vol. 19 - pag. 147 (1947)"