CBPF-MO-002/99

Espinores e álgebra de Clifford em qualquer espaço-tempo

Notas de Aulas de Marco Antonio De Andrade[1]

Grupo de Física Teórica da UCP and CBPF (DCP)
Maio de 1999

Contents

1 Álgebra de Clifford e matrizes γ's de Dirac **1**
1.1 Espaço-tempo de dimensão par 1
1.2 Espaço-tempo de dimensão ímpar 6

2 Espinores **7**
2.1 Espinores de Weyl 8
2.2 Tipos de espinores conjugados-de-carga 10

3 Ação para espinores **11**
3.1 O vínculo on-shell 12
3.2 Hermiticidade 13
3.3 Conjugação-de-carga 14
3.4 Análise das condições para a existência da ação para os diferentes tipos de espinores. . 16

4 Estudo das representações **19**
4.1 Representação de Weyl (quiral) 21
4.2 Representação de Majorana. 22
4.3 Uma receita para a construção das matrizes γ's de Dirac 23

A Um pouco mais de álgebra de Clifford das matrizes γ's e papel matemático da matriz C **26**

B Cálculo de ε **27**

C Transformação de Lorentz para um vetor **31**

D Identidade "espinor-vetor" **33**

E Números de Grassmann **34**

[1]e-mail: marco@cbpf.br and marco@inf.ucp.br

1 Álgebra de Clifford e matrizes γ's de Dirac

Os números $a_i (i = 1, 2, \cdots, N)$ que satisfazem as relações

$$\{a_i, a_j\} = 2\delta_{ij}$$

são chamados de números de Clifford. Os números de Clifford, em alguns aspectos, são semelhantes aos números de Grassmann ψ_i discutidos no Apêndice E. A diferença essencial entre estes dois tipos de números está no fato de $a_i^2{=}1$ enquanto $\psi_i^2{=}0$. Como no caso dos números de Grassmann, os números de Clifford a_i geram uma álgebra chamada de álgebra de Clifford, que tem como base o conjunto de monômios

$$1, a_i, a_{ij}, \cdots, a_1 a_2 \cdots a_N \ .$$

De fato cada relação de comutação destes monômios pode ser escrita como uma combinação linear deles próprios, logo formam uma álgebra fechada. Uma vez que o número total de monômios acima é 2^N a álgebra de Clifford expande um espaço linear de dimensão 2^N, i.e., um elemento arbitrário da álgebra pode ser escrito como uma combinação linear dos monômios mostrados acima.

As matrizes γ^μ de Dirac são exemplos típicos de números de Clifford como pode ser visto no Apêndice A, o índice μ contabiliza um total de D matrizes geradoras da álgebra de Clifford. Uma representação *matricial mínima* para poder expressar os 2^D elementos da base que expande esta álgebra deve ser implementada por matrizes $2^{\frac{D}{2}} \times 2^{\frac{D}{2}}$, neste caso D pode, apenas, tomar valores *pares*. Dentre os 2^D elementos, existem $D{+}1$ que anticomutam entre si e possuem a propriedade adicional de qualquer um ser o produto dos D restantes, a menos de fatores ± 1, $\pm\, i$. Podemos fazer a conexão com o espaço-tempo de dimensão ímpar $D{+}1$, associando estas $D{+}1$ matrizes às coordenadas do espaço-tempo. Podemos, também, fazer a conexão com o espaço-tempo de dimensão par D, associando D destas matrizes às coordenadas do espaço-tempo e a matriz que sobra torna-se um dispositivo interno do espaço-tempo com o qual se concebe o que é chamado de quiralidade. Destas conexões surgem, naturalmente, entidades conhecidas como espinores.

1.1 Espaço-tempo de dimensão par

Inicialmente, vão ser tratados os espaços-tempos de dimensão par[2]. A métrica considerada para o espaço-tempo é a métrica generalizada de Minkowski, dada pelos componentes $\eta_{\mu\nu}$, da matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & +1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

As componentes $(+1)$ aparecem $t-$vezes e as componentes (-1) $s-$vezes, e não necessitam estar na ordem mostrada acima; vamos nos referir a esta métrica como $M^{s,t}$. Os índices de Lorentz $(\mu, \nu, \cdots)$

[2]O caso ímpar será discutido no final desta seção

tomam $D{=}s{+}t$ diferentes valores que correspondem às D direções ortogonais do espaço-tempo, s direções tipo-espaço e t tipo-tempo. Vamos considerar que D é, sempre, um número par, a menos quando dito explicitamente o contrário. As D matrizes γ's de Dirac que vão ser associadas ao espaço-tempo serão, aqui, representadas por matrizes $2^{\frac{D}{2}} \times 2^{\frac{D}{2}}$ complexas que satisfazem à relação de anticomutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1} \ , \tag{1}$$

onde $\mathbb{1}$ é a identidade $2^{D/2} \times 2^{D/2}$. A nossa convenção será que as matrizes γ's que satisfazem $(\gamma^{\mu 2} = \mathbb{1})$ e $(\gamma^{\mu 2} = -\mathbb{1})$ serão, respectivamente, associadas às direções tipo-tempo e tipo-espaço. A eq. (1) , também implica que as matrizes γ's têm traço nulo.
$\mathrm{tr}\,(\gamma^\mu) = \mathrm{tr}\,(\pm\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\nu)\,, \quad \nu \neq \mu \ \ e \ \ \gamma^\nu\gamma^\nu = \pm\mathbb{1}$.
Uma vez que $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$.
$\mathrm{tr}\,(\gamma^\mu) = \mathrm{tr}\,(\mp\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\nu)$
Usando, agora, a propriedade cíclica do traço,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,(\gamma^\mu) &= \mathrm{tr}\,(\mp\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\nu) \\ &= -\ \mathrm{tr}\,(\gamma^\mu) \end{aligned}$$

Portanto

$$\mathrm{tr}\,(\gamma^\mu) = 0. \tag{2}$$

As matrizes γ's para qualquer espaço–tempo podem ser escritas como produtos tensoriais da identidade 2×2 e das matrizes de Pauli que são unitárias, portanto as matrizes γ's, também, vão ser unitárias. As matrizes $\eta_A\gamma^{\mu\dagger}$, $\eta_B\gamma^{\mu *}$ e $\eta_C\gamma^{\mu T}$, com os η's iguais a $+1$ ou -1, também satisfazem à eq. (1) e, portanto, pelo teorema fundamental de Pauli [1], são relacionadas a γ^μ por tranformações de equivalência.

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu\dagger} &= -(-1)^t A\gamma^\mu A^{-1} \ , & (3) \\ \gamma^{\mu *} &= \eta B\gamma^\mu B^{-1} \ , (\eta = \pm 1) & (4) \\ \gamma^{\mu T} &= -\eta(-1)^t C\gamma^\mu C^{-1} \ . & (5) \end{aligned}$$

Nas eqs. (3), (4) e (5), respectivamente, fizemos as substituições $\eta_A = -(-1)^t$, $\eta_B = \eta$ e $\eta_C = -\eta(-1)^t$, A escolha para η_A mencionada acima determina que a matriz A seja dada pelo produto de todas as matrizes γ^μ que satisfazem $(\gamma^\mu)^2 = \mathbb{1}$, estas são, na nossa convenção, as matrizes γ's tipo-tempo. Vamos denotar estas matrizes por γ^I. A ordem do produto não é importante já que A pode ser sempre definida a menos de uma fase. Vamos escolher que o produto seja tomado na ordem crescente do índice I.

Em princípio, para D par, temos duas possíveis matrizes B's correspondentes aos dois valores que η pode tomar. Veremos durante o nosso estudo que em duas situações teremos que optar em favor de uma das matrizes B's:

1. Quando estendermos o formalismo aos espaços-tempos com número de dimensões ímpar.

2. Quando estabelecermos as condições para que a ação seja invariante sob conjugação-de-carga.

Estes comentários, também, se aplicam a matriz C, pois, $C \equiv B^T A$. Finalmente as matrizes A, B e C são unitárias, pois elas também podem ser escritas como produtos tensorias da identidade 2×2 e das matrizes de Pauli.

Prova das relações de equivalência:

Suponha que $I = (1,2,...,t)$, logo $A = \gamma^1 ... \gamma^t$, e
$A\,\gamma^\mu A^{-1} = \gamma^1 ... \gamma^t\ \gamma^\mu\ \gamma^t ... \gamma^1$
Sabemos que se um dado γ^μ é tipo-tempo, $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^\mu$, então ele participa de A. Neste caso a última equação fica
$A\,\gamma^\mu\,A^{-1} \ = -(-1)^t\,\gamma^\mu$.
Por outro lado, se γ^μ é tipo-espaço, $\gamma^{\mu\dagger} = -\gamma^\mu$, ele não participa de A, neste caso a equação fica
$A\,\gamma^\mu\,A^{-1} = -(-1)^t(-\gamma^\mu)$.
Portanto, para todos os casos, podemos escrever que
$A\,\gamma^\mu\,A^{-1} \ = \ -(-1)^t\,\gamma^{\mu\dagger}$
ou

$$\gamma^{\mu\,\dagger} = -(-1)^t\,A\,\gamma^\mu\,A^{-1}$$

Seja $\eta = \pm 1$, logo
$\{\eta\,\gamma^{\,\mu\,*},\,\eta\,\gamma^{\,\nu\,*}\} = \ 2\eta^{\,\mu\,\nu}\,\mathbb{1}$
portanto,
$\eta\,\gamma^{\,\mu\,*} = B\,\gamma^{\,\mu}\,B^{-1}$
ou

$$\gamma^{\,\mu\,*} = \eta B\,\gamma^{\,\mu}\,B^{-1}$$

Da última equação resulta que
$\gamma^{\,\mu} = \eta B^{\,-1}\,\gamma^{\,\mu\,*}\,B$
$\gamma^{\,\mu\,T} = \eta B^{\,T}\ \gamma^{\,\mu\,\dagger}\,(B^T)^{-1}$
$\gamma^{\mu\,T} = -\eta\,(-1)^t\left(B^T A\right)\,\gamma^\mu\,\left(B^T A\right)^{-1}$

$$C \equiv B^{\,T}\,A \tag{6}$$

logo:

$$\gamma^{\,\mu\,T} = -\eta\ (-1)^t\ C\,\gamma^\mu\,C^{-1}$$

Outras relações úteis envolvendo A , B e C

$$A^{-1} = (-1)^{t\,(t-1)\,/\,2}\ A \tag{7}$$

$$B^{\,T} = \varepsilon\,B\,, \qquad (\varepsilon = \pm\,1) \tag{8}$$

$$C^{\,T} = \varepsilon\,\eta^{\,t}\ (-1)^{t\,(\,t-1\,)/2}\ C \tag{9}$$

$$A^{*} = \eta^{\,t}\,B\,A\,B^{-1} \tag{10}$$

$$A^{T} = \eta^{\,t}\,C\,A^{\,-1}\,C^{\,-1} \tag{11}$$

Prova das eqs. $(7-11\ )$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \gamma^{t}\ldots\gamma^{2}\gamma^{1} = (-1)^{t-1}(-1)^{t-2}\ldots(-1)^{1}\quad \gamma^{1}\gamma^{2}\ldots\gamma^{t} \\ &= (-1)^{1+2+\ldots+(t-1)}\,A = (-1)^{\Sigma}\,A \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\Sigma &= \quad 1 \quad + \ 2 \quad + \ldots + \quad (t-1) \\ &\quad \underline{+(\ t-1)+(t-2) \quad + \ldots + \qquad 1} \\ 2\Sigma &= \underbrace{t \quad + \quad t \quad + \ldots + \quad t}_{(t-1)\ \text{vezes}} \quad = t\,(t-1) \quad , \quad \text{logo} \end{aligned}$$

$$A^{-1} = (-1)^{\,t\,(t-1)\,/\,2}\,A$$

Da eq. (4) segue que :

$\gamma^{\mu} = \eta\,B^{-1}\,\gamma^{\mu *}B$

$\eta\,B^{-1}\,[\gamma^{\mu *} = \ \eta\,(B^{*})^{-1}\,\gamma^{\mu}\,B^{*}]\ \ B$

$\underbrace{\eta\,B^{-1}\,\gamma^{\mu *}B}_{\gamma^{\mu}} = B^{-1}\,(B^{*})^{-1}\ \gamma^{\mu}B^{*}\,B$

$\gamma^{\mu} = (B^{*}B)^{-1}\ \gamma^{\mu}\ (B^{*}B)$

ou, $[B^{*}B,\gamma^{\mu}] = 0$. Pelo lema de Schur, $B^{*}B = \varepsilon\,\mathbb{1}$, ε é constante. Agora, usando que B é uma matriz unitária[3], podemos escrever que:

$B = \varepsilon\,B^{T} \Rightarrow\ B^{T} = \varepsilon\,B\ =\ \varepsilon^{2}\,B^{T}\ \Rightarrow\ \varepsilon^{2} = 1\ ,$

$$B^{T} = \varepsilon\,B, \qquad \varepsilon = \pm\,1\ .$$

Da eq. (4) resulta, diretamente, que :

$$\begin{aligned} A^{*} &= \eta^{t}\,B\,A\,B^{-1} \\ A &= \eta^{t}\,B^{-1}\,A^{*}B\ , \end{aligned}$$

e com uma simples transposição, obtemos que

$$A^{T} = \eta^{t}\,B^{T}\,A^{-1}(B^{T})^{-1}\ . \tag{12}$$

Usando as eqs. (7) e (8) na equação anterior obtém-se:

$A^{T} = \varepsilon\eta^{t}\,(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}\ \ B^{T}\,A\,B^{-1}$

$\left(B^{T}A\right)^{T} = \varepsilon\eta^{t}\,(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}\left(B^{T}A\right)\ ,$

$$C^{T} = \varepsilon\eta^{t}\,(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}\,C\ .$$

Podemos reescrever a eq. (12) como

$A^{T} = \eta^{t}\,B^{T}(B^{T}A)^{-1}$

$A^{T} = \eta^{t}\,\left(B^{T}A\right)A^{-1}(B^{T}A)^{-1}$

[3]A substituição de B por $e^{i\varphi}B$ não altera a eq. (4), não altera o valor de $B^{*}B$ e não altera a relação $B^{-1} = B^{\dagger}$. Portanto B, e em conseqüência C, podem ser definido a menos de uma fase.

$$A^T = \eta^t \, C \; A^{-1} \, C^{-1}$$

Os valores de ε determinam maneiras diferentes de se impôr a condição de realidade para o espinor, ao valor, $+1$ de ε, temos associado o espinor de Majorana usual que será tratado aqui; ao valor, -1, temos associado o espinor de $SU(2)$-Majorana [2]. Os cálculos que determinam ε em função de s e t serão dados no Apêndice B. O valor de ε para as métricas $M^{s,t}$, $M^{s+1,t}$ e $M^{s,t+1}$ onde $s+t$ = par, é dado por

$$\varepsilon = \cos\frac{\pi}{4}(s-t) - \eta \sin\frac{\pi}{4}(s-t) \tag{13}$$

Note que $s-t$ é sempre par e, portanto, ε, só pode ter os valores ± 1.

Sabemos que a base de Clifford das matrizes γ's com 2^D (D par) elementos contém $D{+}1$ matrizes que anticomutam entre si. No caso da dimensão do espaço–tempo ser igual a D, devemos tomar D delas (as matrizes γ's) e associa-las às direções do espaço–tempo. A matriz que sobra pode ser, sempre, escrita como o produto das outras D já comprometidas e podemos, tomá-la de maneira que o seu quadrado seja igual a $\mathbb{1}$. Uma maneira sistemática de se fazer isto é tomar o produto na ordem crescente do índice μ com um fator, de valor $(-1)^{(s-t)/4}$. Vamos chamar esta matriz de γ_{D+1}. Em seguida listaremos as propriedades de γ_{D+1} e a sua utilidade será vista nas seções subsequentes.

$$\{\gamma_{D+1}, \gamma^\mu\} = 0, \tag{14}$$

$$(\gamma_{D+1})^2 = \mathbb{1} \tag{15}$$

$$\gamma^\dagger_{D+1} = \gamma_{D+1} = (-1)^t \; A \, \gamma_{D+1} \, A^{-1} \tag{16}$$

$$\gamma^*_{D+1} = (-1)^{\frac{(s-t)}{2}} \, B \, \gamma_{D+1} \, B^{-1} \tag{17}$$

$$\gamma^T_{D+1} = (-1)^{\frac{D}{2}} \, C \, \gamma_{D+1} C^{-1} \tag{18}$$

Prova das eqs. (15–18)

Sejam $\gamma^1, ..., \gamma^D$ as D diferentes matrizes γ^μ, logo podemos escrever que

$$\gamma_{D+1} = (-1)^{\frac{(s-t)}{4}} \, \gamma^1 ... \gamma^D \; , \tag{19}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
(\gamma_{D+1})^2 &= (-1)^{\frac{(s-t)}{2}} \, \gamma^1 ... \gamma^D \, \gamma^1 ... \gamma^D \\
&= (-1)^{\frac{(s-t)}{2}} \, (-1)^{\frac{D(D-1)}{2}} \, (+1)^t \, (-1)^s \, \mathbb{1} \\
&= (-1)^{\frac{(s-t)}{2}} \, (-1)^{\frac{-D}{2}} \, (-1)^s \, \mathbb{1} \\
&= (-1)^{(s-t)} \, \mathbb{1}
\end{aligned}$$

$$\left(\gamma_{D+1}\right)^2 = \mathbb{1},$$

$$\begin{aligned}
\gamma^{\dagger}_{D+1} &= (-1)^{\frac{(t-s)}{4}}\,\gamma^{D\,\dagger}...\gamma^{1\dagger}\\
&= (-1)^{\frac{(t-s)}{4}}\,(+1)^{t}\,(-1)^{s}\,\gamma^{D}...\gamma^{1}\\
&= (-1)^{\frac{(t-s)}{4}}\,(-1)^{s}\,(-1)^{\frac{D(D-1)}{2}}\,\gamma^{1}...\gamma^{D}\\
&= (-1)^{\frac{(t-s)}{2}}\,(-1)^{s}\,(-1)^{\frac{-D}{2}}\,\gamma_{D+1}
\end{aligned}$$

$$\gamma^{\dagger}_{D+1} = \gamma_{D+1},$$

$$\begin{aligned}
\gamma^{\dagger}_{D+1} &= (-1)^{\frac{(t-s)}{4}}\,\gamma^{D\,\dagger}...\gamma^{1\dagger}\\
&= (-1)^{\frac{(t-s)}{4}}\,(-1)^{(t+1)D}\,A\,\gamma^{D}...\gamma^{1}A^{-1}\\
&= (-1)^{\frac{(t-s)}{4}}\,(-1)^{\frac{D(D-1)}{2}}\,A\,\gamma^{1}...\gamma^{D}\,A^{-1}\\
&= (-1)^{\frac{(t-s)}{2}}\,(-1)^{\frac{-D}{2}}\,A\,\gamma_{D+1}\,A^{-1}\\
&= (-1)^{-s}\,A\,\gamma_{D+1}\,A^{-1}\\
&= (-1)^{D-s}\,A\,\gamma_{D+1}\,A^{-1}
\end{aligned}$$

$$\gamma^{\dagger}_{D+1} = (-1)^{t}\,A\,\gamma_{D+1}\,A^{-1},$$

$$\begin{aligned}
\gamma^{*}_{D+1} &= (-1)^{\frac{(t-s)}{4}}\,\gamma^{1*}...\gamma^{D*}\\
&= (-1)^{\frac{(t-s)}{4}}\,B\,\gamma^{1}...\gamma^{D}B^{-1}\\
&= (-1)^{\frac{(t-s)}{2}}\,B\,\gamma_{D+1}B^{-1}
\end{aligned}$$

$$\gamma^{*}_{D+1} = (-1)^{\frac{(s-t)}{2}}\,B\,\gamma_{D+1}\,B^{-1},$$

$$\begin{aligned}
\gamma^{T}_{D+1} &= (-1)^{\frac{(s-t)}{4}}\,\gamma^{D\,T}...\gamma^{1T}\\
&= (-1)^{\frac{(s-t)}{4}}\,C\,\gamma^{D}...\gamma^{1}C^{-1}\\
&= (-1)^{\frac{(s-t)}{4}}\,(-1)^{\frac{D(D-1)}{2}}\,C\,\gamma^{1}...\gamma^{D}\,C^{-1}\\
&= (-1)^{\frac{-D}{2}}\,C\,\gamma_{D+1}\,C^{-1}
\end{aligned}$$

$$\gamma^{T}_{D+1} = (-1)^{\frac{D}{2}}\,C\,\gamma_{D+1}\,C^{-1},$$

1.2 Espaço-tempo de dimensão ímpar

Para estender o formalismo já desenvolvido ao caso do espaço–tempo de D+1 dimensões (D par e D=(s+t)) de maneira que a matriz A, definida na eq. (3), permaneça a mesma, precisamos associar à nova direção uma matriz tipo-espaço. Esta matriz que chamaremos γ^D é dada por $\gamma^D = i\gamma_{D+1}$ (γ_{D+1} é a única matriz disponível para a extensão aqui desejada). A exigência que γ^D satisfaça a eq. (4) fixa, dentre os dois possíveis valores para η, o seguinte valor:

$$\eta = -\left(-1\right)^{\frac{(s-t)}{2}} \ , \tag{20}$$

o que pode ser visto da eq. (17). Portanto todo o formalismo previamente desenvolvido para D par pode ser aplicado a D+1, sem se tocar na matriz A. desde que a nova direção seja do tipo-espaço e que tomemos dentre as duas possíveis escolhas para a matriz B (ou C), a correspondente ao valor de η dado na eq. (20). Esta extensão é simbolizada por:

$$M^{s,t},\ \gamma^{\mu} = \left(\gamma^0, ..., \gamma^{D-1}\right) \rightarrow M^{s+1,t},\ \gamma^{\widehat{\mu}} = \left(\gamma^0, ..., \gamma^{D-1}, \gamma^D\right).$$

Do processo de extensão mencionado acima resulta que no final ficamos com, no mínimo, uma direção tipo-espaço. Portanto, o único caso que não pode ser contemplado pelo processo é aquele em que todas as direções são, no final, tipo-tempo e este vai ser simbolizado por $M^{0,t} \rightarrow M^{0,t+1}$ (t par). Para tratarmos deste caso, devemos tomar uma matriz γ^D tipo-tempo ($\gamma^D = \gamma_{D+1}$) e uma vez que $s = 0$, da eq. (17) resulta que

$$\eta = \left(-1\right)^{t/2} \tag{21}$$

A matriz A deve ser modificada de maneira que acomode γ^D, contudo, isto não afeta o formalismo pois, a eq. (3) tem a mesma forma, independente se t é par ou ímpar.

Note que a extensão: $D \rightarrow (D+1)$, não altera o tamanho $\left(2^{\frac{D}{2}} \times 2^{\frac{D}{2}}\right)$ das matrizes γ's.

2 Espinores

Os resultados estabelecidos nesta seção e nas subsequentes são para D par ($SO(s,t)$). Vamos, entretanto, enfatizar que, a menos se dito explicitamente o contrário, os mesmos resultados valem para D+1 ímpar desde que levemos em conta as considerações feitas na subseção 1.2 e substituamos γ^{μ} por $\gamma^{\widehat{\mu}}$.

A idéia dos espinores surge com a observação da identidade obtida no Apêndice D.

$$e^{-\Omega}\gamma^{\mu}e^{\Omega} = \left(e^{\omega}\right)^{\mu}{}_{\nu}\,\gamma^{\nu} \ , \tag{22}$$

onde

$$\Omega \equiv \frac{1}{8}\omega_{\kappa\lambda}\left(\gamma^{\kappa}\gamma^{\lambda} - \gamma^{\lambda}\gamma^{\kappa}\right) \tag{23}$$

e $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ são parâmetros reais que em D=(3+1) se relacionam ao ângulo do referencial que gira e à velocidade do referencial em movimento (boost). Veremos que esta identidade nos permite relacionar, dentro do grupo $SO\,(s,t)$ a representação vetorial com a chamada representação espinorial. Espinores são objetos que sob a atuação do grupo $SO\,(s,t)$, transformam-se como

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{\Omega}\Psi, \tag{24}$$

Portanto, a mais simples representação para o espinor é aquela em que ele possui $2^{\frac{D}{2}}$ componentes complexas. O espinor adjunto $\overline{\Psi}$ é definido tendo a sua transformação sob $SO\,(s,t)$ inversa à transformação de Ψ.
$\Psi' = e^{\Omega}\Psi$
$\Psi'^{\dagger} = \Psi^{\dagger}e^{\Omega^{\dagger}}$
$\Psi'^{\dagger} = \Psi^{\dagger}e^{-A\Omega A^{-1}}$
$\Psi'^{\dagger} = \Psi^{\dagger}Ae^{-\Omega}A^{-1}$
$\Psi'^{\dagger}A = \Psi^{\dagger}Ae^{-\Omega}$
Portanto,

$$\overline{\Psi'} = \overline{\Psi}e^{-\Omega} \quad , \quad \overline{\Psi} \equiv \Psi^{\dagger}A \ . \tag{25}$$

Para se obter um escalar sob $SO(s,t)$, é só tomar o produto $\overline{\Psi}\Psi$. Para se obter um vetor sob $SO(s,t)$, basta fazer o sanduiche da identidade (22) usando $\overline{\Psi}$ e Ψ,

$$\overline{\Psi}e^{-\Omega}\gamma^{\mu}e^{\Omega}\Psi = (e^{\omega})^{\mu}{}_{\nu}\overline{\Psi}\gamma^{\nu}\Psi \tag{26}$$

ou

$$\overline{\Psi'}\gamma^{\mu}\Psi' = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\overline{\Psi}\gamma^{\nu}\Psi \ . \tag{27}$$

Portanto, temos que $\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi$ é um vetor que se transforma sob $SO\,(s,t)$. Podemos, então, associar à cada direção do espaço–tempo uma matriz γ^{μ} e, deste modo, encontrar uma relação entre as representações vetorial e espinorial.

2.1 Espinores de Weyl

Para D par, tal representação é ainda redutível, pois, neste caso, pode-se definir operadores de projeções P_L e P_R, que dividem Ψ em duas partes com transformações uma independente da outra. Em seguida, mostraremos como encontrar estes projetores. As propriedades dos projetores P_L e P_R são a complementaridade e a ortogonalidade, que são propriedades gerais e implicam na idempotência dos projetores, $P^2_{L,R} = P_{L,R}$. E mais uma terceira exclusiva do espaço espinorial. Estas propriedades, respectivamente, são dadas por

$$P_L + P_R = \mathbb{1} \ , \tag{28}$$

$$P_L P_R = P_R P_L = 0 \ , \tag{29}$$

$$[P_L, \Omega] = [P_R, \Omega] = 0 \ . \tag{30}$$

Usando a eq. (28), podemos reescrever a eq. (24) como

$$\Psi'_L + \Psi'_R = e^{\Omega_L + \Omega_R}\left(\Psi_L + \Psi_R\right),$$

onde $\Psi_{L,R} \equiv P_{L,R}\Psi$ e $\Omega_{L,R} \equiv P_{L,R}\Omega$. As eqs. (29) e (30), implicam que $\Omega_L\,\Omega_R = \Omega_R\;\Omega_L = 0$, de modo que

$$\Psi'_L + \Psi'_R = e^{\Omega_L}\,e^{\Omega_R}\left(\Psi_L + \Psi_R\right) = e^{\Omega_L}\left(\Psi_L + e^{\Omega_R}\Psi_R\right) = e^{\Omega_L}\Psi_L + e^{\Omega_R}\Psi_R\;.$$

Operando, novamente, os projetores P_L e P_R no último resultado, repartimos Ψ em partes com transformações independentes. Estas partes são conhecidas como espinores quirais ou de Weyl (left-handed ou right-handed),

$$\Psi'_L = e^{\Omega_L}\Psi_L \quad \text{e} \quad \Psi'_R = e^{\Omega_R}\Psi_R \tag{31}$$

Projetores que satisfazem às eqs. (28), (29) e (30) podem ser escritas em função de um único operador, $\widetilde{\gamma}$ do espaço de Clifford das matrizes γ's e são dados por

$$P_L = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \widetilde{\gamma}\right),\quad P_R = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} - \widetilde{\gamma}\right),$$

com $\widetilde{\gamma}^2 = \mathbb{1}$ e $[\widetilde{\gamma}, \Omega] = 0$. No espaço de Clifford das matrizes γ's encontramos, apenas, duas possibilidades para $\widetilde{\gamma}$ que são: $\widetilde{\gamma} = \mathbb{1}$ e $\widetilde{\gamma} = \gamma_{D+1}$. A única que torna os projetores P_L e P_R *não-triviais* é $\widetilde{\gamma} = \gamma_{D+1}$. No caso do número de direções do espaço-tempo for ímpar γ_{D+1} não é mais disponível, pois foi associado à direção adicional quando feita a extensão descrita na subseção 1.2. Logo, neste caso, os projetores *não* podem ser definidos. No caso do números de direções ser par, γ_{D+1} é disponível e os projetores existem. Portanto, neste caso, os espinores de Weyl podem ser definidos e os projetores são, então, dados por

$$P_L = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \gamma_{D+1}\right),\; P_R = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} - \gamma_{D+1}\right)\;. \tag{32}$$

O Vínculo de Weyl

Seja Ψ um espinor sem qualquer vínculo. O espinor de Weyl-L é obtido a partir de Ψ por

$$\Psi_L = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \gamma_{D+1}\right)\Psi,$$

logo,

$$\gamma_{D+1}\Psi_L = \frac{1}{2}\left(\gamma_{D+1} + \mathbb{1}\right)\Psi = \Psi_L\;.$$

O espinor de Weyl-R é obtido por

$$\Psi_R = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} - \gamma_{D+1}\right)\Psi$$

logo,

$$\gamma_{D+1}\Psi_R = \frac{1}{2}\left(\gamma_{D+1} - \mathbb{1}\right)\Psi = -\Psi_R$$

Portanto, podemos descrever os vínculos de Weyl L e R como:

"Ψ_L e Ψ_R são autovetores de γ_{D+1} com autovalores, respectivamente, dados por $+1$ e -1."

2.2 Tipos de espinores conjugados-de-carga

Da eq. (24), obtém-se que

$$\begin{aligned}(B^{-1}\Psi'^{*}) &= B^{-1}e^{\Omega^{*}}BB^{-1}\Psi^{*}\\ &= e^{B^{-1}\Omega^{*}B}\left(B^{-1}\Psi^{*}\right)\end{aligned}$$

Vamos definir

$$\Psi^{C} \equiv B^{-1}\Psi^{*}\,. \tag{33}$$

Da eq. (8), vê-se que $B^{-1}\Omega^{*}B = \Omega$, logo

$$\begin{aligned}\Psi'^{C} &= e^{\Omega}\,\Psi^{C},\\ \Psi^{C} &= \Psi \Rightarrow \Psi'^{C} = e^{\Omega}\,\Psi = \Psi' \;\text{ ou }\; \Psi^{C} = \Psi \Rightarrow \Psi'^{C} = \Psi'.\end{aligned}$$

E conclui-se que Ψ^{C} transforma-se sob $SO(s,t)$ como o próprio Ψ. Portanto, se imposto o vínculo $\Psi^{C} = \Psi$, este vai ser sempre preservado sob as transformações de $SO(s,t)$. Os espinores que possuem esta propriedade são conhecidos como espinores de Majorana. O **vínculo de Majorana** pode ser reescrito como

$$\Psi = B^{-1}\Psi^{*}\,, \tag{34}$$

e este vínculo em um espinor tem o mesmo papel que o vínculo de realidade em um escalar. Porém, da eq. (34), temos que

$$\begin{aligned}&\Psi^{*} = B\Psi\\ &(\Psi^{*})^{*} = (B\Psi)^{*}\\ &\Psi = B^{*}\Psi^{*} = \overbrace{B^{*}B}^{\varepsilon 1\!\!1}\,\Psi = \varepsilon\Psi\end{aligned}$$

Portanto os espinores de Majorana[4] só podem ser definidos para os espaços-tempos em que $\varepsilon = 1$.

De uma análise idêntica à que foi feita a partir de Ψ na seção 2.1, mostra-se, a partir de Ψ^{C}, que $P_L\Psi^{C}$ e $P_R\Psi^{C}$ transformam-se sob o grupo $SO(s,t)$, respectivamente, como os espinores de Weyl Ψ_L e Ψ_R. Aplicando $P_{L,R}$ ao espinor conjugado de carga obtém-se que

$$P_L\Psi^{C} = P_L B^{-1}\Psi^{*} \quad \text{e} \quad P_R\Psi^{C} = P_R B^{-1}\Psi^{*} \tag{35}$$

Por outro lado, da eq. (17) resulta que:

$$\frac{1}{2}\left[1\!\!1 \pm (-1)^{\frac{(s-t)}{2}}\gamma_{D+1}\right]B^{-1} = B^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(1\!\!1 \pm \gamma_{D+1}\right)\right]^{*} \tag{36}$$

Portanto para $s-t = 0\text{mod}4$, a eq. (36) pode ser reescrita como

$$\left(P_{L,R}\right)B^{-1} = B^{-1}\left(P_{L,R}\right)^{*}.$$

[4]No caso de $\varepsilon = -1$, podemos impor, por exemplo, a conhecida condição de realidade $SU(2)$, e definir os espinores $SU(2)$ - Majorana [2].

Com este resultado, a eq. (35) fica:

$$P_L \Psi^C = B^{-1}\Psi_L^* \equiv \Psi_L^C \quad \text{e} \quad P_R \Psi^C = B^{-1}\Psi_R^* \equiv \Psi_R^C \, .$$

Considerando, agora, o vínculo de Majorana,

$$\Psi_L^C = \Psi_L \Rightarrow \Psi_L'^C = e^{\Omega_L}\Psi_L = \Psi_L' \;\; \text{ou} \;\; \Psi_L^C = \Psi_L \Rightarrow \Psi_L'^C = \Psi_L' \, ,$$

conclui-se que Ψ_L^C e Ψ_R^C, respectivamente, transformam-se sob $SO(s,t)$ como Ψ_L e Ψ_R. Quando $\varepsilon = 1$, o que acontece, no caso tratado aqui, quando $s{-}t = 0\text{mod}8$ (o que pode ser visto da eq. (13)), o vínculo de Majorana sobre estes espinores será preservado sob transformações de $SO(s,t)$, resultando nos chamados espinores de Majorana – Weyl.

Para $s{-}t = 2\text{mod}4$, a eq. (36) pode ser reescrita como

$$(P_{R,L})\, B^{-1} = B^{-1} (P_{L,R})^* \, .$$

Com este resultado, a eq. (35) fica:

$$P_L \Psi^C = B^{-1}\Psi_R^* \equiv \Psi_R^C \quad \text{e} \quad P_R \Psi^C = B^{-1}\Psi_L^* \equiv \Psi_L^C \, .$$

Neste caso, Ψ_L^C e Ψ_R^C, respectivamente, transformam-se sob $SO(s,t)$ como Ψ_R e Ψ_L. E não adianta impor o vínculo de Majorana sobre os espinores de Weyl, pois este não vai ser preservado sob transformações de $SO(s,t)$. O vínculo que podemos impor é

$$\Psi_L = \Psi_R^C \quad \text{ou} \quad \Psi_R = \Psi_L^C,$$

que é o vínculo conhecido de $D = (3+1)$ que expressa, nada mais, que o vínculo de Majorana, só que escrito em termos dos espinores de Weyl.

Exercício

Na verdade o vínculo de Majorana é compatível com o vínculo de Weyl em $s{-}t = 0\text{mod}4$ e incompatível em $s{-}t = 2\text{mod}4$, como será visto em seguida. O vínculo de Majorana e o vínculo de Weyl são, respectivamente, dados por

$$\Psi = B^{-1}\Psi^* \quad , \quad \Psi = \pm\gamma_{D+1}\Psi \, ,$$

e simultaneamente impostos resultam em

$$(-1)^{\frac{s-t}{2}}\, \Psi = \Psi \, , \tag{37}$$

de onde podemos averiguar os resultados lidos no enunciado deste exercício. Usando eq. (17), verifique a eq. (37) mostrada acima.

3 Ação para espinores

Parte livre

A ação livre, S, é um funcional real, adimensional e escalar sob $SO(s,t)$, na qual deve estar contida toda a informação sobre a propagação do espinor Ψ quando este está livre de interações. Portanto deve ser construída a partir de bilineares que contenham informações sobre a dinâmica de Ψ. Já conhecemos um escalar: $\overline{\Psi}\Psi$.

Exercício

Mostre que $\overline{\Psi}\gamma_{D+1}\Psi$ é escalar[5], apenas, se o número de dimensões do espaço-tempo for par, enquanto $\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi$ é escalar para qualquer número de dimensões. Portanto, podemos escrever a ação como

$$S = \int d^D x \mathcal{L}_0 \left(\Psi, \partial_\mu \Psi\right).$$

onde $\mathcal{L}_0 \left(\Psi, \partial_\mu \Psi\right)$ é a densidade Lagrangeana que; pode ser sempre definida a menos de um "termo de superfície", tem a dimensão canônica dada por $mass^D$ e é lida como

$$\mathcal{L}_0 = \alpha \overline{\Psi} \partial\!\!\!/ \Psi + \beta m \overline{\Psi}\Psi + \delta m_5 \overline{\Psi}\gamma_{D+1}\Psi. \tag{38}$$

O último termo de $\mathcal{L}_0$ dado acima só pode ser considerado se o número de dimensões do espaço-tempo for par; m e m_5 são parâmetros reais com dimensão de massa; $\partial\!\!\!/ \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$; α, β e δ são fatores que podem ter valores $(\pm 1, \pm i)$, dependendo do valor de t considerado e são determinados impondo-se que S, seja Hermiteana.

3.1 O vínculo on-shell

A equação que resulta da variação de S é dada por

$$\left(\alpha \partial\!\!\!/ + \beta m \mathbb{1} + \delta m_5 \gamma_{D+1}\right) \Psi = 0\ . \tag{39}$$

Sejam, aqui, x e y constantes que devem ser determinadas pelo vínculo on-shell, logo

$$\begin{aligned}
\left(\alpha \partial\!\!\!/ + x m \mathbb{1} + y m_5 \gamma_{D+1}\right)\left(\alpha \partial\!\!\!/ + \beta m \mathbb{1} + \delta m_5 \gamma_{D+1}\right) \Psi &= \\
\\
[(\alpha^2 \Box + x\beta m^2 + y\delta m_5^2)\mathbb{1} + (x\delta + y\beta) m m_5 \gamma_{D+1} &+ \\
(x+\beta)\alpha m \partial\!\!\!/ + (y-\delta)\alpha m_5 \gamma_{D+1} \partial\!\!\!/]\,\Psi &= 0\ .
\end{aligned}$$

O vínculo on-shell é estabelecido tomando $x = -\beta$, $y = \delta$ e substituindo $\Box$ por $-p^2$, assim a equação acima resulta em

$$\alpha^2 p^2 = \left(-\beta^2 m^2 + \delta^2 m_5^2\right) \tag{40}$$

O espinor que satisfaz as eqs. (39) e (40) é conhecido como espinor de Dirac ou simplesmente espinor on-shell. Em seguida mostraremos uma tabela em que os números de componentes reais (c.r.) é contabilizado a medida em que os diversos vínculos são impostos sobre o espinor. Vamos partir do espinor off-shell que é o espinor sem qualquer vínculo.

Tabela 1

espinor off-shell	$2^{(D+2)/2}$ **c.r.**
Weyl off-shell	$2^{D/2}$ **c.r.**
Majorana off-shell	$2^{D/2}$ **c.r.**
M-W off-shell	$2^{(D-2)/2}$ **c.r.**
espinor on-shell	$2^{D/2}$ **c.r.**
Weyl on-shell	$2^{(D-2)/2}$ **c.r.**
Majorana on-shell	$2^{(D-2)/2}$ **c.r.**
M-W on-shell	$2^{(D-4)/2}$ **c.r.**

[5]Na verdade, este termo é um pseudo-escalar o que pode ser visto se considerarmos a simetria de paridade.

Note que para D=2 o espinor de Majorana-Weyl on-shell tem 1/2 componente real. Este resultado pode ser justificado no fato de tais espinores, neste caso, se moverem em um único sentido da direção espacial, o que será revisto na seção 4.

3.2 Hermiticidade

$$\mathcal{L}_0 = \alpha\Psi^\dagger A\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \beta m\Psi^\dagger A\Psi + \delta m_5\Psi^\dagger A\gamma_{D+1}\Psi,$$
$$\mathcal{L}_0^\dagger = \alpha^*\left(\partial_\mu\Psi^\dagger\right)\gamma^{\mu\dagger}A^{-1}\Psi + \beta^* m\Psi^\dagger A^{-1}\Psi + \delta^* m_5\Psi^\dagger{\gamma_{D+1}}^\dagger A^{-1}\Psi,$$

que pode ser escrito, a menos de um "termo de superfície", como

$$\mathcal{L}_0^\dagger = -\alpha^*\Psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger}A^{-1}\partial_\mu\Psi + \beta^* m\Psi^\dagger A^{-1}\Psi + \delta^* m_5\Psi^\dagger{\gamma_{D+1}}^\dagger A^{-1}\Psi,$$
$$\mathcal{L}_0^\dagger = -\alpha^*\overline{\Psi}A^{-1}\gamma^{\mu\dagger}A^{-1}\partial_\mu\Psi + \beta^* m\overline{\Psi}A^{-1}A^{-1}\Psi + \delta^* m_5\overline{\Psi}A^{-1}{\gamma_{D+1}}^\dagger A^{-1}\Psi\ .$$

Usando que $A^{-1} = (-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}A$,

$$\mathcal{L}_0^\dagger = -\alpha^*(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}\overline{\Psi}A^{-1}\gamma^{\mu\dagger}A\partial_\mu\Psi + \beta^*(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}m\overline{\Psi}\Psi + \delta^*(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}m_5\overline{\Psi}A^{-1}{\gamma_{D+1}}^\dagger A\Psi$$

Usando que $A^{-1}\gamma^{\mu\dagger}A = -(-1)^t\gamma^\mu$ e $A^{-1}{\gamma_{D+1}}^\dagger A = (-1)^t\gamma_{D+1}$,

$$\mathcal{L}_0^\dagger \;=\; \underbrace{\alpha^*(-1)^{\frac{t(t+1)}{2}}}_{\alpha}\overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \underbrace{\beta^*(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}}_{\beta}m\overline{\Psi}\Psi + \underbrace{\delta^*(-1)^{\frac{t(t+1)}{2}}}_{\delta}m_5\overline{\Psi}\gamma_{D+1}\Psi\ ,$$

Para que a ação S seja real, deve-se ter que:

$$\alpha^*(-1)^{\frac{t(t+1)}{2}} = \alpha, \quad \beta^*(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}} = \beta, \quad \delta^*(-1)^{\frac{t(t+1)}{2}} = \delta.$$

Com estas equações, pode-se construir uma tabela, onde os valores de α, β , δ e p^2 (este último dado pela eq. (40)) são mostrados para números diferentes de t.

Tabela 2

t	0mod4	1mod4	2mod4	3mod4
α	1	i	i	1
β	1	1	i	i
δ	1	i	i	1
p^2	$-m^2+m_5^2$	$m^2+m_5^2$	$-m^2+m_5^2$	$m^2+m_5^2$

Um comentário interessante sobre redução dimensional será feito antes de prosseguirmos. Considere o problema de se fazer uma redução dimensional de D = (2+2) para D' = (2+1) e manter o pólo positivo-definido. Devemos escolher dentre as duas possibilidades de massa para D = (2+2), a m_5, pois neste caso $p^2 = m_5^2$ que é positivo-definido, como queriamos. Esta escolha é necessária pois no processo de redução dimensional, o sinal do pólo permanece o mesmo e este é o sinal adequado ao caso de termos uma única direção temporal. Note, entretanto, os seguintes detalhes: Se partimos com um único espinor de D, em D' ficamos com 2 espinores; A massa m_5 é, por definição pseudo-escalar, portanto é natural que o termo de massa em D' = (2+1) seja, também, pseudo-escalar.

Parte de interação

A invariância sobre $U(1)$ local é conseguida as custas de um campo vetorial A_μ, que deve ser introduzido via o acoplamento mínimo usual em que ∂_μ é substituído pela derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$. Deste modo a Lagrangeana $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \alpha\overline{\Psi}\not{D}\Psi + \beta m\overline{\Psi}\Psi + \delta m_5\overline{\Psi}\gamma_{D+1}\Psi, \tag{41}$$

onde $\not{D} \equiv \gamma^\mu D_\mu$, fica invariante sob as transformações de gauge:

$$\Psi \overset{\text{gauge}}{\longrightarrow} e^{ig\omega}\Psi, \quad A^\mu \overset{\text{gauge}}{\longrightarrow} A^\mu - \partial^\mu\omega,$$

g é a constante de acoplamento associado à simetria $U(1)$ e ω é um parâmetro real. Isolando o termo de interação da eq. (41), obtemos que

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = i\alpha g\overline{\Psi}\not{A}\Psi,$$

onde $\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu$. $\mathcal{L}_{\text{int}}$ é, facilmente, visto ser Hermiteano.

Prova:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^\dagger_{\text{int}} &= -i\alpha^* g\Psi^\dagger\gamma^{\mu t}A^{-1}A_\mu\Psi \\
&= -i\alpha^* g\overline{\Psi}\left(A^{-1}\gamma^{\mu\dagger}A^{-1}\right)A_\mu\Psi \\
&= -i\alpha^*(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}g\overline{\Psi}\left(A^{-1}\gamma^{\mu\dagger}A\right)A_\mu\Psi \\
&= i\alpha^*(-1)^{\frac{t(t+1)}{2}}g\overline{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi \\
&= i\alpha g\overline{\Psi}\not{A}\Psi
\end{aligned}$$

Exercício

Usando as propriedades dos projetores P_L e P_R, reescreva a Lagrangeana dada na eq. (41) em termos de Ψ_L e Ψ_R. Com $\mathcal{L}$ escrito nesta forma, teremos um insight de como construir as ações dos supercampos (isto é, a su.sy.) em qualquer espaço-tempo.

Sugestão: Por causa da matriz A, os casos t=par e t=ímpar devem ser tratados separadamente.

3.3 Conjugação-de-carga

Vamos representar o lado direito da eq. (41) por $\mathcal{L}(\Psi, A_\mu)$. Uma vez que esta Lagrangeana é real, pode-se expressar a sua invariância sob a conjugação de carga por

$$\mathcal{C}\mathcal{L}(\Psi, A_\mu)\mathcal{C}^{-1} = [\mathcal{L}(\Psi, A_\mu)]^*. \tag{42}$$

A última igualdade foi motivada pelo fato de que a operação de conjugação de carga sobre um campo resulta no seu complexo conjugado, a menos de uma matriz se este é um espinor, ou um sinal se este é um campo vetorial ou escalar. O operador $\mathcal{C}$ age no espaço de Hilbert da seguinte maneira

$$\mathcal{C}\mathcal{L}(\Psi, A_\mu)\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{L}\left(\Psi^C, A_\mu^C\right), \tag{43}$$

onde $\Psi^C \equiv \mathcal{C}\Psi\mathcal{C}^{-1}$ e $A_\mu^C \equiv \mathcal{C}A_\mu\mathcal{C}^{-1}$ são os campos conjugados de carga. Enfatizaremos que a eq. (43), além da igualdade, expressa também que a conjugação de carga sobre a Lagrangeana original resulta em uma nova Lagrangeana, só que agora acomodando os campos conjugados de carga correspondentes, com exatamente a mesma forma da original. Logo podemos reescrever a eq. (42) como

$$\mathcal{L}\left(\Psi^C, A_\mu^C\right) = \left[\mathcal{L}\left(\Psi, A_\mu\right)\right]^* \tag{44}$$

A nossa estratégia vai ser a partir do lado direito da eq. (44), após alguma álgebra, dispôr seus termos de modo que tenham a mesma forma que os da Lagrangeana original, identificando-se assim os campos conjugados de carga.

Parte livre[6]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0(\Psi) &= \alpha\overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \beta m\overline{\Psi}\Psi + \delta m_5\overline{\Psi}\gamma_{D+1}\Psi \\
\left[\mathcal{L}_0(\Psi)\right]^* &= -\alpha^*\Psi^T\left(A\gamma^\mu\right)^*\partial_\mu\Psi^* - \beta^* m\Psi^T A^*\Psi^* - \delta^* m_5\Psi^T\left(A\gamma_{D+1}\right)^*\Psi^* \\
&= -\alpha^*\eta^{t+1}\left(\Psi^T BA\right)\gamma^\mu\partial_\mu\left(B^{-1}\Psi^*\right) - \beta^*\eta^t m\left(\Psi^T BA\right)\left(B^{-1}\Psi^*\right) \\
&\quad -\delta^*\eta^t(-1)^{\frac{s-t}{2}} m_5\left(\Psi^T BA\right)\gamma_{D+1}B^{-1}\Psi^* \,.
\end{aligned}$$

Neste momento, é interessante identificar o espinor conjugado de carga[7] Ψ^C,

$$\Psi^C = B^{-1}\Psi^* \rightarrow \overline{\Psi^C} = \Psi^T BA,$$

que coincide com o dado na eq. (33) e pode ser reescrito com a ajuda da eq. (6) como $\Psi^C = C^*\overline{\Psi}^T$. Portanto

$$\begin{aligned}
\left[\mathcal{L}_0(\Psi)\right]^* &= -\alpha^*\eta^{t+1}\overline{\Psi^C}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi^C - \beta^*\eta^t m\overline{\Psi^C}\,\Psi^C - \delta^*\eta^t(-1)^{\frac{s-t}{2}} m_5\overline{\Psi^C}\,\gamma_{D+1}\Psi^C \\
&= -\eta^{t+1}(-1)^{\frac{t(t+1)}{2}}\alpha\overline{\Psi^C}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi^C - \eta^t(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}\beta m\overline{\Psi^C}\,\Psi^C + \\
&\quad -\eta^t(-1)^{\frac{t(t+1)}{2}}(-1)^{\frac{s-t}{2}}\delta m_5\overline{\Psi^C}\,\gamma_{D+1}\Psi^C.
\end{aligned}$$

Termo cinético ($\partial\!\!\!/$) – ele existe para um dado valor de t, desde que

$$\eta^{t+1}(-1)^{\frac{t(t+1)}{2}} = -1 \tag{45}$$

Termo de massa (m) – ele existe para um dado valor de t, desde que

$$\eta^t(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}} = -1 \tag{46}$$

Termo de massa (m_5) – ele existe para dados valores de s e t, desde que

$$\eta^t(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}(-1)^{\frac{D}{2}} = -1 \tag{47}$$

Desde que as eqs. (45), (46) e (47) valem, pode-se escrever que

$$\left[\mathcal{L}_0(\Psi)\right]^* = \alpha\overline{\Psi^C}\partial\!\!\!/\Psi^C + \beta m\overline{\Psi^C}\,\Psi^C + \delta m_5\overline{\Psi^C}\,\gamma_{D+1}\Psi^C = \mathcal{L}_0\left(\Psi^C\right)$$

---

[6]Os espinores são anticomutantes. Adota-se para as variáveis anticomutantes a regra $(ab)^* = -a^*b^*$. Mais detalhes podem ser encontrados no Apêndice E.

[7]Lembre-se que Ψ^C pode ser, sempre, definido a menos de uma fase.

Parte de interação

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{int}}\left(\Psi, A_\mu\right) &= i\alpha g\overline{\Psi}\gamma^\mu A_\mu \Psi \\
\left[\mathcal{L}_{\text{int}}\left(\Psi, A_\mu\right)\right]^* &= i\alpha^* g\left(\overline{\Psi}\right)^* \gamma^{\mu *} A_\mu \Psi^* \\
&= i\alpha^* g\Psi^T\left(A\gamma^\mu\right)^* A_\mu \Psi^* \\
&= \underbrace{i\,\eta^{t+1}\left(-1\right)^{\frac{t(t+1)}{2}}}_{-1}\alpha g\left(\Psi^T BA\right)\gamma^\mu A_\mu\left(B^{-1}\Psi^*\right) \\
&= -i\alpha g\overline{\Psi^C}\gamma^\mu A_\mu \Psi^C
\end{aligned}$$

Esta é a Lagrangeana que descreve a interação do "fóton" com um férmion que tem o sinal da carga oposto ao do original, esta é a razão do nome, conjugação-de-carga. A invariância sob conjugação de carga requer que $A_\mu^C = -A_\mu$, desta maneira:

$$\left[\mathcal{L}_{\text{int}}\left(\Psi, A_\mu\right)\right]^* = i\alpha g\overline{\Psi^C}\not{A}^C\Psi^C = \mathcal{L}_{\text{int}}\left(\Psi^C, A_\mu^C\right).$$

3.4 Análise das condições para a existência da ação para os diferentes tipos de espinores.

Dimensões pares

Considerando t par, logo, $t = 2k$, $k \in Z$, resulta que η vai ser fixado, dentre os dois possíveis valores, pelo termo cinético como pode ser visto da eq. (45)

$$\eta(-1)^k = -1 \;\Rightarrow\; \eta(-1)^{t/2} = -1. \tag{48}$$

Da eqs. (46) e (47), obtemos, respectivamente, as relações de consistências

$$(-1)^{t/2} = -1 \;\;,\;\; (-1)^{s/2} = -1. \tag{49}$$

O que nos permite concluir que o termo cinético fixa o valor $\eta = -1$ para $t = 0\text{mod}4$ e o valor $\eta = 1$ para $t = 2\text{mod}4$. O termo de massa com m só é possível para $t = 2\text{mod}4$, e o com m_5, apenas, para $s = 2\text{mod}4$.

No caso de t ímpar, logo, $t = 2k+1$, resulta, agora, que η vai ser fixado pelos termos de massas. Das eqs. (46) e (47), chegamos, respectivamente aos resultados

$$\eta = -(-1)^{(t-1)/2} = (-1)^{(t+1)/2} \;\;,\;\; \eta = (-1)^{(s-1)/2}. \tag{50}$$

Da eq. (45), agora, obtemos a relação de consistência para a existência de um termo cinético para o espinor conjugado

$$(-1)^{(t-1)/2} = 1. \tag{51}$$

Portanto, podemos concluir que o termo cinético existe, apenas, se $t = 1\text{mod}4$. O termo de massa com m fixa o valor $\eta = -1$ para $t = 1\text{mod}4$ e o valor $\eta = 1$ para $t = 3\text{mod}4$ (neste caso não teremos o termo cinético) e o termo com m_5, fixa o valor $\eta = -1$ para $s = 3\text{mod}4$ e o valor $\eta = 1$ para s

= 1mod4. Neste momento é conveniente mostrar explicitamente os resultados que são obtidos da eq. (13).

$s{-}t$	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
ε	η	1	$-\eta$	-1	η	1	$-\eta$	-1	η	1	$-\eta$

(52)

Com estes últimos e mais os resultados listados acima, podemos montar a tabela dada logo em seguida.

Tabela 3

t	$D=2$	$D=4$	$D=6$	$D=8$	$D=10$
0	$-1, \partial, m_5, M$ $1,\ m_5, \not{M}$	$-1, \partial, \not{M}^*$ $1,\ \not{M}^*$	$-1, \partial, m_5, \not{M}$ $1,\ m_5, M$	$-1, \partial, M^*$ $1,\ M^*$	$-1, \partial, m_5, M$ $1,\ m_5, \not{M}$
1	$-1, \partial, m, M^*$ $1, \partial, m_5, M^*$	$-1, \partial, m, m_5, M$ $1, \partial, \not{M}$	$-1, \partial, m, \not{M}^*$ $1, \partial, m_5, \not{M}^*$	$-1, \partial, m, m_5, \not{M}$ $1, \partial, M$	$-1, \partial, m, M^*$ $1, \partial, m_5, M^*$
2	$-1,\ m^-, \not{M}$ $1, \partial, m^-, M$	$-1,\ m^-, m_5, M^*$ $1, \partial, m^-, m_5, M^*$	$-1,\ m^-, M$ $1, \partial, m^-, \not{M}$	$-1,\ m^-, m_5, \not{M}^*$ $1, \partial, m^-, m_5, \not{M}^*$	$-1,\ m^-, \not{M}$ $1, \partial, m^-, M$
3		$-1,\ \not{M}$ $1,\ m, m_5, M$	$-1,\ m_5, M^*$ $1,\ m, M^*$	$-1,\ M$ $1,\ m, m_5, \not{M}$	$-1,\ m_5, \not{M}^*$ $1,\ m, \not{M}^*$
4		$-1, \partial, \not{M}^*$ $1, \not{M}^*$	$-1, \partial, m_5, \not{M}$ $1,\ m_5, M$	$-1, \partial, M^*$ $1,\ M^*$	$-1, \partial, m_5, M$ $1,\ m_5, \not{M}$
5			$-1, \partial, m, \not{M}^*$ $1, \partial, m_5, \not{M}^*$	$-1, \partial, m, m_5, \not{M}$ $1, \partial, M$	$-1, \partial, m, M^*$ $1, \partial, m_5, M^*$
6			$-1,\ m^-, M$ $1, \partial, m^-, \not{M}$	$-1,\ m^-, m_5, \not{M}^*$ $1, \partial, m^-, m_5, \not{M}^*$	$-1, m^-, \not{M}$ $1, \partial, m^-, M$
7				$-1,\ M$ $1,\ m, m_5, \not{M}$	$-1,\ m_5, \not{M}^*$ $1,\ m, \not{M}^*$
8				$-1, \partial, M^*$ $1,\ M^*$	$-1, \partial, m_5, M$ $1,\ m_5, \not{M}$
9					$-1, \partial, m, M^*$ $1, \partial, m_5, M^*$
10					$-1,\ m^-, \not{M}$ $1, \partial, m^-, M$

A tabela acima contém as seguintes informações. Em cada entrada, -1 e $+1$ são os valores de η, e a direita de cada um, estão os símbolos correspondentes. A presença de ∂, m e m_5 denota, respectivamente, a existência de termo cinético, de massa m, de massa m_5 que respeitam a simetria de conjugação-de-carga; a não presença de um deles indica que o termo correspondente viola a conjugação-de-carga. Em algumas situações o sinal $(-)$ aparece rotulando m, isto indica que com o vínculo on-shell, a contribuição de m^2 para p^2 é negativa, como já foi indicado na Tabela 2. Com M e $\not{M}$ vamos denotar, respectivamente, $\varepsilon = 1$ (temos, então a presença de espinores de Majorana) e $\varepsilon = -1$ (temos, apenas, a presença de espinores de $SU(2)$-Majorana). O símbolo $(*)$ aparece sempre quando $s{-}t$ = 0mod4. Com estas últimas notações temos, por exemplo que M^*, denota a presença de espinores de Majorana-Weyl.

Dimensões ímpares

Da mesma forma podemos montar uma tabela referente aos espaços-tempos com número de direções ímpar. Porém, agora, devemos levar em conta as considerações feitas na subsecão 1.2. A tabela é mostrada logo abaixo.

Tabela 4

t	$D=3$	$D=5$	$D=7$	$D=9$	$D=11$
0	$1,\ \not{M}$	$-1, \partial, \not{M}$	$1,\ M$	$-1, \partial, M$	$1,\ \not{M}$
1	$-1, \partial, m, M$	$1, \partial, \not{M}$	$-1, \partial, m, \not{M}$	$1, \partial, M$	$-1, \partial, m, M$
2	$1, \partial, m^-, M$	$-1,\ m^-, M$	$1, \partial, m^-, \not{M}$	$-1,\ m^-, \not{M}$	$1, \partial, m^-, M$
3	$-1, \not{M}$	$1,\ m, M$	$-1,\ M$	$1,\ m, \not{M}$	$-1,\ \not{M}$
4		$-1, \partial, \not{M}$	$1,\ M$	$-1, \partial, M$	$1,\ \not{M}$
5		$1, \partial, \not{M}$	$-1, \partial, m, \not{M}$	$1, \partial, M$	$-1, \partial, m, M$
6			$1, \partial, m^-, \not{M}$	$-1,\ m^-, \not{M}$	$1, \partial, m^-, M$
7			$-1, M$	$1,\ m, \not{M}$	$-1,\ \not{M}$
8				$-1, \partial, M$	$1,\ \not{M}$
9				$1, \partial, M$	$-1, \partial, m, M$
10					$1, \partial, m^-, M$
11					$-1, \not{M}$

Na tabela acima, $D = t+s+1$. Os símbolos nela têm os mesmos significados que na precedente. Nota-se, entretanto, os seguintes detalhes; m_5 não aparece, pois tratam-se, agora, de dimensões ímpares, também não mais aparece o símbolo $(*)$, pois este está relacionado à imposição simultânea dos vínculos de Majorana e Weyl e este último não faz mais sentido no caso aqui considerado. Nas Tabelas 3 e 4 os mesmos símbolos se repetem para um dado valor de t a cada D mod 8 e, também, para um dado valor de D, a cada t mod 4, portanto é imediato inferir o que temos nos espaços-tempos com número de dimensões superior a 11.

Vamos, para finalizar esta seção, reescrever as eqs. (5) e (9) como

$$\gamma^{\mu T} = \zeta C \gamma^\mu C^{-1} \quad \text{e} \quad C^T = \xi C \tag{53}$$

onde,

$$\zeta = -\eta(-1)t \quad \text{e} \quad \xi = \varepsilon\eta^t(-1)^{t(t-1)/2}\,. \tag{54}$$

Já temos η e ε totalmente sob controle; portanto podemos montar uma tabela que nos permite identificar prontamente ζ e ξ

Tabela 5

t	0mod4	1mod4	2mod4	3mod4
ζ	$-\eta$	η	$-\eta$	η
ξ	ε	$\varepsilon\eta$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon\eta$

Nas Tabelas 1–5 estão sumarizados todos os resultados que são necessários para se iniciar um trabalho com férmions, e em conseqüência su.sy., em qualquer espaço-tempo flat, e estes são os principais resultados destas notas. Estes mesmos resultados são obtidos em [3] de uma maneira bastante ilustrativa.

Obs.

Nada nos impede de associar as matrizes γ's tipo-tempo (isto é, as que têm quadrado igual a matriz identidade) às direções espaciais (isto é, as que correspondem às componentes -1 da métrica) e, por sua vez, as matrizes γ's tipo-espaço às direções temporais. Matematicamente isto é realizado substituindo a eq. (1) por

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1} \ , \tag{55}$$

Uma vez que os cálculos foram baseados nas propriedades das matrizes γ's e não da métrica. Tal procedimento tornaria os resultados que foram originariamente obtidos para s espaços e t tempos válidos, agora, para t-espaços e s-tempos e deste modo a dualidade entre s e t é estabelecida.

4 Estudo das representações

Antes de iniciarmos um estudo mais formal das representações das matrizes γ's, vamos fazer um breve comentário sobre D=(1+1), que é um dos espaços-tempos mais simples. A métrica vai ser dada por

$$\eta_{\mu\nu}= \begin{pmatrix} + & \\ & - \end{pmatrix} \tag{56}$$

Neste caso, ε=1 e $s-t = 0$, logo podemos, simultaneamente, impor os vínculos de Majorana e Weyl. Para a massa ser dada por m, e não m_5, devemos escolher $\eta = -1$. As duas matrizes γ's associadas ao espaço-tempo e a matriz γ_3 (versão 2-dimensional da matriz γ_{D+1}) vão ser escolhidas, convenientemente, como

$$\gamma^\mu = (\sigma_y, i\sigma_x); \quad \gamma_3 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma_z, \tag{57}$$

as matrizes de Pauli são dadas por

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{58}$$

A representação de Weyl é definida pela forma diagonal de γ_{D+1}, como na representação acima. Note que $\gamma^{\mu *} = -\gamma^\mu$. Logo, da equação

$$\gamma^{\mu *} = -B\gamma^\mu B^{-1} \tag{59}$$

vemos que $B = \mathbb{1}$, e é isto que caracteriza a representação de Majorana. A representação que tem, simultaneamente, as propriedades das representações de Weyl e Majorana é chamada de representação de Majorana-Weyl (não confundir com o espinor de mesmo nome). Uma outra maneira de identificar a representação de Majorana é através da matriz C , que pela eq. (6) torna-se C=A. No nosso caso temos, apenas, 1 tempo, logo C=γ^0. Na representação de Weyl, os espinores de Weyl aparecem sobrepostos um ao outro,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \quad , \quad \Psi_L = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}. \tag{60}$$

O vínculo de Majorana sobre Ψ, lembrando que $B = \mathbb{1}$, resulta em

$$\Psi^* = \Psi \left\{ \begin{array}{l} \psi^* = \psi \ (1 \text{ g.l.}) \\ \chi^* = \chi \ (1 \text{ g.l.}) \, . \end{array} \right. \tag{61}$$

A condição que Ψ seja on-shell é dada por

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0 \tag{62}$$

ou

$$\begin{pmatrix} -m & \partial_0 - \partial_1 \\ -\partial_0 - \partial_1 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \tag{63}$$

que é equivalente a um sistema de duas equações acopladas

$$\left\{ \begin{array}{l} -m\psi + (\partial_0 - \partial_1)\chi = 0 \\ -(\partial_0 + \partial_1)\psi - m\chi = 0 \, . \end{array} \right. \tag{64}$$

Para desacoplar as equações de movimento devemos tomar $m = 0$, logo

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\partial_0 - \partial_1)\chi = 0 & (1/2 \text{ g.l.}) \\ (\partial_0 + \partial_1)\psi = 0 & (1/2 \text{ g.l.}) \ . \end{array} \right. \tag{65}$$

Estas equações desacopladas são chamadas de equações de Weyl. Os espinores ψ e χ são os chamados espinores de Majorana-Weyl on-shell. e cada um possui 1/2 grau de liberdade. Qual o significado físico de 1/2 g.l.? Vamos tomar a primeira equação do sistema acima:

$$\frac{\partial}{\partial t}\chi = \frac{\partial}{\partial x}\chi. \tag{66}$$

Note que

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x+t) = \frac{df(x+t)}{d(x+t)} \frac{\partial(x+t)}{\partial t} = f' \tag{67}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x+t) = \frac{df(x+t)}{d(x+t)} \frac{\partial(x+t)}{\partial x} = f' \, . \tag{68}$$

Portanto

$$\chi = \chi(x+t) \tag{69}$$

Como um ponto sobre a curva desta função, de ordenada χ_0, se desloca a medida que t passa?

$$\begin{array}{c} \chi(x_0) = \chi_0 \\ \chi(x+t) = \chi_0 \, , \end{array} \tag{70}$$

logo

$$x + t = x_0 \Rightarrow x = x_0 - t \Rightarrow v = -1 \, , \tag{71}$$

o que mostra que χ sempre se desloca para o lado esquerdo de x. O espinor χ é chamado de left-mover e este é o significado físico de 1/2 grau de liberdade. Como exercício, poderia ser mostrado que ψ é um right-mover.

Com este exemplo, em que foi mostrado uma situação onde temos uma representação para as matrizes γ's muito simples, fica fácil nos determos em um estudo mais formal das representações.

Uma notação para a matriz identidade

Vamos denotar por $\mathbb{1}_n$ a matriz identidade $2^{\frac{n}{2}} \times 2^{\frac{n}{2}}$, logo

$$\mathbb{1}_D = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{D-2} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{D-2} \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_{D-2} \tag{72}$$

4.1 Representação de Weyl (quiral)

Sabemos que a matriz γ_{D+1} tem traço nulo e autovalores ± 1, o que pode ser visto das eqs. (2) e (15). Portanto o número de autovalores $+1$ é idêntico ao de -1, e estes podem ser convenientemente ordenados por meio de transformações unitárias. Assim, pode-se encontrar uma representação onde γ_{D+1} possui a forma

$$\gamma_{D+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{D-2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{D-2} \end{pmatrix} = \sigma_z \otimes \mathbb{1}_{D-2}. \tag{73}$$

Esta é a chamada representação de Weyl. Uma vez que

$$\gamma^\mu \gamma_{D+1} + \gamma_{D+1} \gamma^\mu = 0 \ , \tag{74}$$

as eqs. (73) e (74) asseguram a seguinte forma para as matrizes γ^μ :

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{75}$$

o que, por sua vez, conduz à forma diagonal para Ω:

$$\Omega = \frac{1}{8} \omega_{\mu\nu} \left(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu \right) = \begin{pmatrix} \omega_L & 0 \\ 0 & \omega_R \end{pmatrix} \ . \tag{76}$$

Portanto podemos escrever que

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \ , \tag{77}$$

onde $\psi_{L,R}$ são os espinores de Weyl e possuem, cada um, $(2^{(\frac{D}{2})-1})$ componentes complexas. As matrizes γ's na representação de Weyl, exceto γ_{D+1} mostrada na eq. (73), são constituídas de blocos na posição off-diagonal.

Exercício

Escreva os projetores P_L e P_R nesta representação e calcule $\Psi_L = P_L \Psi$, $\Psi_R = P_R \Psi$, $\Omega_L = P_L \Omega$ e $\Omega_R = P_R \Omega$. Nesta representação, os resultados da subseção 2.1 tornam-se mais evidentes.

4.2 Representação de Majorana.

Vamos em seguida mostrar que nos casos em que $\varepsilon = 1$, podemos sempre encontrar uma matriz unitária S que faz a transformação de uma base arbitrária para a base de Majorana. *Uma base de Majorana é definida quando a matriz B é igual a identidade.* Antes de encontrar a matriz S, vamos ver que para $\varepsilon = 1$ é possível expressar a matriz B de uma base arbitrária em uma forma bastante conveniente para o nosso propósito. Para os casos onde $\varepsilon = 1$, a matriz B, além de *unitária*, é *simétrica*, o que pode ser visto na eq. (8). Assim, podemos decompô-la como

$$B = B_1 + iB_2, \quad B_1 \text{ e } B_2 \text{ reais e simétricas,} \tag{78}$$

de modo que

$$B^\dagger B = B_1^2 + B_2^2 + i[B_1, B_2] = \mathbb{1}_D \tag{79}$$

ou

$$\begin{cases} B_1^2 + B_2^2 = \mathbb{1}_D \\ [B_1, B_2] = 0 \end{cases} \tag{80}$$

"Uma vez que B_1 e B_2 são *reais, simétricas* e *comutam* entre si, existe uma matriz *ortogonal* e *real* R e matrizes *diagonais* e *reais* b_1 e b_2 tais que

$$B_1 = Rb_1R^T \ , \ B_2 = Rb_2R^T \text{ ''}, \tag{81}$$

logo

$$B = R(b_1 + ib_2)R^T \equiv RbR^T \ , \tag{82}$$

de modo que

$$B^\dagger B = Rb^*bR^T = \mathbb{1}_D \ . \tag{83}$$

Considerando a seguinte reparametrização,

$$b = e^{i\Lambda}, \quad \Lambda \text{ diagonal e real} \tag{84}$$

podemos reescrever B como

$$B = Re^{i\Lambda}R^T \ . \tag{85}$$

Com este resultado, podemos retornar ao nosso objetivo que é encontrar a matriz S que faz a transformação de uma base arbitrária γ^μ para a base de Majorana $\tilde{\gamma}^\mu$. O teorema fundamental de Pauli [1], é lido como

"As matrizes $\tilde{\gamma}^\mu$ e γ^μ são representações equivalentes da álgebra de Clifford, desde que

$$\tilde{\gamma}^\mu = S\gamma^\mu S^{-1} \text{ ''} \tag{86}$$

Devemos, agora, encontrar a equação para a nova base $\tilde{\gamma}^\mu$ que corresponde à

$$\gamma^{\mu *} = \eta B\gamma^\mu B^{-1} \ . \tag{87}$$

Reescrevendo eq. (87) com γ^μ dado em termos de $\tilde{\gamma}^\mu$, temos que

$$\left(S^{-1}\tilde{\gamma}^\mu S\right)^* = \eta B S^{-1}\tilde{\gamma}^\mu S B^{-1} \tag{88}$$

que resulta em

$$\tilde{\gamma}^{\mu *} = \eta S^* B S^{-1}\tilde{\gamma}^\mu S B^{-1} S^{*-1} \tag{89}$$

ou

$$\tilde{\gamma}^{\mu *} = \eta \widetilde{B}\tilde{\gamma}^\mu \widetilde{B}^{-1} \tag{90}$$

onde

$$\widetilde{B} = S^* B S^{-1}. \tag{91}$$

Assim, pode-se escrever, com a eq.(85), e as propriedades de ortogonalidade e realidade da matriz R, que

$$\widetilde{B} = (SR)^* e^{i\Lambda}(SR)^{-1}. \tag{92}$$

A seguir, pode-se escolher

$$S = e^{\frac{1}{2}i\Lambda} R^T \tag{93}$$

unitária, com o que se chega a

$$\widetilde{B} = \mathbb{1}_D\ , \tag{94}$$

e, conseqüentemente,

$$\tilde{\gamma}^{\mu *} = \eta\tilde{\gamma}^\mu\ . \tag{95}$$

A matriz S dada pela eq. (93) faz a transformação desejada. Substituindo, $B = \mathbb{1}_D$ na eq. (34) resulta que Ψ é real. Estas são as propriedades da chamada *representação de Majorana*. Vemos, também, que vale a igualdade, $C = A$. As matrizes γ's ou são todas reais, ou todas imaginárias puras, o que pode ser visto da eq. (95); conseqüentemente, a matriz Ω será sempre real e qualquer transformação de $SO(s,t)$ vai manter Ψ real.

4.3 Uma receita para a construção das matrizes γ's de Dirac

Uma representação *matricial mínima* para poder expressar os 2^p elementos da base que expande uma álgebra de Clifford deve ser implementada por matrizes $2^{p/2}\times 2^{p/2}$, logo p deve ser *par*. Vamos denotar por γ_p^m o conjunto das p+1 matrizes, contidas nesta base, que anticomutam entre si e, também, por $\mathbb{1}_p$ a identidade deste espaço. Ex. para p=4, temos 5 matrizes que anticomutam entre si, que podem ser as matrizes γ's do espaço-tempo habitual mais $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

As matrizes Γ_D's do espaço de dimensão $D = p+q+2$ (p, q pares $\Rightarrow D =$ par) podem ser dadas na representação de Weyl [4] por

$$\Gamma_D^M \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_D^m \quad\ \ = \sigma_x \otimes \mathbb{1}_q \otimes \gamma_p^m\ ,\ m = (0,\cdots,p) \\ \Gamma_D^{p+1+\overline{m}} = \sigma_y \otimes \gamma_q^{\overline{m}} \otimes \mathbb{1}_p\ ,\ \overline{m} = (0,\cdots,q) \end{array} \right\}, M = (0,\cdots,D-1). \tag{96}$$

Note que $2 \cdot 2^{q/2} \cdot 2^{p/2} = 2^{D/2}$, logo Γ_D^M são matrizes $2^{D/2} \times 2^{D/2}$. Estas matrizes, também podem ser escritas como:

$$\Gamma_D^M = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^M \\ \tilde{\sigma}^M & 0 \end{pmatrix}, \tag{97}$$

onde

$$\begin{cases} \sigma^M = (\mathbb{1}_q \otimes \gamma_p^m \; ; \; -i\gamma_q^{\overline{m}} \otimes \mathbb{1}_p) \\ \tilde{\sigma}^M = (\mathbb{1}_q \otimes \gamma_p^m \; ; \; i\gamma_q^{\overline{m}} \otimes \mathbb{1}_p) \end{cases} \tag{98}$$

Por construção, a métrica η^{MN} do espaço de D dimensões é escrita a partir de η^{mn} e $\eta^{\overline{mn}}$, que são, respectivamente, as métricas dos espaços de $p{+}1$ e $q{+}1$ dimensões. As matrizes Γ_D's satisfazem a

$$\left\{\Gamma_D^M, \Gamma_D^N\right\} = 2\eta^{MN}\mathbb{1}_D \quad . \tag{99}$$

Se $\begin{cases} N = M \Longrightarrow \eta^{MN} = (\eta^{mm}; \eta^{\overline{mm}}) = \text{ assinatura,} \\ N \neq M \Longrightarrow \eta^{MN} = 0 \; . \end{cases}$

Dentre os D sinais da assinatura, teremos t sinais $(+)$ e s sinais $(-)$. Podemos construir a matriz Γ_{D+1} que anticomuta com as demais matrizes Γ_D's da seguinte maneira

$$\Gamma_{D+1} = (-1)^{(s-t)/4}\Gamma_D^0 \cdots \Gamma_D^{D-1} \tag{100}$$

O fator garante que $\Gamma_{D+1}^2 = \mathbb{1}_D$. É fácil verificar que, a menos de um sinal, $\Gamma_{D+1} = \sigma_z \otimes \mathbb{1}_q \otimes \mathbb{1}_p$. Os geradores do grupo SO(s,t), Σ^{MN}, vão ser aqui definidos de maneira que Ω dado na eq. (23) seja escrito como

$$\Omega = \frac{1}{2}\omega_{MN}\Sigma^{MN} \; , \tag{101}$$

logo, são dados por

$$\Sigma^{MN} = \frac{1}{4}\left[\Gamma^M, \Gamma^N\right] = \begin{cases} \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_q \otimes \sigma_p^{mn} \; , \\ \mathbb{1}_2 \otimes \sigma_q^{\overline{mn}} \otimes \mathbb{1}_p \; , \\ \frac{1}{2} i\sigma_z \otimes \gamma_q^{\overline{n}} \otimes \gamma_p^m \; , \end{cases} \tag{102}$$

onde, $\sigma_p^{mn} = \frac{1}{4}\left[\gamma_p^m, \gamma_p^n\right]$, e $\sigma_q^{\overline{mn}} = \frac{1}{4}\left[\gamma_q^{\overline{m}}, \gamma_q^{\overline{n}}\right]$. Portanto, temos um total de geradores dado por $\frac{p(p+1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2} + (p{+}1)(q{+}1) = \frac{D(D-1)}{2}$.

A tabela abaixo mostra os possíveis valores que p e q podem ter para um dado D

Tabela 6

D	p	q
2	0	0
4	2	0
6	4	0
	2	2
8	6	0
	4	2
10	8	0
	6	2
	4	4

Note que para D=4N e D=4N+2, temos N possíveis pares (p,q)'s.

Podemos generalizar os diferentes tipos de representações das matrizes γ's de D=(3+1), dadas nos livros, para D=(s+t) arbitrário. Ex's:
Dirac (Itzykson-Zuber)

$$\Gamma_D^M = \begin{cases} \sigma_z \otimes 1\!\!1_p \otimes \gamma_q^{\overline{m}} \\ i\sigma_y \otimes \gamma_p^m \otimes 1\!\!1_q \end{cases} , \qquad (103)$$

para D=(3+1), γ_2^m=$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ e $\gamma_0^{\overline{m}}$=1 ;
Weyl (Itzykson-Zuber)

$$\Gamma_D^M = \begin{cases} \sigma_x \otimes 1\!\!1_p \otimes \gamma_q^{\overline{m}} \\ i\sigma_y \otimes \gamma_p^m \otimes 1\!\!1_q \end{cases} , \qquad (104)$$

para D=(3+1), γ_2^m=$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ e $\gamma_0^{\overline{m}}$=-1 ;
Majorana (Greiner)

$$\Gamma_D^M = \begin{cases} \sigma_x \otimes 1\!\!1_q \otimes \gamma_p^m \\ \sigma_z \otimes \gamma_q^{\overline{m}} \otimes 1\!\!1_p \end{cases} , \qquad (105)$$

para D=(3+1), γ_2^m=$(\sigma_y, i\sigma_x, i\sigma_z)$ e $\gamma_0^{\overline{m}}$=i .
Maj-Weyl real em D=(3+3) com assinatura $(+---++)$.

$$\Gamma_6^M = \begin{cases} \sigma_y \otimes 1\!\!1_q \otimes \gamma_p^m \\ i\sigma_x \otimes \gamma_q^{\overline{m}} \otimes 1\!\!1_p \end{cases} , \qquad (106)$$

i) p=q=2
m,$\overline{m}$=(0,1,2) e γ_2^m=$\gamma_2^{\overline{m}}$= $(\sigma_y$,$i\sigma_x$,$i\sigma_z)$.
ii) p=4, q=0
m=(0,1,2,3,4) e γ_4^m=$(\gamma^0$,γ^1,γ^2,γ^3,$\gamma_5)$= puras imaginárias; $\overline{m}$=0 e $\gamma_0^{\overline{m}}$=i.
γ_4^m, a menos de γ_5=$i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, são dadas pela eq.(105) no caso (3+1).

A Um pouco mais de álgebra de Clifford das matrizes γ's e papel matemático da matriz C

Seja Γ, o conjunto cujos elementos, $\Gamma^{i_n}_{(n)}$, n=(0,1,...,D) D par, formam a base da álgebra de Clifford gerada pelas D matrizes γ's de Dirac. A álgebra de Clifford é lida das relações de comutação satisfeitas por todos possíveis pares de elementos de Γ; por exemplo, para $D = 4$, Γ contém os seguintes elementos

$$
\begin{array}{l}
\qquad\quad \Gamma^{i_n}_{(n)} \\
\qquad\quad\ \Downarrow \\
\Gamma \left\{ \begin{array}{ll}
\Gamma_{(0)} \leftarrow \mathbb{1}, \quad i_1 = (1) & \\
\Gamma_{(1)} \left\{ \begin{array}{l} \gamma^0 \\ \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \gamma^3 \end{array} \right. , & i_1 = (1,2,3,4) \\
\Gamma_{(2)} \left\{ \begin{array}{l} \gamma^0\gamma^1 \\ \gamma^0\gamma^2 \\ \gamma^1\gamma^2 \\ \gamma^0\gamma^3 \\ \gamma^1\gamma^3 \\ \gamma^2\gamma^3 \end{array} \right. , & i_2 = (1,2,3,4,5,6) \\
\Gamma_{(3)} \left\{ \begin{array}{l} \gamma^0\gamma^1\gamma^2 \\ \gamma^0\gamma^1\gamma^3 \\ \gamma^0\gamma^2\gamma^3 \\ \gamma^1\gamma^2\gamma^3 \end{array} \right. , & i_3 = (1,2,3,4) \\
\Gamma_{(4)} \leftarrow \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & i_4 = (1)
\end{array} \right.
\end{array}
$$

Para D=4, $i_n = \left(1, ..., \binom{4}{n}\right)$. Portanto o número de elementos de Γ é dado por

$$N = \sum_{n=0}^{4} \binom{4}{n} = (1+1)^4 = 2^4 = 16.$$

Em geral, $i_n \left(1, ..., \binom{D}{n}\right)$, logo o número de elementos de Γ é dado por

$$N = \sum_{n=0}^{D} \binom{D}{n} = (1+1)^D = 2^D$$

Portanto, a base da álgebra de Clifford possui 2^D elementos. Um objeto que vive no espaço linear expandido por esta base, para ser expresso, precisa de 2^D componentes. Uma estrutura que carrega naturalmente 2^D componentes é uma matriz $2^{\frac{D}{2}} \times 2^{\frac{D}{2}}$. Portanto as próprias matrizes γ's podem ser deste tamanho, esta representação das matrizes γ's é a de tamanho mínimo e, correspondentemente, um espinor deverá ser representado por uma matriz coluna com $2^{\frac{D}{2}}$ componentes. Seja M um dos objetos que vive no espaço linear mencionado.

$$M = \sum_n \sum_{i_n} A^{i_n}_{(n)} \Gamma^{i_n}_{(n)}, \quad n = (0, 1, ..., D) \text{ e } i_n = \left(1, ..., \binom{D}{n}\right).$$

M nesta base, é descrito pelos 2^D coeficientes $A^{i_n}_{(n)}$. Para a matriz γ^0, por exemplo, todos os $A^{i_n}_n$, com exceção de $A^1_{(1)} = 1$, são nulos.

Dentro de um subconjunto $\Gamma_{(n)}$ de Γ, caracterizado por um valor fixo de n, temos como elementos algumas matrizes simétricas e outras anti-simétricas. A matriz C tem a propriedade de o seu produto com cada uma das matrizes de $\Gamma_{(n)}$ resultar em novas matrizes que são agora, todas simétricas para alguns valores de n, e todas anti-simétricas para os outros valores de n, e estas passam a ser os elementos de um novo subconjunto do espaço das matrizes $2^{\frac{D}{2}} \times 2^{\frac{D}{2}}$ que vamos chamar de $\widetilde{\Gamma}_{(n)}$.

$$\widetilde{\Gamma}_{(n)} = \left\{ C\Gamma^{i_n}_{(n)} \;\; ; \;\; i_n = \left(1, \cdots, \binom{D}{n}\right)\right\} .$$

E por sua vez, $\widetilde{\Gamma}_{(n)}$ define uma nova base $\widetilde{\Gamma}$. Dados $S = \frac{1}{2}\left(M + M^T\right)$ e $A = \frac{1}{2}\left(M - M^T\right)$. Note que $S^T = S$; $A^T = -A$ e $M = S + A$. Isto é, qualquer matriz arbitrária M pode ser reescrita como sendo a soma de uma simétrica S e uma anti-simétrica A. Se M é $N \times N$ sua parte simétrica possui no máximo $\frac{N(N+1)}{2}$ componentes independentes, ao passo que, se é anti-simétrica possui no máximo $\frac{N(N-1)}{2}$ componentes independentes. Assim qualquer base para matrizes $N \times N$ simétricas (anti-simétricas) possui $\frac{N(N+1)}{2}$ $\left(\frac{N(N-1)}{2}\right)$ elementos. Para verificação deste resultado disponha uma matriz simétrica (anti-simétrica) arbitrária e isole, a partir desta, a base mais simples e conte o número de elementos que constituem a base.

Exemplo: Matriz anti-simétrica 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ + a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

A base mais simples para se escrever qualquer matriz anti-simétrica 3×3 consiste dos elementos dados em seguida:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right] ,$$

que ao todo são $3 = \frac{3(3-1)}{2}$ elementos. Se $N = 2^{D/2}$, M pode ser expandida via $\widetilde{\Gamma}$ que contém elementos simétricos e anti-simétricos em números dados, respectivamente, por $\frac{2^{\frac{D}{2}}(2^{\frac{D}{2}}+1)}{2}$ e $\frac{2^{\frac{D}{2}}(2^{\frac{D}{2}}-1)}{2}$, como pode ser entendido dos argumentos mencionados acima.

B Cálculo de ε

Em D=(3+1), temos os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned}
&C^T = -\varepsilon C\\
&(C\gamma^\mu)^T = \gamma^{\mu T}C^T = -C\gamma^\mu C^{-1}(-\varepsilon C) = \varepsilon(C\gamma^\mu)\\
&(C\gamma^\mu\gamma^\nu)^T = \gamma^{\nu T}\gamma^{\mu T}C^T = C\gamma^\nu\gamma^\mu C^{-1}(-\varepsilon C) = -\varepsilon C\gamma^\nu\gamma^\mu = \varepsilon(C\gamma^\mu\gamma^\nu)\\
&(C\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho)^T = \gamma^{\rho T}\gamma^{\nu T}\gamma^{\mu T}C^T = -C\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu C^{-1}(-\varepsilon C) = \varepsilon C\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu = -\varepsilon(C\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho)\\
&(C\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^T = \gamma^{3T}\gamma^{2T}\gamma^{1T}\gamma^{0T}C^T = C\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 C^{-1}(-\varepsilon C) = -\varepsilon C\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = -\varepsilon(C\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)
\end{aligned}$$

ou melhor

$$\begin{aligned}
&\left(C\,\Gamma^{\,i}_{(0)}\right)^T = -\varepsilon\left(C\,\Gamma^{\,i}_{(0)}\right), \quad i_{(\max)} = 1\\
&\left(C\,\Gamma^{\,i}_{(1)}\right)^T = \varepsilon\left(C\,\Gamma^{\,i}_{(1)}\right), \quad i_{(\max)} = 4\\
&\left(C\,\Gamma^{\,i}_{(2)}\right)^T = \varepsilon\left(C\,\Gamma^{\,i}_{(2)}\right), \quad i_{(\max)} = 6\\
&\left(C\,\Gamma^{\,i}_{(3)}\right)^T = -\varepsilon\left(C\,\Gamma^{\,i}_{(3)}\right), \quad i_{(\max)} = 4\\
&\left(C\,\Gamma^{\,i}_{(4)}\right)^T = -\varepsilon\left(C\,\Gamma^{\,i}_{(4)}\right), \quad i_{(\max)} = 1
\end{aligned}$$

Dentre todos os 16 elementos dados acima, 6 satisfazem à $\left(C\,\Gamma^{\,i}_{(n)}\right)^T = -\varepsilon\left(C\,\Gamma^{\,i}_{(n)}\right)$; 10 satisfazem à $\left(C\,\Gamma^{\,i}_{(n)}\right)^T = \varepsilon\left(C\,\Gamma^{\,i}_{(n)}\right)$. Sabemos que $\widetilde{\Gamma}$ deve conter $6 = \frac{4(4-1)}{2}$ elementos anti-simétricos, e $10 = \frac{4(4+1)}{2}$, simétricos. Portanto isto nos obriga a tomar o valor ε =1 para D=(3+1).

Vamos voltar ao caso geral que vale para espaços-tempos com qualquer número de direções. Neste caso temos os seguintes cálculos.

$$\begin{aligned}
&(\gamma^1\gamma^2...\gamma^n)^T = (\gamma^n)^T...(\gamma^2)^T(\gamma^1)^T = \left[\eta(-1)^{t+1}\right]^n C\,\gamma^n...\gamma^2\gamma^1 C^{-1}\\
&\gamma^n...\gamma^2\gamma^1 = (-1)^{[n-1+n-2+...+2+1]}\gamma^1\gamma^2...\gamma^n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\gamma^1\gamma^2...\gamma^n\\
&(\gamma^1\gamma^2...\gamma^n)^T = \left[\eta(-1)^{t+1}\right]^n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}C\,\gamma^1\gamma^2...\gamma^n C^{-1}\\
&(\gamma^1\gamma^2...\gamma^n)^T C = \left[\eta(-1)^{t+1}\right]^n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}C\,\gamma^1\gamma^2...\gamma^n
\end{aligned}$$

$$\left(C\,\gamma^1\gamma^2...\gamma^n\right)^T = \underbrace{\varepsilon\eta^t(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}\left[\eta(-1)^{t+1}\right]^n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}_{\xi_n(t,\eta,\varepsilon)=\pm1}\left(C\,\gamma^1\gamma^2...\gamma^n\right) \tag{107}$$

Portanto, qualquer matriz $\Gamma^{i_n}_{(n)}$ satisfaz a

$$\left(C\;\Gamma^{i_n}_{(n)}\right)^T = \;\xi_n(t,\eta,\varepsilon)\left(C\;\Gamma^{i_n}_{(n)}\right), \quad n = (0,1,...,D)$$

Tendo em vista a equação anterior, podemos escrever uma expressão que conta o número de matrizes anti-simétricas de $\widetilde{\Gamma}$,

$$\sum_{n=0}^{D}\frac{1}{2}(1-\xi_n)\binom{D}{n}.$$

Este contador elimina da contagem todos os subconjuntos $\widetilde{\Gamma}_{(n)}$ cujos valores de n correspondem a matrizes simétricas, restando então aqueles que os valores de n correspondem a matrizes anti-simétricas. O fator $\binom{D}{n}$ conta o número de matrizes de cada subconjunto $\widetilde{\Gamma}_{(n)}$ que sobrevive. Deste modo podemos escrever a equação

$$\sum_{n=0}^{D}\frac{1}{2}\left(1-\xi_n\right)\binom{D}{n}=\frac{1}{2}2^{\frac{D}{2}}\left(2^{\frac{D}{2}}-1\right)\ .$$

O lado direito da equação anterior é o resultado esperado da contagem que é igual ao número de matrizes anti-simetricas de $\widetilde{\Gamma}$. Desta equação obtemos que

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{D}\binom{D}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{D}\xi_n\binom{D}{n}=\frac{1}{2}2^D-\frac{1}{2}2^{\frac{D}{2}}$$

tal que

$$\sum_{n=0}^{D}\xi_n\binom{D}{n}=\left(\sqrt{2}\right)^D \tag{108}$$

Vamos resolver a eq. (108) para encontrar $\varepsilon\left(D,t,\eta\right)$. Substituindo explicitamente ξ_n dado na eq. (107), obtemos que

$$\varepsilon\eta^t\left(-1\right)^{\frac{t(t-1)}{2}}\sum_{n=0}^{D}\left[\eta\left(-1\right)^{t+1}\right]^n\left(-1\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}\binom{D}{n}=\left(\sqrt{2}\right)^D.$$

Logo, ε é dado por

$$\varepsilon=\eta^t\left(-1\right)^{\frac{t(t-1)}{2}}\left(\sqrt{2}\right)^{-D}\sum_{n=0}^{D}\left[\eta\left(-1\right)^{t+1}\right]^n\left(-1\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}\binom{D}{n}. \tag{109}$$

Muita álgebra faz ε ficar numa melhor forma:

$$\varepsilon=\cos\frac{\pi}{4}\left(s-t\right)-\eta\sin\frac{\pi}{4}\left(s-t\right),\quad s=\left(D-t\right). \tag{110}$$

A álgebra necessária, para da eq. (109) se chegar a eq. (110), será exposta em seguida. Com a ajuda da identidade abaixo:

$$\left(-1\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[e^{-i\frac{\pi}{4}}i^n+e^{i\frac{\pi}{4}}\left(-i\right)^n\right],\qquad n\in Z\ , \tag{111}$$

podemos rescrever a eq. (109) como

$$\begin{aligned}\varepsilon\ =\ &\eta^t\left(-1\right)^{\frac{t(t-1)}{2}}\left(\sqrt{2}\right)^{-D}\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{e^{-i\frac{\pi}{4}}\sum_{n=0}^{D}\left[i\eta\left(-1\right)^{t+1}\right]^n\binom{D}{n}+\right.\\&\left.+e^{i\frac{\pi}{4}}\sum_{n=0}^{D}\left[-i\eta\left(-1\right)^{t+1}\right]^n\binom{D}{n}\right\}.\end{aligned}$$

Usando a expressão do binômio de Newton, a última equação pode ser escrita como

$$\varepsilon=\tfrac{\sqrt{2}}{2}\eta^t\left(-1\right)^{\frac{t(t-1)}{2}}\left(\sqrt{2}\right)^{-D}\left\{e^{-i\frac{\pi}{4}}\left[1+i\eta\left(-1\right)^{t+1}\right]^D+e^{i\frac{\pi}{4}}\left[1-i\eta\left(-1\right)^{t+1}\right]^D\right\}.$$

Podemos mostrar que,
$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+i\eta\left(-1\right)^{t+1}\right]=e^{i\frac{\pi}{4}\eta(-1)^{t+1}D}$,

o que pode ser verificado, observando que $\eta\left(-1\right)^{t+1}$ é um sinal, cosseno é uma função par e seno é uma função ímpar. Logo podemos reescrever ε como,

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\eta^t\left(-1\right)^{\frac{t(t-1)}{2}}\left(\sqrt{2}\right)^{-D}\left\{e^{-i\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{2}\right)^{D}e^{i\frac{\pi}{4}\eta(-1)^{t+1}D}+e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{2}\right)^{D}e^{-i\frac{\pi}{4}\eta(-1)^{t+1}D}\right\}\\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\eta^t\left(-1\right)^{\frac{t(t-1)}{2}}\left\{e^{i\frac{\pi}{4}\left[\eta(-1)^{t+1}D-1\right]}+e^{-i\frac{\pi}{4}\left[\eta(-1)^{t+1}D-1\right]}\right\}\\ &= \sqrt{2}\eta^t\left(-1\right)^{\frac{t(t-1)}{2}}\cos\tfrac{\pi}{4}\left[\eta\left(-1\right)^{t+1}D-1\right].\end{aligned}$$

$$\varepsilon=\sqrt{2}\eta^t\left(-1\right)^{\frac{t(t-1)}{2}}\left\{\cos\left[\tfrac{\pi}{4}\eta\left(-1\right)^{t+1}D\right]\cos\tfrac{\pi}{4}+\sin\left[\tfrac{\pi}{4}\eta\left(-1\right)^{t+1}D\right]\sin\tfrac{\pi}{4}\right\}$$
$$\varepsilon=\eta^t\left(-1\right)^{\frac{t(t-1)}{2}}\left\{\cos\left[\tfrac{\pi}{4}\eta\left(-1\right)^{t+1}D\right]+\sin\left[\tfrac{\pi}{4}\eta\left(-1\right)^{t+1}D\right]\right\}$$

Porém, $\eta\left(-1\right)^{t+1}$ é um sinal, cosseno é uma função par e seno é uma função ímpar, logo

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \eta^t\left(-1\right)^{\frac{t(t-1)}{2}}\left\{\cos\tfrac{\pi}{4}D+\eta\left(-1\right)^{t+1}\sin\tfrac{\pi}{4}D\right\}\\ &= \eta^t\left(-1\right)^{\frac{t(t-1)}{2}}\left\{\cos\tfrac{\pi}{4}\left[(s-t)+2t\right]+\eta\left(-1\right)^{t+1}\sin\tfrac{\pi}{4}\left[(s-t)+2t\right]\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \eta^t\left(-1\right)^{\frac{t(t-1)}{2}}\left\{\cos\tfrac{\pi}{4}\left(s-t\right)\cos\tfrac{\pi}{2}t-\sin\tfrac{\pi}{4}\left(s-t\right)\sin\tfrac{\pi}{2}t+\right.\\ &\left.+\eta\left(-1\right)^{t+1}\left[\sin\tfrac{\pi}{4}\left(s-t\right)\cos\tfrac{\pi}{2}t+\cos\tfrac{\pi}{4}\left(s-t\right)\sin\tfrac{\pi}{2}t\right]\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \eta^t\left(-1\right)^{\frac{t(t-1)}{2}}\left\{\cos\tfrac{\pi}{2}t\left[\cos\tfrac{\pi}{4}\left(s-t\right)+\eta\left(-1\right)^{t+1}\sin\tfrac{\pi}{4}\left(s-t\right)\right]+\right.\\ &\left.+\sin\tfrac{\pi}{2}t\left[\eta\left(-1\right)^{t+1}\cos\tfrac{\pi}{4}\left(s-t\right)-\sin\tfrac{\pi}{4}\left(s-t\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

Se t=par, isto é, $t=2k,\ k=0,1,...$

$$\varepsilon=\underbrace{\left(-1\right)^{k(2k-1)}\cos k\pi}_{1}\left[\cos\tfrac{\pi}{4}\left(s-t\right)-\eta\sin\tfrac{\pi}{4}\left(s-t\right)\right]$$
$$\varepsilon=\cos\tfrac{\pi}{4}\left(s-t\right)-\eta\sin\tfrac{\pi}{4}\left(s-t\right)$$

Se t=ímpar, isto é, $t=2k+1,\ k=0,1,...$

$$\varepsilon=\underbrace{\eta\left(-1\right)^{(2k+1)k}\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}_{1}\left[\eta\cos\tfrac{\pi}{4}\left(s-t\right)-\sin\tfrac{\pi}{4}\left(s-t\right)\right]$$
$$\varepsilon=\cos\tfrac{\pi}{4}\left(s-t\right)-\eta\sin\tfrac{\pi}{4}\left(s-t\right)$$

Portanto, para qualquer t, temos que:

$$\varepsilon=\cos\frac{\pi}{4}\left(s-t\right)-\eta\sin\frac{\pi}{4}\left(s-t\right)\ . \qquad (112)$$

Uma vez que $(s-t)$ é sempre par, vê-se que ε toma, apenas, os valores ±1.

C Transformação de Lorentz para um vetor

Considere a transformação para x^μ (ou para qualquer vetor V^μ) dada por

$$\begin{aligned} x'^\mu &= (e^\omega)^\mu{}_\nu \, x^\nu \\ &= \left[\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu + \tfrac{1}{2!}(\omega^2)^\mu{}_\nu + \tfrac{1}{3!}(\omega^3)^\mu{}_\nu + ...\right] x^\nu \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu , \end{aligned} \tag{113}$$

onde, $(\omega^2)^\mu{}_\nu = \omega^\mu{}_\kappa \omega^\kappa{}_\nu$, $(\omega^3)^\mu{}_\nu = \omega^\mu{}_\kappa \omega^\kappa{}_\lambda \omega^\lambda{}_\nu$, etc.

Esta transformação é chamada de transformação de Lorentz para x^μ se

(i) deixa invariante a forma $\eta_{\mu\nu}\, x^\mu x^\nu$,
(ii) $\det(e^\omega)$=1 $\Leftrightarrow$ tr ω=0 ,

onde $\eta_{\mu\nu}$ são as componentes da matriz mética que no nosso caso é dada por

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & +1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \tag{114}$$

As componentes $+1$ aparecem t-vezes e as componentes -1, s-vezes e D=$(s$+$t)$. A condição (i) é equivalente à validade da equação

$$\eta_{\mu\nu}\, \Lambda^\mu{}_\kappa \, \Lambda^\nu{}_\lambda = \eta_{\kappa\lambda}, \tag{115}$$

A eq. (115) e a condição (ii) ficam satisfeitas se

$$\omega^\mu{}_\nu = -\eta_{\nu\rho}\, \omega^\rho{}_\sigma \, \eta^{\sigma\mu} \tag{116}$$

onde $\eta^{\sigma\mu}$ são as componentes da inversa da matriz métrica. Da eq. (116), vê-se que $\omega^\mu{}_\nu$ contabiliza $D(D-1)/2$ parâmetros reais onde D é a dimensão do espaço-tempo, que aqui pode ser par ou ímpar.

Exemplo – Transformação de Lorentz para D=(3+1)

$$\eta_{00} = +1, \ \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1. \tag{117}$$

Os índices $(1, 2, 3)$, vão ser representados por $(i, j, ...)$. De $\omega^\mu{}_\nu$ podemos selecionar as rotações e os boosts. A relação entre $\omega^\mu{}_\nu$ e o ângulo do referencial que gira é dada por

$$\omega^i{}_j = -\omega^j{}_i = \varepsilon_{ijk}\theta^k , \tag{118}$$

o primeiro sinal de igual segue da eq. (116) e ε_{ijk} é o tensor de Levi - Civita com $\varepsilon_{123} = 1$. A relação entre $\omega^\mu{}_\nu$ e a velocidade do referencial em movimento (boost) é dada por

$$\omega^0{}_i = \omega^i{}_0 = -\eta^i = -\text{arctanh}\, v^i , \tag{119}$$

a velocidade da luz foi considerada tendo o valor 1. Separando, na eq. (113), a parte temporal da espacial, obtemos que

$$\begin{aligned} x'^0 &= \Lambda^0{}_0 x^0 + \Lambda^0{}_j x^j \\ x'^i &= \Lambda^i{}_0 x^0 + \Lambda^i{}_j x^j \end{aligned} \tag{120}$$

Exercício – Rotação de θ em torno de x^3

$v^i = 0 \Rightarrow \omega^0{}_i = \omega^i{}_0 = 0,$

$\theta^1 = \theta^2 = 0, \;\; \theta^3 = \theta \Rightarrow \omega^2{}_3 = \omega^3{}_1 = 0, \;\; \omega^1{}_2 = -\omega^2{}_1 = \theta.$

Mostre, usando a expansão em série dada na eq. (113), que

$$\begin{aligned} &\Lambda^0{}_0 = \Lambda^3{}_3 = 1 \\ &\Lambda^1{}_1 = \Lambda^2{}_2 = 1 - \tfrac{1}{2!}\theta^2 + ... = \cos\theta \\ &\Lambda^1{}_2 = -\Lambda^2{}_1 = \theta - \tfrac{1}{3!}\theta^3 + ... = \sin\theta \end{aligned}$$

e os demais $\Lambda^\mu{}_\nu = 0$. Logo, substituindo estes resultados na eq. (120), obtemos que

$$\begin{cases} x'^0 = x^0 \\ x'^1 = \cos\theta \cdot x^1 + \sin\theta \cdot x^2 \\ x'^2 = -\sin\theta \cdot x^1 + \cos\theta \cdot x^2 \\ x'^3 = x^3 \, , \end{cases}$$

Exercício – Boost na direção de x^1 com velocidade v

$v^1 = v, \;\; v^2 = v^3 = 0 \Rightarrow \omega^0{}_1 = \omega^1{}_0 = \operatorname{arctanh} v = \eta, \;\; \omega^0{}_2 = \omega^0{}_3 = 0$

$\theta^k = 0 \Rightarrow \omega^i{}_j = 0,$

Mostre, usando, a expansão em série dada na eq. (113), que

$$\begin{aligned} &\Lambda^0{}_0 = \Lambda^1{}_1 = 1 + \tfrac{1}{2!}\eta^2 + ... = \cosh\eta \\ &\Lambda^0{}_1 = \Lambda^1{}_0 = -\left(\eta + \tfrac{1}{3!}\eta^3 + ...\right) = -\sinh\eta. \\ &\Lambda^2{}_2 = \Lambda^3{}_3 = 1 \end{aligned}$$

e os demais $\Lambda^\mu{}_\nu = 0$. Considerando que

$$\tanh\eta = v \begin{cases} \cosh\eta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \equiv \gamma \\ \sinh\eta = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma\, v \end{cases}$$

Segue da eq. (120), que

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma\,(x^0 - v x^1) \\ x'^1 = \gamma\,(x^1 - v x^0) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3, \end{cases}$$

D Identidade "espinor-vetor"

Agora vamos deduzir a identidade que permite relacionar a transformação de Lorentz espinorial com a vetorial. A equação que resulta da invariância da forma quadrática $\eta_{\mu\nu}x^\lambda x^\mu$ é dada por

$$\eta_{\lambda\mu}\,\Lambda^\lambda{}_\kappa\,\Lambda^\mu{}_\rho = \eta_{\kappa\rho}, \tag{121}$$

Multiplicando ambos os lados por $\eta^{\rho\sigma}\Lambda^\nu{}_\sigma$,

$$\eta_{\lambda\mu}\,\Lambda^\lambda{}_\kappa\,(\eta^{\rho\sigma}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma) = \Lambda^\nu{}_\kappa = \eta_{\lambda\mu}\,\Lambda^\lambda{}_\kappa\,(\eta^{\mu\nu})\ . \tag{122}$$

Logo:

$$\eta_{\lambda\mu}\,\Lambda^\lambda{}_\kappa\,(\eta^{\mu\nu} - \eta^{\rho\sigma}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma) = 0 \tag{123}$$

Portanto:

$$\eta^{\mu\nu} = \eta^{\rho\sigma}\Lambda^\mu{}_\rho\,\Lambda^\nu{}_\sigma \tag{124}$$

Usando a eq. (124), podemos computar que

$$\{\Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho, \Lambda^\nu{}_\sigma\gamma^\sigma\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}\ . \tag{125}$$

Então, pelo teorema fundamental de Pauli, existe a transformação de similaridade dada em seguida:

$$S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^\mu\ S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\,\gamma^\nu\ . \tag{126}$$

Em termos de $\omega^\mu{}_\nu$ esta fica

$$S^{-1}(\omega)\,\gamma^\mu\ S(\omega) = (e^\omega)^\mu{}_\nu\,\gamma^\nu\ .$$

Quem é $S(\omega)$?

Para responder a esta questão, vamos introduzir a matriz Ω dada por

$$\Omega \equiv \frac{1}{8}\omega_{\kappa\lambda}[\gamma^\kappa, \gamma^\lambda]\ , \tag{127}$$

onde $\omega_{\kappa\lambda}$ é anti-simétrica em κ, λ e relacionados aos parâmetros $\omega^\mu{}_\lambda$ por

$$\omega^\mu{}_\lambda = \eta^{\mu\kappa}\omega_{\kappa\lambda}\ . \tag{128}$$

É importante para os nossos objetivos computar o comutador, $[-\Omega, \gamma^\mu]$. Para isto devemos usar a identidade matricial que será calculada em seguida. Sejam A, B e C matrizes, logo

$$\begin{aligned}[AB, C] &= A\{B, C\} - \{A, C\}B \\ [BA, C] &= B\{A, C\} - \{B, C\}A\end{aligned}$$

logo, subtraindo a segunda equação da primeira, encontramos a identidade requerida

$$[[A, B], C] = \{A, \{B, C\}\} - \{\{A, C\}, B\}\ .$$

Portanto,

$$\begin{aligned}[-\Omega, \gamma^\mu] &= -\tfrac{1}{8}\omega_{\kappa\lambda}\left[\left[\gamma^\kappa, \gamma^\lambda\right], \gamma^\mu\right] \\ &= \tfrac{1}{8}\left(\omega_{\lambda\kappa}\left\{\gamma^\kappa, \left\{\gamma^\lambda, \gamma^\mu\right\}\right\} + \omega_{\kappa\lambda}\left\{\{\gamma^\kappa, \gamma^\mu\}, \gamma^\lambda\right\}\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\omega_{\lambda\kappa}\eta^{\lambda\mu}\{\gamma^\kappa, \mathbb{1}\} + \omega_{\kappa\lambda}\eta^{\kappa\mu}\left\{\mathbb{1}, \gamma^\lambda\right\}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\omega^\mu{}_\kappa\,\gamma^\kappa + \omega^\mu{}_\lambda\,\gamma^\lambda\right)\end{aligned}$$

$$[-\Omega, \gamma^\mu] = \omega^\mu{}_\kappa\,\gamma^\kappa \tag{129}$$

A fórmula de Hausdorff-Campbell-Baker

$$e^{-\Omega}\gamma^{\mu}e^{\Omega} = \gamma^{\mu} + [-\Omega,\gamma^{\mu}] + \frac{1}{2}[-\Omega\,[-\Omega,\gamma^{\mu}]] + ... + \frac{1}{n!}[\underbrace{-\Omega,[-\Omega,...[-\Omega,}_{n \text{ vezes}}\gamma^{\mu}]...]] \,.$$

Da eq. (129) resulta que,

$$\begin{aligned}
&[-\Omega,[-\Omega,\gamma^{\mu}]] = \omega^{\mu}{}_{\kappa}\,[-\Omega,\gamma^{\kappa}] = \omega^{\mu}{}_{\kappa}\,\omega^{\kappa}{}_{\lambda}\,\gamma^{\lambda} = \left(\omega^{2}\right)^{\mu}{}_{\kappa}\,\gamma^{\kappa} \\
&... \\
&[\underbrace{-\Omega,[-\Omega,...[-\Omega,}_{n \text{ vezes}}\gamma^{\mu}]...]] = \left(\omega^{n}\right)^{\mu}{}_{\kappa}\,\gamma^{\kappa} \,.
\end{aligned}$$

Finalmente, da fórmula de Hausdorff-Campbell-Baker, encontramos que,

$$e^{-\Omega}\gamma^{\mu}e^{\Omega} = \left[\delta^{\mu}{}_{\kappa} + \omega^{\mu}{}_{\kappa} + \frac{1}{2}\left(\omega^{2}\right)^{\mu}{}_{\kappa} + ... + \frac{1}{n!}\left(\omega^{n}\right)^{\mu}{}_{\kappa} + ...\right]\gamma^{\kappa} \,,$$

ou melhor

$$e^{-\Omega}\gamma^{\mu}e^{\Omega} = \left(e^{\omega}\right)^{\mu}{}_{\kappa}\,\gamma^{\kappa} = \Lambda^{\mu}{}_{\kappa}\,\gamma^{\kappa} \,, \qquad (130)$$

que é o resultado que queríamos obter.

E Números de Grassmann

Férmions são partículas que obedecem a estatística de Fermi-Dirac ao invés da de Bose-Einstein. Para se tratar férmions em um dado formalismo deve-se incorporar neste o Princípio de Exclusão de Pauli:

– Quanticamente isto é feito introduzindo-se operadores quânticos, Ψ_i, que satisfazem relações de anticomutação análogas àquelas de comutação que envolvem os operadores $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{p}$ dadas na M.Q.

– Classicamente isto deve ser feito introduzindo números anticomutantes, ψ_i, chamados de números de Grassmann com as propriedades básicas:

$$\begin{aligned}
&\psi_1\psi_2 = -\psi_2\psi_1 \\
&\psi_1 a = a\psi_2 \,,
\end{aligned}$$

onde a é um número comum (comutante). Note que

$$\psi_1\psi_1 = -\psi_1\psi_1 = 0 \qquad \text{ou} \quad \left(\psi_i\right)^2 = 0.$$

N números de Grassmann $i = (1,...,N)$ geram um espaço linear que tem como base:

$$1,\ \psi_i,\ \psi_i\psi_j,\ \cdots\ \psi_1\psi_2\cdots\psi_N \,,\ (i \neq j) \,,$$

onde é contabilizado um total de elementos dado por

$$\binom{N}{0} + \binom{N}{1} + \binom{N}{2} + ... + \binom{N}{N} = 2^{N} \,.$$

Derivação

$\frac{\partial}{\partial\psi_1}\psi_1 = 1;\ \frac{\partial}{\partial\psi_1}\psi_1\psi_2 = \psi_2;\ \frac{\partial}{\partial\psi_2}\psi_1\psi_2 = -\psi_1;\ \frac{\partial}{\partial\psi_3}\psi_1\psi_2 = 0.$

$\frac{\partial}{\partial(\psi_i)^2}\Big[\text{ qualquer um dos } 2^N \text{ elementos acima }\Big] = 0,$

Integração

Devido a estranha natureza das variáveis de Grassmann (ou fermiônicas). Devemos definir a operação de integração de modo que seja conveniente para os propósitos de integração funcional. As propriedades relevantes para a integração funcional são a linearidade e a invariância sob a translação da variável a ser integrada. Estas são as únicas propriedades que devem ser consideradas para a integração de variáveis fermiônicas. A invariância sob translação nos dá que

$$\int f(\psi)\, d\psi = \int f(\psi + a)\, d\psi\ . \tag{131}$$

No caso de variáveis comutantes (ou bosônicas) a equação equivalente a eq. (131) é dada por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+a)\, dx\ .$$

Porém, diferente de $f(x)$ que admite uma expansão em série de potências com um número infinito de termos, $f(\psi) = c + b\psi$, pois, $(\psi^2 = 0)$. Usando, agora, a propriedade de linearidade, temos que

$$\int f(\psi)\, d\psi = c\int d\psi + b\int \psi d\psi\ . \tag{132}$$

Por outro lado,

$$f(\psi + a) = c + b(\psi + a) = (c + ba) + b\psi\ .$$

Portanto,

$$\int f(\psi + a)\, d\psi = (c + ba)\int d\psi + b\int \psi d\psi \tag{133}$$

A comparação entre as eqs. (132) e (133) nos informa que a única solução não-trivial para a eq. (131), só pode ser obtida se tomarmos

$$\int d\psi = 0\ ,\quad \int \psi d\psi = \quad \text{constante.} \tag{134}$$

A convenção normalmente usada é considerar o valor da constante igual a 1. Note que, com estes resultados:

$$\int f(\psi)\, d\psi = b\ .$$

Entretanto,

$$\frac{d}{d\psi} f(\psi) = b\ .$$

"A integração coincide com a derivação no caso de variáveis de Grassmann."!

No caso de duas variáveis, este resultado pode ser verificado como no exemplo dado em seguida.

$$\int d\psi_1 \int d\psi_2 \psi_1 \psi_2 = -\int d\psi_1 \left(\int (d\psi_2)\psi_2\right)\psi_1 = -\int (d\psi_1)\,\psi_1 = -1$$

Regras de Hermitização e conjugação-complexa

Sejam os objetos M e N (como objetos queremos designar os números, as matrizes, os operadores e etc.) Para M e N bosônicos (comutantes) ou fermiônicos (Grassmann) vamos adotar a *mesma* regra de Hermitização, dada por

$$(MN)^{\dagger} = N^{\dagger}M^{\dagger} \ . \tag{135}$$

No caso em que temos, apenas, objetos fermiônicos, sejam Ψ e X estes objetos, da propriedade de transposição, imediatamente, segue que

$$\begin{aligned} \Psi X &\equiv (\Psi X)^{TT} \\ &= -(X^T \Psi^T)^T \ . \end{aligned}$$

O complexo-conjugado da equação acima resuta em

$$(\Psi X)^* = -(X^T \Psi^T)^{\dagger} \ .$$

Usando a regra de Hermitização adotada, a eq. (135), no lado direito da equação acima, obtemos o resultado

$$(\Psi X)^* = -\Psi^* X^* \ . \tag{136}$$

Esta é a nossa regra de conjugação-complexa.

Exercício

No livro de Pierre Ramond [5] é adotada uma regra de Hermitização para objetos fermiônicos diferente da regra seguida aqui, a convenção dele é: $(\Psi X)^{\dagger} = -X^{\dagger}\Psi^{\dagger}$. Veja que efeito esta regra tem sobre a operação de conjugação de carga e compare o resultado com o dado no livro. Veja, também, como ele escreve a ação de Dirac e justifique.

Agradecimentos

Somos gratos ao Grupo de Física Teórica da UCP aos colegas do DCP (CBPF) à J. A. Helayël-Neto e F. Toppan pelas discussões que foram valiosas para a preparação deste trabalho e também à Viviane M. Braconi e a Letícia M. G. Furtado, ambas da UCP, por datilografarem o manuscrito.

References

[1] J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison Wesley 10 th printing (1967) USA.

[2] T. Kugo e P. Townsend, *Nucl. Phys.* **B221** (1983) 357;
C. Wetterich, *Nucl. Phys.* **B211** (1983) 177.

[3] M.A. De Andrade, F. Toppan, CBPF-NF-013/99 ou hep-th/9904134

[4] L.P. Colatto, M.A. De Andrade, F. Toppan, CBPF-NF-063/98 ou hep-th/9810145

[5] Pierre Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Second Edition, Addison Wesley (1989) USA.