

# Integrais de Trajetória

Notas de Aula

*Maria Teresa Thomaz*  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF/CNPq  
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150  
22290-180 – Rio de Janeiro, RJ – Brasil

*À todos aqueles que se sentem capazes  
de lutar para realizar seus sonhos.*

## Prefácio

*... o segredo é inimigo da ciência e a liberdade de comunicação e de pesquisa são vitais para o seu florescimento.*

*H. Moysés Nussenzveig  
Curso de Física Básica; 1-Mecânica*

Estas Notas de Aula sobre *Integrais de Trajetória*, foram apresentadas, num curso informal, a vários alunos do Curso de Pós-Graduação em Física da UFF no primeiro semestre de 1995. Este conjunto de aulas surgiu da minha incapacidade de continuar resistindo as reclamações da Iraziet (Iraziet da Cunha Charret) de que apesar de eu ter as notas prontas sobre o tópico, me negar a apresentá-las na forma de um mini-curso.

É claro, que reclamação não tem estado fundamental, e logo em seguida surgiram as reclamações, não só da Iraziet, de que as notas que estavam escritas a lápis eram difíceis de serem xerocadas, dada a minha letra, ser pequena e não ter margem nas folhas escritas. Aí surgiu o Toninho (Antônio Tavares da Costa Jr.), que com um pouco de pressão começou a digitar essas notas. Ele não é responsável por nenhuma incorreção de conteúdo no texto, mas com a sua paciência, modificou parte do texto manuscrito de forma a que tivéssemos no final um texto menos informal. Sem a participação do Toninho, essas notas jamais teriam as figuras que fazem parte do seu corpo!!!

O tempo foi passando, o mini-curso terminou, as notas não ficaram prontas. O Toninho foi criando imunidade as minhas pressões, não completava as correções necessárias na digitação e no conteúdo das Notas de Aula. Foi aí que o Antonio (Antonio Cesar Aguiar Pinto) e Onofre (Onofre Rojas dos Santos) fizeram a loucura de suas vidas: trabalhar no Mestrado comigo. Ora, nada melhor para um futuro campista do que começar a estudar *Integrais de Trajetória*! Os dois então fizeram revisão de pelo menos metade das Notas de Aula. Como as reclamações sobre a entrega das notas de aula digitadas continuaram, nada melhor do que colocar quem reclama para trabalhar. Desta forma, a Iraziet fez a revisão da parte das notas que ainda faltava.

Essas Notas sobre *Integrais de Trajetória* têm por objetivo mostrar os cálculos simples, mas trabalhosos para definir as integrais de trajetória. As integrais de trajetória são hoje ferramentas básicas nas diversas áreas da Física. Não procure nesta nota, nada sofisticado, mas o *passo a passo* que precisamos fazer para definir e tratar essas integrais. Essas notas foram escritas, pois apesar de termos hoje inúmeros textos excelentes sobre este tópico, ao estudá-los, eu sempre senti falta de um texto que desse o detalhe dos cálculos.

Certamente, as Notas de Aula sobre *Integrais de Trajetória* ainda têm muitas correções

a serem feitas. Se você que as ler tiver algumas correções a sugerir, lhe serei muito grata, já que esta é a primeira versão das notas.

No futuro próximo quando novamente eu tiver a oportunidade de reapresentar este mini-curso, espero fazer novas modificações inclusive de conteúdo.

Por último, gostaria de agradecer a todos que insistiram que eu apresentasse o mini-curso, pois só assim essas notas foram resgatadas do seu futuro de *amarelo-arquivo*. Não há como deixar de agradecer muito a todo o esforço do Toninho na digitação dessas notas, e a ajuda inestimável ao Antonio, Iraziet e Onofre que fizeram a segunda revisão de todo o texto.

Niterói, 26 de março de 1996.

Maria Teresa Climaco dos Santos Thomaz  
Instituto de Física, UFF

## **Prefácio da Segunda Versão**

Gostaria de agradecer ao José Abdalla pelo convite para apresentar este mini-curso aos alunos da Coordenação de Formação Científica do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas /CNPq. Desta forma tive a oportunidade de rever as minhas notas, no que modifiquei 40% do conteúdo original. Entretanto, continua o seguinte mistério: temos um número finito de palavras e fórmulas, mas infinitos erros!!! Por favor, me avise dos erros que você encontrar nessas notas.

Niterói, 2 de julho de 1997.

Maria Teresa Climaco dos Santos Thomaz  
Instituto de Física, UFF

# Índice

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Proposta de Feynman Para uma Nova Formulação da Mecânica Quântica de Uma Partícula</b>       | <b>1</b>  |
| 1.1      | Sistema Quântico de Uma Partícula: Representação de Schrödinger e Heisenberg . . . . .          | 1         |
| 1.2      | Noções de Derivadas Funcionais . . . . .  | 10        |
| 1.3      | Funções de Green de Uma Partícula . . . . .   | 14        |
| <b>2</b> | <b>Relação entre a Mecânica Estatística e as Integrais de Caminho</b>                           | <b>18</b> |
| 2.1      | Função de Partição e o Funcional Gerador das Funções de Green Térmicas                          | 18        |
| 2.2      | Relação entre as Funções de Green Térmicas e as Funções de Green do Espaço Euclidiano . . . . . | 19        |
| <b>3</b> | <b>Integral de Caminho na Teoria de Campos</b>  | <b>24</b> |
| <b>4</b> | <b>Funções de Green Conexas e Desconexas</b>  | <b>27</b> |
| 4.1      | Modelo $\lambda\phi^4$ . . . . .  | 29        |
| <b>5</b> | <b>Funções de Vértice, ou Gráficos 1PI (One Particle Irreducible)</b>                           | <b>41</b> |
| <b>6</b> | <b>Apêndice I: Métrica</b>  | <b>54</b> |
| <b>7</b> | <b>Apêndice II: Prolegomena de Mecânica Estatística</b>   | <b>55</b> |
| <b>8</b> | <b>Apêndice III: Função de Green da Teoria Livre</b>  | <b>57</b> |

# 1 Proposta de Feynman Para uma Nova Formulação da Mecânica Quântica de Uma Partícula

- Referências Originais:

P.A.M. Dirac, *Physik Z. Sowjetunion* **3**, 64 (1933).

R.P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 267 (1948); *Phys. Rev.* **80**, 440 (1950)

- Outras Referências:

E.S. Abers, B.W. Lee, *Phys. Rep.* **9C**, 1 (1973).

H.M. Nussenzveig, *Integrais de Trajetória, Escola de Verão Jorge André Swieca*, Partículas e Campos, 1981 (pág. 127).

Obs.: Os artigos originais estão contidos no livro *Selected Papers on Quantum Electrodynamics*, editado por J. Schwinger.

## 1.1 Sistema Quântico de Uma Partícula: Representação de Schrödinger e Heisenberg

A descrição da Mecânica Quântica (MQ) *à la* Schrödinger e Heisenberg é feita através da hamiltoniana do sistema. Entretanto, em 1933, Dirac apresenta uma formulação da Mecânica Quântica usando a lagrangeana do sistema. Dirac afirma que, classicamente, as formulações lagrangeana e hamiltoniana são equivalentes, e que, portanto, essa equivalência deve aparecer na M.Q. Além disso, a formulação lagrangeana é covariante, uma vez que a ação é um escalar de Lorentz, enquanto a formulação hamiltoniana não o é. A formulação lagrangeana poderia ser mais facilmente utilizada para se tratar sistemas quânticos relativísticos.

Basicamente, a proposta de Dirac é que, no limite em que  $\hbar \rightarrow 0$  a amplitude de probabilidade de uma partícula que se encontra no estado  $|q_0(t_0)\rangle$  no instante  $t_0$  ser encontrada no estado  $|q(t)\rangle$  no instante  $t$  é dada por

$$\langle q(t)|q_0(t_0)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t L dt}, \quad (1)$$

onde  $L$  é a lagrangeana do sistema, e a trajetória escolhida para calcular a ação é a trajetória CLÁSSICA que tenha como condição de contorno as posições  $q(t_0)$  e  $q(t)$  como estados inicial e final respectivamente.

Na formulação de Feynman, como iremos ver, para um intervalo de tempo finito, temos que considerar todos os possíveis caminhos que levam da posição  $q(t_0)$  em  $t = t_0$  até a

posição  $q(t)$ , no instante  $t$ . A contribuição de cada caminho para o processo quântico é dada por

$$e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t L dt}, \quad (2)$$

onde a ação é calculada tomando-se aquela dada trajetória.

Na formulação de Schrödinger e Heisenberg para a MQ, trabalhamos com operadores que agem sobre vetores de estado, enquanto que na formulação de Feynman trabalharemos apenas com funções. As três formulações (Schrödinger, Heisenberg e Feynman) da M.Q. são equivalentes.

Na MQ de operadores existem duas representações que são as mais usadas: a representação de Schrödinger e a representação de Heisenberg. Vamos fazer uma pequena revisão do que são essas duas representações<sup>1</sup>.

### i) Representação de Schrödinger:

a) Dinâmica dos operadores: Seja  $O_S$  um operador na representação de Schrödinger. Na representação de Schrödinger o operador não varia no tempo:

$$\frac{dO_S}{dt} = 0. \quad (3)$$

b) Dinâmica do vetor de estado: Seja  $|\psi(t)\rangle_S$  um vetor que descreve um estado quântico na representação de Schrödinger. A dinâmica dos vetores de estado nesta representação é dada por:

$$i \frac{d|\psi(t)\rangle_S}{dt} = \mathcal{H}|\psi(t)\rangle_S, \quad (4)$$

onde  $\mathcal{H}$  é a hamiltoniana total do sistema. Por hipótese, faremos a descrição quântica de sistemas fechados, de maneira que  $\mathcal{H}$  é uma constante do movimento. Usando a equação de Schrödinger (4) e o fato de que  $\mathcal{H}$  é constante no tempo, podemos escrever formalmente que,

$$|\psi(t)\rangle_S = e^{-i\mathcal{H}(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle_S. \quad (5)$$

O índice  $S$  está presente para lembrar que as quantidades estão sendo descritas na representação de Schrödinger.

---

<sup>1</sup> Estaremos, de agora em diante, usando as unidades naturais, nas quais  $\hbar = c = 1$ .



ii) **Representação de Heisenberg:**

a) Dinâmica dos operadores: Seja  $O_H$  um operador na representação de Heisenberg. A dinâmica dos operadores, que não dependem explicitamente do tempo, nesta representação é dada por:

$$\frac{dO_H}{dt} = i[\mathcal{H}, O_H], \quad (6)$$

onde  $\mathcal{H}$  é a hamiltoniana do sistema. Formalmente, esta equação tem como solução:

$$O_H(t) = e^{i\mathcal{H}t} O_H(0) e^{-i\mathcal{H}t}. \quad (7)$$

b) Dinâmica do vetor de estado: Seja  $|\psi\rangle_H$  um vetor de estado na representação de Heisenberg. Nesta representação os vetores de estado não variam com o tempo:

$$\frac{d|\psi\rangle_H}{dt} = 0. \quad (8)$$

Essa afirmativa deve ser entendida no seguinte sentido: se o sistema está no instante  $t_0$  no estado  $|\psi\rangle_H$ , no instante  $t$  ele estará no mesmo vetor de estado  $|\psi\rangle_H$ . No entanto, o fato do vetor de estado que descreve o sistema não evoluir com o tempo não impede que  $t$  apareça como um índice. Vejamos: seja  $O_H(t)$  um operador na representação de Heisenberg, que no instante inicial  $t_0$  tenha como autovetores  $|o, t_0\rangle$ , ou seja,

$$O_H(t_0)|o, t_0\rangle = o|o, t_0\rangle. \quad (9)$$

Supondo que a dinâmica do operador  $O_H$  seja unitária<sup>2</sup>, isto é, seja dada pela eq.(7), aplicamos o operador  $e^{i\mathcal{H}(t-t_0)}$  no l.d. dos dois termos da eq.(9) e obtemos que:

$$e^{i\mathcal{H}(t-t_0)} O_H(t_0) e^{-i\mathcal{H}(t-t_0)} e^{i\mathcal{H}(t-t_0)} |o, t_0\rangle = o e^{i\mathcal{H}(t-t_0)} |o, t_0\rangle. \quad (10)$$

Comparando a equação anterior com a eq.(7), escrevemos que

$$O_H(t)|o, t\rangle = o|o, t\rangle, \quad (11)$$

sendo que  $|o, t\rangle$  é definido como:

---

<sup>2</sup>Transformação unitária: se  $U$  é um operador unitário, então  $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbf{1} \Leftrightarrow U^\dagger = U^{-1}$ , sendo  $\mathbf{1}$ , o operador identidade.

$$|o, t\rangle = e^{i\mathcal{H}(t-t_0)}|o, t_0\rangle. \quad (12)$$

Da eq.(11) vemos que  $|o, t\rangle$  é autovetor do operador  $O_H(t)$  com autovalor  $o$ . Os **autovaleores** são **independentes** do tempo. O que ocorre é que os operadores variam de instante para instante, de forma que o conjunto completo de seus autovetores também deve variar de instante a instante. Se num instante  $t_0$   $|o, t_0\rangle$  é autovetor de  $O_H(t_0)$  com autovalor  $o$ , no instante  $t$ ,  $|o, t_0\rangle$  não é mais um autovetor de  $O_H(t)$ , e sua decomposição espectral na base dos autoestados do operador neste instante é

$$|o, t_0\rangle = \sum_o a_t |o, t\rangle. \quad (13)$$

As representações de Schrödinger e Heisenberg estão ligadas através de uma transformação unitária,

$$|\psi(t)\rangle_S = e^{-i\mathcal{H}t}|\psi, t\rangle_H, \quad (14)$$

e

$$Q_S = e^{-i\mathcal{H}t}Q_H(t)e^{i\mathcal{H}t}. \quad (15)$$

No nosso caso, a matriz de transformação unitária é:

$$U(t, 0) = e^{-i\mathcal{H}t}. \quad (16)$$

A hamiltoniana total do sistema,  $\mathcal{H}$ , é a mesma nas duas representações.

O objeto que nos dá informações físicas sobre o sistema são as probabilidades. Entretanto, a MQ nos dá a evolução dinâmica das amplitudes de probabilidade. Vamos então obter as amplitudes de probabilidade nas duas representações. Apenas para simplificar a notação, vamos tratar do problema quântico de uma partícula em uma dimensão espacial e uma dimensão temporal.

Seja  $F(q', t'; q, t)$  a amplitude de probabilidade da partícula, estando na posição  $q$  no instante  $t$ , ser encontrada na posição  $q'$  no instante  $t'$ . Temos então

$${}_H\langle q', t'|q, t\rangle_H = F(q', t'; q, t), \quad (17)$$

que, escrita na representação de Schrödinger, fica<sup>3</sup>

$$F(q', t'; q, t) = {}_H \langle q', t' | q, t \rangle_H = \langle q'(t') | e^{-i\mathcal{H}(t'-t)} | q(t) \rangle. \quad (18)$$

Vamos agora manipular a amplitude de probabilidade  $F(q', t'; q, t) = {}_H \langle q', t' | q, t \rangle_H$ . Usando o fato de que, em cada instante  $t_i$ , o conjunto de autovetores  $|q_i, t_i\rangle_H$  do operador posição é completo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq_i |q_i, t_i\rangle_H {}_H \langle q_i, t_i| = \mathbb{1}, \quad (19)$$

e, subdividindo o intervalo  $t' - t$  em sub-intervalos infinitesimais  $\epsilon$ , ou seja,

$$t_n = n\epsilon + t, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N + 1, \quad (20)$$

onde  $t_0 = t$  e  $t_{N+1} = t' = (N + 1)\epsilon + t$ , temos

$$\begin{aligned} F(q', t'; q, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dq_N {}_H \langle q', t' | q_N, t_N \rangle_H {}_H \langle q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle_H \times \\ &\quad \times {}_H \langle q_{N-1}, t_{N-1} | q_{N-2}, t_{N-2} \rangle_H \dots {}_H \langle q_1, t_1 | q, t \rangle_H. \end{aligned} \quad (21)$$

Entretanto<sup>4</sup>,

$${}_H \langle q_i, t_i | q_{i-1}, t_{i-1} \rangle_H = {}_S \langle q_i(t_i) | e^{-i\mathcal{H}\epsilon} | q_{i-1}(t_{i-1}) \rangle_S, \quad (22)$$

No limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , a exponencial do operador hamiltoniano pode ser aproximada por:

$$e^{-i\mathcal{H}\epsilon} = e^{-i(H_0+V)\epsilon} = 1 - i\epsilon H_0 - i\epsilon V + O(\epsilon^2) = e^{-iH_0\epsilon} e^{-iV(q)\epsilon} + O(\epsilon^2), \quad (23)$$

onde  $H_0 = \frac{p^2}{2m}$ . Assim, mantendo termos de até primeira ordem em  $\epsilon$ , temos que

---

<sup>3</sup>Note que  ${}_H \langle q', t' | q, t \rangle_H \neq {}_S \langle q'(t') | q(t) \rangle_S$ , pois o produto escalar é o mesmo em todas as representações obtidas umas das outras através de uma representação unitária apenas se os vetores de estado estão definidos **no mesmo instante**.

<sup>4</sup>Por construção, o vetor de estado:  $|q_i, t_i\rangle_H$  é autoestado do operador  $\hat{q}_H(t_i)$ . A relação entre autoestados deste operador nas representações de Schrödinger e Heisenberg é definida pela eq.(14):

$$|q_i(t_i)\rangle_S = e^{-i\mathcal{H}t_i} |q_i, t_i\rangle_H.$$

Lembrando que  $|q_i(t_i)\rangle_S$  é o autovetor do operador  $\hat{q}_S$  no instante  $t$ , ou seja,

$$\hat{q}_S |q_i(t_i)\rangle_S = q_i |q_i(t_i)\rangle_S.$$

$$e^{-i\mathcal{H}\epsilon} \approx e^{-iH_0\epsilon} e^{-iV(q)\epsilon}. \quad (24)$$

Levando estes resultados na equação (22) ficamos com

$${}_H\langle q_i, t_i | q_{i-1}, t_{i-1} \rangle_H = {}_S\langle q_i(t_i) | e^{-iH_0\epsilon} e^{-iV(q)\epsilon} | q_{i-1}(t_{i-1}) \rangle_S. \quad (25)$$

Nos casos em que o potencial só envolver o operador de posição, temos que

$${}_H\langle q_i, t_i | q_{i-1}, t_{i-1} \rangle_H = {}_S\langle q_i(t_i) | e^{-iH_0\epsilon} | q_{i-1}(t_{i-1}) \rangle_S e^{-iV(q_{i-1})\epsilon}, \quad (26)$$

onde, agora,  $V(q_{i-1})$  é uma função da coordenada  $q_{i-1}(t_{i-1})$ .

Como estamos tratando sistema quântico não-relativístico em que  $H_0$  só envolve o operador momentum, vamos mudar de base para calcular o produto escalar do l.d. da eq.(26). Usando a completeza dos autovetores do operador momento,

$$\mathbb{1} = \int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle \langle p|, \quad (27)$$

o produto escalar do l.d. da eq.(26) passa a ser escrito como:

$$\begin{aligned} {}_H\langle q_i, t_i | q_{i-1}, t_{i-1} \rangle_H &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dp' {}_S\langle q_i(t_i) | p \rangle_S \times \\ &\times {}_S\langle p | e^{-iH_0\epsilon} | p' \rangle_S {}_S\langle p' | q_{i-1}(t_{i-1}) \rangle_S e^{-iV(q_{i-1})\epsilon}. \end{aligned} \quad (28)$$

Entretanto, sabemos que

$${}_S\langle q_i(t_i) | p \rangle_S = \frac{e^{iq_i p}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (29)$$

$${}_S\langle p | e^{-iH_0\epsilon} | p' \rangle_S = e^{-i\frac{p^2\epsilon}{2m}} \delta(p - p'). \quad (30)$$

Usando estes resultados em (28) obtemos

$$\begin{aligned} {}_H\langle q_i, t_i | q_{i-1}, t_{i-1} \rangle_H &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dp' e^{iq_i p} e^{-iq_{i-1} p'} e^{-i\frac{p^2\epsilon}{2m}} e^{-iV(q_{i-1})\epsilon} \delta(p - p') \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-i\frac{p^2\epsilon}{2m}} e^{-iV(q_{i-1})\epsilon} e^{i(q_i - q_{i-1})p}, \end{aligned} \quad (31)$$

ou seja<sup>5</sup>,

---

<sup>5</sup>Note que podemos somar os argumentos das exponenciais, já que agora só temos exponenciais de funções.

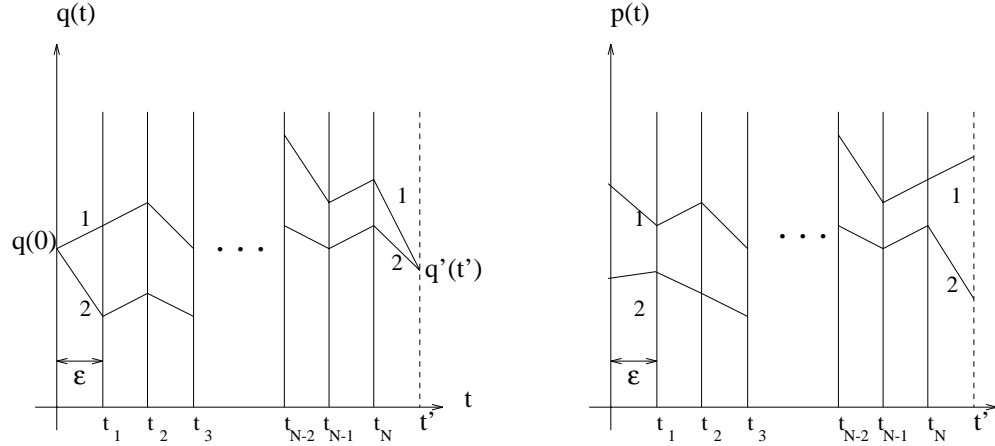


Figure 1: A) Trajetórias da partícula entre os pontos  $q, t$  e  $q', t'$ ; B) Trajetórias no espaço dos momentos, que não possuem condições inicial e final.

$${}_H\langle q_i, t_i | q_{i-1}, t_{i-1} \rangle_H = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{i \frac{(q_i - q_{i-1})p\epsilon}{\epsilon}} e^{-i\mathcal{H}\epsilon}. \quad (32)$$

Notemos que para cada produto escalar do l.d. da eq.(18) introduzimos uma integral sobre a variável momento. Voltando à expressão da amplitude de probabilidade temos que

$$\begin{aligned} F(q', t'; q, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \dots dq_N {}_H\langle q', t' | q_N, t_N \rangle_{HH} \langle q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle_H \dots \times \\ &\quad \times {}_H\langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle_{HH} \langle q_1, t_1 | q, t \rangle_H \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N+1}} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \dots dq_N \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \dots dp_N e^{-i\epsilon \frac{p_N^2}{2m} - i\epsilon V(q_N) + i \frac{(q' - q_N)\epsilon p_N}{\epsilon}} \times \\ &\quad \times \dots \times e^{-i\epsilon \frac{p_1^2}{2m} - i\epsilon V(q_1) + i \frac{(q_2 - q_1)\epsilon p_1}{\epsilon}} e^{-i\epsilon \frac{p_0^2}{2m} - i\epsilon V(q_0) + i \frac{(q_1 - q_0)\epsilon p_0}{\epsilon}}, \end{aligned} \quad (33)$$

onde  $q_0 = q$ . Na eq.(33) integramos no intervalo  $(-\infty, \infty)$  sobre as  $N + 1$  variáveis de momento.

O que estamos fazendo com essas integrações múltiplas é: dentre as possíveis *trajetórias* no espaço dos  $q$ 's e  $p$ 's, estão incluídas todas as trajetórias “quebradas”. No limite em que  $N \rightarrow \infty$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) as variáveis de posição deixam de ser indexadas pelo índice discreto  $i$ , passando a serem função do parâmetro contínuo  $t$ . Na integral de  $q(t)$  **todas** as trajetórias partem da posição  $q(t)$  e todas têm que alcançar a posição  $q'(t')$ . A integral sobre  $p(t)$  já não possui restrições (veja figura 1).

Voltando à situação em que o tempo evolui continuamente,  $\epsilon \rightarrow 0$ , e reconhecendo que

$$\frac{dq(t)}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{q(t+\epsilon) - q(t)}{\epsilon}, \quad (34)$$

temos que, após tomarmos o limite do contínuo, a amplitude de probabilidade fica sendo

$${}_H \langle q', t' | q, t \rangle_H = \frac{1}{(2\pi)^{N+1}} \int_{q(t)}^{q'(t')} \mathcal{D}q(t) \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}p(t) e^{-i \int_t^{t'} \mathcal{H} dt + i \int_t^{t'} \dot{q}(t)p(t) dt}. \quad (35)$$

Estamos definindo  $\mathcal{D}q(t)$  e  $\mathcal{D}p(t)$  como sendo:

$$\mathcal{D}q(t) = \prod_{i=1}^N dq_i(t_i) \quad (36)$$

e

$$\mathcal{D}p(t) = \prod_{i=0}^N dp_i(t_i) \quad (37)$$

Portanto, no caso geral, a amplitude de probabilidade é dada por

$${}_H \langle q', t' | q, t \rangle_H = \frac{1}{(2\pi)^{N+1}} \int_{q(t)}^{q'(t')} \mathcal{D}q(t) \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}p(t) e^{i \int_t^{t'} (\dot{q}(t)p(t) - \mathcal{H}) dt}. \quad (38)$$

Apesar de  $q(t)$  e  $p(t)$  serem autovalores de operadores canonicamente conjugados, é importante ressaltar que  $q(t)$  e  $p(t)$  são duas variáveis **independentes**, e, por causa disso, é **falso afirmar que**:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad (39)$$

sendo  $L$  a função lagrangeana do sistema. De forma que **não** podemos escrever diretamente a transformação de Legendre

$$p\dot{q} - \mathcal{H} = L. \quad (40)$$

Uma vez que conhecemos a dependência do operador hamiltoniano em termos do operador momento, sabemos como a função  $\mathcal{H}$  depende da variável  $p$  e realizar a integral funcional em  $\mathcal{D}p(t)$  para encontrar a lagrangeana efetiva que aparece na eq.(38).

Vamos considerar a situação usual da M.Q. não-relativística em que

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q). \quad (41)$$

Neste caso, a integral de caminho do modelo quântico fica

$${}_H \langle q', t' | q, t \rangle_H = \frac{1}{(2\pi)^{N+1}} \int_{q(t)}^{q'(t')} \mathcal{D}q(t) \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}p(t) e^{i \int_t^{t'} [\dot{q}(t)p(t) - \frac{p^2}{2m} - V(q)] dt}. \quad (42)$$

Vamos realizar a integral funcional em  $p(t)$  na eq.(38),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=0}^N dp_i(t_i) e^{i \sum_{i=1}^N [p_i \frac{q_{i+1}-q_i}{\epsilon} - \frac{p_i^2}{2m}] \epsilon} = \prod_{i=0}^N \int_{-\infty}^{\infty} dp_i e^{i [p_i \frac{q_{i+1}-q_i}{\epsilon} - \frac{p_i^2}{2m}] \epsilon}, \quad (43)$$

onde  $(N+1)\epsilon + t = t'$ , usando o truque tradicional de completar quadrados. Para escrevermos cada integral sobre as variáveis  $p_i$  como uma gaussiana, completamos o seguinte quadrado:

$$\frac{p_i^2}{2m} - p_i \frac{(q_{i+1} - q_i)}{\epsilon} = \left( \frac{p_i}{\sqrt{2m}} - \frac{\sqrt{m}(q_{i+1} - q_i)}{\sqrt{2}\epsilon} \right)^2 - \frac{m}{2} \frac{(q_{i+1} - q_i)^2}{\epsilon^2}. \quad (44)$$

A integral gaussiana em  $p_i$  tem como resultado  $\sqrt{\frac{\pi 2m}{i\epsilon}}$ .

Portanto, como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}p(t) e^{i \int_t^{t'} [\dot{q}(t)p(t) - \frac{p^2(t)}{2m}] dt} = \prod_{i=0}^N \int_{-\infty}^{\infty} dp_i e^{-i \left( \frac{p_i}{\sqrt{2m}} - \frac{\sqrt{m}(q_{i+1}-q_i)}{\sqrt{2}\epsilon} \right)^2 \epsilon} e^{\frac{im}{2} \frac{(q_{i+1}-q_i)^2}{\epsilon^2}}, \quad (45)$$

a integral funcional sobre a variável  $p(t)$  é igual a:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}p(t) e^{i \int_t^{t'} [p(t)\dot{q}(t) - \frac{p^2(t)}{2m}] dt} &= \left( \frac{\pi 2m}{i\epsilon} \right)^{\frac{N+1}{2}} \prod_{i=0}^N e^{\frac{im}{2} \frac{(q_{i+1}-q_i)^2}{\epsilon^2}} \\ &= \left( \frac{-i\pi 2m}{\epsilon} \right)^{\frac{(N+1)}{2}} e^{i \int_t^{t'} \frac{mq^2(t)}{2} dt}. \end{aligned} \quad (46)$$

Pelo resultado (46) sentimos as dificuldades no cálculo de integrais de caminho, uma vez que, no limite do contínuo, a constante multiplicativa é **divergente!!!**

Voltando à amplitude de probabilidade de transição, eq.(38), temos que

$${}_H \langle q', t' | q, t \rangle_H = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{m}{2\pi i \epsilon} \right)^{\frac{N+1}{2}} \int_{q(t)}^{q'(t')} \mathcal{D}q(t) e^{i \int_t^{t'} \left( \frac{mq^2}{2} - V(q) \right) dt}. \quad (47)$$

Como a expressão da lagrangeana clássica é  $L = \frac{mq^2}{2} - V(q)$ , então

$${}_H \langle q', t' | q, t \rangle_H = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{m}{2\pi i \epsilon} \right)^{N/2} \int_{q(t)}^{q'(t')} \mathcal{D}q(t) e^{i \int_t^{t'} L dt}. \quad (48)$$

Na situação em que a dependência da hamiltoniana em  $p$  seja apenas quadrática, podemos escrever diretamente a igualdade acima. Nesse caso, a ação de cada trajetória dá o peso estatístico da mesma para o fenômeno quântico.

Em geral, os sistemas quânticos se encontram em estados  $|\phi\rangle_H$ , que não são auto-estados do operador posição. Além disso, desejamos determinar a amplitude de probabilidade do sistema ser encontrado no estado quântico  $|\psi\rangle_H$  num instante posterior. Desta

forma, desejamos obter o produto escalar:  ${}_H\langle\psi, t'|\phi, t\rangle_H$ , para  $t' > t$ , na forma de uma integral de trajetória.

Usando a completeza da base dos autovetores do operador posição nos instantes  $t$  e  $t'$  (eq.19), ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq' |q', t'\rangle_H {}_H\langle q', t'| = \mathbb{1} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dq |q, t\rangle_H {}_H\langle q, t| = \mathbb{1}, \quad (49)$$

o produto escalar  ${}_H\langle\psi, t'|\phi, t\rangle_H$  passa a ser escrito como:

$$\begin{aligned} {}_H\langle\psi, t'|\phi, t\rangle_H &= \int_{-\infty}^{\infty} dq' dq {}_H\langle\psi, t'|q', t'\rangle_H {}_H\langle q', t'|q, t\rangle_H {}_H\langle q, t|\phi, t\rangle_H \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon}\right)^{\frac{N+1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dq' dq \psi^*(q', t') \phi(q, t) \int_{q(t)}^{q'(t')} \mathcal{D}q(t) e^{i \int_t^{t'} L dt}. \end{aligned} \quad (50)$$

## 1.2 Noções de Derivadas Funcionais

Referências:

- C. Nash, *Relativistic Quantum Fields*, cap. 1.
- H. M. Nussenzweig, *Integrais de Trajetória. Escola de Verão Jorge André Swieca, Partículas e Campos*, 1981, pág. 127.
- Mark S. Swanson, *Path Integrals and Quantum Processes*.

Para a MQ não-relativística, é suficiente o conhecimento das amplitudes de probabilidade dadas pelas integrais de caminho. No entanto, em Teoria Quântica de Campos, as chamadas funções de Green são as quantidades que conseguimos calcular através de métodos perturbativos e não-perturbativos.

Para falarmos em funções de Green, precisamos mencionar a parte de integrais e derivadas funcionais. Continuaremos a tratar o problema quântico de uma partícula, apenas para exemplificar.

Estamos acostumados a tratar com funções que são soluções das equações que dão a dinâmica das variáveis usadas para descrever um dado sistema físico. Por exemplo, no caso da Mecânica Quântica não-relativística de uma partícula unidimensional, a dinâmica da função de onda (F.O.) é dada pela equação de Schrödinger:

$$-\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x, t) = i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}. \quad (51)$$



Note que para cada valor do par de parâmetros  $(x, t)$  associamos um número  $\psi(x, t)$  que denominamos de função no ponto  $x$  no instante  $t$ . O mesmo ocorre quando descrevemos a dinâmica clássica de uma partícula, assim como vários outros fenômenos físicos.

No entanto, ao observar as eqs. (47) e (48), vemos que temos novo objeto matemático na exponencial do integrando dessas equações, ou seja,

$$S[q, \dot{q}; t, t'] = \int_t^{t'} dt \left[ \frac{m}{2} \dot{q}(t)^2 - V(q(t)) \right], \quad (52)$$

que é a ação associada a trajetória  $q(t)$ , que tem pontos extremos fixados pelo problema quântico. Para cada trajetória (**função**)  $q(t)$  associamos um número. Ao contrário do primeiro exemplo desta seção, não é suficiente conhecer o valor do parâmetro (tempo) num único ponto. É necessário conhecer os valores que a função assume num intervalo de valores do parâmetro. Dizemos que  $S$  é um **funcional** da trajetória (função)  $q(t)$ .

No caso de funções  $f(t)$ , ao variarmos o valor do parâmetro  $t$ , em geral, mudamos o valor da função  $f$ . No caso de funcionais  $E[f]$ , ao se mudar a função  $f(t)$ , em geral modificamos o valor do funcional  $E$ . Seja  $E[f(x)]$  um funcional de  $f(x)$ , um exemplo de funcional é

$$E[f(t)] = f(t), \quad (53)$$

que é um funcional muito particular. No entanto, o resultado final da expressão (53) depende da escolha que fazemos da **função**  $f(x)$ , daí dizer que esta expressão é um funcional. De qualquer maneira, a igualdade (53) sempre pode ser escrita como,

$$E[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t - t') f(t'), \quad (54)$$

sendo  $\delta(t - t')$  a função delta de Dirac.

Consideremos agora a derivada funcional. A sua definição operacional não é única, porém vamos usar a definição do Nash, que é a mesma do Moysés:

$$\frac{\delta E[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{E[f(x) + \epsilon \delta(y - x)] - E[f(x)]}{\epsilon}. \quad (55)$$

Para entendermos a necessidade da presença da função delta de Dirac,  $\delta(y - x)$ , na definição da derivada funcional, façamos analogia com a derivada de funções. Seja  $f(x)$  uma função do parâmetro  $x$ . A derivada dessa função em relação a  $x$  é:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon}. \quad (56)$$

Ao variarmos o valor do parâmetro para um valor definido  $x$  através de um incremento  $\epsilon$ , em geral, o valor da função  $f$  no ponto  $x + \epsilon$  difere do valor desta função no ponto  $x$ . Se a função  $f$  é uma função contínua em torno na vizinhança do ponto  $x$ , então a sua variação devido a variação no valor do parâmetro também tende a zero quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . A derivada da função  $f(x)$  no ponto  $x$  corresponde a calcular o limite da razão entre duas quantidades que vão **simultaneamente** a zero quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Neste tipo de derivada variamos apenas o valor de um único valor do parâmetro.

No caso de funcionais desejamos calcular como eles variam quando seu argumento (função) varia para um único valor do argumento (parâmetro). Ou seja, a deformação da função corresponde a mudar o seu valor num único ponto do seu argumento. Em geral, os funcionais envolvem integração sobre funções, como por exemplo é o caso da ação clássica associada a uma trajetória  $q(t)$  (veja eq.(52)). Neste caso o parâmetro é o tempo  $t$ . Se variamos a trajetória  $q(t)$  para um único valor de  $t$ , esta variação não leva a nenhuma mudança no valor da ação  $S[q(t)]$ , uma vez que é uma modificação num espaço de dimensão nula na variável de integração:

$$q'(t) = \begin{cases} q(t), & t \in (-\infty, \bar{t} - \epsilon) \cup (\bar{t} + \epsilon, \infty) \\ q(\bar{t}) + \Delta q(\bar{t}), & t \in (\bar{t} - \epsilon, \bar{t} + \epsilon) \end{cases} \quad (57)$$

onde estamos considerando o limite em que  $\epsilon \rightarrow 0$ . A modificação da função  $q(t)$  definida pela relação (57) implica na seguinte variação no valor da ação clássica da partícula:

$$\begin{aligned} \Delta S[q(t)] &= \int_{\bar{t}-\epsilon}^{\bar{t}+\epsilon} dt \left[ \frac{1}{2} m \dot{q}(t)^2 - V(q(t)) \right] \\ &\simeq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \times \left[ \frac{1}{2} m \Delta \dot{q}(\bar{t})^2 - (V(q'(\bar{t})) - V(q(\bar{t}))) \right] = 0, \end{aligned} \quad (58)$$

uma vez que  $\epsilon$  multiplica uma quantidade finita. Para variarmos a função  $q(t)$  para um **único** valor do parâmetro  $t$  e ela ainda dar uma variação no funcional, ou seja, a modificação do funcional ocorre devido a uma variação num espaço de dimensão nula na variável de integração, então a variação da função neste único ponto tem que ser singular. A função que tem essa característica é a função delta de Dirac, que é usada na definição da derivada de funcionais (eq.(55)).

Para exemplificar a aplicação de derivadas funcionais, consideremos o funcional  $E[f(x)] = f(x)$ . Então:

$$\frac{\delta E[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x) + \epsilon \delta(y - x) - f(x)}{\epsilon} = \delta(y - x)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta E[f(x)]}{\delta f(y)} = \delta(x - y). \quad (59)$$

Como um segundo exemplo, consideremos:

$$E_x[f] = \int dx' K(x, x') f(x'). \quad (60)$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\delta E_x[f]}{\delta f(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int dx' K(x, x') [f(x') + \epsilon \delta(y - x')] - \int dx' K(x, x') f(x')}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \frac{\int dx' K(x, x') \delta(y - x')}{\epsilon} = K(x, y). \end{aligned} \quad (61)$$

Assim,

$$\frac{\delta E_x[f]}{\delta f(y)} = K(x, y). \quad (62)$$

Da mesma forma que você pode escrever séries de potências para funções comuns em termos de suas variáveis,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (63)$$

existe a série de Taylor funcional que corresponde a expansão do funcional em termos da sua função argumento. Seja  $P[f]$  um funcional de  $f(x)$ , então  $P[f]$  pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} P_x[f] &= K_0(x) + \int K_1(x; x_1) f(x_1) dx_1 + \\ &+ \int K_2(x; x_1, x_2) f(x_1) f(x_2) dx_1 dx_2 + \dots, \end{aligned} \quad (64)$$

Se  $K_n(x; x_1, x_2, \dots, x_n)$  é uma função simétrica nas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , então temos que

$$K_n(x; x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \frac{\delta^n P[f]}{\delta f(x_1) \dots \delta f(x_n)} \Big|_{f(x) \equiv 0}. \quad (65)$$

Outras propriedades interessantes das derivadas, e que possuem análogo nas derivadas usuais de funções, são:

i) Sejam  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  funcionais da função  $g(x)$ , então,

$$\frac{\delta(\mathcal{F}[g]\mathcal{G}[g])}{\delta g(x)} = \frac{\delta \mathcal{F}[g]}{\delta g(x)} \cdot \mathcal{G}[g] + \mathcal{F}[g] \cdot \frac{\delta \mathcal{G}[g]}{\delta g(x)}. \quad (66)$$

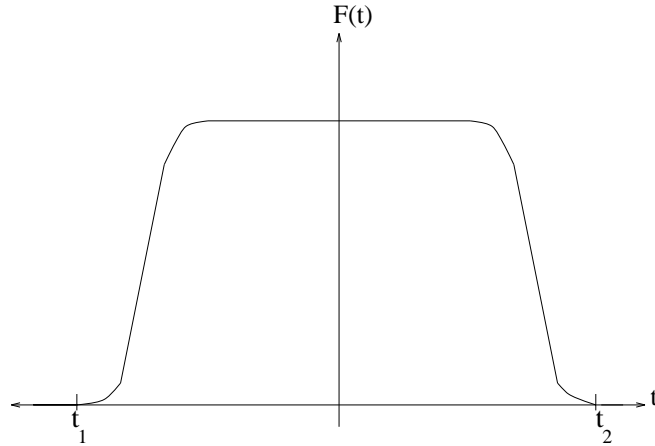


Figure 2: Perfil da força externa  $F(t)$

ii) Regra da cadeia para derivadas funcionais:

$$\frac{\mathcal{F}[g(f)]}{\delta f(y)} = \int dx \frac{\delta \mathcal{F}[g]}{\delta g(x)} \cdot \frac{\delta g(x)}{\delta f(y)}. \quad (67)$$

ii) Se  $\mathcal{F}[g] \equiv \mathcal{F}[g_1, \dots, g_n]$ , sendo  $g_i, i = 1, 2, \dots, n$ , funções do parâmetro  $x$ , então,

$$\delta \mathcal{F}[g_1, \dots, g_n] = \int dx \frac{\delta \mathcal{F}[g]}{\delta g_j(x)} \cdot \delta g_j(x), \quad (68)$$

onde estamos usando a convenção de soma implícita para os índices repetidos  $j$ .

### 1.3 Funções de Green de Uma Partícula

Estamos considerando uma partícula quântica unidimensional não-relativística. A integral de caminho neste caso é<sup>6</sup>

$${}_H \langle q', t' | q, t \rangle_H = \int_{q(t)}^{q'(t')} \mathcal{D}q(t) e^{i \int_t^{t'} L dt}, \quad (69)$$

onde  $L = T - V(q)$ .

Considerando que o nosso sistema está sob a ação de uma força externa  $F(t)$ , durante um certo intervalo de tempo  $t_2 \leq t \leq t_1$  (ver figura 2), queremos saber a amplitude de probabilidade do sistema estando no estado  $|q, t\rangle_H$  no instante  $t$  ser encontrado no estado  $|q', t'\rangle_H$  no instante  $t'$ . Nesse caso, ficamos com<sup>7</sup>,

<sup>6</sup>Dentro da definição de  $\mathcal{D}q(t)$  já está contida a constante multiplicativa.

<sup>7</sup>No caso de uma partícula clássica, a sua equação de movimento na presença de uma força externa  $F(t)$  é:

$${}_H\langle q', t' | q, t \rangle_H^F = \int_{q(t)}^{q'(t')} \mathcal{D}q(t) e^{i \int_t^{t'} dt L + i \int_t^{t'} F(t) q(t) dt} \equiv Z[F]. \quad (70)$$

A amplitude de probabilidade passa a ser um funcional da força externa aplicada  $F(t)$ .

Calculando a derivada funcional de  $e^{i \int_t^{t'} F(t) q(t) dt}$  em relação a  $F(t_1)$ , encontramos que,

$$\begin{aligned} \frac{\delta[e^{i \int_t^{t'} F(t) q(t) dt}]}{\delta F(t_1)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{i \int_t^{t'} [F(t) + \epsilon \delta(t-t_1)] q(t) dt} - e^{i \int_t^{t'} F(t) q(t) dt}}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{i \int_t^{t'} F(t) q(t) dt} e^{i \epsilon q(t_1)} - e^{i \int_t^{t'} F(t) q(t) dt}}{\epsilon} \\ &= e^{i \int_t^{t'} F(t) q(t) dt} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1 + i \epsilon q(t_1) - 1}{\epsilon} \\ &= i q(t_1) e^{i \int_t^{t'} F(t) q(t) dt}. \end{aligned} \quad (71)$$

Portanto,

$$\frac{\delta[e^{i \int_t^{t'} F(t) q(t) dt}]}{\delta F(t_1)} = i q(t_1) e^{i \int_t^{t'} F(t) q(t) dt}. \quad (72)$$

Usando o resultado (72), é fácil mostrar que

$$\frac{\delta^n[e^{i \int_t^{t'} F(t) q(t) dt}]}{\delta F(t_1) \dots \delta F(t_n)} = (i)^n q(t_1) \dots q(t_n) e^{i \int_t^{t'} F(t) q(t) dt}. \quad (73)$$

Voltamos para a expressão de  $Z[F]$  e expandimos a parte da exponencial que depende de  $F(t)$ :

$$\begin{aligned} Z[F] &= \int_{q(t)}^{q'(t')} \mathcal{D}q(t) e^{i \int_t^{t'} L dt} + \int_t^{t'} dt_1 \int_{q(t)}^{q'(t')} \mathcal{D}q(t) i q(t_1) e^{i \int_t^{t'} L dt} F(t_1) + \\ &+ \frac{1}{2!} \int_t^{t'} dt_1 dt_2 \int_{q(t)}^{q'(t')} \mathcal{D}q(t) (i)^2 q(t_1) q(t_2) e^{i \int_t^{t'} L dt} F(t_1) F(t_2) + \dots, \end{aligned} \quad (74)$$

onde podemos identificar

---


$$m\ddot{q} = -\frac{dV(q)}{dq} + F(t).$$

Esta equação é obtida a partir da lagrangeana:

$$L_F = T - V(q) + qF(t).$$

$$\int_{q(t)}^{q'(t')} \mathcal{D}q(t) i q(t_1) e^{i \int_t^{t'} L dt} = \frac{\delta Z[F]}{\delta F(t_1)} \Big|_{F=0} \quad (75)$$

$$\int_{q(t)}^{q'(t')} \mathcal{D}q(t) (i)^2 q(t_1) q(t_2) e^{i \int_t^{t'} L dt} = \frac{\delta^2 Z[F]}{\delta F(t_1) \delta F(t_2)} \Big|_{F=0} \quad (76)$$

⋮

Assim,

$$Z[F] = Z[F = 0] + \sum_{n=1}^{\infty} \int_t^{t'} dt_1 \dots dt_n \frac{1}{n!} G^{(n)}(t_1, \dots, t_n) F(t_1) \dots F(t_n), \quad (77)$$

onde

$$G^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \frac{\delta^n Z[F]}{\delta F(t_1) \dots \delta F(t_n)} \Big|_{F=0}, \quad (78)$$

são as chamadas funções de Green de  $n$  pontos. Se conhecemos as infinitas funções de Green de  $n$  pontos, temos toda a informação sobre um determinado sistema quântico, pois conhecemos a expansão funcional em série de Taylor de  $Z[F]$ .

A última coisa que nos resta é relacionar as funções de Green de  $n$  pontos com elementos de matriz de operadores:  ${}_H \langle q', t' | \hat{q}_H(t_1) \dots \hat{q}_H(t_n) | q, t \rangle_H$ , onde  $\hat{q}_H(t_i)$  é o operador posição na representação de Heisenberg no instante  $t_i$ .

Seja  $t < t_k < t'$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . Então,

$$\begin{aligned} {}_H \langle q', t' | \hat{q}_H(t_k) | q, t \rangle_H &= \int dq_1 \dots dq_k \dots dq_N \quad {}_H \langle q', t' | q_N, t_N \rangle_H \times \\ &\times {}_H \langle q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle_H \dots {}_H \langle q_{k+1}, t_{k+1} | q_k, t_k \rangle_H \times \\ &\times {}_H \langle q_k, t_k | \hat{q}_H(t_k) | q_{k-1}, t_{k-1} \rangle_H \dots {}_H \langle q_1, t_1 | q, t \rangle_H. \end{aligned} \quad (79)$$

Como  $\langle q_k, t_k | \hat{q}_H(t_k) = q(t_k) \langle q_k, t_k |$ , o elemento de matriz (79) é igual a:

$${}_H \langle q', t' | \hat{q}_H(t_k) | q, t \rangle_H = \int_{q(t)}^{q'(t')} \mathcal{D}q(t) q(t_k) e^{i \int_t^{t'} L dt}. \quad (80)$$

Portanto,

$${}_H \langle q', t' | \hat{q}_H(t_k) | q, t \rangle_H = -i \frac{\delta Z[F]}{\delta F(t_k)} \Big|_{F=0}. \quad (81)$$

Vamos escrever o elemento de matriz  ${}_H \langle q', t' | \hat{q}_H(t_k) | q, t \rangle_H$  na representação de Schrödinger. Para isso usaremos a relação entre as representações de Heisenberg e Schrödinger dada pelas eqs. (14) e (15),

$$|\psi, t\rangle_H = e^{i\mathcal{H}t} |\psi(t)\rangle_S \quad (82)$$

e

$$Q_H(t) = e^{i\mathcal{H}t} Q_S e^{-i\mathcal{H}t}. \quad (83)$$

Substituindo essas igualdades no *bracket* (81), obtemos que,

$$\begin{aligned} {}_H\langle q', t' | \hat{q}_H(t_k) | q, t \rangle_H &= {}_S\langle q'(t') | e^{-i\mathcal{H}t'} e^{i\mathcal{H}t_k} \hat{q}_S e^{-i\mathcal{H}t_k} e^{i\mathcal{H}t} | q(t) \rangle_S \\ &= {}_S\langle q'(t') | e^{i\mathcal{H}(t_k-t')} \hat{q}_S e^{-i\mathcal{H}(t_k-t)} | q(t) \rangle_S. \end{aligned} \quad (84)$$

Usando a eq. (5), reescrevemos a igualdade acima como:

$${}_H\langle q', t' | \hat{q}_H(t_k) | q, t \rangle_H = {}_S\langle q'(t_k) | \hat{q}_S | q(t_k) \rangle_S. \quad (85)$$

O l.d. da eq. (85) dá a representação matricial do operador  $\hat{q}_S$  no espaço das posições, inclusive os elementos fora da diagonal.

Para obtermos o valor médio da posição da partícula que está no estado quântico  $|\psi(t_k)\rangle_S$ , no instante  $t_k$ , precisamos calcular o elemento de matriz:

$$\begin{aligned} &{}_S\langle \psi(t_k) | \hat{q}_S | \psi(t_k) \rangle_S = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq'(t_k) dq(t_k) {}_S\langle \psi(t_k) | q'(t_k) \rangle_S {}_S\langle q'(t_k) | \hat{q}_S | q(t_k) \rangle_S {}_S\langle q(t_k) | \psi(t_k) \rangle_S \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq'(t_k) dq(t_k) \psi(q'_k, t_k)^* \psi(q_k, t_k) {}_S\langle q'(t_k) | \hat{q}_S | q(t_k) \rangle_S \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq'(t_k) dq(t_k) \psi(q'_k, t_k)^* \psi(q_k, t_k) \int_{q(t)}^{q'(t')} \mathcal{D}q(t) q(t_k) e^{i \int_t^{t'} L dt}. \end{aligned} \quad (86)$$

Note que para obtermos a expressão (86) não seria suficiente conhecermos apenas os elementos diagonais da representação matricial do operador  $\hat{q}_S$ .

Consideremos agora,  $t < t_k < t_j < t'$ . Então,

$$\begin{aligned} &{}_H\langle q', t' | \hat{q}_H(t_j) \hat{q}_H(t_k) | q, t \rangle_H = \int dq_1 \dots dq_k \dots dq_j \dots dq_N \times \\ &\times \langle q', t' | q_N, t_N \rangle \langle q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \dots \times \\ &\times \dots \langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle \langle q_j, t_j | \hat{q}(t_j) | q_{j-1}, t_{j-1} \rangle \dots \times \\ &\times \dots \langle q_{k+1}, t_{k+1} | q_k, t_k \rangle \langle q_k, t_k | \hat{q}(t_k) | q_{k-1}, t_{k-1} \rangle \dots \times \\ &\times \dots \langle q_1, t_1 | q, t \rangle. \end{aligned} \quad (87)$$

Assim,

$${}_H\langle q', t' | \hat{q}_H(t_j) \hat{q}_H(t_k) | q, t \rangle_H = \int_{q(t)}^{q'(t')} \mathcal{D}q(t) q(t_j) q(t_k) e^{i \int_t^{t'} L dt}, \quad (88)$$

para  $t' > t_j > t_k > t$ .

Seja  $T$  o operador que ordena os operadores no tempo em ordem decrescente, da esquerda para a direita, então,

$${}_H\langle q', t' | T[\hat{q}_H(t_j) \hat{q}_H(t_k)] | q, t \rangle_H = (-i)^2 \frac{\delta^2 Z[F]}{\delta F(t_j) \delta F(t_k)} \Big|_{F=0}. \quad (89)$$

Usando os resultados das eqs. (5) e (14), temos que:

$${}_H\langle q', t' | \hat{q}_H(t_j) \hat{q}_H(t_k) | q, t \rangle_H = {}_S\langle q'(t_j) | e^{-i\mathcal{H}t_j} \hat{q}_S e^{i\mathcal{H}(t_j-t_k)} \hat{q}_S e^{i\mathcal{H}t_k} | q(t_k) \rangle_S. \quad (90)$$

No caso geral, encontramos que

$$\begin{aligned} {}_H\langle q', t' | T[\hat{q}_H(t_1) \dots \hat{q}_H(t_n)] | q, t \rangle_H &= \int_{q(t)}^{q'(t')} \mathcal{D}q(t) q(t_1) \dots q(t_n) e^{i \int_t^{t'} L dt} \\ &= (-i)^n \frac{\delta^n Z[F]}{\delta F(t_1) \dots \delta F(t_n)} \Big|_{F=0} \\ &= (-i)^n G^{(n)}(t_1, \dots, t_n). \end{aligned} \quad (91)$$

## 2 Relação entre a Mecânica Estatística e as Integrais de Caminho

### 2.1 Função de Partição e o Funcional Gerador das Funções de Green Térmicas

Estamos interessados em descrever sistemas em equilíbrio termodinâmico. Podemos entender um sistema em equilíbrio termodinâmico como sendo aquele no qual os processos rápidos, comparados com o tempo de relaxação do sistema, já ocorreram, e que processos lentos comparados com o tempo de relaxação do sistema ainda não ocorreram. (R.P. Feynman, *Statistical Mechanics - A Set of Lectures*, pág.1).

Estando o sistema descrito pela hamiltoniana  $\mathbf{H}$  em equilíbrio termodinâmico com um reservatório, a probabilidade do sistema ser encontrado no estado quântico  $|n\rangle$ , onde  $\mathbf{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$  é,

$$P_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{A}, \quad (92)$$



onde  $\beta = 1/kT$ , sendo  $k$  a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura absoluta do reservatório em que o sistema está em equilíbrio térmico.  $A$  é a constante de normalização.

Define-se a função de partição do sistema como sendo

$$Z \equiv \sum_{|n\rangle} e^{-\beta E_n}, \quad (93)$$

onde  $|n\rangle$  são todos os autoestados, incluindo a parte contínua<sup>8</sup>, da hamiltoniana  $\mathbf{H}$  do sistema quântico. A função de partição (93) pode ser reescrita como<sup>9</sup>

$$Z(\beta, \Omega) = \sum_{|n\rangle} \langle n | e^{-\beta \mathbf{H}} | n \rangle = Tr[e^{-\beta \mathbf{H}}], \quad (94)$$

onde  $\mathbf{H}$  é o operador hamiltoniano do sistema. Como o traço ( $Tr$ ) de qualquer operador independe da base utilizada para calculá-lo, podemos escolher a base que nos é mais conveniente para calcular  $Z$ .  $\Omega$  é o volume ocupado pelo universo no qual o sistema está imerso.

Uma vez obtida a função de partição do sistema, todas as outras grandezas termodinâmicas são derivadas. Em particular, a energia livre de Helmholtz é dada por,

$$F(\beta, \Omega) = -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta, \Omega). \quad (95)$$

O limite termodinâmico é obtido tomando-se  $\lim \Omega \rightarrow \infty$ .

## 2.2 Relação entre as Funções de Green Térmicas e as Funções de Green do Espaço Euclidiano

Já vimos que a função de partição de um sistema quântico pode ser escrita como:

$$Z(\beta, \Omega) = Tr(e^{-\beta H}) = \sum_{|x\rangle} \langle x | e^{-\beta H} | x \rangle. \quad (96)$$

Os vetores  $\langle x |$  e  $|x\rangle$  são definidos no mesmo instante, e, **nesse caso, o produto escalar é independente da representação que escolhermos**. Além disso, estamos somando sobre todos os estados  $|x\rangle$ .

Para calcularmos o produto escalar dos termos da eq. (96), vamos fazer um truque análogo ao que fizemos no caso da Mecânica Quântica de uma partícula para calcularmos a amplitude de probabilidade:

---

<sup>8</sup>Estamos usando o símbolo de soma na eq.(93) apenas por conveniência de notação. Devemos lembrar que a somatória é substituída por uma integral na parte contínua do espectro de energia do sistema quântico.

<sup>9</sup>Apesar de estar sendo escrita na forma de uma somatória,  $\sum_{|n\rangle}$  está somando também sobre os autoestados da parte contínua do espectro de energia do operador  $\mathbf{H}$ .

$${}_S\langle x_f | e^{-iH(t_f-t_i)} | x_i \rangle_S. \quad (97)$$

Comparando os elementos de matriz de (96) e (97) vemos que  $\beta$  faz o papel de um tempo imaginário, ou seja,  $\beta = i(t_f - t_i)$ . Com isso vemos que, se nas expressões que obtivemos na Mecânica Quântica de uma partícula, fazemos a identificação  $\tau = it$  e  $x_f = x_i$  então, o resultado é igual aos termos que contribuem para a função de partição do sistema. A diferença entre a função de partição e a amplitude de probabilidade é que os estados inicial e final são os **mesmos** no caso da função de partição, além de **somarmos sobre todos os possíveis estados iniciais**.

No caso da Mecânica Quântica de uma partícula encontramos que:

$${}_S\langle x_f | e^{-iH(t_f-t_i)} | x_i \rangle_S = \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x(t) e^{i \int_{t_i}^{t_f} L(x, \dot{x}; t) dt}, \quad (98)$$

sendo que para uma partícula não-relativística, temos que

$$L = \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x). \quad (99)$$

Na Mecânica Estatística, fazendo a substituição  $t = -i\tau$  na eq. (98), obtemos que

$$Z = \sum_{x(0)} \int_{x(0)=x(\beta)} \mathcal{D}x(\tau) e^{i \int_0^\beta L(x, -i\tau) d(-i\tau)}, \quad (100)$$

onde  $\tau$  é um parâmetro real definido no intervalo  $[0, \beta]$ . Como  $t = -i\tau$ , estamos fazendo a extensão analítica da eq.(98) para tempos imaginários. É usual chamarmos este formalismo de **tempo imaginário**.

A lagrangeana escrita em termos de  $\tau$  fica

$$L = \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) = -\frac{m}{2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x) \equiv -L_E(x, \dot{x}; \tau), \quad (101)$$

onde  $L_E(x, \dot{x}; \tau)$  é a lagrangeana do sistema no espaço euclidiano e  $\dot{x} \equiv \frac{dx}{d\tau}$ .

Portanto, a integral funcional da função de partição do sistema é,

$$Z(\beta, \Omega) = \sum_{x(0)} \int_{x(0)=x(\beta)} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^\beta L_E(x, \tau) d\tau}, \quad (102)$$

onde  $L_E$  é dada pela eq.(101).

Note que, se  $L(x, \dot{x}; t)$  é a lagrangeana do sistema, por exemplo eq.(99), ou também chamada de lagrangeana no espaço de Minkowski<sup>10</sup>, então

---

<sup>10</sup>Precisamos notar que  $\dot{x}$  possui significado **diferente** em  $L$  e em  $L_E$ . Na lagrangeana no espaço de Minkowski,  $L(x, \dot{x}; t)$ , temos que:  $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$ , enquanto que na lagrangeana no espaço euclidiano,  $L_E(x, \dot{x}; \tau)$ , temos que:  $\dot{x} \equiv \frac{dx}{d\tau}$ .

$$L(x, \dot{x}; t = -i\tau) = -L_E(x, \dot{x}; \tau), \quad (103)$$

onde  $\tau$  é real. No caso de partícula não relativística cuja lagrangeana é dada pela expressão (99), temos que  $L_E(x, \dot{x}; \tau)$  é igual a energia total da partícula.

Da mesma maneira que no caso da MQ de uma partícula, podemos aplicar uma fonte externa  $F(\tau)$  ao sistema, de forma que a função de partição fica sendo

$$Z[F(\tau)] = \sum_{x(0)} \int_{x(0)=x(\beta)} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^\beta (L_E(x, \dot{x}) - F(\tau)x(\tau)) d\tau}. \quad (104)$$

Expandindo a exponencial funcional  $e^{\int_0^\beta F(\tau)x(\tau)d\tau}$ , obtemos a série de Taylor do funcional  $Z[F(\tau)]$ . Usando o resultado (73), os coeficientes desta série podem ser escritos como derivadas funcionais de  $Z[F]$  em relação a  $F(\tau)$ . Em analogia ao que fizemos na MQ de uma partícula, definimos a função de Green no espaço euclideo

$$\begin{aligned} \sum_{x(0)} \int_{x(0)=x(\beta)} \mathcal{D}x(\tau) x(\tau_n) \dots x(\tau_2)x(\tau_1) e^{-\int_0^\beta L_E(x, \dot{x}) d\tau} &\equiv \\ &\equiv \langle \hat{x}_H(\tau_n) \dots \hat{x}_H(\tau_2)\hat{x}_H(\tau_1) \rangle, \end{aligned} \quad (105)$$

onde  $\beta \geq \tau_n \geq \tau_{n-1} \dots \tau_2 \geq \tau_1$ . Essas funções estão associadas aos coeficientes da série de Taylor de  $Z[F]$ . Usando a analogia com a eq.(90), o l.e. da eq.(105) é reescrito na forma de elemento de matriz do operador:

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}_H(\tau_n) \dots \hat{x}_H(\tau_2)\hat{x}_H(\tau_1) \rangle &\equiv \sum_{x(0)} \langle x(0) | e^{\mathcal{H}\tau_n} \hat{x}_S(0) e^{-\mathcal{H}\tau_n} \dots \times \\ &\times e^{\mathcal{H}\tau_2} \hat{x}_S(0) e^{-\mathcal{H}\tau_2} e^{\mathcal{H}\tau_1} \hat{x}_S(0) e^{-\mathcal{H}\tau_1} | x(0) \rangle. \end{aligned} \quad (106)$$

Continuando a usar a analogia com a eq.(15), a partir da eq.(106), definimos a relação entre operadores de posição nas representações de Schrödinger e Heisenberg, a temperatura finita, isto é,

$$\hat{x}_H(\tau) = e^{\mathcal{H}\tau} \hat{x}_S(0) e^{-\mathcal{H}\tau}. \quad (107)$$

Ao fazermos a identificação (107) a partir da eq.(15), estamos usando a extensão do parâmetro tempo para valores imaginários<sup>11</sup>:  $t = -i\tau$ .

---

<sup>11</sup>Para ver a discussão de funções de Green a temperatura finita, veja a referência: A.A. Abrikosov, L.P. Gorkov and I.E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Dover Publ., NY(1963).

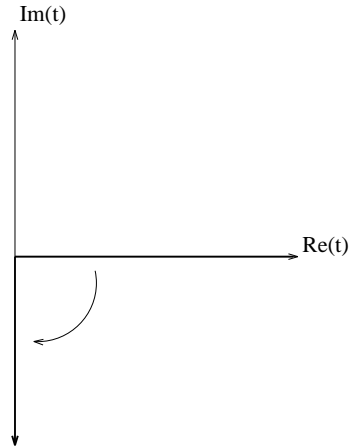


Figure 3: Representação esquemática do plano complexo  $t = Re(t) + iIm(t)$ , onde o eixo real positivo corresponde à MQ de 1 partícula, e o eixo imaginário negativo corresponde à Mecânica Estatística.

Usando o resultado da derivada funcional (eq. (72)), podemos reescrever as funções de Green no espaço euclideo como

$$\langle \hat{x}_H(\tau_n) \dots \hat{x}_H(\tau_2) \hat{x}_H(\tau_1) \rangle = \frac{\delta^n Z[F]}{\delta F(\tau_n) \dots F(\tau_1)} \Big|_{F(\tau)=0} \equiv G_E^{(n)}(\tau_n, \dots, \tau_1). \quad (108)$$

Da mesma forma que na MQ de uma partícula, a função de partição é um funcional da fonte externa  $F(\tau)$  aplicada, de maneira que pode ser escrita como

$$Z[F(\tau)] = Z[0] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\beta} d\tau_1 \dots d\tau_n G_E^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) F(\tau_1) \dots F(\tau_n). \quad (109)$$

Vimos que a função de partição  $Z$  é a continuação analítica da expressão da amplitude de probabilidade da MQ para  $\tau = it$ , onde  $\tau \in [0, \beta]$ , de forma que  $t \in [0, -i\beta]$  (veja figura 3).

Desejamos relacionar as continuações analíticas das funções de Green no espaço de Minkowski realizando a rotação do desenho da figura 3, e as funções de Green no espaço euclideo,  $G_E^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ , como definimos na (108).

Quando definimos as funções de Green no espaço de Minkowski, o fizemos da seguinte forma (veja eq.(90):

$${}_H \langle q', t' | T[\hat{q}_H(t_1) \dots \hat{q}_H(t_n)] | q, t \rangle_H = (-i)^n G^{(n)}(t_1, \dots, t_n), \quad (110)$$

onde os estados final e inicial são quaisquer. Vamos considerar as funções de Green de uma partícula na MQ para  $q = q'$ . Na definição da função de Green no espaço euclideo

(veja eq.(108)), estamos somando sobre todos os valores que  $x(0)$  pode assumir, uma vez que calculamos um traço. No entanto, iremos praticar um abuso de linguagem quando utilizamos a notação  $G_E$  para exprimir a extensão analítica da função de Green no espaço de Minkowski já que estamos **fixando** um **único** valor para os estados inicial e final. No entanto, em Teoria Quântica de Campos estamos interessados em calcular os elementos de matriz no vácuo da teoria. Devemos lembrar que o vetor de estado que representa o vácuo,  $|0\rangle$ , possui a propriedade:  $\mathbf{H}|0\rangle = 0$ . De agora em diante, quando for mencionada a função de Green, será no sentido de que os estados inicial e final são os estados de vácuo da teoria. O que vamos fazer de agora em diante não é uma demonstração, mas simplesmente uma mostração, usando argumentos de plausibilidade. O resultado já foi mostrado exatamente.

Na representação de Heisenberg, o operador posição em qualquer instante  $t$  é (eq.(7)):

$$\hat{q}_H(t) = e^{iHt}\hat{q}_H(0)e^{-iHt}, \quad (111)$$

de forma que

$$(-i)^n G^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = {}_H\langle 0 | \hat{q}_H(0) e^{-iHt_1} e^{iHt_2} \hat{q}_H(0) e^{-iHt_2} \dots e^{iHt_n} \hat{q}_H(0) | 0 \rangle_H, \quad (112)$$

onde  $t_1 > t_2 > \dots > t_n$ . Fazendo a substituição  $t_i = z\tau_i$ , onde  $z$  é uma constante complexa e  $\tau_i$  é real, a função de Green passa a ser

$$\begin{aligned} (-i)^n G^{(n)}(z\tau_1, \dots, z\tau_n) &= {}_H\langle 0 | \hat{q}_H(0) e^{-izH(\tau_1 - \tau_2)} \hat{q}_H(0) e^{-izH(\tau_2 - \tau_3)} \times \\ &\dots \times e^{-ziH(\tau_{n-1} - \tau_n)} \hat{q}_H(0) | 0 \rangle_H. \end{aligned} \quad (113)$$

Veja que o elemento de matriz (113) está numa forma em que podemos introduzir relações de completiza, de maneira que a função de Green passa a ser escrita através de uma integral de caminho (basta seguir os mesmos passos que na MQ de uma partícula). Portanto,

$$(-i)^n G^{(n)}(z\tau_1, \dots, z\tau_n) = \int \mathcal{D}q(\tau) e^{iz \int_{\tau}^{\tau'} d\tau L(x, \dot{x}; z\tau)} q(\tau_1) \dots q(\tau_n). \quad (114)$$

Lembre-se de que  $\tau$  serve apenas como índice para as variáveis  $q$ . Como pela mudança de variável apenas  $\tau_i$  está variando, este serve como o novo índice para as variáveis  $q$ . No caso em que  $z = -i$  temos então que

$$(-i)^n G^{(n)}(-i\tau_1, \dots, -i\tau_n) = \int \mathcal{D}q(\tau) e^{\int_{\tau}^{\tau'} d\tau L(x, \dot{x}; -i\tau)} q(\tau_1) \dots q(\tau_n). \quad (115)$$

No entanto, já vimos pelas eqs.(101) e (103) que  $L(x, \dot{x}; -i\tau) = -L_E(x, \dot{x}; \tau)$ . Portanto

$$\begin{aligned} (-i)^n G^{(n)}(-i\tau_1, \dots, -i\tau_n) &= \int \mathcal{D}q(\tau) e^{-\int_{\tau}^{\tau'} d\tau L_E(x, \dot{x}; \tau)} q(\tau_1) \dots q(\tau_n) \\ &= G_E^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n). \end{aligned} \quad (116)$$

Logo,

$$(-i)^n G^{(n)}(-i\tau_1, \dots, -i\tau_n) = G_E^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n). \quad (117)$$

### 3 Integral de Caminho na Teoria de Campos

Referências:

- E.S. Abers, B.W. Lee, Phys. Rep. **9C**, 1(1973), seção 12, pág. 71.
- P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, cap. 3, pág. 88.

Até então tratamos o sistema quântico de uma partícula. Nesse caso,  $x$  representa a posição da partícula em diferentes instantes, sendo então uma variável dinâmica. O parâmetro tempo  $t$ , nesse caso, serve apenas como um índice para a variável  $x$ . No caso de campos contínuos, queremos estudar formas definidas no espaço e que podem variar com o tempo. Para fixarmos idéia, podemos pegar uma folha de papel e soltá-la, de maneira a ver como ela muda a sua forma de instante a instante. Em cada instante  $t$ , verificamos se na posição  $(x, y, z)$  existe algum pedaço do papel, e com isso vamos determinando a forma da folha instante a instante. Vemos então que, no caso de campos contínuos, tanto o espaço como o tempo servem como índices para definir as formas que estamos estudando.

A Teoria de Campos trabalha com configurações extensas, e passamos a calcular amplitudes de probabilidade do sistema ser encontrado numa certa configuração. Passamos a falar em configuração, porque estamos estudando campos, como, por exemplo, o campo eletromagnético, o campo gravitacional, etc... Agora, os nossos vetores de estado passam a conter a informação sobre configurações. A correspondência entre vetores de estado na Mecânica Quântica e na Teoria Quântica de Campos é:

$$|x, t\rangle_H \longrightarrow |\phi(\vec{x}); t\rangle_H, \quad (118)$$

onde  $\phi_{op}(\vec{x}, t)|\phi(\vec{x}), t\rangle_H = \phi(\vec{x})|\phi(\vec{x}), t\rangle_H$ , sendo  $\phi(\vec{x})$  a função que dá a configuração do campo em todo o espaço,  $\phi_{op}(\vec{x}, t)$  o operador de campo e  $|\phi(\vec{x}), t\rangle_H$  o auto-estado do operador de campo no instante  $t$  na representação de Heisenberg. Apesar da relação

ter sido escrita na representação de Heisenberg, ela também é verdadeira em qualquer representação.

As dinâmicas dos vetores de estado e operadores nas representações de Heisenberg e Schrödinger ainda são dadas pelas mesmas relações que na MQ de uma partícula, assim como a relação entre as diferentes representações que podemos utilizar para descrever os sistemas quânticos.

Daqui por diante, apenas por questão de simplicidade, restringir-nos-emos a campos escalares, que satisfazem à álgebra usual e não possuem graus de liberdade internos. Vamos estender gradativamente os resultados que obtivemos na MQ de uma partícula:

$${}_H\langle q', t' | q, t \rangle_H = \int_{q(t)}^{q'(t')} \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) e^{i \int_t^{t'} (p\dot{q} - H) dt}, \quad (119)$$

onde  $H$  é a hamiltoniana total do sistema.

Quando o sistema possui  $M$  graus de liberdade  $q_1(t), \dots, q_M(t); p_1(t), \dots, p_M(t)$ , a expressão acima passa a ser escrita como:

$$\begin{aligned} {}_H\langle q'_1, \dots, q'_M, t' | q_1, \dots, q_M, t \rangle_H &= \\ &= \int_{\{q(t)\}}^{\{q'(t')\}} \prod_{\alpha=1}^M \mathcal{D}q_\alpha(t) \mathcal{D}p_\alpha(t) e^{i \int_t^{t'} (\sum_{\alpha=1}^M p_\alpha \dot{q}_\alpha - H) dt}. \end{aligned} \quad (120)$$

onde  $\{q(t)\}$  dá os valores dos  $M$  graus de liberdade no instante  $t$  e  $\{q'(t')\}$  os seus valores no instante  $t'$ .

Para se obter esta expressão basta proceder de maneira análoga ao que fizemos no caso da MQ de uma partícula.

Vamos estender ainda mais a expressão acima. Dividimos o espaço em cubinhos de volume  $\varepsilon^3$ . No limite de  $\varepsilon \rightarrow 0$ , definimos o campo na posição no centro do cubo de volume infinitesimal como sendo

$$\phi_\alpha(t) = \frac{1}{\varepsilon^3} \int d^3x \phi(\vec{x}, t), \quad (121)$$

onde  $\alpha$  é o índice associado à célula espacial que contém o volume  $\varepsilon^3$ .

Como estamos trabalhando com campos contínuos, a lagrangeana do sistema passa a ser escrita como

$$L = \int_{V_\infty} d^3x \mathcal{L}(\phi(\vec{x}, t), \partial_\mu \phi(\vec{x}, t); t), \quad (122)$$

sendo  $\mathcal{L}$  a densidade lagrangeana do sistema. Quando discretizamos o espaço, a lagrangeana (122) fica,

$$L = \sum_{\alpha=1}^N \varepsilon^3 \mathcal{L}_\alpha(\phi_\alpha(t), \dot{\phi}_\alpha(t), \phi_{\alpha\pm s}(t); t), \quad (123)$$

sendo que  $\dot{\phi}_\alpha(t) = \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial t}$ , e  $N$  é o número de células espaciais de volume  $\varepsilon^3$ .

Da Mecânica Clássica, temos que o momento canonicamente conjugado à variável  $\phi_\alpha(t)$  é:

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_\alpha(t)} = \varepsilon^3 \frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial \dot{\phi}_\alpha(t)} \equiv \varepsilon^3 \pi_\alpha(t), \quad (124)$$

onde  $\pi_\alpha(t) = \frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial \dot{\phi}_\alpha(t)}$ . A hamiltoniana total do sistema é

$$H = \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha(t) \dot{\phi}_\alpha(t) - L \equiv \sum_{\alpha=1}^N \varepsilon^3 \mathcal{H}_\alpha, \quad (125)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N \varepsilon^3 \mathcal{H}_\alpha &= \sum_{\alpha=1}^N \varepsilon^3 \pi_\alpha(t) \dot{\phi}_\alpha(t) - \sum_{\alpha=1}^N \varepsilon^3 \mathcal{L}_\alpha(\phi_\alpha(t), \dot{\phi}_\alpha(t), \phi_{\alpha\pm s}(t); t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{H}_\alpha = \pi_\alpha(t) \dot{\phi}_\alpha(t) - \mathcal{L}_\alpha(\phi_\alpha(t), \dot{\phi}_\alpha(t), \phi_{\alpha\pm s}(t); t). \end{aligned}$$

Na expressão anterior, temos a relação entre densidades: densidade de lagrangeana, densidade de hamiltoniana e densidade de momento canonicamente conjugado.

Voltando para a expressão da amplitude de probabilidade temos que

$$\begin{aligned} {}_H \langle \phi'(\vec{x}), t' | \phi(\vec{x}), t \rangle_H &= \int_{\phi(\vec{x}, t)}^{\phi'(\vec{x}, t')} \prod_{\alpha=1}^N \mathcal{D}\phi_\alpha(t) \mathcal{D}p_\alpha(t) \times \\ &\times e^{i \int_t^{t'} [\sum_{\alpha=1}^N p_\alpha(t) \dot{\phi}_\alpha(t) - \sum_{\alpha=1}^N \varepsilon^3 \mathcal{H}] dt}. \end{aligned} \quad (126)$$

Porém,  $p_\alpha(t) = \varepsilon^3 \pi_\alpha(t)$ , e, além disso,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{\alpha=1}^N \varepsilon^3 = \int_{-\infty}^{\infty} dx dy dz$ . Portanto, a eq. (126) pode ser escrita como

$${}_H \langle \phi'(\vec{x}), t' | \phi(\vec{x}), t \rangle_H = \int_{\phi(\vec{x}, t)}^{\phi'(\vec{x}, t')} \prod_{\alpha=1}^N \mathcal{D}\phi_\alpha(t) \varepsilon^{3N} \mathcal{D}\pi_\alpha(t) e^{i \int_t^{t'} dt \int_{V_\infty} d^3 \vec{x} (\pi_\alpha(t) \dot{\phi}_\alpha(t) - \mathcal{H})}. \quad (127)$$

Em Teoria Quântica de Campos, estamos interessados em calcular a amplitude de probabilidade do sistema estando no estado de mais baixa energia (o vácuo) em tempos anteriores ao acoplamento com uma fonte externa, volte a ser encontrado no estado de mais baixa energia do sistema após a fonte externa ter sido desligada, ou seja,



$$\begin{aligned}
 {}_H\langle 0, t \rightarrow \infty | 0, t \rightarrow -\infty \rangle_H^J &= \\
 &= \int_{\phi(\vec{x}, t)}^{\phi(\vec{x}, t')} \prod_{\alpha=1}^N \mathcal{D}\phi_\alpha(t) \varepsilon^{3N} \mathcal{D}\pi_\alpha(t) e^{i \int d^4x (\pi_\alpha(t) \dot{\phi}_\alpha(t) - \mathcal{H} + J(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}, t))} \\
 &\equiv Z[J],
 \end{aligned} \tag{128}$$

onde  $N$  é o número de pontos na rede espacial,  $|0, t \rightarrow \pm\infty\rangle$  representa o vetor associado ao estado de mais baixa energia (vácuo) no instante  $t \rightarrow \pm\infty$ , respectivamente. Assumimos que esses estados são representados pelos campos  $\phi(\vec{x}, t)$  e  $\phi(\vec{x}, t')$  nos instantes  $t \rightarrow -\infty$  e  $t' \rightarrow \infty$ .

A amplitude de transição vácuo-vácuo é uma quantidade mal definida, pois ela representa a superposição de fases. Para dar um significado a essas integrais, temos as seguintes opções:

1. No argumento da exponencial introduzir um termo da forma

$$i \int d^4x \epsilon^2 \phi^2(\vec{x}, t), \tag{129}$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro para o qual será tomado o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

2. Realizar uma rotação de Wick,

$$it = \tau \rightarrow t = -i\tau, \tag{130}$$

onde  $\tau$  é real.

Nestes casos teremos no integrando exponenciais decrescentes.

Apesar de dizermos que essas duas maneiras de tratar o problema dão um significado matemático à integral de caminho, ainda existem infinitos embutidos nas amplitudes de probabilidade, os quais ainda devem ser retirados. No caso dos infinitos associados a pequenas distâncias temos a renormalização.

Apesar de sabermos que temos que introduzir o termo (129) para dar sentido à integral de caminho, não vamos escrevê-lo explicitamente, mas devemos ter em mente que ele continua fazendo parte do argumento da exponencial.

## 4 Funções de Green Conexas e Desconexas

Analogamente ao caso da MQ de uma partícula,

$$\begin{aligned}
 {}_H\langle 0|T[\phi_H(\vec{x}_1, t_1) \dots \phi_H(\vec{x}_n, t_n)]|0\rangle_H &= \int_{\phi(\vec{x}, t)}^{\phi(\vec{x}, t')} \prod_{\alpha=1}^N \mathcal{D}\phi_\alpha(t) \varepsilon^{3N} \mathcal{D}\pi_\alpha(t) \times \\
 &\times \phi(\vec{x}_1, t_1) \dots \phi(\vec{x}_n, t_n) e^{i \int d^4x (\pi_\alpha(x) \dot{\phi}_\alpha(x) - \mathcal{H})}, \quad (131)
 \end{aligned}$$

sendo  $T$  um operador de ordenação temporal, onde os tempos são ordenados da direita para a esquerda em ordem crescente:  $t_n < t_{n-1} < \dots < t_2 < t_1$ . Estamos usando a notação:  $x \equiv (t, \vec{x})$ .

Usando os resultados conhecidos de derivadas funcionais, temos que<sup>12</sup>

$$\begin{aligned}
 \int_{\phi(\vec{x}, t)}^{\phi(\vec{x}, t')} \prod_{\alpha=1}^N \mathcal{D}\phi_\alpha(t) \varepsilon^{3N} \mathcal{D}\pi_\alpha(t) \phi(\vec{x}_1, t_1) \dots \phi(\vec{x}_n, t_n) e^{i \int d^4x (\pi_\alpha(x) \dot{\phi}_\alpha(x) - \mathcal{H})} &= \\
 &= \int_{\phi(\vec{x}, t)}^{\phi(\vec{x}, t')} \prod_{\alpha=1}^N \mathcal{D}\phi_\alpha(t) \varepsilon^3 \mathcal{D}\pi_\alpha(t) e^{i \int d^4x (\pi_\alpha(x) \dot{\phi}_\alpha(x) - \mathcal{H})} \times \\
 &\times \frac{1}{(i)^n} \frac{\delta^n e^{i \int d^4x J(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}, t)}}{\delta J(\vec{x}_1, t_1) \dots \delta J(\vec{x}_n, t_n)} \Big|_{J=0}. \quad (132)
 \end{aligned}$$

Ao contrário do que fizemos anteriormente, chamamos de função de Green de  $n$  pontos a

$$G^{(n)}(\vec{x}_1, t_1; \dots; \vec{x}_n, t_n) = {}_H\langle 0|T[\phi_H(\vec{x}_1, t_1), \dots, \phi_H(\vec{x}_n, t_n)]|0\rangle_H. \quad (133)$$

Comparando a expressão acima com a anterior encontramos que

$$i^n G^{(n)}(\vec{x}_1, t_1; \dots; \vec{x}_n, t_n) = \frac{\delta Z[J]}{\delta J(\vec{x}_1, t_1) \dots \delta J(\vec{x}_n, t_n)} \Big|_{J=0}, \quad (134)$$

que são as chamadas funções de Green conexas e desconexas. Num exemplo específico, veremos o porque do nome.

A amplitude de vácuo-vácuo é um funcional da fonte externa,

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi(x) \mathcal{D}\pi(x) e^{i \int d^4x [\pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{H} + J(x) \phi(x)]}, \quad (135)$$

---

<sup>12</sup>Neste caso, em que estamos num espaço tridimensional e temos o tempo também como parâmetro, a derivada funcional (55) fica sendo:

$$\frac{\delta E[J]}{\delta J(\vec{x}_1, t_1)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{E[J(\vec{x}, t) + \epsilon \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_1) \delta(t - t_1)] - E[J(\vec{x}, t)]}{\epsilon}.$$

onde  $x \equiv (\vec{x}, t)$  e absorvemos a constante  $\varepsilon^{3N}$  na definição das medidas  $\mathcal{D}\phi(x)$  e  $\mathcal{D}\pi(x)$ . Realizando a expansão da exponencial<sup>13</sup>  $e^{i\langle J\phi \rangle}$ , temos que

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi(x)\mathcal{D}\pi(x) e^{i \int d^4x [\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{H}]} \times [1 + i \int d^4x J(x)\phi(x) + \frac{(i)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1)J(x_2)\phi(x_1)\phi(x_2) + \dots]. \quad (136)$$

Então,

$$Z[J] = Z[0] + i \int d^4x_1 J(x_1) \int \mathcal{D}\phi(x)\mathcal{D}\pi(x)\phi(x_1) e^{i \int d^4x [\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{H}]} + \frac{(i)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1)J(x_2) \int \mathcal{D}\phi(x)\mathcal{D}\pi(x)\phi(x_1)\phi(x_2) e^{i \int d^4x [\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{H}]} + \dots \quad (137)$$

Assim,

$$Z[J] = Z[0] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n), \quad (138)$$

onde

$$G^{(n)}(\vec{x}_1, t_1; \dots; \vec{x}_n, t_n) = {}_H\langle 0 | T[\phi_H(\vec{x}_1, t_1) \dots \phi_H(\vec{x}_n, t_n)] | 0 \rangle_H = \int \mathcal{D}\phi(x)\mathcal{D}\pi(x) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{i \int d^4x [\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{H}]}, \quad (139)$$

é a função de Green de  $n$  pontos **vestida**. Note que na eq.(139) aparece a hamiltoniana **completa** que descreve o sistema quântico.

## 4.1 Modelo $\lambda\phi^4$

Referências:

- P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, 2<sup>nd</sup> ed. (Revised Printing), Addison-Wesley (1990).
- C. Nash, *Relativistic Quantum Field*, Academic Press (1978), cap. 1.

Para exemplificarmos como tratar as funções de Green de  $n$  pontos, consideramos a densidade de hamiltoniana de partículas escalares reais,

---

<sup>13</sup>Estamos usando a convenção:  $\langle J\phi \rangle = \int d^4x J(x)\phi(x)$ .

$$\mathcal{H}(\phi, \partial_i \phi, \pi; \vec{x}, t) = \frac{\pi^2(\vec{x}, t)}{2} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \phi(\vec{x}, t))^2 + \frac{1}{2}m^2 \phi^2(\vec{x}, t) + V(\phi). \quad (140)$$

$V(\phi)$  é a parte de auto-interação dos campos reais e é uma função de  $\phi$  limitada inferiormente.

É importante lembrar que, na integral funcional, estamos integrando sobre todas as possíveis configurações de  $\pi(\vec{x}, t)$ , e que **não** estamos impondo a restrição

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \phi(x)}{\partial t})} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial t}. \quad (141)$$

Voltando para a integral funcional da função de Green de  $n$  pontos,

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \int \mathcal{D}\phi(x) \mathcal{D}\pi(x) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \times \\ \times e^{i \int d^4x [-\frac{\pi^2}{2} + \pi \dot{\phi}]} e^{-i \int d^4x [\frac{1}{2}(\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2 \phi^2 + V(\phi)]}. \quad (142)$$

Lembrando que:  $\frac{\pi^2}{2} - \pi \dot{\phi} = \frac{1}{2}[\pi^2 - 2\dot{\phi}^2 \pi] = \frac{1}{2}[(\pi - \dot{\phi})^2 - \dot{\phi}^2]$  e que

$$\int \mathcal{D}\pi(x) e^{-i \int d^4x [-\pi \dot{\phi} + \frac{\pi^2}{2}]} = e^{i \int d^4x \frac{\dot{\phi}^2}{2}} \int \mathcal{D}\pi(x) e^{-\frac{i}{2} \int d^4x (\pi - \dot{\phi})^2}. \quad (143)$$

A integral funcional sobre  $\pi(x)$  no l. d. da equação acima, é apenas uma constante multiplicativa. Portanto,

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \int \mathcal{D}\phi(x) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{i \int d^4x [\frac{1}{2}(\frac{\partial \phi}{\partial t})^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 - V(\phi)]} \\ = \int \mathcal{D}\phi(x) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{i \int d^4x \mathcal{L}}, \quad (144)$$

onde

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi), \quad (145)$$

sendo que<sup>14</sup>:  $\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ . Absorvemos na definição de  $\mathcal{D}\phi(x)$  a constante que vem da integral funcional funcional sobre  $\pi(x)$ .

Portanto, para as densidades de lagrangeana usuais, temos que

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \int \mathcal{D}\phi(x) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{i \int d^4x \mathcal{L}}. \quad (146)$$

Para mostrar que  $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  são as funções de Green de  $n$  pontos conexas e desconexas, vamos tomar, por simplicidade, o modelo  $\lambda \phi^4$ , ou seja,

---

<sup>14</sup>A definição da métrica está no Apêndice I.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \quad (147)$$

Para este modelo, a função de Green de  $n$  pontos vestida fica sendo

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \int \mathcal{D}\phi(x) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{i \int d^4x [\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4]}. \quad (148)$$

A integral funcional é de quarta ordem nos campos  $\phi$ , e, assim como não sabemos resolver a integral indefinida em zero dimensões,

$$\int dx e^{-(x^4+ax^2+bx)}, \quad (149)$$

não se tem esperanças de obter o resultado analítico da integral funcional (148). O que se faz é utilizar teoria de perturbação na constante de acoplamento do potencial, se esta constante é pequena. Neste caso, a função de Green de  $n$  pontos fica:

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \int \mathcal{D}\phi(x) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \times \\ &\times [1 + (-\frac{i\lambda}{4!}) \int dy_1 \phi^4(y_1) + \frac{1}{2!}(\frac{-i\lambda}{4!})^2 \int dy_1 dy_2 \phi^4(y_1)\phi^4(y_2) + \\ &+ \frac{1}{3!}(\frac{-i\lambda}{4!})^3 \int dy_1 dy_2 dy_3 \phi^4(y_1)\phi^4(y_2)\phi^4(y_3) + \dots] \times \\ &\times e^{i \int d^4x [\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2]}. \end{aligned} \quad (150)$$

Todos estes termos do l.d. da eq.(150) podem ser obtidos a partir da aplicação de derivadas funcionais ao funcional

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi(x) e^{i \int d^4x [\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + J(x)\phi(x)]}. \quad (151)$$

em relação a  $J(x)$ . Calculamos  $Z_0[J]$  introduzindo o termo de amortecimento, ou seja,

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi(x) e^{i \int d^4x [\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}(m^2 - i\epsilon^2)\phi^2 + J(x)\phi(x)]}. \quad (152)$$

Para obter as funções de Green de  $n$  pontos a partir de  $Z_0[J]$ , precisamos explicitar a dependência em  $J(x)$  de  $Z_0[J]$ , pois as derivadas funcionais são calculadas em relação a  $J(x)$ . Apesar  $Z_0[J]$  ser quadrático nos campos  $\phi(x)$ , o resultado desta integral não é óbvio, pois nessa representação, a ação não é diagonal em  $\phi(x)$ . Para ter isso claro, note que a densidade de lagrangeana, em uma dimensão espacial, depende de derivadas espaciais dos campos, ou seja,

$$\frac{\partial\phi(x)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \Delta x) - \phi(x)}{\Delta x}, \quad (153)$$

de maneira que a ação envolve  $\phi(x + \Delta x)$  e  $\phi(x)$ . Uma maneira de diagonalizar a ação clássica

$$S = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} (m^2 - i\epsilon^2) \phi^2 + J(x) \phi(x) \right], \quad (154)$$

é reescrever o integrando em termos das transformadas de Fourier do campo e da corrente. As relações entre as transformadas de Fourier do campo e da corrente são:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(p) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x e^{ipx} \phi(x), \\ \phi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p e^{-ipx} \tilde{\phi}(p), \end{aligned} \quad (155)$$

e,

$$\begin{aligned} \tilde{J}(p) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x e^{ipx} J(x), \\ J(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p e^{-ipx} \tilde{J}(p). \end{aligned} \quad (156)$$

Estamos usando a notação:  $px \equiv p_\mu x^\mu$ .

A ação  $S$  escrita em termos das transformadas de Fourier do campo e da corrente fica,

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left[ \frac{1}{2(2\pi)^4} \int d^4p_1 d^4p_2 (-i)^2 p_{1\mu} p_2^\mu \tilde{\phi}(p_1) \tilde{\phi}(p_2) e^{-i(p_1+p_2)x} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{(m^2 - i\epsilon^2)}{(2\pi)^4} \int d^4p_1 d^4p_2 \tilde{\phi}(p_1) \tilde{\phi}(p_2) e^{-i(p_1+p_2)x} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p_1 d^4p_2 \tilde{J}(p_1) \tilde{\phi}(p_2) e^{-i(p_1+p_2)x} \right]. \end{aligned} \quad (157)$$

Como,

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{-i(p_1+p_2)x} = \delta(p_1 + p_2), \quad (158)$$

a ação  $S$  fica sendo

$$S = \int d^4p \left[ \frac{1}{2} p_\mu p^\mu \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(-p) - \frac{1}{2} (m^2 - i\epsilon^2) \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(-p) + \tilde{J}(p) \tilde{\phi}(-p) \right]. \quad (159)$$

Realizamos uma mudança de variável em  $\tilde{\phi}(p)$ , de maneira a reescrevermos a expressão acima na forma de quadrados, ou seja,

$$\tilde{\phi}'(p) = \tilde{\phi}(p) + \frac{\tilde{J}(p)}{(p^2 - (m^2 - i\epsilon^2))}. \quad (160)$$

Calculando explicitamente, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\tilde{\phi}'(p)[p^2 - (m^2 - i\epsilon^2)]\tilde{\phi}'(-p) - \frac{1}{2}\tilde{J}(p)\frac{1}{p^2 - (m^2 - i\epsilon^2)}\tilde{J}(-p) = \\ = \frac{1}{2}\tilde{\phi}(p)[p^2 - (m^2 - i\epsilon^2)]\tilde{\phi}(-p) + \frac{1}{2}(\tilde{J}(p)\tilde{\phi}(-p) + \tilde{J}(-p)\tilde{\phi}(p)). \end{aligned} \quad (161)$$

No entanto, ao fazermos a mudança nas variáveis de integração:  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$  e  $p^0 \rightarrow -p^0$ , na integral da ação, obtemos que:

$$\int d^4p \tilde{J}(-p)\tilde{\phi}(p) = \int d^4p \tilde{J}(p)\tilde{\phi}(-p), \quad (162)$$

de forma que usando os resultados (161) e (162), reobtemos a ação  $S$ .

Portanto, a ação (157) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2} \int d^4p \tilde{\phi}'(p)(p^2 - (m^2 - i\epsilon^2))\tilde{\phi}'(-p) - \\ - \frac{1}{2} \int d^4p \tilde{J}(p)\frac{1}{p^2 - (m^2 - i\epsilon^2)}\tilde{J}(-p), \end{aligned} \quad (163)$$

onde foi utilizada a mudança de variável (160). No espaço das quadri-coordenadas, esta mudança de variáveis corresponde a:

$$\phi'(x) = \phi(x) + F(x), \quad (164)$$

onde  $F(x)$  é uma função independente do campo  $\phi(x)$ , de forma que a medida da integral funcional é invariante sob essa mudança de variável,

$$\mathcal{D}\phi'(x) = \mathcal{D}\phi(x). \quad (165)$$

A dependência da ação na fonte externa  $J(x)$  foi separada na eq.(163). Reescrevendo a ação no espaço das quadri-coordenadas:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4p \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ipx_1} \phi'(x_1)(p^2 - (m^2 - i\epsilon^2)) e^{-ipx_2} \phi'(x_2) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int d^4 p \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 x_1 d^4 x_2 e^{ipx_1} J(x_1) \frac{1}{p^2 - (m^2 - i\epsilon^2)} J(x_2) e^{-ipx_2} = \\
& = \frac{1}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \phi'(x_1) [-\partial_2^2 e^{-ipx_2} - (m^2 - i\epsilon^2) e^{-ipx_2}] \phi'(x_2) e^{ipx_1} - \\
& -\frac{1}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) J(x_2) \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 p \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ip(-x_1+x_2)}}{p^2 - (m^2 - i\epsilon^2)}, \tag{166}
\end{aligned}$$

onde  $\partial_2^2 = \frac{\partial}{\partial x_{2\mu}} \frac{\partial}{\partial x_2^\mu}$ . Definimos,

$$\Delta(x_1 - x_2) \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 p \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ip(x_2-x_1)}}{p^2 - (m^2 - i\epsilon^2)}, \tag{167}$$

que é a transformada de Fourier do propagador livre. Como estamos integrando sobre  $d^4 p$ , temos da definição acima que  $\Delta(x_1 - x_2) = \Delta(x_2 - x_1)$ . Além disso,

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int dp (-\partial_2^2 e^{-ipx_2}) e^{ipx_1} = -\partial_2^2 \left[ \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp e^{ip(x_1-x_2)} \right] = -\partial_2^2 \delta(x_1 - x_2), \tag{168}$$

e

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int dp e^{-ip(x_1-x_2)} = \delta(x_1 - x_2). \tag{169}$$

Portanto, a ação  $S$  fica sendo

$$\begin{aligned}
S & = \frac{1}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 [ -\phi'(x_1) \phi'(x_2) \partial_2^2 \delta(x_2 - x_1) - \\
& - (m^2 - i\epsilon^2) \phi'(x_1) \phi'(x_2) \delta(x_1 - x_2) ] - \frac{1}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) \Delta(x_1 - x_2) J(x_2) \Rightarrow \\
\Rightarrow S & = \frac{1}{2} \int d^4 x \phi'(x) (-\partial^2 - (m^2 - i\epsilon^2)) \phi'(x) - \\
& - \frac{1}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) \Delta(x_1 - x_2) J(x_2). \tag{170}
\end{aligned}$$

De forma que, voltando à expressão (152), temos que

$$\begin{aligned}
Z_0[J] & = \int \mathcal{D}\phi'(x) e^{\frac{i}{2} \int d^4 x \phi'(x) (-\partial^2 - (m^2 - i\epsilon^2)) \phi'(x)} e^{-\frac{i}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) \Delta(x_1 - x_2) J(x_2)} \\
& = Z_0[J = 0] e^{-\frac{i}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) \Delta(x_1 - x_2) J(x_2)}. \tag{171}
\end{aligned}$$

Note que  $Z_0[0]$  é uma constante independente da fonte externa  $J(x)$  aplicada.

A expressão da função de Green de  $n$  pontos é dada por (150)



$$\begin{aligned}
 G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \int \mathcal{D}\phi(x) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \left[ 1 + \left(-\frac{i\lambda}{4!}\right) \int d^4 y_1 \phi^4(y_1) + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)^2 \int d^4 y_1 d^4 y_2 \phi^4(y_1) \phi^4(y_2) + \\
 &\quad + \frac{1}{3!} \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)^3 \int d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 \phi^4(y_1) \phi^4(y_2) \phi^4(y_3) + \\
 &\quad \left. + \dots \right] \times e^{i \int d^4 x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]}, \tag{172}
 \end{aligned}$$

cujos termos podem ser obtidos através das derivadas funcionais de (171) em relação a  $J(x)$  e calculadas para as correntes externas nulas ( $J(x) = 0$ ).

Para conhecer as derivadas funcionais do funcional:

$e^{-\frac{i}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) \Delta(x_1 - x_2) J(x_2)}$ , em relação a corrente  $J(x)$ . A partir da definição de derivada funcional (55), temos que,

$$\begin{aligned}
 &\frac{\delta}{\delta J(y)} e^{-\frac{i}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) \Delta(x_1 - x_2) J(x_2)} = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[ e^{-\frac{i}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 [J(x_1) + \epsilon \delta(x_1 - y)] \Delta(x_1 - x_2) [J(x_2) + \epsilon \delta(x_2 - y)]} - \right. \\
 &\quad \left. - e^{-\frac{i}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) \Delta(x_1 - x_2) J(x_2)} \right] = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[ e^{-\frac{i}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \Delta(x_1 - x_2) [J(x_1) J(x_2) + \epsilon \delta(x_1 - y) J(x_2) + \epsilon \delta(x_2 - y) J(x_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2)]} - \right. \\
 &\quad \left. - e^{-\frac{i}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) \Delta(x_1 - x_2) J(x_2)} \right] = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-\frac{i}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) \Delta(x_1 - x_2) J(x_2)} \times \\
 &\quad \times \frac{e^{-\epsilon \frac{i}{2} \int d^4 x_1 J(x_1) \Delta(y - x_1) - \epsilon \frac{i}{2} \int d^4 x_2 J(x_2) \Delta(y - x_2) + \mathcal{O}(\epsilon^2)} - 1}{\epsilon} = \\
 &= -i \int d^4 x \Delta(y - x) J(x) e^{-\frac{i}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) \Delta(x_1 - x_2) J(x_2)},
 \end{aligned}$$

onde usamos que a função  $\Delta(x_1 - x_2)$  é par. Assim,

$$\begin{aligned}
 &\frac{\delta}{\delta J(y)} e^{-\frac{i}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) \Delta(x_1 - x_2) J(x_2)} = \\
 &= -i \int d^4 x \Delta(y - x) J(x) e^{-\frac{i}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) \Delta(x_1 - x_2) J(x_2)}.
 \end{aligned}$$

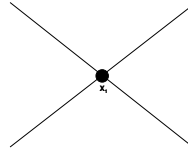
A derivada funcional de segunda ordem deste funcional é:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\delta^2}{\delta J(y) \delta J(z)} e^{-\frac{i}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) \Delta(x_1 - x_2) J(x_2)} = \\
 &= -i \Delta(y - z) e^{-\frac{i}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) \Delta(x_1 - x_2) J(x_2)} + \\
 &+ (-i)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 \Delta(y - x_1) \Delta(z - x_2) J(x_1) J(x_2) \times \\
 &\quad \times e^{-\frac{i}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) \Delta(x_1 - x_2) J(x_2)}. \tag{173}
 \end{aligned}$$

Para vermos como isso tudo funciona, consideremos o caso da função de Green  $n = 2$ . Então,

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \int \mathcal{D}\phi(x) \phi(x_1)\phi(x_2) \left[ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4y_1 \phi^4(y_1) + \dots \right] \times \\ \times e^{i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} (m^2 - i\epsilon) \phi^2 \right]}.$$

Note que temos no integrando uma expansão em potências de  $\lambda$ . Para cada ordem de  $\lambda$  na expansão temos *potências* do termo  $\int dx \phi^4(x)$ . Neste caso, no ponto  $x$  temos 4 operadores de campo, e estamos somando sobre todas as possíveis posições  $x$ . Utilizamos gráficos para representar os termos que aparecem ordem a ordem na expansão da constante de acoplamento. Usamos a representação gráfica abaixo para um vértice no ponto espaço-temporal  $x$ , de onde saem quatro pernas para representar que temos quatro campos escalares com argumento  $x$ :



Vértice da teoria  $\lambda\phi^4$ .

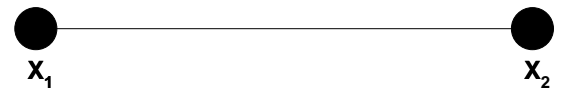
Além disso, vemos da expressão (151) para  $Z_0[J]$  que os termos de  $G^{(2)}(x_1, x_2)$  podem ser escritos como derivadas funcionais deste funcional, ou seja,

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} - \frac{i\lambda}{4!} \frac{1}{i^6} \int d^4x \frac{\delta^6 Z_0[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta^4 J(x)} \Big|_{J=0} + \dots$$

Substituindo  $Z_0[J]$  pela sua expressão (171), a função de Green  $G^{(2)}(x_1, x_2)$  é escrita como:

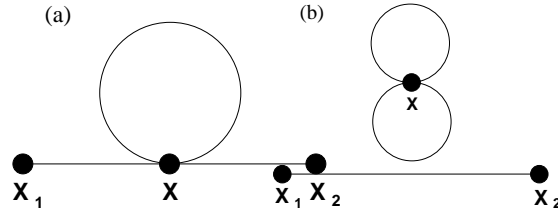
$$\frac{G^{(2)}(x_1, x_2)}{Z_0[0]} = \left\{ \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} - \frac{i\lambda}{4!} \frac{1}{i^6} \int d^4x \frac{\delta^6}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta^4 J(x)} \Big|_{J=0} + \dots \right\} \times e^{-\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1) \Delta(x_1 - x_2) J(x_2)}. \quad (174)$$

O primeiro termo do l. d. da eq.(174) foi calculado explicitamente na eq.(173), e vimos que resulta:  $-i\Delta(x_1 - x_2)$ .



Representação gráfica de  $-i\Delta(x_1 - x_2)$

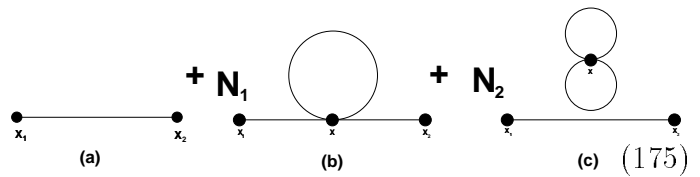
Este é o termo de ordem  $\lambda^0$ , e portanto, não há qualquer vértice. O segundo termo do l. d. da eq.(174) é obtido calculando-se explicitamente as derivadas funcionais, ou reconhecendo que os termos obtidos da derivada funcional apresentam todos os possíveis gráficos que obtemos ligando os pontos  $x_1, x_2$  e  $x$ , e que da posição  $x$  saem 4 linhas.



Gráficos referentes a (a)  $(-i)^2 \int d^4x \Delta(x_1 - x) \Delta(x - x_2) \Delta(x - x)$  e  
 (b)  $\Delta(x_1 - x_2) \int d^4x \Delta^2(x - x)$

Como nas posições  $x_1$  e  $x_2$  temos apenas um campo, de cada um desses pontos parte apenas uma linha. No caso de  $\lambda\phi^4(x)$ , temos vários campos idênticos na mesma posição  $x$ , e, **para as derivadas funcionais, as linhas que saem de  $x$  são distintas**. Logo, cada gráfico é multiplicado por uma constante, chamada fator de simetria, que varia de gráfico para gráfico. Quando multiplicamos as expressões associadas aos gráficos pelos fatores de simetria, fazemos uma relação um a um entre os gráficos e os termos na expansão de ordem  $\lambda$  nas funções de Green de  $n$  pontos. Assim,

$$\frac{G^{(2)}(x_1, x_2)}{Z_0[0]} =$$



onde  $N_1$  e  $N_2$  são os fatores de simetria. Os gráficos (a) e (b) são chamados de gráficos conexos, e o gráfico (c) é denominado de gráfico desconexo. Além disso, como o gráfico (c) tem linhas que se fecham sobre si mesmas, sem estarem ligadas a pontos externos, estes gráficos são bolhas de flutuação de vácuo. Os gráficos que envolvem bolhas de flutuação de vácuo não contribuem para as funções de Green, pois são normalizadas de forma a cancelar a contribuição das bolhas de vácuo. Para termos uma idéia de como eles se cancelam, vamos definir a função geratriz dos gráficos conexos e desconexos  $Z[J]$ :

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi(x) e^{i \int d^4x [\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} (m^2 - i\epsilon) \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4] + i \int d^4x J(x) \phi(x)}. \quad (176)$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
 Z[0] &= \int \mathcal{D}\phi(x) e^{i \int d^4x [\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} (m^2 - i\epsilon) \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4]} = \\
 &= \int \mathcal{D}\phi(x) \left[ 1 + (-i \frac{\lambda}{4!}) \int d^4x \phi^4(x) + \frac{1}{2!} (\frac{-i\lambda}{4!})^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \phi^4(x_1) \phi^4(x_2) + \right. \\
 &\quad \left. + \dots \right] \times e^{i \int d^4x [\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} (m^2 - i\epsilon) \phi^2]},
 \end{aligned}$$

que representam os gráficos sem pernas externas, pois todos os pontos  $x_i$  estão sendo integrados. A representação gráfica de  $Z[0]$  é:

$$\begin{aligned}
 Z[0] &= Z_0[0] \times \\
 &\times \left[ \mathbf{1} + N_1 \text{ (loop)} + N_2 \text{ (figure-eight)} + N_3 \text{ (two loops)} + N_4 \text{ (two loops connected)} + \dots \right]
 \end{aligned} \tag{177}$$

onde  $N_j$  são os fatores de simetria. Estes gráficos são divergentes.

Quando voltamos para a função de Green de  $n$  pontos, e tomamos o caso particular  $n = 2$ , não é difícil ver que

$$\begin{aligned}
 \frac{G^{(2)}(x_1, x_2)}{Z_0[0]} &= \\
 &\text{---} \left( \mathbf{1} + n_1 \text{ (loop)} + n_2 \text{ (figure-eight)} + \dots \right) + \\
 &\text{---} \left( \mathbf{1} + n_1 \text{ (loop)} + n_2 \text{ (figure-eight)} + \dots \right) + \dots
 \end{aligned} \tag{178}$$

e mostra-se que  $n_1 = N_1, n_2 = N_2, \dots, n_j = N_j, \dots$ , de forma que esses termos divergentes desaparecem, e tomamos a quantidade

$$\begin{aligned}
 \frac{G^{(2)}(x_1, x_2)}{Z[0]} &= \\
 &\text{---} + N_1 \text{ (loop)} + \\
 &+ N_2 \text{ (figure-eight)} + \dots
 \end{aligned} \tag{179}$$

A expressão (179) é chamada de propagador vestido.

Consideremos agora a função de Green de 4 pontos. Representamos graficamente o que obtemos através de derivadas funcionais com relação a  $J(x)$ . Então,

$$\frac{G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)}{Z[0]} =$$

$$(180)$$

onde  $M_1, M_2, \dots$  são os fatores de simetria de cada gráfico na expansão. Note que, na função de Green  $\frac{G^{(4)}}{Z[0]}$ , temos gráficos conexos e desconexos.

Para eliminar os gráficos de auto-energia (flutuação do vácuo) e não termos que crescer sempre a constante  $Z[0]$ , redefinimos a função de Green de  $n$  pontos (134) como sendo:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \frac{\int \mathcal{D}\phi(x) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{i \int d^4x \mathcal{L}}}{\int \mathcal{D}\phi(x) e^{i \int d^4x \mathcal{L}}}. \quad (181)$$

No modelo  $\lambda\phi^4$  que temos considerado explicitamente, a densidade de lagrangeana é dada pela eq.(147),

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (182)$$

Podemos reescrever a função geratriz  $Z[J]$  como uma série de Taylor funcional em termos da corrente externa  $J(x)$ . Os coeficientes da série de Taylor funcional são as funções de Green, ou seja,

$$Z[J] = Z[0] \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n) \right], \quad (183)$$

onde as funções de Green envolvidas incluem gráficos conexos e desconexos.

No entanto, é possível definir o funcional  $W[J]$  tal que ele seja a função geratriz das funções de Green de  $n$  pontos que só envolvem gráficos conexos. Seja

$$Z[J] = e^{iW[J]}. \quad (184)$$

Neste caso, usando a série de Taylor para o funcional  $W[J]$ , temos que

$$W[J] = W[0] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n), \quad (185)$$

onde

$$i^n G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (186)$$

Pela igualdade (184), temos que

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^{n+1}} \frac{\delta^n \ln Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (187)$$

Para vermos que para as novas funções de Green contribuem apenas os gráficos conexos, consideremos o caso particular de  $n = 2$ . Então,

$$\begin{aligned} i^{2+1} G_c^{(2)}(x_1, x_2) &= \frac{\delta^2 \ln Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left[ \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)} \right] \Big|_{J=0} = \\ &= - \frac{1}{Z[J]^2} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)} \Big|_{J=0} + \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$G_c^{(2)}(x_1, x_2) = G^{(2)}(x_1, x_2) - G^{(1)}(x_1)G^{(1)}(x_2).$$

A função de Green  $G^{(1)}(x)$  é igual ao valor médio do campo escalar no vácuo. Como estamos considerando o caso em que  $m > 0$  e  $\lambda > 0$ , então o mínimo do potencial  $V(\phi) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \frac{m^2}{2} \phi^2$  é em  $\phi(x) = 0$ . De forma que:  $G^{(1)}(x_1) = G^{(1)}(x_2) = 0$ .

Usando método de recorrência, é possível mostrar que,

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) - \sum_{\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle} \langle \phi \dots \rangle_c \dots \langle \phi \dots \rangle_c, \quad (188)$$

onde a soma é sobre todas as possíveis partições de  $\phi(x_1) \dots \phi(x_n)$  em subconjuntos. Desta forma, só restam em  $G_c^{(n)}$  os gráficos conexos, ou seja

$$\begin{aligned}
 G_c^{(2)}(x_1, x_2) = & \text{---} + N_1 \text{---} \bigcirc \text{---} + N_2 \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots \\
 G_c^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = & \begin{array}{c} x_1 \bullet \quad \bullet x_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ x_3 \bullet \quad \bullet x_4 \end{array} \text{---} X + M_1 \begin{array}{c} x_1 \bullet \quad \bullet x_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bigcirc \\ \diagup \quad \diagdown \\ x_3 \bullet \quad \bullet x_4 \end{array} \text{---} X + \dots
 \end{aligned}
 \tag{189}$$

Um gráfico possível para  $G_c^{(2)}$  é

$$\begin{array}{c} \bigcirc \\ \bullet \quad \bullet \\ X_1 \quad Y_1 \quad Y_2 \quad X_2 \end{array}
 \tag{191}$$

que é um gráfico conexo; porém se cortarmos a linha que liga os pontos  $y_1$  e  $y_2$ , ele se quebra em dois outros gráficos possíveis. Este tipo de gráfico é dito **redutível**.

O funcional  $W[J]$  é denominado de geratriz das funções de Green **conexas**.

## 5 Funções de Vértice, ou Gráficos 1PI (One Particle Irreducible)

Referências:

- Mark S. Swanson, *Path Integrals and Quantum Processes*, Academic Press Inc. (1992), section 8.1.
- C. Nash, *Relativistic Quantum Fields*, Academic Press (1978), cap. 1.
- Daniel J. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena*, McGraw-Hill (1978).

Começamos a estudar as funções de Green através de  $Z[J]$  que dá a amplitude de transição vácuo-a-vácuo na presença de uma corrente  $J(x)$ . As funções de Green normalizadas (eq.(181)),

$$i^n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0},
 \tag{192}$$

incluem contribuição dos gráficos conexos e desconexos. Para nos livrarmos da parte não conexa das funções de Green (192), definimos a transformação (184), ou seja,

$$Z[J] = e^{iW[J]} \Rightarrow W[J] = -i \ln Z[J]. \quad (193)$$

As funções de Green associadas ao funcional gerador  $W[J]$  são (eq.(187)):

$$i^{n+1} G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (194)$$

Os gráficos associados a  $G_c^{(n)}$  são todos conexos. Uma coisa interessante de se notar é que  $G^{(1)}(x_1) = G_c^{(1)}(x_1)$ , isto é,

$$G^{(1)}(x_1) = \frac{1}{i} \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)} \Big|_{J=0} \quad (195)$$

e

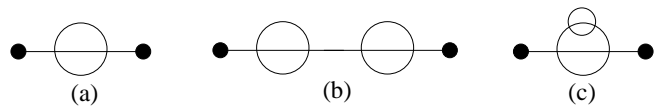
$$G_c^{(1)}(x_1) = \frac{1}{i} \left( \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)} \right) \Big|_{J=0} = \frac{1}{i} \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)} \Big|_{J=0}. \quad (196)$$

Devemos lembrar que

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x_1) &= \frac{1}{i} \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}\phi(x) \phi(x_1) e^{i \int d^4x \mathcal{L}} \phi(x_1) \\ &= \frac{1}{Z[0]} \langle 0 | \phi(x_1) | 0 \rangle = G_c^{(1)}(x_1), \end{aligned} \quad (197)$$

onde  $\langle 0 | \phi(x_1) | 0 \rangle$  é a configuração média do campo escalar no estado fundamental do sistema para  $J(x) = 0$ .

Vejamos a representação gráfica das funções de Green que contribuem para  $W[J]$ . Tomemos, por exemplo, os seguintes gráficos, presentes em  $G_c^{(2)}(x_1, x_2)$ :



$$(a) \quad (b) \quad (c) \quad (198)$$

A diferença entre os gráficos (a), (b) e (c) está em que, se cortarmos a linha que liga as duas bolhas na figura (b), a figura se quebra em duas:

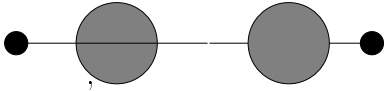


$$(199)$$

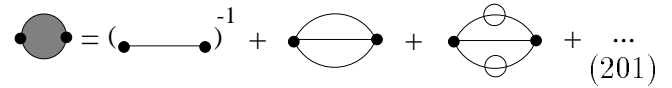


o que não acontece com as figuras (a) e (c). Se retirarmos qualquer uma das retas dos gráficos (a) ou (c), o gráfico resultante continua ainda sendo um único gráfico conexo. Os gráficos (a) e (c) são chamados gráficos **irreduzíveis**, enquanto que o gráfico (b) é denominado de gráfico **reduzível**.

A importância dos gráficos irreduzíveis está em que qualquer gráfico reduzível pode ser obtido ligando propagadores da teoria livre a gráficos irreduzíveis. Por exemplo, temos:



onde a bolha cheia representa a contribuição dos gráficos irreduzíveis de dois pontos em todas as ordens em teoria de perturbação, ou seja,



Nos gráficos irreduzíveis amputamos os propagadores externos, que no espaço dos momentos têm a representação gráfica :

$$\frac{1}{p^2 - (m^2 - i\epsilon)} = \begin{array}{c} \text{p} \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\implies p^2 - (m^2 - i\epsilon) = \left( \begin{array}{c} \text{p} \\ \longrightarrow \end{array} \right)^{-1} \quad (202)$$

Definimos a transformada de Legendre do funcional gerador  $W[J]$  e queremos mostrar que esta transformada de Legendre é o funcional gerador dos gráficos irreduzíveis. Seja o funcional  $\Gamma[\bar{\phi}]$  definido como,

$$\Gamma[\bar{\phi}] = W[J] - \int d^4y J(y)\bar{\phi}(y), \quad (203)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(x) &= \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \\ &= G_c^{(1)}(x), \end{aligned} \quad (204)$$

ou seja, pela eq.(197) temos que  $\bar{\phi}(x) = \langle 0|\phi(x_1)|0\rangle_J$ , sendo  $|0\rangle$  o vetor de estado do vácuo do sistema **na presença** de uma fonte externa  $J(x)$ . A transformada de Legendre (203) é contínua, pois envolve parâmetros cujos índices variam continuamente ( $J(x)$ ). O gerador

$\Gamma[\bar{\phi}]$  é um funcional de  $\bar{\phi}(x)$  e não depende explicitamente de  $J(x)$ . Calculemos a variação funcional de  $\Gamma[\bar{\phi}]$  em termos de  $\bar{\phi}$ , ou seja,

$$\frac{\delta\Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(x)} = \frac{\delta W[J]}{\delta\bar{\phi}(x)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\bar{\phi}(x)} \bar{\phi}(y) - J(x). \quad (205)$$

Porém, usando a regra da cadeia para derivadas funcionais (eq.(67)), temos que

$$\frac{\delta W[J]}{\delta\bar{\phi}(x)} = \int d^4y \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta\bar{\phi}(x)} \Rightarrow \frac{\delta W[J]}{\delta\bar{\phi}(x)} = \int d^4y \bar{\phi}(y) \frac{\delta J(y)}{\delta\bar{\phi}(x)}. \quad (206)$$

Substituindo o resultado (206) na expressão (205), encontramos que

$$\frac{\delta\Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(x)} = -J(x). \quad (207)$$

Resumindo, a transformada de Legendre (203), é definida como:

$$\Gamma[\bar{\phi}] = W[J] - \int d^4y J(y)\bar{\phi}(y), \quad (208)$$

sendo que

$$\bar{\phi}(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \quad \text{e} \quad J(x) = -\frac{\delta\Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(x)}. \quad (209)$$

O funcional  $\Gamma[\bar{\phi}]$  é conhecido como a ação efetiva do sistema. Para entendermos o porque do nome, vamos calcular exatamente este funcional na única teoria em que podemos fazê-lo exatamente: a teoria livre.

Obtivemos anteriormente (eq. (171)) que:

$$Z_0[J] = Z_0[0] e^{-\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1) \Delta(x_1 - x_2) J(x_2)}. \quad (210)$$

Da relação (193) temos que

$$Z_0[J] = e^{iW_0[J]}. \quad (211)$$

Calculando o logaritmo da expressão (211), obtemos:

$$W_0[J] = -i \ln Z_0[0] - \frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1) \Delta(x_1 - x_2) J(x_2).$$

Entretanto, para se obter  $\Gamma[\bar{\phi}]$  apenas em função de  $\bar{\phi}(x)$  é necessário encontrar  $J = J(\bar{\phi})$ . No caso da teoria livre, sabemos também calcular exatamente  $\bar{\phi}(x)$  na presença de uma fonte externa qualquer, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}(x) = \langle 0|\phi(x)|0\rangle_J &= \frac{1}{iZ_0[J]} \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} \\
 &= -\frac{i}{Z_0[J]} \frac{\delta}{\delta J(x)} e^{-\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1)\Delta(x_1-x_2)J(x_2)} Z_0[0] \\
 &= -\int d^4y \Delta(x-y)J(y) e^{-\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1)\Delta(x_1-x_2)J(x_2)} \frac{Z_0[0]}{Z_0[J]}.
 \end{aligned}$$

Mas, pela eq.(171) temos que

$$e^{-\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1)\Delta(x_1-x_2)J(x_2)} \frac{Z_0[0]}{Z_0[J]} = 1. \quad (212)$$

Portanto,

$$\bar{\phi}(x) = -\int d^4y \Delta(x-y)J(y). \quad (213)$$

Entretanto, precisamos inverter a eq.(213) uma vez que precisamos de:  $J = J(\bar{\phi})$ . Uma maneira de inverter a equação acima é aplicar o operador  $\partial^2 + m^2$  a  $\bar{\phi}(x)$ , ou seja,

$$(\partial^2 + m^2)\bar{\phi}(x) = -\int d^4y [(\partial_x^2 + m^2)\Delta(x-y)]J(y), \quad (214)$$

que usando o resultado do apêndice III (eq.(278)), temos que

$$(\partial^2 + m^2)\bar{\phi}(x) = J(x). \quad (215)$$

Na eq.(215) temos  $J(x)$  como um funcional de  $\bar{\phi}(x)$ , como desejamos.

Para obtermos  $\Gamma_0[\bar{\phi}]$ , temos então

$$\begin{aligned}
 \Gamma_0[\bar{\phi}] &= -i \ln Z_0[0] - \frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1)\Delta(x_1-x_2)J(x_2) - \\
 &\quad - \int d^4y J(y)\bar{\phi}(y).
 \end{aligned} \quad (216)$$

Substituindo o resultado (215) na expressão (216), ficamos com

$$\begin{aligned}
 \Gamma_0[\bar{\phi}] &= -i \ln Z_0[0] - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 [(\partial_1^2 + m^2)\bar{\phi}(x_1)]\Delta(x_1-x_2)[(\partial_2^2 + m^2)\bar{\phi}(x_2)] - \\
 &\quad - \int d^4y [(\partial_y^2 + m^2)\bar{\phi}(y)]\bar{\phi}(y).
 \end{aligned} \quad (217)$$

Integrando a eq.(217) por partes, e, usando o fato de que as funções de  $\bar{\phi}(x)$  tendem a zero na fronteira da região considerada, então

$$\begin{aligned}
 \int d^4x_1 [(\partial_1^2 + m^2)\bar{\phi}(x_1)]\Delta(x_1 - x_2) &= \\
 &= \int d^4x_1 [(\partial_1^2 + m^2)\Delta(x_1 - x_2)]\bar{\phi}(x_2) \\
 &= -\bar{\phi}(x_2).
 \end{aligned} \tag{218}$$

Assim, voltando a eq. (216), ficamos com

$$\begin{aligned}
 \Gamma_0[\bar{\phi}] &= -i\ln Z_0[0] + \frac{1}{2} \int d^4x_2 \bar{\phi}(x_2)[(\partial_2^2 + m^2)\bar{\phi}(x_2)] - \\
 &\quad - \int d^4x_2 \bar{\phi}(x_2)(\partial^2 + m^2)\bar{\phi}(x_2) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \Gamma_0[\bar{\phi}] &= -i\ln Z_0[0] - \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\phi}(x)(\partial^2 + m^2)\bar{\phi}(x).
 \end{aligned} \tag{219}$$

Integrando por partes o segundo termo do l.d. da eq. (219), encontramos que

$$-\frac{1}{2} \int d^4x \bar{\phi}(x)(\partial^2 + m^2)\bar{\phi}(x) = -\frac{1}{2} \int d^4x [-\partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \bar{\phi} + m^2 \bar{\phi}(x)]. \tag{220}$$

Logo,

$$\Gamma_0[\bar{\phi}] = -i\ln Z_0[0] + \int d^4x \mathcal{L}(\bar{\phi}(x), \partial_\mu \bar{\phi}(x)), \tag{221}$$

onde

$$\mathcal{L}(\bar{\phi}(x), \partial_\mu \bar{\phi}(x)) = \frac{1}{2} \partial_\mu \bar{\phi}(x) \partial^\mu \bar{\phi}(x) - \frac{1}{2} m^2 \bar{\phi}(x), \tag{222}$$

que coincide com a densidade de lagrangeana (147) quando  $\lambda = 0$ . Vemos que  $\Gamma_0[\bar{\phi}]$  é, essencialmente, a ação do sistema, para a configuração de vácuo  $\bar{\phi}(x)$ . No caso geral em que temos interação não é conhecida a expressão exata de  $\Gamma[\bar{\phi}]$ , mas ainda assim identificamo-la com a ação efetiva do sistema.

No caso geral, usamos métodos aproximados ou expansões para obter a expressão de  $\Gamma[\bar{\phi}]$ . Temos dois tipos de expansões em  $\bar{\phi}(x)$ : uma é a expansão não local, com a qual estamos mais acostumados e aparecem as funções de vértice. A outra é a expansão local, na qual aparece o potencial efetivo.

Da mesma maneira que  $Z[J]$  e  $W[J]$  são funcionais da corrente externa  $J(x)$  e têm séries de Taylor funcionais associadas, também  $\Gamma[\bar{\phi}]$  é um funcional de  $\bar{\phi}(x)$ , e tem associada a si uma série de Taylor funcional. **Não discutiremos aqui o caso em que existe quebra espontânea de simetria** (veja o livro do Amit, pág. 91).

Temos então a expansão em torno da configuração de vácuo da teoria, quando  $J(x) = 0$ , ou seja,

$$\bar{\phi}(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J} \Big|_{J=0}, \quad (223)$$

ou,

$$\frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}(x)} = J(x) = 0. \quad (224)$$

Como estamos trabalhando com teorias que por hipótese não possuem quebra espontânea de simetria (no nosso caso,  $m^2 > 0$ ), então,

$$\bar{\phi}(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J} \Big|_{J=0} = 0, \quad (225)$$

e  $\Gamma[\bar{\phi}]$  pode ser escrita como uma expansão não local da forma

$$\Gamma[\bar{\phi}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \bar{\phi}(x_1) \dots \bar{\phi}(x_n), \quad (226)$$

onde  $\bar{\phi}(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}$  para  $J(x) \neq 0$ .

As funções  $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  são as chamadas **funções de vértice**, ou, **funções próprias de vértice**. A relação entre  $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  e o funcional gerador  $\Gamma[\bar{\phi}(x)]$  é:

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}(x_1) \dots \delta \bar{\phi}(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (227)$$

As derivadas funcionais são calculadas na configuração em que temos  $J(x) = 0$ . A situação mais simples (que é a que estamos considerando), é aquela na qual  $\bar{\phi}(x; J = 0) = 0$ .

Formalmente, conhecemos  $\Gamma[\bar{\phi}]$  e as funções próprias  $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ , mas, na verdade, só é possível obter estas quantidades aproximadamente. Precisamos relacioná-las às expressões perturbativas que temos para  $G^{(n)}$  e  $G_c^{(n)}$ . Para tanto, usamos as relações formais conhecidas (eqs.(208) e (209)):

$$\Gamma[\bar{\phi}] = W[J] - \int d^4y J(y) \bar{\phi}(y), \quad (228)$$

e

$$\bar{\phi}(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}, \quad J(x) = -\frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta \bar{\phi}(x)}. \quad (229)$$

Assim,



$$G_c^{(2)} = \frac{1}{(\bullet \text{---} \bullet)^{-1} - \text{---} \bullet} \quad (235)$$

Como no espaço dos momenta,

$$G_c^{(2)}\Gamma^{(2)} = -1 \quad \Rightarrow \quad \Gamma^{(2)} = \text{---} \bullet \quad (p^2 - m^2) \quad (236)$$

Vemos que a  $\Gamma^{(2)}$  estão associados os gráficos de dois pontos. Note que a função de dois pontos irreduzível não possui pernas externas, daí serem estas funções chamadas de funções de Green amputadas.

Vejamos o que acontece com  $\Gamma^{(3)}$ . Já vimos da eq. (232) que

$$\int d^4x \frac{\delta^2\Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(x)\delta\bar{\phi}(z)} \frac{\delta^2W[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} = -\delta(y-z).$$

Derivando funcionalmente a expressão anterior com relação a  $J(w)$  encontramos

$$\begin{aligned} & \int d^4x \frac{\delta^2\Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(x)\delta\bar{\phi}(z)} \frac{\delta^3W[J]}{\delta J(x)\delta J(y)\delta J(w)} + \\ & + \int d^4x \frac{\delta^3\Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(x)\delta\bar{\phi}(z)\delta J(w)} \frac{\delta^2W[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & \int d^4x \frac{\delta^2\Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(x)\delta\bar{\phi}(z)} \frac{\delta^3W[J]}{\delta J(x)\delta J(y)\delta J(w)} + \\ & + \int d^4x_1 d^4x_2 \frac{\delta^3\Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(x_1)\delta\bar{\phi}(z)\delta\bar{\phi}(x_2)} \frac{\delta\bar{\phi}(x_2)}{\delta J(w)} \frac{\delta^2W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(y)} = 0, \end{aligned} \quad (237)$$

com  $\frac{\delta\bar{\phi}(x_2)}{\delta J(w)} = \frac{\delta^2W[J]}{\delta J(x_2)\delta J(w)}$ . Multiplicando cada um dos termos da eq.(237) por

$$\frac{\delta^2\Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(y)\delta\bar{\phi}(X)} \frac{\delta^2\Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(w)\delta\bar{\phi}(Y)}, \quad (238)$$

e integrando sobre  $y$  e  $w$ , ficamos com

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x d^4y d^4w \frac{\delta^2\Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(y)\delta\bar{\phi}(X)} \frac{\delta^3W[J]}{\delta J(x)\delta J(y)\delta J(w)} \frac{\delta^2\Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(x)\delta\bar{\phi}(z)} \frac{\delta^2\Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(w)\delta\bar{\phi}(Y)} + \\
 & + \int d^4x_1 d^4x_2 \left\{ \left[ \int d^4y \frac{\delta^2W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(y)} \frac{\delta^2\Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(y)\delta\bar{\phi}(X)} \right] \frac{\delta^3\Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(x_1)\delta\bar{\phi}(z)\delta\bar{\phi}(x_2)} \times \right. \\
 & \quad \left. \times \left[ \int d^4w \frac{\delta^2W[J]}{\delta J(x_2)\delta J(w)} \frac{\delta^2\Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(w)\delta\bar{\phi}(Y)} \right] \right\} = 0. \tag{239}
 \end{aligned}$$

Os termos entre colchetes resultam, respectivamente, em  $-\delta(x_1 - X)$  e  $-\delta(Y - x_2)$ . Portanto,

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{(3)}(X, Y, t) & \equiv \frac{\delta^3\Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(X)\delta\bar{\phi}(z)\delta\bar{\phi}(Y)} = \\
 & = - \int d^4x d^4y d^4w \frac{\delta^2\Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(y)\delta\bar{\phi}(X)} \frac{\delta^2\Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(w)\delta\bar{\phi}(Y)} \frac{\delta^3W[J]}{\delta J(x)\delta J(y)\delta J(w)} \frac{\delta^2\Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(x)\delta\bar{\phi}(z)}. \tag{240}
 \end{aligned}$$

Então, como  $\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\phi}(x_1)\delta\bar{\phi}(x_2)}$  é o inverso do propagador, a função de vértice  $\Gamma^{(3)}$  é a função de Green conexa amputada do propagador vestido nas pernas externas. Diagramaticamente,

$$\tag{241}$$

De forma que  $\Gamma^{(3)}$  é a soma dos gráficos de 3 pontos irreduzíveis. Assim, generalizando para qualquer  $n$ ,  $\Gamma^{(n)}$  é igual à soma dos gráficos irreduzíveis amputados com  $n$  pontos externos.

Finalmente, vejamos a expansão local do funcional gerador dos gráficos 1PI. Fazemos uma expansão de  $\Gamma[\bar{\phi}(x)]$  em torno de uma configuração específica  $\bar{\phi}(x)$ :

$$-\Gamma[\bar{\phi}] = \int dx V(\bar{\phi}(x)) + \frac{1}{2} \int dx Z(\bar{\phi}(x))(\partial\bar{\phi}(x))^2 + \dots, \tag{242}$$

onde  $V$  e  $Z$  são funções ordinárias de  $\bar{\phi}(x)$ , e apenas de  $\bar{\phi}(x)$ , nunca de suas derivadas.  $V(\bar{\phi})$  é chamado de potencial efetivo do sistema. Quando a configuração média é independente da posição,  $\bar{\phi}(x) = \bar{\phi} = cte$ ,

$$-\Gamma[\bar{\phi}] = V(\bar{\phi})\Omega, \tag{243}$$



onde  $\Omega = \int d^4x$ . É importante ressaltar que, uma vez que sabemos a dependência funcional de  $V$  com  $\bar{\phi} = cte.$ , sabemos que essa dependência é válida para qualquer  $\bar{\phi}(x)$ , pois  $V$  não envolve derivadas de  $\bar{\phi}(x)$ .

O potencial efetivo é dado pela soma das funções irreduzíveis com momentum externo nulo. Para vermos isto, consideramos o funcional da ação efetiva do modelo  $\lambda\phi^4$  na ausência de quebra espontânea de simetria,

$$\Gamma[\bar{\phi}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \bar{\phi}(x_1) \dots \bar{\phi}(x_n). \quad (244)$$

Como a teoria deve ser invariante sob translações, temos que

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \Gamma^{(n)}(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_n - x_1). \quad (245)$$

Consideremos o caso  $n = 4$ ; então,

$$\Gamma^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Gamma^{(4)}(x_2 - x_1, x_3 - x_1, x_4 - x_1). \quad (246)$$

Mas

$$\begin{aligned} & \Gamma^{(4)}(x_2 - x_1, x_3 - x_1, x_4 - x_1) = \\ &= \frac{1}{[(2\pi)^4]^3} \int d^4p_2 e^{i(x_2-x_1)p_2} d^4p_3 e^{i(x_3-x_1)p_3} d^4p_4 e^{i(x_4-x_1)p_4} \tilde{\Gamma}^{(4)}(p_2, p_3, p_4) \\ &= \frac{1}{[(2\pi)^4]^3} \int d^4p_2 d^4p_3 d^4p_4 e^{ix_2p_2} e^{ix_3p_3} e^{ix_4p_4} e^{-ix_1(p_2+p_3+p_4)} \tilde{\Gamma}^{(4)}(p_2, p_3, p_4). \end{aligned} \quad (247)$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \Gamma^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \\ &= \frac{1}{[(2\pi)^4]^3} \int d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 d^4p_4 \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \times \\ & \quad \times e^{ip_1x_1} e^{ix_2p_2} e^{ix_3p_3} e^{ix_4p_4} \tilde{\Gamma}^{(4)}(p_2, p_3, p_4). \end{aligned} \quad (248)$$

Substituindo esta expressão na eq. (244) temos

$$\begin{aligned} \Gamma[\bar{\phi}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n d^4p_1 \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4p_n}{(2\pi)^4} \bar{\phi}(x_1) \dots \bar{\phi}(x_n) \times \\ & \quad \times e^{i(p_1x_1 + \dots + p_nx_n)} \delta(p_1 + \dots + p_n) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n). \end{aligned} \quad (249)$$

Expandindo  $\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$  em torno da configuração  $p_1 = \dots = p_n = 0$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &= \tilde{\Gamma}^{(n)}(0, \dots, 0) + p_i \frac{\partial \tilde{\Gamma}^{(n)}}{\partial p_i} \Big|_{\{0\}} + \\ &+ \frac{1}{2!} p_i p_j \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}^{(n)}}{\partial p_i \partial p_j} \Big|_{\{0\}, i \geq j} + \dots, \end{aligned} \quad (250)$$

onde estamos usando a convenção de soma sobre os índices repetidos. Voltando à expressão (244), temos

$$\begin{aligned} \Gamma[\bar{\phi}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n d^4 p_1 \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} \bar{\phi}(x_1) \dots \bar{\phi}(x_n) \times \\ &\quad \times e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \delta(p_1 + \dots + p_n) \tilde{\Gamma}^{(n)}(0, \dots, 0) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n d^4 p_1 \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} \bar{\phi}(x_1) \dots \bar{\phi}(x_n) \times \\ &\quad \times e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \delta(p_1 + \dots + p_n) p_i \frac{\partial \tilde{\Gamma}^{(n)}}{\partial p_i} \Big|_{\{0\}} + \dots \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Gamma[\bar{\phi}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\Gamma}^{(n)}(0, \dots, 0)}{n!} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n d^4 p_1 \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} \times \\ &\quad \times \bar{\phi}(x_1) \dots \bar{\phi}(x_n) e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \delta(p_1 - (-p_2 - \dots - p_n)) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial \tilde{\Gamma}^{(n)}}{\partial p_i} \Big|_{\{0\}} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n d^4 p_1 \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} \bar{\phi}(x_1) \dots \bar{\phi}(x_n) \times \\ &\quad \times e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \delta(p_1 + \dots + p_n) p_i + \dots \end{aligned}$$

Vamos considerar cada integral em separado:

a)

$$\begin{aligned} & \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n d^4 p_1 \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} \bar{\phi}(x_1) \dots \bar{\phi}(x_n) \times \\ & \quad \times e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \delta(p_1 - (-p_2 - \dots - p_n)) = \\ & = \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \bar{\phi}(x_1) \dots \bar{\phi}(x_n) \delta(x_2 - x_1) \delta(x_3 - x_1) \dots \delta(x_n - x_1) \\ & \quad = \int d^4 x_1 \bar{\phi}^n(x_1). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n d^4 p_1 \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} \bar{\phi}(x_1) \dots \bar{\phi}(x_n) \times \\ & \quad \times e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \delta(p_1 + \dots + p_n) p_i = \\ & \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n d^4 p_1 \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} \delta(p_1 + \dots + p_n) \frac{\partial}{\partial x_i} e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \times \\ & \quad \times \bar{\phi}(x_1) \dots \bar{\phi}(x_i) \dots \bar{\phi}(x_n). \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} [e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \bar{\phi}(x_1) \dots \bar{\phi}(x_i) \dots \bar{\phi}(x_n)] = \\ & = \frac{\partial e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)}}{\partial x_i} \bar{\phi}(x_1) \dots \bar{\phi}(x_i) \dots \bar{\phi}(x_n) + \\ & \quad + e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \bar{\phi}(x_1) \dots \frac{\partial \bar{\phi}(x_i)}{\partial x_i} \dots \bar{\phi}(x_n). \end{aligned} \quad (251)$$

O termo do l.e. da eq.(251) é um termo de superfície, e, supondo que  $\varphi_c(x)$  vá a zero para  $x \rightarrow \infty$ , este não contribui para a integral (b). Sendo assim, a integral (b) fica

$$\begin{aligned} & \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n d^4 p_1 \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} \delta(p_1 + \dots + p_n) e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \times \\ & \quad \times \bar{\phi}(x_1) \dots \frac{\partial \bar{\phi}(x_i)}{\partial x_i} \dots \bar{\phi}(x_n) = \\ & = - \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x_2 - x_1)} e^{ip_3(x_3 - x_1)} \dots e^{ip_n(x_n - x_1)} \times \\ & \quad \times \bar{\phi}(x_1) \dots \frac{\partial \bar{\phi}(x_i)}{\partial x_i} \dots \bar{\phi}(x_n) \\ & = - \int d^4 x_1 \bar{\phi}^{n-1}(x_1) \frac{\partial \bar{\phi}(x_1)}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4p_n}{(2\pi)^4} p_i \delta(p_1 + \dots + p_n) \times \\ \times \bar{\phi}(x_1) \dots \bar{\phi}(x_n) e^{i(p_1x_1 + \dots + p_nx_n)} = \\ = - \int d^4x_1 \bar{\phi}^{n-1}(x_1) \frac{\partial \bar{\phi}(x_1)}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Voltando à expressão (244) temos

$$\begin{aligned} \Gamma[\bar{\phi}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\Gamma}^{(n)}(0, \dots, 0)}{(n)!} \int d^4x_1 \bar{\phi}^n(x_1) - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n)!} \frac{\partial \tilde{\Gamma}^{(n)}}{\partial p_i} \Big|_{\{0\}} \int d^4x_1 \bar{\phi}^{n-1}(x_1) \frac{\partial \bar{\phi}(x_1)}{\partial x_1} + \dots \end{aligned} \quad (252)$$

A primeira derivada de  $\tilde{\Gamma}$  é nula, pelo menos no caso em que não há quebra espontânea de simetria. Entretanto, a forma na qual as derivadas superiores dos campos aparecem nesta expressão é a mesma que obtivemos para a primeira derivada.

## 6 Apêndice I: Métrica

O produto escalar no espaço de Minkowski em 4-dimensões espaço-temporal é definido como:

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (253)$$

onde o tensor métrico  $g^{\mu\nu}$  é escolhido como:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (254)$$

Para escrever a métrica de forma suscinta, usamos a notação:  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Na eq.(253) usamos a convenção de soma implícita em que somamos sobre índices repetidos. Continuaremos a usar esta convenção nestas notas.

Os vetores contra-variantes são definidos como:

$$x^\mu = (t, \vec{x}), \quad (255)$$

enquanto que os vetores covariantes são definidos como:

$$x_\mu = (t, -\vec{x}), \quad (256)$$

Relacionamos os vetores contra-variantes e covariantes através do tensor métrico:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad \text{e} \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu. \quad (257)$$

Os 4-vetores diferenciais são definidos como:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \quad (258)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right). \quad (259)$$

A relação (257) entre os vetores covariante e contra-variante continua válida para o 4-vetores diferenciais,

$$\partial_\mu = g_{\mu\nu} \partial^\nu \quad \text{e} \quad \partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu. \quad (260)$$

O operador diferencial d'Alambertiano é um escalar de Lorentz:

$$\begin{aligned} \partial^2 &\equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \\ &= \square. \end{aligned} \quad (261)$$

## 7 Apêndice II: Prolegomena de Mecânica Estística

Seja  $\{|n\rangle\}$ , o conjunto de auto-vetores da hamiltoniana  $\mathbf{H}$ , que descreve o sistema quântico,

$$\mathbf{H}|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (262)$$

onde  $E_n$  são os autovalores correspondentes. Os estados  $|n\rangle$  são escolhidos ortonormais,

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}. \quad (263)$$

Assumimos que os autoestados da hamiltoniana  $\mathbf{H}$  formam uma base completa, de forma que satisfazem a relação de completeza,

$$\sum_{|n\rangle} |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}. \quad (264)$$

Qualquer operador quântico  $\hat{O}$ , pode ser escrito como:

$$\hat{O} = \mathbb{1}\hat{O}\mathbb{1} = \sum_{n,m} |n\rangle\langle n|\hat{O}|m\rangle\langle m|. \quad (265)$$

Definimos os elementos da representação matricial do operador  $\hat{O}$  na base dos auto-vetores da hamiltoniana como:

$$o_{nm} \equiv \langle n|\hat{O}|m\rangle. \quad (266)$$

O valor médio da quantidade física associada ao operador  $\hat{O}$ , em qualquer auto-estado da energia, é:

$$\langle l|\hat{O}|l\rangle = \sum_{n,m} \langle l|n\rangle\langle n|\hat{O}|m\rangle\langle m|l\rangle = o_{ll}. \quad (267)$$

que dá os elementos da diagonal da representação matricial de  $\hat{O}$  na base dos vetores de estado com energia definida.

Quando o sistema quântico está em equilíbrio termodinâmico, a probabilidade dele ser encontrado no estado  $|n\rangle$ , que é auto-estado de energia com autovalor  $E_n$ , é:

$$P_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}}, \quad (268)$$

de forma que a média **estatística e quântica** é igual a:

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle_T &= \frac{o_{nn} e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}} = \frac{1}{Z} \sum_n \langle n|\hat{O}|n\rangle e^{-\beta E_n} \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{n,m} \langle n|\hat{O}|m\rangle \langle m|e^{-\beta \mathbf{H}}|n\rangle = \frac{1}{Z} \sum_n \langle n|\hat{O}e^{-\beta \mathbf{H}}|n\rangle \\ &= \frac{Tr[\hat{O}e^{-\beta \mathbf{H}}]}{Tr[e^{-\beta \mathbf{H}}]}. \end{aligned} \quad (269)$$

Portanto, a **média estatística e quântica**, de qualquer operador quântico é:

$$\langle \hat{O} \rangle_T = \frac{Tr[\hat{O}e^{-\beta \mathbf{H}}]}{Tr[e^{-\beta \mathbf{H}}]}. \quad (270)$$

## 8 Apêndice III: Função de Green da Teoria Livre

O propagador da teoria livre é dado por

$$\Delta(x_2 - x_1) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ip(x_2-x_1)}}{p^2 - (m^2 - i\epsilon)}, \quad (271)$$

onde estamos usando a convenção:  $px \equiv p_\mu x^\mu$ .

Queremos mostrar que  $\Delta(x_2 - x_1)$  é a função de Green da teoria livre. Para isso, consideremos a equação de movimento do campo livre.

A densidade de Lagrangeana da teoria livre é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (272)$$

A equação de Euler-Lagrange é então

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2 = 0. \quad (273)$$

Definindo  $\partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ , a equação clássica fica:

$$\partial^2 \phi + m^2 \phi = 0. \quad (274)$$

Aplicamos o operador  $\partial^2 + m^2$  à função  $\Delta(x_2 - x_1)$ :

$$(\partial_1^2 + m^2) \Delta(x_2 - x_1) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p \frac{1}{(2\pi)^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - \nabla_1^2 + m^2 \right) \frac{e^{-ip(x_2-x_1)}}{p^2 - (m^2 - i\epsilon)}, \quad (275)$$

onde  $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2$ . Então,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - \nabla_1^2 \right) e^{-ip(x_2-x_1)} = (-p_0^2 + \vec{p}^2) e^{-ip(x_2-x_1)} = -p^2 e^{-ip(x_2-x_1)}. \quad (276)$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\partial_1^2 + m^2) \Delta(x_2 - x_1) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{-p^2 + m^2}{p^2 - (m^2 - i\epsilon)} e^{-ip(x_2-x_1)} \\ &= -\delta(x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (277)$$

O  $i\epsilon$  que aparece no denominador da expressão (277), não contribui, pois, de uma maneira bastante **heurística**, vemos que o numerador e o denominador vão a zero na mesma região de momento e, portanto, o quociente dos dois é finito.

Encontramos desta forma que  $\Delta(x_2 - x_1)$  é a função de Green da equação de movimento clássica da teoria livre,

$$(\partial^2 + m^2)\Delta(x_2 - x_1) = -\delta(x_2 - x_1), \quad (278)$$

e que a prescrição do  $i\epsilon$  é utilizada para escolher as condições de contorno que da  $\Delta(x_1 - x_2)$  deve satisfazer.