CBPF-MO-002/96

Caos em Sistemas Dissipativos e Hamiltonianos†

Alfredo M. Ozorio de Almeida

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290-180 Rio de Janeiro, RJ, Brasil

† Palestra apresentada ao Forum da Ciência e Cultura da UFRJ em 1995.

1 Introdução

Caos e complexidade são conceitos que usamos para compreender a realidade que nos cerca. A noção de complexidade, além do seu sentido comum, tornou-se recentemente o norte de uma busca de unificação de um conjunto de problemas fundamentais. Por seu lado, o caos se condensou, dentre suas inúmeras conotações, inclusive a bíblica, em um dos tipos possíveis de evolução na disciplina matemática dos sistemas dinâmicos. A abrangência dessa teoria é tal que farei uma tentativa de explicitar a relação entre a formulação matemática e os sistemas físicos, biológicos, econômicos, etc., que com ela pretendemos modelar, na primeira seção desta conferência.

Na segunda seção focalizarei os sistemas mecânicos da física clássica. Estes deram, de fato, origem a toda a teoria dos sistemas dinâmicos e permanecem paradigmas do seu sucesso. É nesse contexto que surge a distinção entre os sistemas dissipativos e os hamiltonianos, estes de importância fundamental para a física, enquanto aqueles dominam quase todas as aplicações da engenharia.

Para finalizar, farei um rápido esboço da teoria qualitativa do caos, conhecido na matemática como hiperbolicidade. Tentarei mostrar que, mesmo nos casos mais simples de movimento caótico, a aparente aleatoriedade de quase todas as órbitas tem, como substrato maravilhosamente complexo, um esqueleto de órbitas periódicas imerso dentro de uma hierarquia de subconjuntos fractais.

2 O Modelo Matemático

O problema inicial na explicação dos conceitos que caracterizam o movimento caótico está em distinguir aqueles que se referem à realidade física, que queremos compreender, daqueles pertinentes aos modelos matemáticos, que para isso construimos. Tratamos da teoria matemática dos *sistemas dinâmicos*, baseada nos seguintes postulados:

1. O sistema é descrito por um conjunto de variáveis. Especificando o valor numérico destas, definimos unicamente o *estado* do sistema.
2. Dado o estado a qualquer instante, sua evolução para todo o tempo fica completamente determinada. Existe portanto uma *lei de movimento* inteiramente determinista.

Evidentemente, não seria nem praticável, nem desejável quantificar dessa maneira todos os sistemas que evoluem no tempo. Na melhor das hipóteses, teremos um modelo aproximado, pela necessidade de ignorar pequenas interações do sistema com o resto do mundo. Mesmo na física, a mecânica quântica não se enquadra dentro da teoria de sistemas dinâmicos.

Não obstante, existe um enorme número de sistemas físicos, biológicos, econômicos, etc., possíveis de serem descritos por este quadro conceitual de extrema simplicidade. O problema mais difícil é o de estabelecer a lei de movimento. Esta não pode ser inteiramente empírica, uma vez que seja impossível verificar a evolução de um número infinito de estados possíveis. Mesmo assim, em alguns campos adquirimos uma incrível confiança nas leis de movimento estabelecidas a séculos, de modo que não me reterei mais nesta questão.

Podemos considerar todos os sistemas dinâmicos dentro de uma visão geométrica. Tomamos cada uma das N variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_N$, que definem os estados do sistema, como um eixo no *espaço de estados*. Esse espaço de N dimensões é também conhecido historicamente como o *espaço de fases*. Como vemos na figura 1, cada estado é então descrito por um único ponto $x = (x_1, \cdots, x_N)$ no espaço de fases. A interpretação geométrica de nosso segundo postulado passa a ser a de que existe uma única curva, $x(t)$, no espaço de fases, que descreve a evolução do estado. Chamamo-la de *órbita* ou *trajetória* do estado. Matematicamente, este determinismo resulta da definição da lei de movimento como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem: Denominando a taxa de variação temporal das variáveis de $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots$; estas estão definidas para cada estado a cada instante,

$$\dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, \cdots, t),\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, \cdots, t), \cdots$$

Convém visualisar o conjunto de funções acima como definidoras de um vetor em cada ponto do espaço de fases $F(F_1, F_2, \cdots)$. Isso permite sintetizar a lei do movimento de forma

$$\dot{x} = F(x, t).$$

Do ponto de vista analítico isto é apenas uma compactação de notação, mas agora a interpretação geométrica nos diz que a órbita tem que ser tangente ao vetor em cada um dos seus pontos, como mostra a figura 2.

Quando voltamos da matemática para o mundo real, temos que levar em conta que não podemos medir o estado do sistema com infinita precisão. Devíamos, então, em princío, em vez de seguir uma única trajetória, tomar um conjunto de trajetórias, cujo estado inicial se encontre em uma bolinha do espaço de fases. Temos basicamente duas possibilidades esboçadas nas figuras: (a) No caso de movimento regular, a imprecisão inicial, expressa pelo diâmetro da bolinha, talvez não aumente ou aumente lentamente, (b) A bolinha se estique exponencialmente com o tempo. Neste caso dizemos que o movimento é caótico. Apesar do sistema dinâmico matemático ser perfeitamente determinista, não podemos usá-lo para prever a evolução real que ele modela.

À primeira vista, a constatação de que a maioria dos sistemas dinâmicos são ao menos parcialmente caóticos parece desqualificá-los para a finalidade para a qual foram concebidos. Entretanto, o determinismo destes sistemas se reflete na estrutura dos emaranhados de órbitas, que já foram desvendados pelos matemáticos nos casos mais simples. Apesar de maravilhosa complexidade dessas estruturas, não resta dúvida de que falta muito a ser conhecido no âmbito dos sistemas dinâmicos gerais, como enfatiza J. Palis nesta mesma série de palestras.

Apesar da abrangência da teoria aqui esboçada, vale a pena concentrar a atenção nos sistemas mecânicos de física que deram origem a essa disciplina. É aí que obtemos a melhor correspondência entre movimento real e sua representação matemática. É também nesse contexto, através do conceito de energia, que elucidamos as diferenças marcantes entre caos dissipativos e caos hamiltoniano.

3 Sistemas Mecânicos

Os sistemas da mecânica clássica são regidos pela *segunda lei de Newton*:

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) \ ,$$

onde $\ddot{x}$ é a aceleração (segunda derivada) da posição x. Embora esse sistema de equações (no caso de x ter mais de uma coordenada) seja inteiramente determinista, ele não se enquadra dentro do conceito estreito que discutimos de sistema dinâmico, por ser de segunda ordem. Não exite então uma única órbita passando por cada posição.

Precisamos desdobrar as equações de Newton de alguma forma, tal como

$$\dot{x} = v \ , \ \ \dot{v} = F(x, v, t) \ ,$$

para tratá-lo como um sistema dinâmico matemático. Vemos assim que, se o sistema mecânico for descrito por L coordenadas (conhecidas como L *graus de liberdade*), o sistema dinâmico correspondente terá $(2L)$ dimensões, por causa da inclusão das L velocidades correspondentes a cada coordenada.

Chamamos de *sistema autônomo* aquele em que o campo vetorial não aparece explicitamente nas equações de movimento. Em geral são os sistemas que podemos considerar isolados da influência do resto do universo. O exemplo clássico, de grande importância histórica, é o *sistema solar*. Podemos considerar todos os planetas, o sol e os asteróides como sendo cada um reduzido a um ponto no espaço usual de três dimensões. Cada astro contribui então com seis graus de liberdade para o espaço de fases e a evolução do sistema solar como um todo será representada por uma trajetória em um espaço de fases de um número grande (porém finito) de dimensões. A lei de movimento é fornecida pela lei de gravitação universal entre cada par de astros.

Devido à preponderância da atração de cada um dos outros astros pelo sol com sua maior massa, podemos de início dividir o sistema solar em uma porção de sistemas quase inpendentes, cada um contendo só o sol e mais um dos outros astros. A demonstração, por Newton, de que nesse limite as órbitas serão elipses teve um enorme impacto: não só as órbitas são simples, mas pequenas modificações do estado inicial apenas modificam ligeiramente os parâmetros das elipses. O movimento não é caótico! Criou-se então a expectativa de que o pequeno efeito gravitacional dos outros astros também não alteraria fundamentalmente o movimento. Por essa razão, demorou cerca de dois séculos para Poincaré mostrar que já o movimento de três astros pode ser caótico.

Convém ilustrar as propriedades dos sistemas dinâmicos por meio de um modelo mais simples do que o problema de três corpos. Consideremos um *pêndulo esférico*, isto é, uma massa presa a uma haste rígida como mostra a figura 4. Se simplesmente soltarmos a haste fora da sua posição de equilíbrio vertical, o movimento da massa descreverá um arco de círculo dentro de um plano vertical. Porém, dando também uma velocidade transversal com relação a esse plano, o movimento vai gerar uma curva cuja única restrição é pertencer a uma superfície esférica. Nesta, a posição é descrita por dois ângulos a partir da posição vertical de equilíbrio, de modo que lidamos com um sistema dinâmico autônomo de quatro dimensões.

Podemos distinguir dois tipos de força atuando sobre a massa. Primeiro temos a força gravitacional, que a estrutura do pêndulo transforma em força restitutiva, isto é, a força sempre tende a restaurar o equilíbrio. As duas componentes são respectivamente proporcionais a $[-sen\theta_1]$ e $[-sen\theta_2]$. As outras forças atuando sobre a massa são formas de atrito, mormente a resistência do ar e o atrito do rolamento da haste no seu suporte. As forças de atrito dependem principalmente da velocidade. Sua principal característica é que o sentido da força é sempre contrário ao de velocidade.

As forças de atrito são exemplos de *forças dissipativas*. Devido à sua presença, o pêndulo esférico será sempre um *sistema dissipativo*: A órbita do estado sempre caminha para um *atrator* de dimensão menor que a do espaço de fases. No caso do pêndulo esférico, o atrator é o mais simples possível: Trata-se de um único ponto no espaço de fases, ou seja, a posição de equilíbrio, $\theta = 0$, com velocidade nula, $\dot{\theta} = 0$. De qualquer forma que iniciemos o movimento, sabemos que, esperando o suficiente, encontraremos o sistema neste estado limite. O atrator não precisa ser de uma simplicidade tão radical. Existem muitos exemplos onde o atrator é um ciclo periódico no tempo. Neste caso os estados do atrator fazem parte de uma curva fechada no espaço de fases. Podemos também ter atratores onde o movimento é quase-periódico, sobre uma superfície fechada. Finalmente, podemos nos deparar com movimento caótico sobre um *atrator estranho*. Sempre que falamos de caos em um sistema dissipativo, nos referimos ao movimento sobre o atrator estranho. A razão é que só obtemos um emaranhado de órbitas se o movimento for recorrente, o que só se passa no atrator de um sistema dissipativo.

O que que acontece se nós conseguirmos diminuir as forças de atrito? Evidentemente, o pêndulo levará mais tempo para atingir sem estado de equilíbrio. E se nós pudessemos eliminar totalmente essas forças, construindo um pêndulo ideal? Uma vez posto em movimento, ele não decairia nunca para o equilíbrio. Este estado continuaria a existir, pois nenhuma força modificaria o estado $\dot{\theta} = \theta = 0$, mas ele deixaria de ser um atrator. A razão para essa alteração qualitativa do movimento é que a força da gravidade (a única a atuar neste limite) conserva a energia mecânica. Como o estado de equilíbrio tem energia menor do que qualquer outro, o decaimento para o equilíbrio violaria a conservação da energia.

Essa característica de conservar a energia do movimento é comum a todos os *sistemas hamiltonianos*. De fato, a ithamiltoniana é meramente a energia do sistema, vista como uma função dos estados, $H(x, v)$. (Para simplificar, considero aqui o caso de massas unitárias). A conservação da energia garante que para todo o tempo o movimento será tal que $H(x(t), v(t)) = E$, uma constante. Esta condição é tão forte que determinará as equações de movimento como derivadas da hamiltoniana: as *equações de Hamilton*. Outra consequência do sistema ser hamiltoniano é o *teorema de Liouville*: O volume de qualquer bolinha no espaço de fases (como a que consideramos na definição dos sistemas caóticos) não se altera com o tempo.

Chegamos aos sistemas hamiltonianos como um limite, uma idealização de um sistema real e é assim que são em geral concebidos pelos matemáticos e engenheiros. Muitas vezes esses sistemas são ignorados, pela preocupação prevalente com resultados genéricos na teoria de sistemas dinâmicos. Entretanto, sua importância relativa aos sistemas dissipativos se inverte na física. Todas as forças fundamentais da natureza com a gravidade e o eletromagnetismo são hamiltonianas e é de se notar que a mecânica quântica trata exclusivamente delas. Do ponto de vista físico mais fundamental, a inclusão das forças de atrito não passa de expediente prático para encobrir nossa ignorância sobre o movimento microscópico. Este estará inevitavelmente ligado a qualquer movimento macroscópico, como o da haste do pêndulo que tomamos de exemplo, na forma de vibrações dos átomos do rolamento e choques da bolinha com as moléculas individuais do ar.

Vamos então examinar as características qualitativas dos sistemas hamiltonianos. A mais importante é que o movimento tem que estar restrito a uma superfície no espaço de fases onde a hamiltoniana é constante. Essa superfície terá três dimensões no caso do pêndulo esférico, o que ainda dá muitas possibilidades para o movimento da órbita, certamente muito mais livre do que no atrator do pêndulo dissipativo! Entretanto, o movimento pode sofrer restrições adicionais. No caso do pêndulo, não existe qualquer interação entre as coordenadas $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ com $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$. Isso permite a decomposição do movimento do pêndulo em componentes independentes bem comportadas, como ocorre com a decomposição dos movimentos do sistema solar. Este movimento não será nunca caótico.

Suponhamos agora que a bolinha do pêndulo ideal esteja magnetizada e que fixemos pequenos ímãs perto do pêndulo. Não alteramos com isso as coordenadas necessárias para descrever o sistema, apenas adicionamos uma força hamiltoniana (o magnetismo) à lei de movimento. O movimento ainda ficará restrito a uma superfície de três dimensões onde a (nova) hamiltoniana é constante, mas agora passa a haver interações entre as coordenadas. Dependendo de onde colocarmos os ímãs, teremos movimento caótico para a maioria de estados iniciais do pêndulo.

É interessante notar que, diante da impossibilidade de eliminar completamente o atrito do pêndulo real, não podemos observar diretamente este comportamento caótico; eventualmente o pêndulo magnetizado atingirá também uma posição de equilíbrio. De certa maneira houve agora uma inversão: O pêndulo físico é que se tornou um modelo imperfeito para o movimento regido por forças fundamentais da natureza, forçosamente hamiltonianas. Podemos usá-lo para este fim contanto que a perda de energia seja suficientemente lenta para nos mostrar um movimento complicado antes de cair no atrator.

Parece que chegamos a um confronto absurdo: O pêndulo magnetizado hamiltoniano terá quase sempre um comportamento caótico. Por menor que seja o atrito, o pêndulo real cairá em um atrator trivial, ou seja, um ponto de equilíbrio onde não há movimento. Nada de menos caótico! A dificuldade está na definição matemática de caos como uma propriedade média das órbitas para tempos infinitos. Visto dessa maneira, só interessa, no sistema dissipativo, o atrator. No entanto, ao adicionarmos um pequeno termo dissipativo a um sistema hamiltoniano, poderemos estar criando muitos pontos de equilíbrio e o problema de entender como o sistema se aproxima de qual equilíbrio passa a ser da maior importância. O movimento torna-se tão convoluido que fica efetivamente impossível fazer essa previsão, como nos velhos jogos de pim-bolim.

4 A Estrutura de Sistemas Caóticos

Pode ficar a impressão até aqui de que a presença de caos solapa todo o valor de se definir precisamente o sistema dinâmico que modela um dado sistema físico. Vamos agora ver que, mesmo sendo verdade que uma órbita caótica é inteiramente imprevisível, podemos dissecar a estrutura do emaranhado de órbitas de um sistema caótico com impressionante detalhe. De fato, este conhecimento é tão completo, que os matemáticos preferem chamá-los apenas de sistemas *hiperbólicos*. Sigo aqui a prática das outras ciências que denominam caóticos os sistemas em que quase todas as órbitas são caóticas.

O sistema, para ser caótico tem que ter duas propriedades:

1) sensibilidade quanto às condições iniciais, ou seja, dois pontos se separam, por mais próximos que estivessem inicialmente no espaço de fases;

2) ser limitado.

Até agora dedicamos mais ênfase à primeira condição, mas, se os pontos simplesmente se separam mais e mais, não há caos. Pensemos, por exemplo, em duas pintas em uma bola de festa. Ao soprá-la, os pontos se separam e, se ela não explodisse (outro tipo de caos!), se afastariam para sempre sem que houvesse qualquer imputação de desordem a esse movimento. Ambas essas propriedades estão presentes, tanto em sistemas caóticos dissipativos, quanto em hamiltonianos. Embora não seja essencial, vamos focalizar estes últimos na análise que se segue.

Consideremos um pequeno volume no espaço de fases. De acordo com (1), ele se alongará enormemente com o tempo (e se estreitará pelo teorema de Liouville). Essa longa tripinha terá de se dobrar toda para caber na região limitada permitida pela propriedade (2). Cedo ou tarde vamos encontrá-la sobre o volume inicial, formando a estrutura de *ferradura de Smale* que vemos na figura 6. A grande maioria das órbitas que iniciaram seu movimento no pequeno volume não se econtrará de volta nele no instante t em que definimos a ferradura. O foco da análise passa agora para as que de fato voltaram para o volume inicial.

As órbitas que voltaram só podem estar na pequena faixa que tem a etiqueta "0" ou na que tem a etiqueta "1" na figura 6. Passado mais um intervalo de tempo t, teremos uma nova minoria de órbitas que de novo volta para o volume inicial. A essas podemos dar as etiquetas '00', '01', '10', '11'. Dessa forma vemos que as raríssimas órbitas que voltam ao volume inicial, após todos os intervalos t, podem ser descritas por uma sequência infinita de símbolos 0 e 1.

O resultado fundamental referente aos sistemas caóticos (ou hiperbólicos) é que existe uma e apenas uma única órbita para cada sequência infinita de símbolos. Órbitas que estão muito próximas entre si terão longas sequências finitas que são idênticas. Como as sequências periódicas correspondem a órbitas periódicas e podemos repetir periodicamente qualquer sequência finita, deduzimos que existem órbitas periódicas arbitrariamente próximas de qualquer órbita da ferradura. Em outras palavras, um sistema caótico é densamente povoado de órbitas periódicas! Parece uma contradição, mas o fato do sistema ser inteiramente determinista teria que ser refletido em alguma propriedade.

Por outro lado, sequências aleatórias de símbolos correspondem às órbitas caóticas de ferradura de Smale. Estas são a grande maioria. Uma sequência aleatória reproduzirá eventualmente qualquer sequência finita, portanto, a órbita caótica se aproximará em algum momento de qualquer outra órbita. Denominamos a isso de *propriedade ergódica* sobre a ferradura.

A maneira pela qual desprezamos as fatias que não tinham a etiqueta '0' ou '1' no volume inicial é típica da formação de *fractais*, ou *conjuntos de Cantor*. O volume desse conjunto será nulo (embora tenha uma *dimensão fractal* finita), de modo que a probabilidade de encontrar uma dada órbita em uma determinada ferradura é zero. Dizemos que a ferradura tem *medida nula*. Entretanto, podemos definir inúmeras ferraduras em um sistema caótico, cada qual com suas órbitas periódicas e suas órbitas ergódicas. Estes conjuntos de Cantor de órbitas são subconjuntos de conjuntos maiores. Por exemplo, podemos definir o conjunto de órbitas que é ergódico a duas ferraduras, sem nunca passar próximo a uma terceira ferradura, e assim por diante. Concluimos que, embora a grande maioria das órbitas de um sistema caótico tenha uma aparência livre e aleatória, seu movimento se desenrola sobre um esqueleto de órbitas mais disciplinadas. Estes formam uma complexa hierarquia que se inicia com as periódicas (perfeitamente regulares) e segue pela sucessão de conjuntos de Cantor, cada vez mais abrangentes.

Agradecimentos

A Edison Z. da Silva por mais este empréstimo do pêndulo esférico e a Bruno Ribeiro pelo trabalho fotográfico.

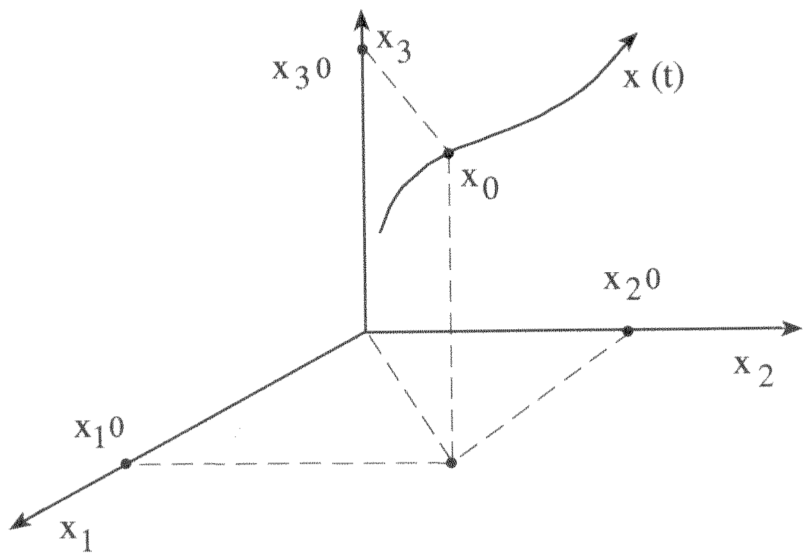


Figura 1.

Um sistema dinâmico que for descrito por três variáveis tem um espaço de estados de três dimensões. Atribuindo valores definidos x_{10}, x_{20} e x_{30} a cada umas das variáveis, especificamos unicamente o estado do sistema que corresponde ao ponto x_0 do espaço de estados. Este, por sua vez, determina uma única órbita, $x(t)$.

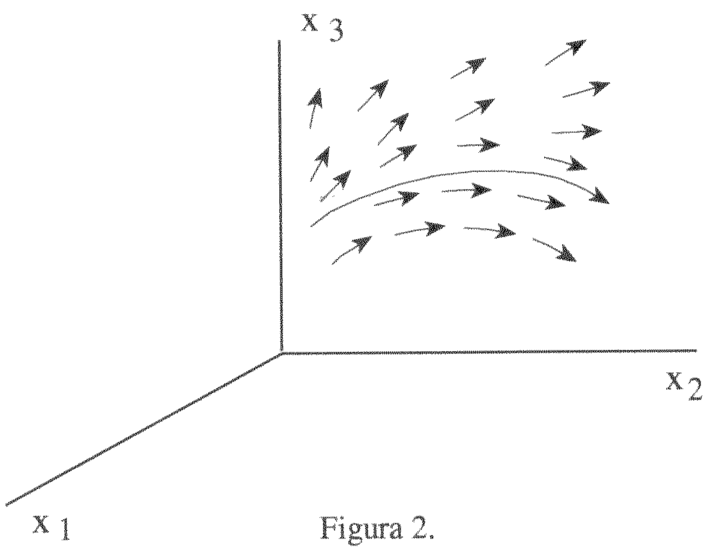


Figura 2.

A órbita do estado será tangente em cada ponto ao vetor que define a lei de movimento

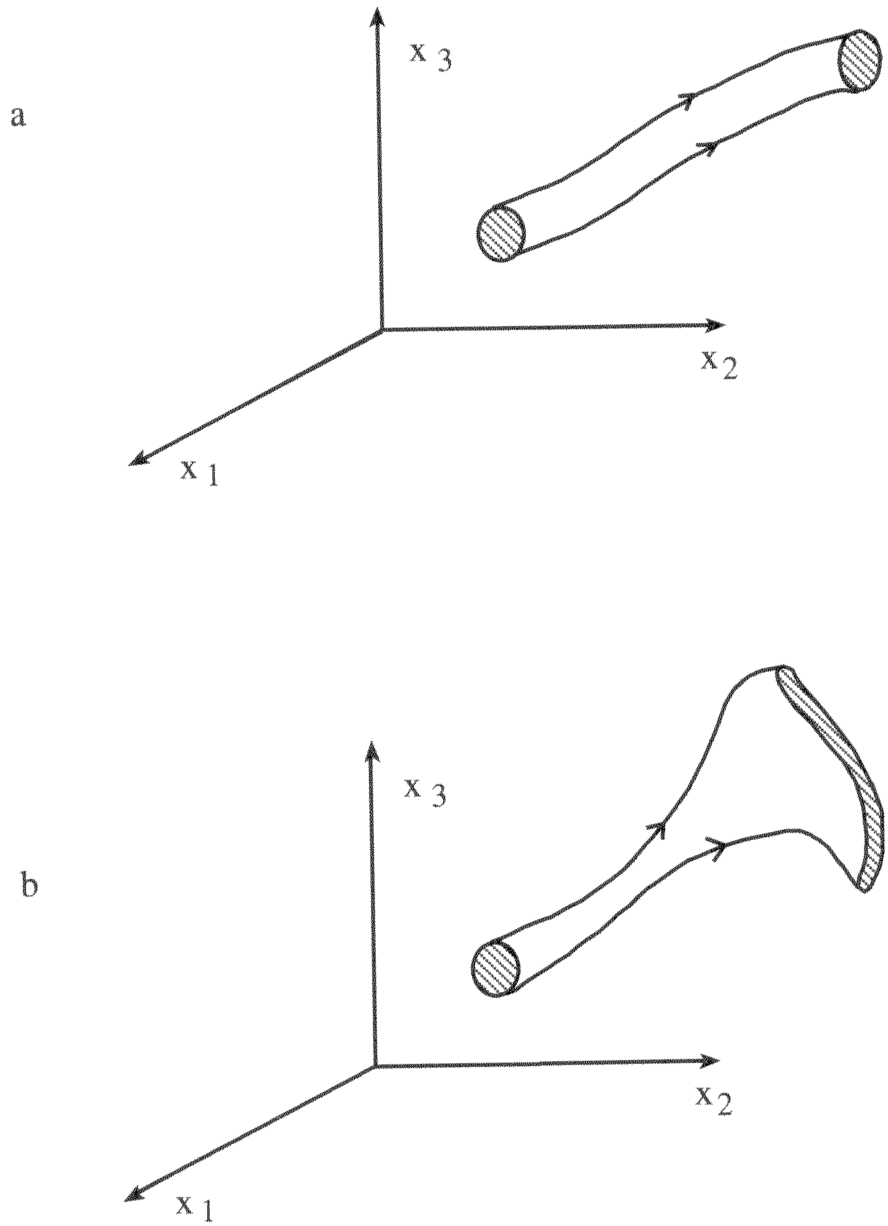
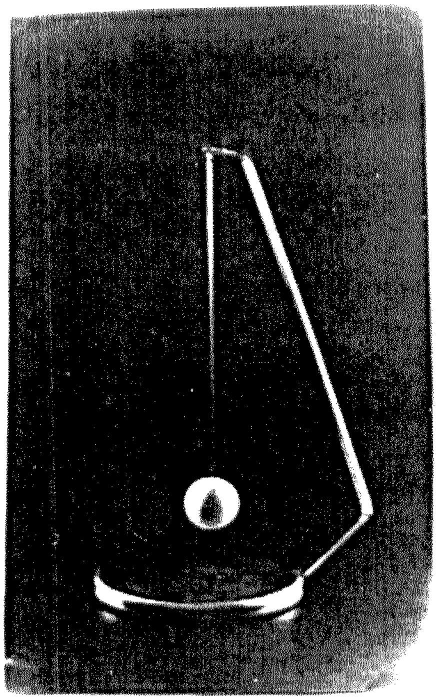
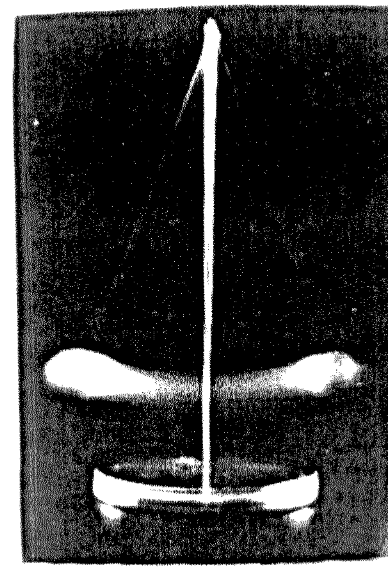


Figura 3.

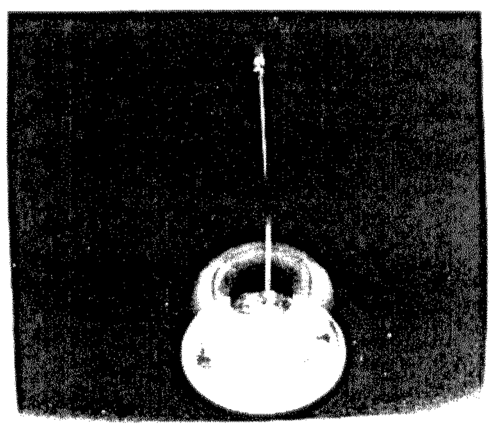
A diferença entre um sistema regular (a) e caótico (b) é marcada pela evolução de um pequeno volume de estados iniciais. Nenhuma dimensão do volume crescerá significativamente, se o sistema for regular, enquanto que o sistema caótico alongará a bolinha exponencialmente com o tempo.



a)



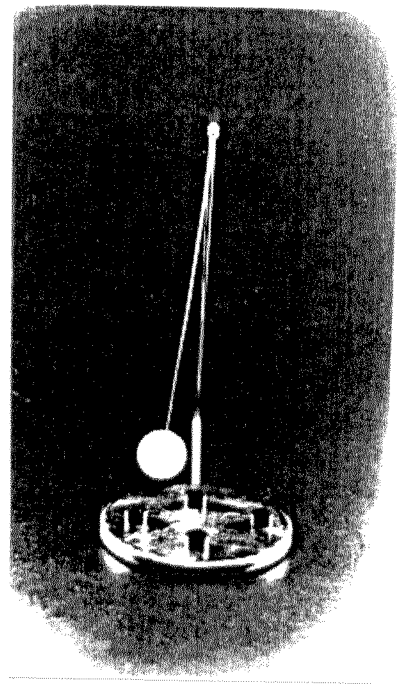
b)



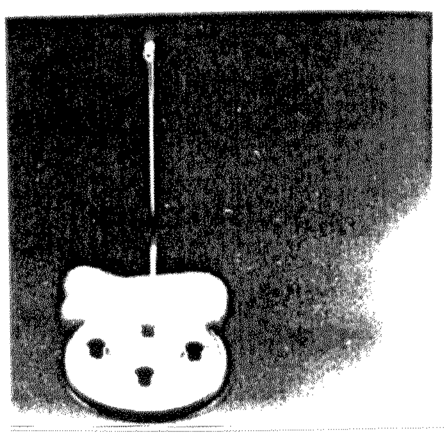
c)

Figura 4

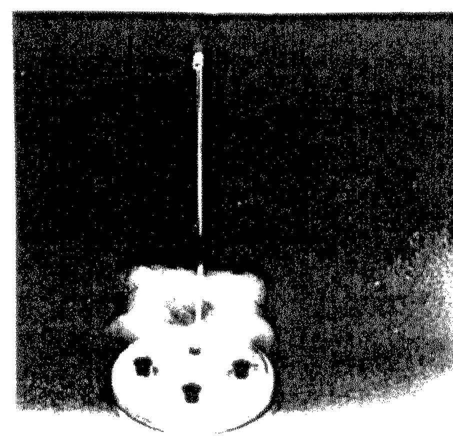
Pêndulo esférico:
(a) na sua posição de equilíbrio vertical.
(b) movimento no plano vertical descrevendo um arco de círculo quando o pêndulo for solto fora de sua posição de equilíbrio.
(c) movimento não pleno, porém periódico.



a)



b)



c)

Figura 5

Pêndulo esférico perturbado por pequenos ímãs:
(a) uma nova posição de equilíbrio. (Neste caso existem duas)
(b) e (c) movimentos "caóticos" para dois estados iniciais diferentes.

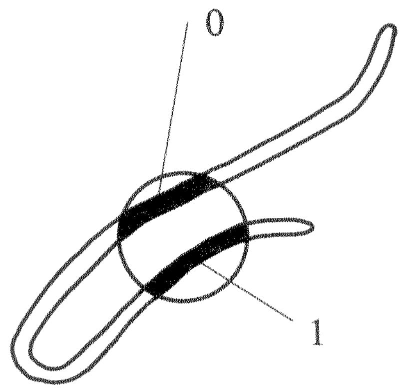


Figura 6.

A ferradura de Smale é uma estrutura típica de movimentos caóticos. Uma bolinha de estados iniciais evoluirá em uma região alongada retorcida que eventualmente intersecta a bolinha inicial em duas ou mais regiões desjuntas. Atribuindo um dígito a cada região, especificamos a história de cada órbita que retorna à ferradura por uma sequência de algarismos.