

**Introdução às Idéias  
Básicas sobre Renormalização  
em Teoria Quântica de Campos**

---

Daniel H. T. Franco<sup>1,2</sup>

*Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF),  
Depto. de Teoria de Campos e Partículas (DCP),  
22290-180 Rio de Janeiro, RJ, Brazil.*

Rio de Janeiro, 7 de junho de 1999

---

<sup>1</sup>Supported by the Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

<sup>2</sup>E-mail:dfranco@cbpfsu1.cat.cbpf.br.

---

## Contents

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>2</b>
2.1	Teoria de Espalhamento . . . . .	2
2.2	Campos Quânticos Livres . . . . .	2
2.3	A Matriz- $S$ . . . . .	7
2.4	Causalidade . . . . .	9
2.5	Campos como Distribuições Temperadas . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Um Pouco sobre as Distribuições Temperadas</b>	<b>11</b>
3.1	Preâmbulos . . . . .	11
3.2	Funções de Decrescimento Rápido e as Distribuições Temperadas . . . . .	15
<b>4</b>	<b>A Teoria da Renormalização: O Esquema de Epstein-Glaser</b>	<b>24</b>
4.1	Teoremas de Wick . . . . .	30
4.2	A Hipótese de Indução . . . . .	33
4.3	Comentários Finais . . . . .	38

---

*”The difficulty, as in all this work, is to find a notation which is both concise and intelligible to at least two persons, of whom one may be an author”.*

Salam's criterion for renormalization, Rev.Mod.Phys. 23 (1951) 311.

# 1 Introdução

Teoria Quântica de Campos (TQC) é a tentativa de descrever as propriedades das partículas elementares em termos de campos quânticos relativísticos. Acreditamos que a TQC, ainda hoje, oferece uma estrutura matemática coerente para modelos relativísticos, como a QED e o Modelo Padrão, sendo o ponto de partida na busca de um entendimento de todas as partículas e interações observadas.

No entanto, a TQC como usualmente formulada está repleta de problemas, como as divergências do ultravioleta. O problema central, como apontou Zimmermann em [1], é que essas divergências são devido à ocorrência de produtos de campos no mesmo ponto, que são notoriamente mal-definidos.

Afim de solucionar o problema das divergências do ultravioleta e, assim, não perder todo o poder descritivo da TQC, foi desenvolvido estudos muito abrangentes no que diz respeito a como controlar o aparecimento dessas divergências. Isso hoje é conhecido como Teoria da Renormalização.

A renormalização levou a uma expansão perturbativa bem definida da TQC cujo os termos de ordens mais baixa estão em excelente acordo com a física de partículas experimental. Primeiro, nos anos 40, a QED foi renormalizada pelo método de Schwinger, Feynman, Tomonaga e Dyson, levando a previsões espetaculares como, por exemplo, o momento magnético do elétron. Nos anos 70, o programa de renormalização foi estendido para as teorias de gauge não-Abelianas – as teorias de Yang-Mills – através dos trabalhos de Faddeev-Popov, 't Hooft, Becchi-Rouet-Stora e outros. Tentativas de incluir também a gravidade no programa da renormalização falharam; propostas mais recentes procuram por uma teoria diferente como a supersimetria e supergravidade, as teorias de Kaluza-Klein e a formulação dos modelos de strings, que muito elucidaram questões como a Gravitação Quântica e a unificação das forças da Natureza, mas, contudo, ainda não ofereceram resultados conclusivos.

Estas notas são devotadas a uma introdução às idéias básicas sobre a teoria da renormalização em TQC. Seguiremos o esquema desenvolvido por Epstein-Glaser [2] (veja também [3, 4, 5]). Ele se baseia nas idéias geralmente atribuídas a Bogoliubov, Stückelberg e seus colaboradores [6]. Esse esquema é local por natureza e nosso candidato preferido para uma introdução geral à renormalização. Existem outros esquemas de renormalização disponíveis igualmente importantes como: o esquema BPHZ [1, 6, 7, 8], o esquema de Renormalização Dimensional [9, 10], o esquema de Regularização Analítica [11], o esquema que usa o Produto de Distribuições Retardadas [12], o esquema do Grupo de Renormalização [13, 14, 15].

Todos os métodos acima mencionados aplicam-se basicamente ao regime perturbativo, o que significa que a extensão quântica da teoria é construída ordem a ordem na série perturbativa. Aspectos relativos à convergência e a soma da série perturbativa não são considerados. Para isso, temos que nos referir aos trabalhos em Teoria Quântica de Campos Construtiva [16].

## 2 Preliminares

### 2.1 Teoria de Espalhamento

A teoria de Espalhamento é o estudo de um sistema em interação sobre uma escala de tempo e/ou distância muito grande se comparada à escala da própria interação.

O espalhamento pode ser estudado do ponto de vista de uma teoria de perturbação; nesse caso o fenômeno perturbativo enfatiza os estados assintóticos temporais. A análise completa de estados assintóticos é feita através de uma transformação de espalhamento, representada por uma matriz conhecida como matriz- $S$ , que correlaciona o passado,  $|\alpha, in \rangle$ , e o futuro,  $|\beta, out \rangle$ , assintóticos. Por exemplo, na teoria de partículas o fenômeno de espalhamento geral pode ser descrito por um conjunto de partículas originalmente estando em  $t \rightarrow -\infty$  e um outro conjunto de partículas em  $t \rightarrow \infty$  (Fig.1).

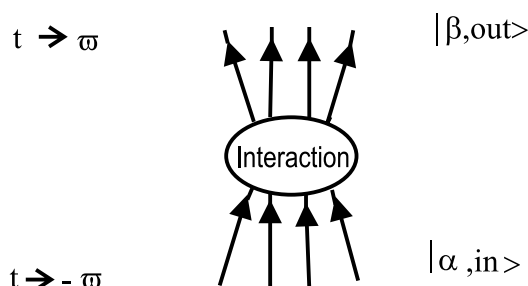


Fig.1: Sistema de partículas interagindo

Para sermos explícitos, suponhamos que a dinâmica de um sistema seja vista como uma transformação atuando sobre os estados. Sejam, então,  $T_t$  e  $T_t^{(0)}$  as transformações para os sistemas interagente e livre, respectivamente, atuando sobre um conjunto de estados  $\Sigma$ . Estamos interessados em um par  $(\rho_-, \rho) \in \Sigma$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (T_t \rho - T_t^{(0)} \rho_-) = 0 ,$$

e da mesma forma para pares que se aproximam quando  $t \rightarrow \infty$ . Exigimos que o limite acima só faça sentido quando para cada  $\rho$  existir no máximo um  $\rho_-$ .

### 2.2 Campos Quânticos Livres

Como o nome sugere, teorias de campos livres descrevem partículas que não interagem; apesar disso, essas teorias são importantes porque a forma mais natural de se construir teorias com interação é fazendo-se perturbações das teorias de campos livres. Na representação esquemática acima, Fig.1, as partículas do estado  $|\alpha, in \rangle$  podem ser representadas por estados de partículas livres que, por sua vez formam um conjunto completo de estados. O conjunto de campos livres,  $\varphi^{in}(x)$ , obedece às equações de partículas livres e à quantização canônica. Na verdade, se escolhermos nosso tempo de referência em  $t \rightarrow -\infty$ , então, podemos identificar os campos  $\varphi^{in}(x)$  como a representação de interação para as variáveis de campo.

Como exemplo, considere a equação de campo livre do campo escalar

$$(\square + m^2) \varphi(x) = 0. \quad (2.1)$$

Do princípio de correspondência de Bohr, o campo escalar clássico deve ser escrito como o valor esperado do operador quântico em estados apropriados

$$\varphi(x) = \langle 0 | \varphi_{\text{op.}}(x) | 0 \rangle. \quad (2.2)$$

O campo clássico obedece à eq.(2.1) se o operador  $\varphi_{\text{op.}}(x)$  for Hermitiano e se ele mesmo obedecer à eq.(2.1). Por simplicidade, omitiremos daqui em diante o índice "op".

Da segunda quantização, segue que

$$(\square + m^2) \langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle = 0. \quad (2.3)$$

Considerando a transformada de Fourier de  $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{\varphi}(k) e^{ikx}, \quad (2.4)$$

e substituindo-a na eq.(2.3) encontramos que:

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k (k^2 - m^2) \tilde{\varphi}(k) e^{ikx} = 0. \quad (2.5)$$

Da equação acima obtemos que:

$$\tilde{\varphi}(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k^2 \neq m^2 \\ \neq 0 & \text{se } k^2 = m^2 \end{cases}, \quad (2.6)$$

ou, de outra forma que

$$\tilde{\varphi}(k) = 2\pi \delta(k^2 - m^2) \varphi(k). \quad (2.7)$$

O fator  $2\pi$  foi introduzido de forma a normalizar a amplitude de Fourier 3-dimensional.

Assim, temos que

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - m^2) \varphi(k) e^{ikx}. \quad (2.8)$$

Pelo fato da função delta aparecer sob o sinal da integral, limitamos nosso volume de integração à dois hiperbolóides 3-dimensionais, i.e,  $(k^0)^2 - \vec{k}^2 = m^2 \Rightarrow k^0 = \pm \omega(\vec{k})$ , onde  $\omega(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ .

Usando as propriedades da função delta, vemos que

$$\delta(k^2 - m^2) = \frac{1}{2|\omega|} [\delta(k^0 - \omega) + \delta(k^0 + \omega)]. \quad (2.9)$$

Então, podemos reescrever a eq.(2.8) como

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \int dk^0 \frac{1}{2|\omega|} [\delta(k^0 - \omega) + \delta(k^0 + \omega)] \varphi(k) e^{ikx}. \quad (2.10)$$

Realizando a integração em  $k^0$ , então,

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\omega|} \left\{ \int d^3\vec{k} \varphi(\omega, \vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k}x)} + \int d^3\vec{k} \varphi(-\omega, \vec{k}) e^{i(-\omega t - \vec{k}x)} \right\}. \quad (2.11)$$

Fazendo a troca de variável  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ , na segunda integral, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2|\omega|} \theta(k^0) [\varphi(k) e^{ikx} + \varphi(-k) e^{-ikx}] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k^0 > 0} \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} [\varphi(k) e^{ikx} + \varphi(-k) e^{-ikx}]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde

$$\theta(k^0) = \begin{cases} 1 & \text{se } k^0 > 0 \\ 0 & \text{se } k^0 < 0 \end{cases}, \quad (2.13)$$

é a função degrau.

Definimos

$$\varphi^\dagger(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} a^\dagger(k) e^{ikx}, \quad \varphi^-(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} a(k) e^{-ikx}, \quad (2.14)$$

onde  $a^\dagger(k) \equiv \varphi(k)$  e  $a(k) \equiv \varphi(-k)$  são, respectivamente, operadores de criação e destruição. Logo,

$$\varphi(x) = \varphi^\dagger(x) + \varphi^-(x), \quad (2.15)$$

ou,

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} [a^\dagger(k) e^{ikx} + a(k) e^{-ikx}]. \quad (2.16)$$

A eq.(2.16) pode ser invertida para dar  $a^\dagger(k)$  e  $a(k)$  em termos de  $\varphi(x)$ <sup>3</sup>:

$$a(k) = -i \int d^3x e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x), \quad a^\dagger(k) = i \int d^3x e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x), \quad (2.17)$$

onde o símbolo  $\overleftrightarrow{\partial}_0$  é definido tal que  $A \overleftrightarrow{\partial}_0 B = A \partial_0 B - (\partial_0 A) B$ .

Os operadores de criação e destruição  $a^\dagger(k)$  e  $a(k)$  respeitam as seguintes relações de comutação

$$[a(k), a^\dagger(k')] = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(k - k'), \quad [a(k), a(k')] = [a^\dagger(k), a^\dagger(k')] = 0. \quad (2.18)$$

---

<sup>3</sup>Para isso, derivamos a eq.(2.16) com respeito ao tempo obtendo o momentum conjugado

$$\pi(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2} [a^\dagger(k) e^{ikx} - a(k) e^{-ikx}].$$

Então, invertemos as integrais de Fourier na eq.(2.16), usando o fato que  $[\varphi(x), \pi(x')] = \delta^3(x - x')$ . Nossas convenções para as transformadas de Fourier são:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n x e^{ikx} \hat{\varphi}(k); \quad \hat{\varphi}(k) = \int d^n x e^{-ikx} \varphi(x); \quad \delta^n(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n x e^{ik(x-y)}.$$

Para calcular os elementos da matriz- $S$  precisamos calcular a amplitude de transição realizando uma integração sobre todas as configurações possíveis dos campos tendo o comportamento assintótico de campo livre, i.e,

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}, t) &\sim \varphi^{\text{in}}(\vec{x}, t) && \text{quando } t \rightarrow -\infty, \\ \varphi(\vec{x}, t) &\sim \varphi^{\text{out}}(\vec{x}, t) && \text{quando } t \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.19)$$

A decomposição (2.15) no operador criação e no operador destruição, nos permite identificar  $\varphi^{\text{in}}(x)$  e  $\varphi^{\text{out}}(x)$  como um caso especial desses operadores. Assim, o estado inicial ( $t \rightarrow -\infty$ ) está associado com a parte de frequência positiva de  $\varphi(x)$ , i.e,

$$\varphi^{\text{in}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} a^\dagger(k) e^{ikx}. \quad (2.20)$$

Da mesma forma, o estado final ( $t \rightarrow \infty$ ) está associado com a parte de frequência negativa de  $\varphi(x)$

$$\varphi^{\text{out}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} a(k) e^{-ikx}. \quad (2.21)$$

Estas associações podem ser obtidas se atribuímos à componente  $k_0$  uma pequena parte imaginária negativa

$$k_0 \rightarrow k_0 - i\varepsilon, \quad \text{com } (\varepsilon > 0). \quad (2.22)$$

Isso tem como efeito:

$$\exp(i k_0 t) \rightarrow \exp(i k_0 t) \exp(\varepsilon t) \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow -\infty \quad (2.23)$$

e somente  $e^{-ikx}$  sobrevive quando tomamos esse limite. Igualmente, somente  $e^{ikx}$  sobrevive quando ( $t \rightarrow \infty$ ). Assim, a atribuição (2.23) de uma pequena parte imaginária à  $k_0$  assegura (2.20) e (2.21) quando ( $t \rightarrow \pm\infty$ ). Portanto, podemos assegurar que os campos assintóticos são campos livres definidos pelos limites

$$\varphi^{\text{in, out}}(x) = \text{"lim"}_{t \rightarrow \mp\infty} \varphi(x), \quad (2.24)$$

no sentido LSZ, dos campos interagentes  $\varphi$ .

Processos em Física de Partículas nos quais partículas são criadas e destruídas são essenciais. Com isso, o número de partículas,  $N$ , torna-se uma variável dinâmica e precisamos encontrar uma forma de descrever todos os estados relevantes.

Os estados  $|\alpha, \text{in}\rangle$  podem ser construídos a partir de um estado  $|0\rangle$ , que identificamos como o vácuo, atuando sobre ele os operadores de criação  $a^\dagger(k)$ . Podemos assim, construir estados de uma, duas ou mais partículas aplicando-se no vácuo um, dois ou mais operadores de criação. O espaço que contém o vácuo e o conjunto de estados de uma ou mais partículas é chamado Espaço de Fock,  $\mathcal{F}$ .

Definindo

$$\phi(k) = e^{ikx}, \quad (2.25)$$



e usando a identidade

$$d\mu(k) = \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega} = \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(k^2 - m^2)\theta(k^0) , \quad (2.26)$$

uma base no espaço de Fock,  $\mathcal{F}$ , pode ser construída de estados de partículas, tal que

$$|\alpha\rangle = \int \prod_{i=1}^{\alpha} d\mu_i(k_i) \phi(k_i) a^\dagger(k_i) |0\rangle = \int \prod_{i=1}^{\alpha} d\mu_i(k_i) \left( \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{1}{i!} \phi(k_i) \right) a^\dagger(k_i) |0\rangle , \quad (2.27)$$

onde no último integrando a soma é realizada sobre todas as  $n$  permutações do conjunto de inteiros  $(1, \dots, n)$ . Como o campo escalar representa partículas idênticas que respeitam a estatística de Bose, então, dizemos que  $\phi(k_1, \dots, k_n) = \sum_n \frac{1}{n!} \phi(k_1) \dots \phi(k_n)$  é um conjunto de funções simétricas, a menos de um fator de normalização.

Uma forma mais conveniente para descrever o espaço de Fock,  $\mathcal{F}$ , é dada, definido-se um vetor como uma sequência infinita  $\phi = \{\phi^{(0)}, \phi^{(1)}(x_1), \phi^{(2)}(x_1, x_2), \dots, \phi^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \dots\}$  de funções dependendo respectivamente de  $(0, 1, 2, \dots, n, \dots)$  variáveis, com norma finita

$$\|\phi\|^2 = \|\phi^{(0)}\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \|\phi^{(n)}\|^2 < \infty , \quad (2.28)$$

onde

$$\|\phi^{(n)}\|^2 = \int \prod_{i=1}^{\alpha} d\mu_i(k_i) |\phi^{(n)}(k_1, \dots, k_n)|^2 . \quad (2.29)$$

Definimos o subespaço de Fock simétrico ou subespaço de Fock bosônico por:

$$\mathcal{F}^{(S)} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n^{(S)} , \quad (2.30)$$

com  $\mathcal{F}_0^{(S)} = c$  representando o estado de vácuo, tal que  $c \in \mathbf{C}$  e tem dimensão 1.  $\mathcal{F}_1^{(S)}$  é o espaço de estados de 1 partícula e  $\mathcal{F}_n$  o espaço de estados de  $n$ -partículas, um produto tensorial de  $\mathcal{F}_1^{(S)}$   $n$ -vezes  $(\mathcal{F}_n^{(S)} = \otimes_{k=1}^n \mathcal{F}_1^{(S)})$ , simetrizados para o caso de termos bósons.  $\phi^{(n)}$  é a amplitude de probabilidade de encontrar exatamente o estado de  $n$  partículas.

Define-se uma representação unitária do grupo de Poincaré atuando em  $\mathcal{F}^{(S)}$  por:

$$(U(\Lambda, a)\phi)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) = e^{i\sum_{j=1}^n k_j a} \phi^{(n)}(\Lambda^{-1}k_1, \dots, \Lambda^{-1}k_n) . \quad (2.31)$$

O vácuo  $\phi^{(0)} = (1, 0, 0, \dots)$  é invariante sob ação de (2.31).

A medida

$$d\mu_i(k_i) = d^4k_i \delta(k_i^2 - m^2)\theta(k_i^0) , \quad (2.32)$$

seleciona o espectro fisicamente aceitável do operador de Casimir do grupo de Poincaré, isto é, o espectro de energia-momentum é dado por:  $\{0\} \cup \{k : k^2 = m^2, k^0 > 0\} \cup \{k : k^2 \geq 4m^2, k^0 > 0\}$  (assumimos que o campo escalar tem massa  $m > 0$ ). Essa decomposição consiste do ponto isolado  $k = 0$ , do hiperbolóide de 1-partícula, e um contínuo,

respectivamente; correspondendo à decomposição do espaço de Fock  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1 \oplus (\sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{F}_n)$ .

O dual do espaço de Fock é construído atuando-se sobre o adjunto do vácuo, que será denotado por  $\langle 0 |$ , com o operador de destruição,  $a(k)$ .

A generalização para o tratamento de férmions é imediata. Precisamos somente que o espaço de Fock seja construído com funções anti-simétricas, ou seja, definimos o subespaço de Fock anti-simétrico ou subespaço de Fock fermiônico por:

$$\mathcal{F}^{(A)} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n^{(A)} . \quad (2.33)$$

### 2.3 A Matriz-S

A matriz- $S$  é o objeto central de interesse em TQC; ela expressa as interações observadas entre partículas. O approach tradicional para um processo de interação – ou processo de colisão – parte de um sistema de partículas livres no tempo  $-\infty$  e finaliza-se, também, com um sistema de partículas livres no tempo  $+\infty$ . No processo de colisão, os correspondentes estados assintóticos,  $|\alpha, in \rangle_{t \rightarrow -\infty} \rightarrow$  and  $|\beta, out \rangle_{t \rightarrow \infty}$ , são representados por uma matriz unitária chamada matriz- $S$ . Seções de choque são, então, obtidas diretamente dos elementos da matriz- $S$  em uma base apropriada. Seus elementos, representando um processo de espalhamento com  $n$  partículas incidentes e  $m$  partículas emergentes, são definidos por

$$S_{\alpha\beta} = \langle \beta, out | \alpha, in \rangle , \quad (2.34)$$

com

$$\langle \beta, out | = \langle \beta, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m | \quad \text{e} \quad |\alpha, in \rangle = | \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n, in \rangle , \quad (2.35)$$

onde (2.34) é a amplitude de transição para  $|\alpha, in \rangle_{t \rightarrow -\infty} \rightarrow |\beta, out \rangle_{t \rightarrow \infty}$ .

Necessitamos conhecer nos processos dinâmicos a evolução temporal dos elementos da matriz (2.34). Na mecânica quântica ordinária existem duas formas de fazê-lo. Em primeiro lugar existe a representação de Heisenberg, com a dependência temporal recaindo sobre os operadores, enquanto os vetores de estado ficam independentes do tempo. Temos também a representação de Schrödinger, com a dependência temporal recaindo sobre os vetores de estado, com os operadores ficando independentes do tempo. No caso da teoria quântica de campos, a matriz- $S$  pode ser formalmente obtida tomando-se o limite de  $t \rightarrow \infty$  do operador evolução na representação de *interação*. Nessa representação a evolução temporal dos operadores é governada pela parte livre,  $H_0$ , do operador Hamiltoniano completo  $H = H_0 + H_{\text{int}}$ . do sistema, isto é, considerando um operador que relacione os campos em interação,  $\Phi$ , com aqueles que estão entrando,  $\Phi^{\text{int}}$ , obtemos que:

$$\Phi(x, t) = \exp(i H_0 t) \Phi^{\text{int}}(x, t) \exp(-i H_0 t) , \quad (2.36)$$

com a dependência temporal dos vetores de estado sendo governada pelo Hamiltoniano de interação,  $H_{\text{int}}$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t \rangle = -i H_{\text{int}} |\alpha, t \rangle . \quad (2.37)$$

A solução formal da equação acima lê-se:

$$|\alpha, t \rangle = U(t, t') |\alpha, t' \rangle, \quad (2.38)$$

com a condição que  $U(t, t) = 1$ .

Substituindo a eq.(2.38) na eq.(2.37) obtemos que:

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, t') = -i H_{\text{int.}} U(t, t') . \quad (2.39)$$

Fazendo uma integração formal na equação acima e usando a condição que  $U(t, t) = 1$ , temos

$$\int_{t'}^t dU(t, t') = -i \int_{t'}^t dt_1 H_{\text{int.}}(t_1) U(t_1, t') , \quad (2.40)$$

ou

$$U(t, t') - U(t', t') = -i \int_{t'}^t dt_1 H_{\text{int.}}(t_1) U(t_1, t') . \quad (2.41)$$

Portanto,

$$U(t, t') = 1 - i \int_{t'}^t dt_1 H_{\text{int.}}(t_1) U(t_1, t') . \quad (2.42)$$

A solução dessa equação diferencial pode ser obtida iterativamente, levando ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} U(t, t') = & I - i \int_{t'}^t dt_1 H_{\text{int.}}(t_1) + (-i)^2 \int_{t'}^t dt_1 H_{\text{int.}}(t_1) \int_{t'}^{t_1} dt_2 H_{\text{int.}}(t_2) + \dots + \\ & + (-i)^n \int_{t'}^t dt_1 H_{\text{int.}}(t_1) \int_{t'}^{t_1} dt_2 H_{\text{int.}}(t_2) \dots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n H_{\text{int.}}(t_n) + \dots \end{aligned} \quad (2.43)$$

Note que os produtos de  $H_{\text{int.}}$  no integrando sempre segue a seqüência no tempo. Isso nos leva à seguinte definição do produto ordenado no tempo de  $n$  operadores – que abreviaremos  $T$ :

$$T(O_1(t_1) \dots O_n(t_n)) = \sum_{\mathcal{P}} \theta(t_{P_1}, \dots, t_{P_n}) \varepsilon_{\mathcal{P}} O_1(t_1) \dots O_n(t_n) , \quad (2.44)$$

onde a soma é sobre todas as permutações  $\mathcal{P}$ ; a função  $\theta$  induz a condição que  $t_{P_1} > t_{P_2} > \dots > t_{P_n}$  e  $\varepsilon_{\mathcal{P}}$  indica o sinal da permutação de operadores fermiônicos envolvido no produto acima.

Assim, estendendo o intervalo de integração em (2.43) ao intervalo completo de  $t$  a  $t'$ , dado que introduzimos o produto ordenado no tempo, então:

$$U(t, t') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t'}^t dt_1 \dots dt_n T(H_{\text{int.}}(t_1) \dots H_{\text{int.}}(t_n)) = T \exp \left[ -i \int_{t'}^t dt' H_{\text{int.}}(t') \right] . \quad (2.45)$$

A matriz- $S$  é definida quando tomamos o limite

$$S = U(t \rightarrow \infty, t' \rightarrow -\infty) = T \exp \left[ -i \int_{-\infty}^{\infty} dt' H_{\text{int.}}(t') \right] . \quad (2.46)$$

Esta matriz relaciona os estados assintóticos livres que entram com os que estão saindo. Observe que se  $H_{\text{int.}}(t) \rightarrow 0$  quando  $t' \rightarrow -\infty$ , então o operador  $U(t, t') \rightarrow I$  quando  $t \rightarrow -\infty$ , como é esperado quando a interação é desligada adiabaticamente no passado remoto.

*Nota:* Ao contrário da teoria de espalhamento para potenciais finitos da mecânica quântica ordinária, na teoria quântica de campos as interações não podem ser desligadas completamente, mesmo quando as partículas estão suficientemente distantes. A matriz- $S$  contém efeitos de auto-energia que estão presente mesmo com as partículas isoladas. Esses efeitos têm que ser levados em conta, e isso é feito através do processo da *renormalização*.

## 2.4 Causalidade

Na teoria quântica existem restrições sobre as medidas de quantidades complementares. Os operadores correspondentes à essas quantidades, atuando em  $\mathcal{F}$ , não comutam. Como consequência, o fato de duas medidas não interferem uma com a outra, impõem restrições aos correspondentes operadores que devem comutar. Isso, combinando com o princípio fundamental que todos os efeitos devem ser propagados pelos campos com uma velocidade que não seja superior a velocidade da luz, nos leva naturalmente ao princípio da causalidade – ou localidade.

Uma vez que para a TQC duas medidas realizadas em duas regiões do espaço-tempo, que têm uma separação tipo-espaço, não podem interferir uma com a outra, os correspondentes operadores devem comutar

$$[\Phi_i(x), \Phi_j(y)]_- = 0 \quad \text{para} \quad (x - y)^2 < 0. \quad (2.47)$$

Com certeza essa consideração só é válida para campos observáveis, como os campos de Maxwell, as correntes eletromagnéticas, etc. A generalização para todos os campos é feita assumindo-se essa condição como um *postulado*.

No caso de campos spinoriais a condição (2.47) é substituída pela condição

$$[\Phi_i(x), \Phi_j(y)]_+ = 0 \quad \text{para} \quad (x - y)^2 < 0, \quad (2.48)$$

onde  $[\cdot, \cdot]_+$  representa o anticomutador<sup>4</sup>.

## 2.5 Campos como Distribuições Temperadas

Depois da caracterização das principais propriedades dos operadores de campos, vamos discutir uma questão importante do ponto de vista físico, a impossibilidade de definirmos os campos como funções com valores em operadores. O operador  $\varphi(x)$  foi assumido como sendo o *campo no ponto  $x$  em um certo instante  $t$* , como no caso do campo eletromagnético clássico. Porém, o campo quântico assim definido não pode ser um observável. Fisicamente, uma medida em um ponto exigiria uma energia infinita. Bohr e Rosenfeld já

---

<sup>4</sup>O princípio da localidade relativística exige, a priori, que todos os observáveis comutem em distâncias do tipo-espaço. A ocorrência de qualquer outra estatística, mesmo a estatística ordinária de Férmi, necessita da existência de uma regra de “super-seleção”. Pode-se, então, concluir que a estatística das partículas resulta do princípio de localidade e que o tipos de estatísticas que ocorrem estão relacionados à regras de super-seleção [26].

havam chamado a atenção para o fato de ser impossível medir a intensidade de um campo elétrico em um determinado ponto, devido a certos efeitos quantum-mecânicos relacionados ao princípio de incerteza. Na realidade, o que se faz experimentalmente é medir uma certa região, por menor que ela seja. Isso significa que os operadores de campos só podem atuar em regiões finitas do espaço-tempo.

Essas dificuldades são contornadas assumindo-se o campo  $\varphi(x)$  como distribuições com valores em operadores, isto é, considerando somente a média no espaço-tempo de campos com funções *suaves*  $f(x)$  sobre o espaço de Minkowski

$$\Phi(f) = \int dx \varphi(x) f(x) . \quad (2.49)$$

A escolha da classe dessas funções *suaves*  $f(x)$  – conhecidas como funções teste – deve levar em conta o fato que os campos devem satisfazer ao princípio da causalidade de Einstein: operadores que são *smearred* com funções teste cujo suporte tem uma separação *space-like* devem comutar – ou anticomutar para férmions. Isso, de certa forma nos força a tomar o espaço das funções,  $f(x)$ , como sendo o espaço que contém somente elementos que desaparecem identicamente fora de uma região limitada. Por conveniência tomaremos o conjunto das funções que sejam infinitamente diferenciáveis e que decrescem rapidamente no infinito. Em resumo, estaremos interessados no espaço  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  de funções de classe  $C^\infty$  que vão a zero no infinito mais rápido do que qualquer potência de  $\frac{1}{|x|}$ , isto é, toda função  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  é tal que  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha D^\beta f(x)$  é limitado para todos  $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_+$ .

Esta escolha cobre os casos mais importantes das conhecidas teorias renormalizáveis. Para as teorias não-renormalizáveis, uma classe alternativa de espaços de funções teste foi proposta por A. Jaffe em [17].

### 3 Um Pouco sobre as Distribuições Temperadas

Nesta seção faremos uma breve digressão matemática sobre a teoria das distribuições temperadas. Enunciaremos um conjunto de teoremas, operações e definições que serão fundamentais ao desenvolvimento e entendimento do método de renormalização de Epstein-Glaser. Os teoremas serão enunciados sem provas, salvo naqueles casos onde as provas são imediatas. Um tratamento mais completo sobre o assunto pode ser encontrado em [18]–[24].

#### 3.1 Preâmbulos

Os preâmbulos necessários para uma compreensão da teoria das distribuições temperadas foram reduzidos ao mínimo.

Como estaremos tratando com conjuntos de funções e operadores que muitas vezes necessitam de uma forma de medir a distância entre os objetos desses conjuntos, iniciaremos nossa digressão definindo a noção de distância.

**Definição 1:** Um conjunto  $Q$  é chamado espaço métrico se, para cada par de elementos  $x, y \in Q$  existe um número  $d(x, y)$  que satisfaz:

- (i)  $d(x, y) > 0$ ,
- (ii)  $d(x, y) = 0$  se, e somente se,  $x = y$ ,
- (iii)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- (iv)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

A função  $d(\cdot, \cdot)$  é chamada a métrica sobre  $Q$ .

Muitas vezes chamamos os elementos de um espaço métrico de *pontos*. Assim, um espaço métrico é um conjunto  $Q$  munido de uma função métrica  $d(\cdot, \cdot)$ . Em geral, um dado conjunto pode se tornar um espaço métrico de formas diferentes, usando-se funções métricas diferentes.

**Exemplo 1:** Seja  $A = C[0, 1]$ , o conjunto de funções contínuas tomando valores reais sobre  $[0, 1]$ . Podemos definir duas métricas sobre esse conjunto

$$d_1(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|, \quad d_2(f, g) = \int_0^1 dx |f(x) - g(x)| .$$

A noção de distância nos permite definir a noção de convergência:

**Definição 2:** Uma sequência de elementos  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , com  $n \in \mathbf{N}$  e  $x_n \in Q$ , converge para  $x \in Q$  se, para qualquer  $\varepsilon > 0$  dado, existir  $n_0 \in \mathbf{N}$  tal que  $\forall n > n_0$  tem-se que  $d(x_n, x) < \varepsilon$  ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Ou seja, para  $\forall n > n_0$ ,  $x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ . Fora desse intervalo só poderão estar, no máximo, os termos  $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$ . Se  $x_n$  não converge para  $x$ , escrevemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq x$ .

Um critério suficiente e necessário para a convergência de uma sequência é conhecido como *Critério de Cauchy*.

**Definição 3:** Uma sequência de elementos  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de um espaço métrico, é chamada uma sequência de Cauchy se para cada  $\varepsilon > 0$  dado, existir  $n_0 \in \mathbf{N}$  tal que se  $m, n > n_0$ , então  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ .

Pode-se mostrar que toda sequência convergente é de Cauchy. Intuitivamente, se  $d(x_n, x) < \varepsilon$  então, para valores grandes de  $n$  os termos se aproximam de  $x$ . Neste caso, os termos  $x_m$  e  $x_n$  devem necessariamente aproximar-se uns dos outros.

**Definição 4:** Um espaço métrico  $Q$  é chamado completo se toda sequência de Cauchy em  $Q$  for convergente.

Um espaço métrico,  $Q$ , que não é completo pode ser feito completo se adicionamos todos os limites de sequências de Cauchy. Nesse caso, dizemos que o espaço original  $Q$  é denso no espaço maior  $\tilde{Q}$ .

**Definição 5:** Seja  $Q$  um espaço métrico. Dizemos que um conjunto  $D \subset Q$  é denso se todo elemento  $q \in Q$  for limite de alguma sequência  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $x_n \in D$ .

**Definição 6:** Seja  $X$  um espaço métrico, então:

(i) O conjunto  $\{x | x \in X, d(x, y) < r\}$  é chamado *Bola Aberta*,  $B(y; r)$ , de raio  $r$  em torno do ponto  $y$ ,

(ii) Um conjunto  $V \subset X$  é chamado Aberto se para todo  $y \in V$ , existe  $r > 0$  tal que  $B(y; r) \subset V$ ,

(iii) Um conjunto  $U \subset X$  é chamado uma vizinhança de  $y$  tal que para todo  $x \in U$  temos  $d(y, x) < r$ .

O conceito de distância entre os elementos do espaço de funções teste, é mais convenientemente tratado usando-se o conceito de norma de uma função. Embora estejamos interessados com o espaço de funções teste, o conceito de norma é introduzido de forma mais geral e abstracta, introduzindo o conceito de *espaço linear normado*.

**Definição 7:** Um conjunto  $\Phi$  de elementos  $\varphi, \psi, \chi, \dots$  para as operações de adição e multiplicação por números reais  $a, b, c, \dots$  define um espaço linear se, os seguintes axiomas são satisfeitas:

1.  $\varphi + \psi = \psi + \varphi$  (a adição é comutativa),
2.  $\chi + (\varphi + \psi) = (\chi + \varphi) + \psi$  (a adição é associativa),
3.  $\exists 0 \in R$  tal que  $\varphi + 0 = \varphi$ ,
4. Para cada  $\varphi \in \Phi$  existe um elemento  $-\varphi$  tal que  $\varphi + (-\varphi) = 0$ ,
5.  $1 \cdot \varphi = \varphi$ ,
6.  $(ab\varphi) = (ab)\varphi$ ,
7.  $(a + b)\varphi = a\varphi + b\varphi$ ,
8.  $a(\varphi + \psi) = a\varphi + a\psi$ .

**Definição 8:** Um espaço linear  $\Phi$  é chamado um espaço normado se, existe uma função  $\|\cdot\|$  definida sobre  $\Phi$  que satisfaz:

- (i)  $\|\varphi\| \geq 0$  para todo  $\varphi \in \Phi$ ,
- (ii)  $\|\varphi\| = 0$  se, e somente se,  $\varphi = 0$ ,
- (iii)  $\|\alpha\varphi\| = |\alpha| \|\varphi\|$  para todo  $\varphi \in \Phi$  e  $\alpha \in \mathbf{R}$  (ou  $\mathbf{C}$ ),

(iv)  $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$  para todo  $\varphi, \psi \in \Phi$ .

**Proposição 1:** Se  $\|\cdot\|$  é uma norma em  $\Phi$ , então

$$d(\varphi, \psi) = \|\varphi - \psi\| \quad , \quad (3.1)$$

é uma métrica em  $\Phi$ .

*Prova:* Claramente, (i)  $\|\varphi - \psi\| > 0$ , (ii)  $\|\varphi - \psi\| = 0 \Rightarrow \varphi - \psi = 0 \Rightarrow \varphi = \psi$  e (iii)  $\|\varphi - \psi\| = \|\psi - \varphi\|$ . Em (iv) substituímos  $\varphi$  por  $\varphi - \theta$  e  $\psi$  por  $\theta - \psi$  para obter  $\|\varphi - \psi\| \leq \|\varphi - \theta\| + \|\theta - \psi\|$  ou  $d(\varphi, \psi) \leq d(\varphi, \theta) + d(\theta, \psi)$ . ■

De imediato, temos o conceito de convergência em  $\Phi$ . Uma sequência  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  de  $\Phi$  converge para  $\varphi \in \Phi$  se, e somente se,  $\|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Suponha, agora, que  $\|\varphi\|_1$  e  $\|\varphi\|_2$  são duas normas sobre o mesmo espaço  $\Phi$ . A segunda norma é dita mais forte que a primeira, ou a primeira é mais fraca que a segunda, se existe uma constante  $C$  tal que  $\|\varphi\|_1 \leq C \|\varphi\|_2$  para todo  $\varphi \in \Phi$ . Duas normas são ditas *comparáveis* se uma delas é mais forte que a outra. Agora, se existem  $C$  e  $C'$  tal que  $\|\varphi\|_1 \leq C \|\varphi\|_2 \leq C' \|\varphi\|_1$ , então, dizemos que as duas normas são *equivalentes*. Em outras palavras, cada norma é simultaneamente mais forte e mais fraca que a outra.

**Definição 9:** Um espaço normado completo é chamado um espaço de *Banach*.

Espaços de Banach tem muitas propriedades: eles são espaços vetoriais com uma noção de distância dada pela norma, e toda sequência de Cauchy tem um limite. Ao contrário dos espaços de Hilbert, os espaços de Banach não têm necessariamente uma norma definida por um produto interno. Obviamente, um espaço de Hilbert também é um espaço de Banach.

Se o espaço  $\Phi$  é incompleto com respeito a no mínimo uma das normas, isto é, se a sequência  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  de  $\Phi$  não converge para  $\varphi \in \Phi$  quando  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\|_p \neq 0$ , então a comparabilidade não implica a equivalência. Nesse caso, podemos considerar dois espaços completos  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$ , que são obtidos completando  $\Phi$  com respeito às normas  $\|\varphi\|_1$  e  $\|\varphi\|_2$ . Se  $\|\varphi\|_2$  é mais forte que  $\|\varphi\|_1$ , então, podemos estabelecer um mapeamento de  $\Phi_2$  em  $\Phi_1$ : Todo elemento  $\varphi_{i(2)} \in \Phi_2$  é definido por uma sequência  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbf{N}} \in \Phi$ ; mas, esta mesma sequência, também, define um elemento  $\varphi_{i(1)} \in \Phi_1$ . Assim, podemos determinar  $\varphi_{i(1)}$  a partir  $\varphi_{i(2)}$ .

Asseguramos que esse mapeamento é um-para-um, exigindo que as normas  $\|\varphi\|_1$  e  $\|\varphi\|_2$  sejam *compatíveis* no seguinte sentido: As normas  $\|\varphi\|_1$  e  $\|\varphi\|_2$  são compatíveis se toda sequência  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbf{N}} \in \Phi$  que converge para zero com respeito a uma delas, também converge para zero com respeito a outra.

Assim, no caso de normas compatíveis, o mapeamento de  $\Phi_2$  em  $\Phi_1$ , nos permite identificar os elementos de  $\Phi_2$  com os correspondentes elementos de  $\Phi_1$ . Podemos considerar  $\Phi_2$  como sendo uma parte de  $\Phi_1$ . Em resumo, se duas normas compatíveis e comparáveis são definidas em um espaço  $\Phi$ , então, os complementos  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  de  $\Phi$  com respeito à estas normas pode ser considerados como satisfazendo a seguinte relação:

$$\Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \Phi \quad .$$

Considere a sequência de normas  $\{\|\varphi\|_p\}_{p \in \mathbf{N}}$  sobre  $\Phi$ . Se essas normas são compatíveis duas a duas, então, o espaço  $\Phi$  é chamado de *espaço linear normado contável*. Podemos



assumir que para um espaço linear normado contável a sequência de norma  $\{\|\varphi\|_p\}_{p \in \mathbf{N}}$  é tal que:

$$\|\varphi\|_1 \leq \|\varphi\|_2 \leq \dots \leq \|\varphi\|_p \leq \dots \quad (3.2)$$

Além disso, uma vizinhança  $U_{p,\varepsilon}(0)$  de zero é definida por:

$$U_{p,\varepsilon}(0) = \left\{ \varphi \in \Phi; \|\varphi\|_1 < \varepsilon, \dots, \|\varphi\|_p < \varepsilon \right\} . \quad (3.3)$$

Suponha que  $\Phi_p$  seja o complemento de  $\Phi$  com respeito a norma  $\|\varphi\|_p$ . Então,

$$\Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \dots \supset \Phi_p \supset \dots \supset \Phi . \quad (3.4)$$

O seguinte teorema dá um critério para a completeza de  $\Phi$ :

**Teorema 1:** O espaço  $\Phi$  é completo se, e somente se, ele coincide com a interseção dos complementos  $\Phi_p$ , isto é,

$$\Phi = \bigcap_{p=1}^{\infty} \Phi_p .$$

*Prova:* Suponha que  $\Phi = \bigcap_{p=1}^{\infty} \Phi_p$  e que  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  seja uma sequência de Cauchy em  $\Phi$ . Por definição  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  é uma sequência de Cauchy em cada  $\Phi_p$ ; logo,  $\varphi_n \rightarrow \varphi_{i(p)} \in \Phi_p$ . Existe um elemento  $\varphi$  tal que  $\varphi_{i(p)} = \varphi$  para cada  $p$ . Então  $\varphi \in \bigcap_{p=1}^{\infty} \Phi_p = \Phi$ . Para cada  $p$ ,  $\|\varphi_n - \varphi\|_p \rightarrow 0$  e, assim,  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  em  $\Phi$ . Logo,  $\Phi$  é completo. ■

O problema de estudar distribuições pode ser encarado como o problema de estudar *funcionais lineares contínuos* atuando sobre certos espaços básicos. Definiremos funcionais lineares contínuos sobre espaços lineares normados contáveis.

**Definição 10:** Seja  $\Phi$  um espaço linear normado contável. Um funcional linear sobre  $\Phi$  é um mapeamento  $f : \varphi \mapsto f(\varphi)$  se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Para qualquer  $\varphi_1, \varphi_2$  e números  $\alpha$  e  $\beta$ , temos

$$f(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha f(\varphi_1) + \beta f(\varphi_2), \quad (\text{linearidade}) ,$$

em particular  $f(0) = 0$ ,

(ii) Para continuidade do funcional linear  $f$ , é necessário e suficiente que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\varphi_n) = 0$  se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 0$ .

Vimos que a bola aberta  $\|\varphi\|_p < \varepsilon$  (veja a eq.(3.3)) define uma base da vizinhança de zero em um espaço linear normado contável  $\Phi$ . Porém, a limitação de um funcional sobre tal vizinhança de zero é equivalente à sua limitação relativa à norma  $\|\cdot\|_p$ , isto é,

$$|f(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_p . \quad (3.5)$$

Portanto, todo funcional linear contínuo  $f$  sobre um espaço normado contável  $\Phi$  é limitado por alguma norma  $\|\cdot\|_p$ . O menor valor de  $p$  para qual (3.5) é válido é chamado a *ordem* de  $f$ .

Considere que ao invés de uma norma, temos uma família de normas  $\{\|\varphi\|_\alpha\}_{\alpha \in A}$  onde  $A$  representa um conjunto de índices. Relaxando a condição (ii) acima, suponha que  $\|\varphi\|_\alpha = 0$  para todo  $\alpha \in A$ , então,  $\varphi = 0$ .

**Definição 11:** Uma semi-norma sobre  $\Phi$  satisfaz as condições:

- (i)  $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$  para todo  $\varphi, \psi \in \Phi$ ,
- (ii)  $\|\varphi\|_\alpha = 0$  para todo  $\alpha \in A$  implica que  $\varphi = 0$ . Neste caso a família de semi-normas é dita como *separando pontos*,
- (iii)  $\|\alpha\varphi\| = |\alpha| \|\varphi\|$  para todo  $\varphi \in \Phi$  e  $\alpha \in \mathbf{R}$  (ou  $\mathbf{C}$ ).

**Proposição 2:** Uma métrica pode ser definida sobre um espaço vetorial semi-normado por:

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{2^\alpha} \frac{\|\varphi - \psi\|_\alpha}{1 + \|\varphi - \psi\|_\alpha} . \quad (3.6)$$

A prova pode ser encontrada em [21] – pg. 21-23.

### 3.2 Funções de Decrescimento Rápido e as Distribuições Temperadas

Sendo forçados a abandonar o conceito de um campo,  $\varphi(x)$ , como uma função com valores em operadores em cada ponto do espaço de Minkowisk, assumimos  $\varphi(x)$  como uma distribuição com valores em operadores atuando sobre um espaço de funções testes apropriados que, foi escolhido como sendo o espaço  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ . Daremos, agora, uma motivação física para essa escolha.

Como certas propriedades dos campos são formuladas no espaço dos momenta – *condição espectral* – a transformada de Fourier das funções teste,  $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \mapsto \hat{f}(k)$ , deve exibir as mesmas propriedades de suavidade; em outras palavras  $\hat{f}(k)$  deve novamente ser de classe  $C^\infty$  e desaparecer junto com todas as suas derivadas mais rápido que qualquer potência  $\frac{1}{|k|}$ , quando  $k \rightarrow \infty$ .

Por exemplo, poderíamos ter escolhido o espaço das funções teste que são infinitamente diferenciáveis e que desaparecem identicamente fora de um domínio  $\Omega$  ( $\Omega$  sendo um subconjunto compacto de  $\mathbf{R}^n$ ). O espaço de todas estas funções é denotado por  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ . O dual  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  de  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ , é o espaço de todos os funcionais lineares sobre  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ . Contudo, na tentativa de definir a transformada de Fourier de  $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$  por

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} d^n x f(x) e^{-ikx} , \quad (3.7)$$

com  $x$  uma variável real, nos deparamos com um problema;  $e^{-ikx}$  não é uma função teste em  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ , de maneira que a ação de  $f(x)$  sobre  $e^{-ikx}$  não está definida. Além disto, se exigirmos que  $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ , então,  $\hat{\psi}(k) \notin \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  – a não ser que  $\psi \equiv 0$ . De fato, como  $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ , o suporte de  $\psi$  esta contido em algum intervalo finito  $[a, b]$ , de maneira que

$$\hat{\psi}(k) = \int_a^b d^n x \psi(x) e^{-ikx} . \quad (3.8)$$

O lado direito de (3.8) é uma função analítica para todos os valores de  $k$ ; consequentemente, ela não pode desaparecer fora de qualquer intervalo, sem desaparecer identicamente. Assim,  $\hat{\psi}(k) \notin \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ .

Por outro lado, como será demonstrado no teorema 2 abaixo, para funções  $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  temos que  $\hat{f}(k) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ . Essa classe de funções é muito maior que a classe de funções  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  que desaparecem identicamente fora de um intervalo finito. A classe de funções  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  meramente decrescem rapidamente no infinito. Em outras palavras,  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ .

**Teorema 2:** O conjunto de funções teste de  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  é denso em  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ .

*Prova:* Seja  $f(x)$  uma função em  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x_i| \leq 1 \text{ para } i = 1, \dots, n \\ 0 & \text{se } |x_i| > 1 \text{ para } i = 1, \dots, n \end{cases} .$$

Escreva  $f_k(x) = f\left(\frac{x}{k}\right)$  com  $k = 1, 2, \dots$ ; então, se  $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ , a função  $\varphi(x) f_k(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ . Falta mostrar que a sequência  $\{\varphi(x) f_k(x)\}$  converge para  $\varphi(x)$ . Para isso, observe que

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x_i| \leq k \text{ para } i = 1, \dots, n \\ 0 & \text{se } |x_i| > k \text{ para } i = 1, \dots, n \end{cases} ,$$

com isso  $\varphi(x) f_k(x) \rightarrow \varphi(x)$  quando  $k \rightarrow \infty$ . ■

**Definição 12:** O espaço de Schwartz, é o espaço de funções infinitamente diferenciáveis decrescendo, bem como suas derivadas, mais rápido do que qualquer potência de  $\frac{1}{|x|}$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ , com  $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ . Em outras palavras, para funções  $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ , com  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , todos os produtos da forma

$$|x^\alpha D^\beta f(x)| \quad \forall \alpha \leq m, \beta \leq n , \tag{3.9}$$

são limitados com  $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_+$ .

Aqui, estamos usando a notação de Schwartz de multi índices onde

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} ,$$

$$D^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_m^{\beta_m}} , \quad |\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_m ,$$

entendendo-se que, se qualquer componente de  $x$  é zero a diferenciação com respeito à esta variável é omitida. Como exemplo, se  $n = 3$  e  $x = (2, 0, 5)$ , então  $D^\beta = \frac{\partial^7}{\partial x_1^2 \partial x_3^5}$ .

Para cada  $\alpha \geq 0$ , seja  $\mathcal{S}_\alpha(\mathbf{R}^n)$  o espaço das funções  $\alpha$  vezes diferenciáveis continuamente. Definimos um sistema de semi-normas sobre  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  por

$$\|f\|_\alpha = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \sup_{|\beta| \leq \alpha} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty . \tag{3.10}$$

O espaço  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  é definido como a interseção de todos os espaços  $\mathcal{S}_\alpha(\mathbf{R}^n)$ , isto é:

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) = \bigcap_{\alpha=0}^{\infty} \mathcal{S}_\alpha(\mathbf{R}^n) . \tag{3.11}$$

Uma seqüência de Cauchy,  $f_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ , com respeito à todas as semi-normas (3.10) converge se:

$$\|f_m - f_n\|_\alpha = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \sup_{|\beta| \leq \alpha} |x^\alpha (D^\beta f_m(x) - D^\beta f_n(x))| < \varepsilon . \quad (3.12)$$

para cada  $\varepsilon > 0$  e  $n_0 \in \mathbf{N}$  tal que se  $m, n > n_0$ .

Em  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  a seguinte base contável da vizinhança de zero, é introduzida:

$$U_{p,\varepsilon}(0) = \left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n); \|\varphi\|_p < \frac{1}{\varepsilon} \text{ com } p, \varepsilon = 1, 2, 3, \dots \right\} . \quad (3.13)$$

O espaço vetorial linear  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  é completo e metrizável, com métrica dada por (3.6).

**Definição 13:** O espaço dual de  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ , denotado por  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ , consiste de todos funcionais lineares tal que  $\Phi : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{C}$ , com  $f \mapsto \Phi(f)$ . Os elementos de  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$  são chamados distribuições temperadas. A coleção de todas as distribuições temperadas forma um espaço vetorial sobre os complexos.

Uma distribuição  $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$  é um funcional linear contínuo sobre  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ , isto é, para cada  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  temos

$$T(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha T(f_1) + \beta T(f_2) , \quad \alpha, \beta \in \mathbf{C} \quad (3.14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |T(f_n) - T(f)| = 0 , \quad (3.15)$$

para toda seqüência  $\{f_n\}$  em  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ .

Uma operação  $\mathcal{O}$  sobre distribuições será muitas vezes definidas pela relação da forma

$$(\mathcal{O}T)(f) = T(\mathcal{O}'f) , \quad (3.16)$$

onde  $\mathcal{O}'$  é uma operação sobre a função teste  $f$ .

**Operação 1:** Seja  $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ , a derivada no sentido das distribuições,  $D^\beta T$ , com  $\beta \in \mathbf{Z}_+$ , é definida por:

$$(D^\beta T)(f) = (-1)^{|\beta|} T(D^\beta f) , \quad (3.17)$$

os passos intermediários sendo um resultado de integrações por partes combinado com o fato que  $f(x) \equiv 0$  fora de um intervalo limitado. Em notação simbólica

$$\int dx (D^\beta T)(x) f(x) = (-1)^{|\beta|} \int dx T(x) \left( \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_m^{\beta_m}} f \right) (x) ,$$

Assim qualquer distribuição temperada tem derivada, que são também distribuições.

**Exemplo 2:** Considere a função degrau de Heaviside

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x > 0) \\ 0 & \text{se } (x < 0) \end{cases} , \quad (3.18)$$

que é localmente integrável. Sua derivada como uma distribuição é dada por:

$$\theta'(f) = -\theta(f') = - \int_0^\infty dx f'(x) = f(0) ,$$

de maneira que  $\theta' = \delta$ , no sentido das distribuições.

**Operação 2:** (Translação) Seja  $U_a : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ , com  $(U_a f)(x) = f(x - a)$ . Então  $\int dx (U_a f)(x) g(x) = \int dx f(x) (U_a g)(x)$  se  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ . Assim,  $U_a T$  é definida para  $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$  por

$$(U_a T)(f) = T(U_{-a} f) \quad , \quad (3.19)$$

ou simbolicamente

$$\int dx T(x - a) f(x) = \int dx T(x) f(x + a) \quad .$$

**Operação 3:** O mapeamento linear  $f(x) \rightarrow f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ , com  $0 < \lambda < \infty$ , de  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ . Define-se o mapeamento dual  $T(x) \rightarrow T_\lambda(x)$ ,  $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ , por

$$T_\lambda(f) = \lambda^n T(f_\lambda) \quad , \quad (3.20)$$

ou simbolicamente

$$\int dx T(x) f(\lambda x) = \lambda^n \int dx T(\lambda^{-1} x) f(x) \quad ,$$

com a mudança de variável  $\lambda x = x'$  sendo realizada. Assim, temos

$$T_\lambda(x_1, \dots, x_n) \equiv T(\lambda^{-1} x_1, \dots, \lambda^{-1} x_n) \quad . \quad (3.21)$$

Uma das mais importantes operações envolvendo distribuições é o produto de duas distribuições. Esse produto geralmente é mal-definido, como é o caso do quadrado da função delta,  $\delta^2(x)$ . Portanto, não podemos definir o produto de duas distribuições,  $T$  e  $S$ , arbitrariamente. O problema não está relacionado em como definir um único produto  $TS$ , porém como definir um produto com razoáveis propriedades para uma classe ampla de  $T$  e  $S$ .

*Nota:* Veremos adiante que o programa da renormalização em TQC pode ser encarado como a tentativa de definir tais produtos.

Considere o caso em que  $S$  é uma função infinitamente diferenciável, enquanto  $T$  pode ser uma distribuição arbitrária em  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ . Seja  $O_M^n$  o conjunto de funções infinitamente diferenciáveis sobre  $\mathbf{R}^n$  que, junto com suas derivadas são polinomialmente limitadas, isto é,  $f \in O_M^n$  significa que  $f$  é de classe  $C^\infty$ , e para cada  $\alpha \in \mathbf{Z}_+$  existe um  $N(\alpha)$  e um  $C(\alpha)$  com

$$|(D^\alpha f)(x)| \leq C(\alpha) |x|^{N(\alpha)} \quad . \quad (3.22)$$

Então,  $O_M^n \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ .

**Operação 4:** Seja  $w \in O_M^n$  e  $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ . Definimos  $wT \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$  por

$$(wT)(f) = T(wf) \quad . \quad (3.23)$$

Note que  $wf \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  se  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  e o mapeamento  $f \mapsto wf$  é contínuo e mapea  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ .

**Teorema 3:** (Transformada de Fourier) Se  $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ , então  $\hat{f}(k) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$

*Prova:* A transformada de Fourier de  $f(x)$  é definida por

$$\hat{f}(k) = \int d^n x e^{-ikx} f(x) . \quad (3.24)$$

Como  $f(x) \rightarrow 0$  mais rápido que qualquer potência de  $\frac{1}{|x|}$  quando  $x \rightarrow \infty$ ,  $\hat{f}(k)$  tem derivadas de todas às ordens. Derivando  $\alpha$  vezes a eq.(3.24) sob o sinal da integral, temos;

$$D^\alpha \hat{f}(k) = (-i)^{|\alpha|} \int d^n x e^{-ikx} x^\alpha f(x) , \quad (3.25)$$

Integrando por partes  $\beta$  vezes (3.25), obtemos

$$(i)^{|\beta|} k^\beta D^\alpha \hat{f}(k) = (-i)^{|\alpha|} \int d^n x e^{-ikx} D^\beta (x^\alpha f(x)) , \quad (3.26)$$

para qualquer  $\alpha$  e  $\beta$ . A integral acima é limitada por (3.9), segue que  $k^\beta D^\alpha \hat{f}(k)$  é limitada. Portanto a transformada de Fourier mapea  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  nele próprio. ■

**Definição 14:** Se  $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ , dizemos que  $x \in \mathbf{R}^n$  é um *ponto regular* de  $T$  se, e somente se, existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  e uma função  $g(x)$ , que é  $C^\infty$  sobre  $U$ , tal que  $T(f) = \int dx g(x) f(x)$  para todo  $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  com  $\text{supp } f \subset U$ . O complemento dos pontos regulares de  $T$  são chamados *suporte singular* de  $T$ . Em outra palavras, uma distribuição é regular se a função  $g(x)$  for localmente integrável. Todas as outras distribuições são singulares.

Como já dissemos, para distribuições não podemos associar valores em pontos isolados. Não podemos, por exemplo, dizer que uma distribuição  $T$  é igual a zero em  $x_0$ . Contudo, podemos dizer que uma distribuição é igual a zero em uma vizinhança  $U$  de  $x_0$ . Isso significa que, para cada  $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  com suporte em  $U$ , temos  $T(f) = 0$ . Por exemplo, a distribuição  $T$  correspondendo à uma função ordinária  $g(x)$  desaparecerá na vizinhança  $U$  de  $x_0$  se a própria  $g(x)$  desaparece, em quase toda parte, nessa vizinhança. A função singular  $\delta(x - x_0)$  desaparece na vizinhança de todo ponto  $x \neq x_0$ .

Podemos dizer que, a distribuição  $T$  desaparece sobre algum conjunto aberto  $\Omega$  se ela desaparece na vizinhança de cada ponto desse conjunto.

Se  $T$  é uma distribuição que *não* desaparece na vizinhança de  $x_0$ , então  $x_0$  é chamado ponto *essencial* do funcional  $T$ . Assim, o ponto  $x_0 = x$  é o ponto essencial do funcional  $\delta(x - x_0)$ . O conjunto de todos os pontos essenciais de uma distribuição é chamado o seu suporte. O termo essencial é justificado pela seguinte propriedade: Se  $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  é uma função que desaparece na vizinhança do suporte do funcional  $T$ , então  $T(f) = 0$ .

**Definição 15:** Seja  $\Omega$  um conjunto aberto de  $\mathbf{R}^n$ . Dizemos que  $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$  desaparece em  $\Omega$  se  $T(f) = 0$  quando  $f(x)$  tem suporte em  $\Omega$ , isto é, quando  $f(x)$  desaparece fora de  $\Omega$ . suporte de  $T$ ,  $\text{supp } T$ , é o complemento do maior conjunto sobre qual  $T$  desaparece. Se  $T - S$  desaparece sobre  $\Omega$ , dizemos que  $T = S$  sobre  $\Omega$ .

Segue dessa definição que, uma distribuição  $T$  é determinada univocamente por suas propriedades *locais*.

Um dos problemas mais importantes na teoria da distribuições é o seguinte: Seja  $f(x)$  uma função não localmente integrável, por exemplo a função  $\frac{1}{x}$ . Então, nos perguntamos se não existe um funcional  $T$  que coincide com  $f(x)$  em todos os pontos nos quais  $f(x)$  é localmente integrável. Além disso, se é possível estabelecer a correspondência entre  $T$  e  $f(x)$  de uma forma que preserve as operações de adição e multiplicação por uma função, e a diferenciação.

Veremos mais adiante, no exemplo 3, que a resposta à essa questão é importante em teoria quântica de campos. O funcional  $T$  é chamado a renormalização de  $f(x)$ .

**Definição 16:** (Função de crescimento lento) Uma função  $f(x)$  é dita de crescimento lento se ela é localmente integrável, isto é,  $\int_1^I dx |f(x)|$  é finita para cada intervalo limitado,  $I$ , e se existe algum  $C > 0$ ,  $N \in \mathbf{Z}_+$  e  $|x|$  suficientemente grande tal que

$$|f(x)| < C |x|^N . \quad (3.27)$$

Assim, uma função tem crescimento lento se ela cresce mais lentamente que qualquer polinômio quando  $|x| \rightarrow \infty$ .

**Teorema 4:** (Teorema de regularidade para distribuições) Seja  $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ . Então  $T$  pode ser escrita como a derivada de ordem finita de uma função contínua de crescimento lento no infinito,  $T(x) = D^\beta g(x)$ , para  $\beta \in \mathbf{Z}_+$

$$T(f) = (-1)^\beta \int dx g(x) (D^\beta f)(x) . \quad (3.28)$$

*Prova:* Por hipótese a integral converge absolutamente; além disso o funcional é linear. Devemos prova sua continuidade. Seja  $f_n \rightarrow 0$  em  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ , então

$$\left| \int dx g(x) (D^\beta f_n)(x) \right| = \left| \int dx \frac{g(x)}{x^\alpha} x^\alpha (D^\beta f_n)(x) \right| .$$

Para  $\alpha$  suficientemente grande,  $\frac{g(x)}{x^\alpha}$  é absolutamente integrável de  $-\infty$  a  $\infty$ , visto que  $g(x)$  é uma função de crescimento lento. Com tal valor de  $\alpha$ , a integral sobre o lado direito é dominada por

$$\left| \int dx g(x) (D^\beta f_n)(x) \right| \leq \|f_n\|_\alpha \left| \int dx \frac{g(x)}{x^\alpha} \right| .$$

Como  $f_n \rightarrow 0$  em  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ , então  $\|f_n\|_\alpha \rightarrow 0$ . Consequentemente,  $T(f_n) \rightarrow 0$  quando  $f_n \rightarrow 0$  em  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ , e  $T(f)$  é uma distribuição de crescimento lento sobre  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ . ■

**Lema 1:** Suponha que  $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$  e que  $\eta(x)$  seja uma função infinitamente diferenciável que é igual a 1 sobre um conjunto aberto contendo o  $\text{supp } T$ . Então,  $T = \eta T$ .

*Prova:* Seja  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ . Então, a função  $(1 - \eta)\varphi$  é zero sobre o conjunto aberto contendo o  $\text{supp } T$ . Portanto,

$$T((1 - \eta)\varphi) = (T - \eta T)(\varphi) = 0 .$$

Como isso é verdade para  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ , segue que  $T = \eta T$ . ■

**Teorema 5:** Seja  $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$  uma distribuição que é concentrada no ponto  $x_0$ , isto é, o  $\text{supp } T = \{x_0\}$ . Então  $T$  é uma combinação linear de derivadas da função delta de Dirac,

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \delta(x - x_0) , \quad (3.29)$$

para  $m \in \mathbf{Z}_+$  e  $c_\alpha$  apropriados.

*Prova:* Sendo  $T$  um funcional linear contínuo sobre  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ , existe um constante positiva  $C$  tal que

$$|T(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_\alpha ,$$

onde

$$\|\varphi\|_\alpha = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \sup_{|\beta| \leq \alpha} |x^\beta D^\beta \varphi(x)| .$$

De acordo com o teorema de Taylor, todo  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  pode ser representado por

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha \varphi(x_0) + \chi(x) ,$$

onde a função  $\chi(x)$ , o resto da aproximação por polinômios de Taylor de grau  $m$  de  $\varphi(x)$  centrada em  $x_0$ , tem derivadas até a ordem  $m$  igual a zero em  $x = x_0$ .

Multiplicando essa decomposição por uma função  $\eta(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$  que é igual a 1 na vizinhança aberta de  $x_0$ , tal que  $\text{supp } \eta \subset \{x; |x| \leq 1\}$ , obtemos uma nova decomposição

$$\eta(x) \varphi(x) = \eta(x) \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha \varphi(x_0) + \eta(x) \chi(x) .$$

Pelo lema 1 temos que,  $T(\eta\varphi) = T(\varphi)$ . Para cada  $k > 0$ , escrevemos  $\eta_k(x) = \eta(kx)$  e  $\psi_k(x) = \eta(kx) \chi(x)$ , onde  $\text{supp } \psi_k(x) \subset \{x; |x| \leq \frac{1}{k}\}$ . Então,

$$|T(\psi_k)| \leq C \sup_{|x| \leq \frac{1}{k}} \sup_{|\beta| \leq \alpha} |x^\beta D^\beta \psi_k(x)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty .$$

Por outro lado, para cada  $k$ ,  $T\eta_k = T$ , novamente usando o lema 1, uma vez que  $\eta_k = 1$  sobre a vizinhança aberta  $x_0$ . Portanto,

$$T(\psi_k) = T(\eta_k \chi) = T\eta_k(\chi) = T(\chi) ,$$

que é independente de  $k$ . Assim,  $T(\psi_k) = 0 \Rightarrow T(\chi) = 0$ . Conseqüentemente,

$$T(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \left( T, \frac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} \right) D^\alpha \varphi(x_0) .$$

Escrevendo  $c_\alpha = (-1)^\alpha \left( T, \frac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} \right)$ , temos

$$T(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^\alpha c_\alpha D^\alpha \varphi(x_0) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha (D^\alpha \delta(x - x_0), \varphi(x)) .$$



Logo, o teorema está provado. ■

Ao tratarmos com o espaço de Schwartz,  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ , muitas vezes necessitamos construir um funcional linear que atue sobre ele com certas propriedades. Isto pode ser feito em duas etapas: primeiro define-se um funcional linear sobre um subespaço do espaço  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ , onde é fácil verificar que as propriedades desejadas são satisfeitas; segundo, apela-se para um teorema geral que afirma que, qualquer funcional linear pode ser estendido para todo o espaço se as propriedades desejadas permanecerem satisfeitas. A ferramenta importante para a realização da segunda etapa é o teorema de Hahn-Banach.

**Teorema 6:** (Teorema de Hahn-Banach para espaço  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ ) Seja  $\Sigma$  um subespaço do espaço  $\Phi$  e  $t$  um funcional linear sobre  $\Sigma$  tal que  $|t(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_\alpha$ , para cada  $\varphi \in \Sigma$ , onde  $C$  é uma constante. Então, existe um funcional linear  $T$  definido sobre  $\Phi$  tal que  $|T(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_\alpha$ , para cada  $\varphi \in \Phi$ , com  $T = t$  para todo  $\varphi \in \Sigma$ .

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \xrightarrow{T} & \mathbf{C} \quad [|T(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_\alpha] \\ | & & \\ \Sigma & \xrightarrow{t} & \mathbf{C} \quad [|t(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_\alpha] \end{array}$$

Vamos encerrar nossa rápida excursão à teoria das distribuições temperadas, dando um exemplo importante que ilustra bem o método de renormalização de Epstein-Glaser.

**Exemplo 3:** (A renormalização da função  $\frac{1}{x}$ ) Considere a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x} \varphi(x) , \tag{3.30}$$

onde  $\varphi(x)$  é uma função teste de  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ . Essa integral, em geral, não convergirá por causa da singularidade de  $\frac{1}{x}$  na origem; portanto, *não* definirá uma distribuição. Contudo, se assumirmos que  $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R} \setminus 0)$ , isto é, que  $\varphi(x)$  desaparece na vizinhança de  $x = 0$ , então, a integral fará sentido. Assim,  $\frac{1}{x}$  define um funcional linear sobre  $\mathcal{S}(\mathbf{R} \setminus 0)$  que é contínuo. Pelo teorema de Hahn-Banach, esse funcional sobre  $\mathcal{S}(\mathbf{R} \setminus 0)$  tem uma extensão para todo  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ , que chamaremos a "renormalização de  $\frac{1}{x}$ ".

Como exemplo, considere o funcional particular  $T$

$$T(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} dx \frac{1}{x} \varphi(x) + \int_{\varepsilon}^{\infty} dx \frac{1}{x} \varphi(x) \right] , \tag{3.31}$$

que é uma renormalização para a integral (3.30). Esse funcional é contínuo sobre  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  e coincide com  $\frac{1}{x}$  sobre  $\mathcal{S}(\mathbf{R} \setminus 0)$ . Logo,  $\frac{1}{x}$  é contínuo, como afirmamos. Assim, é possível dar uma interpretação para a integral (3.30) para  $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$  tal que  $\varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x} \varphi(x)$  define uma distribuição temperada. O funcional  $T$  difere do funcional original apenas na vizinhança do ponto  $x_0 = 0$ , isto é,  $\|x - x_0\| < \varepsilon$ .

**Proposição 3:** Se  $T$  é uma solução particular do problema da renormalização da integral (3.30), a solução geral  $S$  é dada por:

$$S = T + \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha D^\alpha \delta . \tag{3.32}$$

*Prova:*  $S$  sendo a solução mais geral que renormaliza a integral (3.30), essa deve ser um funcional contínuo sobre  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  e coincidir com  $\frac{1}{x}$  sobre  $\mathcal{S}(\mathbf{R}\setminus 0)$ , pelo teorema de Hahn-Banach. Como  $T$  também coincide com  $\frac{1}{x}$  sobre  $\mathcal{S}(\mathbf{R}\setminus 0)$ , então,  $S - T$  desaparece sobre  $\mathcal{S}(\mathbf{R}\setminus 0)$  e define um funcional concentrado em  $x = 0$ . Pelo teorema 5, esse funcional é da forma  $\sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha D^\alpha \delta$ .

Logo, para  $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}\setminus 0)$

$$\begin{aligned} \left( T + \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha D^\alpha \delta \right) (\varphi) &= T(\varphi) + \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha D^\alpha \delta(\varphi) \\ &= T(\varphi) + \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^\alpha C_\alpha \delta(D^\alpha \varphi) \\ &= T(\varphi) . \end{aligned}$$

■

Assim, a solução geral para a renormalização de  $\frac{1}{x}$  envolve um número de constantes livres que devem ser fixadas por condições extras.

Epstein-Glaser trataram a renormalização de diagramas de Feynman no espaço das configurações no espírito desse exemplo. As constantes de renormalização, como por exemplo, a massa e a carga renormalizadas são fixadas por condições físicas adicionais.

## 4 A Teoria da Renormalização: O Esquema de Epstein-Glaser

Por uma questão de simplicidade, consideraremos a teoria da renormalização de um campo escalar neutro. Um tratamento completo para a QED, usando o mesmo método, pode ser encontrado em [4].

Como somente os campos *smeared*,  $\Phi(f) = \int d^4x \varphi(x) f(x)$ , são operadores bem definidos em  $\mathcal{F}$ , temos que reformular algumas propriedades para  $\varphi(x)$  derivadas nas seções anteriores. Isso é facilmente realizado integrando-se formalmente as relações derivadas para  $\varphi(x)$  com funções teste  $f(x)$ .

Para  $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$

$$\hat{f}(k) = \int d^4x f(x) e^{-ikx} ,$$

é sua transformada de Fourier.

A função  $\hat{f}(k) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$  e sua restrição ao hiperbolóide  $k^0 = \pm \omega(\vec{k}) = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$  é uma função em  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^3)$ . Disso segue

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger(f) &= \int d^4x \varphi^\dagger(x) f(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4x \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} a^\dagger(k) f(x) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} a^\dagger(k) \hat{f}(-k) . \end{aligned} \quad (4.1)$$

Da mesma forma, para  $\Phi^-(f)$  temos

$$\Phi^-(f) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} a(k) \hat{f}(k) . \quad (4.2)$$

Um vetor  $\phi^{(n)} \in \mathcal{F}^{(S)}$  para qual somente um número finito de componentes é diferente de zero, é chamado um *vetor de partícula finita*. Denotaremos o conjunto desses vetores por  $D_0$ . O vácuo  $\phi^{(0)} = (1, 0, 0, \dots) \in D_0$ , e  $\phi^{(n)} = \Phi(f_1) \dots \Phi(f_n) \phi^{(0)}$ . O conjunto  $D_0$  é denso em  $\mathcal{F}^{(S)}$ ; essa propriedade assegura que o espaço de Fock não é grande o bastante, ou colocado de outra forma, que a teoria pode ser descrita em termos de um único campo  $\varphi(x)$ .

Se  $\phi^{(n)} \in D_0$ , onde  $\phi^{(n)}(k_1, \dots, k_n)$  é considerado como uma função de  $\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n \in \mathbf{R}^3$ , então,

$$(\Phi^\dagger(f) \phi^{(n)})(k_1, \dots, k_n) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} \hat{f}(-k) (a^\dagger(k) \phi^{(n)})(k_1, \dots, k_n) , \quad (4.3)$$

e

$$(\Phi^-(f) \phi^{(n)})(k_1, \dots, k_n) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} \hat{f}(k) (a(k) \phi^{(n)})(k_1, \dots, k_n) . \quad (4.4)$$

Definindo

$$(a^\dagger(k) \phi^{(n)})(k_1, \dots, k_n) = \sqrt{n+1} \phi^{(n+1)}(k, k_1, \dots, k_n) , \quad (4.5)$$

e

$$(a(k) \phi^{(n)})(k_1, \dots, k_n) = \sqrt{n} \sum_{i=1}^n \delta(k - k_i) \phi^{(n-1)}(k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n) , \quad (4.6)$$

obtemos que

$$(\Phi^\dagger(f) \phi^{(n)})(k_1, \dots, k_n) = \frac{\sqrt{n+1}}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} \left. \frac{\hat{f}(-k)}{2\omega} \right|_{k^0=\omega(\vec{k})} \phi^{(n+1)}(k, k_1, \dots, k_n) , \quad (4.7)$$

e

$$(\Phi^-(f) \phi^{(n)})(k_1, \dots, k_n) = \frac{\sqrt{n}}{(2\pi)^3} \sum_{i=1}^n \left. \frac{\hat{f}(k)}{2\omega} \right|_{k_i^0=\omega(\vec{k}_i)} \phi^{(n-1)}(k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n) . \quad (4.8)$$

O comutador  $[\Phi^\dagger(f), \Phi^-(g)]$  pode ser calculado se  $f(x), g(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$ :

$$\begin{aligned} [\Phi^-(f), \Phi^\dagger(g)] &= \int d^4 x d^4 y [\varphi^-(x) \varphi^\dagger(y)] f(x) g(y) \\ &= \int d^4 x d^4 y \left\{ \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3 \vec{k}}{2\omega} \frac{d^3 \vec{k}'}{2\omega'} [a(k), a^\dagger(k')] e^{-ik(x-y)} \right\} f(x) g(y) \\ &= \int d^4 x d^4 y \left\{ \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3 \vec{k}}{2\omega} \frac{d^3 \vec{k}'}{2\omega'} (2\pi)^3 2\omega \delta^3(k - k') e^{-ik(x-y)} \right\} f(x) g(y) \\ &= \int d^4 x d^4 y \left\{ \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{k}}{2\omega} e^{-ik(x-y)} \right\} f(x) g(y) \\ &= \int d^4 x d^4 y \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) e^{-ik(x-y)} \right\} f(x) g(y) \\ &= \frac{1}{i} (\Delta^\dagger(x-y; m^2), f(x) g(y)) , \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde

$$\Delta^\dagger(x-y; m^2) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 k \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) e^{-ik(x-y)} , \quad (4.10)$$

é uma distribuição em  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^4)$ .

Da mesma forma é fácil mostrar, usando (2.18), que  $[\Phi^\dagger(f), \Phi^\dagger(g)] = [\Phi^-(f), \Phi^-(g)] = 0$ .

Como resultado de (4.9), o comutador  $[\Phi(f), \Phi(g)]$  é dado por:

$$\begin{aligned} [\Phi(f), \Phi(g)] &= \frac{1}{i} ((\Delta^\dagger(x-y; m^2) - \Delta^\dagger(y-x; m^2)), f(x) g(y)) \\ &= \frac{1}{i} (\Delta(x-y; m^2), f(x) g(y)) , \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde

$$\Delta(x-y; m^2) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - m^2) \varepsilon(k^0) e^{-ik(x-y)} , \quad (4.12)$$

com  $\varepsilon(k^0) = \theta(k^0) - \theta(-k^0)$  sendo a função sinal.

Note que, devido à propriedade espectral do operador de Casimir do grupo de Poincaré, o  $\text{supp } \Delta(x-y; m^2) \subset \bar{V}_+ \cup (-\bar{V}_+)$ , onde  $\bar{V}_+ = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 \geq 0, x^0 \geq 0\}$  é o cone-de-luz do futuro, seu interior sendo representado por  $V_+$ .

Agora, suponha que o  $\text{supp } f$  e  $\text{supp } g$  tenham uma separação do tipo-espaço, isto é,  $(x-y)^2 < 0$  para todo  $x \in \text{supp } f$  e  $y \in \text{supp } g$ . Então

$$[\Phi(f), \Phi(g)] = 0 . \quad (4.13)$$

As equações (4.11) e (4.13) podem ser escritas simbolicamente como

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \frac{1}{i} \Delta(x-y; m^2) , \quad [\varphi(x), \varphi(y)] = 0 \quad \text{se } (x-y)^2 < 0 . \quad (4.14)$$

- A Função de 2-pontos

Seja  $\phi^{(0)} = (1, 0, 0, \dots) \in D_0$  o vácuo. Um cálculo direto usando (4.3, 4.4) e que  $\Phi(f) = \Phi^\dagger(f) + \Phi^-(f)$ , mostra que, se  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$

$$\begin{aligned} (\phi^{(0)}, \Phi(f) \Phi(g) \phi^{(0)}) &= (\phi^{(0)}, \Phi^-(f) \Phi^\dagger(g) \phi^{(0)}) \\ &= [\Phi^-(f), \Phi^\dagger(g)] = \frac{1}{i} (\Delta^\dagger(x-y; m^2), f(x)g(y)) \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde  $\Delta^\dagger(x-y; m^2)$  é a distribuição em  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^4)$  definida em (4.12). Portanto, no sentido de distribuições, podemos escrever

$$w_2(x, y) = (\phi^{(0)}, \varphi(x) \varphi(y) \phi^{(0)}) = \frac{1}{i} \Delta^\dagger(x-y; m^2) . \quad (4.16)$$

A distribuição  $w_2(x, y)$  é chamada a função de 2-pontos do campo escalar de massa  $m$ .

A distribuição  $w_n(x_1, \dots, x_n) = (\phi^{(0)}, \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \phi^{(0)})$  também pode ser considerada. Essa distribuição é chamada a função de  $n$ -pontos ou distribuição de Wightman. Pode ser verificado que, se  $n$  é ímpar, então,  $w_n(x_1, \dots, x_n) = 0$ , e se  $n$  é par que

$$w_n(x_1, \dots, x_n) = \sum w_2(x_{i_1}, x_{i_2}) w_2(x_{i_3}, x_{i_4}) \dots w_2(x_{i_{n-1}}, x_{i_n}) .$$

**Lema 2:** Seja  $w_n(x_1, \dots, x_n)$  a distribuição de Wightman de  $n$ -pontos. Então, para cada  $n \geq 1$ ,  $w_n$  são valores limites de funções analíticas de  $4n$  variáveis complexas.

*Prova:* O vácuo é invariante por translação  $U(a, \mathbf{1}) \phi^{(0)} = \phi^{(0)}$ . Devido a covariância sob translação dos campos, temos

$$\varphi(x) = U(x, \mathbf{1}) \varphi(0) U^{-1}(x, \mathbf{1}) .$$

Expressando  $U(x, \mathbf{1}) = e^{iP_\mu x^\mu}$  podemos escrever

$$\begin{aligned} w_n(x_1, \dots, x_n) &= (\phi^{(0)}, \varphi(0) e^{iP(x_1-x_2)} \varphi(0) e^{iP(x_2-x_3)} \dots e^{iP(x_{n-1}-x_n)} \varphi(0) \phi^{(0)}) \\ &= W_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) , \end{aligned}$$

com  $\xi_i = x_i - x_{i+1}; i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Por uma transformada de Fourier

$$W_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{4n-4}} \int d^4 q_1 \dots d^4 q_{n-1} \hat{W}_n(q_1, \dots, q_{n-1}) e^{iq_k \xi^k}. \quad (4.17)$$

Pela transformada inversa

$$\begin{aligned} \hat{W}_n(q_1, \dots, q_{n-1}) &= \int d^4 \xi_1 \dots d^4 \xi_{n-1} W_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) e^{-iq_k \xi^k} \\ &= (2\pi)^{4n-4} \left( \phi^{(0)}, \varphi(0) \delta^4(P - q_1) \varphi(0) \delta^4(P - q_2) \dots \delta^4(P - q_{n-1}) \varphi(0) \phi^{(0)} \right), \end{aligned}$$

vemos que  $\hat{W}_n$  desaparece quando qualquer um dos  $q_k$  está fora do espectro de  $P$ . Portanto, seu espectro está confinado ao cone do futuro. Logo, o  $\text{supp } w_n(x_1, \dots, x_n) \subset \bar{V}_+$ , onde  $\bar{V}_+ = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 \geq 0, x^0 \geq 0\}$ .

Se tomamos 4-vetores complexos  $\xi_i = \lambda_i + i \eta_i$  ao invés de vetores reais, então, o integrando da transformada de Fourier torna-se

$$\hat{W}_n(q_1, \dots, q_{n-1}) e^{iq_k \lambda^k} e^{-q_k \eta^k}.$$

Com isso, se todos  $\eta_i$  são vetores tipo-tempo, a integral (4.17), bem como suas derivadas com respeito a  $\xi_i$ , convergirá porque  $\hat{W}_n$  é uma distribuição temperada e o fator  $e^{-q_k \eta^k}$  decresce rapidamente quando seu argumento vai para o infinito. Assim,  $W_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$  é uma função analítica de todos os seus argumentos, enquanto a parte imaginária de todos os  $\xi_i$  estiver no cone do futuro. ■

Como é bem conhecido [6], defini-se a "matriz- $S$ " como uma série formal na constante de acoplamento  $g$ , que no esquema de Epstein-Glaser é uma função teste fixada sobre o espaço-tempo. Como os campos são distribuições com valores em operadores, substituímos  $g$  por uma função  $g(x)$ , com valores no intervalo  $(0, 1)$ . Ela representa a interação que pode ser ligada e desligada. Nas regiões onde  $g(x) = 0$ , não há interação, naquelas regiões onde  $g(x) = 1$ , a interação é máxima, e para  $0 < g(x) < 1$ , a interação está parcialmente ligada. Além disso, assumimos que  $g(x)$  é diferente de zero somente em uma região finita do espaço-tempo. Isso significa que ela vai a zero rapidamente para  $x \rightarrow \pm\infty$ , ou seja,  $g \equiv g(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$  representa uma função teste do espaço de Schwartz tal que

$$S(g) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \prod_{i=1}^n dx_i T \prod_{i=1}^n \varphi(x_i) \prod_{i=1}^n g(x_i). \quad (4.18)$$

Eventualmente, a função teste  $g(x)$  deve ter seu valor fixado em todo o espaço-tempo, porém isso pode levar à problemas com divergências no infravermelho que nestas notas não serão consideradas.

Exigimos que  $S(g)$  satisfaça as seguintes condições:

(i)- *Condição Inicial*

$$S(0) = \mathbf{1};$$

(ii)- *Unitariedade*

$$S^*(g) S(g) = S(g) S^*(g) = \mathbf{1};$$

(iii)- *Invariância de Poincaré*

$$U(a, \Lambda) S(g(x)) U^{-1}(a, \Lambda) = S(g(\Lambda^{-1}(x - a))) ,$$

onde  $U(a, \Lambda)$  denota a representação do grupo de Poincaré atuando em  $\mathcal{F}$  ;

(iv)- *Causalidade*

Essa é a condição crucial no método de Epstein-Glaser. Para formular explicitamente a condição de causalidade, consideramos primeiro o caso quando a região  $G$  do espaço-tempo, onde  $g(x)$  é diferente de zero, pode ser dividida em duas partes  $G_1$  e  $G_2$ , tal que todo  $x \in G_1$  situa-se no passado com respeito à um certo instante  $t$ , enquanto todo  $y \in G_2$  situa-se no futuro com respeito a  $t$ . Nesse caso a função  $g(x)$  pode ser representada como a soma de duas funções

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) ,$$

com  $g_1(x)$  diferindo de zero somente na região  $G_1$ , enquanto  $g_2(x)$  difere de zero em  $G_2$ .

No tempo  $t$ , podemos definir um estado caracterizado pela amplitude  $\phi_t$  que, devido à causalidade, não deve ser influenciado por nenhum sinal vindo da região  $G_2$  e que pode ser representado por

$$\phi_t = S(g_1(x)) \phi_0 ,$$

onde  $S(g_1(x))$  é a matriz de espalhamento para o caso quando a interação na região  $G_1$  é ligada com uma intensidade  $g_1(x)$ .

O estado final  $\phi$  pode agora ser obtido de  $\phi_t$  com a ajuda do operador  $S(g_2(x))$  que descreve a interação na região  $G_2$  com intensidade  $g_2(x)$

$$\phi = S(g_2(x)) \phi_t .$$

Por outro lado sabemos que  $\phi$  pode ser obtido de  $\phi_0$  com a ajuda do operador  $S(g(x))$

$$\phi = S(g(x)) \phi_0 .$$

Comparando os argumentos acima obtemos a condição de causalidade

$$S(g_1(x) + g_2(x)) = S(g_2(x)) S(g_1(x)) \quad \text{se} \quad \text{supp } g_1 \cap \text{supp } (g_2 + \bar{V}_+) = \emptyset ,$$

onde  $\bar{V}_+ = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 \geq 0, x^0 \geq 0\}$  é o cone-de-luz do futuro e  $\text{supp } (g_2 + \bar{V}_+)$  o suporte da região causal de  $g_2$  (veja a Fig.2).

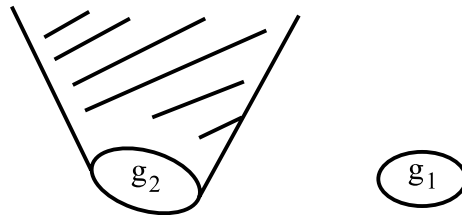


Fig. 2

No esquema de Epstein-Glaser os objetos a ser usados para construir a teoria são os produtos cronológicos

$$T \prod_{i=1}^n \varphi(x_i) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) , \quad (4.19)$$

que são distribuições temperadas com valores em operadores atuando sobre o espaço de Fock  $\mathcal{F}$ . Eles são, também, conhecidos como distribuições temperadas com valores em operadores de  $n$ -pontos, e são caracterizados pelas seguintes propriedades:

(P1)  $T(X) = T \prod_{i=1}^n \varphi(x_i)$  é simétrico sob permutações de seus argumentos;

(P2) Se nenhum dos pontos  $x_1, \dots, x_m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) situa-se no passado causal dos pontos  $x_{m+1}, \dots, x_n$ , então a seguinte fatorização acontece, uma consequência natural da condição (iv):

$$T(X) = T(I \cup J) = T(I)T(J) \quad \text{se } I \gtrsim J ,$$

onde

$$T(I) = T \prod_{i=1}^m \varphi(x_i) , \quad T(J) = T \prod_{j=m+1}^n \varphi(x_j) .$$

A notação  $I \gtrsim J$  indica que  $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_m)$  não pertencem ao passado causal de qualquer  $\varphi(x_{m+1}), \dots, \varphi(x_n)$ , sendo que  $(x_1, \dots, x_m; x_{m+1}, \dots, x_n)$  é a partição de  $(1, \dots, n)$ .

**Definição 17:** Uma partição de um conjunto  $N = (1, \dots, n)$  é uma família  $\mathcal{P}$  de subconjuntos  $X_1 = (i_1, \dots, i_{k(1)}), \dots, X_r = (i'_1, \dots, i'_{k(r)})$  tal que  $\bigcup_{j=1}^r X_j = (1, \dots, n)$  e  $X_j \cap X_q = \emptyset$ .  $\mathcal{P}_n$  denotará o conjunto de todas as partições de  $(1, \dots, n)$ .

(P3) Com a ajuda dos teoremas de Wick (veja abaixo), para qualquer inteiro  $n$  temos:

$$T(X) = \sum_{Y_i \subset X_i} t(X_{i_k}) : \prod_{i=1}^n \varphi(Y_i) : , \quad (4.20)$$

onde, agora,

$$t(X_{i_k}) = \left( \phi^{(0)}, T \prod_{i=1}^n \varphi(X_i \setminus Y_i) \phi^{(0)} \right) ,$$

são distribuições numéricas invariantes por translação. As distribuições numéricas são funções ordenadas temporalmente, isto é, valores esperados de produtos cronológicos de sub-polinômios de Wick.

É crucial para o programa que os polinômios de Wick sejam distribuições com valores em operadores e que eles possam ser multiplicados por distribuições numéricas. Contudo, não é imediatamente óbvio que isso seja possível. Mas, um cálculo no espaço dos momentos produz:

**Teorema 0 de Epstein-Glaser:** Seja  $T \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{4n})$  uma distribuição temperada com valores numéricos, tal que  $T(x_1, \dots, x_n) = T(x_1 + a, \dots, x_n + a)$  para todo  $a \in \mathbf{R}^4$ .



Então, para qualquer  $t \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{4n})$ ,

$$G(t) = \int \prod_{i=1}^n dx_i T(x_1, \dots, x_n) t(x_1, \dots, x_n) : \prod_{i=1}^n \varphi(x_i) : ,$$

é um operador bem definido em  $D_0$  e mapea  $D_0$  nele próprio. Para todo  $t \in D_0$ ,  $(G(t))^n$  depende continuamente sobre  $T$  e sobre  $t^n$ .

A demonstração desse teorema pode ser encontrada no Apêndice 1 de [2]. Prova-se, então, com a ajuda do teorema acima, que (4.20) faz sentido.

## 4.1 Teoremas de Wick

Para calcularmos a matriz- $S$ , precisamos de alguma regra que simplifique as integrais ordenadas temporalmente em (4.18). Isso pode ser feito com a ajuda de um método de expansão estabelecido por Wick e que, agora, leva seu nome.

Wick introduziu dois tipos de produtos ordenados de operadores de campos:

(1) *Teorema de Wick para o Produto Normal*: Indicado pelo símbolo  $(: :)$ , define-se o produto ordenado normal,  $: \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n :$ , quando o produto de operadores lineares de campos,  $\varphi_i$ , é arranjado de modo que todos os operadores de criação estejam à esquerda de todos os operadores de destruição. Na presença de operadores fermiônicos devemos incluir um fator  $(-1)^N$ , onde  $N$  indica o número de permutações dos operadores fermiônicos no rearranjo.

### Exemplos:

(a) O ordenamento normal de um único campo é trivial

$$\varphi(x) = : \varphi(x) : = \varphi^\dagger(x) + \varphi^-(x) .$$

(b) Para o produto de dois campos  $\varphi(x)$ , temos

$$\begin{aligned} \varphi(x) \varphi(y) &= (\varphi^\dagger(x) + \varphi^-(x)) (\varphi^\dagger(y) + \varphi^-(y)) \\ &= : \varphi(x) \varphi(y) : + w_2(x, y) , \end{aligned}$$

onde  $w_2(x, y)$  é a distribuição de Wightman de 2-pontos definida anteriormente (veja eq.(4.16)).

(c) Para o produto de três campos, temos

$$\begin{aligned} \varphi(x) \varphi(y) \varphi(z) &= : \varphi(x) \varphi(y) : \varphi(z) + w_2(x, y) \varphi(z) \\ &= : \varphi(x) \varphi(y) \varphi(z) : + w_2(x, y) \varphi(z) + \\ &\quad + w_2(x, z) \varphi(y) + w_2(y, z) \varphi(x) . \end{aligned}$$

Note que se tomarmos o valor esperado do vácuo para produto de  $n$  campos, quando  $n$  é ímpar, então,  $w_n(x_1, \dots, x_n) = 0$ , como afirmado anteriormente.

Pode ser mostrado por indução que para o produto de  $n$  campos, temos

$$\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) = \sum_{Y_i \subset X_i} \left( \phi^{(0)}, \prod_{i=1}^n \varphi(X_i \setminus Y_i) \phi^{(0)} \right) : \prod_{i=1}^n \varphi(Y_i) : , \quad (4.21)$$

onde a soma é realizada sobre todos os subconjuntos  $Y$  de  $X$ , incluindo  $Y = \emptyset$  e  $Y = X$ . A notação  $X \setminus Y$  significa o conjunto daqueles elementos de  $X$  que não pertencem a  $Y$ , isto é,  $X \setminus Y = \{x \mid x \in X, x \notin Y\}$ .

Em (4.21)

$$\left( \phi^{(0)}, \prod_{i=1}^n \varphi(X_i \setminus Y_i) \phi^{(0)} \right) = \sum_{\substack{\text{partition in} \\ \text{pairs of } (1, \dots, n)}} \prod_{(i,j)} (\phi^{(0)}, \varphi(x_i) \varphi(x_j) \phi^{(0)}) , \quad (4.22)$$

são distribuições numéricas e

$$: \prod_{i=1}^n \varphi(Y_i) := \sum_{\substack{I \cup J = (1, \dots, n) \\ I \cap J = \emptyset}} \prod_{i \in I} \varphi^\dagger(y_i) \prod_{j \in J} \varphi^-(y_j) . \quad (4.23)$$

são produtos de Wick, distribuições com valores em operadores definidos sobre  $D_0$ .

O teorema de Wick pode ser aplicado ao caso quando temos um produto de vários produtos ordenados normalmente:  $:\varphi(X_1) : \dots : \varphi(X_k) :$ , onde  $:\varphi(X) : \equiv : \varphi(x_1) \dots \varphi(x_p) :$ .

**Exemplos:**

(d)

$$:\varphi(x_1) :: \varphi(x_2) \varphi(x_3) := : \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) : + w_2(x_1, x_2) : \varphi(x_3) : + w_2(x_1, x_3) : \varphi(x_2) : ,$$

(e)

$$\begin{aligned} : \varphi(x_1) \varphi(x_2) :: \varphi(x_3) \varphi(x_4) := & : \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4) : + w_2(x_1, x_3) : \varphi(x_2) \varphi(x_4) : + \\ & + w_2(x_1, x_4) : \varphi(x_2) \varphi(x_3) : + w_2(x_2, x_3) : \varphi(x_1) \varphi(x_4) : + w_2(x_2, x_4) : \varphi(x_1) \varphi(x_3) : + \\ & + w_2(x_1, x_3) w_2(x_2, x_4) + w_2(x_1, x_4) w_2(x_2, x_3) \end{aligned}$$

Por indução mostra-se que para um produto de  $n$ -produtos ordenados normalmente, temos

$$:\varphi(X_1) : \dots : \varphi(X_n) := \sum_{Y_i \subset X_i} \left( \phi^{(0)}, \prod_{i=1}^n : \varphi(X_i \setminus Y_i) : \phi^{(0)} \right) : \prod_{i=1}^n \varphi(Y_i) : , \quad (4.24)$$

onde

$$\left( \phi^{(0)}, \prod_{i=1}^n : \varphi(X_i \setminus Y_i) : \phi^{(0)} \right) = \sum_{\substack{\text{partition in} \\ \text{pairs of } (1, \dots, n) \\ x_i \in X_i; x_j \in X_j \\ X_i \neq X_j}} \prod_{(i,j)} (\phi^{(0)}, \varphi(x_i) \varphi(x_j) \phi^{(0)}) . \quad (4.25)$$

Finalmente, para monômios de Wick, isto é, quando os elementos de  $X = (x_1, \dots, x_n)$  coincidem, a eq.(4.24) torna-se

$$: \frac{\varphi^{r_1}(x_1)}{r_1!} : \dots : \frac{\varphi^{r_n}(x_n)}{r_n!} := \sum_{s_i} \left( \phi^{(0)}, \prod_{i=1}^n : \frac{\varphi^{(r_i - s_i)}(x_i)}{(r_i - s_i)!} : \phi^{(0)} \right) : \prod_{i=1}^n \frac{\varphi^{s_i}(x_i)}{s_i!} : . \quad (4.26)$$

(2) *Teorema de Wick para o Produto Cronológico*: Estende a definição do produto ordenado normal. O produto cronológico de um sistema de  $n$  operadores lineares pode ser construído usando-se distribuições de grau  $\theta$ :

$$T\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n) = \sum_P \left[ \prod_{i=1}^{n-1} \theta(x_{P_i}^0 - x_{P_n}^0) \right] \varepsilon_P \varphi(x_1)\dots\varphi(x_n) , \quad (4.27)$$

onde a soma é sobre todas as permutações  $P$ , a função  $\theta$  força a condição que  $t_{P_1} > t_{P_2} > \dots > t_{P_n}$ , e  $\varepsilon_P$  indica o sinal da permutação de operadores fermiônicos envolvido no produto acima.

Usando os teoremas de Wick, obtemos:

$$T\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n) = \sum_{Y_i \subset X_i} \left( \phi^{(0)}, T \prod_{i=1}^n \varphi(X_i \setminus Y_i) \phi^{(0)} \right) : \prod_{i=1}^n \varphi(Y_i) : , \quad (4.28)$$

onde, novamente, a soma é realizada sobre todos os subconjuntos  $Y$  de  $X$ , incluindo  $Y = \emptyset$  e  $Y = X$ . A notação  $X \setminus Y$  indica o conjunto daqueles elementos de  $X$  que não pertencem a  $Y$ , isto é,  $X \setminus Y = \{x \mid x \in X, x \notin Y\}$ . Aqui, como em (4.22)

$$\left( \phi^{(0)}, T \prod_{i=1}^n \varphi(X_i \setminus Y_i) \phi^{(0)} \right) = \sum_{\substack{\text{partition in} \\ \text{pairs of } (1, \dots, n)}} \prod_{(i,j)} (\phi^{(0)}, T\varphi(x_i)\varphi(x_j)\phi^{(0)}) , \quad (4.29)$$

são distribuições numéricas.

Usando a eq.(4.27), temos que:

$$\begin{aligned} (\phi^{(0)}, T\varphi(x_i)\varphi(x_j)\phi^{(0)}) &= \theta(x_i^0 - x_j^0) w_2(x_i, x_j) + \theta(x_j^0 - x_i^0) w_2(x_j, x_i) \\ &= \Delta_F(x_i, x_j) , \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde  $\Delta_F(x_i, x_j)$  é a conhecida distribuição de 2-pontos de Feynman, ou propagador de Feynman.

E por fim, para o produto cronológico de  $n$ -produtos ordenados normalmente, temos:

$$T(:\varphi(X_1): \dots : \varphi(X_n):) = \sum_{Y_i \subset X_i} \left( \phi^{(0)}, T \prod_{i=1}^n : \varphi(X_i \setminus Y_i) : \phi^{(0)} \right) : \prod_{i=1}^n \varphi(Y_i) : , \quad (4.31)$$

onde

$$\left( \phi^{(0)}, T \prod_{i=1}^n : \varphi(X_i \setminus Y_i) : \phi^{(0)} \right) = \sum_{\substack{\text{partition in} \\ \text{pairs of } (1, \dots, n) \\ x_i \in X_i; x_j \in X_j \\ X_i \neq X_j}} \prod_{(i,j)} (\phi^{(0)}, T\varphi(x_i)\varphi(x_j)\phi^{(0)}) ; \quad (4.32)$$

enquanto, para monômios de Wick tem-se

$$T\left( : \frac{\varphi^{r_1}(x_1)}{r_1!} : \dots : \frac{\varphi^{r_n}(x_n)}{r_n!} : \right) = \sum_{s_i} \left( \phi^{(0)}, T \prod_{i=1}^n : \frac{\varphi^{(r_i-s_i)}(x_i)}{(r_i-s_i)!} : \phi^{(0)} \right) : \prod_{i=1}^n \frac{\varphi^{s_i}(x_i)}{s_i!} : . \quad (4.33)$$

Com a ajuda dos teoremas de Wick as distribuições com valores em operadores,  $T(X)$ , podem ser determinadas por indução exigindo-se que  $S(g)$  satisfaça as condições  $(i-iv)$ , com a causalidade e a invariância por translação sendo as condições mais importantes.

## 4.2 A Hipótese de Indução

Os produtos cronológicos de polinômios de Wick são bem definidos como distribuições com valores em operadores sobre funções teste  $f$  com suporte sobre pontos que *não* coincidem

$$\text{supp} f \subset \{(x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbf{R}^4 \mid x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\} .$$

Usando o Teorema de Wick para o produto cronológico, eles pode ser escritos como uma expansão em somas de distribuições numéricas e produtos de Wick

$$T(X) = \sum_{Y_i \subset X_i} t(X_i \setminus Y_i) : \prod_{i=1}^n \varphi(Y_i) : ,$$

com

$$t(X_i \setminus Y_i) = \left( \phi^{(0)}, T \prod_{i=1}^n \varphi(X_i \setminus Y_i) \phi^{(0)} \right) = \sum_{\substack{\text{partition in} \\ \text{pairs of } (1, \dots, n)}} \prod_{(i,j)} (\phi^{(0)}, T \varphi(x_i) \varphi(x_j) \phi^{(0)}) ,$$

onde

$$(\phi^{(0)}, T \varphi(x_i) \varphi(x_j) \phi^{(0)}) = \Delta_F(x, y) ,$$

veja a eq.(4.30).

**Proposição 4:** O produto  $\theta(x_i^0 - x_j^0) w_2(x_i, x_j)$  existe onde  $\theta(x_i^0 - x_j^0)$  é definido por  $\theta(f) = \int_{x_i^0 > x_j^0} dx f(x)$ . Então,

$$\int dx dy \Delta_F(x, y) f(x) g(y)$$

define uma distribuição temperada.

*Prova:* Uma prova rigorosa pode ser encontrada em [23]. Aqui, vamos dar um argumento alternativo que usa o lema 2.

Pelo lema 2

$$W_2(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 q \hat{W}_2(q) e^{iq_k \xi^k} ,$$

onde  $\xi = \lambda + i\eta$ , converge, bem como suas derivadas com respeito a  $\xi$ , se  $\eta$  é um vetor tipo-tempo. Então,

$$\theta(\xi^0) W_2(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\xi^0 > 0} d^4 q \hat{W}_2(q) e^{iq_k \xi^k} ,$$

converge, bem como suas derivadas com respeito a  $\xi$ , porque  $\eta$  sendo um vetor tipo-tempo a exponencial na integral tem um fator que decai rapidamente, enquanto  $\hat{W}_2(q)$

é uma distribuição temperada. Assim, o propagador de Feynman,  $\Delta_F(x, y)$ , define uma distribuição temperada. ■

O problema, agora, é definir distribuições numéricas para pontos que coincidem, tal que produtos cronológicos de monômios de Wick sejam bem definidos. Nesse caso, o produto de distribuições de grau  $\theta$  com monômios de Wick  $\prod_{i=1}^n : \frac{\varphi^{r_i}(x_i)}{r_i!} :$  é mal definido, levando à divergências no ultravioleta e, portanto, não definindo uma distribuição. Em TQC essas divergências aparecem quando ocorrem integrações de diagramas de Feynman com loops.

De acordo com o exemplo 3, os produtos cronológicos de monômios de Wick

$$T_{\{r\}}(X) \equiv T \prod_{i=1}^n : \frac{\varphi^{r_i}(x_i)}{r_i!} : , \quad (4.34)$$

podem ser bem definidos, ordem a ordem, desde que certos cuidados sejam tomados. O passo mais delicado será a multiplicação dos monômios de Wick por funções  $C^\infty$  que no limite tendem a função  $\theta$ <sup>5</sup>. Portanto, escolhamos uma função  $C^\infty$  com as seguintes propriedades:

- (1)  $0 \leq w(x^0) \leq 1$  e  $w(0) = 0$ ;
- (2)  $w(x^0)$  é infinitamente diferenciável para todo  $x^0 \neq 0$ ;
- (3)  $w(x^0) = w(\rho x^0)$  para todo  $x^0 \neq 0$  e todo  $\rho > 0$ ;
- (4) fora da origem  $w(x^0)$  toma valor 1 em um cone fechado contendo a vizinhança de  $\Gamma^+ - \{0\}$  e o valor 0 em um cone fechado contendo a vizinhança de  $\Gamma^- - \{0\}$ , onde  $\Gamma^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_j - x_i \in \bar{V}^+ \forall j\} = -\Gamma^-$ .

Segue, então, que  $wg$  está também no espaço sobre o qual os operadores de campos atuam, isto é,  $wg \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  se  $g(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  e o mapeamento  $g \mapsto wg$  é contínuo e mapea  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ .

Como no exemplo 3, se  $wg \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n \setminus 0)$ , então, os operadores de campos definirão um funcional linear sobre  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n \setminus 0)$  que é contínuo. Pelo teorema de Hahn-Banach, esse funcional sobre  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n \setminus 0)$  tem uma extensão para todo  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ , que chamamos a "renormalização" dos operadores de campos. É exatamente esse último passo que corresponde ao método dos contra-termos no procedimento clássico da renormalização perturbativa, uma vez que a extensão não é definida univocamente. Ela dependerá de um número de constantes livres que devem ser fixadas por condições extras.

- A Construção por Indução:

Após estabelecer os cuidados que devemos tomar, usaremos os argumentos dados em [3, 31] para construir  $T_{\{r\}}(X)$  dado que os produtos cronológicos de  $n' < n$  fatores foram construídos, e satisfazem as propriedades (P1-P3).

Seja

$$C_{IJ} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^4 \mid x_i \in I, x_j \in J, \text{ com } I \gtrsim J \right\} , \quad (4.35)$$

com  $|I \cup J| = n, |I| < n, |J| < n$ .

---

<sup>5</sup>Segundo Schwartz [19], pg.99, quanto mais singular  $T$  for, mais regular  $S$  deve ser para que o produto  $TS$ , de duas distribuições, seja bem definido. Lembre-se da operação 4 que, se  $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^4)$  e  $w \in O_M^n$ , então o produto  $Tw$  será bem definido.

Além disso, admita que  $T_{\{r\}}(X)$  respeita a propriedade de fatorização causal

$$T_{\{r\}}(X) = T_{\{r\}}(I \cup J) = T_{\{r\}}(I)T_{\{r\}}(J) \quad \text{se } I \gtrsim J, \quad (4.36)$$

bem como a relação de comutação

$$[T_{\{r\}}(X), T_{\{r\}}(Y)] = 0 \quad \text{se } X \sim Y, \quad (4.37)$$

onde a notação  $X \sim Y$  indica que  $X$  e  $Y$  tem uma separação do tipo-espaco. De acordo com a hipótese de indução e o Teorema 0,  $T_{\{r\}}(X)$  definirá uma distribuição com valores em operadores, isto é:

$$T_{\{r\}}(X) = \sum_{s_i} t_{\{s_i\}}(X) : \prod_{i=1}^n \frac{\varphi^{s_i}(x_i)}{s_i!} : , \quad (4.38)$$

será um funcional contínuo e bem definido sobre  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ , onde

$$t_{\{s_i\}}(X) = \left( \phi^{(0)}, T \prod_{i=1}^n : \frac{\varphi^{(r_i-s_i)}(x_i)}{(r_i-s_i)!} : \phi^{(0)} \right), \quad (4.39)$$

é uma distribuição numérica .

Diferentes  $C_{IJ}$  podem sofrer um "overlap". Usando a hipótese de indução podemos escrever as identidades:

$$\begin{aligned} T_{\{r\}}(I)T_{\{r\}}(J) &= T_{\{r\}}(I \cap I')T_{\{r\}}(I \cap J')T_{\{r\}}(J \cap I')T_{\{r\}}(J \cap J') \\ T_{\{r\}}(I')T_{\{r\}}(J') &= T_{\{r\}}(I' \cap I)T_{\{r\}}(I' \cap J)T_{\{r\}}(J' \cap I)T_{\{r\}}(J' \cap J) \end{aligned} \quad (4.40)$$

com  $I \cup J = I' \cup J' = x_1, \dots, x_n$ ,  $I \gtrsim J$ ,  $I' \gtrsim J'$ .

Notando que  $I \cap J'$  e  $J \cap I'$  tem uma separação tipo-espaco, a eq.(4.37) implica

$$[T_{\{r\}}(I \cap J'), T_{\{r\}}(J \cap I')] = 0. \quad (4.41)$$

Como resultado das eqs.(4.40) e (4.41) obtém-se que

$$T_{\{r\}}(I)T_{\{r\}}(J) = T_{\{r\}}(I')T_{\{r\}}(J') \quad \text{em } C_{IJ} \cap C_{I'J'}. \quad (4.42)$$

Pela a hipótese de indução, essa equação pode ser aplicada a vários termos da expansão de Wick, tal que:

$$t_{\{s_i\}}(I)t_{\{s_i\}}(J) = t_{\{s_i\}}(I')t_{\{s_i\}}(J') \quad \text{em } C_{IJ} \cap C_{I'J'}, \quad (4.43)$$

onde  $(\phi^{(0)}, T_{\{s_i\}}(I)T_{\{s_i\}}(J)\phi^{(0)}) = t_{\{s_i\}}(I)t_{\{s_i\}}(J)$ .

De acordo com a Proposição 3, a diferença

$$t_{\{s_i\}}(I)t_{\{s_i\}}(J) - t_{\{s_i\}}(I')t_{\{s_i\}}(J') = 0, \quad (4.44)$$

sobre  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n \setminus 0)$  e define um funcional concentrado em  $\bigcup_{I \cap J} C_{IJ} = (x_1 = \dots = x_n)$ . Pelo teorema 5, esse funcional é da forma  $\sum_{\alpha \leq \omega} \mathcal{P}_\alpha(x) D^\alpha \delta(x_1 - x_n) \dots \delta(x_{n-1} - x_n)$ , onde  $\mathcal{P}_\alpha(x)$  é um polinômio de Wick em  $\varphi(x)$  e suas derivadas <sup>6</sup>

$$\mathcal{P}_\alpha(x) = : \mathcal{P}_\alpha(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x), \dots, \partial_{\mu_1 \dots \mu_n} \varphi(x)) : . \quad (4.45)$$

Com isso, a solução mais geral depende de um polinômio local arbitrário de grau  $\omega$ , isto é,

$$T_{\{r\}}(X) = \sum_{s_i} \left[ t_{\{s_i\}}(X) + \sum_{\alpha \leq \omega} \mathcal{P}_\alpha(x) D^\alpha \delta(x_1 - x_n) \dots \delta(x_{n-1} - x_n) \right] : \prod_{i=1}^n \frac{\varphi^{s_i}(x_i)}{s_i!} : , \quad (4.46)$$

para  $\alpha \in \mathbf{Z}_+$ .

*Nota:* Os termos locais não são fixados pela causalidade, mas por condições de normalização físicas adicionais.

Estudar o comportamento das distribuições numéricas na vizinhança de  $(x_1 = \dots = x_n)$  é essencial para a resolução do problema da renormalização. As semi-normas usadas por Epstein-Glaser, para estudar o comportamento das distribuições, são complicadas. Acharmos preferível usar o método de Steinmann [12], chamado o conceito do "grau de Scaling" em um ponto de uma distribuição.

**Lema 3:** Qualquer  $t(X)$  tem grau de Scaling  $\omega \in \mathbf{R}$  em  $x$  se  $\omega$  é o menor número tal que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^\omega t_\lambda(X) = 0 ,$$

para  $\omega > d$  mas não para  $\omega < d$ . O limite acima é entendido no sentido das distribuições. O valor  $d = \infty$  é possível.

*Prova:* É óbvio que o limite acima acontece para  $\omega' > \omega$ . De acordo com o teorema 4 podemos escrever  $t$  como a derivada de ordem finita de uma função contínua de crescimento lento no infinito,  $t(x) = D^\beta g(x)$ , para  $\beta \in \mathbf{Z}_+$ , onde da definição 16  $|f(x)| < C |x|^N$ . Portanto, para  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$ :

$$t(\varphi) = (-1)^\beta \int dx \frac{g(x)}{x^\alpha} x^\alpha (D^\beta \varphi)(x) .$$

Para  $\alpha$  suficientemente grande,  $\frac{g(x)}{x^\alpha}$  é absolutamente integrável de  $-\infty$  a  $\infty$ , visto que  $g(x)$  é uma função de crescimento lento. Com tal valor de  $\alpha$ , a integral sobre o lado direito é dominada por

$$|t(\varphi)| \leq \|\varphi\|_\alpha \cdot J ,$$

com

$$J = \left| \int dx \frac{g(x)}{x^\alpha} \right| < \infty$$

---

<sup>6</sup>Na verdade, a matriz- $S$  só depende da classe de sistemas de campos locais chamada *classe de Borchers*. Uma ilustração simples de uma classe de Borchers é o caso de um campo livre  $\varphi(x)$ . Neste caso as potências ordenadas de Wick :  $\varphi(x)^n$  : são campos na classe de Borchers de  $\varphi(x)$ , e os polinômios de  $\varphi(x)$  e suas derivadas no mesmo ponto esgotam completamente a classe [25, 26].

e

$$\|\varphi\|_\alpha = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \sup_{|\beta| \leq \alpha} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| .$$

Para  $\varphi_\lambda$  temos

$$\begin{aligned} \|\varphi_\lambda\|_\alpha &= \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \sup_{|\beta| \leq \alpha} |x^\alpha D^\beta \varphi(\lambda x)| \\ &\leq \lambda^{\beta-\alpha} \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \sup_{|\beta| \leq \alpha} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| , \end{aligned}$$

portanto,

$$|t_\lambda(\varphi)| = \lambda^n |t(\varphi_\lambda)| \leq \lambda^{n+\beta-\alpha} \|\varphi\|_\alpha \cdot J ,$$

isto é,  $\lambda^\omega t_\lambda(\varphi) \rightarrow 0$  para  $\omega > \alpha - n - \beta$ . Isso prova o lema e mostra que  $d < \alpha - n - \beta < \infty$ . ■

Como uma consequência imediata do lema 3, temos:

**Corolário 1:** Se  $t_0(\varphi) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n \setminus 0)$  tem grau de scaling  $\omega < d$  em  $x$  então existe um único  $t(\varphi) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$  com  $t(\varphi) = t_0(\varphi)$ ,  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n \setminus 0)$  e o mesmo grau de scaling; caso contrário, isto é, se  $\omega > d$ ,  $t(\varphi)$  não é único e só é determinado a menos de uma soma finita de termos locais (veja eq.(4.46)).

*Prova:* A unicidade é óbvia uma vez que: primeiro,  $\alpha \in \mathbf{Z}_+$  em (4.46). Segundo, qualquer outra solução deve diferir por uma distribuição que é concentrada no ponto  $x_0$ , isto é, o  $\text{supp } T = \{x_0\}$ . Então, do teorema 5,  $T$  é uma combinação linear de derivadas da função delta de Dirac. ■

Claramente se uma distribuição é singular de ordem  $\omega$ , ela é também singular de ordem  $\omega' > \omega$ . Isso implicaria em potências maiores de  $\partial_{\mu_1 \dots \mu_n} \varphi(x)$  em (4.46). Contudo, é natural exigir que a ordem de  $\omega$  satisfaça uma condição de minimidade. Essa condição tem uma base experimental muito forte: sem ela o poder de preditibilidade de uma teoria é perdida. O grau mínimo de  $\mathcal{P}_\alpha(x)$  é dado pela *teoria do power-counting* [27].

No caso geral o grau de scaling  $\omega$  é dado por [31, 33]

$$\omega = D + \sum_{\substack{\text{todos os} \\ \text{vértices } V_k}} (\dim V_k - D) - \sum_i N_i d_i , \quad (4.47)$$

com respeito à ordem da teoria de perturbação; onde  $D$  é a dimensão do espaço-tempo,  $\dim V_k$  é a dimensão do vértice  $k$  (vértices de interação do Lagrangeano),  $N_i$  o número de pernas externas do campo do tipo- $\Phi_i$  e  $d_i$  a dimensão ultravioleta do correspondente campo, que deve obedecer a desigualdade [28]

$$d_i + d_j \geq d_{ij} + D , \quad (4.48)$$

onde  $d_{ij}$  é a dimensão ultravioleta do propagador de Feynman  $\Delta_{ij}(p)$  no espaço dos momenta.

Rigorosamente falando, uma teoria será *renormalizável* do ponto de vista do power-counting se a estrutura formal da ação clássica não for alterada. Colocado de outra forma, uma teoria é renormalizável se for possível substituir os parâmetros *bare* da ação de partida por uma série formal nos parâmetros renormalizados – usualmente a constante de acoplamento – de maneira que a expansão perturbativa renormalizada seja finita para todas às ordens, como uma série formal de potências.



### 4.3 Comentários Finais

Como mostrado por Epstein-Glaser, a renormalização consiste em tratar com as arbitrariedades inerentes da teoria de perturbação. As arbitrariedades são geradas quando tentamos construir produtos de operadores de campos tomados no mesmo ponto, tal que esses sejam bem definidos.

Elas são representadas por termos completamente locais da forma

$$\sum_{\alpha \leq \omega} \mathcal{P}_\alpha(x) D^\alpha \delta(x_1 - x_n) \dots \delta(x_{n-1} - x_n) ,$$

onde  $\mathcal{P}_\alpha(x)$  é um polinômio de Wick em  $\varphi(x)$  e suas derivadas, os contra-termos da teoria. O ponto central da teoria consiste em controlar essas arbitrariedades, com o grau mínimo de  $\mathcal{P}_\alpha(x)$  sendo dado pela teoria do power-counting.

Por outro lado, o método de Epstein-Glaser, apesar de nos permitir construir diretamente operadores compostos como operadores locais – sem fazer referência às funções de Green – não parece ser o mais apropriado para tratar teorias mais gerais, como as teorias de gauge. Em particular as teorias de gauge de Yang-Mills. Essas teorias são não lineares por natureza e dão origem a problemas difíceis de serem resolvidos – mesmo que puramente técnicos – inviabilizando o estudo da renormalização via o esquema de Epstein-Glaser.

Os principais obstáculos a esse programa são: o overlapping de divergências e o aparecimento de possíveis anomalias, que exigem uma ferramenta mais sofisticada [1]. Em particular, controlar os possíveis contra-termos de acordo com o power-counting não é suficiente; tem-se que incorporar informações adicionais vindas das identidades de Slavnov-Taylor ou invariância-BRS [29, 30].

A escolha dos contra-termos deve levar em consideração todas as simetrias possíveis. Se essas simetrias são respeitadas pelo processo de renormalização, então, não existem problemas. Porém, muitas vezes acontece de certas simetrias serem violadas pelas correções radiativas, mesmo que a princípio a teoria seja renormalizável pelo power-counting. Nesse caso devemos tentar restaurar a simetria introduzindo um número finito de contra-termos compensadores não-invariantes de gauge – e como tal não estavam presentes na ação clássica. Se isso é impossível de ser feito, dizemos que o modelo é anômalo. Um exemplo celebrado é a anomalia quiral das teorias de gauge em 4-dimensões.

Hoje em dia, dispomos de uma ferramenta muito eficiente e elegante para tratar o problema das anomalias, e conseqüentemente a renormalizabilidade das teorias de gauge. É o esquema da Renormalização Algébrica [31]–[35]. O método algébrico baseia-se sobre teoremas gerais da teoria de renormalização, em particular o Princípio da Ação Quântica [36] que diz:

**Teorema do Princípio da Ação Quântica:** A ação de um operador diferencial linear ou de um operador diferencial funcional  $\nabla$  sobre os funcionais de Green produz

$$\nabla \mathcal{F} = \Delta \cdot \mathcal{F} \quad ; \quad \mathcal{F} = Z, Z^c, \Gamma \tag{4.49}$$

com o lado direito sendo funcionais geradores de funções de Green com inserções de polinômios locais nos campo  $\Delta$ . Se as inserções são definidas como produtos normais de

Zimmermann-Lowenstein, então, suas dimensões U.V. e I.V. são limitadas por um power-counting específico: se  $\nabla$  é um operador diferencial linear nos parâmetros (por ex.  $\partial_g$ ), então as dimensões U.V. e I.R. de  $\Delta$  são aquelas da ação, isto é,  $D$ . Se  $\nabla$  é um operador diferencial funcional, as dimensões U.V. e I.R. de  $\Delta$  são dadas pelas próprias dimensões de  $\nabla$  (veja o quadro abaixo).

$\nabla$	$\partial_g$	$m\partial_m$	$\frac{\delta}{\delta\Phi}$	$\int \Phi' \frac{\delta}{\delta\Phi}$	$\frac{\delta}{\delta j_{\text{ext}}}$
$\Delta^\rho$	$D$	$D$	$D - r(\Phi)$	$D - r(\Phi) + r(\Phi')$	$D - r(j_{\text{ext}})$
$\Delta_\delta$	$D$	$D$	$D - d(\Phi)$	$D - d(\Phi) + d(\Phi')$	$D - d(j_{\text{ext}})$

Diagramaticamente, representamos o conteúdo do teorema acima por

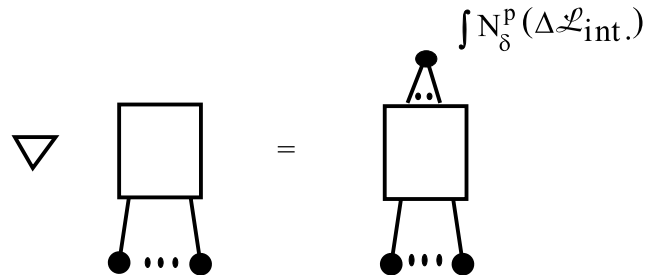


Fig. 3

com o lado direito representando formalmente um diagrama com a inserção do operador de campo local  $\int N_\delta^\rho(\nabla\mathcal{L}_{\text{int.}})$ , cuja dimensão não deve exceder aquela do lado esquerdo – no caso de uma teoria renormalizável pelo power-counting.

Uma das principais vantagens desse método, além de sua simplicidade, é seu grande poder de reduzir o tratamento dos problemas da renormalizabilidade e das anomalias de modelos com simetrias locais e rígidas ao estudo da Cohomologia de álgebras de Lie, produzindo uma completa caracterização de todas as anomalias e contra-termos invariantes sem fazer uso explícito de qualquer esquema particular de regularização e/ou cálculo de diagramas de Feynman.

## Agradecimentos

Este trabalho não seria possível sem a ajuda e o incentivo de muitas pessoas. Em particular, quero agradecer aos Profs. Olivier Piguet, José A. Helayël-Neto, Maria Carolina Nemes e Silvio P. Sorella, aos Drs. Oswaldo M. Del Cima e Emmanuel A. Pereira, e aos colegas André L. Mota e José L. Acebal. Quero agradecer ao Dr. Sebastião A. Dias pela leitura crítica dessas notas. Quero agradecer, também, ao Departamento de Física da UFMG, onde parte desse trabalho foi realizada.

## References

- [1] W. Zimmermann, 1970 Brandeis Lectures, Lectures on Elementary Particle and Quantum Field Theory, eds. S. Deser, M. Grisaru and H. Pendleton (MIT Press Cambridge); *Ann. Phys. (N.Y.)* 77 (1973) 536;
- [2] H. Epstein and V. Glaser, *Ann. Inst. Henri Poincaré* 19 (1973) 211;
- [3] G. Popineau and R. Stora, "A Pedagogical Remark on the Main Theorem of Perturbative Renormalization Theory", unpublished preprint;
- [4] G. Scharf, "Finite Quantum Electrodynamics", 2nd Edition, Springer-Verlag, Heidelberg, 1995;
- [5] R. Brunetti and K. Fredenhagen, "Interacting Quantum Fields in Curved Space: Renormalizability of  $\varphi^4$ ", gr-qc/9701048; "Interacting Quantum Fields on a Curved Background", hep-th/9709011;
- [6] N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, "Introduction to the Theory of Quantized Fields", J. Wiley and Sons, 1976, 3rd edition;
- [7] K. Hepp, "Théorie de la Renormalisation", Lecture Notes in Physics, **2**, Springer-Verlag, Berlin, 1969;
- [8] J.H. Lowenstein, "BPHZ Renormalization", in: "Renormalization Theory" (eds. G. Velo and A.S. Wightman) D. Reidel, Dordrecht, 1976;
- [9] P. Breitenlohner and D. Maison, "Some Results on Dimensional Regularization", in: "Renormalization Theory" (eds. G. Velo and A.S. Wightman) D. Reidel, Dordrecht, 1976;
- [10] G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.* B44 (1972) 189;  
C.G. Bollini and J.J. Giambiagi, *Phys. Lett.* B40 (1972) 566;  
G.M. Cicuta and E. Montaldi, *Nuovo Cimento Lett.* 4 (1972) 329;
- [11] E. Speer, "Dimensional and Analytic Renormalization", in: "Renormalization Theory" (eds. G. Velo and A.S. Wightman) D. Reidel, Dordrecht, 1976;
- [12] O. Steinmann, "Perturbation Expansions in Axiomatic Field Theory", Lecture Notes in Physics, **11**, Springer-Verlag, Berlin, 1971;

- [13] J. Polchinski, *Nucl. Phys.* B231 (1984) 269;
- [14] G. Keller and C. Kopper, *Phys. Lett.* B273 (1991) 323;
- [15] C. Becchi, "On the Construction of Renormalized Gauge Theories Using Renormalization Group Techniques", hep-th/9607188;
- [16] V. Rivasseau, "From Perturbative to Constructive Renormalization", Princeton Series in Physics, 1991;
- [17] A. Jaffe, "High Energy Behavior in Quantum Field Theory, Strictly Localizable Fields", A. Jaffe, *Phys. Rev.* 158 (1967) 1454;
- [18] L. Schwartz, "Théorie des Distributions", Hermann, Paris, 1966;
- [19] L. Schwartz, "Méthodes Mathématiques Pour Les Sciences Physiques", Enseignement des Sciences, 1979;
- [20] I.M. Gel'fand and G.E. Shilov, "Generalized Functions: Properties and Operations", vol. I, Academic Press, 1964;
- [21] I.M. Gel'fand and G.E. Shilov, "Generalized Functions: Spaces of Fundamental and Generalized Functions", vol. II, Academic Press, 1968;
- [22] M. Reed and B. Simons, "Functional Analysis", Academic Press, 1972;
- [23] M. Reed and B. Simons, "Fourier Analysis, Self-Adjointness", Academic Press, 1975;
- [24] F. Constantinescu, "Distributions and Their Applications in Physics", Pergamon Press, 1980;
- [25] H. Epstein, "On the Borchers Class of a Free Field", *Nuovo Cimento.* 27 (1963) 886;
- [26] R. Haag, "Local Quantum Physics", 2nd Edition, Springer-Verlag, Heidelberg, 1996;
- [27] W. Zimmermann, *Comm. Math. Phys.* 11 (1968) 1;
- [28] W. Zimmermann, *Comm. Math. Phys.* 15 (1969) 208;
- [29] J.C. Taylor, *Nucl. Phys.* B33 (1971) 173;  
A. Slavnov, *Theor. Math. Phys.* 10 (1972) 99;
- [30] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, *Ann. of Phys.* 98 (1976) 287;
- [31] O. Piguet, "Symmetries in Perturbative Quantum Field Theory", *Physics Reports* 76 (1981) 1-77;
- [32] O. Piguet, "Renormalisation en théorie quantique des champs" and "Renormalisation des théories de jauge", lectures of the Troisième cycle de la physique en Suisse Romande (1982-1983);

- [33] O. Piguet and S.P. Sorella, "*Algebraic Renormalization*", Lecture Notes in Physics, m28, Springer-Verlag, Heidelberg, 1995;
- [34] A. Boresch, S. Emery, O. Moritsch, M. Schweda, T. Sommer and H. Zerrouki "*Applications of Noncovariant Gauges in to Algebraic Renormalization Procedure*", REF.TUW 96-17, to be published by World-Scientific;
- [35] E. Klaus, "*Renormalization of the Eletroweak Standard Model to All Orders*", hep-th/9709154.
- [36] J.H. Lowenstein, *Phys. Rev.* D4 (1971) 2281; *Commun. Math. Phys.* 24 (1971) 1; Y.M.P. Lam, *Phys. Rev.* D6 (1972) 2145; *Phys. Rev.* D7 (1973) 2943; T.E. Clark and J.H. Lowenstein, *Nucl. Phys.* B113 (1976) 109;
- [37] R.F. Streater and A.S. Wightman, "*PCT, Spin and Statistic, and All That*", Benjamin, Inc., 1964;
- [38] A.H. Völkel, "*Fields, Particles and Currents*", Lecture Notes in Physics, **66**, Springer-Verlag, Berlin, 1976;
- [39] M. Schweda, J. Weigl and P. Gaigg, "*Renormalization Effects*", *Rivista Del Nuovo Cimento*, vol. 5 (1981) 1-54.