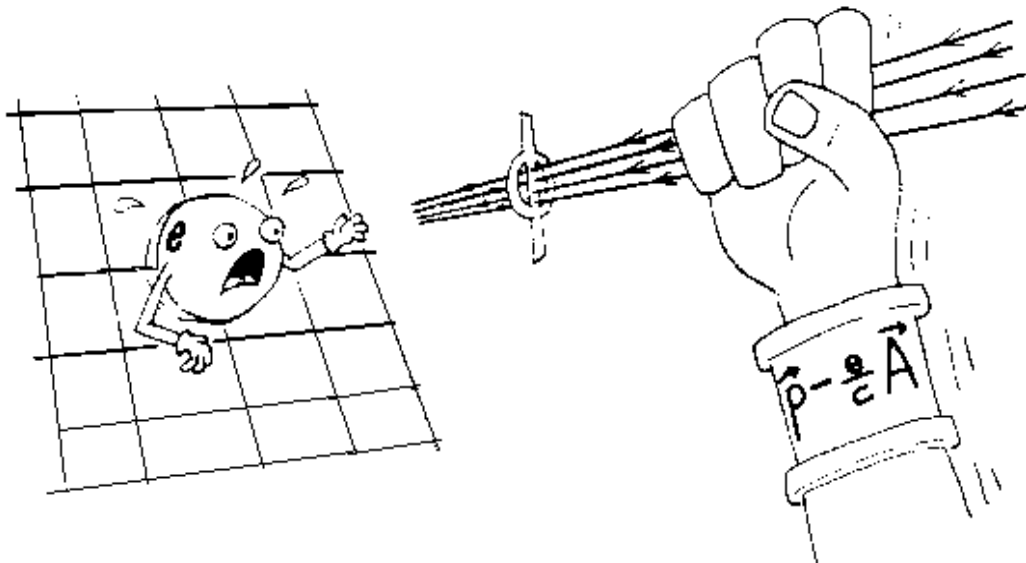


MONOGRAFIA

Ânions, Partículas Quânticas em Sistemas Planares

Germano Amaral Monerat¹



UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
RIO DE JANEIRO, FEVEREIRO DE 2000

¹monerat@if.uff.br, Universidade Federal Fluminense (UFF), Av. Litorânea s/n - Boa Viagem 24210-340 - Instituto de Física - Pós-Graduação, Niterói, R.J - Brasil.

Dedicatória

A minha esposa Carla.

Agradecimentos

- Ao Dr. José Abdala Helayél Neto (CBPF) por ter acompanhado a construção de todo este trabalho, dedicando parte de seu tempo ao esclarecimento de minhas dúvidas, e por sua paciência para com minhas dificuldades.
- Ao Dr. Nivaldo Lemos (UFF), cujas sugestões proporcionaram uma grande melhoria no presente texto.
- Ao amigo Eduardo Vasquez C. Silva, pelas discussões que possibilitaram um melhor entendimento deste assunto.
- Aos amigos Beatriz A. S. de Oliveira, Wanderclakson Santana e Paulo Barros pelas figuras presentes no texto.
- A todos aqueles que, de uma maneira ou de outra, contribuíram para com este trabalho.
- Ao CNPq pela bolsa concedida.

Prefácio

Nosso objetivo aqui é a descrição quântica e não-relativística de excitações às quais não obedecem as estatísticas de Fermi-Dirac e de Bose-Einstein, mas sim a uma estatística intermediária, que é a estatística qualquer (any). Como veremos, isto torna-se possível unicamente em (1+1) e (1+2) dimensões. Isto é devido ao fato de que em duas dimensões espaciais ($d = 2$), o spin não é quantizado; deste modo, o grupo de rotação é [Abeliano](#)!

A importância em considerarmos teorias em sistemas (1+2) dimensões vem do fato de que, até mesmo no nosso mundo tridimensional, existem sistemas essencialmente planos, como se a terceira dimensão fosse [congelada](#).

Rio de Janeiro, dezembro/99.

Germano Amaral Monerat.

Abstract

Our purpose here is to present a general review of the non-relativistic quantum-mechanical description of excitations that do not obey neither the Fermi-Dirac nor the Bose-Einstein statistics; they rather fulfill an intermediate statistics, the we called “ any-statistics ”. As we shall see, this is a peculiarity of $(1 + 1)$ and $(1 + 2)$ dimensions, due to the fact that, in two space dimensions, the spin is not quantised, once the rotation group is Abelian!

The relevance of studying theories in $(1+2)$ dimensions is justified by the evidence that, in condensed matter physics, there are examples of planar systems, for which everything goes as if the third spatial dimension is frozen.

Rio de Janeiro, december/99.

Germano Amaral Monerat.

Conteúdo

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Índice	v
Lista de figuras	vii
Introdução	1
1 Partículas Idênticas	3
1.1 Introdução	3
1.2 Estatística Fracionária em Duas dimensões	4
1.2.1 Em (1+3) Dimensões	6
1.2.2 Em (1+2) Dimensões	7
2 A Dinâmica dos Ânions	11
2.1 A Equação de Schrödinger	14
2.1.1 A Invariância de Calibre da Equação de Schrödinger	18
2.2 O Momento Angular	19
3 A Construção de Chern-Simons	23
3.1 A Solução da Equação de Chern-Simons	24
4 Ânions e o Efeito Hall	27
4.1 O Experimento Hall Clássico	27
4.2 Um Breve Histórico do Efeito Hall Quântico	30
4.2.1 O Efeito Hall Quântico	30
4.3 Os Platôs de Resistividade	31
4.3.1 A Hamiltoniana	32
4.4 O Fator de Ocupação	35
4.5 O Efeito das Impurezas	40
4.6 O Efeito Hall Quântico Fracionário	41
Conclusões Gerais	47
Apêndices	49

A	A Fase de Berry	49
B	O Efeito Aharonov-Bohm	53
	Referências	57

Lista de Figuras

1.1	Partículas Idênticas	5
1.2	Partículas Idênticas -movimento horário	5
1.3	Partículas Idênticas -movimento anti-horário	6
1.4	Partículas Idênticas em (1+3) Dimensões.	6
2.1	O Potencial \vec{A}	12
4.1	Efeito Hall Clássico	27
4.2	Efeito Hall para elétrons	28
4.3	Os Platôs da Resistividade	31
4.4	A Degenerescência dos Níveis de Landau	36
4.5	Número de Níveis Permitidos	36
4.6	A distribuição da densidade de estados $\rho(E)$ como função da Energia E	40
4.7	Sistema de dois Buracos	46
B.1	Esquema para o Efeito Aharonov-Bohm	53

Introdução

Em sistemas em $(1 + 2)$ dimensões, o grupo das rotações é Abelian, de modo que as partículas podem carregar qualquer spin real, e conseqüentemente apresentarem estatísticas fracionárias. Isto surgiu em física recentemente, com os trabalhos de *D. Finkelstein* e *J. Rubinstein*[1] (1968) e de *J. M. Leinaas* e *J. Myrheim*[2] (1977), obtendo popularidade apenas em 1982 através dos artigos de *Wilczek*[3, 4], que chamou de ânions tais partículas, pois estas carregam qualquer spin e, conseqüentemente apresentam estatísticas fracionárias. A partir de então, a introdução de ânions na física em duas dimensões cria também uma “ ponte” entre a Física da Matéria Condensada e a Teoria de Campos. Posteriormente, em 1983, *R. B. Laughlin*[5] mostrou que estas partículas apresentam um importante papel na explicação do assim chamado efeito Hall quântico fracionário, onde tais partículas podem se configurar em excitações tipo-vórtice das funções de onda de Laughlin, carregando estatística fracionária. Desta forma o estado fundamental do efeito fracionário pode ser descrito através de um condensado destes vórtices, conforme mostrado por *D. M. Haldane*[6], também em 1983.

Apesar de não existir nenhuma explicação satisfatória, alguns físicos tem cogitado uma teoria de supercondutividade aniônica como um candidato a explicar as propriedades supercondutoras observadas em certos materiais a altas temperaturas. Para o leitor interessado, sugerimos os seguintes trabalhos: *F. Wilczek, E. Witten and B. I. Halperin*[7] (1989) e *J. D. Lykken, J. Sonnenschein and N. Weiss*[8] (1991).

Recentemente, em gravitação, alguns estudos envolvendo tais partículas vêm sendo proposto, como por exemplo *S. Klishevich, M. Plyushchay*[9] (1999), no qual é apresentado um modelo com linhas de universo tipo-luz para partículas massivas em $(1 + 3)$ dimensões e em $(1 + 2)$ para ânions.

O nosso propósito é fornecer uma revisão introdutória, concisa e objetiva dos fatos mais marcantes relacionados a Física dos Ânions, fazendo o levantamento da literatura de referência existente; com isto, pretendemos motivar e justificar a relevância de se atacar problemas planares em Teoria de Campos com vistas a aplicações em sistemas de Física da Matéria Condensada.

Este trabalho desenvolve-se de acordo com a organização seguinte: no capítulo 1, revisamos um estudo sobre um sistema de partículas idênticas e suas conseqüências em $(1 + 3)$ e $(1 + 2)$ dimensões; em seguida, no capítulo 2, analisamos a dinâmica dos ânions. O capítulo 3 propõe-se a descrever a construção de Chern-Simons, para um sistema de N ânions e, no capítulo 4, fazemos um breve apanhado sobre o Efeito Hall e sua relação com tais partículas. Finalizando, apresentamos as conclusões gerais da monografia.

Capítulo 1

Partículas Idênticas

1.1 Introdução

No mundo clássico, as partículas idênticas de um determinado sistema podem ser numeradas uma a uma, o que nos permite, em princípio, acompanhar a evolução no tempo de cada uma delas ao longo de suas trajetórias. Dizemos então que a individualidade destas partículas é preservada. Porém, no nível quântico, esta situação muda drasticamente, pois, devido ao Princípio da Incerteza de Heisenberg, o conceito de trajetória não mais existe! Dessa forma, na mecânica quântica partículas idênticas perdem por completo a sua individualidade. Em outras palavras, em um sistema de partículas idênticas, ao localizarmos uma destas em um dado instante de tempo em um certo ponto, não podemos dizer de qual partícula se trata.

Suponha um sistema formado por duas partículas idênticas. Se trocarmos uma partícula pelas da outra (o que equivale a trocar os números quânticos de uma pela outra), isso não altera a configuração do sistema:

$$|\psi(q_1, q_2)|^2 = |\psi(q_2, q_1)|^2, \quad (1.1)$$

onde q_i representa as coordenadas e a projeção do spin de cada uma das partículas. Assim, as funções em (1.1) devem diferir uma da outra apenas por uma fase arbitrária:

$$\psi(q_1, q_2) = e^{i\alpha} \psi(q_2, q_1), \quad (1.2)$$

onde α é uma constante real.

Multiplicando (1.2) por $e^{i\alpha}$ temos:

$$\psi(q_2, q_1) = e^{2i\alpha} \psi(q_2, q_1), \quad (1.3)$$

donde

$$e^{2i\alpha} = 1 \Rightarrow e^{i\alpha} = \pm 1.$$

Logo

$$\psi(q_1, q_2) = \pm \psi(q_2, q_1). \quad (1.4)$$

Com o resultado dado por (1.4) observamos a existência de apenas duas possibilidades:

- A função de onda é simétrica; ou seja, não se altera com a troca das partículas;
- A função de onda é anti-simétrica; ou seja, troca de sinal com a troca das partículas.

Se $\phi_1(q)$ e $\phi_2(q)$ são estados de uma partícula, podemos escrever:

$$\psi_s(q_1, q_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(q_1)\phi_2(q_2) + \phi_1(q_2)\phi_2(q_1)), \quad (1.5)$$

$$\psi_a(q_1, q_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(q_1)\phi_2(q_2) - \phi_1(q_2)\phi_2(q_1)), \quad (1.6)$$

onde $\psi_s(q_1, q_2)$ é uma função simétrica e $\psi_a(q_1, q_2)$ é uma função anti-simétrica. Aqui, o fator $1/\sqrt{2}$, foi introduzido por motivo de normalização.

Experimentalmente verifica-se que a função de onda descrita por (1.5) corresponde a partículas de spin inteiro. Tais partículas são denominadas **bósons** e obedecem à chamada **estatística de Bose-Einstein**[10], enquanto que as partículas descritas por funções de onda do tipo (1.6) correspondem a partículas de spin semi-inteiro e são denominadas de **férmions**. Estas, por sua vez, obedecem à chamada **estatística de Fermi-Dirac**[10].

Uma consequência disto é o **Princípio de Exclusão de Pauli**¹, que estabelece que duas partículas idênticas não podem ocupar o mesmo estado quântico, pois se fizermos $q_1 = q_2$ encontramos, no caso de uma função de onda anti-simétrica,

$$\psi_a(q_1, q_2 = q_1) = 0.$$

Assim, nos parece que no mundo em que vivemos (3 dimensões espaciais) há dois tipos de partículas idênticas; bósons e férmions, as quais obedecem respectivamente às estatísticas de Bose-Einstein e Fermi-Dirac. Vimos também que uma outra diferença importante entre essas partículas se deve ao fato de os bósons não obedecerem ao princípio de exclusão de Pauli, o que significa que um mesmo estado quântico, pode ser ocupado por um número arbitrário de bósons, o que não é possível no caso dos férmions.

1.2 Estatística Fracionária em Duas dimensões

Vimos até agora que a noção de estatística está usualmente relacionada com o sinal que uma função de onda de muitos corpos adquire quando quaisquer duas partículas são trocadas. Assim sendo, vamos buscar uma definição mais geral de estatística.

Vamos supor que quando nós movemos a partícula 2 em torno da partícula 1 por um ângulo azimutal $\Delta\varphi$ (veja figura 1.1) a função de onda muda de acordo com a expressão (1.2):

$$\psi(q_1, q_2) \rightarrow \psi'(q_1, q_2) = e^{i\nu \Delta\varphi} \psi(q_1, q_2). \quad (1.7)$$

¹O Princípio de Exclusão de Pauli é obedecido apenas para partículas de Spin semi-inteiro.

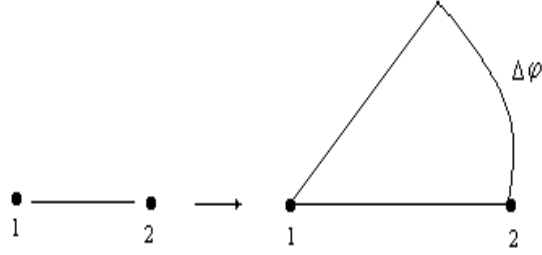


Figura 1.1: Quando a partícula 2 é movida por um ângulo $\Delta\varphi$, a função de onda muda para $\psi'(q_1, q_2)$.

Como podemos ver em (1.7), a fase adquirida pela função de onda depende do parâmetro ν , o qual costuma ser chamado de [estatística](#).

Para compreendermos melhor o significado de ν , vamos considerar a troca de duas partículas. Esta troca pode ser realizada de duas maneiras:

i) $\Delta\varphi = \pi \rightarrow \psi'(q_1, q_2) = e^{i \nu \pi} \psi(q_1, q_2)$.

Tal situação é representada pela figura 1.2.

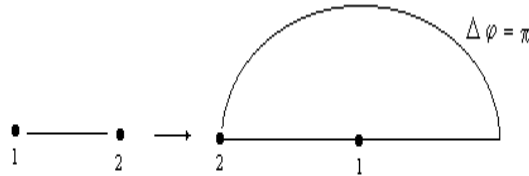


Figura 1.2: A troca de duas partículas é realizada pelo movimento anti-horário da partícula 2 em torno da partícula 1 por um ângulo $\Delta\varphi = \pi$.

Em seguida, executando uma translação rígida do centro de massa, alcançamos a configuração inicial no espaço.

(ii) $\Delta\varphi = \pi \rightarrow \psi'(q_1, q_2) = e^{-i \nu \pi} \psi(q_1, q_2)$.

Tal situação é representada pela figura 1.3.

Novamente, executando uma translação rígida do centro de massa, alcançamos a configuração inicial no espaço.

No caso (i), a função de onda adquire uma fase $e^{i \pi \nu}$, enquanto no caso (ii) adquire uma fase $e^{-i \pi \nu}$.

Por meio deste exemplo simples, veremos que existe uma grande diferença entre duas e três ou mais dimensões.

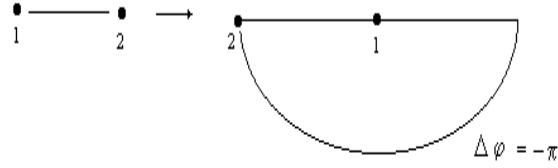


Figura 1.3: A troca de duas partículas é realizada pelo movimento horário da partícula 2 em torno da partícula 1 por um ângulo $\Delta\varphi = -\pi$.

1.2.1 Em (1+3) Dimensões

No exemplo que acabamos de considerar, os casos (i) e (ii) não apresentam qualquer diferença intrínseca. Isto fica mais claro através da figura 1.4, onde sempre nos é possível deformar a transformação (i) de maneira contínua de modo a obter (ii).

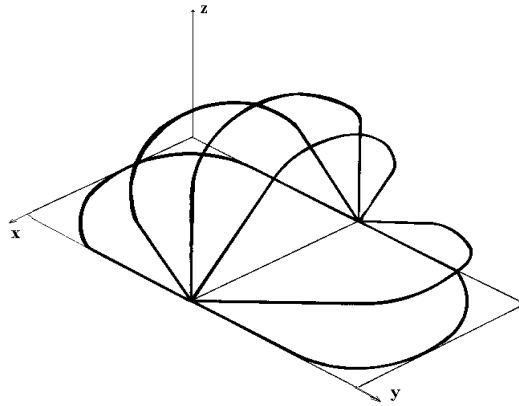


Figura 1.4: Através de uma deformação contínua do caminho, podemos levar o caso (i) no caso (ii); isso mostra que ambos são equivalentes, ou seja, descrevem a mesma física.

Logo, como vemos pela figura 1.4, ambos os casos (i) e (ii) correspondem à mesma operação física, pois podemos através de transformações contínuas, elevando o caminho (i) para a dimensão z e depois dobrando-o sobre o plano obtemos (ii). A consequência disto é que a função de onda deve-se comportar do mesmo modo em $d \geq 3$ dimensões. Dessa forma:

$$e^{i \pi \nu} = e^{-i \pi \nu}. \quad (1.8)$$

Desta equação decorre que

$$e^{i\pi\nu} = \pm 1,$$

o que equivale a dizer que há apenas dois valores possíveis para ν : $\nu = 0$ ou $\nu = 1$ (em módulo 2).

Este exemplo simples confirma o que já havíamos discutido na introdução deste trabalho, ou seja, que as estatísticas não podem ser arbitrárias. Sob a troca de duas partículas

idênticas, a função de onda apresenta-se com o mesmo sinal $\nu = 0$ (estatística de Bose-Einstein) ou um sinal menos (estatística de Fermi-Dirac), não havendo outras possibilidades.

1.2.2 Em (1+2) Dimensões

No caso de duas dimensões espaciais, a situação muda drasticamente; pois não é mais possível deformar continuamente o caminho em (i) no outro em (ii), já que, por hipótese, cada partícula não pode atravessar a outra. Desse modo, em $d = 2$ dimensões espaciais, (i) e (ii) são duas operações fisicamente distintos. Vemos assim, que o ângulo azimutal $\Delta\varphi$ em duas dimensões espaciais é uma quantidade bem definida, o que não é verdade no caso de $d \geq 3$ dimensões.

Concluimos, então, que em duas dimensões espaciais a identidade (1.8) não é mais válida e, ainda, que o parâmetro estatístico ν pode ser arbitrário, ao menos em princípio. E esses valores arbitrários assumidos por $\nu \neq 0, 1$ (módulo 2), geram uma estatística que não é a de Fermi-Dirac nem a de Bose-Einstein. Trata-se da chamada [estatística qualquer](#) ou [estatística aniônica](#). Assim sendo, as partículas que obedecem a esta estatística são denominados [ânions](#), que corresponde ao objeto de nosso estudo.

Uma conseqüência da estatística aniônica é a violação das simetrias discretas de paridade P e reversão temporal T . Em outras palavras, sob uma transformação de paridade ou reversão temporal a fase adquirida pela função de onda $\psi(q_1, q_2)$ muda de acordo com:

$$\exp(\pm i\pi\nu) \rightarrow \exp(\mp i\pi\nu),$$

para os casos (i) e (ii), respectivamente, e para $\nu \neq 0, 1$ uma violação de P e T ocorre, como podemos observar através das figuras 1.2 e 1.3. Esta é uma importante característica dos ânions.

Voltando ao nosso exemplo, este deixa bem claro que em duas dimensões espaciais ($d = 2$) não basta especificar as configurações inicial e final para caracterizar completamente o sistema; mas também torna-se necessário especificar as diferentes trajetórias torcidas ou trançadas entre si.

Como acabamos de mencionar, o caminho percorrido no caso dos ânions torna-se importante. Então, considerando M^d_N o espaço de configuração de um conjunto de N partículas idênticas em d dimensões espaciais e sendo q e q' dois pontos arbitrários em M^d_N , de acordo com a formulação padrão de integral de caminho[11] da mecânica quântica, a amplitude de probabilidade para o sistema evoluir a partir da configuração q num tempo t para uma configuração q' num tempo t' é dada por:

$$K(q', t'; q, t) = \langle q', t' | q, t \rangle \therefore$$

$$K(q', t'; q, t) = \int_{q(t)=q}^{q(t')=q'} Dq e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} \mathcal{L}[q(\tau), \dot{q}(\tau)] d\tau}, \quad (1.9)$$

onde $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ é a lagrangiana para um sistema de N partículas e o símbolo

$$\int_{q(t)=q}^{q(t')=q'} Dq$$

denota a soma sobre todos os caminhos que conectam q em um tempo t a q' em um tempo t' . O propagador $K(q', t'; q, t)$ evolui a função de onda $\psi(q, t)$ de modo único conforme

$$\begin{aligned}\psi(q', t') &= \int_{M_N^d} dq \langle q', t' | q, t \rangle \langle q, t | \psi \rangle \cdot: \\ \psi(q', t') &= \int_{M_N^d} dq \langle q', t' | q, t \rangle \psi(q, t).\end{aligned}\tag{1.10}$$

Sem nenhuma perda de generalidade, nós escolheremos $q = q'$ e assim descreveremos laços (“loops”) em M_N^d . Esta escolha é feita baseada no fato de os laços serem invariantes topológicos e carregarem consigo o conteúdo físico da teoria.

Dois laços são considerados equivalentes (ou homotópicos) se um pode ser obtido a partir do outro por uma deformação contínua.

Todos os laços são agrupados em uma classe e o conjunto de todas as classes de equivalência é chamado de **Grupo Fundamental**, e é representado por π_1 . Então, um elemento de $\pi_1(M_N^d)$ a classe de todos os laços em M_N^d que podem ser continuamente deformados um no outro. Em outras palavras, laços pertencentes a dois diferentes elementos de $\pi_1(M_N^d)$ não podem ser conectados por uma transformação contínua. Com isso, basta consideramos apenas um laço de cada classe homotópica diferente e então efetuarmos a soma sobre as classes homotópicas $\alpha \in \pi_1(M_N^d)$ e para uma integral de caminho em cada classe. Dessa forma, (1.9) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}K(q', t'; q, t) &= \sum_{\alpha \in \pi_1(M_N^d)} K_\alpha(q', t'; q, t) \cdot: \\ K(q', t'; q, t) &= \sum_{\alpha \in \pi_1(M_N^d)} \int_{q(t)=q}^{q(t')=q'} Dq_\alpha e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau \mathcal{L}[q_\alpha(\tau), \dot{q}_\alpha(\tau)]}\end{aligned}\tag{1.11}$$

A expressão (1.11) representa a decomposição da amplitude $K(q', t'; q, t)$ em uma soma de subamplitudes $K_\alpha(q', t'; q, t)$ para os quais unicamente laços homotópicos contribuem. Assim, podemos em princípio associar diferentes pesos a diferentes subamplitudes $K_\alpha(q', t'; q, t)$ de modo que preservemos as regras convencionais para a composição de probabilidades. Logo, (1.11) pode ser escrita na forma:

$$K(q', t'; q, t) = \sum_{\alpha \in \pi_1(M_N^d)} \xi(\alpha) \int_{q(t)=q}^{q(t')=q'} Dq_\alpha e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau \mathcal{L}[q_\alpha(\tau), \dot{q}_\alpha(\tau)]},\tag{1.12}$$

onde $\xi(\alpha)$ são números complexos. Para (1.12) fazer sentido como amplitude de probabilidade, os pesos $\xi(\alpha)$ não podem ser arbitrários, mas devem satisfazer

$$\xi(\alpha) \xi(\beta) = \xi(\alpha \beta),\tag{1.13}$$

mantendo assim as regras usuais para combinação de probabilidades.

Quanto ao espaço $M_N^{d=2}$ e seu grupo fundamental, consideraremos um sistema de N partículas idênticas movendo-se em um espaço euclidiano de dimensão $d = 2$, $\mathfrak{R}^{d=2}$. A configuração do sistema de N partículas idênticas é especificada por um elemento de

$$(\mathfrak{R}^{d=2})^N = \mathfrak{R}^{d=2} \otimes \dots \otimes \mathfrak{R}^{d=2}. \quad (1.14)$$

Contudo estamos supondo que tais partículas não podem ocupar a mesma posição, de modo que nós temos que remover a diagonal generalizada:

$$\Delta = \{(r_1, \dots, r_N) \in (\mathfrak{R}^{d=2})^N, r_i = r_j \text{ para algum } i \neq j\}. \quad (1.15)$$

As partículas em questão são idênticas e indistinguíveis, de modo que nós devemos identificar configurações que difiram somente no ordenamento das partículas. Em outras palavras, nós dividiremos pelo grupo das permutações S_N . Assim, o espaço de configuração para nosso sistema é

$$M_N^{d=2} = \frac{(\mathfrak{R}^{d=2})^N - \Delta}{S_N} \quad (1.16)$$

Encontrar o grupo fundamental de um tal espaço é um problema padrão em topologia algébrica, o qual foi apresentado e resolvido nos anos 60 (Fadell e Newirth 1962; Fox e Neuwirth 1962; Fadell e VanBuskirk 1962). Aqui, nós apresentaremos simplesmente o resultado e faremos referência à literatura especializada para a sua demonstração. Prova-se que o grupo fundamental de M_N^d é

$$\pi_1(M_N^d) = \begin{cases} S_N & , \text{ se } d \geq 3 \\ B_N & , \text{ se } d = 2 \end{cases} \quad (1.17)$$

onde B_N é o grupo fundamental das tranças de Artin de N objetos, que contém o grupo das permutações como um subgrupo (Artin 1926, 1947).

Capítulo 2

A Dinâmica dos Ânions

Considere uma partícula pontual interagindo com um campo magnético (sem campo elétrico). A lagrangiana para tal sistema é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \quad (2.1)$$

ou

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^i \cdot \dot{r}^i + \frac{e}{c}\dot{r}^i \cdot \vec{A}(r^i), \quad (2.2)$$

onde $\vec{A}(r^i)$ é o potencial vetor do campo eletromagnético; r^i é o vetor posição da i -ésima partícula; m sua massa e e sua carga. Chamando $\vec{A}(r^i) \equiv A^i$, as equações de movimento de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r^l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}^l} = 0$$

fornecem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r^l} &= \frac{e}{c} \dot{r}^i \frac{\partial A^i}{\partial r^l} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}^l} &= m\dot{r}^l + \frac{e}{c} A^l. \end{aligned}$$

Então:

$$m\ddot{r}^l + \frac{e}{c} \left(\frac{dA^l}{dt} - \dot{r}^i \frac{\partial A^i}{\partial r^l} \right) = 0.$$

Porém:

$$\frac{dA^l}{dt} = \frac{\partial A^l}{\partial r^i} \frac{dr^i}{dt} = \frac{\partial A^l}{\partial r^i} \dot{r}^i.$$

Assim:

$$m\ddot{r}^l + \frac{e}{c} \dot{r}^i \left(\frac{\partial A^l}{\partial r^i} - \frac{\partial A^i}{\partial r^l} \right) = 0. \quad (2.3)$$

Nós definimos o campo magnético em duas dimensões espaciais como:

$$B = \epsilon_{ij} \partial^i A^j, \quad (2.4)$$

onde ϵ_{ij} é o tensor de Levi-Civita em duas dimensões¹, sendo, assim, totalmente anti-simétrico. A partir daqui, obtemos:

$$\begin{aligned}\epsilon_{lm}B &= \epsilon_{lm}\epsilon_{ij}\partial^i A^j \quad \therefore \\ \epsilon_{lm}B &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial^i A^j \quad \therefore \\ \epsilon_{lm}B &= \partial_l A^m - \partial_m A^l\end{aligned}\quad (2.5)$$

Dessa maneira, a expressão (2.3) em termos de B apresenta a seguinte forma:

$$m\ddot{r}^l + \frac{e}{c}\epsilon^{il}\dot{r}_i B = 0. \quad (2.6)$$

Tal expressão, possui seu análogo em três dimensões

$$m\ddot{\vec{r}} + \frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \times \vec{B} = 0,$$

onde $\vec{B} = B\hat{e}_k$, sendo a força de Lorentz:

$$\vec{F} = -\frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \times \vec{B}.$$

Vamos supor que \vec{A} seja potencial vetor de um campo do tipo de um solenóide. Assim haverá um campo magnético constante dentro do solenóide, o qual se anula fora dele cuja forma possível é

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{f(r)}{2\pi} \frac{\hat{e}_\theta}{r}, \quad (2.7)$$

onde $f(r)$ deve ter um comportamento tal que para $r > R$, onde R é o raio do solenóide, a função $f(r)$ seja constante. Este comportamento é representado pela figura 2.1.

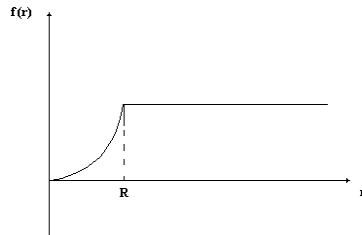


Figura 2.1: O potencial \vec{A} tem o caráter de um vórtice. Repare que para $r > R$, onde R é o raio do solenóide a função $f(r)$ é constante, de modo que para tais valores de r o campo magnético associado é nulo.

Na notação vetorial

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{f(r)}{2\pi} \frac{\hat{e}_\theta}{r} \quad (2.8)$$

¹Consideraremos que a partícula encontra-se num espaço com métrica euclidiana, de modo que $A^m = A_m$.

\vec{A} então tem um caráter de um vórtice, com o comportamento assintótico

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{f(\infty)}{2\pi} \frac{\hat{e}_\theta}{r}. \quad (2.9)$$

Repare que:

$$\frac{\hat{e}_\theta}{r} = \vec{\nabla} \arg(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2.10)$$

Vemos que \vec{A} tende a um calibre puro no infinito. Desta forma, através de uma transformação de calibre do tipo

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}_S = \vec{A} + \vec{\nabla}\Omega \quad (2.11)$$

onde

$$\Omega = -\frac{f(\infty)}{2\pi} \arg(\vec{r}) \quad (2.12)$$

obtemos:

$$\vec{A}_S = \frac{1}{2\pi} (f(r) - f(\infty)) \vec{\nabla} \arg(\vec{r}). \quad (2.13)$$

Utilizando a transformação de calibre (2.13), o campo magnético B dado por (2.5) fica so a forma:

$$\begin{aligned} B_S &= \epsilon_{ij} \partial^i A_S^j \quad \therefore \\ B_S &= \epsilon_{ij} \partial^i A^j + \epsilon_{ij} \partial^i \partial^j \Omega \quad \therefore \\ B_S &= B - \frac{f(\infty)}{2\pi} \epsilon_{ij} \partial^i \partial^j \arg(\vec{r}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Vamos agora calcular o termo $\epsilon_{ij} \partial^i \partial^j \arg(\vec{r})$. Assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \arg(r) &= \frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \text{e} \\ \frac{\partial}{\partial y} \arg(r) &= \frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Em uma forma mais compacta:

$$\partial^i \arg(r) = -\epsilon^{ij} \frac{r_j}{r^2} \quad (2.15)$$

Aplicando ϵ_{il} em (2.15) temos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{il} \partial^i \arg(r) &= -(\delta_i^i \delta_l^j - \delta_i^j \delta_l^i) \frac{r_j}{r^2} \quad \therefore \\ \epsilon_{il} \partial^i \arg(r) &= -(2\delta_l^j - \delta_l^j) \frac{r_j}{r^2} \quad \therefore \\ \epsilon_{il} \partial^i \arg(r) &= -\frac{r_l}{r^2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

A expressão (2.16) pode ainda ser reescrita como:

$$\epsilon_{ij} \partial^j \arg(r) = \partial_i \ln r \quad (2.17)$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. A equação (2.17) é conhecida como a equação de Cauchy-Riemann[12]. Atuando o operador ∂^l em (2.17) temos:

$$\epsilon_{ij} \partial^i \partial^j \arg(r) = \partial^i \partial_i \ln(r). \quad (2.18)$$

O segundo membro de (2.18) irá se anular sempre que $\vec{r} \neq \vec{0}$. Podemos escrever a expressão (2.18) na forma

$$\epsilon_{ij} \partial^i \partial^j \arg(r) = 2\pi \delta^2(\vec{r}), \quad (2.19)$$

onde $\delta^2(\vec{r})$ é a função delta de Dirac[13]. Assim, o campo magnético B_S dado por (2.14) pode ser reescrito como:

$$B_S = B + \delta B \quad (2.20)$$

onde:

$$\delta B = -f(\infty) \delta^2(\vec{r}). \quad (2.21)$$

De acordo com (2.20), a transformação de calibre (2.13) induz um campo magnético adicional na origem da forma (2.21). Como a transformação de calibre não deve mudar o campo B , nós devemos excluir a origem (pelo menos no nível clássico). Para isso, vamos supor que através de algum mecanismo, nossa partícula pontual encontra alguma barreira em $r = 0$, impedindo assim que ela passe por este ponto.

Agora, vejamos que efeito, no nível quântico, esta transformação de calibre produz.

2.1 A Equação de Schrödinger

Para a descrição quântica, vamos considerar a formulação hamiltoniana, obtida a partir da lagrangiana (2.1). Para isso, primeiramente devemos obter o [momento conjugado](#) a \vec{r} :

$$P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}^i} = m \dot{r}^i + \frac{e}{c} A^i(r). \quad (2.22)$$

A função de Hamilton ou hamiltoniana do sistema[14] é dada por:

$$\mathcal{H} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{P} - \mathcal{L}. \quad (2.23)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{m} \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{P} - \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(r). \quad (2.24)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left[P^2 - \frac{e}{c} (\vec{P} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{P}) + \frac{e^2}{c^2} A^2 \right]. \quad (2.24)$$

A hamiltoniana (2.24) encontra-se na forma [Hermitiana](#)[15], e comumente é expressa sob a forma:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \quad (2.25)$$

ou

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \vec{\Pi}^2, \quad (2.26)$$

onde $\vec{\Pi} = m\dot{\vec{r}}$ é chamado de **momento orbital**[15]. Como sabemos, a variação da energia cinética em função do tempo é o trabalho realizado pelo campo sobre a partícula (em unidades de tempo). Assim:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\dot{\vec{r}}}{m} \cdot \ddot{\vec{r}}. \quad (2.27)$$

Substituímos em (2.28) a expressão (2.6) vemos que:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{e}{mc} \epsilon^{il} \dot{r}_i \cdot \dot{r}_l B = 0, \quad (2.28)$$

lembrando que o produto de um tensor antisimétrico de segunda ordem por um tensor simétrico, também de segunda é nulo[13]. Dessa forma, vemos que o campo magnético não realiza trabalho sobre a partícula carregada.

O processo de quantização canônica[16] consiste em transformar as variáveis canônicas em operadores e os parêntes de Poisson[14] em comutadores[10]. Assim sendo, vamos obter os comutadores da nossa teoria. São eles:

$$\begin{aligned} [r^i, r^j] &= r^i r^j - r^j r^i = 0 \\ [\Pi^i, \Pi^j] \varphi &= \Pi^i \Pi^j \varphi - \Pi^j \Pi^i \varphi \therefore \\ [\Pi^i, \Pi^j] \varphi &= \left[\left(P^i - \frac{e}{c} A^i \right) \left(P^j - \frac{e}{c} A^j \right) \varphi - \left(P^j - \frac{e}{c} A^j \right) \left(P^i - \frac{e}{c} A^i \right) \varphi \right] \therefore \\ [\Pi^i, \Pi^j] \varphi &= \left[P^i P^j \varphi - \frac{e}{c} P^i (A^j \varphi) - \frac{e}{c} A^i P^j \varphi + \frac{e^2}{c^2} A^i A^j \varphi - P^j P^i \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e}{c} P^j (A^i \varphi) + \frac{e}{c} A^j P^i \varphi - \frac{e^2}{c^2} A^j A^i \varphi \right]. \end{aligned}$$

Supondo que φ tenha derivadas segundas contínuas, o que acarreta a comutatividade das derivadas parciais, e ainda lembrando que

$$\hat{P}^l = -i\hbar \partial^l, \quad (2.29)$$

temos

$$[\Pi^i, \Pi^j] \varphi = -\frac{i\hbar e}{c} \varphi \left(\frac{\partial A^i}{\partial r^j} - \frac{\partial A^j}{\partial r^i} \right). \quad (2.30)$$

Utilizando a expressão (2.5) podemos reescrever (2.30) na forma

$$[\Pi^i, \Pi^j] = -\frac{i\hbar e}{c} \epsilon^{ij} B(r). \quad (2.31)$$

Consideremos agora o comutador $[r^i, \Pi^j]$:

$$\begin{aligned}
 [r^i, \Pi^j]\varphi &= \left[r^i \left(P^j - \frac{e}{c} A^j(r) \right) \varphi - \left(P^j - \frac{e}{c} A^j(r) \right) r^i \varphi \right] \therefore \\
 [r^i, \Pi^j]\varphi &= i\hbar \varphi \frac{\partial r^i}{\partial r^j} \therefore \\
 [r^i, \Pi^j] &= i\hbar \delta^{ij}. \tag{2.32}
 \end{aligned}$$

Com o que vimos, podemos resumir as relações de comutação obtidas:

$$\begin{cases} [r^i, r^j] = 0 \\ [\Pi^i, \Pi^j] = -\frac{i\hbar e}{c} \epsilon^{ij} B(r) \\ [P^i, P^j] = 0 \\ [r^i, \Pi^j] = i\hbar \delta^{ij}. \end{cases} \tag{2.33}$$

Então, usando as relações de comutação (2.33), podemos obter a versão quântica da força de Lorentz, com a ajuda da equação de movimento de Heisenberg²[15]:

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 r^i}{dt^2} &= \frac{d\Pi^i}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\Pi^i, \mathcal{H}] \therefore \\
 m \frac{d^2 r^i}{dt^2} &= \frac{1}{2mi\hbar} (\Pi^i \Pi^{j^2} - \Pi^{j^2} \Pi^i) \therefore \\
 m \frac{d^2 r^i}{dt^2} &= \frac{1}{2mi\hbar} \left((\Pi^i \Pi^j) \Pi^j - \Pi^j (\Pi^i \Pi^j) - \frac{i\hbar e}{c} \Pi^j \epsilon^{ij} B \right) \therefore \\
 m \frac{d^2 r^i}{dt^2} &= \frac{-e}{2mc} (\epsilon^{ij} B \Pi^j - \Pi^j \epsilon^{ji} B) \therefore \\
 m \frac{d^2 r^i}{dt^2} &= \frac{-e}{2c} (\epsilon^{ij} B \dot{r}^j - \dot{r}^j \epsilon^{ji} B). \tag{2.34}
 \end{aligned}$$

A expressão (2.34) é a versão quântica da força de Lorentz em duas dimensões espaciais, no caso de uma partícula carregada num campo magnético.

Com relação a equação de Schrödinger

$$\mathcal{H}\Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi, \tag{2.35}$$

²Na visão de Heisenberg os operadores evoluem no tempo, mas o vetor de estado não.

onde \mathcal{H} é o operador hamiltoniano (2.25), esta equação deve ser invariante de calibre pois é dela que deduzimos as predições de situações físicas, que devem ser unívocas, não podendo assim depender de uma função arbitrária Ω . A equação de Schrödinger (2.35) também pode ser escrita como:

$$\left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}(r)\right)^2 \Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \quad (2.36)$$

Repare que, enquanto a transformação de calibre (2.13) transforma a hamiltoniana (2.25) para

$$\mathcal{H}_S = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}_S(r)\right)^2 \quad (2.37)$$

com

$$\vec{A}_S = \vec{A}(r) + \frac{\delta\Phi}{2\pi}\vec{\nabla}arg(r), \quad (2.38)$$

onde chamamos $\delta\Phi = -f(\infty)$, e a função de onda de Schrödinger deve ser submetida ao mapeamento

$$\Psi(r, t) \rightarrow \Psi(r, t)_S = e^{\frac{i}{\hbar} \frac{e}{2\pi} \delta\Phi arg(r)} \Psi(r, t). \quad (2.39)$$

Pode-se mostrar que, nestas condições, a equação de Schrödinger é invariante de calibre[15].

2.1.1 A Invariância de Calibre da Equação de Schrödinger

Podemos postular que a equação de Schrödinger deve ser invariante de calibre, pois é desta equação que deduzimos as predições de situações físicas, que devem ser unívocas, não podem depender de uma função arbitrária Ω . Este postulado também exige que a função de onda ser transforme segundo (2.39). No caso de uma transformação global de fase, onde a função Ω é uma constante, a invariância da equação de Schrödinger verifica-se imediatamente. Porém quando a função $\Omega = \Omega(x)$ (invariância local de fase), a verificação não é tão evidente.

Aqui Ω é uma função do operador posição \hat{r} . Para que a equação de Schrödinger seja invariante de calibre é necessário que o valor esperado dos operadores \hat{r} e $(\hat{P} - \frac{e}{c}\vec{A})$ não se alterem em consequência da transformação de calibre. Em outras palavras:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \Psi^*(r, t) \hat{r} \Psi(r, t) dr = \int \Psi_S^*(r, t) \hat{r} \Psi_S(r, t) dr \\ \int \Psi^*(r, t) \left(\hat{P} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \Psi(r, t) dr = \int \Psi_S^*(r, t) \left(\hat{P} - \frac{e}{c}\vec{A}_S \right) \Psi_S(r, t) dr \end{array} \right. \quad (2.40)$$

onde Ψ é a função de onda na presença de \vec{A} , enquanto Ψ_S é a função de onda na presença de \vec{A}_S . A validade das propriedades (2.40) é garantida se

$$\eta^\dagger \hat{r} \eta = \hat{r}, \quad (2.41)$$

onde

$$\eta = \exp \left\{ \frac{ie}{2\pi\hbar c} \Omega \right\}. \quad (2.42)$$

Então:

$$\eta^\dagger \left(P - \frac{e\vec{A}}{c} - \frac{e\vec{\nabla}\Omega}{2\pi\hbar c} \right) \eta = P - \frac{e\vec{A}}{2\pi\hbar c}. \quad (2.43)$$

Isso ocorre pois:

$$\begin{aligned} \eta^\dagger P \eta &= \exp \left(\frac{-ie}{2\pi\hbar c} \Omega \right) P \exp \left(\frac{ie}{2\pi\hbar c} \Omega \right) \therefore \\ \eta^\dagger P \eta &= \exp \left(\frac{-ie}{2\pi\hbar c} \Omega \right) \left[P, \exp \left(\frac{-ie}{2\pi\hbar c} \Omega \right) \right] + P \therefore \\ \eta^\dagger P \eta &= P + \frac{e}{2\pi\hbar c} \nabla \Omega. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Então, a equação de Schrödinger é invariante de calibre. Mas, devemos estar cientes que a equação de Schrödinger é invariante de Galileo, enquanto que o calibre de Lorentz é invariante de Lorentz. E é por isso que devemos postular que a equação de Schrödinger deva transforma-se segundo (2.39).

2.2 O Momento Angular

O operador momento angular (conservado), gerador de rotações de nosso sistema de uma partícula é definido como

$$\vec{J}_c = \vec{r} \times \vec{P}. \quad (2.45)$$

Então, de acordo com o que vimos no capítulo anterior,

$$\begin{aligned} \vec{J}_c &= \vec{r} \times \left(m\dot{\vec{r}} + \frac{e}{2\pi\hbar c} \vec{A}(r) \right) \therefore \\ \vec{J}_c &= \vec{r} \times m\vec{v} + \frac{e}{2\pi\hbar c} \vec{r} \times \vec{A}(r). \end{aligned} \quad (2.46)$$

De acordo com (2.8), podemos escrever o potencial vetor na forma

$$\vec{A}(r) = \frac{\Phi}{2\pi} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \hat{e}_i + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{e}_j \right), \quad (2.47)$$

de modo que

$$\vec{J}_c = \vec{J} + \frac{e}{2\pi\hbar c} \Phi, \quad (2.48)$$

onde

$$\vec{J} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (2.49)$$

é invariante de calibre o momento angular orbital. A diferença entre \vec{J}_c e \vec{J} deve-se unicamente ao fluxo do campo magnético Φ de um solenóide. Tanto na ausência quanto na presença de Φ , o momento angular canônico é representado pelo operador da mecânica quântica:

$$J_c = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (2.50)$$

onde θ é o ângulo polar no plano.

Quando ele atua sobre uma função de onda unívoca com dependência angular $e^{im\theta}$, temos

$$\begin{aligned} J_c \psi &= j_c \psi \therefore \\ j_c &= \hbar m \quad ; m \in Z, \end{aligned} \quad (2.51)$$

onde j_c corresponde aos autovalores do operador J_c .

Então, o espectro de J_c é sempre o convencional. Está claro que quando $\Phi = 0$ temos $J_c = J$, de modo que o momento angular orbital tem unicamente autovalores inteiros. Contudo, quando $\Phi \neq 0$, isto não é inteiramente verdadeiro. De (2.48) temos

$$J = J_c - \frac{e}{2\pi\hbar c} \Phi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{e}{2\pi\hbar c} \Phi,$$

o qual atuando sobre uma função de onda do tipo $\Psi_j(\theta)$ apresenta autovalores:

$$j = \hbar \left(m - \frac{e\Phi}{\hbar c} \right), \quad m \in Z. \quad (2.52)$$

Então o espectro de J consiste em inteiros deslocados por $\frac{-e\Phi}{\hbar c}$.

Geralmente, na mecânica quântica, nós nunca consideramos o momento angular orbital, uma vez que a quantidade conservada é apenas a canônica. Porém aqui, o valor inteiro do momento angular canônico é dividido em duas partes:

$$J_c = J + \frac{e\Phi}{2\pi\hbar c}.$$

Quando variamos Φ de um valor inicial $\Phi = 0$ onde $J_c = J$ até um valor Φ num tempo t , temos que J_c ainda mantém seus autovalores constantes e inteiros porque é uma grandeza conservada em consequência da invariância de rotação do sistema para o qual J_c é a carga conservada de Noether. Porém quando o fluxo alcança seu valor final Φ , temos que J (momento orbital) apresenta autovalores não inteiros, apesar de que o momento angular total (canônico) permanece inteiro. Assim, a interação com o campo magnético externo, pela variação de Φ em (2.47) a qual supomos ocorrer de forma adiabática, faz com que o momento angular de nossa partícula

$$J_c = J + \frac{e\Phi}{2\pi\hbar c} \quad (2.53)$$

permaneça inalterado, isto é:

$$\dot{J} = -\frac{e}{2\pi\hbar c} \dot{\Phi}. \quad (2.54)$$

A dependência temporal do campo magnético induz um campo elétrico de acordo com a lei de Faraday, dada por:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(r, t) = -\frac{\partial B(r, t)}{\partial t} \quad \therefore$$

$$\vec{E}(r, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(r, t) \quad \therefore \quad (2.55)$$

$$\vec{E}(r, t) = -\frac{1}{2\pi\hbar c} \dot{\Phi}(t) \vec{\nabla} \arg(r), \quad (2.56)$$

correspondentemente nós temos:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\dot{\vec{r}} + \vec{r} \times (m\ddot{\vec{r}}) \quad \therefore$$

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}}. \quad (2.57)$$

Note que a força que aparece no segundo membro corresponde à força externa que, no presente caso vem a ser $e\vec{E}(r, t)$. Logo:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{J}}{dt} &= \vec{r} \times e\vec{E}(r, t) \quad \therefore \\ \frac{d\vec{J}}{dt} &= \frac{-e}{2\pi\hbar c} \dot{\Phi}(t) \vec{r} \times \vec{\nabla} \arg(r) \quad \therefore \\ \frac{d\vec{J}}{dt} &= \frac{-e}{2\pi\hbar c} \dot{\Phi}(t),\end{aligned}\tag{2.58}$$

com a condição inicial

$$J = m, \quad t = 0; \quad m \in Z.\tag{2.59}$$

E num tempo final t

$$J = -\frac{e\Phi}{2\pi\hbar c} \neq m.\tag{2.60}$$

Vemos que (2.58) está de acordo com (2.54). Então J adquire valores não inteiros, enquanto que o momento angular total permanece inteiro.

Baseado no que vimos até então, vamos considerar um sistema bidimensional composto por dois ânions idênticos, ou seja, elétrons com carga e associados a um fluxo de campo magnético, através de um potencial vetor tipo-vórtice dado por (2.8).

Para estabelecer as propriedades estatísticas dessas partículas, vamos considerar que a função de onda deste sistema é $\Psi(1, 2)$. Movendo lentamente a partícula 1 em torno da outra por um ângulo $\Delta\varphi = 2\pi$, a função de onda do sistema se altera de acordo com (1.7), apresentando a seguinte forma:

$$\Psi'(1, 2) = e^{2\pi i\nu} \Psi(1, 2).\tag{2.61}$$

Por outro lado, de acordo com *Aharonov-Bohm*³, a presença de um vórtice apesar de não afetar a dinâmica clássica de uma partícula carregada, isto tem profundas consequências em mecânica quântica. Quando uma partícula é movida em torno de um vórtice, sob uma trajetória fechada γ , a função de onda adquire uma fase (veja apêndice B) do tipo:

$$e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r}}.\tag{2.62}$$

O uso do *teorema de Stokes* nos permite escrever (2.62) na forma:

$$e^{\frac{2\pi ie\Phi}{\hbar c}},\tag{2.63}$$

onde Φ é o fluxo do campo eletromagnético.

No caso do sistema de dois ânions, quando as partículas estão girando cada uma em torno da outra, surgem duas contribuições a fase:

³Maiores detalhes veja o apêndice B - O Efeito Aharonov-Bohm.

- a primeira devido ao movimento da partícula carregada em torno do campo de vórtice da segunda;
- a outra, devido ao movimento da segunda partícula carregada em torno do campo de vórtice da primeira.

Assim, a fase total adquirida pela função de onda $\Psi(1, 2)$ sobre uma rotação de 2π é

$$e^{\frac{2\pi}{hc} \frac{2ie\Phi}{hc}}. \quad (2.64)$$

Dessa forma, de acordo com o chamado *efeito Aharonov-Bohm*, a função de onda do sistema fica na forma:

$$\Psi'(1, 2) = e^{\frac{2\pi}{hc} \frac{2ie\Phi}{hc}} \Psi(1, 2). \quad (2.65)$$

Comparando (2.61) com (2.65) temos:

$$\nu = \frac{2e\Phi}{hc}. \quad (2.66)$$

Vemos então, que ânions apresentam uma estatística fracionária, tendo em vista que ν dado por (2.66) não é um número inteiro.

Uma outra maneira de descrevermos um sistema como este, porém, para muitos ânions, é através da chamada *construção de Chern-Simons*, a qual será apresentada a seguir.

Capítulo 3

A Construção de Chern-Simons

Neste capítulo, apresentaremos a construção de Chern-Simons para descrição de um sistema de N ânions no qual as coordenadas $r^i(t)$ são variáveis dinâmicas, cuja dinâmica é determinada pelas equações de movimento de Euler-Lagrange e equações do tipo Maxwell, respectivamente. Assim, tal sistema apresenta a seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m \dot{r}_\alpha^2 - e \int d^2x J_\mu(\vec{x}, t) A^\mu(\vec{x}, t) + \mathcal{L}_{CS}, \quad (3.1)$$

onde o termo de Maxwell¹ foi substituído pelo termo topológico de Chern-Simons, que é dado por:

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\xi}{4\pi} \int d^2x \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\lambda A_\nu \quad (3.2)$$

e ξ é o coeficiente de Chern-Simons e A^μ é o 3-potencial de um solenoide localizado na origem do sistema de coordenadas, de modo que trata-se de um calibre puro, o qual pode ser escrito sob a seguinte forma vetorial:

$$\vec{A}(r) = \frac{\Phi}{2\pi\hbar c} \vec{\nabla} \arg(\vec{r}). \quad (3.3)$$

A substituição do termo de Maxwell pelo de Chern-Simons deve-se ao fato de que o termo de Maxwell levaria a equações do tipo

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}(\vec{x}, t) = e J^\mu(\vec{x}, t), \quad (3.4)$$

(após a derivação funcional com respeito a A^μ) o que não descreve a dinâmica dos ânions. Isto porque para o presente caso os campos $\vec{E}(\vec{x}, t)$ e $B(\vec{x}, t)$ devem existir apenas localmente (não podendo propagarem-se); o que nos leva ao termo de Chern-Simons, o qual relaciona tais campos com as componentes do 3-vetor J^μ dado por:

$$J^\mu = \begin{pmatrix} \sum_\alpha \delta^2(\vec{x} - \vec{r}_\alpha(t)) \\ \sum_\alpha \dot{r}_\alpha^i(t) \delta^2(\vec{x} - \vec{r}_\alpha(t)) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

¹A lagrangiana de Maxwell é dada por $L_M = -\frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, onde $F_{\mu\nu}$ corresponde ao tensor do campo eletromagnético, o qual é definido como $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

A dedução das equações de movimento de Euler-Lagrange para as coordenadas das partículas é um pouco mais sutil. Temos que nos lembrar de que a dependência de J^μ no tempo entra através das coordenadas das partículas. Então:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_\alpha^i} = m\dot{r}_\alpha^i + eA^i(r_\alpha(t), t) \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_\alpha^i} = m\ddot{r}_\alpha^i + e\dot{r}_\alpha^j \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^j} \right)_{\vec{x}=\vec{r}_\alpha} + e\partial_0 A^i(\vec{r}_\alpha, t) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_\alpha^i} = -e \int d^2x \frac{\partial \delta^2(\vec{x} - \vec{r}_\alpha) A^0}{\partial r_\alpha^i} + e \int d^2x \dot{r}_\alpha^j \frac{\partial \delta^2(\vec{x} - \vec{r}_\alpha) A_j}{\partial r_\alpha^i} \quad (3.8)$$

ou

$$m\ddot{r}_\alpha^i + e\dot{r}_\alpha^j \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^j} - \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \right)_{x=r_\alpha} + e(\partial_0 A^i - \partial_i A^0)_{x=r_\alpha} = 0. \quad (3.9)$$

Esta por sua vez pode ser escrita na forma:

$$m\ddot{r}_\alpha^i + e\epsilon_{ij}\dot{r}_\alpha^j B(r_\alpha, t) - eE^i(r_\alpha, t) = 0. \quad (3.10)$$

A expressão (3.10) é a versão bidimensional da força de Lorentz. Para a descrição de um sistema de N ânions interagindo, temos que fazer a derivação funcional da lagrangiana (3.1) em relação a A^μ . Tal variação fornece

$$\epsilon_{\mu\lambda\nu} F^{\lambda\nu}(\vec{x}, t) = \frac{4\pi}{\xi} J_\mu(\vec{x}, t), \quad (3.11)$$

a qual substitui as equações de Maxwell (3.4), enquanto que as equações de Euler-Lagrange (3.10) permanecem válidas.

3.1 A Solução da Equação de Chern-Simons

As equações de Chern-Simons (3.11) podem ser escritas como equações de vínculos para os campos elétrico e magnético, na forma

$$B = \frac{2\pi}{\xi} \rho, \quad (3.12)$$

$$E^i = \frac{2\pi}{\xi} \epsilon^{ij} J_j, \quad (3.13)$$

onde

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y \\ -E_x & 0 & B \\ -E_y & -B & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Utilizando a definição para o campo magnético B temos de acordo com (3.12):

$$\epsilon_{ij}\partial^i A^j = \frac{2\pi}{\xi}\rho. \quad (3.15)$$

Para encontrarmos a solução da equação (3.15), primeiramente devemos escrever o inverso do operador $\epsilon_{ij}\partial^i$, que é dado por

$$K^j(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi}\epsilon^{jk}\partial_k \ln|\vec{x}| \quad (3.16)$$

e satisfaz

$$\epsilon_{ij}\partial^i K^j(\vec{x}) = \delta^2(\vec{x}). \quad (3.17)$$

Assim, (3.16) pode ser escrita também na forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{K}(\vec{x}) = -\delta^2(\vec{x}). \quad (3.18)$$

Isto é conveniente para introduzir também o inverso do operador de Laplace:

$$G(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\ln|\vec{x}^2|, \quad \vec{\nabla}^2 G(\vec{x}) = \delta^2(\vec{x}). \quad (3.19)$$

Dessa forma, vemos que $K^i(\vec{x})$ e $G(\vec{x})$ são relacionados por

$$K^i(\vec{x}) = \epsilon^{ij}\partial_j G(\vec{x}). \quad (3.20)$$

Então, a solução de (3.15) é dada por

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{2\pi}{\xi} \int d^2y \vec{K}(\vec{x} - \vec{y}) \rho(\vec{y}, t), \quad (3.21)$$

ou também

$$A^i(\vec{x}, t) = \frac{1}{\xi} \sum_{\alpha} \epsilon_{ij} \frac{(x - r_{\alpha})^j}{|x - r_{\alpha}(t)|^2}. \quad (3.22)$$

Nós reconhecemos em (3.21) e (3.22) a generalização do campo do vórtice (3.3) para o caso do campo devido a N vórtices movendo-se ao longo das respectivas trajetórias \vec{r}_{α} .

As soluções (3.21) e (3.22) correspondem ao calibre de Coulomb ($\partial_i A^i = 0$). Da equação (3.13) para o campo elétrico temos:

$$-\partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \frac{2\pi}{\xi} \sum_{\alpha} \epsilon_{ij} J_{\alpha}^j, \quad (3.23)$$

que é equivalente à solução da equação de Laplace não-homogênea

$$-\nabla^2 A^0 = \frac{2\pi}{\xi} \epsilon_{ij} \partial_i J^j. \quad (3.24)$$

Fazendo uso de (3.19), nós obtemos

$$A^0(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\xi} \sum_{\alpha} \epsilon_{ij} \frac{(x - r_{\alpha})^j}{|x - r_{\alpha}(t)|^2} J_{\alpha}^j. \quad (3.25)$$

Note que tanto A^0 quanto A^i são calibres puros:

$$A^0(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\xi} \sum_{\alpha} \partial_j \arg(x - r_{\alpha}(t)) \dot{r}_{\alpha}^j \quad (3.26)$$

$$A^i(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\xi} \sum_{\alpha} \arg(x - r_{\alpha}(t)) \right), \quad (3.27)$$

ou, compactamente,

$$A^{\mu}(\vec{x}, t) = \partial^{\mu} \Lambda(\vec{x}, t), \quad (3.28)$$

onde

$$\Lambda(\vec{x}, t) = \frac{1}{\xi} \sum_{\alpha} \arg(\vec{x} - \vec{r}_{\alpha}). \quad (3.29)$$

Então, após uma transformação de calibre singular, a dinâmica é novamente aquela de um campo livre, exceto por condições de contorno sobre a função de onda. Para os campos elétrico e magnético um cálculo simples usando (2.19) mostra que

$$E^i(\vec{x}, t) = \frac{2\pi}{\xi} \epsilon_{ij} \sum_{\alpha} \dot{r}_{\alpha}^j(t) \delta^2(x - r_{\alpha}(t)), \quad (3.30)$$

$$B(\vec{x}, t) = -\frac{2\pi}{\xi} \sum_{\alpha} \delta^2(x - r_{\alpha}(t)), \quad (3.31)$$

de modo que os campos são inteiramente localizados nas posições das partículas. Note que

$$E^i = -\epsilon_{ij} \sum_{\alpha} v_{\alpha}^j B, \quad (3.32)$$

que é a versão bidimensional de

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}. \quad (3.33)$$

A relação (3.33) entre o campo elétrico e o magnético é o resultado da lei usual de transformação para os campos de Maxwell sobre transformações de Lorentz.

Para (3.32) nós temos o resultado de que as contribuições devidas aos campos elétrico e magnético em (3.10) se cancelam, de modo que a equação de movimento reduz-se a

$$m\ddot{r}_{\alpha} = \vec{0}, \quad (3.34)$$

correspondendo ao movimento de partículas livres ! Isto é uma propriedade somente da teoria clássica. Na teoria quântica estas partículas interagem em virtude das condições de contorno de rotação a serem impostas sobre a função de onda, após a escolha do calibre no qual o potencial vetor será escrito na hamiltoniana.

Capítulo 4

Ânions e o Efeito Hall

A importância dada recentemente ao estudo dos ânions vem em grande parte da sua utilização do Efeito Hall Quântico Fracionário. Dessa forma, neste capítulo, discutiremos a ligação entre estes. Mas antes disto, vamos relembrar do que se trata o Efeito Hall.

4.1 O Experimento Hall Clássico

O esquema para a experiência[17] do efeito Hall clássico é mostrado na figura 4.1.

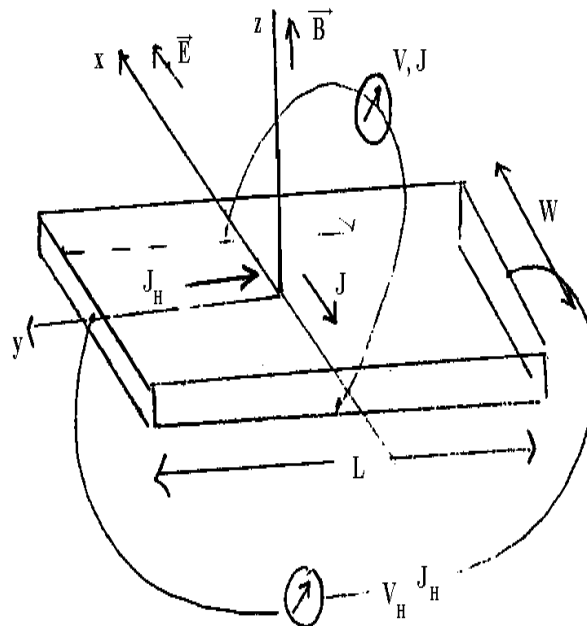


Figura 4.1: Diagrama esquemático do sistema onde ocorre o Efeito Hall. Aqui, \vec{E} é o campo elétrico, \vec{B} é o campo magnético, V corresponde a tensão da fonte que é ligada nas extremidades do cristal; J é a densidade de corrente, J_H e V_H são respectivamente a densidade de corrente de Hall e a tensão de Hall.

Um cristal é submetido a um campo elétrico e um campo magnético perpendiculares

entre si (veja figura 4.1). (O campo elétrico pode ser aplicado, por exemplo, ligando-se uma fonte de tensão V às extremidades do cristal. E o campo magnético pode ser aplicado colocando-se o cristal entre os pólos de um eletroímã).

Sob a ação do campo elétrico, os portadores de carga elétrica (elétrons ou buracos) do cristal adquirem uma certa velocidade \vec{v} . Uma partícula carregada sob a ação de um campo magnético \vec{B} está sujeita a uma força perpendicular à direção do movimento e à direção do campo magnético (força de Lorentz), dada por:

$$\vec{F}_m = \frac{e}{c}(\vec{v} \times \vec{B}), \quad (4.1)$$

onde e é a carga da partícula.

A figura 4.2 mostra o que acontece quando o portador é um elétron.

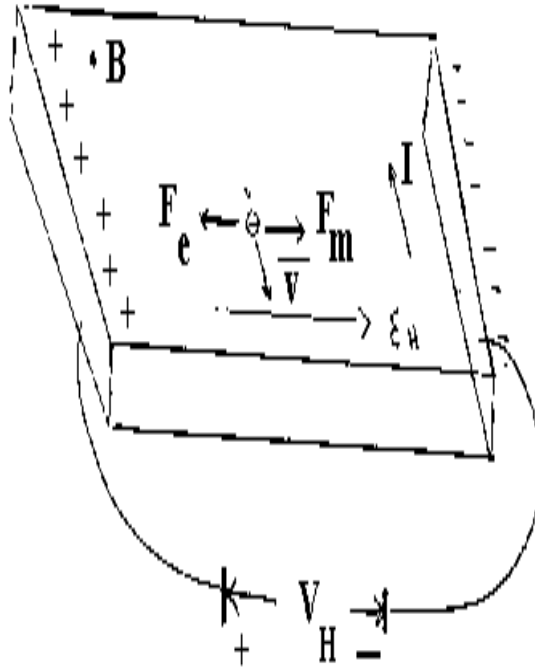


Figura 4.2: O Efeito Hall para portadores tipo elétrons. O campo magnético está saindo do papel, na direção do leitor.

Sob a ação do campo magnético, os portadores se deslocam para uma das bordas do cristal. Surge então um campo elétrico transversal ϵ_H , produzido pelo desequilíbrio das cargas. Em equilíbrio, a força aplicada ao portador pelo campo magnético, F_m , é igual à força aplicada pelo campo elétrico transversal, F_e . Pela geometria das figuras 4.1 e 4.2 podemos escrever

$$F_m = evB \quad (4.2)$$

$$F_e = e\epsilon_H. \quad (4.3)$$

Quando estas estiverem em equilíbrio:

$$evB = e\epsilon_H \therefore$$

$$\epsilon_H = vB. \quad (4.4)$$

Por outro lado, chamando de \mathcal{J} a densidade de corrente e de n a densidade de portadores de carga

$$\mathcal{J} = env \quad (4.5)$$

Pela figura 4.1 temos:

$$v = \frac{\mathcal{J}}{en} = \frac{I/A}{en} = \frac{I}{enLW}, \quad (4.6)$$

lembrando que a área A em questão é

$$A = LW. \quad (4.7)$$

Substituindo (4.6) em (4.4) temos:

$$\epsilon_H = vB \therefore$$

$$\epsilon_H = \frac{I}{enLW}B. \quad (4.8)$$

A diferença de potencial que aparece entre as duas extremidades do cristal é dada por:

$$V_H = \epsilon_H L \therefore$$

$$V_H = \frac{1}{en} \frac{IB}{W}. \quad (4.9)$$

ou

$$V_H = R_H \frac{IB}{W}, \quad (4.10)$$

onde $R_H = 1/en$ é a chamado de *constante de Hall* do material.

Quando os portadores são todos elétrons (carga $-e$, densidade n), podemos escrever

$$R_H = -\frac{1}{en}. \quad (4.11)$$

Quando os portadores são todos buracos:

$$R_H = \frac{1}{en}. \quad (4.12)$$

Dessa forma, através do efeito Hall podemos determinar se um semiconductor[17] é do tipo N ou tipo P; pois as equações (4.11) e (4.12) mostram que a polaridade da tensão V_H depende do tipo de portador de carga presente no cristal.

4.2 Um Breve Histórico do Efeito Hall Quântico

O estudo da quantização do efeito Hall tem início com *Ando Matsumoto, Uemura e Kuwaji* em 1975. Porém, somente em 1980 que tal efeito quântico foi descoberto por *Klitzing, Dorda e Pepper*[18], no aniversário dos cem anos do original trabalho do Efeito Hall. Tal descoberta garantiu a *Klaus Von Klitzing* no ano de 1985 o prêmio Nobel em física. *Klitzing* mostrou que sob certas condições em um sistema efetivamente bidimensional de elétrons submetidos a um forte campo magnético, que o tensor condutividade σ toma a forma:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \nu \\ -\nu & 0 \end{pmatrix} e^2/h \quad (4.13)$$

onde h é a constante de Planck, e é a carga do elétron e ν é um inteiro pequeno. Assim, as componentes do tensor condutividade fora da diagonal podem ser escritas em termos das constantes fundamentais[19]. Em 1982, *Tsui, Störmer e Grossard*[20], observaram que a condutividade Hall poderia formar-se sobre valores fracionários em unidades de e^2/h e não somente em valores inteiros. Alguns dos números encontrados foram:

$$1/3, 2/3, 2/5, \dots \text{ etc,}$$

com $1/2$ e $1/4$ ausentes. Este efeito é denominado de Efeito Hall Quântico Fracionário. Para a sua descrição teórica, é essencial levar-se em conta as interações coulombianas entre os elétrons, tornando o problema difícil de ser tratado. O modelo que melhor descreve o Efeito Hall Quântico Fracionário foi proposto por *Laughlin*[5] em 1983 baseando-se na existência de excitações tipo-vórtice as quais carregam estatísticas fracionárias, de modo que o estado fundamental pode ser descrito através de um condensado destas quasipartículas. As quasipartículas de *Laughlin* vem a ser ânions, objeto de nosso estudo.

4.2.1 O Efeito Hall Quântico

O Efeito Hall Quântico é observado em sistemas bidimensionais de elétrons a temperaturas muito baixas ($\leq 4K$) e em campos magnéticos intensos (1 a 30 teslas)[21] ortogonais ao plano onde as partículas se movem. Os elétrons são usualmente capturados numa fina camada da interface entre dois diferentes semicondutores ou entre um semicondutor e um isolante. Nestas condições, o movimento ao longo da direção perpendicular da camada é congelado. Deste modo, a dinâmica toma lugar sobre o plano. Além disso, os efeitos devido ao spin do elétron podem ser desprezados em uma primeira aproximação.

O efeito Hall quântico é caracterizado pelo fato de que a condutância Hall, σ_H é quantizada em unidades de e^2/h , como mostrado pela expressão (4.13).

O número quântico ν pode ser um inteiro (Efeito Hall Quântico Inteiro)[18] ou um número racional, geralmente com denominador ímpar (Efeito Hall Quântico Fracionário)[20]. O surpreendente é que a equação (4.13) é experimentalmente observada com extrema precisão. Esta precisão[19] é de 10^{-7} a 10^{-8} para o efeito inteiro e 10^{-4} ou 10^{-5} para o efeito fracionário.

4.3 Os Platôs de Resistividade

Um importante aspecto na quantização do efeito Hall Quântico é a quantização da chamada resistividade transversal δ_{xy} .

Quando aplicamos uma diferença de potencial nas extremidades do cristal, geramos uma corrente I ; e dessa forma, medimos as voltagens longitudinal V_L e transversal V_H ¹, de modo que as resistências são dadas por:

$$\begin{cases} R_{xx} = \frac{V_L}{I} \\ R_{xy} = \frac{V_H}{I}. \end{cases}$$

Ajustando alguns parâmetros do sistema, observamos que as resistências medidas são iguais às resistividades δ (vide [21]). Assim, através da figura 4.3, podemos ver a dependência da resistividade δ em relação ao campo magnético B .

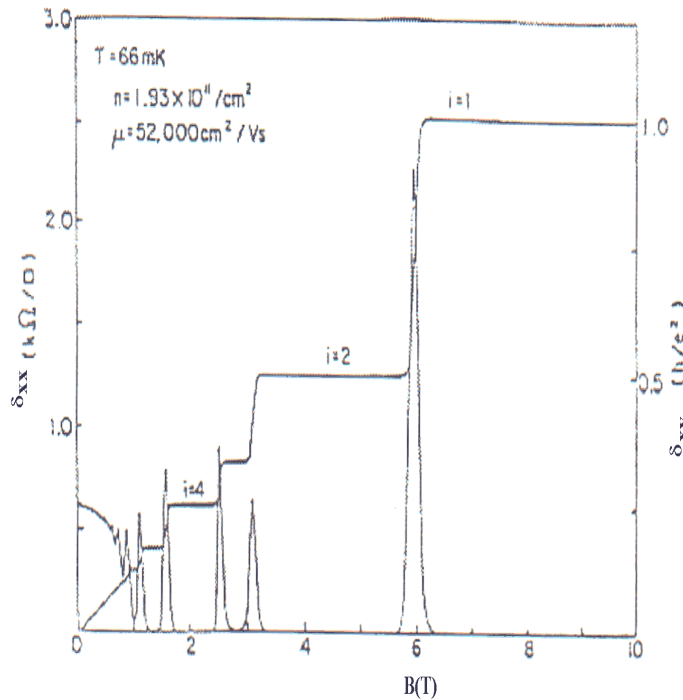


Figura 4.3: A amostra de GaAs-AlGaAs apresenta uma densidade eletrônica $n = 1.93 \cdot 10^{11}/\text{cm}^2$, baixa mobilidade $\mu_e = 52,000\text{cm}^2/\text{Vs}$, sob uma temperatura $T = 66\text{mK}$. Define-se a mobilidade como sendo a razão entre a velocidade média do elétron e a intensidade do campo elétrico.

Através da figura 4.3, observamos a formação de platôs de resistividade transversal para certos valores do campo magnético, o que indica que δ_{xy} (resistividade Hall) é praticamente constante; entre um platô e outro, δ_{xy} varia rapidamente. Por outro lado, a resistividade longitudinal δ_{xx} é sobre os platôs é nula. Assim, sobre os platôs, podemos escrever:

$$\delta_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\nu \\ -1/\nu & 0 \end{pmatrix} \frac{h}{e^2}. \quad (4.14)$$

¹Também denominada de voltagem Hall.

Como o tensor resistividade é o inverso do tensor condutividade, a expressão (4.13) é obtida a partir de (4.14).

Os valores encontrados experimentalmente para ν podem ser separados em duas famílias:

- Números inteiros $\nu = 1, 2, 3, \dots$, que nos leva ao chamado EHQI;
- Números racionais, geralmente com denominadores ímpares, $\nu = 1/3, 2/3, 2/5, \dots$, que nos leva ao chamado EHQF.

Repare ainda que em (4.14) os valores da resistividade sobre os platôs independem do material e da forma da amostra. Agora, vejamos um modelo para o EHQ.

4.3.1 A Hamiltoniana

De acordo com o que vimos no capítulo 2, a hamiltoniana o sistema de um elétron é dada pela equação (2.24):

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2, \quad (4.15)$$

ou em termos do momento orbital Π por (2.26):

$$\mathcal{H} = \frac{\Pi^2}{2m} \quad (4.16)$$

lembrando que o momento canônico \vec{P} está relacionado com o momento orbital por:

$$\vec{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A}(r) = \vec{\Pi} + \frac{e}{c} \vec{A}(r), \quad (4.17)$$

onde \vec{r} denota a posição do elétron e $\vec{\Pi} = m\vec{v}$. Vemos que a hamiltoniana (4.16) se parece com a hamiltoniana de uma partícula livre. Dessa forma, de acordo com (4.17) temos através da chamada primeira quantização $\vec{P} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$:

$$\vec{\Pi} = -i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A}. \quad (4.18)$$

As relações de comutação pertinentes ao sistema foram obtidas no capítulo 2 e são dadas por (2.33). Elas nos mostram que as componentes do operador \vec{P} comutam, ao contrário das componentes do operador momento orbital $\vec{\Pi}$:

$$[\Pi_x, \Pi_y] = -i\hbar m v, \quad (4.19)$$

e

$$[P_x, P_y] = 0, \quad (4.20)$$

onde $w = \frac{eB}{mc}$ é a frequência de Larmor. Com base nesses resultados, podemos definir os operadores criação a^\dagger e aniquilação a de partículas:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar w}} (\Pi_x - i\Pi_y) \quad (4.21)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar w}} (\Pi_x + i\Pi_y) \quad (4.22)$$

Então:

$$[a, a^\dagger] = (aa^\dagger - a^\dagger a) \therefore$$

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2m\hbar w} [(\Pi_x - i\Pi_y)(\Pi_x + i\Pi_y) - (\Pi_x + i\Pi_y)(\Pi_x - i\Pi_y)] \therefore$$

$$[a, a^\dagger] = \frac{i}{m\hbar w} [\Pi_x, \Pi_y] \therefore$$

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (4.23)$$

Podemos também reescrever a hamiltoniana em termos dos operadores de criação e aniquilação ou, mais precisamente, em termos do operador número de ocupação \hat{N} , definido como:

$$\hat{N} = a^\dagger a. \quad (4.24)$$

Então:

$$a^\dagger a = \frac{1}{2m\hbar w} [(\Pi_x + i\Pi_y) (\Pi_x + i\Pi_y)] \therefore$$

$$\hbar w a^\dagger a = \frac{1}{2m} [\Pi^2 - i[\Pi_x, \Pi_y]],$$

onde $\Pi^2 = \Pi_x^2 + \Pi_y^2$. Sendo assim:

$$\hbar w a^\dagger a = \frac{\Pi^2}{2m} - \frac{\hbar w}{2}.$$

Utilizando (4.23) e (4.24), a expressão anterior fornece:

$$H = \hbar w \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) \quad (4.25)$$

Seja $|n\rangle$ um autoestado do operador \hat{N} com autovalor n ; nós podemos obter o espectro de energia do oscilador harmônico. Assim:

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \quad (4.26)$$

e

$$\mathcal{H}|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle \quad (4.27)$$

Aplicando $|n\rangle$ em (4.25):

$$\mathcal{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle \quad \therefore \quad (4.28)$$

$$\mathcal{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle \quad (4.29)$$

Comparando (4.27) e (4.29) temos:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (4.30)$$

que corresponde aos autovalores do operador hamiltoniano \mathcal{H} . Estes níveis de energia são denominados *níveis de Landau*. Os níveis de Landau são níveis de energia de um sistema de elétrons não interagentes na presença de um campo magnético constante de fundo, com o campo elétrico ausente. Aqui, o campo magnético externo organiza o espectro de energia dos elétrons dentro dos níveis de Landau e força as partículas a ocuparem os níveis dos mais baixos para os mais altos.

Repare que o nosso problema bidimensional é aqui mapeado em um oscilador harmônico unidimensional. Isso se deve a forma como os operadores criação e aniquilação foram definidos; ou seja, em termos das componentes do momento orbital, contendo assim a interação com o potencial \vec{A} .

Os autoestados do operador hamiltoniano podem ser obtidos fazendo-se uso das seguintes relações de comutação:

$$[N, a] = [a^\dagger a, a] = a^\dagger[a, a] + [a^\dagger, a]a = [a^\dagger, a]a = -a. \quad (4.31)$$

$$[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger[a, a^\dagger] + [a^\dagger, a^\dagger]a = a^\dagger[a, a^\dagger] = a^\dagger, \quad (4.32)$$

e serão úteis na obtenção dos autoestados do operador \mathcal{H} . Então:

$$|1\rangle = a^\dagger|0\rangle, \quad \therefore \quad (4.33)$$

$$|2\rangle = \lambda a^\dagger|1\rangle,$$

onde λ corresponde ao autovalor referente ao autoestado $|1\rangle$. O operador criação gera um autoestado com autovalor acrescido de uma unidade, em relação ao autoestado original, enquanto que o operador destruição gera um autoestado com autovalor decrescido de uma unidade.

Na física de partículas, esses operadores criam e destroem partículas, enquanto que no caso do oscilador hamônico, podemos dizer que esses operadores excitam ou destroem

uma onda. Então:

$$\langle 2|2 \rangle = \lambda^* \lambda \langle 1|a^\dagger|1 \rangle \therefore \quad (4.34)$$

$$1 = \lambda^2 (\langle 1|(N+1)|1 \rangle) \therefore$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

onde os estados são normalizados $\langle n|n \rangle = 1$. Logo:

$$|2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a^\dagger |1 \rangle \quad (4.35)$$

ou

$$|2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^\dagger)^2 |0 \rangle. \quad (4.36)$$

Repetindo esse processo n vezes temos:

$$|n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0 \rangle. \quad (4.37)$$

Assim, de acordo com (4.30) temos:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar e B}{mc}, \quad (4.38)$$

para cada estado fundamental $|0 \rangle$ os níveis de energia de Landau. Aqui, $n = n_x + n_y$ refere-se ao número de ocupação total, e n_x e n_y designam as ocupações dos osciladores nas direções x e y , respectivamente. Tais níveis são altamente degenerados, como pode ser vista na figura 4.4.

4.4 O Fator de Ocupação

Uma quantidade que toma um papel central no efeito Hall quântico é o fator de ocupação ν , definido como o número de elétrons N , pelo número de níveis de Landau permitidos. Cada nível de Landau é altamente degenerado. Mas para amostras de área finita A , esta degenerescência é finita. Assim, o número de níveis permitidos (veja figura 4.5) é de fato dado por:

$$\frac{A}{2\pi l_0^2} \quad (4.39)$$

onde l_0 é o comprimento magnético definido como:

$$l_0 = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}. \quad (4.40)$$

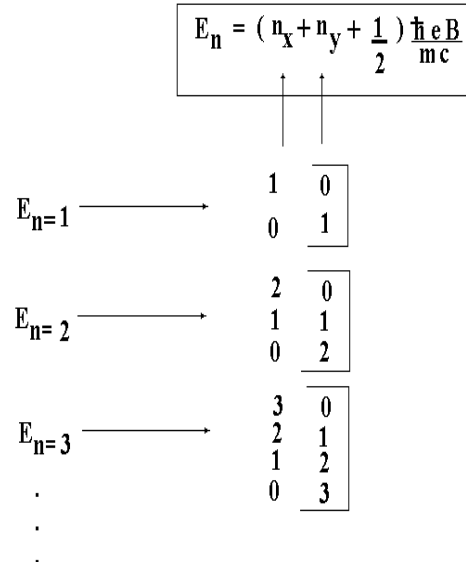


Figura 4.4: Os níveis de Landau para um elétron são altamente degenerados, ou seja, há a presença de autoestados do operador hamiltoniano com os mesmos autovalores de energia.

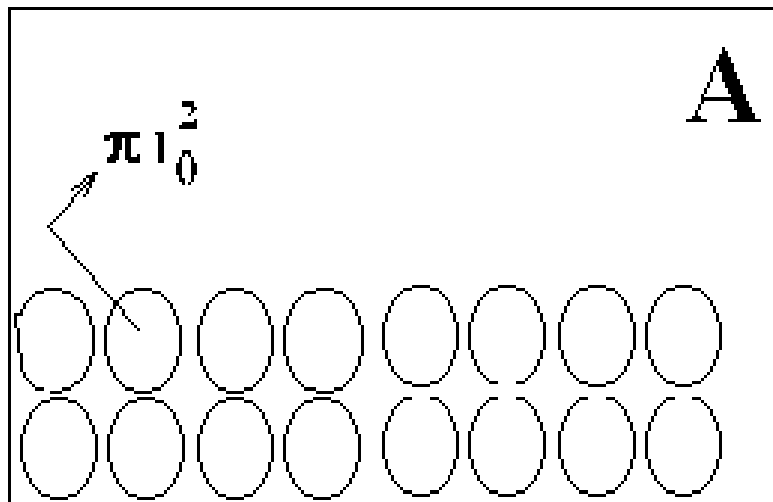


Figura 4.5: O Número de círculos de área πl_0^2 que ocupam uma amostra de área A correspondem ao número de níveis permitidos. O fator $1/2$ vem do fato de podermos ter partículas com spin \uparrow (up) ou \downarrow (down), evitando assim uma dupla contagem dos níveis.

Dessa forma, o fator de ocupação é

$$\nu = \frac{N}{\frac{A}{2\pi l_0^2}} = 2\pi l_0^2 \rho \quad (4.41)$$

lembrando que $\rho = N/A$ é a densidade de elétrons. A equação (4.41) também pode ser escrita de outra forma, usando a definição explícita do comprimento magnético dado em (4.40):

$$\nu = \frac{N}{ABe/hc} = \frac{N}{\phi/\phi_0} \quad (4.42)$$

onde $\phi = AB$ é o fluxo magnético através da área A , e $\phi_0 = hc/e$ é a unidade de fluxo. Vamos agora mostrar que o fator de ocupação (4.41) é o mesmo número ν que aparece em (4.13).

No nível clássico, a força de Lorentz induz um movimento dos elétrons:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= e\vec{E} + \frac{e}{c}(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \therefore \\ m\dot{\vec{v}} &= e\vec{E} + \frac{e}{c}(\vec{v} \times \vec{B}), \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde supomos os campos elétrico e magnético uniformes e constantes. Também estamos nos restringindo ao caso não relativístico $v \ll c$, e portanto o seu momento linear é $\vec{P} = m\vec{v}$; e como veremos mais adiante, para isso é necessário que o campo elétrico seja pequeno em comparação com o magnético. Então:

$$\dot{v}_x = \frac{eE_x}{m} + \frac{e}{mc}(v_y B_z - v_z B_y) \quad (4.44)$$

$$\dot{v}_y = \frac{eE_y}{m} + \frac{e}{mc}(v_z B_x - v_x B_z) \quad (4.45)$$

$$\dot{v}_z = \frac{eE_z}{m} + \frac{e}{mc}(v_x B_y - v_y B_x). \quad (4.46)$$

Preparamos \vec{B} e \vec{E} de acordo com a figura 4.1 de modo que:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= (0, 0, B) \\ \vec{E} &= (E, 0, 0) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Então:

$$\dot{v}_x = \frac{eE}{m} + \frac{e}{mc}v_y B \quad (4.48)$$

$$\dot{v}_y = -\frac{e}{mc}v_x B \quad (4.49)$$

$$\dot{v}_z = 0 \rightarrow v_z = \text{constante.} \quad (4.50)$$

Assim sendo, vamos considerar apenas \dot{v}_x e \dot{v}_y :

$$\dot{v}_x = \frac{eE}{m} + \frac{e}{mc}v_y B \quad (4.51)$$

$$\dot{v}_y = -\frac{e}{mc}v_x B. \quad (4.52)$$

Derivando a primeira expressão em (4.51) temos:

$$\ddot{v}_x = \frac{e}{mc}\dot{v}_y B. \quad (4.53)$$

Substituindo a segunda expressão em (4.52) nesta temos:

$$\dot{v}_x = \frac{e}{mc} \left(-\frac{e}{mc}v_x B \right) B \therefore$$

$$\dot{v}_x = -\left(\frac{e}{mc}B \right)^2 v_x = -w^2 v_x. \quad (4.54)$$

$$\dot{v}_x + w^2 v_x = 0, \quad (4.55)$$

onde $w = \frac{eB}{mc}$ é a freqüência de Larmor (conforme já mencionado) para o movimento do elétron em um campo magnético constante. A solução de (4.55) é:

$$v_x = v_{0x} e^{iwt}, \quad (4.56)$$

onde v_{0x} é uma constante de integração. Derivando (4.56) temos:

$$\dot{v}_x = iwv_x.$$

Substituindo esta em (4.48) temos:

$$iwv_{0x}e^{iwt} = \frac{eE}{m} + \frac{e}{mc}v_y B \therefore$$

$$iwv_x = \frac{eE}{m} + \frac{e}{mc}v_y B \therefore$$

$$iwv_x = \frac{eE}{m} + wv_y \therefore$$

$$v_y = v_{\perp} + iv_x, \quad (4.57)$$

onde

$$v_{\perp} = \frac{eE}{mw} = \frac{eE}{mw} \frac{mc}{eB} = \frac{E}{B}c.$$

$$v_{\perp} = \frac{E}{B}c; \quad \text{com } \frac{E}{B} < 1,$$

representa a velocidade da corrente perpendicular ao plano dos campos elétrico e magnético. Esta velocidade de corrente define a [condutância Hall](#) via [lei de Ohm](#)

$$\vec{\mathcal{J}} = \sigma \vec{E}, \quad (4.58)$$

onde σ depende do material considerado. Então:

$$\vec{\mathcal{J}}_H = nev_{\perp} = \frac{ne^2 \vec{E}}{mw}, \quad (4.59)$$

onde n é o número de elétrons por unidade de área. Assim, a condutividade Hall σ_H é dada por:

$$\sigma_H = \frac{ne^2}{mw} = \left(\frac{nhc}{eB} \right) \frac{e^2}{h}. \quad (4.60)$$

Assim, em $d = 2$ dimensões espaciais, a condutividade tem as dimensões de e^2/h . Comparando (4.42) com (4.60), vemos que a condutividade Hall define a fração ocupada:

$$\nu = \frac{nhc}{eB} = \frac{n}{\frac{eB}{hc}} \quad (4.61)$$

ou em unidades naturais de e^2/h ,

$$\sigma_H = \nu \quad ; \quad \frac{e^2}{h} = 1. \quad (4.62)$$

Classicamente, o espectro de energia do elétron é contínuo, enquanto que a nível quântico este espectro de energia colapsa para níveis do tipo oscilador harmônico - [níveis de Landau](#).

Na teoria quântica dos campos, a fração ocupada representa justamente a proporção de estados ocupados relativamente ao número total de estados permitidos para um dado nível de Landau (altamente degenerado).

Como já mencionamos, o efeito Hall quântico pode ainda ser inteiro (quando ν for inteiro) ou fracionário (quando ν for uma fração). Estes efeitos requerem explicações significativamente diferentes.

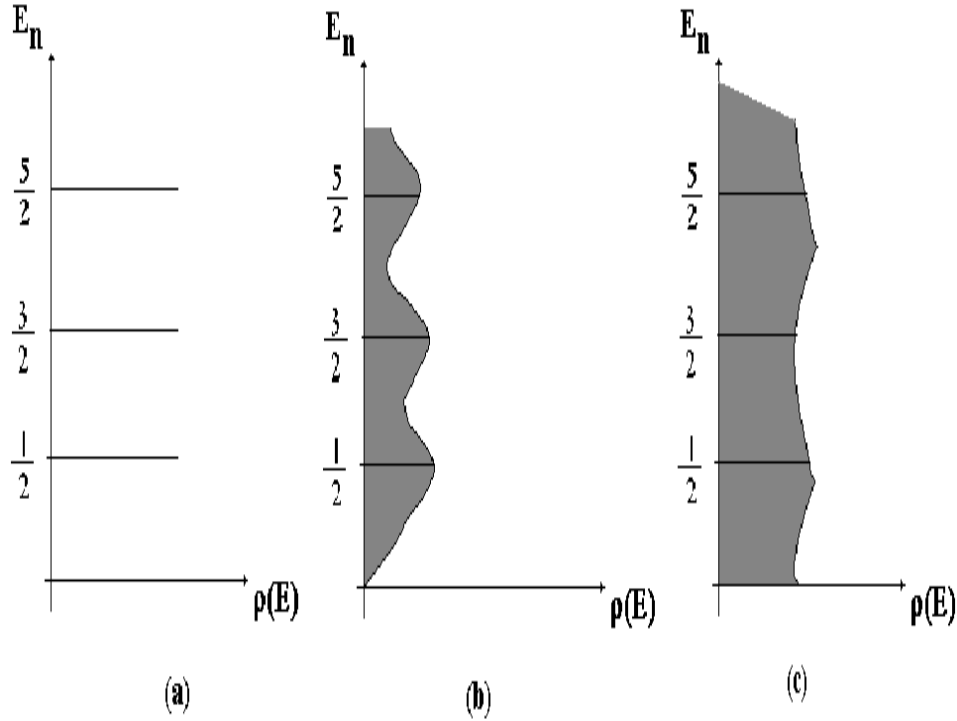


Figura 4.6: Distribuição da densidade de estados ρ de uma partícula em função da energia E , para um sistema de elétrons sem spin, com: (a) sem impurezas; (b) pouca impureza e (c) muita impurezas.

4.5 O Efeito das Impurezas

De acordo com a literatura[28], a introdução de impurezas no sistema gera um potencial \mathcal{V}_{imp} , desordenando-o. A consequência disto é que, os níveis de Landau do sistema ideal (sem impurezas) transformam-se em *bandas de Landau* (veja figura 4.6).

A medida que o grau de impurezas é acrescido ao sistema (o que equivale a um aumento no potencial \mathcal{V}_{imp}) as bandas unem-se num único e contínuo de estados[28]. No caso de haver poucas impurezas no sistema (ou seja, que o potencial \mathcal{V}_{imp} seja pequeno se comparado com a separação $\hbar\omega$ entre os níveis de Landau originais), as bandas de Landau permanecem distintas umas das outras.

Uma outra consequência devido às impurezas é o aparecimento de estados localizados, ou seja, estados cuja densidade de probabilidade seja apreciavelmente não nula em uma pequena região, em relação ao tamanho da amostra. Os estados localizados vão preenchendo a região de separação (“gap”) entre os níveis de Landau do sistema ideal.

No caso do Efeito Hall Quântico Inteiro (EHQI), o estado fundamental do sistema corresponde a situação em que os níveis de mais baixa energia encontram-se totalmente preenchidos, com um elétron por estado, obedecendo assim ao princípio de Exclusão de Pauli. O número de elétrons determina a energia do mais alto nível preenchido, sendo denominada *Energia de Fermi*.

Suponha que num sistema deste tipo com impurezas, a energia de Fermi esteja numa região de estados localizados. Se quando variarmos o campo magnético B , a energia de Fermi ainda se encontrar numa região de estados localizados, a condutividade Hall ainda

será a mesma; pois os estados localizados não contribuem, e a condutividade a do sistema ideal, para o mesmo número de níveis de Landau preenchidos. Isto então explica os platôs (veja figura 4.3).

O caso da transição entre os platôs vizinhos corresponde à passagem da energia de Fermi sobre uma região do espectro correspondente aos estados não-localizados.

4.6 O Efeito Hall Quântico Fracionário

No EHQF, os platôs são centrados sobre valores fracionários do fator de ocupação:

$$\nu = 1/3, 2/3, 2/5, 2/7, \dots \quad (4.63)$$

Este efeito ocorre em amostras com maior grau de pureza e requer forte correlação entre os elétrons².

A teoria mais aceita no momento foi proposta por Laughlin em 1983, o que lhe garantiu o *prêmio Nobel de Física* de 1998. Laughlin propôs que o estado fundamental de um sistema de elétrons no estado de EHQF com fatores de ocupação de valores tipo (4.63), podem ser descritos por uma função de onda da forma:

$$\Psi_m(Z_1, \dots, Z_N) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (Z_j - Z_k)^m \exp \left(- \sum_{j=1}^N \frac{|Z_j|^2}{4l_0^2} \right), \quad (4.64)$$

onde m é um inteiro ímpar e $Z_k = x_k + iy_k$ as coordenadas complexas da k -ésima partícula. Assim, *Laughlin* redefiniu os graus de liberdade do sistema, de modo que o sistema original de partículas fortemente interagentes fosse mapeado num sistema de ânions sem interação (ou com fraca interação).

A idéia é que cada partícula de carga e no estado fundamental está associada a um número ímpar de quanta de fluxos. Este sistema é descrito pela função de onda de *Laughlin* (4.64), que é fermiônica. Isso pode ser verificado facilmente; através da troca de duas quaisquer partículas, a função de *Laughlin* ganha um sinal menos. Mas onde aparecem os ânions ?

Os ânions, correspondem a excitações deste sistema e surgem do excesso ou falta de (*quanta*) de fluxo magnético, introduzido sistema através do aumento da intensidade do campo magnético \vec{B} . *Laughlin* também construiu os primeiros estados excitados para um *quasiburaco* e para uma *quasielétron*, os quais são dados respectivamente por:

$$\Psi_m^{+Z_\alpha} = \mathcal{N}_+ \prod_I (Z_I - Z_\alpha) \Psi_m ; \quad (4.65)$$

$$\Psi_m^{-Z_\alpha} = \mathcal{N}_- \prod_I \left(2l_0^2 \frac{\partial}{\partial Z_I} - \bar{Z}_\alpha \right) \Psi_m , \quad (4.66)$$

onde \mathcal{N}_+ e \mathcal{N}_- são respectivamente, o fator de normalização para os quasiburacos e quasielétron, Ψ_m é a função de onda de *Laughlin* para o estado fundamental do EHQF.

²Dizemos que os elétrons são fortemente correlacionados quando a constante de acoplamento da lagrangiana de interação é muito grande.

Aqui, Z_α e \bar{Z}_α indicam, respectivamente, a posição do quasiburaco e da quasilétron e l_0 é o comprimento magnético definido anteriormente. Mostraremos a seguir que tais excitações são ânions com carga fracionária. Por questão de simplicidade, vamos considerar o caso de um quasiburaco descrito por (4.65). Mostraremos agora que tais excitações do EHQF apresentam carga fracionária, o que as caracterizam como ânions. Para isso, vamos nos fazer valer do conceito de *fase de Berry* (veja apêndice A) definida como:

$$\gamma_\alpha = -i \int_{t_0}^{t_1} dt \langle \Psi_\alpha(t) | \frac{d}{dt} | \Psi_\alpha \rangle, \quad (4.67)$$

supondo que o quasiburaco é lentamente transportado em torno de um laço (“loop”) Γ numa *jornada adiabática*³ de modo que Z_α torna-se um parâmetro dependente do tempo. Então:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi_m^{+Z_\alpha}(t) &= \mathcal{N}_+ \frac{d}{dt} \left[\exp \left\{ \sum_I \ln(Z_I - Z_\alpha(t)) \right\} \right] \Psi_m \therefore \\ \frac{d}{dt} \Psi_m^{+Z_\alpha}(t) &= \mathcal{N}_+ \sum_I \frac{d}{dt} [\ln(Z_I - Z_\alpha(t))] \left[\exp \left\{ \sum_I \ln(Z_I - Z_\alpha(t)) \right\} \right] \Psi_m \therefore \\ \frac{d}{dt} \Psi_m^{+Z_\alpha}(t) &= \sum_I \frac{d}{dt} [\ln(Z_I - Z_\alpha(t))] \Psi_m^{+Z_\alpha}(t). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Assim, utilizando (4.68), a expressão (4.67) para γ_α fica na forma:

$$\gamma_\alpha = -i \int_{t_0}^{t_1} dt \langle \Psi_m^{+Z_\alpha}(t) | \sum_I \frac{d}{dt} [\ln(Z_I - Z_\alpha(t))] | \Psi_m^{+Z_\alpha}(t) \rangle. \quad (4.69)$$

Porém, de acordo com as propriedades da função *delta de Dirac*[13]:

$$\int d^2 Z \delta^2(Z - Z_\alpha) = 1, \quad (4.70)$$

temos:

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha &= -i \int_{t_0}^{t_1} dt \int d^2 Z \langle \Psi_m^{+Z_\alpha}(t) | \sum_I \delta^2(Z - Z_I) \frac{d}{dt} [\ln(Z_I - Z_\alpha(t))] | \Psi_m^{+Z_\alpha}(t) \rangle \therefore \\ \gamma_\alpha &= -i \int_{t_0}^{t_1} dt \int d^2 Z \langle \Psi_m^{+Z_\alpha}(t) | \sum_I \delta^2(Z - Z_I) \frac{d}{dt} [\ln(Z - Z_\alpha(t))] | \Psi_m^{+Z_\alpha}(t) \rangle \therefore \\ \gamma_\alpha &= -i \int_{t_0}^{t_1} dt \int d^2 Z \frac{d}{dt} [\ln(Z - Z_\alpha(t))] \langle \Psi_m^{+Z_\alpha}(t) | \sum_I \delta^2(Z - Z_I) | \Psi_m^{+Z_\alpha}(t) \rangle. \end{aligned}$$

³veja apêndice A.

Definindo a densidade de elétrons no estado $\Psi_m^{+Z_\alpha}$ como:

$$\rho(Z) = \langle \Psi_m^{+Z_\alpha}(t) | \sum_I \delta^2(Z - Z_I) | \Psi_m^{+Z_\alpha}(t) \rangle, \quad (4.71)$$

temos:

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha &= -i \int_{t_0}^{t_1} dt \int d^2Z \frac{d}{dt} [\ln(Z - Z_\alpha(t))] \rho(Z) \therefore \\ \gamma_\alpha &= -i \int d^2Z \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{dZ_\alpha}{dt} \cdot \frac{1}{Z_\alpha(t) - Z} \rho(Z). \end{aligned} \quad (4.72)$$

A integral sobre o tempo t em (4.72) é calculada a partir de um instante inicial t_0 quando o quasiburaco inicia sua jornada, até um instante de tempo t_1 , quando ele retorna a sua posição original, efetuando um laço (“loop”) Γ . Assim:

$$\gamma_\alpha = -i \int d^2Z \oint_\Gamma dZ_\alpha \cdot \frac{1}{Z_\alpha(t) - Z} \rho(Z). \quad (4.73)$$

De acordo com o *teorema de resíduos*[13]:

$$\oint_\Gamma dZ_\alpha \cdot \frac{1}{Z_\alpha(t) - Z} = 2\pi i. \quad (4.74)$$

Então:

$$\gamma_\alpha = 2\pi \int d^2Z \rho(Z) = 2\pi N_\Gamma. \quad (4.75)$$

A integração em (4.75) é efetuada sobre a região dentro do laço Γ e N_Γ é o número médio de elétrons ali contidos. Isto encerra o cálculo da *fase de Berry* para a função de onda do quasiburaco.

Por outro lado, quando uma partícula de carga q se move ao longo de um laço fechado Γ em torno de um fluxo Φ_Γ ; então sua função de onda adquire uma fase

$$\exp \left[\frac{-iq \Phi_\Gamma}{\hbar c} \right]. \quad (4.76)$$

É o chamado *efeito Aharonov-Bohm* (veja apêndice B). Identificando esta com a *fase de Berry*

$$\exp[-i\gamma_\alpha], \quad (4.77)$$

nós temos:

$$\gamma_\alpha = \frac{q\Phi_\Gamma}{\hbar c} = 2\pi N_\Gamma. \quad (4.78)$$

De (4.78) obtemos a expressão para a carga de um quasiburaco, lembrando que $\hbar = h/2\pi$, temos:

$$q = \frac{N_\Gamma}{\Phi_\Gamma} hc. \quad (4.79)$$

Conforme já foi dito, o EHQF é caracterizado por apresentar valores fracionários para o fator de preenchimento (ou fator de ocupação), ou seja, $\nu = 1/m$, onde m é um número inteiro ímpar. Assim, a expressão (4.42) fica sob a forma:

$$\nu = \frac{1}{m} = \frac{N_\Gamma}{\Phi_\Gamma} \frac{hc}{e}, \quad (4.80)$$

onde e é a carga de um buraco. Comparando (4.79) e (4.80) temos:

$$q = \frac{e}{m}. \quad (4.81)$$

Vemos então, que um quasiburaco possui realmente uma carga fracionária. No caso de um quasielétron o cálculo é um pouco mais complicado, mas análogo ao exposto aqui para um quasiburaco. Assim, de acordo com a literatura[11], um quasielétron é portadora da seguinte carga

$$q = -\frac{e}{m}. \quad (4.82)$$

Agora vamos buscar qual estatística estas excitações obedecem. Novamente por questão de simplicidade, vamos considerar um estado caracterizado pela presença de dois quasiburacos; sendo um localizado no ponto Z_α e o outro localizado no ponto Z_β . Desprezando qualquer interação entre os dois quasiburacos, a função de onda fica sob a forma:

$$\Psi_m^{+Z_\alpha, +Z_\beta} = \mathcal{N}_{\alpha\beta} \prod_I (Z_I - Z_\alpha) (Z_I - Z_\beta) \Psi_m, \quad (4.83)$$

a qual é uma generalização de (4.65). Em (4.83), $\mathcal{N}_{\alpha\beta}$ é um fator de normalização. Agora, vamos supor que o quasiburaco em Z_α é adiabaticamente movido sob uma trajetória fechada Γ , enquanto que o quasiburaco em Z_β fica fixo. Durante este processo, a função de onda $\Psi_m^{+Z_\alpha, +Z_\beta}$ adquire uma fase de Berry dada por (A.13):

$$\gamma = -i \int_{t_0}^{t_1} dt \langle \Psi_m^{+Z_\alpha, +Z_\beta} | \frac{d}{dt} | \Psi_m^{+Z_\alpha, +Z_\beta} \rangle. \quad (4.84)$$

Então:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi_m^{+Z_\alpha, +Z_\beta} &= \mathcal{N}_{\alpha\beta} \frac{d}{dt} \left[\exp \left(\sum_I \ln [(Z_I - Z_\alpha(t)) (Z_I - Z_\beta)] \right) \right] \Psi_m \dot{\cdot} \\ \frac{d}{dt} \Psi_m^{+Z_\alpha, +Z_\beta} &= \mathcal{N}_{\alpha\beta} \left[\sum_I \frac{d}{dt} (\ln [(Z_I - Z_\alpha(t)) (Z_I - Z_\beta)]) \right] \times \\ &\quad \times \exp \left(\sum_I \ln [(Z_I - Z_\alpha(t)) (Z_I - Z_\beta)] \right) \Psi_m \dot{\cdot} \\ \frac{d}{dt} \Psi_m^{+Z_\alpha, +Z_\beta} &= \mathcal{N}_{\alpha\beta} \sum_I \frac{d}{dt} [\ln ((Z_I - Z_\alpha(t)) (Z_I - Z_\beta))] \Psi_m^{+Z_\alpha, +Z_\beta}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Introduzindo a função δ de Dirac

$$\int d^2 Z \delta^2(Z - Z_I) = 1,$$

e usando (4.85), a fase de Berry dada por (4.84) fica:

$$\begin{aligned} \gamma &= -i \int_{t_0}^{t_1} dt \int d^2 Z \langle \Psi_m^{+Z_\alpha, +Z_\beta}(t) | \sum_I \delta^2(Z - Z_I) \times \\ &\times \frac{d}{dt} (\ln [(Z - Z_\alpha(t))(Z - Z_\beta)]) | \Psi_m^{+Z_\alpha, +Z_\beta}(t) \rangle. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Definindo

$$\rho(Z) = \langle \Psi_m^{+Z_\alpha, +Z_\beta}(t) | \sum_I \delta^2(Z - Z_I) | \Psi_m^{+Z_\alpha, +Z_\beta}(t) \rangle, \quad (4.87)$$

como sendo a densidade de elétrons no estado de dois quasiburacos, a expressão (4.87) pode ser escrita no forma:

$$\begin{aligned} \gamma &= -i \int_{t_0}^{t_1} dt \int d^2 Z \rho(Z) \frac{d}{dt} (\ln [(Z - Z_\alpha(t))(Z - Z_\beta)]) \quad \therefore \\ \gamma &= -i \int d^2 Z \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \frac{dZ_\alpha}{dt} \cdot \frac{Z_\beta - Z}{(Z_\alpha(t) - Z)(Z_\beta - Z)} \right\} \rho(Z) \quad \therefore \\ \gamma &= -i \int d^2 Z \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \frac{dZ_\alpha}{dt} \cdot \frac{1}{(Z_\alpha(t) - Z)} \right\} \rho(Z). \end{aligned} \quad (4.88)$$

A integral sobre o tempo t em (4.88) é calculada a partir de um instante inicial t_0 quando o quasiburaco em Z_α inicia sua jornada adiabática, até um instante de tempo t_1 quando ele retorna a sua posição original, efetuando um laço Γ em torno de Z_β . Então:

$$\gamma = -i \int d^2 Z \left\{ \oint_\Gamma dZ_\alpha \cdot \frac{1}{Z_\alpha(t) - Z} \right\} \rho(Z). \quad (4.89)$$

Conforme já vimos,

$$\oint_\Gamma dZ_\alpha \cdot \frac{1}{Z_\alpha(t) - Z} = 2\pi i. \quad (4.90)$$

Deste modo, (4.89) fica sob a forma:

$$\gamma = 2\pi \int_\Gamma d^2 Z \rho(Z). \quad (4.91)$$

Se em seu movimento Z_α não cerca Z_β (veja figura 4.7 (a)), a integral em (4.91) tem o mesmo valor como em (4.75) de modo que:

$$\gamma = 2\pi N_\Gamma, \quad (4.92)$$

onde N_Γ é o número médio de elétrons contidos dentro do laço Γ .

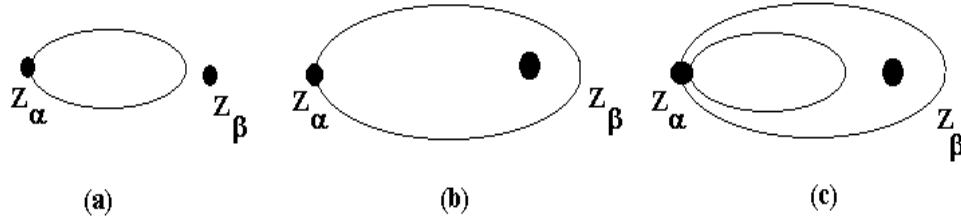


Figura 4.7: Sistema de dois buracos, inicialmente localizados nas posições Z_α e Z_β . O buraco na posição Z_α é movido adiabaticamente numa trajetória fechada Γ . A situação (a) ocorre quando não há troca de partículas. Em (b) o quasiburaco situado em Z_α percorre uma trajetória fechada em torno de Z_β . Em (c) a superposição dos casos (a) e (b).

Claro que este caso corresponde à situação na qual os dois quasiburacos não são trocados. Contudo, se o laço Γ formado pela trajetória do quasiburaco a partir de Z_α , contém Z_β (veja figura 4.7 (b)), nós temos:

$$\gamma = 2\pi \int_{\Gamma} d^2 Z \rho(Z) = 2\pi \left(N_{\Gamma} - \frac{1}{m} \right). \quad (4.93)$$

Neste caso nós temos que levar em conta que um quasiburaco está presente dentro do laço Γ e conseqüentemente o número de elétrons N_{Γ} tem que ser diminuído da fração $1/m$; devido a presença do quasiburaco. Comparando (4.92) e (4.93) nós vemos que quando Z_α circunda Z_β a função de onda ganha uma fase extra:

$$\exp(-i\Delta\gamma) = \exp\left(2\pi i \frac{1}{m}\right), \quad (4.94)$$

a qual pode ser interpretada como um efeito estatístico. Realmente neste caso os dois quasiburacos são trocados duas vezes, e a partir de (1.7) com $\Delta\varphi = 2\pi$ nós concluímos que sua estatística é

$$\nu = \frac{1}{m}. \quad (4.95)$$

Quando $m = 1$, ou seja, quando o nível de Landau mais baixo é completamente preenchido, os quasiburacos são férmions, mas em geral para $m = 3, 5, \dots$ os quasiburacos são ânions de estatística fracionária.

Provamos assim que as excitações do estado fundamental do EHQF proposto por *Laughlin* são ânions. Isto nos mostra a importância dos mesmos no estudos de alguns sistemas físicos, pois não se tratam apenas de artifícios matemáticos.

Conclusões Gerais

De acordo com a literatura[22], a dinâmica das partículas no nível quântico, em sistemas com três dimensões espaciais, exibe duas possibilidades apenas: férmions (partículas com spin semi-inteiro) e bósons (partículas com spin inteiro), as quais obedecem respectivamente às estatísticas de Fermi-Dirac e Bose-Einstein. Na verdade, a conexão entre spin e estatística no espaço de Minkowski constitui-se num teorema, válido sob certas hipóteses específicas[23].

Aqui, analisamos a dinâmica de partículas em sistemas com duas dimensões espaciais. Como resultado deste estudo, observamos que, além de férmions e bósons, existem outras possibilidades: partículas com spin fracionário e, conseqüentemente, estatística fracionária. Tais partículas denominamos ânions.

A quebra de paridade e de reversão temporal são características destas partículas; assim como os autovalores do operador momento angular orbital serem também fracionários.

Para a descrição dos ânions, consideramos o caso de partículas interagindo com um campo magnético. A idéia aqui, é que há um campo magnético, formado por um solenóide infinitamente longo e fino, situado sobre cada partícula. Sendo assim, o campo magnético existirá apenas sob cada uma destas. Em outras palavras, os campos magnéticos e elétrico (se houver) não se propagam. Por causa disto, a lagrangiana de Maxwell é substituída pela lagrangiana de Chern-Simons, que corresponde a um termo puramente topológico. É a chamada construção de Chern-Simons.

No nível quântico, este sistema é mapeado na hamiltoniana de um oscilador harmônico simples unidimensional, cujos autovalores de energia correspondem aos níveis de Landau.

Com a descoberta do Efeito Hall Quântico Fracionário (EHQF), os ânions ganham importância. Isto é devido ao fato de que essas partículas fornecem uma ótima explicação para tal efeito. Segundo Laughlin, a existência dessas excitações tipo-vórtice, que carregam estatística fracionária, apresentam um estado fundamental descrito através de um condensado destes ânions. Desta forma, vemos a importância em considerarmos tais teorias em sistemas bidimensionais, de modo que os ânions não se constituem apenas em construções meramente matemáticas ou de natureza puramente teórica.

Apêndice A

A Fase de Berry

Em mecânica quântica, um determinado sistema pode ser descrito por uma função de onda a menos de uma fase arbitrária. Em alguns casos, a fase é negligenciada como um fator irrelevante. Em 1984, *Berry*[24] apontou que um sistema quântico, quando transportado sob uma jornada *adiabática*¹ fechada, adquire uma fase topológica, em adição ao usual fator de fase dinâmico². Esta fase é conhecida como *fase de Berry*[25].

Seja $\mathcal{H}(t)$ uma hamiltoniana, dependente do tempo t . A equação de Schrödinger[15] é:

$$\mathcal{H}(t)\Psi_n(t) = i\frac{d}{dt}\Psi_n(t). \quad (\text{A.1})$$

Vamos presumir que o sistema no instante $t = 0$ está no n -ésimo autoestado $\Psi_n(0)$, onde:

$$\mathcal{H}(0)\Psi_n(0) = E_n(0)\Psi_n(0). \quad (\text{A.2})$$

¹Entende-se por jornada adiabática[26] uma variação periódica e suficientemente lenta dos parâmetros de um sistema. Sob essas condições, espera-se que o espectro de autovalores de qualquer observável no início e no fim de uma jornada sejam idênticos.

²Neste apêndice consideraremos o sistema natural de unidades, ou seja:

$$\hbar = c = 1,$$

onde $\hbar = h/2\pi$ e c são respectivamente a *constante de Planck* e a velocidade da luz.

Fazendo uso da suposição adiabática, vamos supor que num instante de tempo posterior t , o sistema estará no n -ésimo estado.

Aqui, vamos supor que:

$$\Psi(t) = \exp \left[-i \int_0^t d\tau E_n(\tau) \right] \Psi_n(t), \quad (\text{A.3})$$

onde o estado normalizado $\Psi_n(t)$ satisfaz a equação:

$$\mathcal{H}(t)\Psi_n(t) = E_n(t)\Psi_n(t). \quad (\text{A.4})$$

Substituindo (A.3) e (A.4) em (A.1) temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t)\Psi(t) &= i \frac{d}{dt} \left[e^{-i \int_0^t d\tau E_n(\tau)} \right] \Psi_n(t) \therefore \\ \mathcal{H}(t)\Psi(t) &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^t d\tau E_n(\tau) \right) \Psi(t) + i e^{-i \int_0^t d\tau E_n(\tau)} \frac{d}{dt} \Psi_n(t) \therefore \\ \mathcal{H}(t)\Psi(t) &= E_n(t)\Psi(t) + i e^{-i \int_0^t d\tau E_n(\tau)} \frac{d}{dt} \Psi_n(t). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Vemos, que a equação (A.5) não é solução de (A.4). Como (A.3) não satisfaz a equação de Schrödinger, nós temos que tentar outras possibilidades. Vamos introduzir uma fase extra $\gamma_n(t)$ na função de onda (A.3), de modo que:

$$\Psi(t) = \exp \left[-i \int_0^t d\tau E_n(\tau) - i\gamma_n(t) \right] \Psi_n(t). \quad (\text{A.6})$$

Inserindo (A.6) na equação de Schrödinger (A.1) nós encontramos:

$$\mathcal{H}(t)\Psi(t) = (\dot{\gamma}_n(t) + E_n(t)) \Psi(t) + i e^{-i \int_0^t d\tau E_n(\tau) - i\gamma_n(t)} \frac{d}{dt} \Psi_n(t). \quad (\text{A.7})$$

Sabemos ainda que:

$$\Psi^*(t) = \exp \left[i \int_0^t d\tau E_n(\tau) + i\gamma_n(t) \right] \Psi_n(t). \quad (\text{A.8})$$

Então:

$$\int d^3\vec{r} \Psi^*(t) \mathcal{H}(t) \Psi(t) = \int d^3\vec{r} \Psi^*(t) (\dot{\gamma}_n(t) + E_n(t)) \Psi(t) + i \int d^3\vec{r} \Psi^*(t) \frac{d}{dt} \Psi(t). \quad (\text{A.9})$$

Como

$$\int d^3\vec{r} \Psi^*(t) \mathcal{H}(t) \Psi(t) = \int d^3\vec{r} \Psi^*(t) E_n(t) \Psi(t), \quad (\text{A.10})$$

vemos que:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_n(t) + i \int d^3\vec{r} \Psi^*(t) \frac{d}{dt} \Psi(t) &= 0 \quad \therefore \\ \dot{\gamma}_n(t) &= -i \int d^3\vec{r} \Psi^*(t) \frac{d}{dt} \Psi(t), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

que pode ser escrita como

$$\dot{\gamma}_n(t) = -i \langle \Psi_n(t) | \frac{d}{dt} | \Psi_n(t) \rangle. \quad (\text{A.12})$$

Integrando (A.12):

$$\gamma_n(t) = -i \int_0^t \langle \Psi_n(\tau) | \frac{d}{d\tau} | \Psi_n(\tau) \rangle d\tau. \quad (\text{A.13})$$

A fase $\gamma_n(t)$ é denominada *fase de Berry*[27]. Esta fase não pode ser eliminada por redefinições de fases para os autoestados[26]. Ao leitor interessado em maiores detalhes sobre este assunto, nós o remetemos à extensa literatura[24, 25, 26, 27, 28].

Apêndice B

O Efeito Aharonov-Bohm

No estudo elementar do eletromagnetismo, os campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} são de vital interesse; enquanto que o potencial vetor \vec{A} e o potencial escalar ϕ são considerados de importância secundária. Em mecânica quântica, contudo, há uma variedade de situações nas quais os campos \vec{E} e \vec{B} não são suficientes para descrever o fenômeno, de modo que o uso de $A^\mu = (A^0 = \phi, \vec{A})$ é essencial. Um destes exemplos é o *efeito Aharonov-Bohm*. Tal experimento é esquematicamente descrito na figura B.1.

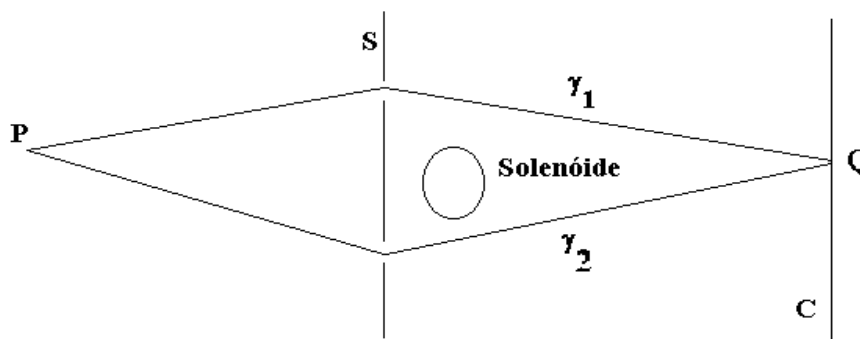


Figura B.1: O experimento Aharonov-Bohm. O campo magnético é nulo fora do solenóide $\vec{B} = \vec{0}$.

Na figura B.1, um feixe de elétrons é enviado a partir de um ponto P passando por uma fenda dupla S e formando um padrão de interferência sobre o anteparo C . Um solenóide de comprimento infinito é colocado após a fenda S . Os elétrons não penetram no interior do solenóide; conseqüentemente os elétrons não percebem o campo magnético no todo. O que acontece com o campo de calibre A^μ ?

Por questão de simplicidade, nós faremos o raio do solenóide infinitamente pequeno, com o fluxo total Φ :

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

fixo. Dessa forma, o potencial vetor e escalar terão a seguinte forma:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\Phi}{2\pi} \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0 \right); A^0 = 0. \quad (\text{B.1})$$

Idêntico ao potencial vetor de um solenóide em duas dimensões (infinitamente longo e fino), conforme apresentado no capítulo 1.

O potencial vetor não se anula fora do solenóide, mas apenas o campo magnético. Então, tal potencial vetor satisfaz as seguintes relações:

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \Phi \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0}, \text{ para } r \neq 0. \quad (\text{B.2})$$

Classicamente, o solenóide não pode ter uma influência sobre os elétrons, pois a *força de Lorentz*[14]

$$F_m = \frac{e}{c}(\vec{v} \times \vec{B})$$

anula-se sobre o caminho do feixe, pois $\vec{B} = \vec{0}$ em todos os pontos deste.

Em mecânica quântica, a hamiltoniana \mathcal{H} deste sistema é:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2. \quad (\text{B.3})$$

Semiclassicamente, nós podemos distinguir entre os caminhos γ_1 e γ_2 na figura B.1. Então, nós escrevemos a função de onda correspondendo a $\gamma_1(\gamma_2)$ como $\Psi_1(\Psi_2)$ quando $\vec{A} = \vec{0}$. Se $\vec{A} \neq \vec{0}$, a função de onda é dada pela transformada de calibre na forma:

$$\Psi_i^A(\vec{r}) \equiv \exp \left[ie \int_P^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \right] \Psi_i(\vec{r}) \quad ; \quad i = 1, 2. \quad (\text{B.4})$$

Aqui, P é o ponto de referência inicial a partir do aparato. Vamos considerar a superposição $\Psi_1^A(P) + \Psi_2^A(P)$ das funções Ψ_1 e Ψ_2 , de modo que:

$$\Psi_1^A(P) = \Psi_2^A(P). \quad (\text{B.5})$$

Sua amplitude no ponto Q sobre o anteparo é:

$$\Psi_1^A(Q) + \Psi_2^A(Q) = \exp \left[ie \int_{\gamma_1} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \right] \Psi_1(Q) + \exp \left[ie \int_{\gamma_2} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \right] \Psi_2(Q).$$

Fazendo $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ temos:

$$\begin{aligned} \Psi_1^A(Q) + \Psi_2^A(Q) &= e^{\left[ie \int_{\gamma} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \right]} e^{\left[ie \int_{\gamma_2} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \right]} \Psi_1(Q) + e^{\left[ie \int_{\gamma_2} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \right]} \Psi_2(Q) \dots \\ \Psi_1^A(Q) + \Psi_2^A(Q) &= e^{\left[ie \int_{\gamma_2} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \right]} \left\{ e^{\left[ie \int_{\gamma} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \right]} \Psi_1(Q) + \Psi_2(Q) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Assim, ainda que $\vec{B} = \vec{0}$, nos pontos do espaço através dos quais os elétrons trafegam, a função de onda depende do potencial vetor \vec{A} . A partir do *teorema de Stokes*[29], nós encontramos:

$$\oint_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi, \quad (\text{B.7})$$

onde S é uma superfície limitada por γ .

A probabilidade para encontrarmos a partícula na região de interferência C depende sob o módulo quadrado de toda a amplitude de transição e então sob a diferença de fase

entre a contribuição a partir dos caminhos γ_1 e γ_2 ; ou seja γ . Assim, a diferença de fase devido a presença do campo \vec{B} é justamente:

$$\frac{e}{\hbar c} \int_{\gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{S} - \frac{e}{\hbar c} \int_{\gamma_2} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \frac{e}{\hbar c} \int_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \frac{e}{\hbar c} \oint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \frac{e}{\hbar c} \Phi, \quad (\text{B.8})$$

onde Φ constitui o fluxo magnético dentro do cilindro impenetrável. A fase

$$e \left[\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \right] \quad (\text{B.9})$$

que aparece em (B.6), é denominada de *fase de Aharonov-Bohm*.

Nós enfatizamos que o efeito de interferência aqui discutido é puramente quântico. Classicamente, o movimento da partícula carregada é determinada somente pela *segunda lei de Newton*[30] acrescida pela força de Lorentz. Aqui, como previsto no problema, a partícula nunca pode entrar na região na qual \vec{B} é finito; a força de Lorentz é identicamente nula em todas as regiões onde a função de ondas é finita. Contudo, há um notável padrão de interferência que depende da presença ou ausência do campo magnético dentro do solenóide impenetrável. Este ponto tem levado algumas pessoas a concluir que em mecânica quântica, o fundamental é o potencial vetor \vec{A} e não o campo \vec{B} . Observamos porém que os efeitos percebidos em ambos os casos dependem de Φ expresso em termos de \vec{B} .

Referências Bibliográficas

- [1] D. Finkelstein and J. Rubinstein, *J. Math. Phys.* 9 (1968) 1762.
- [2] J. M. Leinaas and J. Myrheim, *Nuovo Cimento* 37B (1977) 1.
- [3] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* 48 (1982) 1144.
- [4] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982) 957.
- [5] R.B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* 50 (1983) 1395.
- [6] D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* 51 (1983) 605.
- [7] F. Wilczek, E. Witten and B. I. Halperin, *On Anyon Superconductivity*, *International Journal of Modern Physics B*, Vol. 3, No 7 (1989) 1001-1067.
- [8] J. D. Lykken, J. Sonnenschein and N. Weiss, *The Theory of Anyonic Superconductivity: A Review*, *International Journal of Modern Physics A*, Vol. 6, No 29 (1991) 5155-5214.
- [9] S. Klishevich, M. Plyushchay, *Zitterbewegung and reduction: 4D spinning particles and 3D anyons on light-like curves*, hep-th/9903102 v2, (1999).
- [10] L. Landau & E. Lifshitz, *Física Teórica*, Vol. 3.1, Editora Mir Moscou (1980).
- [11] A. Lerda, *Anyons, Quantum Mechanics of Particles with fractional statistics*, Springer-Verlag (1992).
- [12] K.D. Rothe, *Non Relativistic And Relativistic Quantum Theory of Anyons*, Notas de aulas.
- [13] F. W. Byron, Jr. and R. W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, Dover (1992).
- [14] L. Landau & E. Lifshitz, *Física Teórica*, Vol. 2, Editora Mir Moscou (1980).
- [15] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company (1994).
- [16] L. V. Belvedere, *Teoria Quântica de Campos I*, Notas de Aula Instituto de Física - Universidade Federal Fluminense (1997).

- [17] H. A. de Mello, R. S. De Biasi, *Introdução à Física dos Semicondutores*, Editora Edgard Blücher Ltda (1975).
- [18] K. V. Klitzing, G. Dorda and M. Pepper, Phys. Rev. Lett. 45 No. 6 (1980).
- [19] R. E. Prange, S. M. Girvin, *The Quantum Hall Effect*, Springer-Verlag (1987).
- [20] D. C. Tsui, H. L. Störmer, and A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. 48 No. 22 (1982).
- [21] A. Karlhede, S. A. Kivelson, S. L. Sondhi, “*The Quantum Hall Effect*”, Lectures presented at Jerusalem Winter School on Theoretical Physics, January (1992).
- [22] R. Iengo and K. Lechner, *Anyon Quantum Mechanics And Chern-Simons Theory*, Phys. Rep. 213, No. 4 (1992).
- [23] R. F. Streat and A. S. Wightman, “*PCT, Spin, Statistics and All That*”, Benjamin, New York (1964).
- [24] M. V. Berry, *Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes*, Proc. R. Soc. London Ser. A **392**, 45-57 (1984).
- [25] B. R. Holstein, *The adiabatic theorem and Berry’s Phase*, Am. J. Phys. **57** (12), (1989).
- [26] F. G. Alvarenga, *Efeito Aharonov-Bohm*, monografia - Universidade Federal Fluminense (UFF), (1997).
- [27] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, (1990).
- [28] E. Vasquez C. Silva, *Estudo da Resposta Eletromagnética da Teoria de Chern-Simons-Landau-Ginzburg para o Efeito Hall Quântico Fracionário*, Tese de Doutorado - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) , (1999).
- [29] B. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge University Press (1993).
- [30] K. R. Symon, *Mecânica*, Editora Campus, 4^a edição (1982).