

MIOCO FOSHINA

UM ESTUDO SISTEMÁTICO DE REAÇÃO DE ESPALAÇÃO

Tese de

DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

-1982-

- à memória de meu pai

- à minha mãe

- ao Vito

AGRADECIMENTOS

- ao prof. Dr. Jader B. Martins, meu orientador, por ter não somente possibilitado mas sobretudo incentivado o desenvolvimento de minhas atividades científicas;

- ao prof. Vito di Napoli, por numerosas sugestões sem as quais não teria sido possível desenvolver este trabalho, e ainda pelo constante estímulo e dedicação;

- ao prof. Takeshi Kodama pelas pertinentes e imprescindíveis críticas no decorrer da redação do manuscrito e por seu incentivo;

- ao prof. Odilon A.P. Tavares pela permanente assistência, pela ajuda inestimável em inúmeras dificuldades e por valiosas discussões elucidativas;

- ao prof. Antonio F. da F. Teixeira, pelos importantes ensinamentos nos mais diversos temas, sem os quais não teria sido possível vencer muitas das dificuldades na minha vida profissional;

- aos profs. Sérgio Joffily, Carlos Márcio do Amaral e Iraci O. de Souza, pela espontânea colaboração em diversas oportunidades;

- aos profs. Chung Kai Cheong, Maria Letizia Terranova e João de Deus Pinheiro Filho, pelo interesse para o bom termo deste trabalho;

- aos membros da Divisão de Computador do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, especialmente ao Luiz Carlos Correia Pinto e Luiz Antonio dos Reis, pela assistência durante o uso do terminal, e valiosas sugestões na confecção dos programas de computador;

- à calculista Celeste Aída Brito Lopes, pela colaboração na perfuração dos dados em cartões;

- à amiga Helena de Souza Ferreira, pela apresentação datilográfica de uma estética impecável;

- ao Sr. Hyran Cordeiro, pelos excelentes gráficos;

- e a todos, enfim, que eu possa ter esquecido de citar e que, de certa forma, com a sua amizade também colaboraram;

- ao CBPF/CNPq, pelas condições proporcionadas para a realização deste trabalho.

RESUMO

Uma fórmula semi-empírica de quatro parâmetros é proposta para calcular as seções de choque de foto-espalação. Esta fórmula é deduzida partindo-se de um modelo nuclear considerado como uma mistura de partículas sem distinção entre elas e o fenômeno de espalação é considerado como emissão sucessiva de nucleons regida por determinada lei de probabilidade. Os parâmetros da fórmula são obtidos a partir de rendimentos de foto-espalação determinados experimentalmente e disponíveis na literatura. É feito um estudo de variação dos valores dos diferentes parâmetros com o número de massa do núcleo "semente" e energia incidente.

Um estudo paralelo para as reações de espalação induzidas por prótons de uma amostragem de 720 dados é também apresentado.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	viii
INTRODUÇÃO	1
<u>CAPÍTULO 1</u> - REAÇÃO DE ESPALHAÇÃO	5
1.1 - Reação em Alta Energia	5
1.2 - Espalhação com Fótons	14
1.3 - Sobre o Cálculo de Rendimento pelo Mét.de Monte Carlo..	16
1.4 - Representação da Seção de Choque de Espalhação	18
1.5 - Fórmula Empírica de 5 Parâmetros de Rudstam	20
1.6 - Fórmulas Semi-Empíricas	24
1.7 - Fórmula Teórica	29
<u>CAPÍTULO 2</u> - FÓRMULA SEMI-EMPÍRICA DE 4 PARÂMETROS	32
2.1 - Estabelecimento da Fórmula	32
2.2 - Diferenças Entre a Fórmula de Gupta e a Proposta no Pre sente Trabalho	48
2.3 - Determinação dos Parâmetros	50
2.4 - Comentários Sobre os Valores dos Parâmetros	57
2.5 - Considerações Sobre o Parâmetro C	59
<u>CAPÍTULO 3</u> - DETERMINAÇÃO DOS 4 PARÂMETROS DA FÓRMULA ATRAVÉS DOS DA DOS EXPERIMENTAIS DA LITERATURA - DISCUSSÃO E CONCLUSÃO	65
3.1 - Considerações Gerais Sobre as Seções de Choque de Foto- espalhação	65
3.2 - Reprodutibilidade das Seções de Choque Experimentais...	69
3.3 - Rejeição de Dados e Coeficientes de Correlação	70
3.4 - Desenvolvimento do Cálculo para a Determinação dos Parâ metros e Resultados Obtidos	76

3.5 - Análise dos Valores Determinados pelo Ajuste - Discussão e Conclusão	85
CONCLUSÃO	96
<u>APÊNDICE A</u> - SOBRE O MÉTODODO DE MONTE CARLO	98
<u>APÊNDICE B</u> - DEFINIÇÃO DO TERMO REPRODUTIBILIDADE SEGUNDO PADRÕES LINGÜÍSTICOS	104
<u>APÊNDICE C</u> - APRESENTAÇÃO DA SEÇÃO DE CHOQUE DE FORMAÇÃO	105
<u>APÊNDICE D</u> - CONSIDERAÇÕES SOBRE A SUBSTITUIÇÃO DA EQ. (2.2.59) PELA EQ. (2.2.60)	106
<u>APÊNDICE E</u> -	110
<u>APÊNDICE F</u> - DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS INICIAIS B_0, C_0, D_0 e k_0	113
<u>APÊNDICE G</u> -	116
<u>APÊNDICE H</u> -	118
<u>APÊNDICE I</u> - DEDUÇÃO DAS FÓRMULAS QUE APARECEM NO CAPÍTULO 3, SEÇÃO 5	121
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	125

LISTA DE FIGURAS

<u>Fig.</u>	<u>Pág.</u>
1.4.1 - Representação gráfica dos rendimentos de espalação	19
1.4.2 - Representação tridimensional da porção de rendimento de espalação	19
2.2.1 - Representação do rendimento de espalação em família de parábolas	51
2.2.2 - Parábola única de rendimento de espalação	52
2.5.3 - Representação do CR versus A_t para o fóton como projétil	63
2.5.4 - Representação do CR versus A_s para o próton como projétil	64
3.2.1 - Reprodutibilidade das seções de choque experimentais obtidas com diversas fórmulas	71
3.5.1 - Andamento do parâmetro B/E versus E/A_t para o fóton como projétil	86
3.5.2 - Andamento do parâmetro B/E versus E/A_s para o próton como projétil	87
3.5.3 - Largura da distribuição reduzida $S = \sqrt{1/2k}$ versus E/A_s	89
3.5.4 - Gráfico auxiliar para calcular C para o fóton como projétil....	90
3.5.5 - Gráfico auxiliar para calcular C para o próton como projétil...	91
3.5.6 - Reprodutibilidades das seções de choque experimentais obtidas com a fórmula do presente trabalho	97
D.1 - Forma genérica da função exponencial	107
D.2 - Valores de $f(\frac{Z}{N})y_i$ versus $\frac{Z}{N}y_i$ da ref. (84) e do presente trabalho	109
E.1 - Distribuições discreta e contínua	112

LISTA DE TABELAS

<u>Tab.</u>	<u>Pág.</u>
2.5.1 - Valores dos parâmetros C calculados teoricamente	61, 62
3.2.1 - Valores de reprodutibilidades ilustrados na Fig.3.2.1.....	72
3.4.2 - Parâmetros obtidos pelo ajuste dos dados experimentais de seção de choque absoluta de foto-espalação	77, 78
3.4.3 - Parâmetros obtidos pelo ajuste dos dados experimentais de seção de choque de espalação por fóton equivalente.....	79 -82
3.4.4 - Parâmetros obtidos pelo ajuste dos dados experimentais para reação de espalação por prótons	83, 84
3.5.5 - Valores de A_p obtidos com diferentes fórmulas	95
D.1 - Valores de C e D calculados para Mg proveniente do ^{51}V	108
E.1 - Comparação entre os parâmetros da distribuições discreta e contínua para 3 núcleos alvos	111
G.1 - Valores de ρ correspondentes a diferentes valores de r e m	116,117

INTRODUÇÃO

O interesse do campo das Reações Fotonucleares, no sentido lato, é estudar todos os aspectos da interação da radiação eletromagnética com o núcleo atômico. Esse campo foi aberto em 1934 com a publicação de uma pequena nota em Nature⁽¹⁾ por Chadwick e Goldhaber onde descrevem a experiência em que expõem à radiação γ de alta energia, proveniente de uma fonte de radiotório (Th^{208}, γ) deutério contido numa câmara de ionização e da qual obtiveram fotoprótons.

As radiações eletromagnéticas de energia acima de 50 MeV, quando absorvidas pelo núcleo atômico, podem resultar em reações que podemos classificar em quatro grupos:

- 1) reações nas quais são emitidas uma ou poucas partículas como, por exemplo, (γ, n) , $(\gamma, 2n)$, (γ, p) , etc, que são reações iniciadas principalmente pelos fótons da parte da energia baixa do espectro de bremsstrahlung, mas também pelas reações diretas de alta energia e produção de méson;
- 2) fissão - na qual há divisão do núcleo em fragmentos de massas comparáveis;
- 3) fragmentação - na qual um ou mais aglomerados de nucleons são destacados do núcleo;
- 4) espalação - na qual uma variedade de nuclídeos é obtida decorrente da emissão sucessiva de nucleons ou pequenos aglomerados de nucleons pelo núcleo.

Destas reações, o nosso grupo de Física Nuclear Experimental do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas estudou principalmente as reações diretas e fotofissão. Este estudo teve início em 1967 liderado pelo Prof. H.G. de Carvalho. Desde então, este grupo vem realizando um trabalho sistemático que constitui o mais completo estudo sobre Reações Fotonucleares na faixa de energia de 300 a 1000 MeV.

Para o seu desenvolvimento foram utilizados o Eletro-Sincrotron do Laboratório Nacional de Frascati, o Acelerador Linear do Laboratório de Orsay e o computador de médio porte do CBPF. É importante salientar a ativa participação dos pesquisadores do Instituto de Química Geral e Inorgânica da Universidade de Roma. Assim, em 1974, em virtude do grande número de resultados experimentais obtidos desde 1967, pôde-se fazer um estudo sistemático⁽²⁾ de reações (γ, n) a energias intermediárias nos núcleos de ^{12}C , ^{14}N , ^{16}O , ^{19}F , ^{23}Na , ^{31}P , ^{52}Cr , ^{55}Mn , ^{59}Co , ^{75}As , ^{103}Rh , ^{127}I , ^{197}Au e ^{238}U . Foram estudadas também reações $(\gamma, 2n)$ no ^9Be ⁽³⁾, ^{103}Rh ⁽⁴⁾, ^{127}I ⁽⁵⁾ e ^{197}Au ⁽⁶⁾.

Para fótons de alta energia, na faixa de 1 a 5,5 GeV, foram estudadas⁽⁷⁾ reações (γ, n) no ^{12}C , ^{103}Rh , ^{127}I , ^{197}Au e ^{238}U utilizando o Eletro-Sincrotron de DESY (Hamburgo). Além dos trabalhos experimentais podemos citar os trabalhos teóricos, utilizando o Método de Monte Carlo^(2, 8-13) e as fórmulas nas quais aparecem os fatores de transparências nucleares^(14, 15) para mésons e nucleons fotoproduzidos no interior do núcleo.

Para o estudo da fotofissão tem sido utilizada a técnica de emulsão nuclear para a detecção de fragmentos de fissão. Com esta técnica especial, de uma eficiência de detecção de quase 100% foi possível ao Prof. H.G. de Carvalho e colabora-

dores⁽¹⁶⁾ obter resultados até então inexistentes na literatura científica, como a determinação de seção de choque de fotofissão para o urânio, tório e bismuto no intervalo de energia de 300 a 1000 MeV.

O estudo da fotofissão do urânio, tório e bismuto foi estendido a energias de 1 a 5,5 GeV utilizando o Eletro-Sincrotron de DESY e até 16 GeV com o Acelerador Linear de Stanford⁽¹⁷⁾.

No que diz respeito às reações de foto-fragmentação, tem sido feito um esforço muito grande para se compreender o mecanismo de tais reações, mas até hoje os trabalhos feitos pelo nosso Grupo⁽¹⁸⁾ não constituem assunto de uma literatura tão extensa como nas reações diretas e de fissão.

Quanto às reações de espalação, muitas medidas⁽¹⁹⁻²³⁾ de rendimentos foram realizadas a energias intermediárias (300-1000 MeV) nos mais diversos núcleos alvos, utilizando o Eletro-Sincrotron de Frascati, bem como o Laboratório de Química da Universidade de Roma para a preparação de amostras e contagens. Esses resultados foram analisados e comparados com os valores estimados com as fórmulas semi-empíricas de Rudstam⁽²⁴⁾ adaptadas aos fótons.

Devido à existência de uma grande quantidade de medidas experimentais obtidas pelo nosso Grupo e como as fórmulas existentes na literatura permitem reproduzi-las somente aproximadamente^(*), resolvemos desenvolver uma fórmula que seja mais simples, digamos sob o ponto de vista de utilização prática e que permita estimar as seções de choque de formação dos produ-

(*)As estimativas feitas com essas fórmulas são consideradas satisfatórias quando diferem de um fator 3 das medidas experimentais.

tos de espalação com maior precisão, pois uma fórmula com tais características seria de grande utilidade não só em Física Nuclear mas também em outras áreas ligadas ao estudo da origem do sistema solar, química do espaço (idade da radiação, estudo de meteoritos) e nucleosíntese.

No primeiro Capítulo faremos uma breve consideração sobre a reação de espalação e as fórmulas analíticas existentes para o cálculo das seções de choque. O estabelecimento da fórmula de 4 parâmetros para o cálculo da seção de choque de foto-espalação bem como o método de obtenção destes parâmetros e as considerações pertinentes aos valores tomados por eles serão descritos no segundo Capítulo. Finalmente no terceiro Capítulo apresentaremos os valores obtidos para os parâmetros, a análise e interpretação fenomenológica dos parâmetros, discussão e a conclusão.

CAPÍTULO 1

REAÇÃO DE ESPALAÇÃO

1.1 - Reação em Alta Energia

Os primeiros aceleradores de partículas carregadas apareceram por volta de 1946 e forneceram partículas com energias maiores que 100 MeV. Com essas partículas foram induzidas muitas espécies de transmutações nucleares e os produtos resultantes e a natureza delas foram estudados pelo método radioquímico. Com este método é possível saber a identidade do alvo, do projétil e do resíduo final, mas os estados de agregação e as energias dos pequenos fragmentos devem ser inferidos.

Foram também usadas emulsões de pesquisa e câmara de nuvens e as irradiações foram feitas não só com as partículas provenientes de aceleradores mas também com as fornecidas pela natureza que são os raios cósmicos. Os dados obtidos com estes últimos métodos dão informações sobre o número de partículas carregadas emitidas em eventos simples, distribuição de carga, mas sa, energia e ângulo dessas partículas e quase nenhuma informação sobre o número de neutrons emitidos, a identidade dos resíduos pesados a identidade dos núcleos alvos e do projétil. Então, os dois métodos poderiam ser complementares, mas na prática esses dados não são disponíveis nas condições comparáveis ,

embora muitas conclusões achadas independentemente não sejam aparentemente conflitantes.

Um modelo para descrever essas reações induzidas por próton e dêuteron de alta energia, foi proposto por Serber⁽²⁵⁾, que pode ser interpretado do seguinte modo: o mecanismo de reação nuclear ocorrendo nesta região de energia ($E \gtrsim 30\text{MeV}$), pode ser tomada no limite do acoplamento fraco em que a função de onda do núcleo é expressa como um produto de funções de onda de partículas independentes submetidas a algum tipo de potencial U , auto-consistente. A reação nuclear é considerada como uma interação entre dois corpos de tal modo que, o potencial de interação V_C entre o nucleon incidente e o núcleo alvo é obtido pela soma das interações entre o projétil incidente e os nucleons que estão no núcleo alvo, isto é:

$$V_C = \sum_{k=1}^A V(0,k) \quad (1.1.1)$$

onde $V(0,k)$ é o potencial de interação entre o projétil incidente 0 e o k -ésimo nucleon independente que constitui o núcleo alvo e A é o número de nucleons do alvo.

O projétil incidente é representado por uma onda plana ϕ_C que satisfaz, nas condições assintóticas iniciais, a equação de Schrödinger

$$H_C \phi_C = (H_{C_1} + t) \phi_C = (E_{C_1} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}) \phi_C \quad (1.1.2)$$

onde H_{C_1} é o operador Hamiltoniano associado ao alvo admitido no auto estado de energia E_{C_1} e t é o operador Hamiltoniano associado ao projétil incidente.

Na fase de colisão, o sistema é representado por ψ_C^+ onde o sinal (+) indica que o comportamento assintótico é de uma onda esférica emergente. A função $\psi_C^{(+)}$ satisfaz à equação de Schrödinger

$$(E-H_C) \psi_C^{(+)} = V_C \psi_C^{(+)} \quad (1.1.3)$$

onde H_C é o operador de energia cinética, V_C o potencial e $E = \hbar^2 k^2 / 2\mu$ sendo μ a massa reduzida do sistema. É possível escrever-se a eq. (1.1.3) em forma de equação integral

$$\psi_C^{(+)} = \phi_C + \frac{1}{E-H_C+i\epsilon} V_C \psi_C^{(+)} \quad (1.1.4)$$

ou

$$\psi_C^{(+)} = \left[1 + \frac{1}{E-H+i\epsilon} V_C \right] \phi_C \quad (1.1.5)$$

sendo $H = H_C + V_C$ e onde $i\epsilon$ garante que a $\psi_C^{(+)}$ seja uma onda emergente. A eq. (1.1.5) é obtida pela soma da solução geral da equação homogênea (1.1.2) com uma solução particular da eq. (1.1.3).

O estado final ϕ_C , é uma função de onda de uma assembléia de estados a uma partícula, representada por um produto de ondas planas representativas das partículas emergentes produzidas na reação. Se considerarmos somente o caso de um espalhamento (elástico ou inelástico) da partícula incidente, o estado final é obtido pelo produto da onda plana do nucleon espalhado pela função de onda do núcleo residual.

A matriz de transição para o processo $c \rightarrow c'$ é dada então por

$$T_{c',c} = \left(\phi_{c'} | V_C | \psi_C^{(+)} \right) \quad (1.1.6)$$

Substituindo $\psi_c^{(+)}$ pela expressão (1.1.5) temos

$$T_{c',c} = \left\{ \phi_{c'} | V_c | \phi_c \right\} + \left\{ \phi_{c'} | V_c \frac{1}{1-H+i\epsilon} V_c | \phi_c \right\} . \quad (1.1.7)$$

No caso de reações nucleares que envolvem muitos níveis discretos assim como a região do contínuo a matriz de transição toma a forma:

$$T_{c',c} = \left\{ \phi_{c'} | V_c | \phi_c \right\} + \left\{ \phi_{c'} | V_c \frac{1}{E-H_c+i\epsilon} V_c | \phi_c \right\} \\ + \left\{ \phi_{c'} | V_c \frac{1}{E-H_c+i\epsilon} V_c \frac{1}{E-H_c+i\epsilon} V_c | \phi_c \right\} + \dots \quad (1.1.8)$$

Os termos de ordem superior à primeira correspondem às colisões múltiplas da partícula incidente com os nucleons no núcleo alvo. Alguns desses processos de colisão poderão contribuir para a formação de um núcleo excitado que poderá satisfazer à condição de uma distribuição completa de energia como um núcleo composto. Então, podemos dividir a reação toda em duas etapas sucessivas: a cascata intranuclear e a cascata de evaporação, como proposto por Serber. Na primeira etapa haveria a colisão da partícula incidente com os nucleons do núcleo gerando uma cascata de colisões na qual os nucleons poderiam escapar do núcleo carregando uma parte da energia cinética original, deixando ainda o núcleo altamente excitado. Este estágio é chamado de fase rápida da reação e sua duração é avaliada pelo tempo que um nucleon rápido levaria para atravessar o núcleo alvo, da ordem de grandeza de 10^{-22} seg. No segundo estágio haveria a desexcitação do núcleo residual pela "evaporação" de partículas ou aglomerados de nucleons até atingir uma condição relativamente estável, de equilíbrio termodinâmico, podendo ocorrer também a fis-

são. O segundo estágio é calculado ser aproximadamente 10^{-14} seg que é o tempo de decaimento do núcleo composto.

O modelo de duas etapas prediz quatro categorias de produtos de reação: a) nucleons emitidos na fase de cascata com um espectro largo de energia cinética variando até a energia máxima da partícula incidente, sendo possível também a emissão de partículas α ou outros agregados complexos de nucleons que podem existir como subestruturas transientes no núcleo e que participam da cascata; b) nucleons evaporados ou agregados de nucleons emitidos simetricamente no SCM com um espectro de energia caracterizado pela barreira Coulombiana e temperatura dos nucleons; c) produtos de fissão; d) produtos residuais que são nuclídeos estáveis ou radioativos restantes no fim da cadeia de evaporação. Essa última categoria dos produtos de reação é chamada produtos de espalação.

Podemos definir, então, uma reação de espalação como sendo uma reação que se ajusta à descrição dada por Serber para reação induzida por partícula de alta energia e que não resulte numa fissão.

O termo espalação, originariamente sugerido por Sullivan e Seaborg para designar reações complexas^(*), atualmente inclui também as reações simples nas quais somente poucos nucleons são emitidos. Então, o termo espalação não define uma classe de reações nucleares em termos de mecanismo de reação.

O cálculo numérico da reação em alta energia é feito usualmente pelo método de Monte Carlo, que é um método que permite calcular a matriz de transição (1.1.8) com as adequadas mo

(*) As reações são classificadas arbitrariamente em "simples" e "complexas"⁽²⁶⁾.

dificações, pois na prática o desenvolvimento da matriz de transição (1.1.7) se torna impraticável para a reação em alta energia onde devem ser considerados os termos de ordens maiores do que um. Na reação em baixa energia estes termos podem ser desprezados, e levando em conta somente o primeiro termo da equação (1.1.7) e a matriz de transição obtida utilizando, por exemplo, a aproximação de Born de onda distorcida (DWBA) que se espera ser uma boa aproximação.

O cálculo prático do modelo de Serber foi feito primeiramente por Goldberger⁽²⁷⁾, depois por Bernardini, Booth e Lindenbaun⁽²⁸⁾, Morrison, Muirhead e Rosser⁽²⁹⁾, Mc Manus, Sharp e Gellman⁽³⁰⁾, Meadow⁽³¹⁾, Combe⁽³²⁾, Rudstam⁽²⁴⁾, Ivanova e Pionov⁽³³⁾, Metropolis, Bivins, Storm, Turkevich, Friedlander⁽³⁴⁾ e Bertini⁽³⁵⁾ (*) etc.

O cálculo da fase de cascata fornece as informações sobre a identidade, energia e direção angular das partículas emitidas e energia de excitação E^* , A, Z e o momento angular e linear dos núcleos residuais.

O desenvolvimento da fase de cascata é feito do seguinte modo: para um nucleon de 150 MeV, o comprimento de onda de Broglie λ é cerca de $0,4F$. O núcleo é, então, considerado um simples poço de potencial de raio $r_0 A^{1/3}$ contendo N neutrons e Z prótons, numa certa distribuição de momento. O efeito de estrutura de camada não é importante nesta primeira etapa por causa do grande número de colisões, conclusão essa tirada do estudo da reação (p,pn), de modo que pode ser usada a distribuição de momento de gás de Fermi degenerado.

(*) O efeito de superfície difusa não melhorou muito sobre o valor de Rudstam.

A energia da partícula incidente é muito maior do que a energia de interação entre nucleons individuais no núcleo e o nucleon incidente apresenta λ menor do que a distância média nucleon-nucleon que é $\sim 2,5 F$ na matéria nuclear. São supostas então ocorrer colisões elásticas dentro do contorno do núcleo, como interação de 2 corpos. Essas interações são governadas pela mesma seção de choque que são aplicadas em espaço livre mas modificada pelo efeito do princípio de exclusão de Pauli dentro do núcleo⁽²⁷⁾, embora a seção de choque para quase-nucleons seja muito menor que para nucleons livres⁽³⁴⁾. Numa visão simplificada, podemos usar a aproximação de impulso⁽³⁶⁾. A energia média transferida por colisão com um nucleon de 100 MeV, foi calculada por Serber, em 25 MeV e o livre caminho médio em 4×10^{-13} cm. Como o livre caminho médio do nucleon colidido é menor do que o do incidente, este transfere a sua energia aos outros nucleons através de colisões, mas é possível que estes nucleons colididos escapem do núcleo levando toda^(*), ou uma boa parte, da energia original do nucleon incidente. A distribuição angular é dada pela seção de choque diferencial em função da energia apropriada.

Para energia do nucleon incidente acima de 400 MeV há a produção de méson. As colisões elásticas e a de re-absorção do méson na matéria nuclear devem ser incluídas na cascata. A influência do méson se torna maior quanto maior se torna a energia, pois haverá dupla, tripla, etc., produção de mésons, o que torna a reação mais complexa.

(*) O modelo admite que algumas partículas incidentes possam passar através do núcleo sem causar nenhum efeito. Essa transparência nuclear faz com que a seção de choque calculada seja menor que a geométrica.

A segunda fase do modelo de Serber, que é desexcitação do núcleo residual formado na primeira fase, é usualmente descrita pela mecânica estatística⁽³⁷⁾. Olhando o núcleo como um gás de Fermi, o estado do núcleo residual excitado pode ser considerado pela ocupação de número de estados de partículas simples. Os níveis de gás de Fermi são ocupados pelas partículas e "buracos". A energia de excitação do núcleo residual E^* é a soma das excitações devidas aos "buracos" no gás degenerado de nucleons e pode ser calculada pela fórmula:

$$E^* = T_0^0 - \sum_{i=0}^m T_i^0 - (m-1)B \quad (1.1.9)$$

onde T_0^0 é a energia da partícula chegando (no sistema de laboratório), T_i^0 é a energia de uma partícula de cascata saindo e B é a energia de ligação média de m nucleons que saem.

O núcleo residual excitado decai em um dos possíveis pares de produtos de reação pela fissão ou evaporação de partículas, competindo na formação de produtos de fissão e espalação. A competição com a fissão é calculada considerando o modo de desexcitação na fase de evaporação, expresso através da largura de nível para a probabilidade de fissão e emissão de neutron em função de energia. Entretanto essa dependência é arbitrária, a largura de nível para a fissão em função de Z , A e E não é conhecida em altas energias de excitação. O efeito do momento angular nesta competição tem sido considerado⁽³⁸⁾.

O modelo de evaporação supõe que o núcleo residual excitado^(*) perde toda a memória de como foi formado e o decaimen

(*) O núcleo residual excitado apresenta características de um núcleo composto e é designado normalmente com essa nomenclatura.

to se processa pela evaporação de nucleons como numa clássica gota líquida, apresentando um feitio democrático para todos os possíveis produtos. Este modelo foi desenvolvido para dar um tratamento estatístico para as reações nucleares por Bethe⁽³⁹⁾, Weisskopf⁽⁴⁰⁾ e Weisskopf e Eving⁽⁴¹⁾, logo que foi proposto o núcleo composto para explicar a seção de choque de ressonância nuclear. E foi desenvolvido num modelo trabalhável uma década de - pois, tal como é descrito por Blatt e Weisskopf⁽⁴²⁾ e foram realizados extensos testes^(24,43-45) na década de 45 a 55 com apreciáveis resultados: a) a idéia central do modelo de evaporação - a hipótese de Bohr sobre a independência da formação e decaimento do núcleo composto - foi confirmada por Ghoshal⁽⁴⁶⁾; b) o espectro de energia da partícula emitida a partir do núcleo composto obtido pelo modelo de evaporação mostrou uma forma Maxwelliana; c) a densidade de nível nuclear deduzida a partir do espectro de energia da partícula emitida⁽⁴⁷⁾ concordou com a predita pelo modelo; d) a teoria explicou a "fervura" de grande número de neutrons a partir de núcleo pesado excitado; e) a teoria mostrou a sistemática geral da emissão de partículas que segue a irradiação de uma grande variedade de núcleos com variadas energias de bombardeamento, atribuída à variação na energia de separação de partículas⁽⁴⁸⁾.

Posteriormente, muitos refinamentos⁽⁴⁹⁾ foram feitos na teoria original de evaporação baseados nas leis fundamentais de conservação (momento angular total) e sobre os novos conhecimentos de interação média entre nucleons (paridade na fórmula da seção de choque) e o modelo do núcleo descrito como de camada e modelo nuclear ótico^(50,51).

Os valores determinados com a primitiva teoria de eva-

poração são muito importantes para dar uma idéia da ordem de grandeza estimada de muitas seções de choque nucleares.

1.2 - Espalação com Fótons

O pioneiro trabalho de espalação com fótons foi feito por Baldwin e Klaiber⁽⁵²⁾.

Quando se usa o fóton como projétil inicial, deve-se levar em consideração o processo de absorção do fóton, bem como o processo de dois estágios nas transmutações obtidas. O processo de absorção do fóton depende da sua energia. Após a região de baixíssimas energias onde o fóton causa apenas uma fluorescência, podemos distinguir grosseiramente 3 regiões de energia: de 5 MeV a aproximadamente 50 MeV, onde o comprimento de onda do fóton é maior do que o raio do núcleo (região de ressonância gigante); entre 50 e 150 MeV, onde o comprimento de onda do fóton é comparável ao diâmetro dos nucleons (região de quase-dêuteron) e acima de 150 MeV onde o comprimento de onda é menor que o diâmetro do nucleon (região fotomesônica).

A região de ressonância gigante, assim denominada por apresentar forte ressonância na seção de choque de fotofissão na energia de 15 a 20 MeV⁽⁵³⁾, bem como nas reações (γ, n) , (γ, p) , etc, mostrou ser uma característica comum a todos os núcleos. Logo após essa observação, foi proposta uma explicação por Goldhaber e Teller como sendo vibração de uma esfera de neutrons contra a esfera de prótons. Logo depois Steinwedel e Jensen incorporaram a idéia de Goldhaber e Teller ao modelo hidrodinâmico de 2 fluidos. Posteriormente essa idéia foi estendida à teo-

ria mais dinâmica que é o modelo coletivo e que dá uma compreensão maior da dinâmica e da estrutura de ressonância gigante. As etapas deste mecanismo são: primeiro um fóton incidente é absorvido e um movimento coletivo é iniciado; depois a energia deste modo coerente é dissipada em muitos graus de liberdade, isto é, a energia "mecânica" é transformada em energia "térmica" por fricção, esquentando o núcleo; e por fim, o núcleo quente esfria pela evaporação de partículas e fótons. Todas estas etapas foram objeto de estudo e são encontrados na literatura (54,55,56,42).

Na região de quase-dêuteron, uma exagerada emissão de próton e coincidência entre prótons e neutrons foram observadas nas experiências feitas em Cornell e Berkeley. Essa experiência levou Levinger (57) a propor o modelo de quase-dêuteron como o mecanismo de absorção pelo par próton-neutron. O fóton é visto somente por 2 nucleons do núcleo, um par próton-neutron ou próton-próton. Naturalmente um deles deve ser carregado. No caso onde há um próton junto a um próton a interação com o fóton produz uma desintegração de quadrupolo elétrico. No caso onde há um neutron junto a um próton há a formação do chamado "pseudo-dêuteron" e ocorre a desintegração deste dêuteron. Um neutron e um próton serão emitidos nas direções opostas no SCM do pseudo-dêuteron. Após a desintegração, um deles ou ambos poderão ser reabsorvidos na matéria nuclear deixando o núcleo excitado.

Acima do limiar mesônico (~ 160 MeV), a principal contribuição para a absorção do fóton é devida à produção de píon. O espalhamento de píon e nucleon de recuo, assim como a absorção do píon dentro do núcleo alvo, provoca a formação de uma cascata nucleônica. Os cálculos estatísticos foram feitos (58) ba

seados nestes modelos para reações induzidas por fótons de alta energia (> 50 MeV).

Embora as interações iniciais sejam diferentes para fótons e nucleons, as interações secundárias são semelhantes, resultando em produtos residuais semelhantes, o que nos permite utilizar o mesmo esquema para os cálculos numéricos de simulação segundo o modelo de Serber. Podemos explicar também por este modelo o baixo rendimento dos produtos de espalação induzida por fóton em relação ao rendimento produzido, por exemplo, por próton de alta energia^(*); na interação primária quando há a produção de 1 méson, quando o projétil é o fóton, o número de partículas que iniciam a cascata é 2 (1 próton e 1 méson) enquanto que no caso do projétil ser um próton, além de um nucleon e um méson, há o próton incidente sendo portanto 3 partículas iniciais, o que deverá causar maior perturbação no núcleo, aumentando o rendimento de espalação.

1.3 - Sobre o Cálculo de Rendimento pelo Método de Monte Carlo

Um programa de computador desenvolvido anteriormente pelo nosso Grupo^(2,8-13) simula somente o primeiro estágio do modelo de Serber, o que nos permitiu obter valores teóricos dos rendimentos das reações que ocorrem na fase rápida^(**) - as reações diretas. É possível completar o programa acima, inserindo o se-

(*) A reação de espalação é uma reação que só se processa em altas energias.

(**) Muitos pesquisadores^(59,60,61), baseados em resultados experimentais, concluíram que a reação de fragmentação se dá na fase rápida, porém o modelo de Serber não descreve tais reações.

gundo estágio da reação (competição fissão-evaporação), de tal modo a se obter dados não só da reação de espalação como também da de fissão em altas energias. Esta seria uma das maneiras de se obter valores de seção de choque de espalação e também de fissão. A limitação do Método de Monte Carlo é que como todo método estatístico^(*), ele apresenta as flutuações estatísticas inevitáveis, mesmo analisando um número considerável de "histórias"^(**). São flutuações inerentes ao método, portanto, dependendo dos valores a serem determinados, ele pode não ser o mais indicado. No caso de reação de espalação, a grande variedade de produtos a serem formados, especialmente nos alvos pesados e energias de irradiação grandes (região de GeV), a estimativa obtida, pode não ser precisa para os núclídeos cujos rendimentos são pequenos, isto é, os que têm pouca probabilidade de serem formados. Além disso, geralmente o processo artificial construído é simplificado, simplificação essa ditada pela ausência de informação completa sobre o processo real e pela limitação do computador que deve simular num intervalo de tempo aceitável.

Outra restrição que deve ser observada diz respeito à validade do modelo de dois estágios para certas reações. Poskanzer et al.^(62,63), estudando o espectro de energia e seção de choque de formação dos elementos cis-Na a partir de irradiação de U e Ag com prótons de 5,5 GeV, chegaram à conclusão de que o modelo "clássico" não pode explicar seus resultados. Talvez seja preferível utilizar o modelo em que há uma fase de pré

(*) As restrições quanto ao seu uso são dadas no Apêndice A.

(**) Uma história corresponde a um ensaio.

-equilíbrio para a evaporação como uma transição da etapa de cascata e evaporação^(63,64).

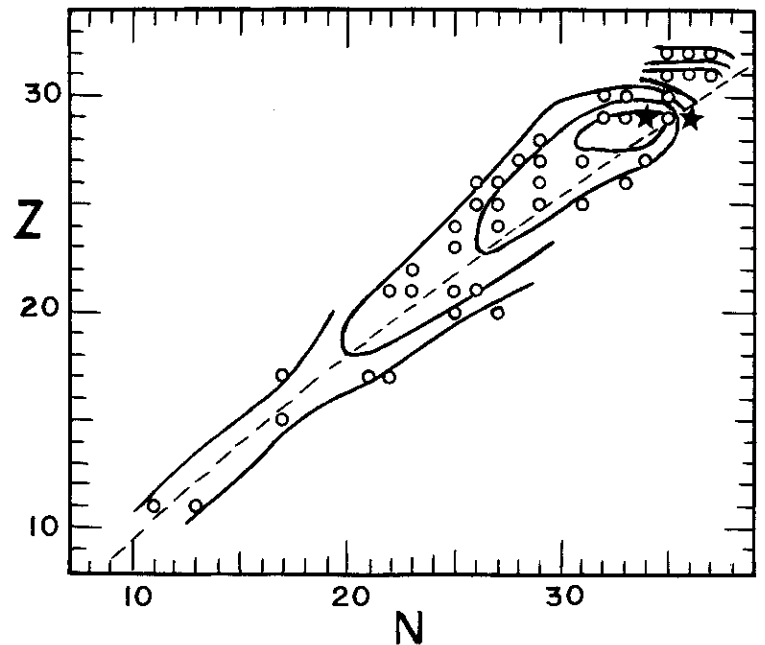
O cálculo numérico do modelo de Serber utilizando o método de Monte Carlo apresenta, portanto, as limitações quanto aos eventos com pequenas probabilidades, não só pela falha do método em si, mas também a do modelo que descreve a reação e além disso o desenvolvimento em modelo matemático-computacional não é trivial, especialmente para a estimativa de seções de choque de espalação em altas energias. Então, desde o primeiro trabalho de Rudstam⁽²⁴⁾, muito esforço tem sido feito na procura de uma fórmula analítica, que represente a distribuição de carga e massa do núcleo residual de espalação, que cubra os eventos com alta e baixa probabilidade, permitindo calcular todas as seções de choque.

1.4 - *Representação da Seção de Choque de Espalação*

A literatura apresenta a superfície de rendimento de espalação construída de seguinte modo: fazendo a representação gráfica dos rendimentos de espalação tendo como base uma carta de nuclídeos, obtém-se uma carta topográfica na qual as curvas são as de níveis que dão as "alturas" dos rendimentos de espalação, onde entre uma área e outra, limitada pela curva, tem uma diferença de fator 10, sendo que a área mais interna é a maior, como podemos ver pela Fig. 1.4.1⁽⁶⁵⁾.

Em representação tridimensional tem-se uma superfície suave com Z e N como eixos do plano horizontal e o rendimen-

Figura 1.4.1 - Rendimento a partir de ^{nat}Cu com prótons de 340 MeV. Dados obtidos pela ref. (66). (As estrelas indicam a posição dos núcleos alvos.)



to como eixo vertical.

Considerando os produtos com poucas unidades de A e Z abaixo das do alvo e ignorando os produtos bem leves, esta superfície tem a forma de uma longa e larga cordilheira subindo em direção ao alvo, Fig. 1.4.2.

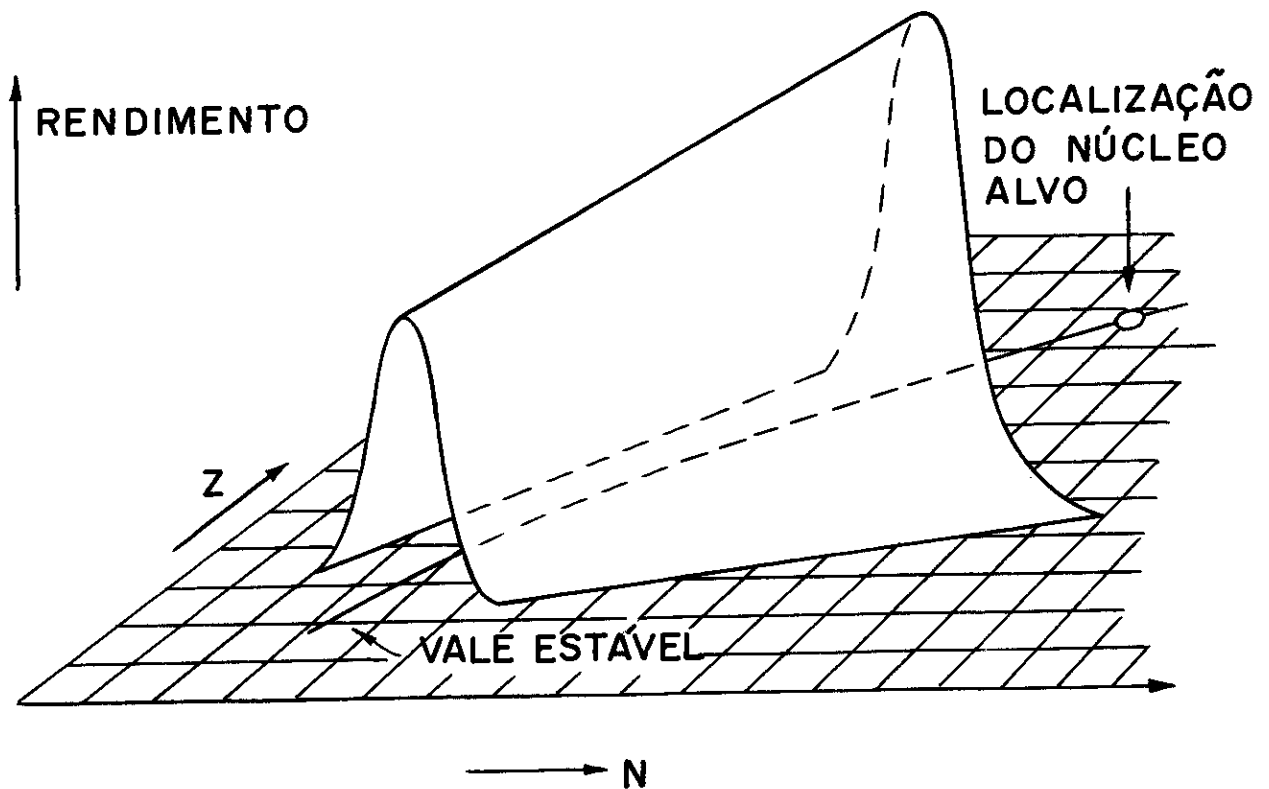


Figura 1.4.2 - Representação esquemática da porção da superfície de rendimento fotonuclear que tem sido examinado na experiência da ref. (67).

A dispersão de carga é aproximadamente uma gaussiana. Os valores do pico da dispersão de carga (isto é, o topo da cordilheira) e a distribuição de massa decrescem exponencialmente com a distância a partir do alvo. O número atômico mais provável Z_p acompanha mais ou menos a linha de estabilidade β .

1.5 - *Fórmula Empírica de 5 Parâmetros de Rudstam*

Baseado na variação regular dos rendimentos experimentais⁽⁶⁷⁾ com Z e A do produto, Rudstam fez a aproximação da superfície de rendimento de espalação por uma fórmula simples de 4 parâmetros.

A aproximação da superfície pela curva, feita por Rudstam, é uma função analítica arbitrária com um número de parâmetros a serem ajustados através de valores experimentais. Em 1956, ele⁽²⁴⁾ obteve com essa fórmula a reprodutibilidade^(*) das seções de choque experimentais dentro de um fator 2, para os produtos de 3 a 30 unidades de massa atômica abaixo das massas do núcleo alvo, num intervalo de A_t de 51-75. Para generalizar mais a fórmula e tornar possível a sua aplicação prática, foi introduzido mais um parâmetro⁽⁶⁸⁾ para normalizar a distribuição teórica com os dados experimentais. Rudstam apresentou 4 fórmulas^(**) mas a seleção da fórmula final se baseou no melhor ajuste com cerca de 1200 dados experimentais e a fórmula CDMD ("charge distribution mass-yield distribution") apresentou uma reprodu

(*) A definição deste termo é dada no Apêndice B.

(**) As fórmulas são correlacionadas de vários modos, vide Apêndice C.

tibilidade média melhor que foi dentro de um fator 3. A CDMD baseia-se no decaimento exponencial da seção de choque de produtos de espalação com o aumento da perda nominal do número de nucleons e a distribuição de carga é gaussiana. É a seguinte sua expressão para seção de choque:

$$\sigma(Z,A) = \text{const} \times \exp \left[-\frac{PA - R(Z - SA - TA^2)^2}{2} \right] \quad (1.5.10)$$

onde $\sigma(Z,A)$ é a seção de choque de formação do produto residual com número atômico Z e número de massa A a partir do núcleo alvo (Z_t, A_t) e a const é igual a $\hat{\sigma} \times f(P, R, A_t)$.

Os parâmetros P , R , S e T são obtidos pelo processo de ajuste com os pontos experimentais e $\hat{\sigma}$ corresponde, aproximadamente, à seção de choque inelástica total do alvo.

O parâmetro P descreve o decrescimento experimental da seção de choque quando $\Delta A (= A_t - A)$ cresce e depende fortemente da energia de irradiação; R define a largura da distribuição; S e T a posição do pico da distribuição. O Z_p do produto é proporcional à massa, corresponde ao pico da distribuição e pode ser calculado pela expressão:

$$Z_p = SA - TA^2 \quad (1.5.11)$$

Baseado no trabalho de Grover⁽⁶⁹⁾, onde é apresentada uma curva de Z_p/A versus número de massa num intervalo de massa de 30 a 150, Rudstam deduziu os seguintes valores para os parâmetros S e T :

$$S = 0,49$$

$$T = 0,00033 \quad .$$

Supondo a distribuição de carga simétrica em relação ao número atômico mais provável Z_p , isto é, a sua derivada é zero para $Z = Z_p$, a distribuição (1.5.10) se torna uma distribuição do tipo:

$$\sigma(Z) = k_1 \exp \left[-k_2 (Z - Z_p)^\alpha \right] \quad (1.1.12)$$

onde k_1 , k_2 e α são constantes positivas com a condição de que $\alpha > 1$. Então as distribuições exponenciais são excluídas. Para $\alpha = 2$ a distribuição é gaussiana. Essas distribuições caem rapidamente nos lados. A distribuição com $\alpha = 3/2$ decresce mais lentamente e Rudstam estudou as duas formas sendo a decisão dada pelas medidas experimentais.

A soma de todas as seções de choque produz a seção de choque total σ_i , para a formação de produtos de espalação. Por exemplo, na distribuição CDMD tem-se:

$$\sigma_i = \Sigma \sigma(Z, A) \sim \text{const} \int_{A_1}^{A_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-PA - R(Z - SA + TA^2)^2 \right] dAdZ \quad (1.5.13)$$

onde a soma é aproximada pela integral para A nos limites A_1 e A_2 , e para Z o limite $-\infty$ e $+\infty$ é usado. O último limite pode ser usado porque a distribuição de carga diminui rapidamente nos lados. Então:

$$\sigma_i(A_1, A_2) \sim \text{const} \frac{\pi^{1/2} (e^{PA_2} - e^{PA_1})}{PR^{1/2}} \quad (1.5.14)$$

É razoável esperar que a fórmula de seção de choque não cubra um intervalo todo de produtos de espalação. Os produtos de número de massa muito pequeno correspondem às extremidades da dis -

tribuição e representam os produtos formados pela maior emissão de fragmentos leves pela evaporação ou fragmentação e não podem ser considerados na estimativa da seção de choque inelástica total, σ_i . Então, se permitida energeticamente, pode-se fazer uma extrapolação para $A_1 = 0$ na fórmula da seção de choque. Os produtos muito pesados também são formados mas não se sabe com certeza, o limite superior da integração, então, na eq. (1.5.14), coloca-se $A_2 = A_t$, que é a massa do alvo. A constante que aparece na eq. (1.5.10) fica então:

$$\text{const} = \frac{\hat{\sigma} P R^{1/2}}{\pi^{1/2} (e^{\frac{P}{A} t} - 1)} \quad , \quad (1.5.15)$$

e a fórmula final da seção de choque se torna:

$$\sigma(Z, A) = \frac{\hat{\sigma} P R^{1/2}}{\pi^{1/2} (e^{\frac{P}{A} t} - 1)} \exp \left[- \frac{[P A - R (Z - S A + T A^2)]^2}{2} \right] \quad (1.5.16)$$

onde $\hat{\sigma}$, assim como P, R, S e T são parâmetros livres deduzidos pela comparação com as seções de choque medidas.

Rudstam faz uma descrição fenomenológica para os parâmetros, mas a sua fórmula não fornece nenhuma informação sobre o mecanismo nuclear envolvido e as reprodutibilidades médias das seções de choque experimentais estão dentro de um fator 3 e um fator 2,4, se contar somente os produtos com $A \leq 30$. Não foi possível para Rudstam estabelecer uma dependência do parâmetro P que define a inclinação da cordilheira com o alvo para Z_t acima de 50, mas foi possível achar⁽⁶⁸⁾ alguma dependência com a massa acima deste valor de Z_t .

O grande intervalo de seção de choque coberto pela

fórmula, numa razão de 10^6 entre o maior e o menor rendimento e não considerando a incerteza nas medidas experimentais, pode-se dizer que esta concordância obtida é muito boa. Isto sugere fortemente que o produto de espalação é uma soma de contribuição de um grande número de vias de reação.

1.6 - Fórmulas Semi-Empíricas

Posteriormente apareceram algumas variantes da fórmula de Rudstam com base mais física. A primeira destas fórmulas foi provavelmente a de Audouze et al. ⁽⁷⁰⁾ para o estudo de reações complexas nos núcleos leves ($9 \leq A_t \leq 32$), incorporando a regra ΔT de Bernas et al. ⁽²⁶⁾ e introduzindo uma série extensiva de parâmetros para núcleo alvo, núcleo produto e energia incidente de neutron e próton. A regra ΔT é uma regra fenomenológica que pode ser usada para os casos onde mais de 2 partículas são emitidas e a energia acima de 150 MeV (para núcleo com $A \leq 20$), para o cálculo de seção de choque de espalação não medida. A regra ΔT é derivada da dependência da seção de choque de espalação com a diferença do spin isotópico T , entre o núcleo inicial e final, $\Delta T_3 = T_3 - T_{3t}$ (produto-alvo), onde $T_3 \left[\frac{1}{2}(N-Z) \right]$ é o 3º componente do iso-spin. Colocando no gráfico ⁽⁷¹⁾ os rendimentos de espalação correspondente a um dado ΔT_3 , ou seja, um meio da diferença entre o número de próton e neutron emitidos versus ΔT_3 , obtemos uma distribuição gaussiana como uma função de ΔT_3 com a largura máxima a meia altura (FWHM) aumentando com a energia. A posição do máximo da distribuição é indica-

da por T_{3m} . A fórmula da Audouze et al. é semelhante a CDMD de Rudstam:

$$\sigma(A_t, T_{3t}; A, T_3; E) = W \exp \left[- P \Delta A - R (T_3 - T_{3m})^2 \right], \quad (1.6.17)$$

onde os termos dentro do 1º par de parêntesis se referem ao alvo (índice t), ao produto (sem índice) e à energia do projétil (E), sendo A o número de massa do produto em função do seu isospin T_3 , $\Delta A = A_t - A$, o número de nucleons emitidos e W, P, R e T_{3m} são parâmetros fenomenológicos ajustados a partir de dados experimentais.

Para $T_3 = 0$, as estimativas deram dentro de um fator 3 e para $T_3 = 1$ deram iguais às obtidas com a fórmula CDMD, mas para grandes valores de T_3 não é melhor do que fator 5.

Durante o estudo de rendimento de espalação foi observada uma forte dependência entre o rendimento e $(N/A)_t$ do alvo, então Chackett e Chackett⁽⁷²⁾ fizeram uma modificação na fórmula de Rudstam para levar em conta a memória da composição do alvo e analisaram cerca de 1200 medidas experimentais de irradiação por prótons, obtendo uma média melhor, no caso menor do que um fator 3, isto é, menor do que a versão original de Rudstam.

Em 1970, Turner⁽⁷³⁾ alterou o parâmetro Z_p de Rudstam para introduzir um componente assimétrico na curva de distribuição de carga e a usou para o cálculo de rendimentos de espalação com prótons de altas energias ($> 0,6$ GeV) em núcleos alvos na região de número atômico maiores que o chumbo. Ele notou que os núcleos com $Z > 82$ têm maior excesso de neutron que os núcleos com $Z < 82$. Então Z_p de Rudstam não é aplicável para a região de $Z > 82$. A partir do ajuste de Pate e Poskanzer⁽⁷⁴⁾, Turner encontrou

$$Z_p = 0,56517A_t - 0,74922 \times 10^{-3} A_t^2 \quad (1.6.18)$$

e substituiu na fórmula de Rudstam, sendo essa a única modificação que ele introduziu.

Em 1971, partindo de seções de choque experimentais, Silberberg e Tsao^(75,76) construíram uma equação semi-empírica semelhante à de Rudstam, válida para alvos de número de massa de $9 \leq A_t \leq 209$ e produtos com $6 \leq A \leq 200$, exceto para valores de $\Delta A (= A_t - A)$ muito grandes ou muito pequenos:

$$\sigma = \sigma_0 f(A)f(B) \exp(-P\Delta A) \exp\left\{-R\left[\frac{Z-SA+TA^2}{A}\right]^V\right\} \Omega \eta \xi, \quad (1.6.19)$$

onde $f(A)$, $f(B)$ são fatores de correção aplicáveis aos produtos provenientes de alvos pesados com $Z_t > 30$, quando ΔA é bem grande como no caso de fissão, fragmentação e evaporação; o termo $\exp(-P\Delta A)$ descreve o decrescimento da seção de choque quando ΔA aumenta; o termo $\exp\left\{-R\left[\frac{Z-SA+TA^2}{A}\right]^V\right\}$ descreve a distribuição isotópica da seção de choque em que R dá a largura, S a localização do pico e T a distorção da curva da distribuição quando aumenta o excesso de neutron com o aumento do número atômico do núcleo produto.

O parâmetro P é derivado pelo desvio mínimo do $\ln(\sigma_{cal}/\sigma_{exp})$ como função de ΔA , para vários valores de energia. Os parâmetros R , S e T são derivados minimizando estes desvios como função de $N-Z$, isto é, o excesso de neutron do núcleo produto. σ_0 é o fator de normalização para a seção de choque dada em milibarns. Os parâmetros Ω , η e ξ são derivados por considerações teóricas. Ω está relacionado à estrutura nuclear, η está relacionado à paridade dos núcleos produtos e ξ

representa o fator de aumento de rendimento para os produtos de evaporação leve. Esses parâmetros estão tabelados na ref. (76).

Silberberg e Tsao analisaram na mesma região de energia ($> 0,6$ GeV) de Turner e obtiveram uma reprodutibilidade dentro de um fator 2. Não estenderam a sua fórmula para a região de $Z > 82$, isto é, núcleos maiores do que o chumbo.

Em 1972, Schramm⁽⁷⁷⁾ combinou numa só fórmula, a seção de choque semi-empírica de fissão com a fórmula de Rudstam modificada por Turner. Turner não levou em conta a atenuação dos rendimentos de espalação devida à competição com o rendimento de fissão e então a sua seção de choque não permitia realizar extrapolações através da região trans-Pb. A razão da seção de choque de fissão e a total inelástica induzida por prótons dada por Perfilov⁽⁷⁸⁾ obedece à seguinte relação:

$$F = \frac{\sigma_f}{\sigma_T} = \min \left\{ \exp \left[m \left(\frac{Z}{A-K} \right) \right]; 1 \right\} \quad , \quad (1.6.20)$$

onde m e K são parâmetros a serem determinados pelo melhor ajuste aos pontos experimentais. Schramm utilizou a seção de choque inelástica total a seguinte expressão

$$\sigma_T = 42 A^{0,67} \text{ mb} \quad (1.6.21)$$

e na fórmula (1.6.20), no lugar de Z^2/A como parâmetro de fissionabilidade, um parâmetro mais preciso:

$$X \equiv \frac{Z^2}{A(1-\kappa I^2/A^2)} \quad , \quad (1.6.22)$$

onde $I = N-Z$ e κ é a razão do coeficiente de superfície de sime

tria e coeficiente de superfície de energia da fórmula semi-em-pírica de massa. Segundo uma formulação semelhante à de Rudstam e à de Silberberg e Tsao, Schramm obteve uma fórmula que permite calcular a seção de choque de espalação de um isóbaros a partir do alvo A_t

$$\sigma(\Delta A, A_t) = \frac{\sigma_T(1-F)P \exp(-P\Delta A)}{1-\exp(-PA_t)} \quad , \quad (1.6.23)$$

onde $\Delta A = A_t - A$ e P é o parâmetro de energia tipo Rudstam.

A fórmula (1.6.23) pode ser normalizada para

$$\sigma_S = \int_0^{P_t} \sigma(\Delta A, A_t) d\Delta A \quad (1.6.24)$$

Para o cálculo da seção de choque de produção de um particular núcleo de massa A e Z é dada a seguinte fórmula:

$$\sigma(A, Z; A_t) = \frac{\sigma(\Delta A, A_t) R^{2/3}}{2P(5/3)} \exp(-R|Z-Z_p|^{3/2}) \quad , \quad (1.6.25)$$

onde $Z_p (=SA-TA^2)$ é o número atômico do nuclídeo com rendimento máximo para um dado isóbaros e R , S e T são parâmetros obtidos pelo melhor ajuste da fórmula aos pontos experimentais.

R determina como a seção de choque cai rapidamente para Z diferente de Z_p , e $2P(5/3) = 1,806$.

A eq. (1.6.25) é normalizada de tal modo que a integral $\sigma(A, Z; A_t)$ sobre todo o Z produza $\sigma(\Delta A, A_t)$.

Para corrigir o efeito par-ímpar, a eq. (1.6.25) foi multiplicada pelo termo $N = 1,25; 0,9; 1,0; 0,85$ para $(Z, N) = (\text{par}, \text{par}) (\text{ímpar}, \text{par}) (\text{par}, \text{ímpar}) (\text{ímpar}, \text{ímpar})$ respectivamente.

Para a sistemática de produtos de espalação com fótons e elétrons temos o trabalho de Jonsson e Lindgrem^(79,80) de 1973 e 77, onde são analisados todos os dados experimentais existentes para fótons com a fórmula CDMD de Rudstam e chegaram à conclusão de que, atribuindo valores apropriados aos parâmetros é possível estimar razoavelmente as seções de choque de espalação numa faixa de energia de 0,4 a 6 GeV e número de massa do alvo de 30 a 200.

Existem ainda alguns trabalhos como de Kumbarsk⁽⁸¹⁾, di Napoli⁽⁸²⁾ para fótons, e Regnier⁽⁸³⁾ para prótons, mas não são trabalhos de sistemática.

1.7 - Fórmula Teórica

Num caminho diverso do de Rudstam, em 1970 Gupta et al.⁽⁸⁴⁾ derivaram uma fórmula teórica de 3 parâmetros para reações de espalação induzida por próton de alta energia.

A fórmula de Gupta et al. é deduzida por considerações estatísticas: considera o núcleo como uma coleção de A_t nucleons e o fenômeno de espalação é visto como uma emissão sucessiva de n nucleons do núcleo regida por leis de probabilidades, sem fazer nenhuma consideração ao processo de 2 etapas do modelo de Serber. A seção de choque de formação dos produtos de espalação é dada pela densidade de probabilidade da correspondente função de probabilidade de formação do nuclídeo pela emissão de n nucleons do núcleo alvo.

A fórmula de Gupta et al. para o núcleo alvo de Z_t

próton e N_t neutron que emitem t prótons e u neutrons para formar o produto de Z próton e N neutron, é escrita do seguinte modo:

$$\sigma(Z,A) = \sigma_0 \exp \left[-K \left\{ t - \frac{Z_t+1}{N_t} u + \frac{Z_t+1}{N_t} u \exp \left(- \frac{C N_t}{(Z_t+1)u} \right) \right\}^2 \right] \quad (1.7.26)$$

onde σ_0 é o fator de normalização da distribuição teórica com os pontos experimentais e corresponde a σ no ponto $\delta = 0$ sobre o qual a distribuição é normal, δ designando o termo entre os colchetes.

O valor de σ_0 é aproximadamente igual à seção de choque de reação (p,pn).

Os parâmetros C , σ_0 e K são valores a serem determinados por método de ajuste.

Gupta et al. estimaram as seções de choque para núcleos de número de massa 51 até 93 numa faixa de energia de proton de ≈ 100 MeV a ≈ 2.9 GeV e acharam os resultados dentro de um fator aproximadamente 3.

A grande inovação desta fórmula é que ela é derivada a partir de considerações teóricas onde os parâmetros σ_0 e K têm um significado correspondente à distribuição normal e o parâmetro C tem um significado físico que é a retenção coulombiana sobre os prótons de baixa energia de excitação dentro do núcleo.

Em 1978, houve uma tentativa de aplicar a fórmula de Gupta na sistemática de produtos de fotoespalação em núcleos de massa intermediária^(*). Os valores calculados concordaram com

^(*) J.B.Martins, V. di Napoli e O.A.P. Tavares, comunicação particular(1978).

os experimentais até núcleos de $Z \leq 27$, apresentando discrepâncias a partir deste valor. Então foi introduzido mais o termo empírico que descreve a inclinação da "cordilheira" e se obteve uma fórmula com 4 parâmetros⁽⁸⁵⁾.

Neste trabalho será apresentada a fórmula já na sua forma definitiva com a modificação^(*) feita na função de amortecimento que rege a saída dos prótons do núcleo e será feito o ajuste estatístico de todos os rendimentos de fotoespalação medidos experimentalmente e disponíveis na literatura. Paralelamente ao estudo de fotoespalação utilizaremos a fórmula para a análise das reações induzidas por prótons generalizando-a, em princípio, para qualquer outra espécie de projétil, bastando para isso construir o chamado "núcleo semente", o núcleo que incorpora ao núcleo alvo as propriedades do projétil utilizado.

(*) Apêndice D.

CAPÍTULO 2

FÓRMULA SEMI-EMPÍRICA DE 4 PARÂMETROS

2.1 - Estabelecimento da Fórmula

Vamos estabelecer uma fórmula semi-empírica para as seções de choque dos produtos de foto-espalação adotando o procedimento, em linhas gerais, utilizado por Gupta et al. para a reação de espalação induzida por prótons.

É razoável admitir a validade deste procedimento, uma vez que, pelo estudo de estrelas de desintegração pela técnica de emulsões nucleares⁽⁸⁶⁾, reconhece-se que as partículas emitidas podem ser divididas aproximadamente, em dois grupos:

- i) poucas partículas de alta energia e
- ii) grande número de partículas lentas com um espectro de energia típico de evaporação nuclear, sendo impossível estabelecer um corte nítido entre estes dois grupos.

Portanto, sob o ponto de vista de mecanismo de reação, podemos usar o modelo estatístico (de evaporação), para descrever a reação de espalação pois é a parte responsável pela maioria das emissões⁽⁸¹⁾. Sob o ponto de vista dos produtos formados, sua distribuição mostra serem eles provenientes de um fenômeno de natureza estatística, seguindo uma lei estatís-

tica, ou seja, uma distribuição normal^(*).

O núcleo que sofre uma reação é considerado como uma população de A nucleons que não interagem entre si, e confinados num poço de potencial nuclear; além disso supomos por enquanto que os prótons não sofrem o efeito da barreira coulombiana.

Este núcleo dá origem a nuclídeo de $A-n$ nucleons pela emissão de n nucleons.

A probabilidade de formação desses nuclídeos é obtida facilmente aplicando-se o princípio das probabilidades compostas e probabilidades totais.

Consideremos que os n nucleons a serem emitidos tenham sempre a mesma probabilidade média p , isto é, a probabilidade de emissão de cada nucleon sendo sempre o mesmo número p (esquema de Bernoulli), há n emissões dentre os A nucleons e, portanto, há retenção de $(A-n)$ nucleons.

Se estabelecermos uma ordem para as n emissões e $(A-n)$ retenções, a probabilidade seria, em virtude das probabilidades compostas, o produto de n fatores iguais à probabilidade p de emissão e de $A-n$ fatores iguais à probabilidades $q = 1-p$ de retenção (ou não-emissão), isto é,

(*) Numa escala logarítmica a distribuição dos rendimentos de espalação segue uma parábola, daí ser conhecida como "parábola de espalação".

$$p^n q^{A-n} = p^n (1-p)^{A-n} \quad (2.1.1)$$

Fazendo abstração da ordem de emissão e de não -emissão, a probabilidade será a soma de tantas parcelas iguais à mencionada acima quantas forem as modalidades de emissão na sequência de n emissões e $(A-n)$ não-emissões.

Como o número dessas modalidades distintas é o número de combinações simples de A objetos tomadas n a n , isto é,

$$\binom{A}{n} = \frac{A!}{n!(A-n)!} \quad (2.1.2)$$

a probabilidade procurada é

$$P_A(n) = \frac{A!}{n!(A-n)!} p^n q^{A-n} \quad (2.1.3)$$

Uma fórmula envolvendo fatorial não é muito conveniente para ser simplificada ou diferenciada algebricamente. Para grandes^(*) valores de A podemos obter expressões assintóticas da probabilidade $P_A(n)$, bastando para isso aplicar a fórmula de Stirling aos fatoriais que aparecem na expressão de $P_A(n)$.

Temos:

$$A! \approx \sqrt{2\pi A} A^{A + \frac{1}{2}} e^{-A} \quad (2.1.4)$$

(*)Veja Apêndice E.

$$n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n + \frac{1}{2}} e^{-n} \quad (2.1.5)$$

$$(A-n)! \approx \sqrt{2\pi} (A-n)^{A-n + \frac{1}{2}} e^{-A+n} \quad (2.1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{A!}{n!(A-n)!} &\approx \frac{\sqrt{2\pi} A^{A + \frac{1}{2}} e^{-A}}{\sqrt{2\pi} n^{n + \frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi} (A-n)^{A-n + \frac{1}{2}} e^{-A+n}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi A}} \left(\frac{A}{A-n}\right)^{A-n + \frac{1}{2}} \left(\frac{A}{n}\right)^{n + \frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

(os termos não escritos dão contribuições do tipo $1 + O(\frac{1}{A})$.)

Portanto

$$P_A(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A}} \left(\frac{A}{A-n}\right)^{A-n + \frac{1}{2}} p^n (1-p)^{A-n} \left(\frac{A}{n}\right)^{n + \frac{1}{2}} \quad (2.1.8)$$

Consideremos, em lugar do número n , a diferença

$$\omega \equiv n - Ap \quad (2.1.9)$$

entre n e o seu valor médio chamado desvio da média ou simplesmente desvio.

Por definição, o valor médio do número n é o número \bar{n} dado por

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^A n \cdot P_A(n) \quad (2.1.10)$$

Levando em conta a expressão de $P_A(n)$ temos:

$$\begin{aligned}
 \bar{n} &= \sum_{n=0}^A n \frac{A!}{n!(A-n)!} p^n q^{A-n} \\
 &= \sum_{n=1}^A \frac{A!}{(n-1)!(A-n)!} p^n q^{A-n} \\
 &= \sum_{m=0}^{A-1} \frac{A!}{m!(A-1-m)!} p^{m+1} q^{A-1-m} \\
 &= Ap \sum_{m=0}^{A-1} \frac{(A-1)!}{m!(A-1-m)!} p^m q^{A-1-m} \\
 &= Ap (p+q)^{A-1} \tag{2.1.11}
 \end{aligned}$$

ou por ser

$$p + q = 1 \tag{2.1.12}$$

$$\bar{n} = Ap \tag{2.1.13}$$

Então, a probabilidade $P_A(\omega)$ para que, num núcleo de A nucleons, o desvio tenha o valor ω será

$$P_A(\omega) = P_A(Ap+\omega) = \frac{A!}{(Ap+\omega)!(Aq-\omega)!} p^{Ap+\omega} q^{Aq-\omega} \tag{2.1.14}$$

Sendo $Ap+\omega \gg 1$ e $Aq-\omega \gg 1$, substituindo os fatoriais na fórmula que dá $P_A(\omega)$ pelas expressões:

$$A! \approx \sqrt{2\pi} A^{A + \frac{1}{2}} e^{-A} \tag{2.1.15}$$

$$\begin{aligned}
 (A_{p+\omega})! &\approx \sqrt{2\pi} (A_{p+\omega})^{A_{p+\omega} + \frac{1}{2}} e^{-(A_{p+\omega})} \\
 &= \sqrt{2\pi} (A_p)^{A_{p+\omega} + \frac{1}{2}} e^{-(A_{p+\omega})} \left(1 + \frac{\omega}{A_p}\right)^{A_{p+\omega} + \frac{1}{2}} \quad (2.1.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A_{q-\omega})! &\approx \sqrt{2\pi} (A_{q-\omega})^{A_{q-\omega} + \frac{1}{2}} e^{-(A_{q-\omega})} \\
 &= \sqrt{2\pi} (A_q)^{A_{q-\omega} + \frac{1}{2}} e^{-(A_{q-\omega})} \left(1 - \frac{\omega}{A_q}\right)^{A_{q-\omega} + \frac{1}{2}} \quad (2.1.17)
 \end{aligned}$$

temos

$$P_A(\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi A_p A_q}} \left(1 + \frac{\omega}{A_p}\right)^{-(A_{p+\omega} + \frac{1}{2})} \left(1 - \frac{\omega}{A_q}\right)^{-(A_{q-\omega} + \frac{1}{2})} \quad (2.1.18)$$

Podemos dar ao segundo membro uma forma mais conveniente, aproximada, mas compatível com a aproximação adotada na fórmula de Stirling, temos:

$$\begin{aligned}
 \ln P_A(\omega) &\approx -\ln \sqrt{2\pi A_p A_q} - (A_p + \omega + \frac{1}{2}) \ln \left(1 + \frac{\omega}{A_p}\right) \\
 &\quad - (A_q - \omega + \frac{1}{2}) \ln \left(1 - \frac{\omega}{A_q}\right) \quad (2.1.19)
 \end{aligned}$$

Como $\left|\frac{\omega}{A_p}\right|$ e $\left|\frac{\omega}{A_q}\right|$ são menores que 1 (admitimos que o desvio ω satisfaz a essas condições) podemos desenvolver os logarítmos na série de potências conhecida e temos:

$$\begin{aligned} \ln P_A(\omega) \approx & -\ln \sqrt{2\pi Apq} - \left(Ap + \omega + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\omega}{Ap} - \frac{\omega^2}{2A^2 p^2} + \frac{\omega^3}{3A^3 p^3} - \dots \right) \\ & + \left(Aq - \omega + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\omega}{Aq} + \frac{\omega^2}{2A^2 q^2} + \frac{\omega^3}{3A^3 q^3} + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

e após as simplificações,

$$\begin{aligned} \ln P_A(\omega) \approx & -\ln \sqrt{2\pi Apq} - \frac{\omega^2}{2Apq} - \frac{\omega}{2A} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \\ & + \frac{\omega^3}{6A^2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

e os termos não escritos contendo A^3 no denominador.

$$\ln P_A(\omega) \approx -\ln \sqrt{2\pi Apq} - \frac{\omega^2}{2Apq} + \frac{p-q}{2Apq} \omega \left(1 + O \frac{1}{A^2} \right) \quad (2.1.22)$$

temos então a expressão assintótica das probabilidades

$$P_A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Apq}} e^{-\frac{\omega^2}{2Apq}} e^{\frac{p-q}{2Apq} \omega} \quad (2.1.23)$$

O ω varia no intervalo $-Ap \leq \omega \leq Aq$.

Se $p \approx q$, o termo $e^{-\frac{p-q}{2Apq} \omega}$ tende a 1 e podemos escrever então

$$P_A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Apq}} e^{-\frac{\omega^2}{2Apq}} \quad (2.1.24)$$

O ω pode variar entre $Ap > \omega = n - Aq > Aq$.

Entretanto, o teorema local de De Moivre-Laplace despreza os termos $(\omega/Ap)^{1/2}$ e $(\omega/Aq)^{1/2}$ considerando que $|\omega| < Apq$ e $A \rightarrow \infty$, temos então a forma aproximada de $P_A(n)$ válida para p arbitrário diferente de 0 e 1

$$P_A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Apq}} e^{-\frac{\omega^2}{2Apq}} \quad . \quad (2.1.25)$$

Fazendo ω permanecer constante num pequeno intervalo $d\omega$ em ω , como n varia em incrementos unitários, temos no limite para A grande

$$P_A(n) = P_A(\omega)d\omega \quad . \quad (2.1.26)$$

Então a distribuição de $P_A(n)$ de n se torna uma distribuição de ω , $P_A(\omega)$ com

$$\omega = n - Ap = n - \bar{n} \quad (2.1.27)$$

Podemos computar o número de acontecimentos entre um dado limite n_1 e n_2 pelo somatório

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} P_A(n) \quad (2.1.28)$$

Substituindo os valores de $P_A(n)$ pela expressão (2.1.25) temos:

$$\sum \frac{1}{\sqrt{2\pi Apq}} e^{-\frac{\omega^2}{2Apq}} \quad (2.1.29)$$

sobre ω apropriado.

Como $\omega = n - Ap$, a diferença entre os valores sucessivos de ω é 1

$$\omega_1 - \omega_2 = n_1 - Ap - n_2 + Ap = 1 \quad (2.1.30)$$

e, portanto, se fizer $t = \frac{n - Ap}{Apq}$, a diferença entre os valores sucessivos de t é $\Delta t = 1/Apq$

$$t_1 - t_2 = \frac{n_1 - Ap}{Apq} - \frac{n_2 - Ap}{Apq} = \frac{n_1 - n_2}{Apq} = \frac{1}{Apq} \quad (2.1.31)$$

Então a eq. (2.1.29) se torna

$$\sum \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \Delta t \quad (2.1.32)$$

Quando $A \rightarrow \infty$, $\Delta t \rightarrow 0$, a expressão (2.1.32) aproxima-se de uma integral, que pode ser desenvolvida em termos de uma função

$$\phi(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (2.1.33)$$

e portanto

$$\phi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (2.1.34)$$

$\phi(t)$ é a função densidade de probabilidade no intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$ ou mais precisamente, em

$$t - \frac{1}{2} dt \leq t < t + \frac{1}{2} dt \quad , \quad \text{se} \quad t_1 - t_2 = dt \quad (2.1.35)$$

Sendo $\phi(t)$ a função densidade de probabilidades, ela deve satisfazer à seguinte equação para qualquer ω

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} P_A(z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi Apq}} \int_{-\infty}^{\omega} e^{-\frac{\omega^2}{2Apq}} d\omega \quad (2.1.36)$$

e portanto é contínua e satisfaz às seguintes propriedades

$$\lim_{\omega \rightarrow -\infty} \phi(\omega) = 0 \quad (2.1.37)$$

e

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi(\omega) = 1 \quad .$$

O número total de nucleons emitidos na formação de um nuclídeo produto é igual à soma de prótons e neutrons emitidos. Podemos representar, então, a variável ω como um vetor bidimensional aleatório correspondente a um par ordenado de números reais x e y em que o primeiro componente deste vetor daria o número de prótons e o segundo componente o número de neutrons.

Existe a correspondente distribuição discreta bidimensional de probabilidades $P(x \text{ e } y)$ que pode ser relacionada à distribuição contínua de probabilidade $\phi(x,y)$ pela relação:

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x \text{ e } y)}{\Delta x \Delta y} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P\left[\left(x - \frac{1}{2} \Delta x \leq x < x + \frac{1}{2} \Delta x\right) \text{ e } \left(y - \frac{1}{2} \Delta y \leq y < y + \frac{1}{2} \Delta y\right)\right]}{\Delta x \Delta y}\end{aligned}\tag{2.1.38}$$

Pelo argumento dimensional $\phi(x,y)$ representa uma densidade de probabilidade por unidade de comprimento x e unidade de comprimento y . Entretanto $\phi(x,y)$ é chamada função densidade de probabilidade ou função densidade de probabilidade conjunta de x e y , e portanto deve obedecer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,y) dx dy = 1\tag{2.1.39}$$

Podemos obter as funções

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,y) dx\tag{2.1.40}$$

e

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,y) dy$$

pela projeção da densidade bidimensional (superfície) $\phi(x,y)$ sobre o eixo x ou y e que são chamadas função de densidade marginal de x e de y respectivamente.

As distribuições através das seções são chamadas dis-

tribuições condicionais.

Então, as seções (normalizadas) através da função de densidade $\phi(x,y)$ em $x = x_0$ dá a função de densidade condicional que pode ser anotada por $\phi(y|x_0)$ e pode ser escrita

$$\phi(y|x_0) = \frac{\phi(x_0|y)}{\int \phi(x_0,y) dy} = \frac{\phi(y_0,x)}{g(x_0)} \quad (2.1.41)$$

onde $g(x)$ é a distribuição marginal de x .

O teorema de Bayes, para variáveis contínuas, estabelece a seguinte relação para a função densidade de probabilidade conjunta $\phi(x,y)$, para duas variáveis x e y com funções de densidade marginal $g(x)$ e $h(y)$ e as funções de densidade de condicional $p(x|y)$ e $q(x|y)$:

$$\phi(x,y) = p(x|y)h(y) = q(x|y)g(x) \quad (2.1.42)$$

Então, a equação (2.1.36) considerando (2.1.41) e (2.1.42), se torna

$$P_A(\omega) = \phi(x,y) = p(x|y)h(y) \quad (2.1.43)$$

Colocando um valor constante para y , por exemplo, $y = y_0$, a eq. (2.1.43) fica

$$P_A(\omega_0) = \phi(x,y_0) = p(x|y_0)h(y_0) \quad (2.1.44)$$

Sendo $y_0 = \text{cte}$, a seção da superfície de probabilidade de

$\phi(x,y)$ pelo plano $y = y_0$ será uma curva normal com única variável aleatória x .

A eq. (2.1.44) é, então, escrita como

$$\phi(x,y_0) = h_0 p(x|y_0) \quad (2.1.45)$$

onde $h_0 = h(y_0)$ é uma constante e $p(x|y_0)$ é uma distribuição normal de variável x .

Para calcular a função densidade de probabilidade condicional $p(x|y_0)$, uma equação de regressão de x sobre y é formada do seguinte modo:

Quando y neutrons são emitidos pelo núcleo (N,Z) pela interação com um fóton, o número de prótons a serem emitidos depende da razão Z/N no núcleo durante a colisão e do número de prótons de baixa energia a serem retidos devido à barreira coulombiana.

Suponhamos, por um instante, que não haja retenção de prótons, então x_{sr} prótons serão emitidos nesse instante, portanto,

$$x_{sr} = \frac{Z}{N} y_0 \quad (2.1.46)$$

onde y_0 é o número de neutrons emitidos no mesmo instante. Tirando os x_{sr} prótons, o número de prótons a serem retidos devido à barreira coulombiana x_r será suposto ser uma função de x_{sr} do tipo

$$x_r = C' x_{sr} \quad (2.1.47)$$

onde C' é um parâmetro não negativo.

Evidentemente, a função definida por (2.1.46) tem um comportamento assintótico do tipo

$$x_r \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x_{sr} \rightarrow 0 \quad ; \quad (2.1.48)$$

$$x_r \rightarrow x_{sr} \quad \text{quando} \quad x_{sr} \rightarrow \infty \quad .$$

Suponhamos que o número médio de prótons emitidos após a retenção seja x_0 onde y_0 é o número de neutrons emitidos.

Podemos escrever então

$$x_0 = x_{sr} - x_r = x_{sr} - x_{sr} C' = (1 - C') x_{sr} \quad (2.1.49)$$

Substituindo $1 - C'$ por C , $0 < C' < 1$ e tendo em conta a eq. (2.1.46), temos:

$$x_0 = C \frac{Z}{N} y_0 \quad (2.1.50)$$

A forma geral dessa equação dá a linha de regressão de x sobre y como

$$x = \frac{Z}{N} y - \frac{Z}{N} y C' = x' \quad (\text{digamos}) \quad (2.1.51)$$
$$x = \frac{Z}{N} C y$$

Assim a variável bidimensional ω da função de distribuição $\phi(x, y)$ pode ser escrita como

$$\omega = x - C \frac{Z}{N} y \quad (2.1.52)$$

para todos os valores possíveis de ω onde $\omega = x-x'$.

Então as seções de choque relativas para a formação de núclídeos ${}_{Z-x}^{A-(x+y)}X$ na reação ${}_{Z}^AX(\gamma, xpy_n){}_{Z-x}^{A-(x+y)}X$, $x \geq 1$; $y \geq 1$ são obtidas pelas densidades de probabilidades. Utilizando as eqs. (2.1.46) e (2.1.47) e a expressão $\omega = x-x'$, obtemos a seguinte fórmula para a seção de choque $\sigma(x,y)$ quando x prótons e y neutrons são emitidos

$$\sigma(x,y) = \sigma_M \exp[-B(x-1)] \exp[-k \left\{ x - C \frac{Z}{N} y \right\}^2] \quad (2.1.56)$$

onde H_0 da eq. (2.1.55) é substituído por σ_M que é o fator que normaliza a distribuição teórica com os pontos experimentais e corresponde ao valor de $\sigma(x,y)$, no caso $x = 1$ e $\omega = 0$, sobre o qual se localiza o pico da distribuição normal.

A expressão (2.1.56) apresenta quatro parâmetros livres, σ_M , B , k e C cujos valores devem ser determinados através de um conjunto de dados obtidos experimentalmente de seções de choque de foto-espalação disponíveis na literatura.

O parâmetro σ_M é o valor da seção de choque, como já dissemos anteriormente, que normaliza a distribuição teórica com os pontos experimentais e corresponde ao valor de $\sigma(x,y)$ para o qual $x = 1$ e $y = N/ZC$, isto é, $\omega = 0$ em relação ao qual a distribuição é normal. O parâmetro k é relacionado à largura da distribuição e tem "dimensão" de (número de prótons)⁻². O parâmetro C (parâmetro adimensional) está relacionado "ao coeficiente de retenção média" dos prótons devido ao efeito da barreira coulombiana do núcleo. O parâmetro B é o fator de decrescimento das diversas parábolas correspondentes aos isótopos de

nuclídeos produzidos e equivale ao logarítmo do K de Halpern.

Então, fixado um núcleo ${}_Z X^A$ e uma energia E_γ do fóton incidente, os rendimentos dos produtos de espalação podem ser determinados pela eq. (2.1.56). Porém, quando a perda nominal de carga e massa pelo núcleo alvo na reação é grande, outros mecanismos tais como fragmentação e fissão, tornam-se predominantes na formação dos correspondentes produtos da reação. Nesse caso, espera-se que a fórmula que dá as seções de choque, deduzida como descrito acima, não reproduza as seções de choque observadas. A principal razão deste fato é que a função que descreve a retenção de prótons pela barreira de Coulomb deixa de ser válida. Conseqüentemente, uma restrição adicional é imposta à fórmula de seção de choque dada pela eq. (2.1.56), qual seja,

$$x + y \lesssim \frac{A}{2} \quad . \quad (2.1.57)$$

2.2 - Diferenças entre a Fórmula de Gupta e a Proposta no Presente Trabalho

A fórmula de Gupta para o cálculo da seção de choque de formação de produtos de espalação a partir de prótons incidentes num dado núcleo alvo de Z prótons e N neutrons é a seguinte

$$\sigma(x,y) = \sigma_M \exp \left[-k \left\{ x - \frac{Z+1}{N} y + \frac{Z+1}{N} y \exp \left\{ - \frac{DN}{(Z+1)y} \right\} \right\}^2 \right] \quad (2.2.58)$$

onde σ_M , k e D são parâmetros positivos determinados pelo melhor ajuste da fórmula aos pontos experimentais e x e y são os números de prótons e neutrons emitidos.

As modificações que resultaram na fórmula (2.2.58) quando comparada à fórmula de quatro parâmetros deduzida na seção anterior são as seguintes:

a) o termo da equação de regressão:

$$f\left(\frac{Z+1}{N} y_i\right) = -\frac{Z+1}{N} y + \frac{Z+1}{N} y_i \exp\left[-\frac{DN}{(Z+1)y_i}\right], \quad (2.2.59)$$

substituímos^(*) por um termo mais simples^(**)

$$f\left(\frac{Z}{N} y_i\right) = \frac{Z}{N} y_i C' \quad (2.2.60)$$

b) O fator de normalização H_0 , na fórmula de Gupta é substituído por σ_M . Na nossa expressão σ_M foi acrescido do termo $\exp[-B(x_i-1)]$, para normalizar as várias parábolas correspondentes aos isótopos produzidos numa reação de espalação. As várias parábolas são distanciadas umas das outras pelo fator de decrescimento que pode ser expresso pela seguinte fórmula⁽¹⁸⁾

$$K = \left(\sigma_{q1}/\sigma_{q2}\right)^{1/\Delta Z} \quad (2.2.61)$$

(*) A justificativa dessa substituição é dada no Apêndice D, vide também o (*) do pé de página da pág. 31.

(**) $\frac{Z+1}{N}$ e $\frac{Z}{N}$ são as razões entre o número de prótons e o número de neutrons que constituem o "núcleo semente", isto é, o núcleo que absorveu um próton ou um fóton energético e que dará origem ao produto de espalação.

onde σ_{q1} e σ_{q2} são os rendimentos de 2 radionuclídeos 1 e 2 pertencentes ambos ao mesmo lado do plano N-Z e igualmente espaçados do centro do vale de estabilidade β e ΔZ é a diferença entre os seus números atômicos. Quando multiplicamos as seções de choque pelo termo $\exp[-B(x_i-1)]$ temos uma superposição de todas as parábolas sobre a parábola de maior cota, isto é, $x_i = 1$.

Como exemplo ilustrativo da família de parábolas e de uma única parábola resultante da superposição de todas as demais, mostramos as Figs. 2.2.1 e 2.2.2.

2.3 - Determinação dos Parâmetros

Para um dado núcleo alvo e uma dada energia do fóton incidente, temos que determinar os valores dos parâmetros σ_M , B, k e C que compõem a fórmula semi-empírica deduzida anteriormente, de tal modo a obter os valores que reproduzem da melhor maneira possível o conjunto de dados experimentais.

Esses valores podem ser obtidos aplicando o método de mínimos quadrados que consiste em achar o mínimo da função S definida assim:

$$S = \sum_{i=1}^m \left(v_{i_{obs}} - v_i \right)^2 \quad (2.3.62)$$

onde $v_{i_{obs}}(x,y)$ são os valores observados das seções de choque e $v_i(x,y)$ os valores calculados pela fórmula.

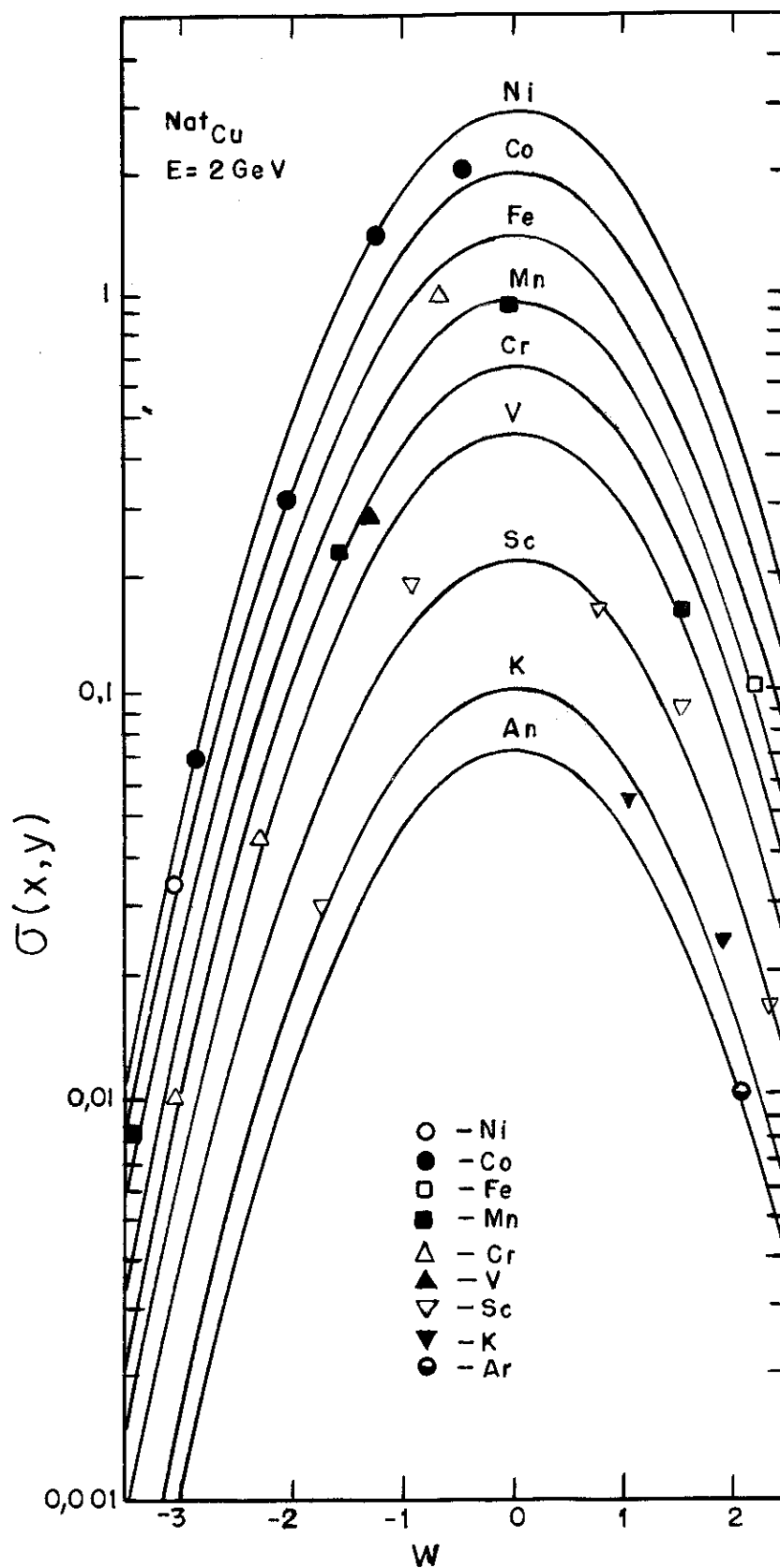


Fig. 2.2.1 - Família de parábolas proveniente da irradiação com fóton de Bremsst de $E = 2000 \text{ MeV}$ em Cu^{nat} (108). (Dados na Tab.3.4.3).

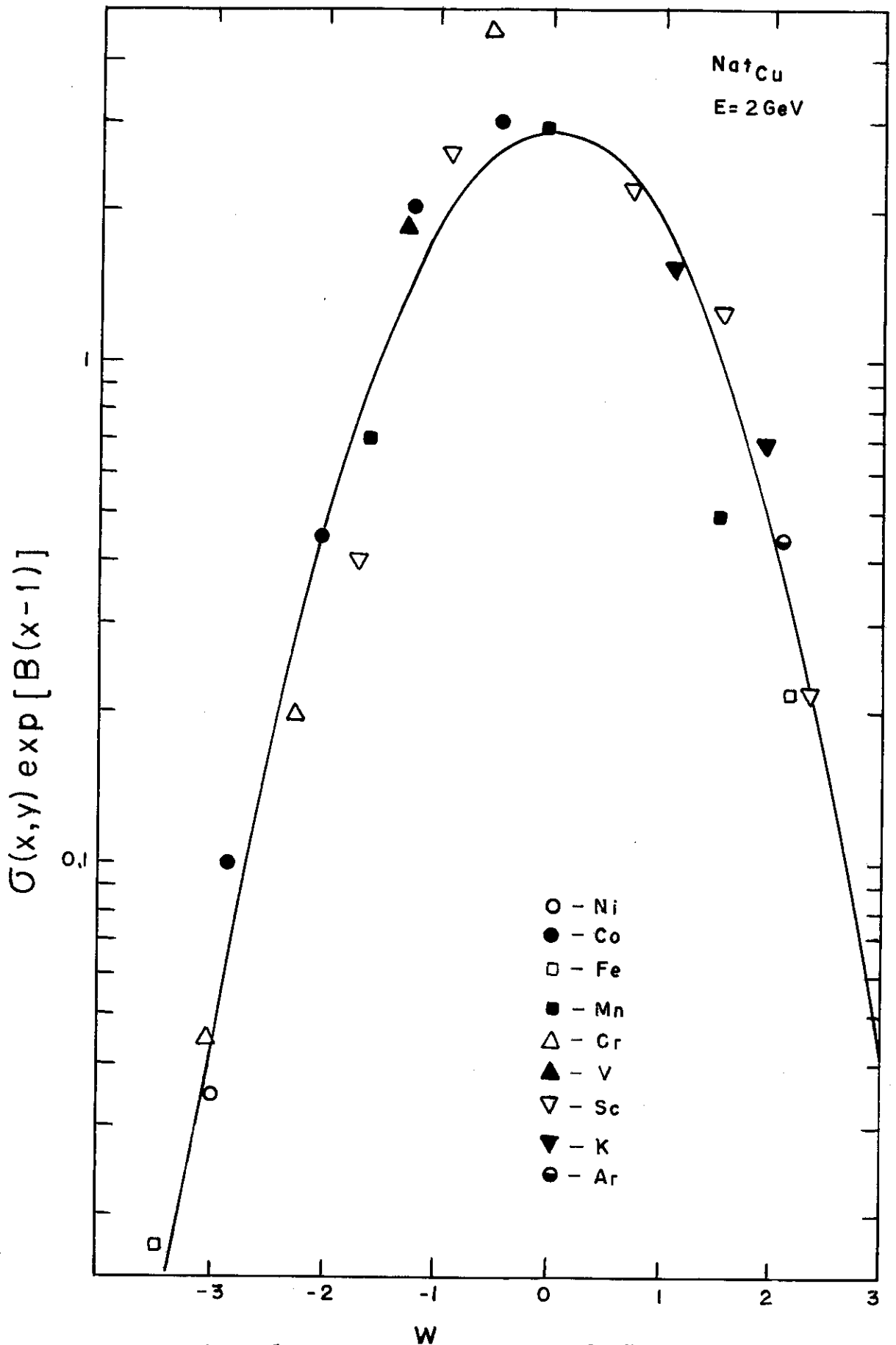


Fig. 2.2.2 - Parábola única de rendimento de espalação.

Tomando os logarítmos naturais na eq. (2.1.56) temos:

$$\ln \sigma(x,y) = \ln \sigma_M - B(x-1) - k(x - C \frac{Z}{N} y)^2 \quad (2.3.63)$$

Fazendo a mudança de variáveis $\ln \sigma(x,y) = v$, $\ln \sigma_M = D$ e $\frac{Z}{N} = \alpha$ temos,

$$v = D - B(x-1) - k(x - C\alpha y)^2 \quad (2.3.64)$$

Podemos escrever

$$f = v - \left[D - B(x-1) - k(x - C\alpha y)^2 \right] \quad (2.3.65)$$

O valor numérico $\sigma_i(x,y)$ observado pode ser para um particular nuclídeo (x,y) o valor aproximado da função f desenvolvida com os parâmetros aproximados D_0 , B_0 , k_0 , C_0 ,

$$f_0 = v_i(x,y) - \left(D_0 - B_0(x-1) - k_0(x - C_0\alpha y)^2 \right) \quad (2.3.66)$$

Para achar os parâmetros "verdadeiros" podemos expandir a equação analítica (2.3.65) em série truncada de Taylor, num entorno de valores aproximados dos parâmetros D_0 , B_0 , k_0 e C_0 determinados previamente^(*).

$$v_i(x,y) = f(x,y ; D_0, B_0, k_0, C_0) + \frac{\partial f}{\partial D_0} \Delta D_0 +$$

(*) Os parâmetros D_0 , B_0 , k_0 , C_0 foram obtidos segundo a descrição feita no Apêndice F.

$$+ \frac{\partial f}{\partial B_0} \Delta B_0 + \frac{\partial f}{\partial k_0} \Delta k_0 + \frac{\partial f}{\partial C_0} \Delta C_0 \quad (2.3.67)$$

onde ΔD_0 , ΔB_0 , Δk_0 , ΔC_0 representam as diferenças entre os dados observados e os ajustados baseados nos valores aproximados para D, B, k e C.

Temos então, o resíduo $\delta_i(x,y)$ entre o valor observado e o calculado

$$\delta_i(x,y) \equiv v_i(x,y) - f(x,y ; D_0, B_0, k_0, C_0) \quad (2.3.68)$$

Combinando as eqs. (2.3.67) e (2.3.68), obtemos

$$\delta_i(x,y) = \frac{\partial f}{\partial D_0} \Delta D_0 + \frac{\partial f}{\partial B_0} \Delta B_0 + \frac{\partial f}{\partial k_0} \Delta k_0 + \frac{\partial f}{\partial C_0} \Delta C_0 \quad (2.3.69)$$

Então S passa a ser uma função linear dos acréscimos

$$\begin{aligned} \Delta D_0 &= D - D_0 \\ \Delta B_0 &= B - B_0 \\ \Delta k_0 &= k - k_0 \\ \Delta C_0 &= C - C_0 \end{aligned} \quad (2.3.70)$$

Para determinar os valores dos acréscimos que tornam mínima a função S impõe-se que as derivadas primeiras da função S em relação aos acréscimos sejam nulas e positivas as derivadas segundas:

$$\frac{\partial S}{\partial(\Delta D_0)} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial(\Delta k_0)} = 0$$

(2.3.71)

$$\frac{\partial S}{\partial(\Delta B_0)} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial(\Delta C_0)} = 0$$

Como S é uma função linear dos acréscimos ΔD_0 , ΔB_0 , Δk_0 e ΔC_0 , as equações normais (2.3.70) também são lineares e conduzem ao seguinte sistema linear de equações

$$\begin{bmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots \beta_{rs} \dots \\ \dots\dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta D_0 \\ \Delta B_0 \\ \Delta k_0 \\ \Delta C_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} r = 1, 2, 3, 4 \\ s = 1, 2, 3, 4 \end{matrix}$$

(2.3.72)

Os coeficientes β_{rs} são os seguintes:

$$\beta_{11} = m$$

$$\beta_{12} = - \sum x_i^{-1}$$

$$\beta_{13} = - \sum (x_i - \alpha C_0 y_i)^2$$

$$\beta_{14} = 2\alpha k_0 \sum y_i (x_i - \alpha C_0 y_i)$$

$$\beta_{21} = \sum x_i$$

$$\beta_{22} = - \sum x_i (x_i - 1)$$

$$\beta_{23} = - \sum \left[\overline{x_i} (x_i - \alpha C_0 y_i)^2 \right]$$

$$\beta_{24} = 2\alpha k_0 \sum (x_i - \alpha C_0 y_i) y_i$$

$$\beta_{31} = \sum (x_i - C_0 \alpha y_i)^2$$

$$\beta_{32} = - \sum (x_i - 1) \left[\overline{x_i - C_0 \alpha y_i} \right]^2$$

$$\beta_{33} = - \sum (x_i - C_0 \alpha y_i)^4$$

$$\beta_{34} = 2\alpha k_0 \sum y_i (x_i - \alpha C_0 y_i)^3$$

$$\beta_{41} = \sum (x_i - \alpha C_0 y_i) y_i$$

$$\beta_{42} = - \sum (x_i - 1) y_i (x_i - \alpha C_0 y_i)$$

$$\beta_{43} = - \sum y_i (x_i - \alpha C_0 y_i)^3$$

$$\beta_{44} = 2\alpha k_0 \sum y_i^2 (x_i - \alpha C_0 y_i)^2$$

$$\gamma_1 = \sum g_i - mD_0 + B_0 \sum (x_i - 1) + k_0 \sum (x_i - \alpha C_0 y_i)^2$$

$$\gamma_2 = \sum g_i x_i - D_0 \sum x_i + B_0 \sum \left[\overline{x_i (x_i - 1)} \right] + k_0 \sum x_i (x_i - \alpha C_0 y_i)^2$$

$$\gamma_3 = \sum g_i (x_i - \alpha y_i C_0)^2 - D_0 \sum (x_i - C_0 \alpha y_i)^2 + k_0 \sum (x_i - \alpha C_0 y_i)^4 + \\ + B_0 \sum (x_i - 1) (x_i - \alpha C_0 y_i)^2$$

$$\gamma_4 = \sum g_i (x_i - \alpha C_0 y_i) y_i - D_0 \sum y_i (x_i - \alpha C_0 y_i) + \\ + B_0 \sum (x_i - 1) y_i (x_i - \alpha C_0 y_i) + k_0 \sum y_i (x_i - \alpha C_0 y_i)^3$$

onde os termos dos somat6rios $\sum_{i=1}^m$ foram substituidos por \sum por comodidade.

A solução do sistema (2.3.72) nos fornece os termos da correção que são aplicados para D_0 , B_0 , k_0 e C_0 para obter os valores de D , B , k e C fazendo:

$$D = D_0 + \Delta D_0$$

$$k = k_0 + \Delta k_0$$

$$C = C_0 + \Delta C_0$$

$$B = B_0 + \Delta B_0$$

Estes valores assim determinados são usados agora como valores iniciais para se obter uma aproximação melhor. Fazendo sucessivas iterações obtemos, para cada parâmetro, uma sucessão de valores que convergem para o melhor ajuste segundo o critério dos mínimos quadrados.

2.4 - *Comentários Sobre os Valores dos Parâmetros*

Os valores negativos para os parâmetros foram descartados pelo programa de computador que desenvolvemos. $\sigma_M < 0$ significa que há sumidouro de produtos de espalação na reação; $C < 0$ indica que os nuclídeos são produzidos pela entrada de prótons no núcleo e os rendimentos dos nuclídeos se distribuem sobre uma reta, cujo coeficiente angular é $|C|$; $k < 0$ mostra que os diversos produtos de espalação se distribuem segundo uma parábola invertida em relação à parábola normal de espalação. Isto significa haver maior formação de produtos de espalação quanto mais deficientes em prótons e neutrons se tor

nem os nuclídeos. Finalmente $B < 0$ indica que as diversas parábolas correspondentes aos diversos isótopos são crescentes com o aumento da perda nominal dos prótons, o que também é um absurdo. Portanto, impusemos condições iniciais ao programa de forma a não produzir valores negativos para estes parâmetros. O zero é não negativo e portanto são produzidos conjuntos de valores dos parâmetros que podem ter um ou mais deles iguais a zero. Aqui temos que definir o que é zero no nosso estudo. Colocamos no formato de saída dos dados de computador, quatro casas decimais, conseqüentemente, o nosso "zero" tem precisão até a 4^a casa após a vírgula, não importando quais valores virão após essas casas^(*). Apesar do zero ser não negativo, rejeitamos também tais conjuntos, levando em conta as seguintes considerações: $\sigma_M = 0$, não há rendimento de quaisquer produtos de espalação, não havendo por isso o que ajustar; $C = 0$ todos os rendimentos de nuclídeos pertencentes a um certo isótopo se distribuem sobre uma reta paralela ao eixo dos y, afastada de x_i unidades a partir do ponto $\omega = 0$ sobre o qual a distribuição é normal; $k = 0$ significa que os rendimentos de uma reação de espalação se distribuem sobre uma parábola com foco no infinito, isto é, uma reta. $B = 0$, são constantes os rendimentos dos nuclídeos pertencentes aos diversos isótopos que estão no mesmo lado do plano N-Z de falta de prótons ou de neutrons com o mesmo afastamento do centro do vale de estabilidade β . Pode ser que, quando a energia da partícula (ou fóton) incidente tender ao infinito, todos os isótopos tenham iguais probabilidades de serem produzidos e portanto k e B assumam o valor zero, mas co

(*) Essa convenção de "zero" foi baseada nos valores que os parâmetros apresentam normalmente neste cálculo que são da ordem de fração de dezena.

mo estamos analisando partícula com energia finita, vamos descartar esses casos assintóticos.

2.5 - Considerações Sobre o Parâmetro C

O parâmetro C, em princípio, pode ser determinado teoricamente a partir dos isótopos estáveis constantes da Carta de Nuclídeos do seguinte modo:

Seja um núcleo alvo de Z_t prótons e N_t neutrons que absorveu uma partícula ou fóton energético e que vai sofrer uma reação de espalação. Esse "núcleo semente" de Z_s prótons e N_s neutrons dará origem, hipoteticamente, aos nuclídeos estáveis da tabela de nuclídeos perdendo x_i prótons e y_i neutrons. Supondo que esses nuclídeos estáveis sejam os de maiores rendimentos^(*) dentre todos os nuclídeos radioativos destes isótopos, estes rendimentos calculados pela fórmula de 4 parâmetros do presente estudo, corresponderão aos máximos das parábolas, isto é, aos pontos onde $\omega = 0$.

Temos então, pela fórmula (2.1.52)

$$\omega = x_i - Cy_i \frac{Z_s}{N_s} = 0$$

que

$$C = \frac{x_i}{y_i} \frac{N_s}{Z_s} \quad . \quad (2.5.73)$$

(*) hipótese essa baseada no artigo da ref. (67)

Substituindo os devidos valores na eq. (2.5.73) e fazendo os cálculos para todos os possíveis nuclídeos estáveis resultam estes deste núcleo semente numa reação de espalação, temos n valores de C correspondentes aos n nuclídeos estáveis formados, onde n , levando em conta a eq. (2.1.57), é aproximadamente igual ao inteiro mais próximo de $Z_s/2$. Podemos então considerar para valor de C a média aritmética desses n valores de C obtidos como descrito acima. Escolhemos alguns núcleos alvos e fizemos os cálculos cujos resultados estão na Tabela 2.5.1.

É supérfluo dizer que os valores de C assim determinados não dependem da energia da partícula ou fóton incidente. Estes valores de C calculados para fótons e prótons incidentes divididos pelos seus respectivos quadrados dos Z_s dos núcleos semente nos dão um valor que podemos chamar de "coeficiente de retenção média dos prótons para cada núcleo alvo" (CR), que quando colocados num gráfico, CR versus A_s , (Fig. 2.5.3 e 2.5.4) temos aproximadamente uma reta.

Pela construção, (eq. (2.1.52)), o parâmetro C pode ser utilizado para calcular o número de massa do produto mais provável que corresponde a nuclídeo estável hipotético^(*) de uma reação de espalação, pela fórmula

$$A_p(\text{e.h.}) = \frac{(N_s + Z_s) \alpha C - x}{\alpha C} \quad (2.5.74)$$

onde $\alpha = Z_s/N_s$.

(*) Dizemos "produto estável hipotético" pois as medidas dos rendimentos de produtos estáveis não são possíveis de serem realizadas. Estes valores são extrapolados teoricamente e comparados com a abundância isotópica.

TABELA 2.5.1 - Valores de C obtidos pelo método descrito no texto.

Núcleo Alvo	$C_{\text{fóton}}$	$C_{\text{próton}}$	$(C_{\text{fóton}}/Z_s^2) \times 10^4$	$(C_{\text{próton}}/Z_s^2) \times 10^4$
^{27}Al	0,8867	1,2115	52,46	61,81
^{31}P	0,9067	1,2053	40,29	47,08
^{35}Cl	0,9210	1,1967	31,86	34,88
^{39}K	0,9684	1,1300	26,82	28,25
^{40}Ca	1,1300	1,2783	28,25	28,95
^{45}Sc	0,8429	1,0467	19,11	21,63
^{51}V	0,7308	0,8741	13,81	15,18
^{55}Mn	0,8353	1,0044	13,36	14,86
^{56}Fe	1,0044	1,1610	14,85	15,93
^{59}Co	0,9023	1,0848	12,37	13,84
^{58}Ni	—	1,4786	—	17,58
^{60}Ni	—	1,3029	—	15,49
^{62}Ni	—	0,9355	—	11,12
^{63}Cu	0,9355	1,1279	11,12	12,53
^{65}Zn	0,9675	1,1367	10,75	11,83
^{69}Ga	—	0,9439	—	9,22
^{70}Ga	0,7353	0,8681	7,65	8,48
^{71}Ga	—	0,8387	—	8,19
^{73}Ge	0,7274	0,8765	7,10	8,05
^{75}As	0,8135	0,9840	7,40	8,51

(continua)

TABELA 2.5.1 - continuação

^{89}Y	—	1,0769	—	6,73
^{93}Nb	—	1,3317	—	7,55
^{127}I	0,7368	0,8591	2,60	2,95
^{133}Cs	—	0,9927	—	3,17
^{181}Ta	0,8425	0,9183	1,58	1,68
^{209}Bi	0,8653	0,9660	1,25	1,37

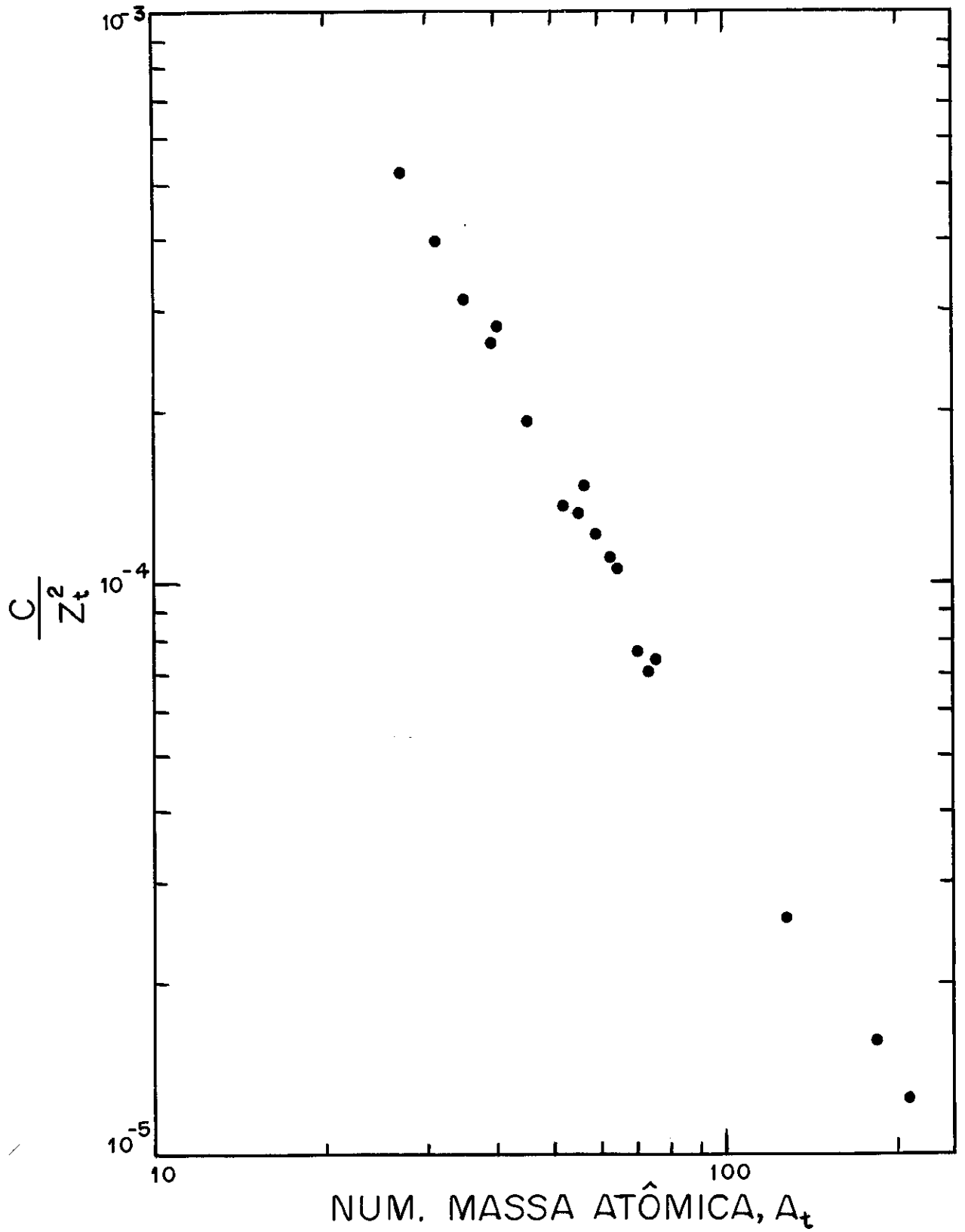


Fig. 2.5.3 - Representação do CR versus A_t para o fôton como projêtil.

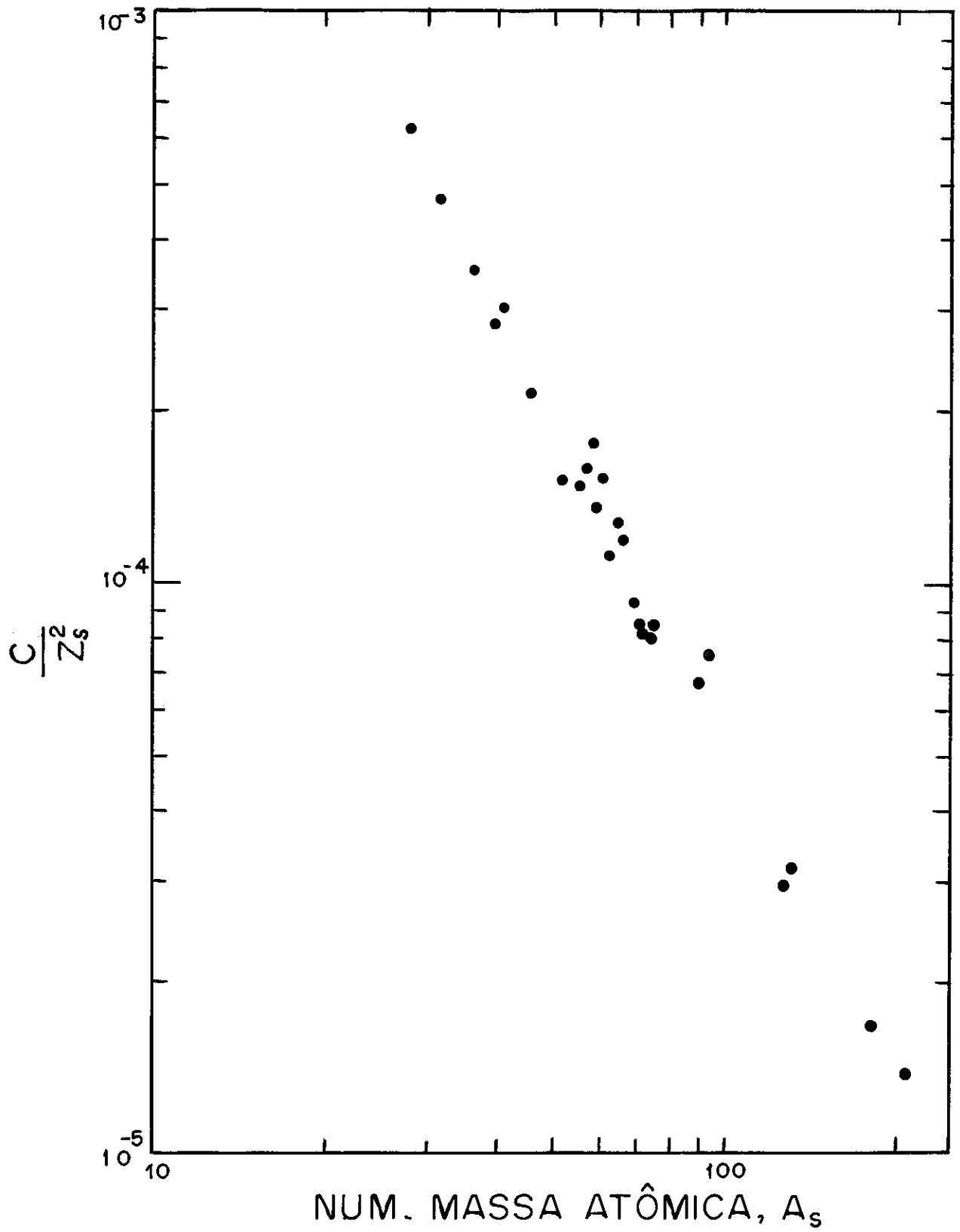


Fig. 2.5.4 - Representação do CR versus A_s para o próton como projétil.

CAPÍTULO 3

DETERMINAÇÃO DOS 4 PARÂMETROS DA FÓRMULA ATRAVÉS DOS DADOS EXPERIMENTAIS DA LITERATURA DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

3.1 - Considerações Gerais Sobre as Seções de Choque de Fotoes- palação

Exceto para baixas energias, a fonte de fótons disponíveis nos laboratórios é conseguida através da colisão de elétrons, acelerados artificialmente, com alvos metálicos tais como cobre, zinco, tântalo, tungstênio, etc, frequentemente referidos como radiadores, que produzem radiações eletromagnéticas de freiamento (radiação de bremsstrahlung). Estas radiações são dotadas de energias que constituem um espectro contínuo que vai desde a densidade espectral zero até a energia máxima dos elétrons incidentes, onde as energias baixas são favorecidas.

Numa foto-reação em geral e em particular em foto-es-palação, a grandeza de interesse é a seção de choque por fóton $\sigma(k)$. Essa grandeza seria medida diretamente se fosse possível dispor de uma fonte de fótons monoenergéticos. Mas, como isso não é possível, as experiências são feitas com fótons de bremsstrahlung, obtendo assim os chamados rendimentos ("yields") e através de artifícios de cálculo obtemos as seções de choque por fóton. O rendimento é a taxa de produção de um dado radionuclí-

de por g/cm^2 do elemento alvo quando uma quantidade padrão de energia do fóton passa através do alvo por unidade de tempo, sendo usualmente expresso como uma seção de choque por "quantum equivalente". O quantum equivalente é definido da seguinte maneira: Seja $n(k, k_{max})$ a distribuição de densidade espectral do espectro de bremsstrahlung, onde k é a energia genérica do fóton e k_{max} é a energia máxima do fóton. A distribuição de densidade espectral é uma função de ambas as energias, k e k_{max} . A energia contida no feixe de fóton incidente é:

$$V = \int_0^{k_{max}} n(k, k_{max}) k dk \quad . \quad (3.1.1)$$

Se dividirmos esta energia pela energia máxima k_{max} , obtemos um número de fótons que é o número que nós teríamos se todas as energias incidentes fossem igualmente distribuídas entre os fótons fictícios de energia máxima k_{max}

$$Q = \frac{1}{k_{max}} \int_0^{k_{max}} n(k, k_{max}) k dk \quad . \quad (3.1.2)$$

Estes fótons fictícios são chamados "quanta equivalente". Portanto, a seção de choque por quantum equivalente é definida através da seção de choque por fóton que é uma função dos fótons do espectro de bremsstrahlung e através destes fótons fictícios, do seguinte modo:

$$\sigma_q(k_{max}) = \frac{1}{Q} \int_0^{k_{max}} \sigma(k) n(k, k_{max}) dk \quad (3.1.3)$$

onde $\sigma(k)$ é a seção de choque de reação fotonuclear correspon-

dente ao fóton de energia k . A seção de choque por quantum equivalente é uma grandeza determinada experimentalmente para cada valor de energia máxima de bremsstrahlung; o numerador é obtido pelo método de ativação e o denominador, por exemplo, por um instrumento tipo quantômetro de Wilson.

Para calcular a seção de choque por fóton $\sigma(k)$ é necessário transformar a seção de choque por quantum equivalente, pertencente ao espaço das energias máximas dos elétrons, em seção de choque por fóton, pertencente ao espaço das energias de bremsstrahlung dos fótons. Essa transformação é feita através da função espectro de bremsstrahlung $n(k, k_{\max})$ que é o núcleo (kernel) da transformação. Temos a equação integral (3.1.3) que constitui uma equação de Fredholm ou de Volterra de primeira espécie.

Na prática, essa equação é de difícil solução por causa da natureza contínua do espectro de bremsstrahlung. A precisão da seção de choque calculada depende de: a) precisão das medidas de σ_q ; em geral essas medidas vêm associadas com grandes incertezas e além disso, uma pequena variação na medida de σ_q causa grande flutuação na seção de choque calculada. Tesch⁽⁸⁷⁾ desenvolveu um método que permite evitar as soluções flutuantes, sem significado físico. b) validade do espectro de bremsstrahlung usado no cálculo; o espectro calculado teoricamente por Schiff⁽⁸⁸⁾ é muito usado mas também é muito usual aproximar o espectro por um quadrado, isto é, considerar o espectro como proporcional a $1/k$ (ou Q/k para altas energias de k_{\max}) o que simplifica muito o cálculo, mas é uma aproximação bastante drástica. A expressão (3.1.3) neste caso se torna

$$\sigma(k) = \frac{d \sigma_q (k_{\max})}{d (\ln k)} \quad . \quad (3.1.4)$$

Deste modo, pelo processo de diferenciação aplicada à curva de rendimento pode-se chegar a ordem de grandeza da seção de choque por fóton. Na prática, tais diferenciações dão aparecimento a grandes erros, isto porque, os dados experimentais são usualmente apresentados pelos autores em forma de curvas de seção de choque por quantum equivalente em função de k_{\max} , o máximo de energia do fóton no espectro que é também o do elétron, ou seja, a energia da máquina no momento da experiência que é muito flutuante.

No nosso estudo da distribuição de rendimentos de espalação com fótons para uma dada energia temos portanto seções de choque por fóton e por quantum equivalente. A maioria das seções de choque disponíveis na literatura são seções de choque por quantum equivalente, sendo muito pouco os valores de seções de choque por fóton. As seções de choque por quantum equivalente não são comparáveis entre si, exceto quando as condições experimentais são as mesmas, mas o que interessa no estudo de sistemática de espalação são os rendimentos relativos dos núclídeos obtidos em cada experiência, de modo que todos os dados existentes na literatura foram incluídos no nosso estudo, dados esses provenientes dos mais diversos laboratórios e obtidos com diferentes técnicas experimentais. Incluímos também, as seções de choque de espalação induzidas por elétrons de alta energia levando em conta o conceito de fóton virtual ^(89,90).

3.2 - Reprodutibilidade das Seções de Choque Experimentais

Suponhamos que um conjunto de seções de choque experimentais obtidas em idênticas condições experimentais seja utilizado na determinação dos parâmetros σ_M , B, k e C da fórmula de seção de choque (2.1.56).

Sejam σ_i^{exp} e σ_i^{calc} as seções de choque obtidas experimentalmente e as calculadas pela fórmula. Para conhecer a reprodutibilidade das seções de choque experimentais pela fórmula analítica, podemos usar o coeficiente de reprodutibilidade R que nos diz de quantas vezes, em média, os pontos experimentais se afastam da curva analítica (R = 1 corresponde à reprodutibilidade ideal, isto é, a curva cai exatamente sobre todos os pontos).

R é calculado pela fórmula

$$R = e^\epsilon \quad (3.2.5)$$

onde ϵ é o desvio padrão de estimativa que nos permite avaliar a precisão do ajustamento. Para pequenas amostras, isto é, $m < 30$, é dada pela fórmula

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\ln \sigma_i^{\text{exp}} - \ln \sigma_i^{\text{calc}})^2}{m - 2}} \quad (3.2.6)$$

Em outras palavras, R traduz a ordem de grandeza do valor

médio da razão $\sigma_i^{\text{exp}}/\sigma_i^{\text{calc}}$ quando $\sigma_i^{\text{exp}} > \sigma_i^{\text{calc}}$ ou o seu inverso, quando $\sigma_i^{\text{exp}} < \sigma_i^{\text{calc}}$.

Nos últimos 25 anos, mais de 2500 produtos de espalação obtidos sob as mais diversas condições experimentais, foram objeto de análises sistemáticas das correspondentes seções de choque, utilizando fórmulas semi-empíricas do tipo gaussiana. Para se ter uma idéia dos valores de R que normalmente se obtêm em análises sistemáticas semelhantes à que nos propuzemos fazer, mostramos na Figura 3.2.1 o resultado do estudo das reprodutibilidades obtidas através da amostra de cerca de 1500 dados experimentais, correspondente à Tabela 3.2.1 que resume os grupos de dados e os tipos de fórmulas utilizados nas análises.

3.3 - Rejeição de Dados e Coeficientes de Correlação

Considerando que os erros associados às seções de choque experimentais sejam de origem estatística, vamos adotar um critério de rejeição de dados.

Uma vez calculado o erro padrão de estimativa (equação (3.2.6)) e a equação paramétrica ajustada podemos calcular um intervalo chamado intervalo de confiança para a medida que, em linguagem de física experimental, corresponde a erro da medida, podemos escolher previamente, por exemplo, de 95%, a rejeitar todos os pontos que caírem fora deste intervalo. Então uma medida de seção de choque que apresenta um valor

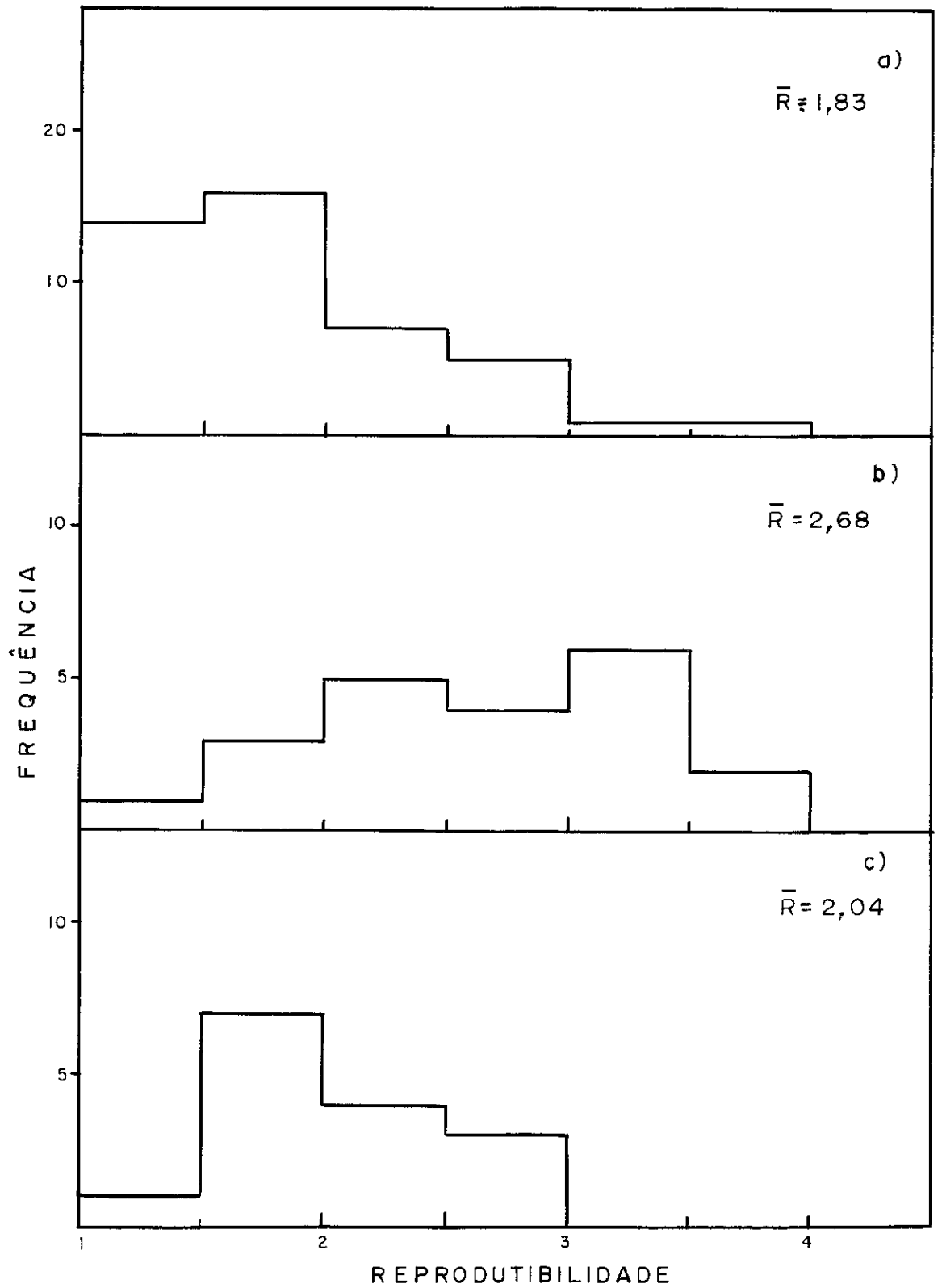


Figura 3.2.1 - Reprodutibilidade obtida com as fórmulas das refs. (24), (79) e (84)

TABELA 3.2.1 - Condições experimentais e fórmulas utilizadas no ajuste de rendimentos de produtos de espalação cujas distribuições de reprodutibilidade^(*) são mostradas na Fig. 3.2.1.

Fig.	Intervalo de núcleo alvo	Partícula incidente	Intervalo de energia(GeV)	Nº de produtos de espalação	Fórmula usada no ajuste dos dados	Ref.
a)	$V^{51} - Bi^{209}$	próton	0,049 - 30	259	CDMD-R	24
b)	$V^{51} - Nb^{93}$	próton	0,060 - 2,9	261	ME-G	84
c)	$Al^{27} - I^{127}$	fóton ^(**)	0,300 - 6,0	240	CDMD-RJL	79

(*) Reprodutibilidades calculadas usando a equação (3.2.5).

(**) Rendimentos de produto de espalação obtidos com bremsstrahlung e rendimentos médios com fótons monoenergéticos no intervalo de energia de 0,3 - 1,0 GeV (aproximação quadrada do espectro de bremsstrahlung).

que afasta de mais de 2 desvios padrão pode ser considerada como não pertencente ao universo de espalação. Somos, portanto, levados a abandonar tais medidas.

A população inicial de dados se reduzirá para, digamos, m' . Com essa nova amostragem vamos obter novos valores de parâmetros σ'_M , k' , C' e B' para a fórmula de seção de choque. Consequentemente, as seções de choque calculadas com esses novos parâmetros são diferentes das anteriores, assim como a sua reprodutibilidade que deverá ser menor que a anterior, e portanto, os extremos do intervalo de confiança serão diferentes, embora o coeficiente de confiança seja o mesmo, e portanto, po-

derá haver novos pontos rejeitados.

Se assim procedermos indefinidamente, poderemos chegar ao extremo exagerado de ter quase todos os pontos rejeitados até chegar ao limite de ter só 2 pontos, pois com 2 pontos temos reprodutibilidade igual a 1, que é a reprodutibilidade ideal. Isso acontecerá se os pontos não tiverem nenhuma correlação com o tipo da curva que estamos pretendendo ajustar. No nosso cálculo estabelecemos arbitrariamente um limite para a rejeição de pontos que foi de 10% do total. Este limite é completamente arbitrário, guiado apenas pelo bom senso, pois há casos em que há apenas 4 ou 5 pontos, e se rejeitamos um ponto caímos no caso exagerado acima exposto.

Então, o processo de rejeição dos pontos termina quando não há mais pontos a serem rejeitados, ou quando atinge à cota de 10% do total de pontos rejeitados e, diremos que, o conjunto de parâmetros σ_M , k , C e B assim determinado é o que melhor descreve, através da fórmula de seção de choque, os rendimentos dos produtos de espalação para o núcleo alvo e energia incidente considerados.

Resta-nos observar ainda que a fórmula de seção de choque derivada de um modelo estatístico como descrito na seção 2.1

$$\sigma(x,y) = \sigma_M e^{-k(x-C\alpha y)^2} e^{-B(x-1)}$$

é equivalente à uma função de distribuição de probabilidade nor

mal a duas variáveis, x e y , que possuem isoladamente distribuições de probabilidades normais, porém não são independentemente normalmente distribuídas, uma vez que existe uma função de regressão x em y

$$x = C\alpha y \quad (3.3.7)$$

construída a partir de considerações físicas. É importante analisar a qualidade dessa relação teórica entre x e y pois ela contém em si grande parte da explicação física do comportamento das seções de choque de espalação.

Fixando previamente um nível de confiabilidade (digamos 95%), o coeficiente de correlação será indicativo da qualidade de hipótese física descrita pela eq. (3.3.7) .

Podemos escrever a função de distribuição de probabilidade conjunta normal de duas variáveis pela notação corrente

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}\right)^2\right]} \quad (3.3.8)$$

onde \bar{x} é o valor médio de x ($-\infty < \bar{x} < \infty$), σ_x é o erro padrão de x ($\sigma_x > 0$), \bar{y} e σ_y as correspondentes grandezas de y e ρ ($-1 < \rho < 1$) é o coeficiente de correlação teórica, o parâmetro que mede a intensidade de dependência entre x e y , expressa pela eq. (3.3.7) , em senso de probabilidade.

Para estimar o valor de ρ podemos escolher o r definido por

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{(\sum x_i^2)(\sum y_i^2)}} \quad (3.3.9)$$

por ser ele o estimador de máxima verossimilhança.

A distribuição de r não é normal para grandes valores de ρ e, conseqüentemente, não podemos obter um desvio padrão de r e determinar o r com precisão e usá-lo como uma estimativa de ρ . Mas, felizmente, existe uma transformação que com uma simples mudança de variável, r a z , torna a complicada distribuição de r em distribuição aproximadamente normal; é a chamada transformação z de Fisher;

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \quad (3.3.10)$$

com o desvio médio e padrão dado por

$$\begin{aligned} \mu_z &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} \\ \sigma_z &= \frac{1}{\sqrt{m-3}} \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Podemos então determinar o valor de r como uma estimativa de ρ a um nível de confiabilidade desejado.

Se o r é expresso como uma função de z em relação a (3.3.10), r será tangente hiperbólica de z .

Uma tabela dos intervalos de ρ para diferentes valores de r e m é apresentada no Apêndice G.

Uma consequência importante da equação de regressão (3.3.7) é a relação entre os valores médios do número de prótons, \bar{x} , e de neutrons, \bar{y} , emitidos por um núcleo alvo e a uma

energia incidente prefixados^(*), que é a seguinte

$$\bar{x} = \alpha \frac{2C}{r^2+1} \bar{y} \quad (3.3.12)$$

que nos permite, portanto, fazer uma estimativa ou previsão sobre os valores assumidos pelas variáveis x e y , o que não é possível pelos métodos de correlação.

3.4 - *Desenvolvimento do Cálculo para a Determinação dos Parâmetros e Resultados Obtidos*

Foi desenvolvido um programa de computador para a determinação dos parâmetros da eq. (2.1.56), segundo o esquema descrito na Seção 2.3 e no Apêndice F. O programa usa a linguagem Fortran IV-G e trabalha com dupla precisão. Como dados de entrada foram fornecidos: 1) o número atômico e o número de massa do núcleo alvo, sendo que no caso de reação com próton, acrescidos de uma unidade; 2) energia da partícula(ou fóton) incidente; os números atômicos e os números de massa dos núclídeos produzidos e os respectivos rendimentos ou seções de choque experimentais. No presente cálculo não foi atribuído peso a cada medida, porque para uma grande parte das medidas disponíveis na literatura não existe tal indicação, informando apenas a ordem de grandeza do erro sistemático. Os valores dos parâmetros obtidos estão listados nas Tabelas 3.4.2, 3.4.3 e 3.4.4. Esses parâme -

(*)

As eqs. (3.3.9) e (3.3.12) são deduzidas no Apêndice H.

tros são os melhores que conseguimos obter através do ajuste da fórmula aos pontos experimentais disponíveis, mas nada impede que haja outros conjuntos de parâmetros que forneçam uma reprodutibilidade melhor ainda.

TABELA 3.4.2 - Parâmetros obtidos pelo ajuste dos dados experimentais de seção de choque absoluta de foto-espalação.

Núcleo Alvo	Irradiação (MeV)	Nº de Pontos	Ref.	σ_M	C	k	B	Reprodutibilidade
^{51}V	250 400	15	91	815,6998	0,8115	0,4582	0,2689	1,90
^{51}V	250 580	6	91	1448,3623	0,8811	0,5317	0,4287	1,43
^{51}V	250 800	16	91	502,6184	0,8993	0,5713	0,2209	1,29
^{51}V	200 580	6	92	1237,8213	0,8737	0,5410	0,3934	1,39
^{51}V	300 1000	16	19	489,2632	0,8983	0,5382	0,2237	1,34
^{31}P	350*	8	21,93,94, 95,96	301,5947	1,0971	0,4512	0,1138	1,42
^{27}Al	400*	10	23,21,18, 97,93,94,	582,0737	1,2115	0,2906	0,7861	1,40
$^{35,37}\text{Cl}$	350*	7	21,93,94	796,0543	1,0480	0,3942	0,3006	1,49
$^{35,37}\text{Cl}^\dagger$	380*	7	21,93,98, 94,99	172,5746	1,0629	0,3596	0,0000	1,11
^{40}Ca	400*	5	21,93,94	135,8623	1,0853	0,4268	0,0707	1,34
^{39}K	400*	5	21,93,94	296,6318	1,0409	0,6235	0,1561	1,28
^{59}Co	300 1000	22	19	680,3582	0,9278	0,4434	0,2269	1,22
$^{32}\text{S}^\dagger$	400*	5	21,93,94	140,8241	0,9174	0,0915	0,0361	1,32
^{56}Fe	300 1000	20	19	920,8386	1,0000	0,3991	0,3038	1,30

(continua)

TABELA 3.4.2 - continuação

$^{127}\text{I}^\dagger$	250 900	24	96	0,9495	0,3255	0,6358	0,1218	2,18
^{55}Mn	300 1000	18	19	588,9553	0,8489	0,4335	0,2101	1,24
$^{28}\text{Si}^\dagger$	400*	6	21,93,101 94,97	224,0457	0,9293	0,1204	0,1979	1,25
$^{127}\text{I}^\dagger$	950 7000	14	100	0,3663	0,6546	0,0000	0,1179	2,10
$^{119}\text{Sn}^\dagger$	240*	6	102	1498,0596	0,2854	1,4938	***	1,30

* Ref. 93 → 100-1300 MeV

Ref. 94 → 100-1000 MeV

Ref. 98 → 250- 900 MeV

Refs. 21,99 → 300-1000 MeV

Ref. 95 → 75- 640 MeV

Ref. 23 → 300-1000 MeV

Ref. 97^(**) → 260-1670 MeV

^(**) No nosso cálculo do $\bar{\sigma}_k$ foram considerados só os pontos no intervalo de 300-1000 MeV.

*** - indeterminado

† - rejeitados

TABELA 3.4.3 - Parâmetros obtidos pelo ajuste dos dados experimentais de seção de choque de espalação por fóton equivalente.

Núcleo Alvo	Irradiação (MeV)	Nº de pontos	Ref.	σ_M	C	k	B	Reprodutibilidade
^{51}V	75	6	91	1536,1904	0,8049	0,6351	1,9016	1,68
^{51}V	100	7	91	1742,4509	0,8865	0,7471	1,7014	1,50
^{51}V	125	7	91	1488,6160	0,8567	0,7858	1,3313	1,51
^{51}V	150	8	91	1255,2163	0,8380	0,6867	1,1177	1,38
^{51}V	200	11	91	1047,6208	0,8357	0,5865	0,8197	1,53
^{51}V	300	16	19	688,4902	0,8955	0,6644	0,3975	1,89
^{51}V	325	16	91	1201,4492	0,8917	0,5635	0,5613	1,86
^{51}V	400	18	91	1224,0596	0,8882	0,5583	0,4682	1,77
^{51}V	400	16	19	809,8599	0,8827	0,5881	0,3297	1,67
^{51}V	400	6	92	2486,8765	0,8963	0,6070	0,5876	1,17
^{51}V	500	18	91	1277,9644	0,8847	0,5314	0,4128	1,76
^{51}V	500	17	19	905,4307	0,8485	0,5350	0,2576	1,81
^{51}V	600	16	19	922,0796	0,8631	0,5305	0,2563	1,63
^{51}V	640	18	91	1369,5449	0,8827	0,5308	0,3687	1,81
^{51}V	750	16	19	965,1375	0,8647	0,5247	0,2388	1,61
^{51}V	800	18	91	1422,2434	0,8844	0,5178	0,3470	1,79
^{51}V	900	16	19	1080,3606	0,8599	0,5152	0,2312	1,59
^{51}V	1000	17	19	1221,7097	0,8382	0,5072	0,2013	1,75
^{51}V	1000	11	103	471,0457	0,8921	0,4725	0,6516	1,30
^{51}V	1500	17	91	2008,4255	0,9010	0,4635	0,3623	1,71
$^{51}\text{V}^\dagger$	1500	11	103	1,2966	1,0917	0,0709	0,1212	2,09
^{51}V	2000	8	104	2,1197	0,7785	0,6139	0,1753	1,35
^{51}V	3000	9	104	2,3585	0,8061	0,5326	0,3283	1,36

(continua)

TABELA 3.4.3 - continuação

$^{51}\text{V}^\dagger$	4000	10	104	1,9978	0,7547	0,7509	0,0436	1,54
$^{51}\text{V}^\dagger$	5000	10	104	1,4838	0,7982	0,5419	0,0792	1,62
^{55}Mn	300	18	19	1207,9138	0,8976	0,4084	0,4231	2,16
^{55}Mn	400	20	19	1146,9590	0,8813	0,4194	0,3676	2,26
^{55}Mn	500	20	19	1326,0090	0,8747	0,4243	0,3342	1,98
^{55}Mn	600	19	19	1395,7285	0,8847	0,3744	0,3417	1,71
^{55}Mn	750	19	19	1528,7690	0,8836	0,3780	0,3273	1,65
^{55}Mn	900	21	19	1363,0586	0,8635	0,4134	0,2668	1,85
^{55}Mn	1000	21	19	1391,1890	0,8628	0,4139	0,2595	1,85
$^{55}\text{Mn}^\dagger$	1500	13	103	2,5127	0,8591	0,4011	0,1102	1,46
^{55}Mn	2000	10	104	6,2121	0,9010	0,4238	0,5268	1,25
^{55}Mn	3000	11	104	6,0758	0,8997	0,4091	0,5278	1,24
^{55}Mn	4000	11	104	5,8988	0,8806	0,4538	0,4833	1,26
^{56}Fe	300	15	19	1646,2351	1,0034	0,3423	0,4961	1,89
^{56}Fe	400	21	19	494,4973	0,9058	0,3392	0,2588	3,02
^{56}Fe	500	20	19	1526,9478	0,9570	0,3534	0,3785	1,80
^{56}Fe	600	20	19	885,3535	0,9318	0,3158	0,2857	1,61
^{56}Fe	750	20	19	1132,1133	0,9482	0,3233	0,2972	1,50
^{56}Fe	900	20	19	1367,8064	0,9598	0,3312	0,3096	1,47
^{56}Fe	1000	20	19	1316,7883	0,9492	0,3281	0,2880	1,46
^{56}Fe	1500	19	105	46,4072	0,9499	0,5098	0,3522	1,41
$^{56}\text{Fe}^\dagger$	3000	9	98	234,1286	0,8299	0,2173	0,4105	2,04
$^{56}\text{Fe}^\dagger$	5000	8	98	440,4614	1,2035	0,2484	0,8599	2,07
^{56}Fe	16000	13	98	782,2432	0,9203	0,4762	0,2680	1,25
^{56}Fe	16000	9	98	254,5869	0,9301	0,4730	0,2603	1,22
^{56}Fe	1500	8	98	388,6870	1,0159	0,4135	0,5371	1,57

(continua)

TABELA 3.4.3 - continuação

^{59}Co	300	15	19	4462,9453	0,9248	0,3911	0,8120	3,15
^{59}Co	309	8	106	222,7015	0,7682	0,7236	0,9741	1,28
^{59}Co	400	20	19	1391,5420	0,8878	0,4592	0,2877	2,69
^{59}Co	500	23	19	1141,5161	0,8761	0,4350	0,2621	2,96
^{59}Co	600	23	19	1412,4734	0,8915	0,4205	0,2791	2,41
^{59}Co	750	22	19	1288,2725	0,8850	0,4239	0,2344	1,83
^{59}Co	900	22	19	1878,4519	0,8957	0,4297	0,2712	1,76
^{59}Co	1000	23	19	1870,7253	0,8969	0,4305	0,2606	1,93
^{59}Co	1500	16	102	1,7550	0,9281	0,2965	0,1366	1,73
$^{\text{nat}}\text{Cu}^{\dagger}$	320	5	107	3,3735	1,1919	0,0957	0,2648	1,21
$^{\text{nat}}\text{Cu}$	2000	18	104	3,7803	0,9162	0,3253	0,3086	1,43
$^{\text{nat}}\text{Cu}$	2000	22	108	2,9034	0,9479	0,4538	0,3701	1,40
$^{\text{nat}}\text{Cu}$	3000	17	104	3,9984	0,9199	0,4452	0,2806	1,39
$^{\text{nat}}\text{Cu}$	4000	15	104	5,4479	0,9100	0,5049	0,3300	1,20
$^{\text{nat}}\text{Cu}$	5000	17	104	4,3573	0,9210	0,4363	0,3001	1,37
$^{127}\text{I}^{\dagger}$	950	14	100	1,5221	1,6460	0,0026	0,1823	1,81
$^{127}\text{I}^{\dagger}$	1300	14	100	1,6787	2,1617	0,0011	0,1748	1,89
$^{127}\text{I}^{\dagger}$	1600	14	100	1,7847	1,9128	0,0012	0,2016	1,85
$^{127}\text{I}^{\dagger}$	2000	14	100	1,7697	0,6273	0,0000	0,2313	1,88
$^{127}\text{I}^{\dagger}$	2400	14	100	1,9400	1,9050	0,0012	0,1817	1,83
$^{127}\text{I}^{\dagger}$	3100	14	100	1,9900	2,1877	0,0007	0,1822	1,85
$^{127}\text{I}^{\dagger}$	4000	14	100	1,9864	1,9622	0,0005	0,1953	1,88
$^{127}\text{I}^{\dagger}$	5000	14	100	2,1804	1,8409	0,0011	0,1942	1,86
$^{127}\text{I}^{\dagger}$	6000	14	100	2,0936	0,7151	0,0000	0,2028	1,89
$^{127}\text{I}^{\dagger}$	7000	14	100	2,1765	0,6714	0,0000	0,1812	1,93

(continua)

TABELA 3.4.3 - continuação

^{75}As	320	10	107	39,8021	0,7506	0,5993	0,9248	1,67
^{70}Ga	320	8	107	18,2519	0,7200	0,5069	0,7138	2,14
$^{65}\text{Zn}^{\dagger}$	320	3	107	57,3911	1,4739	0,0766	0,0000	1,86
^{73}Ge	320	6	107	22,2893	0,5553	0,4905	0,8283	1,31
$^{27}\text{Al}^{\dagger}$	300	9	97,93,109 110,92	891,9697	0,6676	0,1467	0,6973	1,33
^{27}Al	1500	5	102	131,5042	0,8510	0,4469	0,1157	1,40
$^{27}\text{Al}^{\dagger}$	16000	4	98	379,3868	0,8077	0,1157	0,5002	1,00
$^{35,37}\text{Cl}$	1000	7	21,93,99 94	1690,3731	0,9210	0,3351	0,3006	1,46
$^{45}\text{Sc}^{\dagger}$	2000	7	108	31,4233	0,9060	0,2469	0,1020	1,24
$^{209}\text{Bi}^{\dagger}$	1000	5	111	77,1312	0,8030	0,2363	***	1,68
$^{75}\text{As}^{\dagger}$	1500	15	103	0,1823	0,6986	0,3702	0,0000	2,94
^{55}Mn	5000	12	104	6,3984	0,8819	0,4524	0,4872	1,27
$^{127}\text{I}^{\dagger}$	4000	25	112	0,0955	0,6145	0,0734	0,1886	1,78
^{181}Ta	4000	8	112	0,4346	0,5019	0,3338	0,3240	1,13
^{59}Co	4000	22	112	0,1034	0,9017	0,4086	0,3292	1,51

***Indeterminado.

TABELA 3.4.4 - Parâmetros obtidos pelo ajuste dos dados experimentais para reação de espalação por prótons.

Núcleo Alvo	Irradiação (MeV)	Nº de pontos	Ref.	σ_M	C	k	B	Reprodutibilidade
^{55}Mn	170	16	24	87,3170	1,0016	0,4125	0,6332	1,19
^{51}V	60	8	113	240,6703	1,0334	0,5152	1,5976	2,18
^{51}V	100	10	113	66,6901	0,9760	0,3855	0,8048	1,86
^{51}V	170	21	24	88,9126	1,0135	0,4852	0,7282	1,42
^{51}V	175	12	113	38,4701	0,9529	0,3988	0,6251	1,69
^{51}V	187	12	114	82,9681	0,9742	0,4471	0,6754	1,12
^{51}V	240	15	113	49,6525	1,0385	0,3368	0,5743	2,38
^{51}V	3000	23	115	23,0676	0,9509	0,4238	0,1479	1,24
^{51}V	29000	26	115	19,8885	0,9554	0,4411	0,1196	1,36
^{56}Fe	130	4	116	460,8716	1,0216	0,9876	1,3371	1,00
^{56}Fe	340	24	117	44,0415	1,0807	0,3407	0,5020	1,98
^{56}Fe	500	13	118,119	45,2353	1,0606	0,4440	0,3493	1,53
^{56}Fe	730	12	120,118	39,8687	0,9862	0,3626	0,2195	1,45
^{56}Fe	800	7	84	29,1358	1,0915	0,4554	0,1796	1,46
^{56}Fe	1500	8	84	24,4093	1,0893	0,4537	0,1321	1,70
^{56}Fe	2900	7	84	20,4412	1,0836	0,4620	0,1070	1,71
^{59}Co	170	18	24	450,6396	1,0062	0,5444	0,7138	1,51
^{59}Co	240	7	84	111,2728	1,0848	0,3410	0,2693	1,91
^{59}Co	370	22	121	65,1633	1,0027	0,4141	0,3781	1,75
$^{\text{nat}}\text{Cu}$	90	11	122	62,1082	1,2745	0,2370	0,9436	1,85
$^{\text{nat}}\text{Cu}^\dagger$	190	9	122	3,9870	1,0795	0,2469	0,0000	2,52
$^{\text{nat}}\text{Cu}$	370	9	122	59,0036	1,1498	0,2475	0,4353	1,86
$^{\text{nat}}\text{Cu}$	2200	6	122	27,5316	1,0348	0,3865	0,1513	1,32

(continua)

TABELA 3.4.4 - continuação

^{nat}Cu	5700	10	123	26,1946	1,0154	0,4504	0,1153	1,70
^{nat}Cu	24000	9	123	20,0520	1,0678	0,3292	0,1757	1,83
^{nat}Cu	30000	9	123	18,2171	1,0016	0,5378	0,0395	1,09
^{nat}Cu	20000	9	123	18,6590	1,0032	0,5400	0,0411	1,12
^{nat}Cu	3000	9	123	17,9353	0,9937	0,5002	0,0464	1,23
^{75}As	49	14	24	1851,8123	1,0715	0,3326	2,6752	2,32
^{75}As	103	19	24	106,4686	0,8425	0,5073	0,9995	1,83
^{75}As	170	21	24	161,2751	0,8242	0,4828	0,7484	1,55
^{75}As	378	20	124	80,8051	0,8046	0,4857	0,3441	1,37
$^{58}\text{Ni}^{\dagger}$	80	19	125	71,6615	2,3087	0,0393	0,5256	2,19
$^{58}\text{Ni}^{\dagger}$	100	20	125	65,8011	1,9689	0,0910	0,3926	2,03
^{58}Ni	136	23	125	165,3814	0,7898	0,2359	0,5906	1,78
$^{64}\text{Ni}^{\dagger}$	136	20	125	60,8219	1,0193	0,1072	0,5081	1,72
^{58}Ni	164	20	125	39,0618	1,5690	0,2088	0,1603	1,86
^{60}Ni	136	24	125	65,6055	1,3518	0,2119	0,3052	1,70
$^{62}\text{Ni}^{\dagger}$	136	24	125	54,9172	1,1061	0,1338	0,4859	1,53
^{93}Nb	500	10	84	81,3020	0,8908	0,3463	0,3794	1,30
^{93}Nb	720	10	84	86,1236	0,9144	0,4297	0,2760	1,44
$^{69}\text{Ga}^{\dagger}$	1500	4	126	65,6053	43,5604	0,0002	0,3696	1,31
^{133}Cs	240	13	127	22,4722	0,5699	0,5163	0,3701	1,57
$^{181}\text{Ta}^{\dagger}$	340	33	128	112,2536	0,9292	0,0602	0,3621	3,75
$^{89}\text{Y}^{\dagger}$	240	24	129	43,7825	8,9893	0,0004	0,3731	3,35
^{71}Ga	1500	6	127	57,5057	1,0802	0,2825	0,8419	1,50
^{75}As	2900	7	124	26,7051	0,8716	0,3833	0,2132	1,42

3.5 - Análise dos Valores Determinados pelo Ajuste - Discussão e Conclusão

Dos valores relacionados nas Tabelas 3.4.2, 3.4.3 e 3.4.4 rejeitamos cerca de 5% dos 1350 dados de foto - espalação e 4,5% dos 720 de espalação por próton. Excluimos do cálculo também todos os dados da ref. (100) e mais 23 conjuntos de dados de outras referências assinalados com †, por apresentarem valores muito afastados dos normalmente apresentados por outros conjuntos de dados.

Parâmetro σ_M - o valor de σ_M depende das condições experimentais (espécie e energia da partícula de bombardeamento; núcleo alvo) e deve ser normalizado ao valor experimental. No caso do projétil ser um fóton, σ_M corresponde aproximadamente à seção de choque (γ, pn) e no caso de ser próton, à seção de choque (p, pn) (130).

Parâmetro B - é equivalente ao logarítmo do K dado pela eq. (2.2.61) e ao parâmetro P da fórmula CDMD de Ruds - tam (eq. (1.5.10)). Os valores de B obtidos pelo processo de ajuste nos permitem estabelecer um andamento que pode ser expresso pelas seguintes equações:

a) - para irradiação com fóton,

$$B \approx 0,06 \frac{A_S^2}{E} \quad \text{para} \quad 1 \lesssim \frac{E}{A_S} \left[\frac{\text{MeV}}{\text{nucleon}} \right] \leq 10 \quad (3.5.13)$$

$$B \approx 0,006 A_S \quad \text{para} \quad 10 < \frac{E}{A_S} \left[\frac{\text{MeV}}{\text{nucleon}} \right] \quad (3.5.14)$$

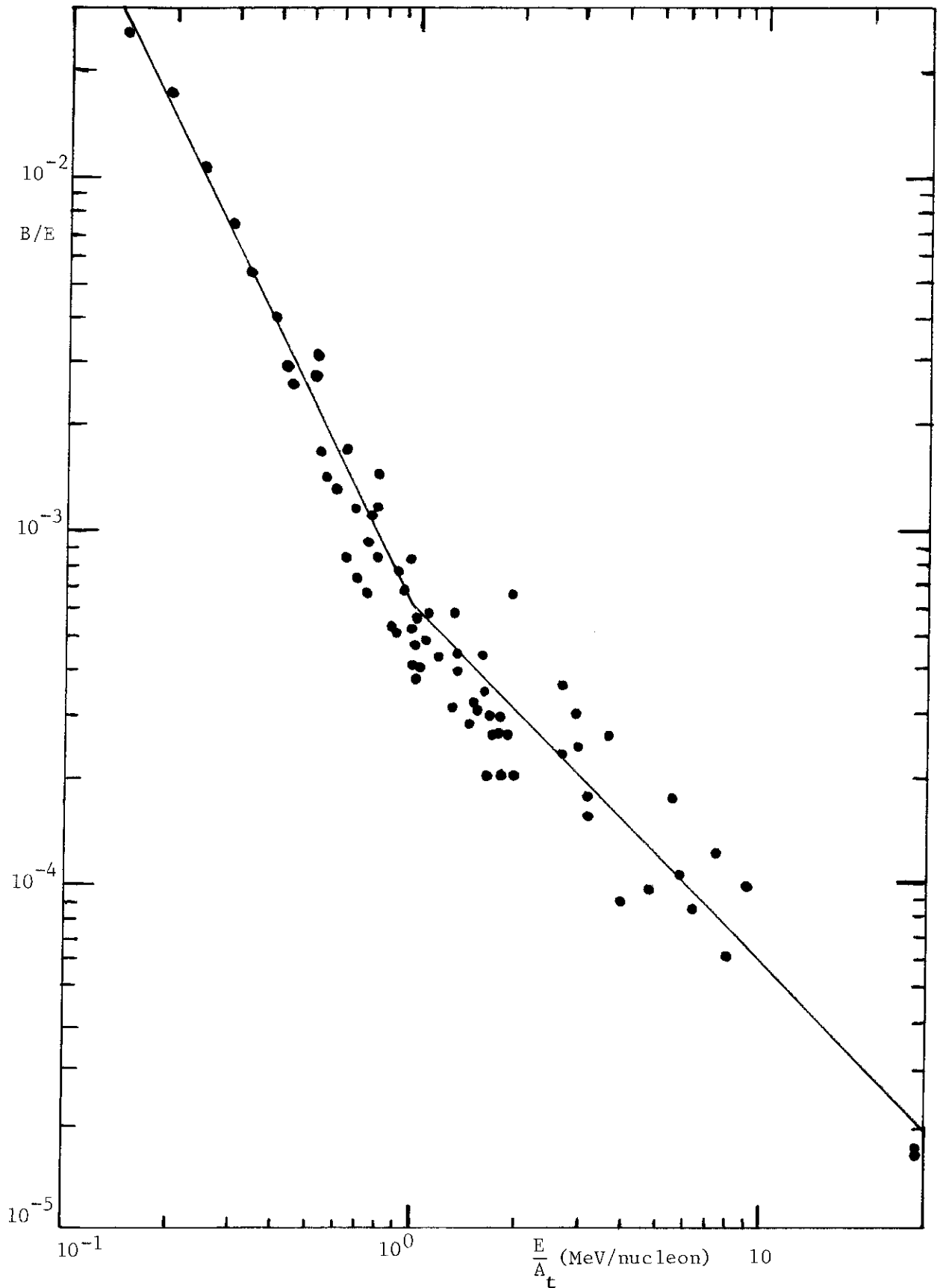


Fig. 3.5.1 - Andamento do parâmetro B/E versus E/A_t para o fóton como projétil.

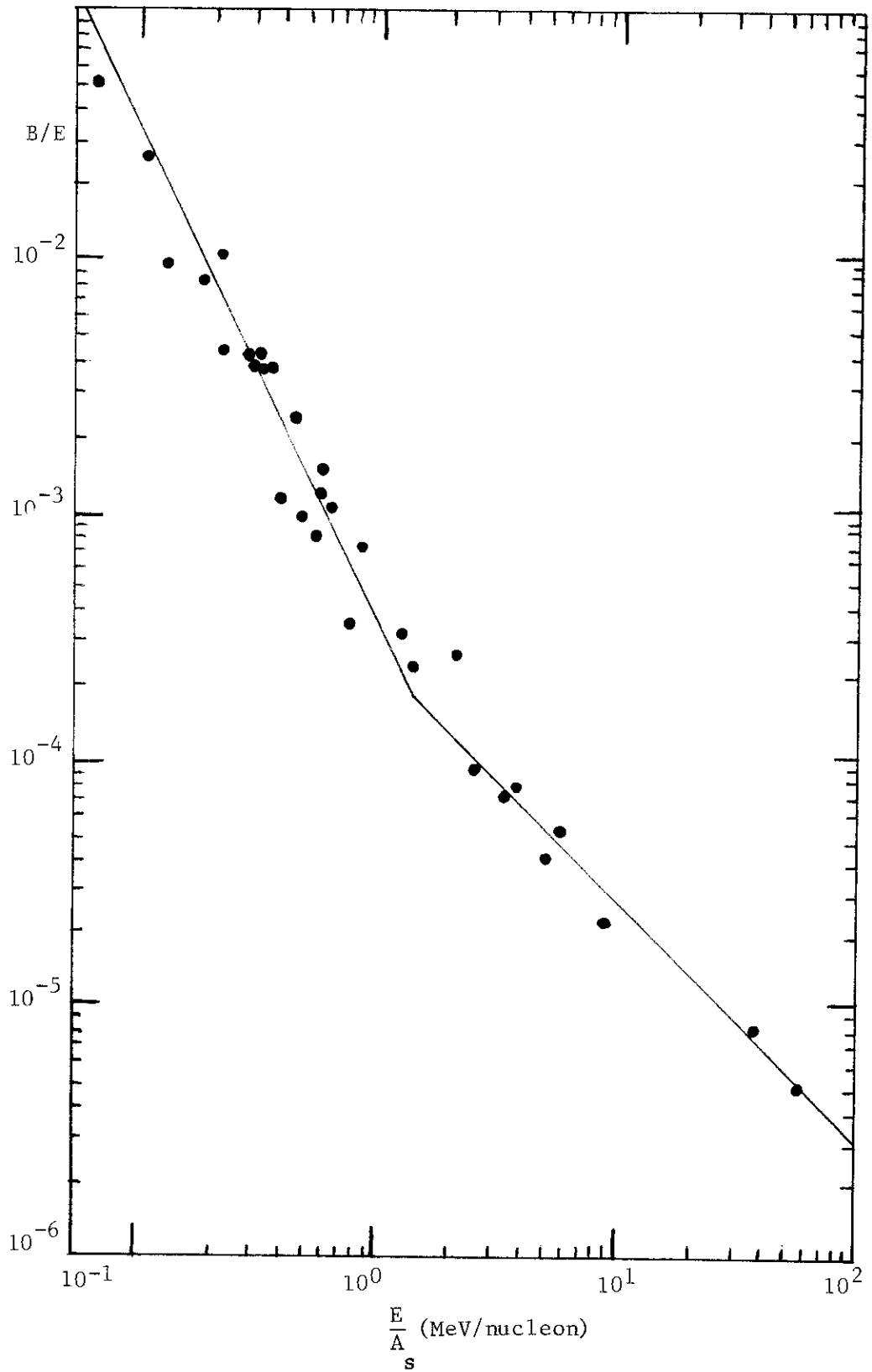


Fig. 3.5.2 - Andamento do parâmetro B/E versus $\frac{E}{A}$ para o próton como projétil.

b) - irradiação com próton:

$$B \approx 0,035 \frac{A_S^2}{E} \quad \text{para} \quad 0,5 \lesssim \frac{E}{A_S} \left[\frac{\text{MeV}}{\text{nucleon}} \right] \lesssim 15 \quad (3.5.15)$$

$$B \approx 0,0025 A_S \quad \text{para} \quad 15 < \frac{E}{A_S} \left[\frac{\text{MeV}}{\text{nucleon}} \right] \quad (3.5.16)$$

O parâmetro B é fortemente dependente da energia de irradiação até, digamos, 10 MeV/nucleon para o fóton como projétil e ~ 15 MeV/nucleon para o próton⁽¹³⁰⁾, sendo daí em diante praticamente constante. Isto nos indica que aumentando a energia do fóton (próton) incidente, após atingir um determinado valor, o número médio de nucleons a serem emitidos não muda. O parâmetro B está relacionado à distribuição da energia de excitação discutida no trabalho de Metropolis et al.⁽¹³¹⁾.

Parâmetro k - os valores apresentados nas Tabelas 3.4.2, 3.4.3 e 3.4.4 nos indicam que o parâmetro k é independente de energia do projétil e do núcleo alvo para as irradiações com fóton e próton. Podemos ver pela Fig. 3.5.3 que o valor mais provável de k é $\sim 0,43$ o que dá uma largura de 2.16 unidades de ω na distribuição "reduzida"^(*) dos produtos de espalação.

Parâmetro C - podemos visualizar o andamento do parâmetro C construindo um gráfico auxiliar C/Z_t^2 versus A_t e C/Z_S^2 versus A_S (Figs. 3.5.4 e 3.5.5) para os produtos obtidos pela irradiação com fóton e próton, respectivamente. Estes gráficos

(*) O tipo de representação dos produtos de espalação como o nosso é chamado de "distribuição reduzida" na literatura.

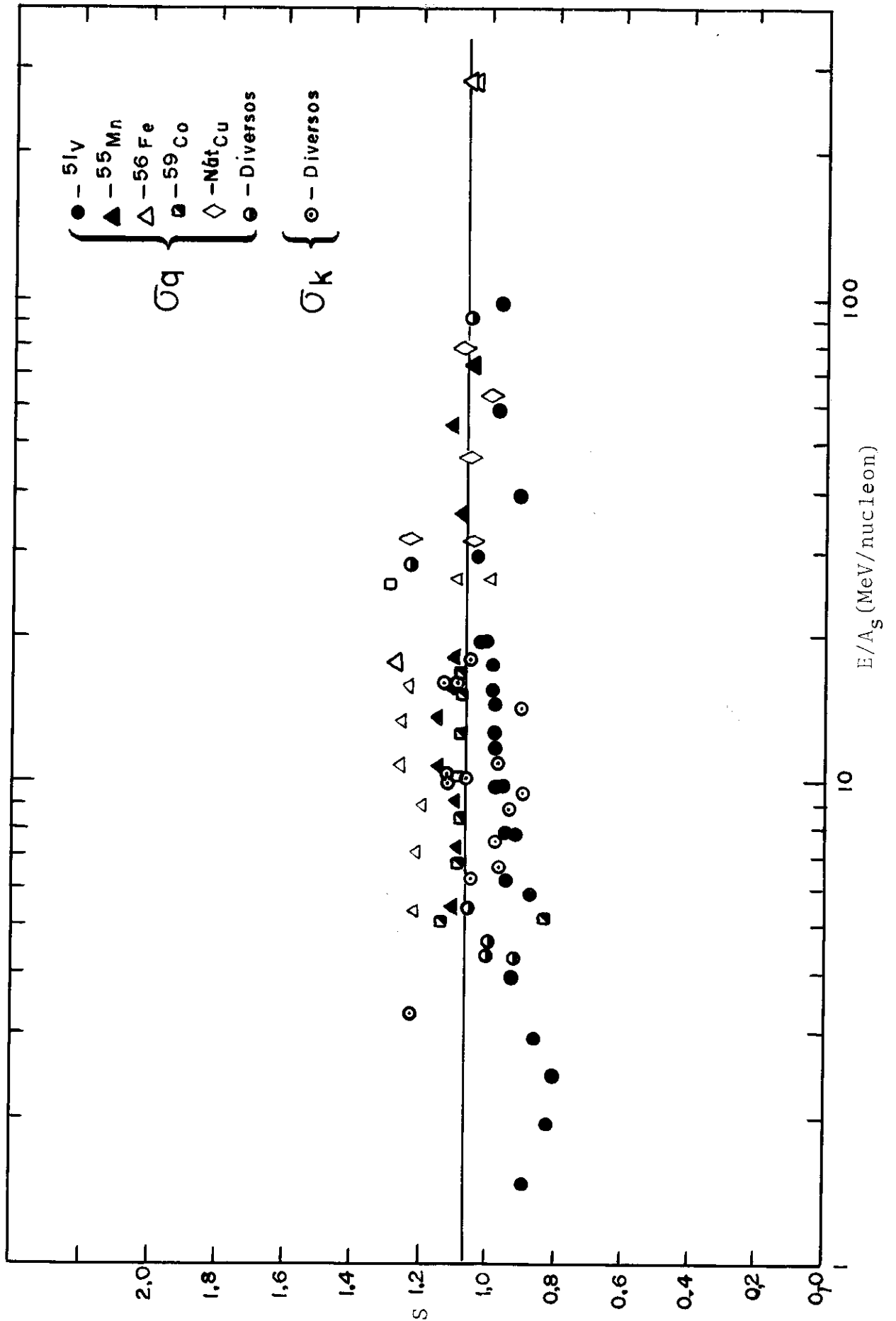


Fig.3.5.3- Largura da distribuição reduzida $S = \sqrt{T/2K}$ versus E/A_S .

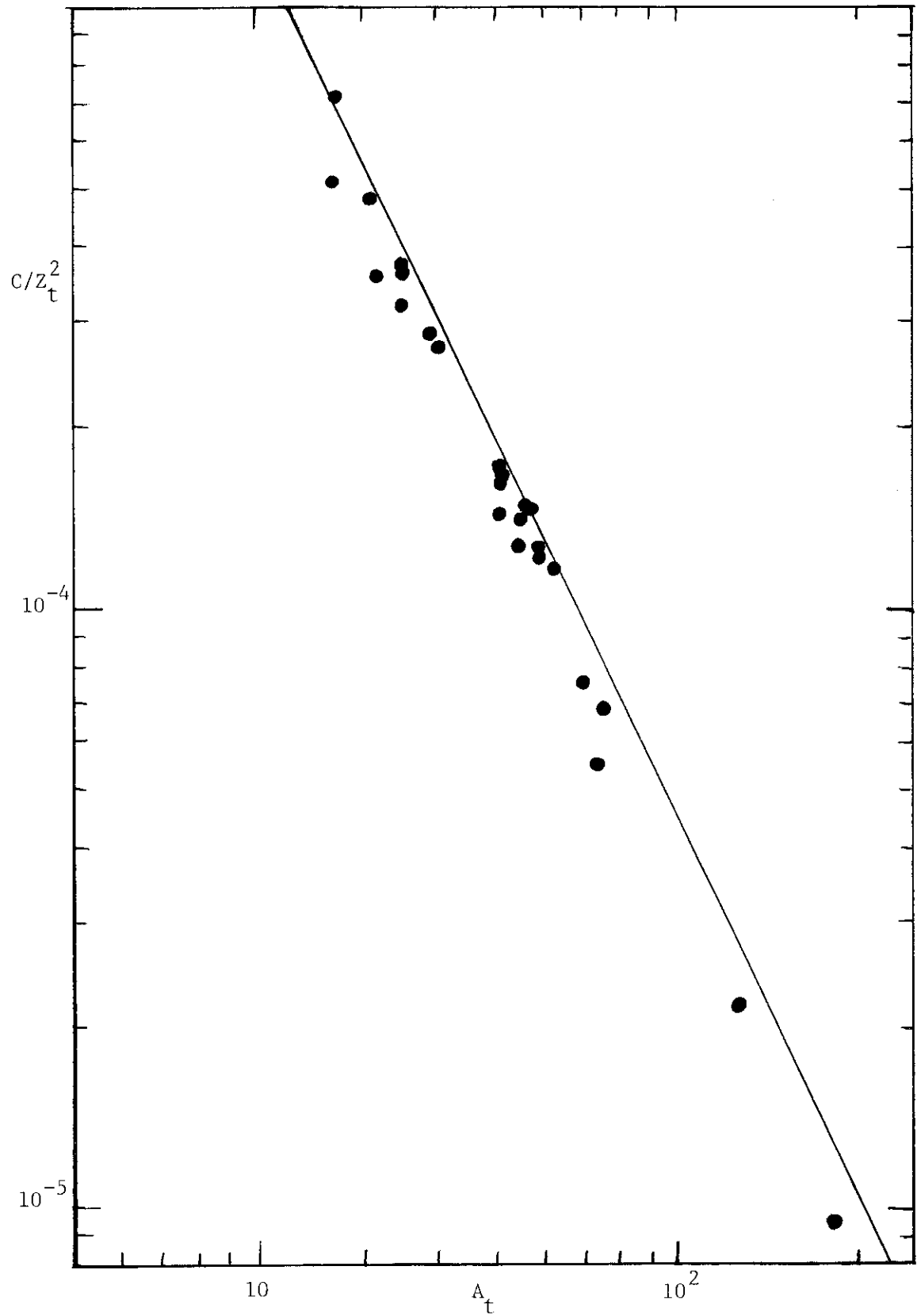


Fig. 3.5.4 - Gráfico auxiliar para calcular C para o fôton como projêtil.

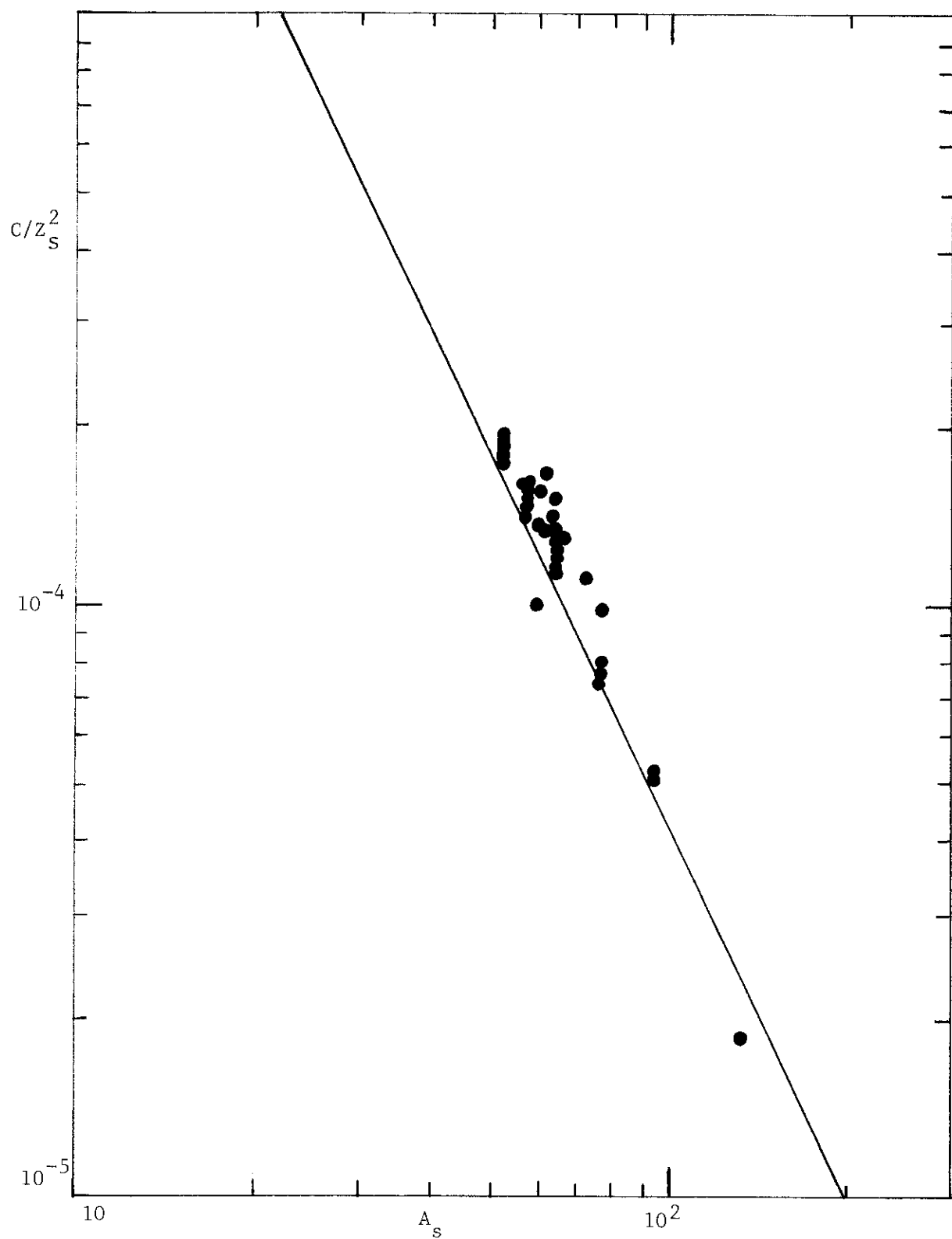


Fig. 3.5.5 - Gráfico auxiliar para calcular C para o próton como projétil.

mostram um andamento coerente com os obtidos anteriormente, ilustrados nas Figs. 2.5.3 e 2.5.4, e nos permitem derivar a seguinte expressão analítica que pode ser usada para calcular os valores de C:

$$C \approx 8,56 \frac{Z_S^{2,00}}{A_S^{2,15}} \quad . \quad (3.5.17)$$

O parâmetro C é independente da espécie e energia do projétil; depende somente da característica intrínseca do núcleo semente formado, por exemplo, $^{55}\text{Mn}+p$ e $^{56}\text{Fe}+\gamma$ apresentam o mesmo valor de C.

Uma vez determinados os parâmetros, podemos efetuar alguns cálculos interessantes decorrentes da fórmula (2.1.56):

a) número médio de prótons emitidos - o parâmetro B é o fator que descreve o decrescimento da seção de choque quando cresce o número de prótons emitidos. Portanto podemos calcular o número médio de prótons emitidos em função de B pela expressão^(*)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{x_i=1}^{Z/2} x_i \sigma_M e^{-B(x_i-1)}}{\sum_{x_i=1}^{Z/2} \sigma_M e^{-B(x_i-1)}} \approx \frac{1}{1-e^{-B}} \quad (3.5.18)$$

b) número médio de neutrons emitidos - partindo da equação:

(*) As deduções desta fórmula e das outras subsequentes são dadas no Apêndice I.

$$\bar{y} = \frac{\sum_{y_i=1}^{N_S/2} y_i \sigma(x, y)}{\sum_{y_i=1}^{N_S/2} \sigma(x, y)} \approx \frac{1}{1 - e^{-BC\alpha}} \quad (3.5.19)$$

c) número médio de nucleons emitidos – é dado pela soma de \bar{x} com \bar{y} .

d) largura da distribuição isotópica – podemos obter a largura da distribuição isotópica em y pela expressão:

$$\Gamma = \frac{2}{C\alpha} \sqrt{\frac{\ell n 2}{k}} \quad (3.5.20)$$

Esta equação é muito interessante pois nos diz que, quanto maior o núcleo alvo maior será a largura apresentada pela distribuição isotópica e vice-versa. É razoável que assim seja pois um núcleo pesado tem possibilidade de produzir maior variedade de nuclídeos do que um leve.

e) seção de choque total de espalação –

$$\begin{aligned} \sigma_{total} &= \sum_x \sum_y \sigma_M e^{-B(x-1)} e^{-k(x-C\alpha y)} \\ &= \frac{\sigma_M}{C\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \frac{1}{1 - e^{-B}} \quad . \end{aligned} \quad (3.5.21)$$

Se substituirmos $\frac{1}{C\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{k}}$ pela expressão (3.5.20) e $2 \sqrt{\frac{\ell n 2}{\pi}} \approx 1$, temos

$$\sigma_{total} \approx \sigma_M \Gamma \bar{x} \quad . \quad (3.5.22)$$

Esta também é uma fórmula muito interessante pois nos diz que a seção de choque total de espalação pode ser calculada aproximadamente, pelo produto de σ_M , isto é, seção de choque (γ, np) ou (p, pn), pelo número médio de prótons emitidos e pela largura, em número de neutrons, da distribuição isotópica.

f) número de massa mais provável do nuclídeo produzido, $A_p(Z)$, na reação de espalação – pode ser calculado com a equação (2.5.74) deduzida no Capítulo 2. Como ilustração mostramos na Tab. 3.5.5 alguns valores de $A_p(Z)$ calculados com esta fórmula e com outras sistemáticas para alvo de ^{56}Fe irradiado com fóton.

g) distribuição isotópica, isotônica e isobárica – com uma escolha conveniente da variável x ou y mantendo uma delas ou a soma constante, podemos obter estas distribuições ⁽¹³⁰⁾.

TABELA 3.5.5 - Valores de A_p obtidos com diferentes fórmulas.

Z	Ref.(81) ^{a)}	Ref.(82) ^{b)}	Ref.(15) ^{c)}	Presente trabalho ^{d)}	Nº de massa do isótopo estável natural
25	54	54,55	50,30	53,67	55 (100%)
24	51,76	52,28	48,20	51,33	50(4,35), 52(82,79) 53(9,5), 54(2,36)
23	48,38	50,01	46,11	49,00	50(0,25), 51(99,75)
22	47,31	47,74	44,03	46,66	46(8), 47(7,5), 48(73,7), 49(5,5), 50(5,3)
21	45,09	45,47	41,95	44,33	45(100)
20	42,88	43,20	39,88	41,99	40(96,94), 42(0,65) 43(0,14), 44(2,08), 46(0,003)
19	40,67	40,93	37,82	39,66	39(93,3), 40(0,012), 41(6,7)
18	38,47	38,66	35,77	37,33	3,6(0,34), 38(0,07), 40(99,59)
17	36,28	36,39	33,72	34,99	35(75,77), 37(24,23)
16	34,10	34,12	31,68	32,66	32(95), 33(0,75), 34(4,2), 36(0,015)
15	31,92	31,85	29,65	30,32	31(100)
14	29,75	29,58	27,63	27,99	28(92,2), 29(4,7), 30(3,1)
13	27,58	27,31	25,61	25,65	27(100)

Suponhamos que o alvo seja ^{56}Fe e o projétil o fóton

a) $A_p = ZS + TZ^2$ com $S = 2,08$ e $T = 0,0032$

b) $A_p = 2,277 - 2,20$

c) $TA_p^2 - SA_p + Z = 0$ com $T = 0,00038$ e $S = 0,486$

d) $A_p = N_s + Z - x/\alpha C$ onde $C = 8,56 Z_s^2 A_s^{-2,15}$

CONCLUSÃO:

Da análise de cerca de 1300 medidas experimentais de produtos de foto-espalação, obtivemos 40% das reprodutibilidades das seções de choque experimentais calculadas com a equação (3.2.5) dentro de um fator 1,5 e 73% dentro de um fator 2,0; obtivemos também 45% de um fator 1,5 e 95% de um fator 2,0 para as induzidas por prótons numa amostra de ~ 700 medidas experimentais (Fig. 3.5.6).

Em termos de reprodutibilidade média, tanto para fóton como para próton, obtivemos o mesmo valor 1,6, o que indica uma boa qualidade da fórmula do presente trabalho, face às outras fórmulas que fornecem uma média maior.

Podemos concluir que, em princípio, a previsão das seções de choque de formação dos produtos de espalação pode ser feita com a eq. (2.1.56) onde os parâmetros podem ser calculados, para o caso do projétil ser fóton, com as eqs.: (3.5.13) ou (3.5.14), (3.5.17), $k \approx 0,43$ e $\sigma_M \approx \sigma(\gamma, pn)$ e para o próton, com as eqs. (3.5.15) ou (3.5.16), (3.5.17), $k \approx 0,43$ e $\sigma_M \approx \sigma(p, pn)$ com uma precisão boa, evidenciada pela excelente reprodutibilidade alcançada nas amostragens analisadas.

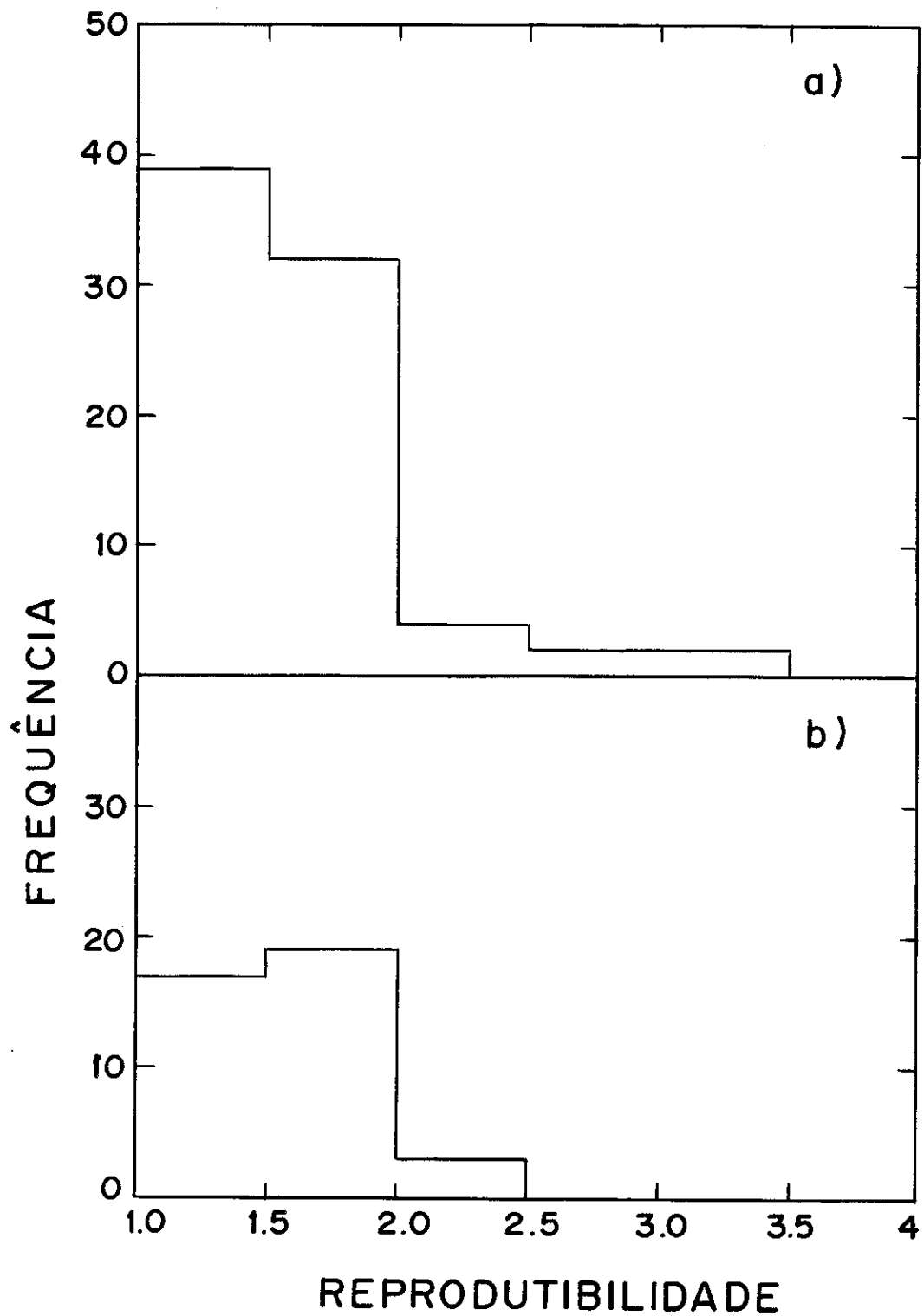


Fig. 3.5.6 - Reprodutibilidades das seções de choque experimentais obtidas com a fórmula do presente trabalho.
a) fotoespalação ; b) protoespalação.

APÊNDICE A

SOBRE O MÉTODO DE MONTE CARLO

Não existe uma definição exata ou única do que seja o Método de Monte Carlo.

Podemos descrever o Método de Monte Carlo como um esquema de estudar por um modelo estocástico artificial um processo físico ou matemático.

O método só encontrou grande aplicação, no curso de exploração de grandes computadores, nos campos onde o problema básico envolve algum processo aleatório. Nestes casos, quando a determinação de uma propriedade macroscópica de um sistema não pode ser feita através de uma equação analítica, como é feita normalmente nos Métodos Clássicos, por não dispor de tal equação ou por não poder formulá-la devido à complexidade dos fenômenos envolvidos, com o Método de Monte Carlo, muitas vezes, é possível solucionar tais problemas, dispondo somente de leis elementares que regem cada etapa do fenômeno físico envolvido. Essas leis devem ser conhecidas experimentalmente ou previstas teoricamente pois os problemas são formulados baseados nelas. Se não dispuser destas leis, o Método de Monte Carlo não será aplicável. No nosso caso de problemas de física nuclear interessamo-nos pelo processo de traçar histórias. Cada história correspon

de a uma experiência. A precisão do resultado depende da aproximação estatística obtida pela reunião de muitas de tais histórias.

Atualmente, com o desenvolvimento de grandes computadores, é possível obter um número suficientemente grande de histórias num tempo tolerável mesmo sem usar a história condensada^(*), o que assegura uma boa precisão na maioria dos problemas abordados.

Um dado da maior importância é a geração de números ao acaso distribuídos entre 0 e 1. Os números ao acaso produzidos no computador são, na realidade, números pseudo-aleatórios, números que apresentam características de casualidade, mas são gerados por um algoritmo determinístico apresentando um ciclo repetitivo após uma determinada quantidade de números produzidos.

O princípio fundamental de aplicação do Método de Monte Carlo, no caso discreto de um número finito de eventos, pode assim ser descrito: sejam e_1, e_2, \dots, e_n , n eventos independentes e mutuamente exclusivos com as respectivas probabilidades p_1, p_2, \dots, p_n sendo que $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ e sendo r um dos componentes de um grupo de N números ao acaso entre $(0,1)$ sendo N suficientemente grande, a ocorrência do evento e_i é determinada pela relação:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1} \leq r \leq p_1 + p_2 + \dots + p_i \quad (\text{A.1})$$

Podemos usar este princípio para obter uma aproxima-

^(*) É um esquema especial para acelerar os cálculos.

ção "heurética" para o caso contínuo em que se quer determinar a partir de um número ao acaso um dos valores contínuos de uma variável. Este caso sempre pode ser considerado como aproximável por um número finito muito grande de casos distintos. Como a computação é feita com números fixos de dígitos, interessamo-nos por aproximação discreta.

O erro do Método de Monte Carlo é calculado do seguinte modo: suponhamos que queremos simular o evento A que ocorre com probabilidade p.

Seja r_i uma quantidade igual a 1 se a i-ésima prova resulta em A e zero se o evento A não ocorre. Então, o número total de provas para que o evento A ocorra é:

$$L = \sum_{i=1}^N r_i \quad (\text{A.2})$$

onde N é o número total de provas. Provas individuais são supostas independentes. A frequência relativa de ocorrência do evento A é L/N . De acordo com a lei dos grandes números (teorema de Bernoulli) a frequência relativa de ocorrência do evento A é aproximadamente igual à probabilidade p. Mais precisamente, para qualquer $\epsilon > 0$ e qualquer $\delta > 0$ existe um número de provas N tal que com uma probabilidade maior do que $1-\epsilon$, a frequência relativa da ocorrência do evento A diferirá da probabilidade p, quando o evento ocorre por uma quantidade menor que δ

$$\left| \frac{L}{N} - p \right| < \delta \quad . \quad (\text{A.3})$$

Como p é uma quantidade procurada e L/N é o seu valor aproxima

mado obtido pelo Método de Monte Carlo, segue-se que a diferença $\frac{L}{N} - p$ é o erro do Método de Monte Carlo. Este erro só pode ser estimado probabilisticamente com grau $1-\epsilon$ de confiabilidade.

O termo do lado esquerdo da desigualdade (A.3) pode ser estimado com o auxílio da desigualdade de Chebyshev

$$\left| \frac{L}{N} - p \right| \leq \sqrt{\frac{p(1-p)}{\epsilon N}} \quad (\text{A.4})$$

onde ϵ é a probabilidade que a estimativa não assegura.

Pela expressão (A.4) vemos que a estimativa é da ordem de $N^{-1/2}$, isto é, o erro δ envolvido no valor dado pelo Método de Monte Carlo é dado por

$$\delta \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (\text{A.5})$$

Um ponto importante na precisão do Método de Monte Carlo é o limite de sua aplicabilidade.

A partir da equação (A.5) podemos ver que o erro δ na solução aproximada do problema pelo Método de Monte Carlo pode ser reduzido aumentando o número de ensaios N .

Suponhamos que seja necessário simular um processo para que cada i -ésima prova de N provas independentes produza uma quantidade ξ_i . Suponhamos que esta quantidade tem uma esperança matemática $M\xi_i = a$ e uma variância $D\xi_i = \sigma^2$. O significado aritmético

$$\bar{\xi} = \frac{L}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N \xi_i}{N} \quad (\text{A.6})$$

é então um valor aproximado da esperança matemática a procura

da. O desvio σ_0 de a com $\bar{\xi}$ é na realidade o erro do Método de Monte Carlo.

Consideremos um caso usual em que $\bar{\xi}$ é distribuída aproximadamente de acordo com a lei de Gauss.

Quando o erro é conhecido com probabilidade $\alpha = 0,997$ temos $r_\alpha = 3\sigma_0$ onde σ_0 é o desvio padrão de $\bar{\xi}$.

A variância σ_0^2 da média $\bar{\xi}$ está relacionada com a variância σ^2 de ξ_i pela fórmula

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (\text{A.7})$$

e portanto o erro do Método de Monte Carlo pode ser estimado por

$$\delta = \left| \bar{\xi} - a \right| \leq \frac{3\sigma}{\sqrt{N}} \quad (\text{A.8})$$

o que mostra que a precisão do Método de Monte Carlo depende somente do número de provas independentes e da variância.

A estimativa de um erro relativo na determinação de p com a ajuda da frequência L/N , pode ser dada partindo de:

$$\delta = \left| \frac{L}{N} - p \right| \leq 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \quad (\text{A.9})$$

por

$$\frac{\delta}{p} \leq 3 \sqrt{\frac{1-p}{pN}} \quad (\text{A.10})$$

Então o número requisitado de provas pode ser determinado em termos de erro relativo admissível d da fórmula

$$N \approx \frac{9(1-p)}{pd^2} \quad (\text{A.11})$$

que mostra que o número de provas é inversamente proporcional à probabilidade requisitada p . Isto significa que as probabilidades bem pequenas não podem ser determinadas pelo Método de Monte Carlo.

Na prática, temos que examinar o problema com cuidado quando a probabilidade p é pequena.

Suponhamos que queremos uma dada precisão δ nos cálculos. Seja v o número médio de operações no computador, por prova. O número total de operações F será então

$$F \approx Nv \approx \frac{9v\sigma^2}{\delta^2} \quad (\text{A.12})$$

e o tempo total para a solução

$$T \approx Nv\tau = \frac{9v\sigma^2\tau}{\delta^2} \quad (\text{A.13})$$

onde τ é o tempo de computação por operação.

Vemos então que, o tempo T deve ser aumentado por duas ordens de grandeza se a precisão é melhorada por uma ordem de grandeza.

É difícil estimar a variância σ^2 "a priori", isto é, antes da solução do problema.

Quando a grandeza de N dada pela eq. (A.11) ou, mais precisamente, o tempo $T = Nv\tau$ para a solução do problema é inadmissivelmente grande, é necessário examinar o problema para transformá-lo em outro com valor razoável de probabilidade p .

APÊNDICE B

DEFINIÇÃO DO TERMO REPRODUTIBILIDADE

SEGUNDO PADRÕES LINGÜÍSTICOS

RE = prefixo que indica a repetição de um fato;

PRODUT = radical (semantema);

IBIL = infixo, variante do sufixo ível;

I = vogal de ligação;

DADE = sufixo, formador de substantivo abstrato, indica qualidade, propriedade;

∅ = ausência de plural^(*)

(*) Obs.: morfema dá a classe da palavra (singular, plural, masculino, feminino, verbo). É a parte variável da palavra.

APÊNDICE C

APRESENTAÇÃO DA SEÇÃO DE CHOQUE DE FORMAÇÃO

A seção de choque de formação $\sigma(Z,A)$ ou rendimento de produtos de espalação, fissão e fragmentação, frequentemente chamado de rendimento independente ou primário, são correlacionados de vários modos de acordo com a conveniência para o estudo.

1) Rendimentos isobáricos ou rendimentos de massa $\sigma(A) = \sum \sigma(Z,A)$ correlacionados com o número de massa, isto é, $\sigma(A)$ versus A correspondente.

2) Rendimentos fracionários $f = \sigma(Z,A)/\sigma(A)$, isto é, as frações dos rendimentos isobáricos correspondentes são relacionadas de 3 maneiras:

- a) f versus Z mantendo A constante, temos uma dispersão de carga. O valor de Z correspondente ao máximo da dispersão é a carga mais provável Z_p . A variação de Z_p com A dá a distribuição de carga onde o valor de N correspondente a Z_p é $N_p (= N - Z_p)$.
- b) $\sigma(Z,A)$ versus A para Z constante temos a distribuição isotópica.
- c) distribuição N/Z ou F.F.G.Y.⁽¹³³⁾, $\sigma(Z,A)$ versus N/Z do produto (Z,A) . A razão N/Z correspondente ao máximo desta curva é $(N/Z)_m$.

APÊNDICE D

CONSIDERAÇÕES SOBRE A SUBSTITUIÇÃO DA EQ. (2.2.59) PELA EQ. (2.2.60)

A função de amortecimento usada por Gupta et al. é:

$$f\left(\frac{Z}{N} y_i\right) = \alpha y_i \exp\left(-\frac{D}{\alpha y_i}\right) \quad (D.1)$$

onde $\alpha = \frac{Z}{N}$ e D é o parâmetro não negativo.

Substituímos por:

$$g\left(\frac{Z}{N} y_i\right) = \alpha y_i C' \quad (D.2)$$

onde $C' = 1-C$, e C um parâmetro não negativo.

A determinação do parâmetro D da eq. (D.1) pode ser feita pela equação de regressão de x sobre y :

$$x_i = \alpha y_i - \alpha y_i \exp\left(-\frac{D}{\alpha y_i}\right) \quad (D.3)$$

$$\therefore \frac{x_i}{\alpha y_i} = 1 - \exp\left(-\frac{D}{\alpha y_i}\right) \quad (D.4)$$

Como a função exponencial é da forma:

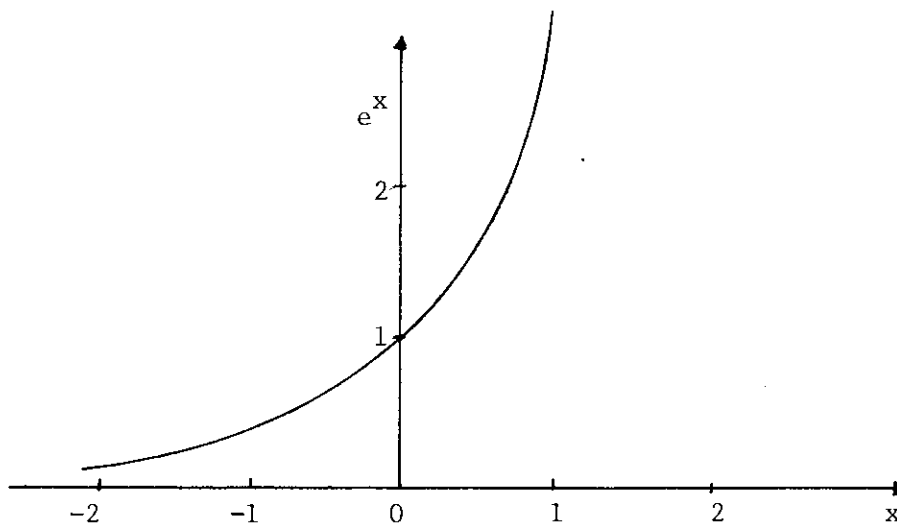


Fig. D.1 - Forma genérica da função exponencial.

temos sempre os valores de $1 - e^{-x} < 1$. Sendo a eq. (D.4) do mesmo tipo acima, todos os valores de $x_i / \alpha y_i$ são menores do que 1.

Na prática o valor de D pode não ser determinável^(*) pela eq. (D.4) onde e^x assume valores maiores do que 1. Para contornar estes casos podemos substituir a eq. (D.1) pela (D.2). Temos, então

$$x_i = \alpha y_i - \alpha y_i C' \quad (D.5)$$

$$C = \frac{x_i}{\alpha y_i} \quad (D.6)$$

onde $C = 1 - C'$. Portanto com a eq. (D.6) podemos determinar os valores de C para qualquer combinação de x_i e y_i e que fornece o mesmo valor para as funções (D.1) e (D.2) enquanto $\frac{x}{y\alpha} \leq 1$.

Para observar o andamento da função (D.1) \equiv (D.2), apresentamos o cálculo para ^{51}V produzindo os isótopos^(**) de $A - (x+y)\text{Mg}$, onde $x_i = 11$, $\alpha = 0,82$ e y_i variável:

(*) por exemplo, no caso de ^{40}Ar proveniente de ^{51}V pela perda de cinco prótons e seis neutrons.

(**) Os isótopos calculados são reais e imaginários; os reais são $y_i = 16,17$ e 18.

TABELA D.1 - Valores de C e D calculados para Mg proveniente do ^{51}V .

y_i	$\frac{Z}{N} y_i$	D	C	$f(\frac{Z}{N} y_i)$
1	0,82	*	13,41	-10,17
2	1,64	*	6,70	-9,34
4	3,28	*	3,37	-7,80
6	4,92	*	2,23	-6,03
8	6,56	*	1,67	-4,39
10	8,20	*	1,34	-2,79
13,42	11,00	$-\infty$	1,00	0
16	13,14	24,04	0,84	2,13
20	16,40	18,21	0,67	5,41
30	24,60	14,71	0,45	13,53
40	32,80	13,63	0,34	21,65
50	41,00	12,90	0,27	30,00
60	49,20	12,22	0,22	38,20
70	57,40	12,10	0,19	46,49
80	65,60	12,04	0,17	54,45

*indeterminável.

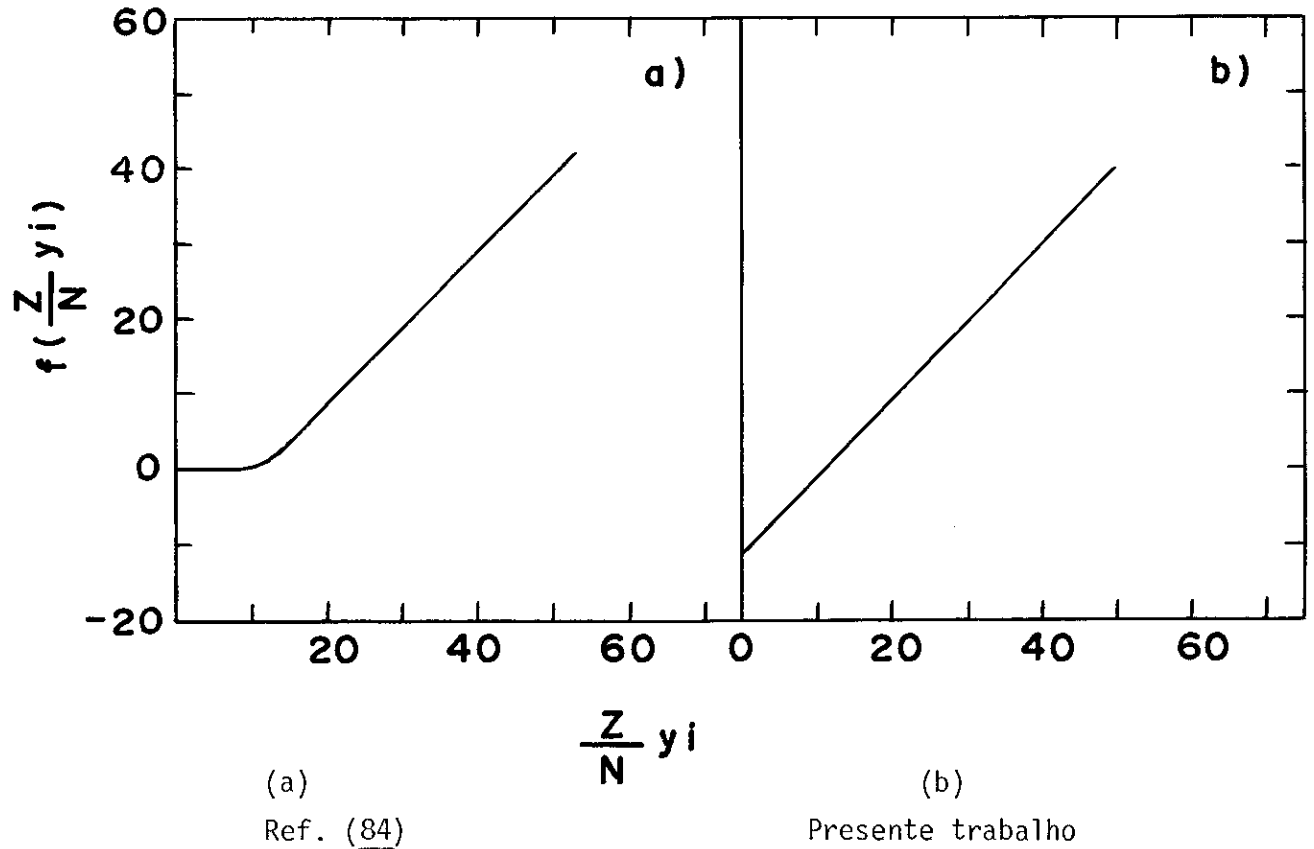
Então, utilizamos a eq. (D.2) no nosso cálculo o que nos permitiu determinar os valores teóricos do parâmetro C para qualquer valor de x_i e y_i .

O exemplo acima (Tabela D.1), nos permitiu calcular os valores de $f(\frac{Z}{N} y_i)$ mesmo para valores de y_i menores que 13,42, que para a eq. (D.1) seria o valor mínimo que y_i poderia assumir na determinação de D (Figura D.2).

Embora os parâmetros C e D sejam determinados pelo

ajuste, o primeiro valor de inicialização do método iterativo deve ser fornecido, e portanto, é conveniente que a fórmula utilizada seja mais geral, tal como a eq. (D.2)

Figura D.2 - Gráfico representativo da função $f(\frac{Z}{N} y_i)$ versus $\frac{Z}{N} y_i$.



APÊNDICE E

Seja a distribuição discreta de probabilidade

$$P_A(n) = \frac{A!}{n!(A-n)!} p^n (1-p)^{A-n}, \quad n = 0, 1, \dots \leq A \quad (E.1)$$

e a distribuição contínua

$$\phi(\omega) d\omega \approx \frac{1}{S_\omega \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2S_\omega^2}} d\omega \quad (E.2)$$

onde $S_\omega^2 = Ap(1-p)$; $\omega = n - Ap$.

Estas distribuições aparecem no contexto do parágrafo 2.1, isto é, A representa o número de nucleons de um núcleo alvo e p a probabilidade média de emissão de um nucleon quando um fóton de energia $E_\gamma \geq 0,1$ GeV interage com o alvo (por enquanto não estamos fazendo distinção entre prótons e neutrons no núcleo). Para ilustrar as diferenças entre os parâmetros da distribuição discreta (E.1) e contínua (E.2) vamos mostrar a Tabela E.1 para os três núcleos alvos.

Na Figura E.1 representamos as distribuições para os dados da Tabela E.1. Os pontos correspondem aos valores da distribuição discreta, $P(n)$ e as curvas representam as correspondentes distribuições contínuas, $\phi(n)$ dadas por:

$${}^{27}_{Al} : \quad \phi(n) = 0,215 e^{-0,1452(n-4,05)^2} \quad (E.3)$$

$${}^{75}\text{As} \quad : \quad \phi(n) = 0,137 e^{-0,0589(n-9,75)^2} \quad (\text{E.4})$$

$${}^{127}\text{I} \quad : \quad \phi(n) = 0,113 e^{-0,0402(n-13,97)^2} \quad (\text{E.5})$$

TABELA E.1 - Comparação entre os parâmetros da distribuição discreta (Eq. (E.1)) e contínua (Eq. (E.2)) para três núcleos alvos.

Núcleo Alvo	A	p ^(*)	S _ω	Valor mais Provável			
				Discreta		Contínua	
				n	P(n)	n	φ(n)
Al	27	0,15	1,855	4	0,211	4,05	0,215
As	75	0,13	2,912	9	0,136	9,75	0,137
I	127	0,11	3,526	14	0,112	13,97	0,113

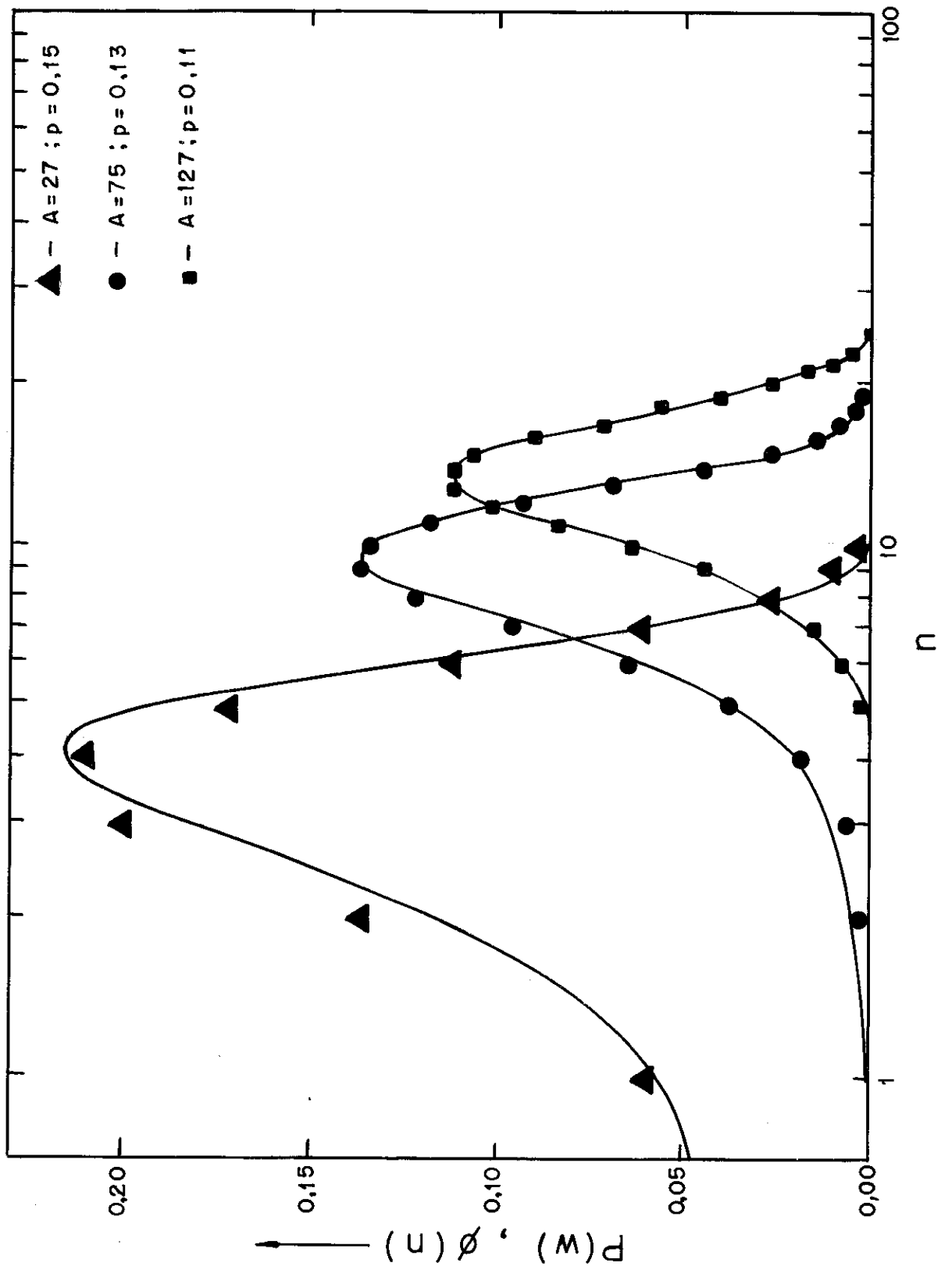


Fig. E.1 - Representação grãfica dos dados da Tab. E.1.

APÊNDICE F

DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS INICIAIS

$$B_0, C_0, D_0 \text{ e } k_0$$

B₀ - O parâmetro B pode ser obtido pela fórmula (2.2.61) $K = (\sigma_{q1}/\sigma_{q2})^{1/\Delta Z}$. Na prática, nem sempre isto é possível por não dispor destes dados nessas condições tão favoráveis. Então optamos pela fórmula da ref. (133) que é uma fórmula empírica resultante da análise de 17 núcleos alvos e que constitui um dos parâmetros da fórmula de 5 parâmetros desenvolvida por Terranova e colaboradores. A fórmula tem o seguinte aspecto:

$$B = 1,66A^{-0,058} \quad (\text{F.1})$$

onde A é o número de massa do núcleo alvo.

C₀ - Foi aplicado o método dos mínimos quadrados à função de regressão de x em y (eq. (2.1.51) do Capítulo 2)

$$x = C \frac{Z}{A-Z} y \quad (\text{F.2})$$

e calculamos

$$C_0 = \frac{A-Z}{Z} \frac{\sum_{i=1}^m x_i y_i}{\sum_{i=1}^m y_i^2} \quad (\text{F.3})$$

D₀ e k₀ - Uma vez obtidos os valores de B₀ e C₀ calculamos

D₀ e k₀ do seguinte modo:

Colocando, no gráfico mono-log, as seções de choque experimentais σ_i multiplicadas pelo fator e^{B(x_i-1)} no eixo logarítmico dos y e os ω_i² no eixo linear dos x, onde ω_i = x_i - C₀ $\frac{Z}{A-Z}$ y_i, passamos uma reta, ajustada pelo método de mínimos quadrados através destes pontos e impondo a condição de que esta reta deve necessariamente cortar ambos os eixos no primeiro quadrante, o ponto de interseção da reta com o eixo dos y corresponde a σ_M que é usada para obter D₀ que é igual ao logarítmo neperiano de σ_M.

A equação da reta é y_i = ax_i + b onde as constantes a e b foram calculadas pelas equações:

$$a = \frac{m \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \tag{F.4}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

onde \sum são os somatórios de i de 1 a m.

O parâmetro k₀ foi calculado pela seguinte expressão:

$$k_0 = \frac{1}{\omega_g^2} \ln \frac{\sigma_M}{\sigma_g}$$

onde ω_g² é um valor genérico de ω_i² distribuidos no eixo dos x correspondente a um valor de σ_g escolhido entre os σ_i distribuidos no eixo dos y.

"Refinamento" dos valores iniciais

Os valores "aproximados" D_0 , C_0 , B_0 e k_0 , que devem ser fornecidos para inicializar o processo de iteração no cálculo dos parâmetros "exatos", devem ser os mais próximos possíveis destes valores, pois as diferenças ΔD , ΔB , Δk e ΔC devem resultar suficientemente pequenas para que a aproximação usada no desenvolvimento em série da função $v(x,y;D,B,k,C)^{(*)}$ seja aceitável.

Um modo de "refinar" os valores iniciais é considerar os valores atribuídos aos parâmetros de um dos eixos como uma constante e variar os parâmetros do outro eixo por meio de sucessivas iterações, empregando um processo idêntico ao descrito no Capítulo 2 para a obtenção dos valores exatos, diferindo somente no número de parâmetros variáveis, até atingir um valor conveniente, segundo um critério estabelecido^(**). Depois, dar um pequeno acréscimo ou decréscimo a esses valores "fixos" e fixar novamente e variar os parâmetros do outro eixo e repetir a operação sucessivamente. Obtêm-se assim os valores iniciais mais próximos dos valores "exatos".

(*) Equação (2.3.67) da Seção 3 do Capítulo 2.

(**) O critério utilizado para a interrupção das iterações foi até a menor reprodutibilidade relativa ser alcançada.

TABELA G.1 (continuação)

m \ r															
	0.80	0.82	0.84	0.86	0.88	0.90	0.92	0.94	0.96	0.98					
5						0.06-0.99	0.17-0.99	0.31-0.99	0.49-0.99	0.71-0.99					
6			0.07-0.98	0.14-0.99	0.22-0.99	0.31-0.99	0.41-0.99	0.53-0.99	0.66-0.99	0.82-0.99					
7	0.10-0.97	0.16-0.97	0.22-0.98	0.29-0.98	0.36-0.98	0.44-0.99	0.53-0.99	0.63-0.99	0.74-0.99	0.86-0.99					
8	0.20-0.96	0.26-0.97	0.32-0.97	0.38-0.98	0.45-0.98	0.52-0.98	0.60-0.99	0.69-0.99	0.78-0.99	0.89-0.99					
9	0.27-0.96	0.33-0.96	0.38-0.97	0.44-0.97	0.51-0.98	0.58-0.98	0.65-0.98	0.73-0.99	0.81-0.99	0.90-0.99					
10	0.33-0.95	0.38-0.96	0.43-0.96	0.49-0.97	0.55-0.97	0.61-0.98	0.68-0.98	0.75-0.99	0.83-0.99	0.91-0.99					
11	0.37-0.95	0.42-0.95	0.47-0.96	0.53-0.96	0.58-0.97	0.64-0.97	0.71-0.98	0.77-0.99	0.85-0.99	0.92-0.99					
12	0.41-0.94	0.45-0.95	0.50-0.96	0.56-0.96	0.61-0.97	0.67-0.97	0.73-0.98	0.79-0.98	0.86-0.99	0.93-0.99					
13	0.44-0.94	0.48-0.95	0.53-0.95	0.58-0.96	0.63-0.96	0.69-0.97	0.74-0.98	0.80-0.98	0.87-0.99	0.93-0.99					
14	0.46-0.94	0.50-0.94	0.55-0.95	0.60-0.96	0.65-0.96	0.70-0.97	0.76-0.98	0.81-0.98	0.87-0.99	0.93-0.99					
15	0.48-0.93	0.52-0.94	0.57-0.95	0.61-0.95	0.66-0.96	0.71-0.97	0.77-0.97	0.82-0.98	0.88-0.99	0.94-0.99					
16	0.50-0.93	0.54-0.94	0.58-0.94	0.63-0.95	0.68-0.96	0.72-0.97	0.78-0.97	0.83-0.98	0.88-0.99	0.94-0.99					
17	0.51-0.93	0.55-0.95	0.60-0.94	0.64-0.95	0.69-0.96	0.73-0.96	0.78-0.97	0.83-0.98	0.89-0.99	0.94-0.99					
18	0.52-0.92	0.57-0.93	0.61-0.94	0.65-0.95	0.70-0.96	0.74-0.96	0.79-0.97	0.84-0.98	0.89-0.99	0.94-0.99					
19	0.54-0.92	0.58-0.93	0.62-0.94	0.66-0.95	0.70-0.95	0.75-0.96	0.80-0.97	0.84-0.98	0.89-0.99	0.95-0.99					
20	0.55-0.92	0.59-0.93	0.63-0.94	0.67-0.94	0.71-0.95	0.76-0.96	0.80-0.97	0.85-0.98	0.90-0.98	0.95-0.99					
21	0.56-0.92	0.60-0.93	0.64-0.93	0.68-0.94	0.72-0.95	0.76-0.96	0.81-0.97	0.85-0.98	0.90-0.98	0.95-0.99					
22	0.56-0.92	0.60-0.92	0.64-0.93	0.68-0.94	0.72-0.95	0.77-0.96	0.81-0.97	0.86-0.98	0.90-0.98	0.95-0.99					
23	0.57-0.91	0.61-0.92	0.65-0.93	0.69-0.94	0.73-0.95	0.77-0.96	0.82-0.97	0.86-0.98	0.90-0.98	0.95-0.99					
24	0.58-0.91	0.62-0.92	0.66-0.93	0.69-0.94	0.73-0.95	0.78-0.96	0.82-0.97	0.86-0.97	0.91-0.98	0.95-0.99					
25	0.59-0.91	0.62-0.92	0.66-0.93	0.70-0.94	0.74-0.95	0.78-0.96	0.82-0.97	0.86-0.97	0.91-0.98	0.95-0.99					
26	0.59-0.91	0.63-0.92	0.67-0.93	0.70-0.94	0.74-0.95	0.78-0.96	0.82-0.96	0.87-0.97	0.91-0.98	0.95-0.99					
27	0.60-0.91	0.63-0.92	0.67-0.93	0.71-0.94	0.75-0.95	0.79-0.95	0.83-0.96	0.87-0.97	0.91-0.98	0.96-0.99					
28	0.60-0.90	0.64-0.91	0.68-0.92	0.71-0.93	0.75-0.94	0.79-0.95	0.83-0.96	0.87-0.97	0.91-0.98	0.96-0.99					
29	0.61-0.90	0.64-0.91	0.68-0.92	0.72-0.93	0.75-0.94	0.79-0.95	0.83-0.96	0.87-0.97	0.91-0.98	0.96-0.99					
30	0.61-0.90	0.65-0.91	0.68-0.92	0.72-0.93	0.76-0.94	0.80-0.95	0.83-0.96	0.87-0.97	0.92-0.98	0.96-0.99					

(*) ρ - parâmetro que melhor indica o grau de dependência entre duas variáveis normais, x e y , não independentemente nor -
malmente distribuídas.

r - coeficiente de correlação = melhor estimativa de ρ

m - número de pares (x, y)

$$\text{intervalo de } \rho : \text{tgh} \left[\frac{r_n \sqrt{\frac{1+r}{1-r}} - \frac{2}{\sqrt{m-3}}}{\sqrt{m-3}} \right] \leq \rho \leq \text{tgh} \left[\frac{r_n \sqrt{\frac{1+r}{1-r}} + \frac{2}{\sqrt{m-3}}}{\sqrt{m-3}} \right].$$

APÊNDICE H

Sejam x e y duas variáveis aleatórias que possuam isoladamente distribuições de probabilidades normais, mas não são independentemente normalmente distribuídas.

Suponhamos que a equação de regressão de x em y seja da forma

$$x = ay \quad \text{onde} \quad a \neq 0 \quad (\text{H.1})$$

Dado um conjunto de valores (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, m$) podemos obter o coeficiente a , pelo ajuste pelo método de mínimos quadrados

$$a = \frac{\sum_{i=1}^m x_i y_i}{\sum_{i=1}^m y_i^2} \quad (\text{H.2})$$

Suponhamos também que a equação de regressão de y em x seja da forma

$$y = bx \quad (\text{H.3})$$

teríamos analogamente que

$$b = \frac{\sum_{i=1}^m x_i y_i}{\sum_{i=1}^m x_i^2} \quad (\text{H.4})$$

Em geral, $b \neq \frac{1}{a}$.

A condição $b = \frac{1}{a}$ só ocorre quando há perfeita correlação entre x e y .

O coeficiente de correlação, como definido em Matemática Estatística, é dado por

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i^c - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{H.5})$$

onde x_i^c é o valor calculado a partir da equação de regressão de x e y e \bar{x} é o valor médio de x , isto é,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m} \quad (\text{H.6})$$

Tendo em vista a eq. (H.1) e desenvolvendo os somatórios^(*), a eq. (H.5) fica:

$$r^2 \sum x_i^2 - 2r\bar{x} \sum x + m r^2 \bar{x}^2 - a^2 \sum y_i^2 + 2a\bar{x} \sum y_i - m\bar{x}^2 = 0 \quad (\text{H.7})$$

Por (H.2), (H.4) e (H.6) podemos obter

$$m(r^2 - ab) \sum x_i y_i + b \left[2a \sum x_i \sum y_i - (r^2 + 1) (\sum x_i)^2 \right] = 0 \quad (\text{H.8})$$

Como $m \neq 0$, $\sum x_i y_i \neq 0$, $b \neq 0$ e $\sum x_i \neq 0$, a eq. (H.8) só será satisfeita se tivermos simultaneamente

$$\begin{cases} r^2 = ab \\ 2a \sum y_i = (r^2 + 1) \sum x_i \end{cases} \quad (\text{H.9})$$

(*) Para facilitar a escrita, vamos omitir o índice nos somatórios.

e pelas eqs. (H.2), (H.4) e (H.6) temos

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2 \sum y_i^2}} \quad (\text{H.10})$$

e

$$\bar{x} = \frac{2a}{r^2 + 1} \bar{y} \quad (\text{H.11})$$

Se $a = C \frac{Z}{A-Z}$, a eq. (H.11) fica

$$\bar{x} = \frac{2C}{r^2 + 1} \frac{Z}{A-Z} \bar{y} \quad (\text{H.12})$$

As eqs. (H.10) e (H.12) são, respectivamente, as eqs. (3.3.9) e (3.3.12) do Capítulo 3 do presente trabalho.

APÊNDICE I

DEDUÇÃO DAS FÓRMULAS QUE APARECEM NO CAPÍTULO 3, SEÇÃO 5

- a) σ_{total} - é a soma de todas as seções de choque de formação dos núclídeos produzidos pela reação de espalação. Da fórmula (2.1.56) temos:

$$\begin{aligned}\sigma(x, y) &= \sigma_M e^{-B(x-1)} e^{-k(x-C\alpha y)^2} \\ &= \sigma_M e^{-B(x-1)} e^{-\frac{(y-x/C\alpha)^2}{1/[k(C\alpha)^2]}}\end{aligned}\quad (I.1)$$

Chamando de

$$2a^2 = \frac{1}{k(C\alpha)^2} \quad (I.2)$$

e

$$\sigma_m(x) = \sigma_M e^{-B(x-1)}$$

temos

$$\sigma(x, y) = \sigma_m(x) \frac{1}{C\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \left[\frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2a^2}} \right] \quad (I.3)$$

onde os termos entre colchetes representam uma gaussiana em que $\bar{y}(x) = x/C\alpha$ e a é o desvio padrão.

A seção de choque total pode ser calculada pela equação:

$$\sigma_{\text{total}} = \sum_{x,y} \sigma_m(x) \frac{1}{C\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2a^2}} \quad (\text{I.4})$$

O termo entre colchetes da eq. (I.3) é uma gaussiana; num cálculo aproximado substituímos o somatório em y pela integral de $-\infty$ a $+\infty$, cujo valor é 1. Fazendo, então, o somatório em x, temos:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{total}} &= \sum_x \frac{1}{C\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-B(x-1)} \sigma_M \\ &= \frac{1}{C\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \sigma_M \sum_x e^{-B(x-1)} \\ &= \frac{1}{C\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \sigma_M \left[1 + e^{-B} + e^{-2B} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{C\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \sigma_M \frac{1}{1-e^{-B}} \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

b) Número médio de prótons emitidos na espalação:

$$\bar{x} = \frac{\sum x \sigma(x,y)}{\sum \sigma(x,y)} \quad (\text{I.6})$$

Substituindo $\sigma(x,y)$ pela eq. (2.1.56) temos:

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{C\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \sigma_M \sum_x x e^{-B(x-1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2a^2}} dy}{\frac{1}{C\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \sigma_M \sum_x e^{-B(x-1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2a^2}} dy} \quad (I.7)$$

Cancelando os termos iguais temos:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum_x x e^{-B(x-1)}}{\sum_x e^{-B(x-1)}} = \frac{e^B \sum_x x e^{-Bx}}{e^B \sum_x e^{-Bx}} = \\ &= \frac{\sum_x \frac{d}{dB} e^{-Bx}}{\sum_x e^{-Bx}} = - \frac{\frac{d}{dB} \sum_x e^{-Bx}}{\sum_x e^{-Bx}} = - \frac{d}{dB} \ell n \sum_x e^{-Bx} = \\ &= - \frac{d}{dB} \ell n \left[e^{-B} \sum_x e^{-Bx+B} \right] = - \frac{d}{dB} \ell n \left[e^{-B} \frac{1}{1-e^{-B}} \right] \\ &= - \frac{d}{dB} \ell n \left(\frac{1}{e^B-1} \right) = \frac{d}{dB} \ell n (e^B-1) = \frac{e^B}{e^B-1} = \\ &= \frac{1}{1-e^{-B}} \end{aligned} \quad (I.8)$$

c) Número médio de neutrons emitidos

$$\bar{y} = \frac{\sum_y y \sigma(x,y)}{\sum_y \sigma(x,y)} = \frac{\sum_y y e^{-BC\alpha y}}{\sum_y e^{-BC\alpha y}}$$

Seja $BC\alpha = a$, então

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\sum_y y e^{-ay}}{\sum_y e^{-ay}} = \frac{e^{-a} + 2e^{-2a} + 3e^{-3a} + \dots}{e^{-a} + e^{-2a} + e^{-3a} + \dots} = \\ &= \frac{1 + 2e^{-a} + 3e^{-2a} + \dots}{1 + e^{-a} + e^{-2a} + \dots} = \frac{1}{1 - e^{-BC\alpha}} \end{aligned} \quad (I.9)$$

d) Γ - largura da distribuição (2.1.56) é

$$\Gamma = 2 \frac{1}{C\alpha} \sqrt{\frac{\ln 2}{k}} \quad (I.10)$$

Se considerarmos $2 \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \approx 1$ temos

$$\Gamma \approx \frac{1}{C\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \quad (I.11)$$

BIBLIOGRAFIA

- (1) - Chadwick, J. and Goldhaber, M., "The Nuclear Photoeffect: Disintegration of Deuteron by γ Rays", Nature 134(1934) 237-238.
- (2) - de Carvalho, H.G., Foshina, M., Pinheiro Filho, J.D., di Napoli, V., Martins, J.B., Salvetti, F., Tavares, O.A.P. and Terranova, M.L., "Analysis of Intermediate Energy (γ, n) Reactions in Complex Nuclei", Rev. Bras. Fis. 8(1978) 51-87.
- (3) - di Napoli, V., Terranova, M.L., de Carvalho, H.G. and Martins, J.B., "The (γ, n) Reaction in ^{12}C and ^{14}N and $(\gamma, 2n)$ Reaction in ^9Be at Energies Between 0.3 GeV and 1 GeV", Gazz. Chim. Ital., 104 (1974) 463-470.
- (4) - di Napoli, V., Margadonna, D., Salvetti, F., de Carvalho, H.G. and Martins, J.B., "Gamma-Neutron Reactions in Rhodium at Energies Between 0.4 GeV and 0.9 GeV", Lett. Nuovo Cimento, 1 (1969) 308-310.
- (5) - di Napoli, V., Dobici, F., Salvetti, F. and de Carvalho, H.G., "Photonuclear Reactions Above the Mesonic Threshold. III", Lett. Nuovo Cimento, 48 (1967) 1-12.
- (6) - di Napoli, V., Lacerenza, A.M., Margadonna, D., Salvetti, F., de Carvalho, H.G. and Martins, J.B., "Some Yield Measurements of (γ, n) and $(\gamma, 2n)$ Processes in Gold at Energies Between 0.3 GeV and 1 GeV", Lett. Nuovo Cimento, 2 (1971) 65-67.
- (7) - de Carvalho, H.G. and Tesch, K., " (γ, n) Reactions in the Energy Range 1.0-5.5 GeV", Nucl. Phys. A126 (1969) 505-512.
- (8) - Martins, J.B., "Reações (γ, n) em Núcleos no Intervalo de $12 < A < 238$, na Região de Energias Intermediárias (300 MeV - 1000 MeV)", Tese de Doutorado, CBPF (1974).

- (9) - Martins, J.B., de Almeida, E.S., di Napoli, V., Foshina, M., Tavares, O.A.P. and Terranova, M.L., "Photodisintegration of Light and Medium-Weight Nuclei at Intermediate Energies", J. Inorg. Nucl. Chem. 43 (1981) 1115-1127.
- (10) - Pinheiro Filho, J.D., "Reações $(\gamma, 2n)$ em Núcleos Complexos a Energias Intermediárias, Tese de Mestrado - CBPF (1976).
- (11) - Ferreira, M.C. da S., "Estimativa da Probabilidade Média $\phi(\gamma, n)$ de Núcleos Complexos na Região do Quase-Dêuteron", Tese de Mestrado, CBPF (1977).
- (12) - Aquino, A.M., "Reações (γ, p) em Energias Intermediárias em Núcleos Complexos", Tese de Mestrado - CBPF (1979).
- (13) - de Almeida, E.A., Foshina, M., di Napoli, V. and Terranova, M.L., "Photodisintegration of Light and Medium-Weight Nuclei at Intermediate Energies - VI", J. Inorg. Nucl. Chem. 43 (1981) 2589-2592.
- (14) - de Carvalho, H.G., Martins, J.B., Tavares, O.A.P., Nazareth, R.A.M.S., and di Napoli, V., "Some Remarks on the Transparency of Complex Nuclei to Photoproduced Charged Pions at Intermediate Energies", Lett. Nuovo Cimento, 4 (1972) 365-368.
- (15) - de Carvalho, H.G., Martins, J.B., Tavares, O.A.P., Nazareth, R.A.M.S. and di Napoli, V., "Transparencies of Complex Nuclei to Photoproduced Pions", Lett. Nuovo Cim., 2 (1971) 1139-1145.
- (16) - de Carvalho, H.G., Celano, A., Cortini, G., Rinzivillo, R. and Ghigo, G., "The Photofission of Bi, Th and U Between 300 and 1000 MeV", Il Nuovo Cimento (Série X) 19 (1961) 187-189.
- (17) - Tavares, O.A.P., "Seções de Choque de Fotofissão do Urânio, Tório e Bismuto em Altas Energies", Tese de Mestrado, CBPF (1973).
- (18) - di Napoli, V., Salvetti, F., Terranova, M.L., de Carvalho, H.G. and Martins, J.B., "Photon-Induced Fragmentation in ^{27}Al and ^{32}S by 1-GeV Bremsstrahlung", Phys. Rev. C8, (1973) 206-209.

- (19) - di Napoli, V., Salvetti, F., Terranova, M.L., de Carvalho, H.G., Martins, J.B. and Tavares, O.A.P., "Photodisintegration of Light and Medium-Weight at Intermediate Energies - III", *J.inorg.nucl.Chem.*, 40 (1978) 175-182.
- (20) - di Napoli, V. and Terranova, M.L., "The ($\gamma, 2p3n$) Reaction in Light Nuclei at Intermediate Energy", *J.inorg. nucl. Chem.*, 36 (1974) 3633-3637.
- (21) - di Napoli, V., Rosa, G., Salvetti, F., Terranova, M.L., de Carvalho, H.G., Martins, J.B. and Tavares, O.A.P., "Photodisintegration of Light and Medium-Weight Nuclei at Intermediate Energies", *J.inorg.nucl.Chem.*, 37 (1975) 1101-1105.
- (22) - di Napoli, V., Lacerenza, A.M., Margadonna, D. and Terenzi, S.M., "Some Photon-Induced Spallation Reactions in ^{209}Bi by 1 GeV Bremsstrahlung", *Radiochem.Radioanal.Letters*, 11 (1972) 99-104.
- (23) - di Napoli, V., Margadonna, D., Salvetti, F., de Carvalho, H.G. and Martins, J.B., "Monitor Reactions for High Energy Bremsstrahlung Beams", *Nucl.Inst.Meth.* 93 (1971) 77-81.
- (24) - Rudstam, G., "Spallation of Medium Weight Elements", Thesis, University of Uppsalla (1956).
- (25) - Serber, R., "Nuclear Reactions at High Energies", *Phys. Rev.* 72 (1974) 1114.
- (26) - Bernas, R., Gradsztajn, E., Reeves, H. and Schatzman, E. "On the Nucleosynthesis of Lithium, Beryllium and Boron", *Ann.Phys.*, 44 (1967) 426-478.
- (27) - Goldberger, M.L., "The Interaction of High-Energy Neutron and Heavy Nuclei", *Phys.Rev.* 74 (1948) 1269-77.
- (28) - Bernardini, G., Booth, E.T. and Lindenbaum, S.J., "The Interactions of High Energy Nucleons with Nuclei. II", *Phys. Rev.* 88 (1952) 1017.
- (29) - Morrisson, G.C., Muirhead, H. and Rosser, W.G.V., "The Nuclear Disintegrations Produced by High Energy Protons", *Phil.Mag.* 44 (1953) 1326.

- (30) - Mc Manus, H., Sharp, W.T. and Gellman, H. "Nuclear Interactions of High-Energy Nucleons", Phys. Rev. 93 (1954) 924A.
- (31) - Meadow, J.W., "(p, a) and (p, ab) Reactions at 100 MeV" , Phys. Rev. 98 (1955) 744-48.
- (32) - Combe, J., "Étude d'Interaction de Haute Énergie Produites dans l'Emulsion Photographique", Nuovo Cimento 3, (1956) S 182.
- (33) - Ivanova, N.S. and Pianov, I.I., J. Exptl. Theoret. Phys. U.S.S.R. 31 (1956) 416; [translation: Soviet Phys. JETP 4 (1957) 367].
- (34) - Metropolis, N., Bivins, R., Storns, M., Turkevich, A. and Friedlander, G., "Monte Carlo Calculations on Intranuclear Cascades. I. Low-Energy Studies", Phys. Rev. 110 (1958) 185-202.
- (35) - Bertini, H.W., "Low-Energy Intranuclear Cascade Calculation", Phys. Rev. 131 (1963) 1804-1821.
- (36) - Chew, G. and Goldberger, M.L., "The Scattering of Elementary Particles by Complex Nuclei", Phys. Rev. 87 (1952) 778.
- (37) - Le Couteur, K.J., "The Evaporation Theory of Nuclear Disintegrations", Proc. Phys. Soc. 63A (1950) 259-282.
- (38) - Plasil, F., USA Report UCRL-1193 Berkeley (1963).
- (39) - Bethe, H.A., "Nuclear Physics - B. Nuclear Dynamics, Theoretical", Rev. Mod. Phys. 9 (1937) 69.
- (40) - Wiesskopf, V.F., "Statistics and Nuclear Reactions", Phys. Rev. 52 (1937) 295.
- (41) - Wiesskopf, V.F. and Ewing, D.H., "On the Yield of Nuclear Reactions with Heavy Elements", Phys. Rev. 57(1940)472.
- (42) - Blatt, J. and Wiesskopf, V.F., "Theoretical Nuclear Physics", John Willey & Sons Inc., New York (1952).
- (43) - Dostrovsk, I., Rabinovitz, P. and Bivins, R., "Monte Carlo Calculations of High-Energy Nuclear Interactions I. Systematics of Nuclear Evaporation", Phys. Rev. 111(1958)1659.

- (44) - Dostrovsk, I., Fraenkel, Z. and Friedlander, G., "Monte Carlo Calculation of Nuclear Evaporation Processes. III. Applications to Low-Energy Reactions", Phys. Rev. 116, (1959) 683-702.
- (45) - Rudstam, G., "The Evaporation Step in Spallation Reactions", Nucl. Phys. A 126 (1969) 401-427.
- (46) - Ghoshal, N.S., "An Experimental Verification of the Theory of Compound Nucleus", Phys. Rev. 80 (1950) 939.
- (47) - Le Couteur, K.J., "Nuclear Reactions (P.M. Endt and M. Demeur, eds.) North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1959).
- (48) - Paul, E. and Clarke, R.L., "Cross Section Measurements of Reactions Induced by Neutron of 14,5 MeV Energy", Can. J. Phys. 31 (1953) 267.
- (49) - Hauser, W. and Feshbach, H., "The Inelastic Scattering of Neutrons", Phys. Rev. 87 (1952) 366.
- (50) - Thomas, R.G., "Collision Matrices for the Compound Nucleus", Phys. Rev. 97 (1955) 224.
- (51) - Lane, A.M. and Thomas R.G., "R-matrix Theory of Nuclear Reactions", Rev. Mod. Phys. 30 (1958) 257.
- (52) - Baldwin, G.C. and Klaiber, G.S., "Multiple Nuclear Disintegrations Induced by 100-MeV X-Rays", Phys. Rev. 70 (1946) 259-70.
- (53) - Baldwin, G.C. and Klaiber, G.S., "Analysis of High Energy X-Ray Spectra", Phys. Rev. 71 (1947) 554.
- (54) - Brown, G. and Bolsterli, M., "Dipole State in Nuclei", Phys. Rev. Letters 3 (1959) 472.
- (55) - Danos, M. and Greiner, W., "Dynamic Theory of the Nuclear Collective Model", Phys. Rev. 134 (1964) B284.
- (56) - Danos, M. and Greiner, W., "Damping of Giant Resonance in Heavy Nuclei", Phys. Rev. 138 (1965) B 876.
- (57) - Levinger, J.S., "The High Energy Nuclear Photoeffect", Phys. Rev. 84 (1951) 43-51.

- (58) - Gabriel, T.A. and Alsmiller Jr., R.G., "Photonuclear Disintegration at High Energies (< 350 MeV)" Phys. Rev. 182 (1969) 1035-1050.
- (59) - Wolfgang, R., Baker, E.W., Caretto, A.A., Cumming, J.B., Friedlander, G. and Hudis, J., "Radiochemical Studies of the Interactions of Lead with Protons in the Energy Range 0.6 to 3.0 BeV", Phys. Rev. 103 (1956) 394.
- (60) - Caretto, A.A., Hudis, J., and Friedlander, G., "Production of F^{18} and Na^{24} in Irradiations of Various Targets with Protons Between 1 and 6 BeV", Phys. Rev. 110 (1958) 1130-1133.
- (61) - Crespo, V.P., Alexander, J.M. and Hyde, E.K. "Ejection of Large Fragments in High-Energy Nuclear Reactions", Phys. Rev. 131 (1963) 1765.
- (62) - Poskanzer, A.M., Butler, G.M. and Hyde, E.K., "Fragment Production in the Interaction of 5.5 GeV Proton with Uranium", Phys. Rev. C3 (1971) 882.
- (63) - Hyde, E.K., Butler, G.W. and Poskanzer, A.M., USA - Report UCRL - 19991 (1971).
- (64) - Rudstam, G. and Sorensen, G., "Fission and Spallation Yield in the Iodine Region", J. Inorg. Nucl. Chem. 28 (1966) 771.
- (65) - Templeton, D.H., "Nuclear Reactions Induced by High Energy Particles", An. Rev. of Nucl. Sci. 2 (1953) 93-104.
- (66) - Batzel, R.E., Miller, D.R. and Seaborg, G.T., "The High Energy Spallation Products of Copper", Phys. Rev. 84 (1951) 671-83.
- (67) - Halpern, I., Debs, R.J., Eisinger, J.T., Fairhall, A.W. and Richter, H.G., "Yields of Photonuclear Reactions with 320-MeV X-Rays. II. Interpretation of Results", Phys. Rev. 97 (1955) 1327-1336.
- (68) - Rudstam, G., "Systematics of Spallation Yields", Z. Naturforschung, 21a (1966) 1027-1041.
- (69) - Grover, J.R., UCRL-3932 (1957) University of California, Radiation Laboratory.

- (70) - Audouze, J., Epherre, M. and Reeves, H., "Spallation of Light Nuclei", Nucl. Phys. A97 (1967) 144-163.
- (71) - Shapiro, I.S., "Interactions of High Energy Particles with Nuclei" (Proc. Int. School of Physics Enrico Fermi, Verena 1966) 210 (New York: Academic Press) (1967).
- (72) - Chackett, K.F. and Chackett, G.A., "Spallation Reactions in Isotopically Enriched Targets", Nucl. Phys. A100 (1967) 633-644.
- (73) - Turner, R.E., Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae 29 (1970) Suppl. 429, and unpublished Ph.D. Thesis, Washington University, St. Louis, Missouri.
- (74) - Pate, B.D. and Poskanzer, A.M., "Spallation of Uranium and Thorium Nuclei with BeV-Energy Protons", Phys. Rev. 123 (1961) 647.
- (75) - Silberberg, R. and Tsao, C.H., Bull. Ann. Phys. Soc. 16 (1971) 598, and Naval Research Laboratory Preprints.
- (76) - Silberberg, R. and Tsao, C.H., "Partial Cross-Section in High-Energy Nuclear Reactions and Astrophysical Applications I. Target with $Z \leq 28$ ", The Astroph. Journ. Suppl. Series, n^o 220(I); 25 (1973) 315-333.
- (77) - Schramm, D.N., "High Energy Fission and Spallation Systematics for Trans-Bismuth Nuclei", Phys. Lett. 38B (1972) 363-366.
- (78) - Perfilov, N.A., "Fissionability of Nuclei by High Energy Protons", Soviet Phys. JETP, 14 (1962) 623.
- (79) - Jonsson, G.G. and Lindgren, K., "Compilation and Analysis of Intermediate and High-Energy Photon and Electron Induced Spallation Yields", Physica Scripta 7 (1973) 49.
- (80) - Jonsson, G.G. and Lindgren, K., "A Complementary Study of Photospallation Systematics", Physica Scripta 15 (1977) 308.
- (81) - Kumbartzki, G.J., Kim, U. and Kwan, Ch.K., "Photospallation of Medium-Heavy Elements with Bremsstrahlung of Maximum Energies Between 0.8 and 2.1 GeV", Nucl. Phys. A160 (1971) 237-246.

- (82) - di Napoli, V., Terranova, M.L., Martins, J.B. and Tavares, O.A.P., "A Modified Mass Yield Formula for Intermediate-Energy Photospallation of Medium-Weight Nuclei", *Lett. Nuovo Cimento*, 21 (1978) 83-88.
- (83) - Regnier, S., "Production of Argon Isotopes by Spallation of Sc, Ti, Fe, Co, Ni and Cu", *Phys. Rev.* C20(1979)1517-1527.
- (84) - Gupta, B.K., Das, S. and Biswas, M.M., "Cross Sections for the Production of Nucleides from Medium-Weight Elements by High-Energy Proton Bombardment", *Nucl. Phys.* A155(1970) 49-69.
- (85) - Martins, J.B., di Napoli, V., Tavares, O.A.P., Terranova, M.L. and Portanova, R., "An Attempt to Analyse Spallation Yields with a Four-Parameters Formula", *Gazz. Chim. Ital.* 109 (1979) 131.
- (86) - Harding, J.B., Lattimore, S., and Perkins, D.D., "Nuclear Disintegrations Produced by Cosmic Rays", *Proc. Roy. Soc.* A196 (1949) 325.
- (87) - Tesch, K., "On the Accuracy of the Photon-Difference Method Used in High-Energy Photonuclear Experiments", *Nucl. Inst. Meth.* 95 (1971) 245-252.
- (88) - Schiff, L.I., "Energy-Angle Distribution of Thin Target Bremsstrahlung", *Phys. Rev.* 83 (1951) 252-253.
- (89) - Weiszäcker, C.F.v. Von, "Ausstrahlung bei Stößen sehr schneller Elektronen", *Z. Physik* 88 (1934) 612.
- (90) - Willians, E.J., "Nature of the High Energy Particles Penetrating Radiation and Status of Ionization and Radiation Formulae", *Phys. Rev.* 45 (1934) 729.
- (91) - Bulöw, B., Johnsson, B., Nilsson, M. and Forkman B., "Photospallation of ^{51}V at Intermediate Energies", *Z. Physik* A278 (1976) 89-95.
- (92) - Blomqvist, I., Janeček, P., Jonsson, G.G., Petersson, R., Dinter, H. and Tesch, K., "Electro- and Photoinduced Spallation Reactions on ^{27}Al and ^{51}V at Intermediate Energies", *Z. Physik* A278 (1976) 83-87.

- (93) - Noga, V.J., Ranyuk, Yu.N. and Sorokin, P.V., "Photonuclear Reactions in Al, Si, P, S, Cl, K and Ca with Production of Na^{24} ", Sov. J. Nucl. Phys. 9 (1969) 673-674.
- (94) - Järund, A., Friberg, B. and Forkman, B., "Photoproduction of ^{24}Na from Nuclei with $13 \leq Z \leq 29$ ", Z. Physik 262 (1973) 15-24.
- (95) - Bülov, B., Johnsson, B. and Nilsson, M., "The $(\gamma, 2p)$ Reaction on ^{30}Si and the $(\gamma, 2p)$, $(\gamma, 2pn)$, $(\gamma, 3p)$ and $(\gamma, 3pn)$ Reactions on ^{31}P at Intermediate Energies", Z. Physik A285 (1978) 323-327.
- (96) - Jonsson, G.G. and Persson, B., "High-Energy Photon Induced Spallation Reactions in ^{127}I ", Nucl. Phys. A153, (1970) 32-48.
- (97) - Antuf'ev, Yu.P., Miroshnichenko, I.I., Noga, V.I., and Sorokin, P.V., "Yields of Photonuclear Reactions $\text{C}^{12} \rightarrow \text{C}^{11}$, $\text{Al}^{27} \rightarrow \text{Na}^{24}$, and $\text{Si}^{28} \rightarrow \text{Na}^{24}$ at High Photon Energies", Sov. J. Nucl. Phys. 6 (1968) 312-313.
- (98) - Fulmer, C.B., Toth, K.S., Williams, I.R., Handley, T. H., Dell, G.F., Callis, E.L., Jenkins, T.M. and Wyckoff, J.M., "Photonuclear Reactions in Iron and Aluminum Bombarded with High-Energy Electrons", Phys. Rev. C2 (1970) 1371-78.
- (99) - di Napoli, V., Terranova, M.L. and di Bernardo, P., "84/Yield of Magnesium Isotopes by Intermediate-Energy, Photon-Induced, Spallation in Natural Chlorine", Gazz. Chim. Ital. 106 (1976) 999-1004.
- (100) - Andersson, G., Blomqvist, I., Forkman, B., Jonsson, G. G., Järund, A., Kroon, I., Lindgren, K., Schröder, B. and Tesch, K., "Photon-Induced Nuclear Reactions Above 1 GeV (I) . Experimental", Nucl. Phys. A197 (1972) 44-70.
- (101) - Danagulyan, A.S. and Domõkhina, N.A., "Yield of ^{24}Na from Light and Intermediate Nuclei", Sov. J. Nucl. Phys. 24 (1976) 355.
- (102) - Bulõw, B., Eriksson, M., Jonsson, G.G. and Hagebø, E., "Some $(\gamma, lpxn)$ Reactions in ^{118}Sn at Intermediate Energies", Z. Physik A275 (1975) 261-267.

- (103) - Kumbartzki, G.J., Kim, Ung and Kwan, Ch.K., "Photospallation of Medium-Heavy Elements with Bremsstrahlung of Maximum Energies Between 0.8 and 2.1 GeV". Nucl. Phys. A160 (1971) 237-246.
- (104) - Danagulyan, A.S., Demekhina, N.A. and Vartapetyan, G.A., "Photonuclear Reactions in Medium Weight Nuclei ^{51}V , ^{55}Mn and Cu", Nucl. Phys. A285 (1977) 482-492.
- (105) - Kumbartzki, G. and Kim, U., "High-Energy Photonuclear Reactions in Vanadium and Iron", Nucl. Phys. A176 (1971) 23-32.
- (106) - Wolke, R.L. and Bonner, N.A., "Yields and Excitation Curves for the High-Energy Photospallation of Cobalt" Phys. Rev. 102 (1956) 530-534.
- (107) - Debs, R.J., Einsinger, J.T., Fairhall, A.W., Halpern, I. and Richter, H.G., "Yields of Photonuclear Reactions with 320-MeV X-Rays. I. Experimental Results". Phys. Rev. 97 (1955) 1325.
- (108) - Bachschi, N.M., David, P., Debrus, J., Lübke, F., Mommsen, H., Schoenmackers, R., Jonsson, G.G. and Lindgren, K., "Photonuclear Reactions in ^{45}Sc and $^{\text{nat}}\text{Cu}$ Induced by 2 GeV Bremsstrahlung", Nucl. Phys. A264 (1976) 493-497.
- (109) - Reagan, D., "Photonuclear Yield of N^{17} ", Phys. Rev. 100 (1955) 113.
- (110) - Masaike, A., "Investigation of Nuclear Reactions Induced by High Energy Bremsstrahlung", J. Phys. Soc. Japan 19 (1964) 427-436.
- (111) - di Napoli, V., Lacerenza, A.M., Margadonna, D and Terenzi, S.M., "Some Photon-Induced Spallation Reactions in ^{209}Bi by 1 GeV Bremsstrahlung", Radiochem. Radioan. Letters 11 (1972) 99-104.
- (112) - Butement, F.D.S., Karin, H.M.A., U.U. Myint and Zaman, M. B., "4 GeV Electron Spallation Reactions of Cobalt, Iodine and Tantalum", J. inorg. nucl. Chem. 33 (1971) 2791-2798.
- (113) - Heininger, C.G. and Wllg, E.O., "Spallation of Vanadium with 60-, 100-, 175-, and 240-MeV Protons", Phys. Rev. 101 (1956) 1074.

- (114) - Rudstam, S.G., "Spallation of Vanadium, Manganese and Cobalt with 187 MeV Protons", Phil. Mag. 44(1953)1131.
- (115) - Hussain, L., Katcoff, S., "Interaction of 3- and 29- GeV Protons with Vanadium", Phys.Rev. C7 (1973) 2452.
- (116) - Rayudu, G.V.S., "Formation Cross Sections of Various Radionuclides from Ni, Fe, Si, Mg, O and C for Protons of Energies Between 130 and 400 MeV", Can. J. Chem. 42 (1964) 1149.
- (117) - Rudstam, G., Stevenson, P.C. and Folger, R.L., "Nuclear Reactions of Iron with 340-MeV Protons", Phys. Rev. 87 (1952) 358.
- (118) - Honda, M., Lal, D., "Some Cross Sections for the Production of Radio-Nuclides in the Bombardment of C, N, O and Fe by Medium Energy Protons", Phys.Rev. 118(1960)1618.
- (119) - Rayudu, G.V.S., "Formation Cross Sections of Various Radionuclides from Ni, Fe, Si, Mg, O and C for Protons of Energies Between 0,5 and 2,9 GeV", J. Inorg. Nucl. Chem., 30 (1968) 2311.
- (120) - Honda, M., Lal, D., "Spallation Cross Sections for Long-Lived Radionuclides in Iron and Light Nuclei", Nucl. Phys. 51 (1964) 363.
- (121) - Belmont, E. and Miller, J.M., "Reactions of 370-MeV Protons with Cobalt", Phys.Rev. 95 (1954) 1554-1561.
- (122) - Coleman, G.H. and Tewes, H.A., "Nuclear Reactions of Copper with Various High-Energy Particles", Phys.Rev. 99 (1955) 288.
- (123) - Hudis, J., Dostrovsky, I., Friedlander, G., Grover, J.R., Porile, N.T., Remsberg, L.P., Stoenner, R.W., Tanaka, S., "Energy Dependence of Product Yields in Copper Spallation by Protons Between 3 and 30 GeV", Phys. Rev. 129 (1963) 434.
- (124) - Kaufman, S., "Isobaric Yields in the Reaction of 2.9-BeV Protons with Arsenic-75". Phys.Rev. 126(1962)1189.
- (125) - Sadler, M., Jastrzebski, J., Nadasen, A., Singh, P.P., Rutledge, Jr., L.L., Chen, T., Segel, R.E., "Systematics in

- the Interaction of Intermediate-Energy Protons with Medium-Mass Nuclei", Phys.Rev. Letters 38 (1977) 950.
- (126) - Porile,N.T., "Simple Nuclear Reactions of Ga⁶⁹ and Ga⁷¹ with High-Energy Protons", Phys.Rev.125 (1962) 1379.
- (127) - Fink,R.W., Wiig,W.D., "Reactions of Cesium with 240-MeV Protons", Phys. Rev. 94 (1954) 1357.
- (128) - Nervik,W.E. and Seaborg,G.T., "Tantalum Spallation and Fission Induced by 340-MeV Protons", Phys. Rev. 97 (1955) 1092.
- (129) - Caretto,A.A. and Wügg,E.O., "Spallation of Yttrium by 240-MeV Protons", Phys. Rev. 103 (1956) 236.
- (130) - Foshina,M., Martins,J.B., Tavares,O.A.P. and di Napoli, V., "Systematics of Spallation Yield with a Four-Parameter Formula", a ser publicado.
- (131) - Roos,C.E. and Peterson,V.Z., "Photodissociation of Complex Nuclei at Energy Between the Mesonic Threshold and 1150 MeV", Phys. Rev. 124 (1961) 1610.
- (132) - Metropolis,N., Bivins,R., Storm,M., Miller,J.M. and Turkevich,A., "Monte Carlo Calculations on Intranuclear Cascade.II. High-Energy Studies and Pions Processes",Phys. Rev. 110 (1958) 204-219.
- (133) - Friedlander,G., Friedman,L., Gordon,B. and Yaffe, L. , "Excitation Functions and Nuclear Charge Dispersion in the Fission of Uranium by 0,1- to 6,2-GeV Protons",Phys. Rev. 129 (1963) 1809.
- (134) - Terranova,M.L., de Chiara,P., di Napoli,V., Martins,J. B. and Tavares,O.A.P., "Mass Yield Distribution for the Photospallation of Medium-Weight Elements at Intermediate Energies", Lett. Nuovo Cimento 28 (1980) 44-48.

Livros Consultados

- GNEDENKO,B.V., "The Theory of Probability", MIR publishers Moscow, 1969.

- MATHEWS, J., WALKER, R.L., "Mathematical Methods of Physics", W.A. Benjamin, Inc. Menlo Park, California, 1973.
- EADIE, W.T., DRIJARD, D., ROOS, M., SADOULET, B., "Statistical Methods in Experimental Physics", North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford.
- HOEL, P.G., "Introduction to Mathematical Statistics", New York, John Wiley & Sons, Inc., London. Chapman & Hall, Limited (1954).
- FISHER, R.A., "Statistical Methods for Research Workers", Oliver and Boyd, Edinburgh: Tweedle Court London: 98 Great Russel Street, W.C. 1941.
- MEZBACKER, E., "Quantum Mechanics", John Wiley & Sons.