

Dissertação de Mestrado

Universo Magnético Cíclico

Aline Nogueira Araújo

Orientador: Mário Novello

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Março de 2008

A meu avô Ubirajara.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família. À minha mãe por todo apoio, carinho e cuidados, desde o ventre até hoje, em especial durante minha formação profissional, que apesar de estar distante fisicamente sempre esteve muito presente e foi quase sempre minha maior incentivadora. A meu pai, por todo o comprometimento e estrutura que sempre procurou me oferecer, e que acabou por se render à carreira, e incentivar e vibrar a cada passo dado. Aos meus avós que sempre foram motivo de muita satisfação e fonte de sabedoria. Muito obrigada.

Ao professor Mário Novello, por ajudar-me a despertar e desenvolver o espírito científico, com atenção, zelo, paciência e desprendimento, principalmente no início da nossa convivência. Obrigada também pelas inesperadas surpresas nos pequenos seminários.

Ao professor José Salim, por atender aos questionamentos com toda a atenção possível e enriquecer este trabalho com a sua participação. Ao professor José Helayel, cujo apoio e encorajamento foram determinantes para a continuidade do meu curso de mestrado em épocas adversas.

Aos professores Paulo Zigmantas e Bassalo, por toda a dedicação e apoio quando a escolha da carreira era apenas uma semente. A Simone Fraia, pelos conselhos, direcionamentos e entusiasmo.

A Stella, Kelly e Vanessa pela felicidade que me proporcionam com sua amizade e compreensão. Aos amigos de sala Carlos, Neil e André pela amizade, pelo convívio sempre tão sadio e pelas discussões muito interessantes e produtivas.

E por último, mas não menos importante, a Gabriel, por todo carinho e companheirismo.

Resumo

Trabalhos recentes mostram o importante papel que a eletrodinâmica não-linear pode ter em duas questões cruciais da cosmologia, particularmente nos regimes de curvaturas muito grandes e muito pequenas de sua evolução, que são a fase altamente condensada e o período de aceleração, respectivamente. É apresentado aqui um modelo de um cenário cosmológico completo, no qual o principal responsável pela geometria é um campo magnético não-linear que produz uma geometria homogênea e isotrópica do tipo FLRW. Neste cenário distinguem-se quatro fases diferentes: um período de ‘bouncing’, uma era de radiação, uma fase de aceleração e um ‘rebouncing’. Já foi mostrado em outros trabalhos que um campo magnético não-linear muito forte pode evitar a região singular típica da teoria linear de Maxwell; num outro extremo, o de campos muito fracos, este pode acelerar a expansão. O presente modelo vai um passo à frente: após a fase de aceleração, o universo sofre um novo ‘bouncing’ e entra em colapso. Este comportamento é a manifestação da invariância sob o mapeamento dual $a(t) \rightarrow 1/a(t)$ do fator de escala, uma consequência da simetria inversa $F \rightarrow 1/F$, do campo eletromagnético F ($F \equiv F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$), da teoria não-linear aqui apresentada. Tal sequência colapso-‘bouncing’-expansão-aceleração-‘rebouncing’-colapso constitui a unidade básica para a estrutura do universo que pode repetir-se indefinidamente, levando ao que deu título a esta dissertação: Universo Magnético Cíclico.

Abstract

Recent works have shown the important role that Nonlinear Electrodynamics (NLED) can have in two crucial questions of Cosmology, concerning particular moments of its evolution for very large and for low-curvature regimes, that is for very condensed phase and at the period of acceleration. It is presented here a toy model of a complete cosmological scenario in which the main factor responsible for the geometry is a nonlinear magnetic field that produces a FRW homogeneous and isotropic geometry. In this scenario one distinguishes four different phases: a bouncing period, a radiation era, an acceleration era and a re-bouncing. It has already been shown that in NLED a strong magnetic field can overcome the inevitability of a singular region typical of linear Maxwell theory; on the other extreme situation, that is for very weak magnetic field it can accelerate the expansion. The present model goes one step further: after the acceleration phase the universe re-bounces and enter in a collapse era. This behavior is a manifestation of the invariance under the dual map of the scale factor $a(t) \rightarrow 1/a(t)$, a consequence of the corresponding inverse symmetry of the electromagnetic field ($F \rightarrow 1/F$, where $F \equiv F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$) of the NLED theory presented here. Such sequence collapse-bouncing-expansion-acceleration-re-bouncing-collapse constitutes a basic unitary element for the structure of the universe that can be repeated indefinitely yielding what is called here a Cyclic Magnetic Universe.

Sumário

1	Introdução	2
2	A fonte da dinâmica e o procedimento de média	5
2.1	A fonte da dinâmica	6
2.1.1	Partes irreduzíveis do tensor momento-energia	8
2.2	O procedimento de média	10
3	Modelo de FLRW	12
3.1	Aceleração do universo	12
3.2	Condição de energia	13
4	Universo magnético	16
4.1	Lei de conservação	16
4.2	Campos magnéticos	19
5	Cosmologia e eletrodinâmica	21
5.1	Modelo padrão	22
5.2	Universo magnético não-singular [4]	25
5.3	Universo magnético e a aceleração do universo [7, 8]	28
5.4	Universo Magnético Cíclico	30
5.4.1	Princípio de simetria	33
5.4.2	Cenário completo	38
6	Conclusão	47

Capítulo 1

Introdução

A eletrodinâmica é o modelo de uma teoria de campos bem sucedida, com fundamentos fortes e amplamente testada. Também é indiscutível seu papel no estudo de estruturas em larga escala, desde campos magnéticos residuais em galáxias até a evolução do universo [1].

No que diz respeito à cosmologia, a eletrodinâmica de Maxwell é fundamental na construção de seu modelo padrão. Este é baseado no ajuste da configuração de campos elétricos e magnéticos de maneira compatível com as simetrias da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [2]. Apesar de explicar muito bem a fase de radiação do universo, o modelo padrão é alvo de críticas substanciais: a singularidade inicial (‘Big Bang’) e a desaceleração de duração indefinida.

É interessante que a cosmologia, cujo ‘status’ de ciência era questionado até algumas décadas atrás, aponte uma grande inconsistência no seio da física, ciência bem estabelecida: nenhuma de suas teorias padrão consegue abarcar os novos fenômenos que o universo revela. A consequência mais forte disso é a necessidade de se modificar a teoria da gravitação, ou supor novas formas de energia. Este fato aponta o surgimento de uma nova ciência, a ciência do Todo.

Na tentativa de contornar essas dificuldades, surgiu uma variedade enorme de modelos. Alguns concentrados na questão da singularidade inicial, que vão desde o modelo estacionário até modelos com ‘bouncing’ (ou ricochete) [3, 4]. Outros na fase atual de

aceleração, partindo da introdução de uma constante cosmológica até novas fontes de energia [5, 6].

O intuito desta dissertação é descrever um universo de FLRW sem singularidade inicial, com um período de aceleração positiva e limitada por uma fase desacelerada. Esse cenário é produzido puramente por campos magnéticos, cuja natureza há muito é estudada. Faz-se isto através da adição de correções não-lineares à Lagrangeana de Maxwell.

De início, é um tanto complexo imaginar que uma teoria altamente não-linear como a relatividade geral, quando acoplada, mesmo que minimamente, a uma eletrodinâmica (também não-linear), possa produzir um universo com comportamento razoavelmente simples de ser tratado. Entretanto, como as observações sugerem que o universo possui um alto grau de simetria em larga escala, as não-linearidades inerentes à teoria da gravitação de Einstein são atenuadas. No caso linear de Maxwell, este comportamento é o suficiente para que o universo evolua de maneira simples. Na eletrodinâmica não-linear, a configuração com campos elétricos nulos (*universo magnético*), diminui o número de graus de liberdade e acaba por fornecer um cenário similar ao linear [4, 7, 8, 9]; daí a simplicidade do presente modelo.

O estudo ora apresentado inicia-se pela obtenção do tensor momento-energia, a partir da variação da Lagrangeana $L(F)$, função arbitrária de $F \equiv F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, invariante de ‘gauge’. Em seguida, é feita uma breve discussão sobre as propriedades que um fluido, candidato à fonte de uma geometria de FLRW, deve possuir; toda a descrição é feita a partir de suas partes irredutíveis. Isto feito, passa-se ao procedimento de média, descrito pela primeira vez por Tolman e Ehrenfest [2]: o tensor momento-energia deve corresponder à radiação de um corpo negro (homogênea e isotrópica), o que se ajusta perfeitamente com as simetrias da solução cosmológica de FLRW das equações de Einstein.

Posteriormente, no capítulo *Modelo de FLRW*, apresentam-se em detalhe suas equações dinâmicas. A primeira delas rege a aceleração do fator de escala. Essa equação é obtida a partir da definição da curvatura em função da diferença de variação do campo de velocidades, conciliada com a solução das equações de Einstein aqui tratada. Unida às propriedades do escalar de curvatura R , é derivada a segunda equação, que vincula a taxa de expansão θ com a energia do sistema e com a curvatura do tri-espço.

Exposta a dinâmica, passa-se às razões de se trabalhar com universo magnético e suas principais consequências: o campo comporta-se como na teoria linear $F = \frac{F_0}{a^4}$, independente da forma de $L(F)$, e há conservação independente de cada fluido associado a uma potência de F .

Na sequência são mostrados os modelos cosmológicos que inspiraram este trabalho: o modelo padrão, um modelo com ‘bouncing’ e outro com aceleração. Todos eles gerados por campos magnéticos, os dois últimos por não-lineares. Formada a base, iniciou-se a descrição do *Universo Magnético Cíclico*.

Inicialmente foi feita uma primeira análise de suas quatro unidades básicas: ‘bouncing’, radiação, aceleração e ‘rebouncing’. A partir das condições de energia em cada caso, obteve-se os vínculos consequentes, para tri-curvatura nula. Também foi abordado o comportamento da aceleração em cada uma das quatro fases.

A existência de um novo ‘bouncing’ e a forma simétrica da Lagrangeana são reflexos de um *princípio de simetria*. A partir dele, foi possível fazer uma análise mais detalhada do comportamento da aceleração e da densidade de energia, e montar o cenário completo deste trabalho: ‘Bouncing-Radiação’, ‘Radiação-Aceleração’, ‘Aceleração-Rebouncing’. Para cada uma dessas fases, obteve-se a expressão do fator de escala com o tempo e a ligação analítica entre eles, além da propagação das condições iniciais. Por fim, com o mapeamento dual $a \rightarrow \frac{1}{a}$, foi identificada a sequência: colapso-‘bouncing’-expansão-aceleração-‘rebouncing’-colapso, que forma o ciclo, de repetição indefinida [10].

Capítulo 2

A fonte da dinâmica e o procedimento de média

A primeira parte deste capítulo será destinada às equações de Einstein, cuja fonte, o tensor momento energia, é derivado de um funcional não-linear do invariante $F \equiv F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

Em seguida, trata-se essa fonte como um fluido, cujas características devem refletir as simetrias da métrica de FLRW. Para isso, é feita sua decomposição em suas partes irreduzíveis. Ao comparar as projeções deste tensor com as do obtido pelo método variacional, é estabelecida a relação entre os campos elétrico e magnético com densidade de energia e pressão.

Na segunda seção é feito o procedimento de média, em que os campos efetivamente aparecem como a fonte da geometria de FLRW. Expresso o comportamento em larga escala, toda a dinâmica do universo é ditada pela não-linearidade da teoria eletromagnética.

2.1 A fonte da dinâmica

Para se obter o tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$, parte-se da Lagrangeana $L = L(F)$, onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell, e aplica-se o princípio de extremização da ação:

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\delta S}{\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0 \\ &= \delta \int (L + R) \sqrt{-g} dx^4 = 0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Usando a linearidade das operações de integração e variação, integra-se o resultado da variação:

$$\delta S = \int \delta [(L + R) \sqrt{-g} dx^4]\tag{2.2}$$

Neste trabalho o interesse é restrito a uma geometria Riemanniana e, neste caso, a conexão afim é idêntica à conexão métrica. Então a variação da ação S é feita apenas em função da métrica $g_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \\ &= \int \frac{\delta [(R + L) \sqrt{-g}]}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} dx^4 \\ &= \int \left[\left(R \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-g} \right) + \left(L \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta L}{\delta F} \frac{\delta F}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-g} \right) \right] \delta g^{\mu\nu} dx^4 = 0\end{aligned}\tag{2.3}$$

Para uma maior clareza no desenvolvimento do cálculo, desenvolve-se cada parcela separadamente:

- $\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}}$:

Se a métrica não está fixa, seu determinante também não está. Faz-se necessário conhecer sua variação com $g^{\mu\nu}$, para que se possa determinar $\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}}$.

De acordo com as referências [11, 12], $\frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}}$ é:

$$\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}}\tag{2.4}$$

Mas,

$$\frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}} = g g_{\mu\nu}\tag{2.5}$$

Logo, o primeiro termo de (2.3) é:

$$R \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -R \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

• $\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}$:

O escalar de curvatura R é definido pelo produto escalar a partir da contração do tensor de Riemann $R^\alpha{}_{\beta\alpha\nu}$ (estrutura independente de métrica), chamado tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ com $g_{\mu\nu}$.

$$R = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} g^{\mu\nu} = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \quad (2.7)$$

Portanto, R depende explicitamente da métrica e não passa ileso à sua variação:

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta g^{\mu\nu}} + R_{\mu\nu} \frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

Ao unir as duas parcelas, correspondentes à variação da Lagrangeana em R (equações (2.6) e (2.8)), chega-se ao tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

Resta agora obter o tensor momento-energia, definido pelas duas parcelas restantes. A primeira é apenas o produto de L por (2.6):

$$L \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -L \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

Para chegar à segunda, é necessário determinar como F varia com $g_{\mu\nu}$. Como há índices covariantes e contra-variantes contraídos em F , a métrica aparece de forma implícita:

$$\frac{\delta F}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu}) F_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = 2F^\alpha{}_{\mu} F_{\alpha\nu} \quad (2.11)$$

Portanto o tensor momento-energia derivado de uma Lagrangeana arbitrária de F é:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = 4L_F F^\alpha{}_{\mu} F_{\alpha\nu} - L g_{\mu\nu} \quad (2.12)$$

que é a fonte de toda a dinâmica de $g_{\mu\nu}$; pois o tensor de Einstein carrega somente termos da métrica e suas derivadas. Como consequência direta de

$$R_{\mu\nu} = 0 \iff T_{\mu\nu} = 0,$$

verifica-se que $T_{\mu\nu}$ corresponde ao termo não-homogêneo da equação e, assim, age como fonte.

Portanto, a geometria, expressa por $G_{\mu\nu}$, é modificada pela fonte, representada por $T_{\mu\nu}$, e de maneira recíproca, as propriedades da fonte devem ser refletidas na geometria. Logo, ao se descrever uma geometria do tipo FLRW, espera-se que o tensor momento-energia carregue em sua estrutura a mesma simetria. Um fluido perfeito ajusta-se bem às propriedades dessa métrica: homogeneidade e isotropia.

Como o tensor de Einstein é composto por tensores simétricos ($R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ e $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$), o tensor momento-energia também deve ser simétrico:

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$$

2.1.1 Partes irredutíveis do tensor momento-energia

Um tensor simétrico de segunda ordem é decomposto em suas partes irredutíveis da seguinte forma:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) V_\mu V_\nu + p g_{\mu\nu} + q_\nu V_\mu + q_\mu V_\nu + \pi_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

com

$$\begin{aligned} q_\mu V^\mu &= 0 \\ \pi_\mu^\mu &= 0 \\ \pi_{\mu\nu} V^\nu &= 0 \\ h^{\mu\nu} V_\nu &= 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

Aqui foi escolhido um sistema de coordenadas gaussiano, em que $h_{\mu\nu}$ e V_μ são projetores.¹

¹Para maiores detalhes, veja seção 4.1

O número máximo de componentes de qualquer tensor simétrico de 2ª ordem é 10. A decomposição feita com projetores na direção tipo-tempo e na tri-superfície, espera-se: 2 escalares ρ e p [total de 2 componentes], 1 vetor q_μ na tri-superfície (eq. 2.14) [3 componentes] e 1 tensor simétrico sem traço $\pi_{\mu\nu}$ na tri-superfície (eq. 2.14) [5 componentes].

Para conhecer cada termo, efetua-se as projeções de $T_{\mu\nu}$ em $V^\mu V^\nu$ e $h^{\mu\nu}$, respectivamente:

Densidade de energia:

$$\rho = T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \quad (2.15)$$

Pressão isotrópica:

$$p = -\frac{1}{3} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \quad (2.16)$$

Pressão anisotrópica:

$$\pi_{\mu\nu} = T_{\alpha\beta} h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu + p h_{\mu\nu} \quad (2.17)$$

Vetor de transporte de calor:

$$q_\nu = T_{\mu\alpha} V^\alpha h^\mu{}_\nu \quad (2.18)$$

onde $\pi_{\mu\nu}$ é a pressão anisotrópica, q_ν é o vetor de transporte de calor, e $\eta_{\alpha\nu\lambda\gamma}$ é o pseudo-tensor completamente antissimétrico de Levi-Civita.

Para obter ρ , p , $\pi_{\mu\nu}$ e q_ν em função do campo eletromagnético, é necessário efetuar as projeções:

$$\begin{aligned} \rho &= (4L_F F^\alpha{}_\mu F_{\alpha\nu} - Lg_{\mu\nu}) V^\mu V^\nu \\ p &= -\frac{1}{3} (4L_F F^\alpha{}_\mu F_{\alpha\nu} - Lg_{\mu\nu}) h^{\mu\nu} \\ \pi_{\mu\nu} &= (4L_F F^\alpha{}_\mu F_{\alpha\nu} - Lg_{\mu\nu}) - \frac{1}{3} (4L_F F^\alpha{}_\rho F_{\alpha\sigma} - Lg_{\mu\nu}) h^{\rho\sigma} h_{\mu\nu} \\ q_\nu &= (4L_F F^\alpha{}_\mu F_{\alpha\sigma} - Lg_{\mu\sigma}) V^\mu h^\sigma{}_\nu \end{aligned} \quad (2.19)$$

O tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$ é, em termos de E_μ e H_μ :

$$F_{\mu\nu} = E_\mu V^\nu - E_\nu V_\mu + \eta_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} V_\alpha H_\beta, \quad (2.20)$$

com

$$E_\mu = F_{\mu\nu} V^\nu \quad (2.21)$$

$$H_\mu = F_{\mu\nu}^* V^\nu. \quad (2.22)$$

e

$$\begin{aligned} E_\mu V^\mu &= 0 \\ H_\mu V^\mu &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Logo

$$\rho = -L - 4L_F E^2 \quad (2.24)$$

$$p = L - \frac{4}{3} L_F (2H^2 - E^2) \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \pi_{\mu\nu} &= 4L_F \left[E_\mu E_\nu + H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} + \frac{1}{3} (E^2 + H^2) \right] \\ q_\nu &= 4L_F \eta_{\alpha\nu\lambda\gamma} E^\alpha H^\gamma V^\lambda \end{aligned}$$

O universo possui as características do modelo *FRLW* apenas em larga escala. Um exemplo disso é a formação de estruturas como galáxias e aglomerados de galáxias. Por isso, para que a eletrodinâmica não-linear descrita por $L(F)$ seja uma fonte compatível, é necessário que seu efeito não seja local.

2.2 O procedimento de média

Para que o tensor momento-energia, associado a $L(F)$, seja a fonte de um universo do tipo *FRLW*, cuja métrica é dada por:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 [d\chi^2 + \sigma(\chi)^2 (d\theta^2 + \text{sen}\theta^2 d\phi^2)], \quad (2.26)$$

é necessário efetuar um procedimento de média, para compatibilizar as simetrias do modelo cosmológico com o comportamento médio dos campos elétrico e magnético.

Esse procedimento, desenvolvido originalmente por Tolman e Ehrenfest [2], baseia-se na média espacial dos campos, E e B :²

$$\bar{W} \equiv \lim_{V \rightarrow V_0} \frac{1}{V} \int \sqrt{-g} d^3x \quad (2.27)$$

² E e H são vetores tipo-espaço - equações (2.23)

onde V é o volume da tri-esfera, V_0 é o volume mínimo independente da coordenada temporal e W é a grandeza da qual se tira a média.

Essa independência na média temporal é esperada pois, no modelo de FLRW, homogeneidade e isotropia são de caráter puramente espacial. Assim, para que essa Lagrangeana carregue essas simetrias, os campos E e B devem ter por médias:

$$\begin{aligned}\langle E_i \rangle &= 0 \\ \langle H_i \rangle &= 0 \\ \langle E_i H_j \rangle &= 0\end{aligned}\tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}\langle E_i E_j \rangle &= -\frac{1}{3} E^2 \gamma_{ij} \\ \langle H_i H_j \rangle &= -\frac{1}{3} H^2 \gamma_{ij}\end{aligned}\tag{2.29}$$

onde γ_{ij} é a métrica do tri-espaço. E a média do tensor momento-energia, $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, é escrita:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \langle 4L_F \left[- (E^2 + H^2) V_\mu V_\nu + E_\mu E_\nu + H_\mu H_\nu + q_{(\nu} V_{\mu)} - \left(H^2 + \frac{L}{4L_F} \right) g_{\mu\nu} \right] \rangle\tag{2.30}$$

Antes de iniciar a separação do tensor momento-energia em suas partes irredutíveis, mostrou-se que a fonte de uma métrica de FLRW não pode gerar nenhuma direção preferencial nem não-homogeneidades, portanto, não há pressão anisotrópica nem transporte de calor: $\pi_{\mu\nu} = 0$ e $q_\mu = 0$.

Logo, $T_{\mu\nu}$ é reescrito como fluido perfeito:

$$T_{\mu\nu} = [\rho + p] V_\mu V_\nu - p g_{\mu\nu}\tag{2.31}$$

Ao escolher o conjunto de observadores do tipo-tempo, $V^\mu = \delta_0^\mu$, ρ e p são assim escritos em termos dos campos³:

$$\begin{aligned}\rho &= -L - 4L_F \langle E^2 \rangle \\ p &= L + \frac{4}{3} L_F (\langle E^2 \rangle - 2\langle H^2 \rangle)\end{aligned}\tag{2.32}$$

³A partir deste momento as médias dos campos e de $T_{\mu\nu}$ serão representados respectivamente por H , E e $T_{\mu\nu}$, por questão de simplicidade.

Capítulo 3

Modelo de FLRW

Este capítulo será devotado ao desenvolvimento das equações de FLRW. A primeira delas, parte da definição do tensor de curvatura e das partes irredutíveis de um tensor de 2ª ordem, e leva à expressão da aceleração em termos da fonte. A segunda consiste no vínculo imposto pelas equações de Einstein, e mostra o comportamento da velocidade em função da curvatura e da densidade de energia da fonte.

3.1 Aceleração do universo

Para se obter a evolução do fator de expansão, primeiramente, projeta-se na direção de V_ν , a equação que define o tensor de curvatura $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta V^\nu = (V^\alpha_{;\mu;\nu} - V^\alpha_{;\nu;\mu}) \quad (3.1)$$

Depois, contrai-se o primeiro e o terceiro índices α e μ :

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\beta\alpha\nu} V^\beta V^\nu &= R_{\beta\nu} V^\beta V^\nu \\ &= (V^\alpha_{;\alpha;\nu} - V^\alpha_{;\nu;\alpha}) V^\nu \\ &= (\theta_{;\nu} - V^\alpha_{;\nu;\alpha}) V^\nu \\ &= \dot{\theta} - V^\alpha_{;\nu;\alpha} V^\nu \\ &= \dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} - \omega^{\beta\nu} \omega_{\beta\nu} + \sigma^{\beta\nu} \sigma_{\beta\nu} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Para manter a homogeneidade e a isotropia, é necessário que não haja assimetrias e nem deformações nas linhas do campo dos observadores V^μ . Assim, a parte simétrica sem

traço e antissimétrica de $V^\mu{}_{;\nu}$ devem ser nulas:

$$\begin{aligned} R^\alpha{}_{\beta\alpha\nu} V^\beta V^\nu &= R_{\beta\nu} V^\beta V^\nu \\ &= \dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Mas, pelas equações de Einstein, o tensor de Ricci pode ser reescrito em termos de $T_{\mu\nu}$ e de seu traço T .

$$\begin{aligned} \dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} &= R_{\beta\nu} V^\beta V^\nu \\ &= \left(-T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) V^\mu V^\nu \\ &= - \left(T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} (\rho - 3p) \right) V^\mu V^\nu \\ &= -\frac{1}{2} (\rho + 3p) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Como $V^\mu = \delta^\mu_0$, então esta é a componente 0-0 das equações de Einstein. Quando se usa que $\theta = \frac{3\dot{a}}{a}$, obtém a equação de Friedmann:

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2} (\rho + 3p) \tag{3.5}$$

que rege a aceleração do universo através do balanço entre ρ e p .

Segue como resultado direto desta equação, a negatividade de p , pois espera-se que a densidade de energia ρ nunca atinja valores negativos, para explicar uma aceleração positiva.

3.2 Condição de energia

A segunda equação de Einstein fornece um vínculo entre a densidade de energia, a taxa de expansão (ou de colapso) do universo e a curvatura do tri-espaco.

O escalar de curvatura R na geometria de FLRW é [13]:

$$\begin{aligned}
R &= 6\frac{\ddot{a}}{a} + 6\frac{\dot{a}^2}{a} + \frac{1}{a^2} \left[\frac{2}{\sigma} - \frac{4\sigma''}{\sigma} - 2\frac{\sigma'^2}{\sigma} \right] \\
&= 6\frac{\ddot{a}}{a} + 6\frac{\dot{a}^2}{a} + \frac{R^{(3)}}{a^2} \\
R^{(3)} &\equiv 6\epsilon
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Por outro lado, o traço do tensor momento-energia é igual ao traço do tensor de Ricci $R^\mu{}_\mu$ (2.7):

$$\begin{aligned}
T &= R \\
T &= \rho - 3p
\end{aligned} \tag{3.7}$$

E portanto:

$$\rho - 3p = \frac{6\ddot{a}}{a} + 6\frac{\dot{a}^2}{a} + \frac{6\epsilon}{a^2}$$

Mas, pela equação de Raychaudhuri:

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = \frac{3\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p) \tag{3.8}$$

Então:

$$\rho = \frac{\theta^2}{3} + \frac{3\epsilon}{a^2} = 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{3\epsilon}{a^2} \tag{3.9}$$

No caso em que a seção é euclideana, a tri-curvatura anula-se, ou seja, $\epsilon = 0$, e a equação acima fica apenas

$$\rho = \frac{\theta^2}{3} = 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \tag{3.10}$$

Se o fluido possuir uma equação de estado

$$p = \lambda\rho, \tag{3.11}$$

o fator de escala a comporta-se apenas como uma potência de t :

$$\begin{aligned}
t &\sim \frac{a^{\frac{3}{2}(\lambda+1)}}{\lambda+1} \\
a &\sim \left[\frac{3(\lambda+1)}{2} t \right]^{\frac{2}{3(\lambda+1)}},
\end{aligned} \tag{3.12}$$

bastando para isso substituir (4.13) em (3.10).

Assim, dados ρ e p , a dinâmica do universo é toda determinada a partir das duas equações apresentadas neste capítulo.

No caso do universo magnético, o campo é basicamente a raiz quadrada do fator de escala a . Para determinar $a(t)$, resta apenas resolver a 2ª equação de FLRW. Isso ocorre porque se trocou uma EDO (Equação Diferencial Ordinária) de 2ª ordem por um sistema de duas de 1ª ordem. O que neste caso é bastante eficiente pelo alto grau de simetria do sistema dinâmico.

Capítulo 4

Universo magnético

A condição de conservação da carga foi fundamental na construção da eletrodinâmica clássica. Desde então, a formalização do princípio de conservação de matéria e energia, tornou-se presente na maioria das teorias físicas, entre elas a relatividade geral.

No contexto da cosmologia, este princípio possibilitou a introdução de mais um termo nas equações de campo: a constante cosmológica. Esta foi a alternativa encontrada por Einstein para obter como solução de suas equações o modelo mais simples de universo: finito, estacionário, homogêneo e isotrópico. Entretanto sua sugestão acabou por levar ao primeiro modelo de universo em expansão: o modelo de de Sitter; que nada mais é do que a solução das equações de Einstein com constante cosmológica no vácuo.

Neste trabalho, a conservação do tensor momento-energia levou a resultados muito interessantes. São consequências do seu compromisso com as simetrias do cenário de FLRW. Num cenário em que apenas há campos magnéticos não-lineares em larga escala, estes comportam-se como o caso linear: $H \sim a^{-2}$, independente da Lagrangeana $L(F)$. Além disso, se esta for uma série de potências em $F \equiv F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, cada termo comporta-se como um fluido não-interagente.

4.1 Lei de conservação

Como toda a teoria da relatividade geral está em forma covariante, é inconveniente quebrar esta descrição com uma lei de conservação que dependesse da escolha de sistema

de coordenadas - $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$. Assim, a equação de conservação passa a ser escrita na forma covariante:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (4.1)$$

Como explicitado no capítulo 2, o tensor momento-energia será tomado como um fluido perfeito:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) V_\mu V_\nu - p g_{\mu\nu} \quad (4.2)$$

Então:

$$T^{\mu\nu}{}_{;v} = ((\rho + p) V^\mu V^\nu)_{;v} - p_{;v} g^{\mu\nu} - p g^{\mu\nu}{}_{;v}. \quad (4.3)$$

Nesta geometria, a conexão afim (definida a partir do transporte paralelo de vetores em espaços de curvatura qualquer) é a conexão métrica; então a derivada covariante de $g_{\mu\nu}$ é nula. E $T^{\mu\nu}{}_{;v}$ é reescrito:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}{}_{;v} &= ((\rho + p) V^\mu V^\nu)_{;v} - p_{;v} g^{\mu\nu} \\ &= (\rho + p)_{;v} V^\mu V^\nu - p_{;v} g^{\mu\nu} + (\rho + p) (V^\mu{}_{;v} V^\nu + V^\mu V^\nu{}_{;v}) \\ &= (\rho + p) (V^\mu{}_{;v} V^\nu + V^\nu{}_{;v} V^\mu) + \dot{\rho} V^\mu + p_{;v} h^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde $\dot{\rho}$ é a projeção da derivada covariante de ρ da direção da velocidade do conjunto de observadores, ou seja, $\dot{\rho} = \rho_{;v} V^\nu$.

Escolheu-se um sistema de coordenadas cartesiano, o que permite definir uma tri-superfície espacial ortogonal ao campo de velocidades V^μ do tipo-tempo:

$$V^\mu = \delta_0^\mu. \quad (4.5)$$

E assim, qualquer tensor pode ser projetado na direção de V^μ ou na tri-superfície, cujo projetor $h^\mu{}_\nu$ é definido como:

$$h^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - V^\mu V_\nu, \quad (4.6)$$

onde

$$\begin{aligned}
h^{\mu\nu} &= h^{\nu\mu} \\
h^0{}_0 &= h^0{}_i = 0 \\
&\Downarrow \\
h^0{}_\mu &= 0 \\
h^\mu{}_\nu V^\nu &= 0.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Portanto, $V^\mu{}_{;\nu}V^\nu$ é projeção de $V^\mu{}_{;\nu}$ na direção ortogonal à tri-superfície do tipo-espaço.

O objeto $V^\nu{}_{;\nu}$ corresponde ao traço de $V^\mu{}_{;\nu}$, o qual é uma de suas partes irredutíveis. Portanto é interessante escrevê-lo na sua representação irredutível, utilizando os projetores acima definidos:

$$V^\mu{}_{;\nu} = \underbrace{\frac{1}{2}h^\mu{}_\alpha h^\beta{}_\nu (V^\alpha{}_{;\beta} + V^\beta{}_{;\alpha})}_{\sigma^\mu{}_\nu} + \underbrace{\frac{1}{2}h^\mu{}_\alpha h^\beta{}_\nu (V^\alpha{}_{;\beta} - V^\beta{}_{;\alpha})}_{\omega^\mu{}_\nu} + \frac{1}{3}h^\mu{}_\nu \underbrace{V^\alpha{}_{;\alpha}}_\theta + \underbrace{V^\mu{}_{;\alpha}V^\alpha}_b V_\nu. \tag{4.8}$$

Os três primeiros termos, $\omega^\mu{}_\nu$, $\sigma^\mu{}_\nu$ e $\frac{1}{3}h^\mu{}_\nu\theta$ são, respectivamente, a parte simétrica sem traço, a antissimétrica, e o traço do tensor, projetadas na tri-superfície. O último termo, b^μ , é a aceleração \dot{V}^μ projetada na direção do campo de observadores V_μ .

Agora, voltando à equação (4.4), reescreve-se a equação de conservação:

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= (\rho + p)(V^\mu{}_{;\nu}V^\nu + V^\nu{}_{;\nu}V^\mu) + \dot{\rho}V^\mu \\
&= (\rho + p)(b^\mu + \theta V^\mu) + \rho_{;\nu}V^\mu V^\nu \\
&= (\rho + p)(b^\mu + \theta V^\mu) + \dot{\rho}V^\mu.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

As leis de conservação sempre apareceram em forma escalar (conservação da carga elétrica, por exemplo). Por isso, é interessante projetar-se $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}$ na tri-superfície e na direção de V_μ . Devido às simetrias da métrica, a projeção em $h^\mu{}_\nu$ fornece apenas uma identidade, visto que $p_{;\mu}h^\mu{}_\nu = 0$; enquanto a outra projeção leva à equação de conservação usualmente conhecida:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}V_\mu = \dot{\rho} + (\rho + p)\theta = 0. \tag{4.10}$$

A quantidade cinemática θ , no caso da métrica de FLRW, é

$$\theta \equiv V^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g}\delta^\mu{}_0)_{,0} = \frac{3\dot{a}}{a}. \tag{4.11}$$

Substituindo a equação acima em (4.10), obtém-se:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (4.12)$$

Esta é a equação de conservação de um fluido perfeito no modelo FLRW.

Se o fluido possuir uma equação de estado do tipo (3.11), é possível saber o comportamento do fator de escala a em função de ρ e da constante λ , a partir da equação de conservação (eq. 4.12):

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p) &= 0 \\ 3(\lambda + 1)\frac{\dot{a}}{a} &= \frac{\dot{\rho}}{\rho} \\ \rho a^{3(\lambda+1)} &\sim \text{constante}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Assim, conhecida a equação de estado, é possível determinar por completo a dependência da densidade de energia ρ com o fator de escala.

4.2 Campos magnéticos

Há indícios de que, no plasma primordial, só havia campos magnéticos e que há campos magnéticos residuais em galáxias. Como o interesse deste trabalho é o universo em grandes escalas, é razoável considerar que o campo elétrico, na média, é nulo ($E = 0$).

Portanto o invariante $F = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(H^2 - E^2)$ é somente (2.32):

$$F = 2H^2. \quad (4.14)$$

Consequentemente, ρ e p reescrevem-se:

$$\rho = -L \quad (4.15)$$

$$p = L - \frac{4}{3}FL_F \quad (4.16)$$

Substituindo-as na equação de conservação projetada, obtém-se:

$$\dot{\rho} + \theta(\rho + p) = -L_F \left(\dot{F} + \frac{4}{3}F\theta \right) = 0 \quad (4.17)$$

Portanto, independente da Lagrangeana $L(F)$:

$$\begin{aligned}\dot{F} + 4F\frac{\dot{a}}{a} &= 0 \\ F &= \frac{F_0}{a^4}\end{aligned}\tag{4.18}$$

Tal como ocorre no caso usual de Maxwell, seja o funcional linear ou não.

Com a suposição de que a lagrangeana seja uma série em F , ou seja:

$$L = \sum c_j F^j\tag{4.19}$$

onde c_j são constantes, obtém-se uma equação de conservação para cada potência de F :

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_j + (\rho_j + p_j)\theta &= 0 \\ \rho_j &= -c_j F^j \\ p_j &= c_j F^j \left(1 - \frac{4j}{3}\right)\end{aligned}\tag{4.20}$$

Aliado ao fato que a cada $a(t)$ há somente um $F(a)$, é possível tratar cada fase da evolução do universo como um fluido perfeito, independente dos demais termos em F .

A configuração de campo, campos elétricos nulos e as linhas do campo magnético estáticas, é aquela presente no plasma primordial. Um dos cerne deste trabalho é que este mesmo tipo de configuração fornece conservação independente para cada potência de F , de maneira que, cada termo comporta-se como um fluido perfeito não-interagente. Além disso, independente da função de F que a Lagrangeana assuma, a dependência com o fator de escala é sempre a mesma (eq.(4.18)).

Estes fatos possibilitam tratar cada fase da evolução do universo de maneira independente.

Capítulo 5

Cosmologia e eletrodinâmica

Este capítulo é destinado ao estudo de modelos de universo do tipo FLRW, gerados pelo campo eletromagnético. O primeiro deles aqui exposto, *O modelo padrão*, descreve o cenário de FLRW com radiação, singularidade irremovível e desaceleração.

Nas duas seções seguintes, são apresentados dois modelos de universo, gerados por campos magnéticos não-lineares. O primeiro é um modelo de universo não-singular com radiação. O segundo traz um universo acelerado, após a fase de radiação.

As últimas seções são destinadas à construção do modelo de universo cíclico, meta principal desta dissertação. Inicia-se com uma análise breve da dinâmica das quatro fases independentes, onde são fixados os vínculos necessários para satisfazer a condição de energia positiva. Para obter uma análise mais detalhada, é descrito o princípio de simetria $L(F) = L\left(\frac{1}{F}\right)$, que permite a invariância $a(t) \rightarrow \frac{1}{a}$.

Como o universo de FLRW é governado pela densidade de energia ρ e pela pressão p , observa-se as raízes das equações $\rho = 0$ e $\rho + 3p = 0$, para garantir a transição entre cada uma das quatro fases. Dadas as condições de energia, dividiu-se o cenário completo em três regimes: ‘bouncing’-radiação, radiação-aceleração e aceleração-‘rebounding’, que quando unidos analiticamente, levam à sequência de repetição indefinida: colapso-‘bouncing’-radiação-aceleração-‘rebounding’-colapso.

5.1 Modelo padrão

O modelo padrão da cosmologia consiste na geometria de FLRW (eq. 2.26), com o campo eletromagnético linear atuando como fonte. Nesse cenário há três possibilidades: no caso em que a curvatura da tri-seção é a positiva, o universo expande, atinge um raio máximo e colapsa, voltando à singularidade inicial; nos outros dois casos, há expansão eterna em constante desaceleração.

Anteriormente, foi discutido que, por razões de simetria associadas à métrica de Friedmann, a forma do tensor momento-energia deve ser a de um fluido perfeito (eq. 4.2).

Aplicando o método descrito na seção (2.2), obtém-se a média do tensor momento-energia

$$T_{\mu\nu} = -F^\alpha{}_\mu F_{\alpha\nu} + \frac{F}{4} g_{\mu\nu}$$

para o caso da Lagrangeana de Maxwell:

$$L = -\frac{F}{4} \tag{5.1}$$

Ao tensor momento-energia de Maxwell há uma equação de estado associada, pois o seu traço é nulo, e trata-se aqui de um fluido perfeito:

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\mu &= (\rho + p) V_\mu V^\mu - p \delta^\mu{}_\mu = 0 \\ &= \rho - 3p = 0 \\ p &= \frac{1}{3}\rho \end{aligned} \tag{5.2}$$

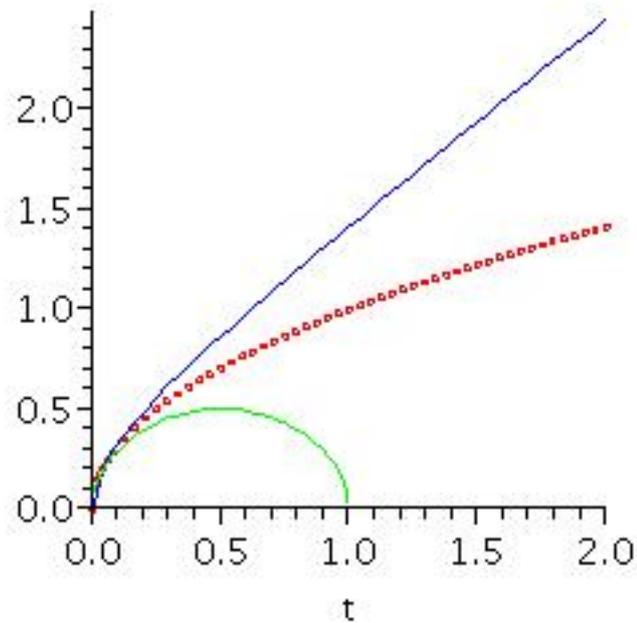
Ou seja, $\lambda = \frac{1}{3}$. Ao substituir (4.13), obtém-se:

$$\rho a^4 \sim \text{constante} \Rightarrow \rho = \rho_0 a^{-4} \tag{5.3}$$

Para chegar à evolução temporal do fator de escala basta usar a equação acima em (3.9), e impor como condição inicial $a = 0$ quando $t = 0$, para determinar a constante de integração t_0 a partir dos parâmetros da teoria H_0 e ϵ :

$$\begin{aligned}
 a &= \sqrt{\frac{\rho_0}{3\epsilon} - \epsilon(t - t_0)^2} \\
 t_0 &= \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{\rho_0}{3}} \\
 a_0 &= \frac{2}{\epsilon} \sqrt{\frac{\rho_0}{3}} \\
 a &= \sqrt{a_0 t - \epsilon t^2}
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

Assim, para cada valor da curvatura da tri-seção, há um comportamento para o fator de escala. Veja figura a seguir:



- Universo plano ($\epsilon = 0$): Há expansão indefinida com $a = \sqrt{a_0 t}$;

- Universo hiperbólico ($\epsilon = -1$): Há expansão eterna com $a = \frac{1}{2} \frac{a_0 + 2t}{\sqrt{a_0 t + t^2}}$
- Universo parabólico ($\epsilon = +1$): O universo parte da singularidade em expansão, atinge um raio máximo e depois colapsa, mantendo a desaceleração, até atingir novamente $a = 0$.

Neste ponto cabe abordar um aspecto essencial deste modelo: a existência de uma singularidade inevitável. Pois, pela equação (3.9), é possível ver que o fator de escala pode assumir valores indefinidamente pequenos, até anular-se. Basta observar que \dot{a}^2 é uma quantidade sempre não-negativa, e desta forma:

$$\begin{aligned} \frac{\rho a^2}{3} &\geq \epsilon \\ \frac{\rho_0}{a^2} &\geq \epsilon \end{aligned} \quad (5.5)$$

E portanto, por mais que a seja infinitamente pequeno, até estritamente nulo, a condição será sempre satisfeita, independente da triseção; o que está em pleno acordo com o comportamento esperado para $a(t)$ (5.4).

Mas, se $a(t)$ pode ser nulo, e isto ocorre em pelo menos um ponto (no caso de seção fechada, há dois), então as variáveis ρ e p possuem divergências. Além disso, a derivada do fator de escala neste ponto também é divergente:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{da}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{a_0 - 2\epsilon t}{\sqrt{a_0 t - \epsilon t^2}} \rightarrow \infty \quad (5.6)$$

caracterizando uma singularidade irremovível da teoria.

Todas essas divergências não são esperadas em uma teoria que ambiciona descrever um universo com quantidade finitas, como densidade de energia, pressão e aceleração (eq.3.5).

Esta singularidade inicial é conhecida como ‘Big Bang’. A segunda singularidade, atingida graças ao colapso no caso fechado, é chamada de ‘Big Crunch’.., onde todo o universo teria seu fim colapsando em um único ponto.

Por outro lado, ao estudar a aceleração produzida por essa fonte, chega-se a uma expansão desacelerada de duração indefinida ($\epsilon = 0, -1$).

$$\begin{aligned} 3 \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{1}{2} (\rho + 3p), \\ &= -\rho < 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

tendo em vista ρ ser sempre positivo (4.2):

$$\begin{aligned}\rho &= -L - 4L_F E^2 \\ &= \frac{H^2 + E^2}{2} > 0\end{aligned}\tag{5.8}$$

São essas duas questões que motivam a maioria dos novos modelos: estudar o comportamento do universo em pequena escala e compreender a indicação observacional da fase atual de aceleração do universo. Alguns deles ocupam-se apenas da singularidade inicial, questionando por exemplo sua existência, e evitam-na [15]; outros apenas em entender o que poderia estar acelerando o universo, como por exemplo os modelos de matéria e energia escuras. A proposta nesta tese é encontrar um panorama unificado capaz de responder a cada questão com apenas um único tipo de energia.

5.2 Universo magnético não-singular [4]

Um dos modelos desenvolvido a partir da modificação na eletrodinâmica é¹:

$$L = \alpha^2 F^2 - \frac{F}{4} + \sigma^2 G^2\tag{5.9}$$

Ao tomar as constantes α^2 e σ^2 são determinadas pela observação. Quando tomadas igual a zero, recai-se no caso de Maxwell.

O tensor momento-energia associado a uma Lagrangeana $L(F, G)$, função dos invariantes $F \equiv F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ e $G \equiv F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, é:

$$T_{\mu\nu} = 4L_F F^\alpha{}_\mu F_{\alpha\nu} + (GL_G - L) g_{\mu\nu}\tag{5.10}$$

E as equações (2.32) são apenas:

$$\begin{aligned}\rho &= -L + GL_G - 4L_F E^2 \\ p &= L - GL_G - \frac{4}{3} (2H^2 - E^2) L_F\end{aligned}\tag{5.11}$$

¹Somente os casos em que as constantes são estritamente positivas são examinados, nesta dissertação. Por este motivo, todas as constantes constantes foram escolhidas ao quadrado.

Mas, ao se considerar $\langle E^2 \rangle = 0$, o invariante G anula-se, e a forma do tensor momento-energia anterior é recuperada 4.15 e 4.16.

$$\begin{aligned}\rho &= -L \\ p &= L - \frac{4}{3}FL_F\end{aligned}\tag{5.12}$$

Assim, no caso de um universo em que só há campo magnético, tudo se passa como se a Lagrangeana fosse apenas $L = L(F)$.

Neste caso específico, a Lagrangeana fica:

$$L = \alpha^2 F^2 - \frac{F}{4}.\tag{5.13}$$

E densidade e pressão agora são:

$$\rho = -\alpha^2 F^2 + \frac{F}{4} = \frac{H_0^2}{2a^4} \left(1 - 8\alpha^2 \frac{H_0^2}{a^4} \right)\tag{5.14}$$

$$p = \frac{H_0^2}{6a^4} \left(1 - 40\alpha^2 \frac{H_0^2}{a^4} \right)\tag{5.15}$$

Pode ser fixado um limite superior para a constante α^2 , através do tempo de nucleossíntese [9]. Ao tomar $\alpha^2 = 0$, recupera-se o caso de Maxwell:

$$\begin{aligned}L &= -\frac{F}{4} \\ \rho &= \frac{F}{4} = \frac{H^2}{2} = 3p\end{aligned}\tag{5.16}$$

Ao inserir o termo $\alpha^2 F^2$ na Lagrangeana (5.13), como se pode ver em (5.14 e 5.15), é abolida a restrição sobre o sinal da pressão, que a partir de agora pode assumir valores negativos, para pequenos valores do fator de escala. Assim, o que se espera desde já é um balanço entre a densidade de energia sempre positiva (obedecendo à condição de energia) e uma pressão negativa, possivelmente provocando uma mudança no comportamento da aceleração (3.5):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{H_0^2}{2a^4} \left(1 - 48\alpha^2 \frac{H_0^2}{a^4} \right)\tag{5.17}$$

Para determinar exatamente o que ocorre, é necessário conhecer a evolução temporal do fator de escala. Isso é feito substituindo (5.14) na equação de Friedmann (3.9)². Como \dot{a}^2 é sempre positivo, a condição $\rho a^2 - 3\epsilon \geq 0$ deve ser obedecida:

$$\begin{aligned} (\rho_F + \rho_{F^2}) \frac{a^2}{3} - \epsilon &\geq 0 \\ \frac{H_0^2}{6a^2} - \frac{8\alpha^2 H_0^2}{6a^6} &\geq \epsilon \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ao se tomar o limite $a \rightarrow 0$, chega-se a uma indeterminação, o que viola a condição acima imposta. Como consequência, o fator de escala não pode mais assumir valores infinitamente minúsculos, impondo um raio mínimo ao universo, que evita a singularidade inicial, independentemente seu comportamento temporal $a(t)$ e da curvatura da tri-seção.

Restringindo a discussão à seção euclideana (eq. 3.10), a evolução temporal de a é facilmente obtida:

$$\begin{aligned} \int dt &= \int_{a_0}^{a(t)} \frac{dA}{\sqrt{\frac{H_0^2}{6A^2} - \frac{8\alpha^2 H_0^4}{6A^6}}} \\ t - t_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{H_0} \sqrt{a^4 - 8\alpha^2 H_0^2} \\ a(t) &= \sqrt[4]{\frac{2}{3} H_0^2 [(t - t_1)^2 + 12\alpha^2]} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Logo, o raio mínimo ocorre quando $t = t_1$:

$$a_{min} = \sqrt[4]{8\alpha^2 H_0^2} \quad (5.20)$$

A densidade de energia anula-se no raio mínimo, o que está em completo acordo com (3.10). Neste ponto ocorre uma mudança de sinal na velocidade: colapso passa a expansão de forma suave, ou seja, sem nenhum salto devido a singularidades. Assim, esse evento convencionou-se chamar ‘rebounding’; e o universo descrito pela Lagrangeana (5.13) de ‘rebounding universe’[4].

No que concerne à aceleração, o universo apenas é desacelerado para valores em que $\rho + 3p > 0$, ou seja, para $a > \sqrt[4]{48\alpha^2 H_0^2}$ ou $(t - t_1)^2 > 60\alpha^2$. Na região de ‘rebounding’,

²Como o que se busca analisar é o caso em $a \rightarrow 0$, é mais conveniente escrever a equação sem divisões por a .

o universo expande-se ou contrai-se com aceleração positiva e a partir desse ponto passa a desacelerar.

Como visto na seção *Lei de conservação*, cada potência do invariante F comporta-se como um fluido perfeito não-interagente. Portanto a partir de uma determinada região, a não-linearidade, responsável pelo ‘bouncing’, deve deixar de atuar e linearidade reaparece. Esse limite ocorre para valores de $(t-t_1)^2$ muito maiores do que $12\alpha^2$ ($(t-t_1)^2 \gg 12\alpha^2 \rightarrow$ solução linear). Desta maneira, a troca de sinal da aceleração ocorre na fase de transição entre ‘bouncing’ e radiação.

Conforme o fator de escala cresce, a densidade de energia ρ aumenta, até atingir o máximo em $\rho_{max} = 16\alpha^2 H_0^2$, que corresponde a $(t-t_1)^2 = 12\alpha^2$ e começar a decrescer.

Logo, as fases têm como uma boa distinção a mudança no sinal da taxa de variação da densidade de energia: $(t-t_1)^2 \ll 12\alpha^2$, era de ‘bouncing’; $(t-t_1)^2 \gg 12\alpha^2$, era de radiação.

Apesar de conseguir contornar o problema da singularidade inicial, ainda resta uma limitação do modelo padrão que este não conseguiu abordar com sucesso: a expansão desacelerada de duração indefinida. Este é o objetivo do modelo apresentado a seguir: propor um modelo que abarque naturalmente a atual expansão acelerada do universo.

5.3 Universo magnético e a aceleração do universo

[7, 8]

O modelo padrão fornece um cenário de *expansão* desacelerada, que se sabe ser apenas uma parte do passado do universo.

Recordando a conservação independente dos fluidos, representados pelas potências F^j , e a dependência de qualquer das potências com a^{-4} , surge a sugestão de que um termo de potência negativa em F possa ser o responsável por essa aceleração: uma vez que é desprezível em regime de campos F muito fortes (pequenos valores de a) e é a potência seguinte de F à linear, e seria a próxima potência a dominar a Lagrangeana.

Assim, tomando-se a Lagrangeana [7]

$$L = -\frac{F}{4} - \frac{\mu^2}{F} \quad (5.21)$$

obtém-se as fontes associadas:

$$\rho = \frac{F}{4} - \frac{\mu^2}{F} = \frac{H_0^2}{2a^4} + \frac{\mu^2 a^4}{2H_0^2} \quad (5.22)$$

$$p = \frac{F}{12} - \frac{7}{3} \frac{\mu^2}{2} = \frac{H_0^2}{6a^4} - \frac{7}{6} \frac{\mu^2 a^4}{H_0^2} \quad (5.23)$$

A constante μ pode ser determinada a partir das medidas da aceleração do universo. Estas são determinadas por explosões de supernovas tipo IA, que servem como velas padrão.

Antes de qualquer análise sobre o sinal de \ddot{a} , é necessário saber se com a adição do termo $\frac{\mu^2}{F}$ a expansão é mantida. Olha-se o comportamento de um invariante da teoria, o escalar de curvatura:

$$R = T = \rho - 3p = \frac{4\mu^2}{H_0^2} a^4 \quad (5.24)$$

O termo $\frac{\mu^2}{F}$ somente passa a dominar sobre $\frac{F}{4}$ quando $a = \sqrt[4]{\frac{H_0^2}{\mu}}$, e R cresce indefinidamente.

Como ocorrido na descrição imediatamente anterior, a existência de um termo negativa em uma das variáveis, possibilita a mudança de sinal de $\rho + 3p$. Para verificá-la, substituem-se as equações acima em (3.5) e impõe-se a condição de aceleração positiva:

$$\begin{aligned} 3\frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{H_0^2}{a^4} - \frac{3\mu^2}{H_0^2} a^4 \right) < 0 \\ a_{ac} &> \sqrt[8]{\frac{H_0^4}{3\mu^2}}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Como resultado, a aceleração aparece a partir de $a = \left(\frac{1}{3} \frac{H_0^4}{\mu^2} \right)^{1/8}$ e mantém-se indefinidamente, fornecendo uma solução ao problema da aceleração atual do universo. Contudo a singularidade inicial ainda faz-se presente.

O caminho natural a seguir é unir os dois modelos em um único cenário, que é a proposta examinada a seguir.

5.4 Universo Magnético Cíclico

O objetivo desta seção consiste em unir num único cenário, a fase de ‘bouncing’, a fase de radiação, a aceleração e ‘rebounding’, gerando um modelo completo do universo [10]. Será mostrado que essas quatro eras formam a base de um universo cíclico, dominado por campos magnéticos não-lineares.

Partindo da Lagrangeana:

$$L(F) = \alpha^2 F^2 - \frac{F}{4} - \frac{\mu^2}{F} + \frac{\beta^2}{F^2} \quad (5.26)$$

é possível estimar o comportamento do fator de escala, através dos seus pontos de retorno, por meio da equação (3.5).

Para tal, escreve-se os correspondentes à pressão p e à densidade de energia ρ :

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3} \left(-5\alpha^2 F^2 + \frac{F}{4} - \frac{7\mu^2}{F} + \frac{11\beta^2}{F^2} \right) = \frac{1}{3} \left(-20\alpha^2 \frac{H_0^4}{a^8} + \frac{H_0^2}{2a^4} - \frac{7\mu^2}{2H_0^2} a^4 + \frac{11\beta^2}{4H_0^4} a^8 \right) \\ \rho &= -\alpha^2 F^2 + \frac{F}{4} + \frac{\mu^2}{F} - \frac{\beta^2}{F^2} = -\frac{4\alpha^2 H_0^4}{a^8} + \frac{H_0^2}{2a^4} + \frac{\mu^2}{2H_0^2} a^4 - \frac{\beta^2}{4H_0^4} a^8 \end{aligned} \quad (5.27)$$

E a 1ª equação de FLRW é reescrita:

$$\begin{aligned} 3\frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{1}{2}(\rho + 3p) \\ &= -\frac{1}{2} \left(-6\alpha^2 F^2 + \frac{F}{2} - \frac{6\mu^2}{F} + \frac{10\beta^2}{F^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(-24\alpha^2 \frac{H_0^4}{a^8} + \frac{H_0^2}{a^4} - \frac{3\mu^2}{H_0^2} a^4 + \frac{5\beta^2}{2H_0^4} a^8 \right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Os pontos em que $\frac{\ddot{a}}{a} = 0$ são aqueles em que a aceleração troca de sinal. Para identificá-los, é preciso estudar a equação de quarto grau em F :

$$F^4 - \frac{F^3}{12\alpha^2} + \frac{\mu^2}{\alpha^2} F - \frac{5\beta^2}{3\alpha^2} = 0 \quad (5.29)$$

Para uma primeira avaliação, é interessante recordar do fato de que cada fator de potência k de F comporta-se como um fluido perfeito independente. Desta maneira, a Lagrangeana

L pode ser vista como a composição de quatro Lagrangeanas:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \alpha^2 F^2 \\
L_2 &= -\frac{F}{4} \\
L_3 &= -\frac{\mu^2}{F} \\
L_4 &= \frac{\beta^2}{F^2}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

E como correspondência, há pressão e densidade de energia associadas:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= -\frac{4\alpha^2 H_0^4}{a^8} & p_1 &= \frac{-20\alpha^2 H_0^4}{3a^8} & \rho_1 + 3p_1 &= -24\alpha^2 \frac{H_0^4}{a^8} \\
\rho_2 &= \frac{H_0^2}{2a^4} & p_2 &= \frac{H_0^2}{6a^4} & \rho_2 + 3p_2 &= \frac{H_0^2}{a^4} \\
\rho_3 &= \frac{\mu^2}{2H_0^2} a^4 & p_3 &= -\frac{7\mu^2}{6H_0^2} a^4 & \rho_3 + 3p_3 &= -\frac{3\mu^2}{H_0^2} a^4 \\
\rho_4 &= -\frac{\beta^2}{4H_0^4} a^8 & p_4 &= \frac{11\beta^2}{12H_0^4} a^8 & \rho_4 + 3p_4 &= \frac{5\beta^2}{2H_0^4} a^8
\end{aligned}$$

A partir da equação de Friedmann, torna-se possível estudar a evolução do fator de escala em cada caso.

Começando a análise pela Lagrangeana L_1 , observa-se que \ddot{a}_1 é sempre positivo, independentemente das constantes α e H_0 e, o mais importante, independente do valor de a_1 .

$$3 \frac{\ddot{a}_1}{a_1} = 12\alpha^2 \frac{H_0^4}{a_1^8} > 0 \tag{5.31}$$

Logo, a Lagrangeana L_1 , induz uma aceleração.

Contudo, a equação (3.9) de vínculo, impede que ρ seja negativo. Portanto, o termo correspondente à Lagrangeana L_1 não chega a ser dominante sobre L_2 , o mínimo valor que L_1 pode assumir é o mesmo valor de L_2 , ou seja, $\rho_{BR} = 0$, o que corresponde a $\theta_{BR} = 0$:

$$\begin{aligned}
\rho_{BR} &= \frac{\theta^2}{3} \\
&= 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \\
&= -\alpha^2 F^2 + \frac{F}{4} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Tal ponto corresponde a:

$$a_{bouncing} = (8\alpha^2 H_0^2)^{1/4} \tag{5.33}$$

Este é o ponto onde ocorre o que se convém chamar de ‘bouncing’ ou ricochete. Assim, o período mais jovem do universo é descrito pela soma das Lagrangeanas L_1 e L_2 :

$$L_{BR} = \alpha^2 F^2 - \frac{F}{4} \quad (5.34)$$

Mas, trata-se de uma *expansão* acelerada, e logo a Lagrangeana L_1 será desprezível perante L_2 . Tendo em vista, a condição:

$$\rho \geq 0 \quad (5.35)$$

ser completamente obedecida por L_2 , resta apenas saber as alterações na natureza da aceleração. Para isso, destaca-se a equação de Friedmann para esta Lagrangeana:

$$3 \frac{\ddot{a}_2}{a_2} = -\frac{H_0^2}{2a^4} < 0 \quad (5.36)$$

Ao contrário do que acontece com L_1 , \ddot{a}_2 é sempre negativo, o que indica um período de desaceleração devido a L_2 . Entretanto, conforme equação (3.9), $a(t)$ ainda cresce, mesmo que em desaceleração. Como consequência, a terceira Lagrangeana passa a dominar sobre a segunda. E, mais uma vez, o sinal da aceleração muda:

$$3 \frac{\ddot{a}_3}{a_3} = \frac{3\mu^2}{2H_0^2} a_3^4 > 0 \quad (5.37)$$

O que indica a retomada da expansão acelerada (e respeitando o vínculo imposto ao sinal de ρ). E mais uma vez, o próximo termo da Lagrangeana sobrepõe-se, alterando a natureza da expansão:

$$3 \frac{\ddot{a}_4}{a_4} = -\frac{5\beta^2}{4H_0^4} a_4^8 < 0 \quad (5.38)$$

Assim como ocorre com L_1 , a densidade de energia é sempre negativa para a Lagrangeana L_4 . Assim, para valores grandes de a , o termo L_4 apenas ‘freia’ a ação de L_3 , fazendo com que θ anule-se e mude de sinal.

Logo, uma boa avaliação do cenário completo pode ser obtida, através da separação em três grandes períodos:

- ‘Bouncing’-Radiação:

$$L_{BR} = \alpha^2 F^2 - \frac{F}{4} \quad (5.39)$$

- Radiação-Aceleração:

$$L_{RA} = -\frac{F}{4} - \frac{\mu^2}{F} \quad (5.40)$$

- Aceleração-‘Rebounding’:

$$L_{ArB} = -\frac{\mu^2}{F} + \frac{\beta^2}{F^2} \quad (5.41)$$

5.4.1 Princípio de simetria

Como concluído na seção anterior, o universo comporta-se como um espelho, quanto aos pares de Lagrangeanas L_1 e L_4 , e L_2 e L_3 , as quais são funções de potências de F :

$$\begin{aligned} L_1 &= L_1(F^2) \\ L_4 &= L_4\left(\frac{1}{F^2}\right) \\ L_2 &= L_2(F) \\ L_3 &= L_3\left(\frac{1}{F}\right) \end{aligned} \quad (5.42)$$

Uma maneira interessante de formalizar este fato é tornar a Lagrangeana invariante pela troca de F por $\frac{\lambda}{F}$:

$$\begin{aligned} L &= L(F) = \alpha^2 F^2 - \frac{F}{4} - \frac{\mu^2}{F} + \frac{\beta^2}{F^2} \\ L' &= L'\left(\frac{1}{F}\right) = \alpha^2 \frac{\lambda^2}{F^2} - \frac{\lambda}{4F} - \frac{\mu^2 F}{\lambda} + \frac{\beta^2 F^2}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Ou seja, $L = L'$:

$$\begin{aligned} L &= L' \\ \alpha^2 F^2 - \frac{F}{4} - \frac{\mu^2}{F} + \frac{\beta^2}{F^2} &= \alpha^2 \frac{\lambda^2}{F^2} - \frac{\lambda}{4F} - \frac{\mu^2 F}{\lambda} + \frac{\beta^2 F^2}{\lambda^2} \\ &\Downarrow \\ \lambda &= 4\mu^2 \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\beta^2 = 16\mu^4\alpha^2 \quad (5.45)$$

Assim, a Lagrangeana

$$L = \alpha^2 F^2 - \frac{F}{4} - \frac{\mu^2}{F} + \frac{16\mu^4\alpha^2}{F^2} \quad (5.46)$$

é invariante pela troca $F \rightarrow \frac{4\mu^2}{F}$. Como consequência direta, observa-se que $L(F)$, também é invariante de escala, pois $F = \frac{F_0}{a^4}$. Então:

$$\begin{aligned} F' &= \frac{4\mu^2}{F} \\ a' &= \frac{H_0}{\sqrt{\mu}} \frac{1}{a} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Essa invariância aparece na métrica através de uma métrica espacial conforme:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - a^2(t) (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \\ &= dt^2 - a^2(t) (dr^2 + r^2 d\Omega^2) g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{00} dt^2 + g_{ii} (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \\ &= g_{00} dt^2 + \gamma_{ij} (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \\ &= g_{00} dt^2 + \frac{\tilde{\gamma}_{ij}}{\omega^2} (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \end{aligned} \quad (5.48)$$

onde

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 \\ g_{ii} &= a^2(t) \end{aligned} \quad (5.49)$$

A métrica espacial γ_{ij} tem g_{ii} como suas componentes não-nulas e o seguinte mapeamento conforme:

$$\tilde{\gamma}_{ij} = \omega^2 \gamma_{ij} = \frac{H_0^2}{\mu} \gamma_{ij} \quad (5.50)$$

Portanto, a constante ω é, na verdade, a mesma constante que leva a em a' ; o que é resultado direto da conservação independente dos fluidos e do princípio de simetria, este inspirado pelo comportamento de \ddot{a} nos três regimes anteriormente explicitados.

Com a Lagrangeana simetrizada, restam apenas duas constantes a serem determinadas pela experimentação: α e μ . Determinadas, oportunizam o estudo do comportamento global da aceleração, através dos pontos de retorno, obtidos pela equação de Friedmann:

$$3 \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2} (\rho + 3p) = 0 \quad (5.51)$$

e o comportamento da velocidade de expansão, através das raízes da equação:

$$\rho = 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = 0 \quad (5.52)$$

- Raízes de $\rho + 3p = 0$:

Ao escrever a equação em termos do invariante F , recai-se na equação de 4^o grau:

$$\begin{aligned}\rho + 3p &= -6\alpha^2 F^2 + \frac{F}{2} - \frac{6\mu^2}{F} + \frac{160\mu^4\alpha^2}{F^2} = 0 \\ F^4 - \frac{F^3}{12\alpha^2} + \frac{\mu^2}{\alpha^2}F - \frac{80}{3}\mu^4 &= 0\end{aligned}\quad (5.53)$$

Para resolvê-la, aplica-se o *Método de Ferrari* [16], que consiste em restringir uma equação de 4^o grau (equação acima) a uma de 3^o, que neste caso é:

$$t^3 + \left(\frac{320}{3}\mu^4 - \frac{1}{12}\frac{\mu^2}{\alpha^4}\right)t - \frac{22}{27}\frac{\mu^4}{\alpha^4} = 0, \quad (5.54)$$

Escolhe-se a raiz a ser substituída em:

$$v^2 + \left[-\frac{1}{24\alpha^2} \mp \sqrt{\left(\frac{1}{576\alpha^4} + t_1\right)}\right]v + \frac{t_1}{2} \mp \sqrt{\left[\left(\frac{t_1}{2}\right)^2 + \frac{80\mu^4}{3}\right]} = 0 \quad (5.55)$$

tal que os radicais acima sejam reais.

Para fazê-lo, é necessário conhecer a natureza das raízes de (5.54). Isto é possível pela determinação sinal de seu discriminante:

$$\Delta = -108(q^3 + r^2) \quad (5.56)$$

onde

$$\begin{aligned}q &= \frac{1}{3} \left[\mu^2 \left(\frac{1}{4\alpha^4} - 64\mu^2 \right) \right] \\ r &= \frac{1}{6} \left[(-3) \left(-2\frac{\mu^4}{\alpha^4} \right) \right] \\ &= \frac{\mu^4}{\alpha^4}\end{aligned}\quad (5.57)$$

que são determinados a partir dos coeficientes de cada termo da equação.

Assim, conhecido o sinal de

$$\Delta = -4\mu^6 \left[\frac{1}{64\alpha^{12}} + 15\frac{\mu^2}{\alpha^8} - 3072\frac{\mu^4}{\alpha^4} - (64)^3 \mu^6 \right] \quad (5.58)$$

é possível saber quantas são as raízes reais e sua multiplicidade:

$\Delta < 0$: Uma raiz real;

$\Delta = 0$: Todas raízes reais com multiplicidade mínima igual a 2;

$\Delta > 0$: Três raízes reais distintas.

Para isso, é necessário conhecer os valores numéricos das duas constantes μ e α , são estimados pela observação da aceleração atual do universo e pela eletrodinâmica quântica.

Os valores obtidos mostram que o discriminante é positivo e, por isso há apenas três raízes reais distintas. Entretanto, apenas uma delas respeita a restrição de existência no campo dos reais os radiacais presentes na equação de 2^o grau.

Feita a substituição em (5.55), obtém-se três raízes reais positivas e uma raiz negativa, que é excluída, pois F é positivo definido. O par de soluções de cada uma das equações são as quatros raízes da equação de 4^o grau. As três raízes possíveis correspondem, respectivamente, às mudanças de fase de aceleração: aceleração ('bouncing') \mapsto desaceleração \mapsto aceleração \mapsto desaceleração ('rebounding').

- Raízes de $\rho = 0$:

A equação tem como solução os pontos onde ρ e \dot{a} anulam-se:

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = \rho = 0 \quad (5.59)$$

Ou seja, onde se espera a mudança do sinal da velocidade: expansão é substituída por retração e vice-versa.

Para determinar esses pontos, é necessário resolver a equação:

$$\begin{aligned} \rho = -\alpha^2 F^2 + \frac{F}{4} + \frac{\mu^2}{F} - \frac{16\mu^4 \alpha^2}{F^2} &= 0 \\ F^4 - \frac{F^3}{4\alpha^2} - \frac{\mu^2}{\alpha^2} F + 16\mu^4 &= 0 \end{aligned} \quad (5.60)$$

que assim como no item anterior, é uma equação de 4^o grau. Procedendo de maneira análoga, tem-se a equação de 3^o grau:

$$t^3 + \left[\mu^2 \left(\frac{1}{4\alpha^4} - 64\mu^2 \right) \right] t - \frac{2\mu^4}{\alpha^4} = 0. \quad (5.61)$$

São soluções desta equação:

$$t_1 = 8\mu^2 \quad (5.62)$$

$$\begin{aligned} t_2 &= -4\mu^2 + \sqrt{16\mu^4 - \frac{\mu^2}{4\alpha^4}} \\ t_3 &= -4\mu^2 - \sqrt{16\mu^4 - \frac{\mu^2}{4\alpha^4}} \end{aligned} \quad (5.63)$$

cuja solução real qualquer t_1 , substituída em

$$v^2 + \left[-\frac{1}{8\alpha^2} \mp \sqrt{\left(\frac{1}{64\alpha^4} + t_1\right)} \right] v + \frac{t_1}{2} \mp \sqrt{\left[\left(\frac{t_1}{2}\right)^2 - 16\mu^4\right]} = 0 \quad (5.64)$$

resulta nas soluções da equação (5.60) .

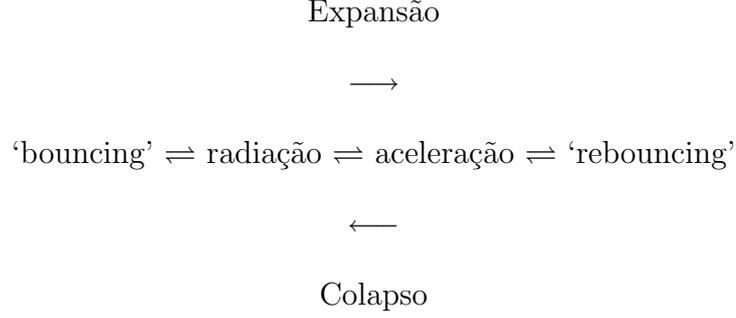
Conhecidos os valores das constantes α e μ , é possível afirmar que t_1 e t_2 são números complexos, o que resulta em t_1 como única possibilidade de substituição na equação acima.

Substituindo $8\mu^2$ em (5.64), obtém-se:

$$v^2 + \left[-\frac{1}{8\alpha^2} \mp \sqrt{\left(\frac{1}{64\alpha^4} + 8\mu^2\right)} \right] v + 4\mu^2 = 0 \quad (5.65)$$

cujas soluções são reais em primeira aproximação em μ^2 .

A primeira solução corresponde a um valor muito pequeno de campo e a segunda a um muito grande. Como já discutido anteriormente, estes dois pontos são, respectivamente, o mínimo ($\ddot{a} > 0$) e o máximo ($\ddot{a} < 0$) do fator de escala, pois $\dot{a} = 0$. Ao atingir a fase em que os termos L_3 e L_4 são dominantes, o universo está em expansão, portanto, ao alcançar a_{max} , o único caminho é a retração; o que foi batizado de ‘rebounding’. Em contínua retração, o universo caminha de volta à região do ‘bouncing’, dominada por L_1 e L_2 . Desta forma, o que se apresenta é um universo com comportamento cíclico, com fases alternadas de aceleração e desaceleração.



5.4.2 Cenário completo

Na seção anterior estudou-se o comportamento global do fator de escala usando a separabilidade de L em Lagrangeanas quatro independentes. Observou-se os simples pontos de inflexão e os pontos de máximo e de mínimo, usando as equações de Raychaudhuri e de vínculo.

No entanto, é interessante que se obtenha uma forma explícita para o fator de escala em função do tempo $a(t)$. Para isso, é necessário tomar a Lagrangeana completa L , e resolver o sistema de equações:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p) &= 0 \\ 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \epsilon &= \rho \end{aligned} \quad (5.66)$$

onde ϵ é a curvatura da tri-seção espacial e

$$\begin{aligned} \rho = -L &= -\alpha^2 F^2 + \frac{F}{4} + \frac{\mu^2}{F} - \frac{16\mu^4\alpha^2}{F^2} \\ p = L - \frac{4}{3}L_F F &= \frac{1}{3}\left(-5\alpha^2 F^2 + \frac{F}{4} - \frac{7\mu^2}{F} + \frac{176\mu^4\alpha^2}{F^2}\right) \end{aligned} \quad (5.67)$$

Como consequência da equação de conservação, já foi mostrado que se obtém a dependência de F com a :

$$F = \frac{2H_0^2}{a^4} \quad (5.68)$$

Portanto, resta extrair a informação contida na segunda equação (eq. (3.9)). O primeiro passo é saber em qual tipo de seção espacial se está. Como atualmente acredita-se de que se trata de um universo plano, a sua curvatura ϵ deve ser nula, o que aqui

implica em:

$$\begin{aligned}
\rho &= 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \\
\frac{da}{dt} &= \sqrt{\frac{\rho a^2}{3}} \\
\int dt &= \int \frac{da}{\sqrt{\frac{1}{3} \left[-\frac{4\alpha^2 H_0^4}{a^6} + \frac{H_0^2}{2a^2} + \frac{\mu^2}{2H_0^2} a^6 - \frac{4\mu^4 \alpha^2}{H_0^4} a^{10} \right]}} \quad (5.69)
\end{aligned}$$

A integral do 2º lado da equação não possui solução exata. Logo, é necessário escolher um método de aproximação que permita conhecer o comportamento geral de $a(t)$ e visualizar suas propriedades mais importantes, como por exemplo a simetria de $a \rightarrow a'$. Escolheu-se como caminho para essa aproximação, a separação proposta na seção citada acima, que se mostrou como um caminho natural, tendo em vista a possibilidade de compatibilização com os resultados anteriores.

Em cada divisão, regida por uma Lagrangeana, há uma correspondente densidade de energia que fará parte da integral em a , resultando num comportamento diferente em função de t :

- i) ‘Bouncing’-Radiação:

A Lagrangeana dominante neste período é aquela em que há somente potências positivas de F :

$$L_{BR} = \alpha^2 F^2 - \frac{F}{4} \quad (5.70)$$

assim a aproximação de descartar os dois termos restantes mostra-se muito razoável em regime de campos fortes.

Dada então a Lagrangeana, a densidade ρ é diretamente determinada:

$$\rho_{BR} = -L_{BR} = -\frac{4\alpha^2 H_0^4}{a^8} + \frac{H_0^2}{2a^4} \quad (5.71)$$

Ao se substituir em (3.10), e efetuar as operações de integração, obtém-se:

$$t - t_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{H_0} \sqrt{a^4 - 8\alpha^2 H_0^2} \quad (5.72)$$

Para valores grandes de a^4 em comparação ao produto $8\alpha^2 H_0^2$, a dependência de t com a é apenas:

$$t - t_1 \sim \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{H_0} a^2 \quad (5.73)$$

Se ao invés de escrever t em termos de a , fizer-se $a(t)$, encontra-se a seguinte dependência:

$$a_{BR}(t) = \left[\frac{2}{3} H_0^2 [(t - t_1)^2 + 12\alpha^2] \right]^{1/4} \quad (5.74)$$

E ao tomar o limite $(t - t_1)^2 \gg 12\alpha^2$, recupera-se a mesma dependência de a por t e vice-versa:

$$\begin{aligned} a_{BR}(t) &\sim \left[\sqrt{\frac{2}{3}} H_0 (t - t_1) \right]^{1/2} \\ t - t_1 &\sim \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{H_0} a_{BR}^2 \end{aligned} \quad (5.75)$$

- ii) Radiação-Aceleração:

Como uma fase de transição entre a região em que a densidade de matéria é inversamente proporcional ao fator de escala e a região proporcional a a , a Lagrangeana dominante é composta pelos dois termos de potência intermediária (F e $\frac{1}{F}$):

$$L = -\frac{F}{4} - \frac{\mu^2}{F} \quad (5.76)$$

Quanto mais a cresce, mais o termo em F^2 passa a ser desprezível perante F e mais ainda perante $\frac{1}{F}$; mas, se a ainda não é grande o suficiente para que $L_3 \sim L_4$, então se tem uma boa descrição dessa transição.

A densidade de energia ρ é escrita, a partir da Lagrangeana:

$$\rho_{RA} = -L_{RA} = \frac{H_0^2}{2a^4} + \frac{\mu^2}{2H_0^2} a^4 \quad (5.77)$$

Substitui-se na equação (3.10) e integra-se:

$$t - t_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\mu}} \text{EllipticF} \left(\arccos \left[\frac{1 - \frac{\mu a^4}{H_0^2}}{1 + \frac{\mu a^4}{H_0^2}} \right], \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (5.78)$$

onde $EllipticF(z, k)$ é uma função elíptica incompleta de 1^o tipo, ou função inversa de Jacobi. Ela é dita incompleta porque seu segundo argumento é uma constante.

Para que se tenha $a(t)$, é necessário inverter a função elíptica. Isso é feito usando o fato de que:

$$EllipticF(z, k) = InverseJacobiSN(z, k) \quad (5.79)$$

Assim, basta tomar a inversa em ambos os lados da equação:

$$InverseEllipticF(z, k) = JacobiSN(InverseJacobiSN(z, k), k) = z \quad (5.80)$$

Como z é função de a , é possível escrevê-la:

$$z = \arccos \left[\frac{1 - \frac{\mu a^4}{H_0^2}}{1 + \frac{\mu a^4}{H_0^2}} \right] = JacobiSN \left(2\sqrt{\frac{2\mu}{3}} (t - t_2), \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (5.81)$$

onde $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto $a(t)$ é:

$$a_{RA}(t) = \frac{H_0^{2/4}}{\mu} \left[\frac{1 - \cos \left(JacobiSN \left(2\sqrt{\frac{2\mu}{3}} (t - t_2), \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)}{1 + \cos \left(JacobiSN \left(2\sqrt{\frac{2\mu}{3}} (t - t_2), \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)} \right]^{1/4} \quad (5.82)$$

- iii) Aceleração-‘Rebounding’:

Quando $\frac{1}{F} \gg F$, passa-se ao terceiro e último estágio, o da aceleração seguida por um novo ‘bouncing’. Nessa fase, somente os termos com potências negativas de F são levados em conta na aproximação. Assim, a Lagrangeana fica:

$$L_{ArB} = -\frac{\mu^2}{F} + \frac{16\mu^4\alpha^2}{F^2} \quad (5.83)$$

Para que obtenha $a_{RA}(t)$, procede-se da mesma maneira feita no item i. Encontra-se ρ , a partir da Lagrangeana

$$\rho_{ArB} = -L_{AB} = -\frac{\mu^2}{2H_0^2}a^4 - \frac{\beta^2}{4H_0^4}a^8 \quad (5.84)$$

E integra-se a equação (3.10), para que se obtenha t em termos de a :

$$t - t_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{H_0^2}{a^2} - 8\mu^2\alpha^2} \quad (5.85)$$

Quando $\frac{H_0^2}{a^4} \gg 8\mu^2\alpha^2$, a dependência de t com a é simplesmente:

$$t - t_3 \sim -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\mu} \frac{H_0}{a^2} \quad (5.86)$$

Ao se escrever a em termos de t , o que se tem é:

$$a_{ArB}(t) = \left[\frac{2}{3} \frac{\mu^2}{H_0^2} [(t - t_3)^2 + 12\alpha^2] \right]^{-1/4} \quad (5.87)$$

E fazendo o limite para $(t - t_3)^2 \gg 12\alpha^2$, recupera-se novamente o limite anterior:

$$\begin{aligned} a_{ArB}(t) &\sim \left[\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\mu}{H_0} (t - t_3) \right]^{-1/2} \\ t - t_3 &\sim -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\mu} \frac{H_0}{a^2} \end{aligned} \quad (5.88)$$

Ajuste das condições iniciais

É interessante fazer a conexão entre as três regiões, para propagar as condições iniciais; uma vez que uma equação diferencial de 1ª ordem (3.10) não possui mais do que uma constante de integração (t_i). Para tal, observa-se o comportamento das funções nas duas regiões intermediárias, ou seja, as dominadas por L_2 e L_3 , respectivamente.

Radiação

O primeiro amálgama é feita entre as eras de ‘Bouncing’-Radiação e Radiação-Aceleração. Devido à separabilidade das Lagrangeanas L_i , o que se espera é que, em determinados limites, cada uma das fases recaia na fase de radiação, que é representada pelo termo comum às duas Lagrangeanas L_{BR} e L_{RA} (5.1)

Ao substituir L_2 em (4.15), obtém-se:

$$\rho_2 = -L_2 = \frac{F}{4} \quad (5.89)$$

E da equação

$$\int dt = \int \frac{da}{\sqrt{\frac{\rho a^2}{3}}} \quad (5.90)$$

segue que

$$\begin{aligned} t - t_R &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{H_0} a^2 \\ a_R &= \left[\sqrt{\frac{2}{3}} H_0 (t - t_R) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (5.91)$$

que se reconhece como o limite de a_{RB} , para $t - t_1 \gg 12\alpha^2$ ou $a^4 \gg 8\alpha^2 H_0^2$. Como consequência $t_R = t_1$.

Resta agora saber se a_{RA} é compatível com a_R quando $F \gg \frac{1}{F}$ ³. Partindo da expressão (5.78), toma-se o limite $x = \frac{\mu a^4}{H_0^2} \ll 1$. A função elíptica $EllipticF \left[\arccos \left(\frac{1-x}{1+x} \right), \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$, nesse regime, comporta-se, em até 1ª ordem, como:

$$EllipticF \left[\arccos \left(\frac{1-x}{1+x} \right), \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \simeq 2\sqrt{x} \quad (5.92)$$

o que leva a

$$\begin{aligned} t - t_2 &\simeq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\mu}} [2\sqrt{x}] \\ &\simeq \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{a^2}{H_0} \end{aligned} \quad (5.93)$$

ou

$$a_{BR}(t) \simeq \sqrt[4]{\frac{2H_0^2}{3}} \sqrt{t - t_2} \quad (5.94)$$

que é exatamente o comportamento esperado quando há somente radiação, quando as constantes de integração t_2 e t_R são iguais. Assim:

$$t_2 = t_R = t_1 \quad (5.95)$$

³Como se mostrou mais difícil determinar a expansão em série de a_{RA} para grandes valores de t , os dois limites foram tomados a partir da expressão de $t(a)$, de maneira a uniformizar o procedimento e simplificar a análise.

Aceleração

O segundo laço é feito através da fase de aceleração, que mais uma vez é o termo comum às Lagrangeanas L_{RA} e L_{ArB} .

Quando há somente a Lagrangeana de aceleração L_3 , o comportamento $a(t)$, encontrado através da expressão (5.78) é:

$$t - t_A = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{H_0}{\mu} a^{-2} \quad (5.96)$$

ou

$$a_A(t) = \left[\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\mu}{H_0} (t - t_A) \right]^{-1/2} \quad (5.97)$$

Então o que se espera é que o comportamento do fator de escala nas fases de radiação-aceleração e aceleração-‘rebouncing’, nos limites em que o termo em $\frac{1}{F}$ for dominante, coincidam com o apresentado acima.

Ao comparar com o limite de a_{ArB} para campos fracos, ou seja, $\frac{H_0^2}{a^4} \gg 8\mu^2\alpha^2$ (ou $(t - t_3)^2 \gg 12\alpha^2$), observa-se que é ocorre a coincidência, desde que $t_A = t_3$.

Para fazer essa mesma comparação com a_{RA} , toma-se o limite de $t - t_2$ quando $x = \frac{\mu a^4}{H_0^2} \gg 1$. Para fazê-lo, foi necessário utilizar um pequeno artifício de mudança de variável ($y = \frac{1}{x}$), tendo em vista a impossibilidade de uma expansão para x muito grande. Essa foi a razão da escolha da variável de expansão ser x e não t : uma substituição simples em (5.78) fornece o comportamento dessa região, o que não ocorre em (5.82).

Dito isto, reescreve-se $t - t_1$ agora como função de y :

$$t - t_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\mu}} \text{EllipticF} \left[\arccos \left(\frac{y-1}{y+1} \right), \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \quad (5.98)$$

Assim, quando $y \ll 1$, se tem o limite desejado ($x = \frac{\mu a^4}{H_0^2} \gg 1$) para a função elíptica:

$$\text{EllipticF} \left[\arccos \left(\frac{y-1}{y+1} \right), \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \simeq \pi - 2\sqrt{y} \quad (5.99)$$

em 1ª ordem.

Assim, o comportamento de t , neste regime é dado por:

$$\begin{aligned}
t - t_1 &\simeq -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{H_0}{\mu} a^{-2} + \pi \sqrt{\frac{3}{2\mu}} \\
t - \left(t_1 + \pi \sqrt{\frac{3}{2\mu}}\right) &\simeq -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{H_0}{\mu} a^{-2} \\
t - t_3 &\simeq -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{H_0}{\mu} a^{-2}
\end{aligned} \tag{5.100}$$

que é exatamente o mesmo da fase de aceleração somente, com:

$$t_3 = t_A = t_1 + \pi \sqrt{\frac{3}{2\mu}}. \tag{5.101}$$

Logo, ao fazer os limites de cada fase, as constantes de integração são escritas em termos um só parâmetro arbitrário, fixo pelas condições iniciais. Então, da solução de vínculo (3.10), tem-se uma constante e , da equação de conservação (4.12), a outra - H_0 . O que é esperado, tendo em vista que se trocou uma equação diferencial de 2ª ordem (3.5) pelas duas acima, que são equações diferenciais de primeira ordem.

Como mostrado na seção *Princípio de simetria*, $a \rightarrow \frac{1}{a'}$ quando $F = F'$, portanto, $a_{BR}(t) \rightarrow a_{ArB}(t)$:

$$\begin{aligned}
a_{BR} &= \frac{H_0}{\sqrt{\mu}} \frac{1}{a_{ArB}} \\
\left(\frac{2}{3} H_0^2 [(t - t_1)^2 + 12\alpha^2]\right)^{1/4} &= \frac{H_0}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{2}{3} \frac{\mu^2}{H_0^2} [(t - t_3)^2 + 12\alpha^2]\right)^{1/4}
\end{aligned} \tag{5.102}$$

Ou, de outra maneira,

$$(t - t_1)^2 = (t - t_3)^2 \tag{5.103}$$

Assim, a dependência do fator de escala é em cada um dos regimes:

- ‘Bouncing-radiação’:

$$a_{RB}(t) = \left(\frac{2}{3} H_0^2 [(t - t_1)^2 + 12\alpha^2]\right)^{1/4} \tag{5.104}$$

- Radiação:

$$a_R(t) = \sqrt[4]{\frac{2H_0^2}{3}} \sqrt{t - t_1} \tag{5.105}$$

- Radiação-aceleração:

$$a_{RA}(t) = \frac{H_0^{2/4}}{\mu} \left[\frac{1 - \cos \left(\text{JacobiSN} \left(2\sqrt{\frac{2\mu}{3}} (t - t_2), \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)}{1 + \cos \left(\text{JacobiSN} \left(2\sqrt{\frac{2\mu}{3}} (t - t_2), \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)} \right]^{1/4} \quad (5.106)$$

- Aceleração:

$$a_A(t) = \left[\sqrt{\frac{2}{3} \frac{\mu}{H_0}} (t - t_A) \right]^{-1/2} \quad (5.107)$$

- Aceleração-‘Rebounding’

$$a_{ArB}(t) = \left[\frac{2}{3} \frac{\mu^2}{H_0^2} [(t - t_3)^2 + 12\alpha^2] \right]^{-1/4} \quad (5.108)$$

Estudando o comportamento de a_{RB} e de a_{ArB} , verifica-se a existência de um mínimo e de um máximo, respectivamente. Portanto, meio ciclo deve ser atingido, quando o universo vai de um destes pontos ao outro. Logo, um ciclo completo é dividido igualmente entre expansão e colapso, cada qual formado pelas quatro unidades básicas: ‘bouncing’-radiação-aceleração-‘rebounding’.

Capítulo 6

Conclusão

Com os resultados obtidos neste trabalho, ressaltou-se o papel de destaque da eletrodinâmica não-linear no contexto da cosmologia. Descreveu-se um cenário, cuja métrica homogênea e isotrópica, leva a um universo sem a singularidade inicial (Big Bang) e sem singularidade final (um universo que expande eternamente com aceleração positiva (Big Rip)), com uma fase de acelerada e com a fase de radiação regularmente descrita no modelo padrão.

Devido a singularidade inicial surgir da extensão da validade do modelo padrão até o limite $a(t) \rightarrow 0$, a adição de um termo não-linear dominante no regime de campos fortes ($\alpha^2 F^2$) mostrou-se eficiente ao evitar a singularidade inicial, pois fornece um raio mínimo para o universo, impedindo que o fator de escala anule-se. Em contrapartida, ao considerar uma Lagrangeana com o termo inversamente proporcional a $F^2 \left(\frac{\beta}{F^2} \right)$, impediu-se a expansão indefinidamente acelerada, gerada pela termo $\frac{1}{F}$, tendo em vista a existência de um raio máximo.

Apesar de não se ter obtido uma função analítica completa para o fator de escala, foi possível obter expressões fechadas em três fases, analiticamente conectadas; com base nas condições fornecidas pelas equações de Friedmann, em especial a de energia (2ª equação de Friedmann).

O fato da configuração de campos ser restrita ao caso magnético leva, particularmente neste modelo, à invariância sob o mapeamento $\tilde{F} \rightarrow \frac{4\mu^2}{F}$, que reflete a simetria de com-

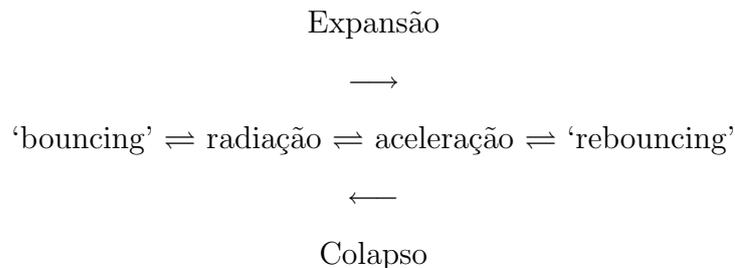
portamento do fator de escala, segundo a relação $a \rightarrow \tilde{a} = \frac{H_0}{\sqrt{\mu}a}$.

Essa simetria possibilita, no regime de campos muito fracos um ‘rebounding’, fazendo o universo entrar em colapso sem destruir sua estrutura. Depois de atingido o raio máximo, são percorridas novamente as quatro fases da Lagrangeana completa, porém agora com velocidade negativa, até atingir o ‘rebounding’, completando o ciclo.

De maneira mais esquemática:

- Fase 1: O universo apresenta um ‘bouncing’ nos tempos primórdios, no regime de campo mais forte;
- Fase 2: Com o crescimento do fator de escala, adentra-se na fase de radiação, descrita no modelo padrão da cosmologia;
- Fase 3: O universo atravessa sua fase acelerada, onde domina o termo $\frac{1}{F}$;
- Fase 4: O sinal da aceleração muda e o termo $\frac{1}{F^2}$ passa a dominar, semelhante ao ocorrido na fase 1, o universo sofre novo ricochete, com a diferença que agora o faz entrar em colapso.
- Fase 5: São percorridas novamente as quatro fases anteriores: 4-3-2-1, repetindo-se o processo indefinidamente.

Como ganho adicional à inexistência de um ‘Big Rip’, um problema muito comum em modelos cíclicos pode ser transposto, com a adição do termo proporcional a $\frac{1}{F^2}$: a dissolução das não-homogeneidades geradas durante o ciclo. Com essa nova fase de desaceleração, as possíveis não homogeneidades têm tempo de desaparecer e o universo voltar à configuração homogênea ao final de meio ciclo, mantendo a repetição indefinida de ciclos idênticos:



Referências Bibliográficas

- [1] Dongsu Ryu, Hyesung Kang, Jungyeon Cho and Santabrata Das, *Turbulence and Magnetic Fields in the Large Scale Structure of the Universe* (preprint astro-ph/08052466)
- [2] R Tolman e P Ehrenfest, Phys. Rev **36**, 1791 (1930).
- [3] F. Falciano, N. Pinto-Neto, E. Santini, *An Inflationary Non-singular Quantum Cosmological Model* (pre-print astro-ph/07071088)
- [4] V. De Lorenci, R. Klippert, M. Novello, and J. M. Salim, Phys. Rev. D **65**, 063501 (2002).
- [5] B. Ratra and P. Peebles, Phys. Rev **D 37**, 3406 (1988).
- [6] C. Wetterich, Nucl. Phys. **B302**, 668 (1988).
- [7] M. Novello, S.E. Perez Bergliaffa, J. Salim, Phys. Rev. **D 69**, 127301 (2004), astro-ph/0312093.
- [8] E. Goulart, *A Aceleração do Universo e a Eletrodinâmica Não-Linear* - Tese de mestrado, ed. CBPF, Rio de Janeiro (2004).
- [9] M. Novello, E. Goulart, J. Salim and S.E. Perez Bergliaffa, Class Quantum Gravity **bf 24**, 3021-3036 (2007), astro-ph/0312093.
- [10] M Novello, Aline N Araújo and J M Salim, *Cyclic Magnetic Universe* (preprint astro-ph/08021875)

- [11] R. Adler, M. Bazin, M. Schiffer: *Introduction to general relativity*, ed. McGraw-Hill, New York (1975)
- [12] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s relativity*, ed. Clarendon Press, Oxford (1993)
- [13] M. Novello, *II Brazilian School of Cosmology and Gravitation - Cosmologia Relativista*, Rio de Janeiro (1979).
- [14] M. Novello, *Tópicos de cosmologia relativista - Monografia XXXIV*, ed. CBPF, Rio de Janeiro (1974).
- [15] M. Novello and J Salim, *The Stability of a Bouncing Universe - 10th Marcel Grossman Meeting*, Singapore (2006) (preprint hep-th/0305254v2)
- [16] T. Davis e Fisher: *Tables of mathematical functions - Arithmetical tables, vol. III*, ed. Principia Press, Chicago (1962)
- [17] I. G. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products*, ed. Academic Press, Orlando (1983)
- [18] M Abramowitz and A. Stegun *Handbook of mathematical functions*, ed. Dover Publications, New York (1970)