

MARCELO JOSÉ REBOUÇAS

MODELOS DO UNIVERSO COM ROTAÇÃO DEPENDENTE DO TEMPO  
E A VIOLAÇÃO DA CAUSALIDADE NA COSMOLOGIA

Tese de

DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

- 1981 -

*Aos meus pais*

*Aos meus irmãos*

*À Graça*

## AGRADECIMENTOS

- A Mário Novello pela orientação, pelas discussões e por me haver iniciado na pesquisa científica.
- Aos meus pais Gaspar H. Rebouças e Nisete M. Rebouças pela amizade e carinho,
- À Graça M.S.S. Silva pelo paciente trabalho de revisão dos manuscritos, pela compreensão, amizade e carinho.
- A J. Ademir S. de Lima por inúmeras discussões valiosas e por haver colaborado em um dos trabalhos desta tese.
- A Mário J.D. Assad pelas discussões importantes.
- A Mário e Myriam Giambiagi pelo incentivo e apoio nos momentos de desânimo.
- À Clélia Mineiro pelo belo trabalho de datilografia e pela paciente convivência durante a fase final deste trabalho.
- A Ivano D. Soares, a quem devo parte de minha formação.
- A Amós e Leonel pelo estímulo durante a fase de preparação do manuscrito.
- A Antônio F.F. Teixeira por algumas discussões.
- Aos amigos do C.B.P.F., particularmente aos membros do P.R.I.

## R E S U M O

Construímos três classes de modelos do universo que são anisotrópicos, finitos, espacialmente homogêneos (Bianchi IX), inclinados, sem singularidades e com rotação dependente do tempo.

Apresentamos uma nova solução cosmológica e exata das equações de Einstein (Bianchi II) com rotação dependente do tempo.

Investigamos o fenômeno de quebra de causalidade em geometrias do tipo Gödel. Mostramos que alargando o espectro de possíveis fontes de curvatura, as dificuldades relativas ao fenômeno de violação da causalidade não desaparecem, tornam-se mais complexas e se ampliam.

# ÍNDICE

	Pág.
AGRADECIMENTOS .....	iii
RESUMO .....	iv
INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO 1 - GRUPOS DE LIE E GRUPOS DE MOVIMENTO	
1.1 - INTRODUÇÃO .....	4
1.2 - GRUPOS DE LIE .....	4
1.3 - GRUPOS DE TRANSFORMAÇÕES .....	16
1.4 - GRUPO DE ISOMETRIA .....	21
1.5 - GRUPO SIMPLEMENTE TRANSITIVO .....	25
1.6 - ISOTROPIA E HOMOGENEIDADE: O CRITÉRIO DE GRUPO .....	27
1.7 - A CLASSIFICAÇÃO DE BIANCHI .....	30
CAPÍTULO 2 - MODELOS COSMOLÓGICOS INCLINADOS	
2.1 - INTRODUÇÃO .....	37
2.2 - CONGRUÊNCIA DE CURVAS TIPO TEMPO E QUANTIDADES CINEMÁTICAS .....	37
2.3 - UMA NOTA SOBRE OS MODELOS COSMOLÓGICOS INCLINADOS ...	44
2.4 - CÁLCULO COM TETRADAS .....	56

CAPÍTULO 3 - VIOLAÇÃO DA CAUSALIDADE NA COSMOLOGIA	
3.1 - INTRODUÇÃO .....	61
3.2 - A MÉTRICA E O TENSOR DE RIEMANN .....	65
3.3 - A FONTE DE CURVATURA DAS SOLUÇÕES .....	67
3.4 - AS QUANTIDADES CINEMÁTICAS .....	70
3.5 - UM UNIVERSO COM ROTAÇÃO E SUCESSIVAS REGIÕES CAUSAIS E NÃO CAUSAIS .....	71
3.6 - UM UNIVERSO COM ROTAÇÃO QUE VIOLA A CAUSALIDADE .....	77
3.7 - AS CURVAS NÃO CAUSAIS SÃO GEODÉSICAS? .....	81
3.8 - CONSEQUÊNCIAS DA ESTRUTURA CAUSAL DAS SOLUÇÕES .....	83
3.9 - ALGUMAS REFLEXÕES SOBRE A CAUSALIDADE .....	85
CAPÍTULO 4 - MODELOS COSMOLÓGICOS COM ROTAÇÃO DEPENDENTE DO TEMPO	
4.1 - INTRODUÇÃO .....	88
4.2 - O TENSOR MOMENTUM ENERGIA DAS SOLUÇÕES .....	89
4.3 - A ESFERA $S^3$ COMO GRUPO DE LIE. A MÉTRICA .....	92
4.4 - AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN .....	98
4.5 - QUANTIDADES CINEMÁTICAS .....	105
4.6 - RESULTADOS DIVERSOS E ALGUNS COMENTÁRIOS .....	108
4.7 - UM UNIVERSO BIANCHI II COM ROTAÇÃO DEPENDENTE DO TEMPO .....	111
APÊNDICE A - NOTA SOBRE GEOMETRIA DIFERENCIAL .....	117
A.1 - VARIEDADE DIFERENCIÁVEL .....	117
A.2 - VETORES .....	120
A.3 - TENSORES E ÁLGEBRA TENSORIAL .....	125
A.4 - DERIVADA EXTERIOR E DERIVADA DE LIE .....	134
A.5 - DERIVADA COVARIANTE, TORÇÃO E 1 <sup>a</sup> EQUAÇÃO DE ESTRUTURA DE CARTAN .....	145

A.6 - CURVATURA E 2 <sup>a</sup> EQUAÇÃO DE ESTRUTURA DE CARTAN .....	152
A.7 - A MÉTRICA .....	157
REFERÊNCIAS .....	161

## INTRODUÇÃO

Como as interações nucleares são de curto alcance, e os agregados de matéria são eletricamente neutros, os fenômenos em larga escala do Universo devem ser governados pela interação gravitacional. Se a gravidade é de fato a influência dominante, então, a Relatividade Geral, como uma teoria de gravitação, deve ser capaz de fornecer uma descrição em larga escala do Universo.

No espaço-tempo da Relatividade Especial, um dado evento só possui relação de causa com os eventos de seu cone de luz do passado (que o podem influenciar), e os eventos do seu cone de luz do futuro (sobre os quais ele pode ter influência). As variedades espaço-tempo da Relatividade Geral são localmente Minkowskianas, e portanto, a causalidade é preservada localmente. A questão global é deixada em aberto. Em larga escala, podemos ter, na Relatividade Geral, o fenômeno de quebra ou violação da causalidade. Foi Gödel (19) quem apontou pela primeira vez este fato, demonstrando que seu modelo de universo possuía curvas tipo-tempo fechadas. A solução de Gödel tem como fonte um fluido perfeito de densidade constante.

Poder-se-ia argumentar que a fonte de curvatura do espaço-tempo de Gödel é demasiadamente simples, e que ampliando-se o espectro das fontes possíveis, a quebra de causalidade poderia ser evitada ou, quem sabe, tornar-se mais compreensível. Nas recentes investigações (47, 48), que apresentaremos com detalhes nesta tese, mostram, que se admitimos fontes de curvatura mais complexas, as dificuldades relativas ao fenômeno de violação da causalidade não desaparecem, se ampliam.

O problema de obter soluções das equações de Einstein, em que a fonte de curvatura do espaço-tempo possui rotação, é bastante antigo. Sua origem remonta ao ano de 1918, com o trabalho de Lense e Thirring (65). Bach (66), por exemplo, em 1922, tratou o problema de uma esfera de matéria girando lentamente, e obteve a solução de Schwarzschild como aproximação de ordem zero. Foi, no entanto, K. Gödel quem apresentou a primeira solução cosmológica exata das equações de Einstein com rotação.

A literatura das soluções cosmológicas e exatas das equações de Einstein com rotação é relativamente grande. Todas elas, no entanto, apresentam um aspecto em comum: a rotação é constante com respeito ao tempo. Tal característica provocou a idéia geral de que a estrutura das equações de Einstein para o campo gravitacional não permitia uma rotação dependente do tempo. Nesta tese, mostramos que é possível uma rotação que varie com o tempo, exibindo as duas primeiras classes de soluções cosmológicas e exatas das equações de Einstein (86, 87), em que a vorticidade é função do tempo.

No primeiro capítulo apresentamos numa linguagem independente de coordenadas, os principais resultados para um relativista, da teoria dos grupos de Lie. Tais resultados serão largamente utilizados em todo este trabalho de tese, principalmente no capítulo 4, onde mostramos como podemos dotar a esfera  $S^3$  de uma estrutura de grupo de Lie.

O segundo capítulo tem como objetivo básico a apresentação dos modelos cosmológicos inclinados. Isto porque, os modelos espacialmente homogêneos com rotação são inclinados. Este é, precisamente, o caso dos modelos cosmológicos apresentados no último capítulo desta tese.

Investigamos no capítulo 3 o fenômeno de quebra ou violação da causalidade, em geometrias tipo Gödel, com poeira mais campo eletromagnético como fonte de curvatura.

No capítulo 4, apresentamos e estudamos as propriedades fundamentais das duas primeiras classes de soluções cosmológicas das equações de Einstein em que a rotação é dependente do tempo.

Apresentamos, no apêndice A, algumas definições e resultados da Geometria Diferencial, que são largamente utilizados no corpo desta tese.

## CAPÍTULO I

### GRUPOS DE LIE E GRUPOS DE MOVIMENTO

#### 1.1 - INTRODUÇÃO

Nosso objetivo principal, nesta parte da tese, é fornecer os resultados mais importantes, para um relativista, da teoria dos grupos de Lie.

Procuramos apresentar as definições, os conceitos, os lemas e teoremas, de maneira independente de coordenadas. De nosso ponto de vista, a grande vantagem de tal enfoque, sobre o tratamento convencional com o uso de sistemas de coordenadas, está na facilidade com que conseguimos demonstrar alguns resultados, e na economia de espaço, pela linguagem compacta.

O grupo de isometria, largamente utilizado na gravitação, aparece, no contexto deste capítulo, como um caso particular dos grupos de Lie de transformações.

Os resultados deste capítulo serão amplamente utilizados em toda esta tese, principalmente no último capítulo, onde mostraremos como podemos dotar a esfera  $S^3$  de uma estrutura de grupo de Lie de transformações, e construiremos os campos invariantes sobre esta variedade grupo.

#### 1.2 - GRUPOS DE LIE

Do ponto de vista puramente lógico, o grupo de Lie representa a fusão de dois tipos de propriedades matemáticas fundamentais: algébricas (grupo) e topológicas (variedade). De outra forma: os grupos de Lie constituem uma classe especial de

variedades diferenciáveis, que são variedade e grupo simultaneamente, e com a operação de grupo diferenciável. Precisamente: um grupo de Lie  $G$  é um grupo que é ao mesmo tempo uma variedade diferenciável, tal que a multiplicação

$$G \times G \rightarrow G; \quad (q_1, q_2) \rightarrow q_1 q_2 \quad (1.2.1)$$

e a inversão

$$G \rightarrow G; \quad q \rightarrow q^{-1} \quad (1.2.2)$$

são mapeamentos  $C^\infty$ .

Historicamente, Sophus Lie (1842-1899) lidou apenas com problemas locais, isto é, a "porção" do grupo próximo à identidade. No entanto, em um grupo de Lie (como em todo espaço topológico), temos que distinguir entre as propriedades locais e as propriedades globais. Em toda esta tese, a menos que explicitamente digamos o contrário, nos problemas ligados a grupos de Lie, nossos resultados e afirmações se aplicam ou valem apenas localmente. Assim, por exemplo, diremos que uma variedade é invariante sob um dado grupo, e, na verdade, o que realmente exigimos, é a validade de nossa afirmação em uma dada vizinhança, na qual resolvemos ou integramos as equações de Einstein. Em algumas situações onde a distinção é crucial, usaremos a palavra localmente.

Dado um grupo de Lie  $G$ , temos naturalmente associados a ele dois mapeamentos, denominados de *translação à esquerda* e *translação à direita*, que definiremos a seguir. Seja  $G$  um grupo de Lie e  $q$  um elemento de  $G$ , para qualquer  $x \in G$ , os mapeamentos

$$L_q : G \rightarrow G; \quad x \rightarrow qx \quad \text{ou} \quad L_q x = qx \quad (1.2.3)$$

$$R_q : G \rightarrow G ; x \rightarrow xq \text{ ou } R_q x = xq \quad (1.2.4)$$

são chamados de translação  $\tilde{a}$  esquerda e translação  $\tilde{a}$  direita por  $q \in G$ , respectivamente. O mapeamento translação  $\tilde{a}$  esquerda tem um inverso  $(L_q)^{-1} = L_{q^{-1}}$ , onde  $q^{-1}$  é o inverso de  $q$  ( $q^{-1}q = q q^{-1} = q_0 = \text{identidade do grupo}$ ). Da mesma forma,  $(R_q)^{-1} = R_{q^{-1}}$ .

É fácil verificar que as translações  $\tilde{a}$  esquerda e  $\tilde{a}$  direita comutam entre si, ou seja

$$R_q L_{q^{-1}} = L_q R_q = 0, \quad (1.2.5)$$

Nosso próximo passo é a conceituação de campos invariantes  $\tilde{a}$  esquerda e  $\tilde{a}$  direita. Para isto, necessitamos de alguns conceitos de mapeamentos entre variedades, que apresentaremos agora. Sejam duas variedade  $M$  e  $M'$  de dimensão e classe  $n, n'$  e  $C^k, C^{k'}$ , respectivamente. Um mapeamento  $\phi : M \rightarrow M' ; x \rightarrow \phi(x)$ , é dito  $C^h$  ( $h \leq k, h \leq k'$ ), se para todas as coordenadas locais em  $M$  e  $M'$ , as coordenadas do ponto imagem  $\phi(x)$  em  $M'$  são funções  $C^h$  das coordenadas do ponto  $x$  em  $M$ .

Seja  $f$  uma função definida em  $M'$ , o mapeamento  $\phi$  induz, ou melhor, define uma função  $\phi^* f$  em  $M$  por

$$\phi^* f(x) = f(\phi(x)) = (f \circ \phi)(x) \quad (1.2.6)$$

ou seja, a função  $\phi^* f$  definida em  $M$  é tal que seu valor no ponto  $x \in M$  é o valor de  $f$  no ponto  $\phi(x) \in M'$ . Assim,  $\phi$  mapeia pontos de  $M$  em ponto de  $M'$ , e  $\phi^*$  mapeia funções de  $M'$  em  $M$ .

O mapeamento  $\phi$  também induz uma aplicação  $\phi_* : T_x(M) \rightarrow T_{\phi(x)}(M')$ , ou seja, um mapeamento entre vetores dos espaços tangentes a  $M$  no ponto  $x$  e a  $M'$  no ponto  $\phi(x)$ , definida por

$$(\phi_* X) [f] \Big|_{\phi(x)} = X [\phi^* f] \Big|_x = X [f \circ \phi] \Big|_x \quad (1.2.7)$$

onde  $f$  é uma função  $C^k$  arbitrária em  $\phi(x)$ , e  $X$  um vetor de  $T_x(M)$ .

Usando o mapeamento  $\phi_*$ , podemos definir o mapeamento de 1-formas  $\phi^* : T_{\phi(x)}^*(M) \rightarrow T_x^*(M)$ , pela condição que a contração de uma 1-forma com um vetor é preservada pela aplicação  $\phi^*$ . Assim, sejam  $\omega \in T_{\phi(x)}^*$  e  $\phi^*\omega$  1-forma imagem pelo mapeamento  $\phi^*$ , devemos, por definição, ter

$$(\phi^*\omega) [X] \Big|_x = \omega [\phi_*X] \Big|_{\phi(x)} \quad (1.2.8)$$

onde  $X$  é um vetor arbitrário de  $T_x(M)$ .

Sejam  $\phi_1 : M_1 \rightarrow M_2$  e  $\phi_2 : M_2 \rightarrow M_3$  mapeamentos diferenciáveis. A aplicação  $\phi_3 = \phi_2 \circ \phi_1 : M_1 \rightarrow M_3$  é tal que

$$(\phi_2 \circ \phi_1)^* = \phi_1^* \circ \phi_2^* \quad (1.2.9)$$

e

$$(\phi_2 \circ \phi_1)_* = (\phi_2)_* \circ (\phi_1)_* \quad (1.2.10)$$

Com efeito, usando a eq. (6), teremos

$$\begin{aligned} (\phi_2 \circ \phi_1)^*\delta &= (\delta \circ (\phi_2 \circ \phi_1)) = ((\delta \circ \phi_2) \circ \phi_1) = \\ &= \phi_1^* (\delta \circ \phi_2) = \phi_1^* \circ \phi_2^* (\delta) \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

e usando a eq. (7), resulta

$$\begin{aligned} [(\phi_2 \circ \phi_1)_*X] (\delta) &= X [\delta \circ (\phi_2 \circ \phi_1)] = \\ &= X [(\delta \circ \phi_2) \circ \phi_1] = ((\phi_1)_*X) [\delta \circ \phi_2] \\ &= [(\phi_2)_* ((\phi_1)_*X)] (\delta) = [((\phi_2)_* \circ (\phi_1)_*)X] (\delta) \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. Uma propriedade importante do mapeamento  $\phi_*$ , que pode ser demonstrada com o uso das eqs. (7) e (10), é

$$\phi_* [X, Y] = [\phi_* X, \phi_* Y] \quad (1.2.12)$$

onde  $X$  e  $Y$  são vetores arbitrários de  $T_x(M)$ .

É importante mencionar que dada a aplicação  $\phi: M \rightarrow M'$ , os mapeamentos induzidos  $\phi_*$  e  $\phi^*$  podem ser estendidos a aplicações de tensores covariantes de  $M'$  em  $M$  e de tensores contravariantes de  $M$  em  $M'$ . O leitor que desejar maiores detalhes sobre este tópic, poderá consultar o livro do Hawking-Ellis (1), no seu capítulo segundo. Um considerável número de propriedades dos mapeamentos entre variedades, acima brevemente tratados, podem ser encontradas pelo leitor no livro do Westenholtz (2), em seus capítulos 4 e 7.

A translação à esquerda :  $L_q : G \rightarrow G$  é um mapeamento do tipo  $\phi : M \rightarrow M'$ , em que  $M$  e  $M'$  coincidem:  $\bar{e}$  a variedade grupo de Lie  $G$ . Assim sendo, o mapeamento  $(L_q)_* : T_x(G) \rightarrow T_{qx}(G)$ , entre os vetores do espaço tangente à variedade  $G$  no ponto  $x$  e os vetores tangentes a  $G$  no ponto  $qx$ , está, de acordo com a eq.(7), bem definida. Os campos invariantes à esquerda são, por definição, campos vetoriais que não se modificam por translações à esquerda, ou seja, são tais que

$$(L_q)_* X(x) = X(qx) \quad (1.2.13)$$

Em palavras: o valor  $X(qx)$ , do campo  $X$  no ponto  $qx \in G$ , é igual a valor  $(L_q)_* X(x)$ , obtido pela aplicação de  $(L_q)_*$  do vetor  $X$  no ponto  $x \in G$ .

De maneira análoga, definimos os campos invariantes

ã direita  $Y$ , por

$$(R_q)_* Y(x) = Y(xq). \quad (1.2.14)$$

No que se segue, lidaremos, principalmente, com os campos invariantes ã esquerda. Mencionamos, no entanto, que proposições análogas que enunciaremos para tais campos, valem para os campos de finidos pela eq. (14).

Como a translação ã esquerda da identidade do grupo,  $q_0$ , por um dado  $q \in G$  é dada por  $L_q q_0 = q q_0 = q$ , se conhecermos  $X(q_0)$ , saberemos automaticamente  $X(q)$ , pois, de acordo com a eq. (13), teremos

$$(L_q)_* X(q_0) = X(qq_0) = X(q). \quad (1.2.15)$$

Assim, os campos invariantes ã esquerda são definidos por seu valor na origem, ou melhor, na identidade  $q_0$  do grupo de Lie  $G$ . Inversamente, o conhecimento do campo invariante ã esquerda  $X$ , em um ponto qualquer  $q \in G$ , define (ou fornece) seu valor na identidade  $X(q_0)$ . Com efeito, sejam  $q$  e  $q_1$  elementos quaisquer de  $G$  e  $X$  um campo invariante, então

$$\begin{aligned} X(L_q q_1) &= X(qq_1) = X((qq_1)q_0) = (L_{qq_1})_* X(q_0) = \\ &= (L_q \circ L_{q_1})_* X(q_0) = (L_q)_* \left[ (L_{q_1})_* X(q_0) \right] = \\ &= (L_q)_* X(q_1). \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

Particularmente, se  $qq_1 = q_0 \Rightarrow q_1 = q^{-1}$ , teremos

$$X(q_0) = (L_{q^{-1}})_* X(q) \quad (1.2.17)$$

como queríamos demonstrar. Como  $q$  e  $q_1$  são arbitrários, podemos extrair da eq. (16), tendo em conta a eq. (15), um fato importante: "os campos invariantes ã esquerda são definidos globalmente em  $G$ " (2). Além disto, se  $X(q_0) \in T_{q_0}(G)$ , o campo vetorial

$Y : q \rightarrow (L_q)_* X(q_0)$  é invariante à esquerda pois

$$\begin{aligned} Y(q) &= (L_q)_* X(q_0) = (L_q)_* \circ (L_{q^{-1}q})_* X(q_0) \\ &= (L_q)_* Y(q^{-1}q) = (L_q)_* Y(q_0). \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

Portanto

$$Y(qx) = (L_{qx})_* Y(q_0) = (L_q)_* Y(x) \quad (1.2.19)$$

que é a definição de campo invariante à esquerda.

Uma outra propriedade que o mapeamento  $(L_q)_* T_x(G) \rightarrow T_{qx}(G)$  goza, é ser linear. Com efeito, sejam  $X$  e  $Y$  campos arbitrários definidos em  $G$ , por definição.

$$\begin{aligned} \left[ (L_q)_* (aX + bY) \right] (\zeta) \Big|_{L_q x} &= (aX + bY) (\zeta \circ L_q) \Big|_x = \\ &= aX(\zeta \circ L_q) \Big|_x + bY(\zeta \circ L_q) \Big|_x = \\ &= a(L_q)_* X(\zeta) + b(L_q)_* Y(\zeta). \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

Como  $\zeta$  é uma função arbitrária de  $G$ , podemos escrever

$$(L_q)_* (aX + bY) = a(L_q)_* X + b(L_q)_* Y \quad (1.2.21)$$

como queríamos demonstrar.

O conjunto de todos os campos vetoriais  $C^\infty$ , denotado por  $H(M)$ , definidos em uma variedade  $M$  é um espaço vetorial sobre os reais, pois se  $X$  e  $Y$  são campos vetoriais  $C^\infty$ , qualquer combinação linear com coeficientes constantes é um campo vetorial  $C^\infty$  (3). Empregando a eq. (20), é imediato mostrar que uma combinação linear a coeficientes constantes  $\alpha_1 Y + \alpha_2 Z$ ;  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , de campos invariantes à esquerda, é um campo invariante à esquerda. Assim, como o conjunto  $E(G)$ , dos campos invariantes à esquerda

sobre  $G$ ,  $\bar{E}$  é um subconjunto do conjunto de todos os campos vetoriais  $C^\infty$  de  $G$ , ele  $\bar{E}$  é um espaço vetorial (4).

Seja  $G$  um grupo de Lie e seja  $E(G)$  o conjunto de todos os campos invariantes à esquerda (espaço vetorial) em  $G$ . Pode-se mostrar (2) que a aplicação

$$\Psi : E(G) \rightarrow T_{q_0}(G) \quad (1.2.22)$$

definida por

$$\Psi(X) = X(q_0) \quad (1.2.23)$$

é injetora e sobrejetora (bijetora), e portanto, um isomorfismo entre os espaços vetoriais  $E(G)$  e  $T_{q_0}(G)$  (5). Mas, sabemos da álgebra linear (5) que dois espaços vetoriais isomorfos têm mesma dimensão, então

$$\dim E(G) = \dim T_{q_0}(G) = \dim G, \quad (1.2.24)$$

Assim, se a variedade  $G$  for de dimensão finita, o espaço vetorial  $E(G)$  também o será. Necessitaremos deste fato para mostrar que podemos converter  $E(G)$  em uma álgebra de Lie. Antes porém, recordaremos a definição de uma álgebra de Lie.

Um espaço vetorial  $V$  sobre os reais, de dimensão finita, é uma álgebra de Lie, se além da estrutura de espaço vetorial, ele possui um produto, que é um mapeamento de  $V \times V \rightarrow V$ ;  $(X, Y) \rightarrow [X, Y] \in V$  com as propriedades

i) é bilinear sobre  $\mathbb{R}$

$$[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y] = \alpha_1 [X_1, Y] + \alpha_2 [X_2, Y] \quad (1.2.25)$$

$$[X, \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2] = \alpha_1 [X, Y_1] + \alpha_2 [X, Y_2]$$

(iii)  $\bar{[}$  é antissimétrico

$$\bar{[} X, Y ] = - \bar{[} Y, X ] \quad (1.2.26)$$

(iii) satisfaz a identidade de Jacobi

$$\bar{[} X, \bar{[} Y, Z ] ] + \bar{[} Z, \bar{[} X, Y ] ] + \bar{[} Y, \bar{[} Z, X ] ] = 0 \quad (1.2.27)$$

onde  $\alpha_1, \alpha_2 \in R$  e  $X, Y, X_i, Y_i \in V$ , ( $i = 1, 2$ ).

O comutador de dois campos vetoriais arbitrários definidos em uma variedade  $M$ , satisfaz, como vimos no apêndice A (eqs. (A.4.10), (A.4.12) e (A.4.13), as propriedades (i), (ii) e (iii) acima. Assim, com a operação de produto  $\bar{[}, \bar{]}$  o espaço  $H(G)$  é uma álgebra.

O comutador de dois campos invariantes à esquerda é um campo invariante à esquerda, pois, de acordo com a eq. (12), dados dois campos invariantes à esquerda  $X_1$  e  $X_2$ , teremos

$$\begin{aligned} (L_q)_* \bar{[} X_1, X_2 ] (x) &= \bar{[} (L_q)_* X_1, (L_q)_* X_2 ] (x) = \\ &= \bar{[} X_1, X_2 ] (qx) \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

onde, como na eq. (13),  $\bar{[} X_1, X_2 ] (qx)$ , p. ex., é o valor do campo  $L_{X_1} X_2$  no ponto  $(qx) \in G$ . Pelo que foi dito até aqui, concluímos que o espaço dos campos invariantes à esquerda  $E(G)$ , é uma álgebra de Lie, referida como álgebra de Lie do grupo de Lie  $G$ . Em outras palavras: o conjunto dos campos invariantes à esquerda, de uma dada variedade grupo de Lie  $G$ , é um espaço vetorial  $E(G)$ , no qual podemos definir uma operação de produto fechado  $\bar{[}, \bar{]}$ , que satisfaz as eqs. (25), (26) e (27).

Considere a base  $\{E_i ; i = 1, \dots, n\}$  dos campos in

variantes  $\bar{a}$  esquerda, de uma dada variedade grupo de Lie de dimensão  $\kappa$ . Como o comutador  $[E_i, E_j]$   $\bar{a}$  esquerda, devemos ter

$$[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k \quad (1.2.29)$$

onde  $c_{ij}^k$  são constantes, denominadas constantes de estrutura do grupo de Lie, sujeitas às seguintes condições

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \quad (1.2.30)$$

$$c_{ij}^s c_{ks}^m + c_{ki}^s c_{js}^m + c_{jk}^s c_{is}^m = 0 \quad (1.2.31)$$

que nascem das eqs. (26) e (27).

Vimos como definir uma álgebra de Lie de um grupo de Lie (via campos invariantes  $\bar{a}$  esquerda). Em outras palavras, vimos que a todo grupo de Lie corresponde uma única álgebra de Lie. Uma pergunta natural a esta altura  $\bar{e}$ : Dadas as constantes de estrutura  $c_{ij}^k$ , que satisfazem as eqs. (30) e (31), existe um único grupo de Lie associado? De outra forma: a uma dada álgebra de Lie corresponde um único grupo de Lie? Pode-se mostrar (7), que a uma dada álgebra temos um único grupo de Lie local associado. A questão se podemos passar a um grupo de Lie global foi também considerada: demonstra-se (7) que a uma dada álgebra, corresponde um único grupo de Lie simplesmente conexo, denominado grupo de cobertura universal desta álgebra (8).

O que foi feito até este ponto para campos invariantes  $\bar{a}$  esquerda, pode ser repetido para campos invariantes  $\bar{a}$  direita. Em particular, o comutador de dois campos invariantes  $\bar{a}$  direita  $\bar{e}$  um campo invariante  $\bar{a}$  direita. Assim, se indicarmos por  $D_i$  ( $i = 1, 1 \dots, \kappa = \dim G$ ) a base dos campos invariantes  $\bar{a}$

direita, devemos ter

$$\left[ \mathcal{D}_i, \mathcal{D}_j \right] = \tilde{C}_{ij}^m \mathcal{D}_m \quad (1.2.32)$$

onde  $\tilde{C}_{ij}^m$  são constantes, sujeitas às condições dadas pelas eqs. (30) e (31). Uma pergunta que surge a esta altura é: existe alguma relação entre as constantes de estrutura das álgebras dos campos invariantes à esquerda ( $C_{ij}^k$ ) e à direita ( $\tilde{C}_{ij}^m$ )? Responderemos a esta questão a seguir.

Usando as eqs. (13), (14), (7) e (5), resulta que

$$\left[ E_i, \mathcal{D}_j \right] = 0 \quad (1.2.33)$$

para todo  $i, j = 1, 2, \dots, \kappa = \dim. G$ . Como a base  $E_i$  está definida sobre todo o grupo  $G$ , podemos tomar

$$\mathcal{D}_j(x) = \Psi_j^m(x) E_m(x) \quad (1.2.34)$$

Levando na eq. (33), teremos

$$\left[ E_i, \Psi_j^m E_m \right] = (\Psi_j^m C_{im}^\kappa + E_i \left[ \Psi_j^\kappa \right]) E_\kappa = 0 \quad (1.2.35)$$

ou seja

$$E_i \left[ \Psi_j^\kappa \right] = - C_{im}^\kappa \Psi_j^m. \quad (1.2.36)$$

Levando também a eq. (34) na eq. (32), resulta

$$\begin{aligned} \left[ \mathcal{D}_i, \mathcal{D}_j \right] &= \tilde{C}_{ij}^m \mathcal{D}_m = \left[ \Psi_i^m E_m, \Psi_j^n E_n \right] = \\ &= (\Psi_i^m \Psi_j^n C_{mn}^\delta + \Psi_i^m E_m \left[ \Psi_j^\delta \right] - \Psi_j^n E_n \left[ \Psi_i^\delta \right]) E_\delta. \end{aligned}$$

Tendo em conta a eq. (36) acima, teremos finalmente

$$\tilde{C}_{ij}^q \Psi_q^\delta = - \Psi_i^m \Psi_j^n C_{mn}^\delta \quad (1.2.37)$$

ou

$$\tilde{C}_{ij}^q = - \Psi_i^m \Psi_j^n (\Psi^{-1})_s^q C_{mn}^\delta \quad (1.2.38)$$

Na base de coordenadas, a eq. (33) assume a forma

$$D_{(j)|\lambda}^\alpha E_{(i)}^\lambda - E_{(i)|\lambda}^\alpha D_{(j)}^\lambda = 0. \quad (1.2.39)$$

Que, se supusermos conhecidas as expressões para  $E_{(i)}^\lambda(x)$ , são equações diferenciais para componentes dos campos invariantes  $\bar{a}$  direita. As condições de integrabilidade destas equações são automaticamente satisfeitas, em virtude da identidade de Jacobi aplicada a  $\{E_i, E_j, D_k\}$  (9). Escolhendo no ponto arbitrário  $q_0$ , as condições iniciais

$$D_j(q_0) = E_i(q_0) \quad (1.2.40)$$

ou, de acordo com a eq. (36)

$$\Psi_j^m(q_0) = \delta_j^m \quad (1.2.41)$$

que levada na eq. (38), implica

$$\tilde{C}_{ij}^\delta = - C_{ij}^\delta$$

ou seja, os campos invariantes  $\bar{a}$  direita geram uma  $\bar{a}$ álgebra equivalente  $\bar{a}$   $\bar{a}$ álgebra dos campos invariantes  $\bar{a}$  esquerda<sup>(\*)</sup>. É importante mencionar que se houvessemos tomado  $D_j(q_0) = -E_i(q_0)$ , teríamos  $\tilde{C}_{ij}^\delta = C_{ij}^\delta$ .

---

(\*) Os campos invariantes  $\bar{a}$  direita são, algumas vezes, denominados de geradores do grupo recíproco, do campo cujos geradores são os campos invariantes  $\bar{a}$  esquerda.

Um grupo  $\bar{G}$  é dito *abeliano* se dois quaisquer de seus elementos comutam. No caso dos grupos de Lie isto é verdade se, e somente se, as constantes de estrutura são nulas.

Um subgrupo  $H$  de um dado grupo  $G$  é dito *normal* ou *invariante* se para todo  $q \in G$  e  $h \in H \Rightarrow qhq^{-1} \in H$ . Para os grupos de Lie isto é verdade se, e somente se, os geradores  $N_i (\text{i}=1, 2, \dots, p)$  de  $H$  satisfazem

$$[E_A, N_i] = C_{Ai}^j N_j \quad (1.2.42)$$

para quaisquer  $A (= 1, 2, \dots, n)$ ;  $i (= 1, \dots, p \leq n)$ .

Dado um grupo  $G$ , ele tem pelo menos dois subgrupos invariantes: ele próprio e a identidade. Um grupo que tem apenas estes dois subgrupos invariantes é dito *simples*. Um grupo é dito *semi-simples* se não tem subgrupo invariante abeliano.

Toda sub-álgebra de uma álgebra de um grupo de Lie gera, localmente, um subgrupo. Uma sub-álgebra com base  $N_i$  que satisfaz a eq. (42), gera um subgrupo invariante.

### 1.3 - GRUPO DE TRANSFORMAÇÕES

Sejam  $G$  um grupo de Lie e  $M$  uma variedade diferenciável. Uma ação (à esquerda) de  $G$  em  $M$  é um mapeamento

$$\tau : G \times M \rightarrow M \quad (1.3.1)$$

que satisfaz as seguintes condições:

$$i) \quad \tau(q_0, x) = x, \quad q_0 = \text{identidade de } G \quad (1.3.2)$$

$$ii) \quad \tau(q_1, \tau(q_2, x)) = \tau(q_1 q_2, x) \quad (1.3.3)$$

para todo  $x \in M$ .

Frequentemente, se escreve  $\tau(q, x) = qx$ , de modo que a propriedade (ii) acima assume a seguinte forma

$$q_1(q_2 x) = (q_1 q_2)x \quad (1.3.4)$$

Cada elemento  $q$  do Grupo  $G$  induz uma transformação

$$\tau_q : M \rightarrow M ; x \rightarrow qx \quad (1.3.5)$$

definida por

$$\tau_q(x) = \tau(q, x) \quad (1.3.6)$$

Empregando as propriedades definidas através das eqs. (2) e (3), teremos

$$i) \tau_{q_0}(x) = x, \text{ ou seja, } \tau_{q_0} = \text{mapeamento identidade}$$

$$\text{de } I : M \rightarrow M, \quad (1.3.7)$$

$$ii) \tau_{q_1} \tau_{q_2} x = \tau_{q_1 q_2} x, \text{ onde } q_1, q_2 \in G \text{ e } x \bar{\in} \text{ um ponto qualquer de } M. \quad (1.3.8)$$

Utilizando as eqs. (7) e (8), é imediato mostrar que o conjunto das transformações  $\tau_q$  constitui um grupo ( $\tau_{q_0} = \text{identidade}$  e  $(\tau_q)^{-1} = \tau_{q^{-1}}$ ), que denotaremos por  $H$ . É fácil mostrar que o grupo  $H$  é isomorfo a  $G$ . Devido a este isomorfismo, frequentemente encontramos referência ao "grupo de transformações  $G$ ", quando, a rigor, a expressão correta seria "grupo de transformações  $H$ ". Como a cada elemento de  $H$  corresponde um, e somente um, elemento de  $G$ , acreditamos não haver problemas no uso de uma ou outra expressão e, neste trabalho, vamos usá-las indistintamente. Mais ainda: em muitas ocasiões simplesmente ignoraremos a

diferença entre os dois grupos. Quando a variedade grupo de Lie  $G$  é de dimensão  $n$  ( $\dim H = \dim G$ ), o grupo de transformações é dito ser de  $n$  parâmetros<sup>(\*)</sup>.

O grupo de transformações  $G$  é dito *atuar efetivamente* (e seus parâmetros são ditos essenciais), se para *todo*  $x \in M$

$$\tau_q x = x \Rightarrow q = q_0. \quad (1.3.9)$$

Dizemos que  $G$  atua *sem ponto fixo* (ou *livremente*) se  $\tau_q x = x$ , para *algum*  $x \in M$ , implica que  $q = q_0$ . Intuitivamente, quando o grupo  $G$  atua efetivamente sobre  $M$ , todo elemento  $\tau_q$ , diferente da identidade, modifica ou transforma algo na variedade  $M$ . Em outras palavras, quando  $G$  é efetivo sobre  $M$ , para todo  $q \neq q_0$  existe pelo menos um ponto  $x_{(1)}$ , tal que  $\tau_q x_{(1)} \neq x_{(1)}$ . Analogamente quando  $G$  atua sem ponto fixo, para todo  $q \neq q_0$  e todo  $x \in M$ , temos  $\tau_q x \neq x$ . Quando o grupo é efetivo e tem dimensão  $n$ , dizemos que tem  $n$  parâmetros essenciais. No que se segue, trataremos apenas do caso que  $G$  é efetivo sobre  $M$  e de dimensão  $n$ , em tais casos denotaremos o grupo de transformação por  $G_n$ .

Seja  $P$  um ponto fixo de  $M$ . Denominamos de *órbita* (ou *trajetória*) de  $P$  ao conjunto de pontos de  $M$  que podemos atingir partindo de  $P$  (equivalentes a  $P$ ) por transformações do grupo  $G$ . De outra forma, a órbita de um ponto  $P$  (sob  $G$ ), denotada por  $O_P$  é o conjunto<sup>(\*\*)</sup>.

$$O_P = \{P' = \tau_q P ; \text{ para todo } q \in G\} \subseteq M \quad (1.3.10)$$

O grupo  $G$  é dito *transitivo* sobre uma variedade  $M'$

---

(\*) Para uma justificativa desta terminologia veja, p.ex., a referência (9).

(\*\*) A órbita  $O_P$  de um ponto  $P$  da variedade  $M$  é uma subvariedade de  $M$  (9).

(ou atuar transitivamente em  $M'$ ), se dados dois pontos quaisquer  $x$  e  $y$  de  $M'$ , existe pelo menos um  $\tau_q \in H$ , tal que  $\tau_q x = y$ . Se  $\tau_q$  é único, o grupo  $G$  é dito *simplesmente transitivo*. Se  $\tau_q$  não é único, o grupo é dito *multiplamente transitivo* sobre  $M'$ . Quando  $G$  é transitivo sobre  $M'$ , então  $O_p = M'$ . Se o grupo  $G$  é multiplamente transitivo sobre  $M'$ , existem transformações  $\tau_q \neq \tau_{q_0}$  que deixam alguns pontos de  $M'$  fixos. Com efeito, se

$$\tau_{q_1} P = \tau_{q_2} P \quad (1.3.11)$$

então

$$\tau_{q_1 q_2^{-1}} P = \tau_{q_1} \tau_{q_2^{-1}} P = \tau_{q_2} \tau_{q_2^{-1}} P = \tau_{q_0} P = P \quad (1.3.12)$$

como  $q_1 \neq q_2$  e o grupo atua efetivamente (por hipótese), então  $\tau_{q_1 q_2^{-1}}$  não é a identidade, como queríamos demonstrar.

O fato de um grupo  $G_h$  ser transitivo, simplesmente transitivo ou intransitivo, depende da variedade (órbita) sobre a qual fazemos  $G_h$  atuar. Desta forma, um grupo  $G_h$  pode ser, p.ex., simplesmente transitivo sobre uma dada órbita e multiplamente transitivo sobre a outra.

O conjunto dos elementos  $q \in G$  que deixam  $x_0 \in M$  fixo, isto é,

$$I_{x_0} = \{q \in G \mid \tau_q x_0 = x_0\} \quad (1.3.13)$$

constitui um subgrupo de  $G$ , denominado de *grupo de estabilidade* ou *grupo de isotropia* de  $x_0$ . A rigor,  $I_{x_0}$  é um subgrupo invariante de  $G$  (2). Por exemplo, o grupo das rotações tridimensionais tem  $h = 3$ , e o centro de rotação é fixo sob todas as transformações do grupo. Contudo, os pontos de uma órbita bidimensional (superfície esférica) não permanecem fixos sob a ação do grupo.

É importante mencionar que qualquer grupo de Lie  $G$  atua sobre si próprio, através da operação de multiplicação do grupo ( $G \times G \rightarrow G$ ), sem pontos fixos, e de forma simplesmente transitiva.

Consideremos agora o mapeamento

$$\mu_P : G \rightarrow O_P ; q \mapsto \tau_q P \quad (1.3.14)$$

entre a variedade grupo de Lie  $G$  e a variedade  $O_P$ , órbita do ponto  $P$ . A aplicação  $\mu_P$  induz o mapeamento  $(\mu_P)_*$  entre vetores de  $G$  e vetores de  $O_P$ . Em particular,  $(\mu_P)_*$  aplicará os campos invariantes à esquerda de  $G$  em campos vetoriais tangentes à órbita. Mostra-se (9) que a escolha do ponto  $P$  em  $O_P$  não afeta a aplicação  $(\mu_P)_*$ , ou seja, que se tomarmos, ao invés de  $P$ , um outro ponto  $Q \in O_P$ , e aplicarmos  $(\mu_Q)_*$  aos campos invariantes à esquerda de  $G$  (por exemplo), o resultado será idêntico ao que obteríamos com a aplicação de  $(\mu_P)_*$ . Os campos vetoriais que definimos, através da aplicação de  $(\mu_P)_*$  aos campos invariantes à esquerda, na subvariedade  $O_P \subseteq M$ , podem ser estendidos a toda variedade  $M$ , ou seja, usando o mapeamento  $(\mu_P)_*$  em cada  $O_P$ , podemos definir campos vetoriais (imagens dos campos invariantes à esquerda através de  $(\mu_P)_*$ ) sobre toda variedade  $M$ . De acordo com a eq. (1.2.12), é evidente que tais campos imagens formarão uma álgebra de Lie, com as mesmas constantes de estrutura da álgebra dos campos invariantes à esquerda do grupo  $G$ . Se denotarmos por  $\{X_A\}$   $A = 1, 2, \dots, n$  os campos vetoriais em  $M$ , obtidos pela aplicação de  $(\mu_P)_*$  à base  $\{E_\alpha\}$ , da álgebra dos campos invariantes à esquerda de  $G_n$ , então os  $\{X_A\}$  são linearmente independentes, ou seja,  $\sum C_A X_A = 0 \Leftrightarrow C_A = 0$ . Isto se deve à hipótese de efetividade (9). Na verdade, as duas álgebras acima mencionadas são isomorfas pois são de mesma dimen

são e  $G_\kappa$  é efetivo sobre  $M$ . Portanto,  $(\mu_P)_* V = 0$  para todo ponto  $P$  de  $M$ , somente se  $V = 0$ .

O grupo de estabilidade ou grupo de isotropia de um dado ponto  $P$  é gerado pelos vetores  $V$  tais que  $(\mu_P)_* V = 0$ . Esta igualdade nada mais é que a definição do núcleo da aplicação  $(\mu_P)_*$  em  $q_0$ . Desta forma, se denotarmos por  $s$  e  $d$  a dimensão do grupo de isotropia de  $P$  e a dimensão de  $O_P$ , respectivamente, teremos

$$\kappa = d + s \quad (1.3.15)$$

onde empregamos um conhecido teorema da álgebra linear (6). Quando o grupo é simplesmente transitivo sobre  $O_P$  então  $d = \kappa$ .

Na terminologia definida acima, os teoremas clássicos a respeito de grupos contínuos tomam a forma seguinte (10): *Primeiro Teorema Fundamental de Lie* - Uma ação  $\tau : G \times M \rightarrow M$  de um grupo (de Lie) contínuo de transformações define, e é definida por um mapeamento linear dos campos invariantes à esquerda de  $G_\kappa$  sobre o conjunto de  $\kappa$  campos vetoriais de  $M$ ; *Segundo Teorema Fundamental de Lie*: O conjunto de  $\kappa$  campos vetoriais linearmente independentes sobre  $M$  que obedece as eqs. (1.2.30) e (1.2.31) define, e é definido por um grupo contínuo (de Lie) de Transformações em  $M$ .

#### 1.4 - GRUPO DE ISOMETRIAS

Dentre todos os grupos de transformações de uma variedade Riemanniana  $M$ , do ponto de vista da Relatividade Geral, o mais importante é o grupo de isometrias ou grupo de movimento, que estudaremos agora. Um campo vetorial  $K$  em uma variedade Riemanniana  $(M, g)$  é gerador de uma transformação isométrica se

$$\frac{L}{K} g = 0 \quad (1.4.1)$$

ou

$$K \left[ g(X, Y) \right] - g\left(\frac{L}{K} X, Y\right) - g\left(X, \frac{L}{K} Y\right) = 0 \quad (1.4.2)$$

onde usamos a eq. (A.4.32), e onde  $X, Y$  são campos vetoriais arbitrários definidos na variedade  $M$ . Admitiremos, por hipótese, no que se segue, que nossa variedade não possui torção ( $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ ), de maneira que a eq. (2) nos fornece

$$\begin{aligned} K \left[ g(X, Y) \right] - g(\nabla_K X, Y) + g(\nabla_X K, Y) - \\ - g(X, \nabla_K Y) + g(X, \nabla_Y K) = 0 \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Empregando a eq. (A.7.9), resulta

$$g(\nabla_X K, Y) + g(X, \nabla_Y K) = 0 \quad (1.4.4)$$

que é denominada *equação de Killing*. Na verdade, as eqs. (4) e (2) são expressões distintas de uma mesma equação, pois a conexão é simétrica, por hipótese. Em uma base arbitrária  $\{E_i\}$ , podemos escrever a eq. (4) na forma

$$\begin{aligned} g_{sj} (E_i [K^s] + \Gamma_{mi}^s K^m) + g_{si} (E_j [K^s] + \\ + \Gamma_{mj}^s K^m) = 0 \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

onde  $K = K^m E_m$ , e onde usamos a eq. (A.5.6). Na base natural

( $E_i = \partial_i$ ), empregando a eq. (A.7.9), teremos

$$K_i || j + K_j || i = 0 \quad (1.4.6)$$

que  $\bar{e}$  a forma mais difundida da equação de Killing. Adiante lida remos com base  $\{e_A\}$  e a correspondente base dual  $\{\theta^A\}$ , em que  $g(e_A, e_B) = \text{matriz constante}$ . Neste caso, a equação de Killing assume uma das formas

$$e_A [K_B] + e_B [K_A] + (\Gamma_{AMB} + \Gamma_{BMA}) K^M = 0 \quad (1.4.7)$$

ou

$$e_A [K_B] + e_B [K_A] + (C_{ABM} + C_{BAM}) K^M = 0 \quad (1.4.8)$$

onde para obtermos a eq. (8) empregamos a eq. (A.4.15).

Uma transformação infinitesimal do tipo

$$x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha + \epsilon K^\alpha(x), \quad \epsilon^2 \ll \epsilon \quad (1.4.9)$$

onde  $K = K^\alpha \partial_\alpha$ ,  $\bar{e}$ , por definição, uma transformação isométrica de gerador  $K$ , se o campo vetorial  $K$  satisfaz a equação de Killing. Sob uma transformação isométrica o elemento infinitesimal  $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$  permanece inalterado. Os vetores  $K^{(i)}$ ,  $i = \bar{1}$  índice de enumeração, que satisfazem independentemente a equação de Killing, são denominados *vetores de Killing* e são, como vimos, os geradores das isometrias. Em uma variedade  $(M, g)$  de dimensão  $n$ , o número  $p$  de vetores de Killing linearmente independentes  $\bar{e}$  tal que (11)

$$0 \leq p \leq \frac{n(n+1)}{2} \quad (1.4.10)$$

Exemplos de variedades espaço-tempo que não admitem nenhum vetor de Killing, são (conforme Bonor, Sulaiman e Tomimura (12)) os modelos cosmológicos "inomegeneos" de Szekeres(13). No caso em que  $p = n(n+1)/2$ , a variedade é dita *maximalmente simétrica*, e as componentes do tensor de Riemann são dadas por (14)

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{R}{n(n-1)} (g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}) \quad (1.4.11)$$

onde  $R = R^\alpha_\alpha = \text{constante}$ .

Uma combinação linear  $c^{(i)} K_{(i)}$ , onde  $c^{(i)}$  ( $i=1,2,\dots,p$ ), de vetores de Killing é também um vetor de Killing. Reciprocamente, qualquer solução da eq. (6) pode ser escrita como uma combinação do  $p$  vetores de Killing acima referidos. Na verdade, o conjunto de soluções das equações de Killing, com as operações usuais de soma de vetores e multiplicação por escalar, é um espaço vetorial sobre os reais.

Mostra-se (15) que o operador sobre campos tensoriais  $L_X$ , satisfaz a seguinte propriedade:

$$L_X(L_Y T) - L_Y(L_X T) = [X, Y] T \quad (1.4.12)$$

onde  $T$  é um campo tensorial arbitrário e  $X$  e  $Y$  são campos vetoriais quaisquer. Portanto, se  $K_i$  e  $K_j$  são campos de Killing distintos, de acordo com as eqs. (1) e (3), o comutador  $[K_i, K_j]$  será um campo de Killing. Como os vetores de Killing constituem um espaço vetorial, teremos

$$[K_i, K_j] = c^m_{ij} K_m \quad (1.4.13)$$

onde  $C_{ij}^m$  são constantes e, evidentemente, satisfazem as eqs. (1.2.30) e (1.2.31), ou seja, temos caracterizada uma álgebra de Lie. Desta forma, de acordo com o 2º teorema fundamental de Lie, o conjunto de todas as soluções da eq. (4) geram (ou definem) um grupo de Lie de transformações, denominado *grupo de isometria ou grupo de movimento* (16).

### 1.5 - GRUPO SIMPLESMENTE TRANSITIVO

Suponhamos que o grupo  $G_h$  é o simplesmente transitivo sobre uma dada órbita  $O_P \equiv M$ . Neste caso, a aplicação  $\mu_P : G \rightarrow M$  definida pela eq. (1.3.14) é um isomorfismo<sup>(\*)</sup>.

O mapeamento  $\mu_P$  induz, como vimos na seção 1.2, a aplicação  $(\mu_P)_*$  que levará os campos invariantes  $\tilde{a}$  esquerda e  $\tilde{a}$  direita de  $G$ , nos correspondentes campos invariantes de  $M$ , ou seja

$$(\mu_P)_* : \{E_A\} \rightarrow \{X_A\} \quad (1.5.1)$$

$$(\mu_P)_* : \{D_A\} \rightarrow \{K_A\} \quad (1.5.2)$$

onde  $\{X_A\}$  e  $\{K_A\}$  ( $A = 1, 2, \dots, h$ ) são os campos invariantes  $\tilde{a}$  esquerda e  $\tilde{a}$  direita de  $M$ , respectivamente.

Sobre a variedade órbita de  $P$ , pela ação do grupo  $G$ , podemos construir a métrica

$$d\tilde{\ell}^2 = g(X_A, X_B) w^A w^B = g_{AB} w^A w^B \quad (1.5.3)$$

onde

$$w^A \begin{bmatrix} X_B \end{bmatrix} = \delta_B^A \quad (1.5.4)$$

---

(\*) Em tal situação, habitualmente se identifica a variedade de  $M$  com o grupo  $G$ .

ou seja,  $\omega^A$  são 1-formas correspondentes aos campos invariantes à esquerda sobre  $O_P = M$ . A importância de tal procedimento reside no fato de que, de acordo com a eq. (A.4.32), teremos

$$\begin{aligned} \left( \begin{matrix} L \\ K_C \end{matrix} g \right) (X_A, X_B) &= K_C [g_{AB}] - \\ &- g \left( \begin{matrix} L \\ K_C \end{matrix} X_A, X_B \right) - (X_A, \begin{matrix} L \\ K_C \end{matrix} X_C) \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

onde

$$[X_A, K_C] = 0$$

de acordo com a eq. (1.2.33). Portanto, se tomarmos  $g_{AB} =$  constante sobre a órbita  $M$ , os vetores  $K_C$  ( $C = 1, 2, \dots, n$ ) serão vetores de Killing, e, inversamente, se  $K_C$  são vetores de Killing, então  $g_{AB} =$  constante sobre a órbita do grupo.

Podemos dotar a variedade  $M$  de uma outra métrica

$$dl'^2 = g(K_A, K_B) \tilde{\omega}^A \tilde{\omega}^B = \tilde{g}_{AB} \tilde{\omega}^A \tilde{\omega}^B \quad (1.5.6)$$

onde

$$\tilde{\omega}^A (K_B) = \delta_B^A \quad (1.5.7)$$

De maneira que se tomarmos  $\tilde{g}_{AB} =$  constante sobre órbita  $M$ , os vetores  $X_A$  serão vetores de isometria da métrica definida pela eq. (6) e, reciprocamente, se  $X_A$  são vetores de Killing, então  $\tilde{g}_{AB} =$  constante sobre a órbita.

Os grupos de isometrias de geradores  $\{X_A\}$  e  $\{K_A\}$  são ditos *recíprocos*.

## 1.6 - ISOTROPIA E HOMOGENEIDADE : O CRITÉRIO DE GRUPO

As simetrias de uma variedade espaço-tempo são expressas pela invariância da métrica sob o transporte de Lie ( $L_K g = 0$ ). O conjunto de todas as isometrias formam, conforme vimos anteriormente, um grupo de Lie de transformações da variedade espaço-tempo considerada. De acordo com a eq. (1.4.10), um espaço-tempo quadridimensional pode ter, no máximo 10 vetores de Killing linearmente independentes, ou seja, um grupo  $G_{10}$  de movimento. O espaço-tempo plano é um exemplo de uma variedade quadridimensional que possui um grupo de isometria  $G_{10}$  : o grupo de Poincaré, que tem um subgrupo  $G_6$  (Grupo de Lorentz).

Nas seções espaciais de um espaço-tempo o número máximo de soluções linearmente independentes da equação de Killing é 6. Desta forma, em tais seções, podemos ter no máximo um grupo  $G_6$  de transformações isométricas. Nas seções bidimensionais ( $n = 2$ ) o número máximo de vetores de Killing é 3.

Conforme vimos anteriormente, o grupo de isotropia de um ponto  $P$ , da órbita  $O_P$  de um grupo de isometria, é o conjunto das transformações de isometria que deixam  $P$  fixo. Tal conjunto constitui um subgrupo do grupo de movimento, denotado por  $I_P$ .

O grupo de isotropia de maior dimensão que uma variedade espaço-tempo pode ter em um ponto, é o grupo  $G_6$  das rotações de Lorentz. No caso mais geral, o grupo de isotropia  $I_P$ , é um subgrupo do grupo de Lorentz homogêneo (17).

A órbita de um dado ponto sob um grupo de isometria é um subconjunto  $O_P$  da variedade  $M$ . A união destes subconjuntos "cobrem"  $M$ . A órbita é, no contexto da relatividade, denominada de *subespaço homogêneo* ou *invariante*. Se o grupo de isometrias  $G_n$

é simplesmente transitivo sobre  $O_p$ , a dimensão de  $O_p$  é igual à dimensão do grupo  $G_\kappa$  (veja eq. (1.3.15)). Se a dimensão de  $G$  é maior que a dimensão de  $O_p$ , então  $G$  é multiplamente transitivo sobre  $O_p$ , e, neste caso, existe um grupo de isotropia.

Uma variedade espaço-tempo quadridimensional invariante sob um grupo de isometria  $G_\kappa$ , com  $\kappa \geq 4$ , é dita *homogênea* ou *homogênea no espaço-tempo*. Em outras palavras, quando existe um grupo de transformações isométricas transitivo sobre o espaço-tempo ele é dito homogêneo. Dada uma variedade espaço-tempo  $M_4$ , se ela possui uma hipersuperfície tridimensional  $S(t)$ , tipo-espaço, invariante sob um grupo de isometria  $G_\kappa$  transitivo ( $\kappa \geq 3$ ), dizemos que ela é *espacialmente homogênea*.

Atribui-se a Egorov (18) o teorema seguinte "Todo  $G_4$  contém um subgrupo  $G_3$ ". Apesar disto, o fato de uma variedade  $M_4$  ser homogênea no espaço-tempo não implica na sua homogeneidade espacial<sup>(\*)</sup>. Um exemplo onde isto acontece é no famoso universo de Gödel (19), que é homogêneo no espaço-tempo, com um  $G_5$  atuando em toda variedade espaço-tempo, mas não é espacialmente homogêneo. Na verdade, a variedade espaço-tempo de Gödel possui a estrutura  $M_4 = H^3 \times R$  ( $H^3 =$  hiperbolóide,  $R =$  reta real) onde a hipersuperfície  $H^3$ , invariante sob um subgrupo  $G_3$  simplesmente transitivo, é tipo-tempo (20).

No que se segue, estaremos interessados na homogeneidade espacial. Considere uma variedade espaço-tempo  $M_4$  com um grupo  $G_\kappa$  ( $\kappa \geq 3$ ) que atua em suas seções espaciais. De acordo com a eq. (1.4.10), precisamos discutir apenas os casos  $\kappa = 3, 4, 5$  ou

---

(\*) Isto nos leva ao sentimento de que o critério de grupo para homogeneidade nem sempre coincide com o que esperamos fisicamente.

6. Se  $\kappa = 3$  o grupo  $\bar{e}$  simplesmente transitivo sobre  $S(t)$  e os pontos de tal hipersuperfície de homogeneidade não possuem grupo de isotropia. Conforme o teorema de Egorov, quando  $\kappa = 4$  existe um subgrupo  $G_3$ , que pode atuar em órbitas bi ou tridimensionais. Se ele atua sobre órbitas de dimensão igual a 3 teremos o caso anterior. Nos modelos de Kantowski-Sachs (21), existem hipersuperfícies  $S(t)$ , invariantes sobre um grupo de isometrias quadridimensional, mas o subgrupo  $G_3$  atua sobre superfícies bidimensionais de curvatura constante, já que para uma órbita bidimensional o número máximo de isométrias é 3, de acordo com a eq. (1.4.10). Se existe um grupo  $G_4$  cada ponto da órbita  $S(t)$  tem um grupo de isotropia  $I_1$  ( $d = 3, \kappa \Rightarrow 4 = s = 1$ , pela eq. (1.3.15)) e o espaço é dito ter uma simetria de rotação local (L R S (22)), ou seja, em cada ponto  $P$  da órbita existe um eixo de simetria de rotação. Como  $d = \kappa + s$ ,  $\kappa = 5$  e  $d = 3$  nos conduziria a  $s = 2$  e, como é sabido, duas rotações em torno de eixos diferentes produzem uma rotação ao redor de um terceiro eixo; não há subgrupo  $I_2$ , e portanto, o caso  $\kappa = 5$  é impossível. No caso  $\kappa = 6$ , ou seja, o número máximo de isometria para a órbita ( $d = 3$ ), a curvatura escalar da  $S(t)$  é constante, e existe uma simetria completa em todas as direções em qualquer ponto  $P$  da órbita  $S(t)$ . Em outras palavras, existe um subgrupo de isotropia  $I_3$  ( $s = 3$ ), que é justamente o grupo de rotações em torno de um eixo qualquer, que passa pelo ponto arbitrário  $P$ , isto é, o grupo  $O_3$ . Em tal caso, há uma simetria esférica local<sup>(\*)</sup>.

Pelo que dissemos até aqui, podemos adotar uma nova e satisfatória maneira de definir homogeneidade espacial. Diremos

---

(\*) Este é o caso das métricas tipo Robertson-Walker.

que uma variedade espaço-tempo  $\bar{e}$  espacialmente homogênea, quando existe um  $G_3$  simplesmente transitivo atuando nas seções espaciais tridimensionais  $S(t)^{(*)}$ . Tal definição exclui o caso excepcional em que há um  $G_4$ , do tipo Kantowski-Sachs. O que temos a investigar portanto,  $\bar{e}$  a classificação de todas as variedades tridimensionais que admitem um grupo de movimento simplesmente transitivo. Essa classificação foi feita originalmente por L. Bianchi (23), e a apresentaremos na seção seguinte.

### 1.7 - A CLASSIFICAÇÃO DE BIANCHI

Associado a uma dada álgebra de Lie de dimensão  $n$  temos, localmente, definido um grupo de Lie  $G_n$ . Bianchi estudou (23) e classificou todos os possíveis tipos de álgebras de Lie reais e tridimensionais. Apresentamos abaixo<sup>(\*\*)</sup> os nove diferentes tipos de álgebra classificadas por ele. Usamos a notação dada por Taub (24). Exibimos também, para cada tipo considerado, representações dos vetores de Killing  $K_i$ , da base invariante  $\{X_i\}$  e de suas 1-formas associadas  $\{w^i\}$  ( $w^i [X_j] = \delta_j^i$ ). As constantes de estruturas são definidas por

$$[K_i, K_j] = c_{ij}^m K_m \quad (1.7.1)$$

de maneira que

$$[X_i, X_j] = -c_{ij}^m X_m \quad (1.7.2)$$

e

---

(\*) Este  $\bar{e}$  o critério de homogeneidade espacial, segundo o grupo de simetria, largamente adotado na Cosmologia Relativista.

(\*\*) Veja referência (17).

$$d\omega^i = \frac{1}{2} C_{mn}^i \omega^m \wedge \omega^n \quad (1.7.3)$$

Usamos também a notação  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ . As constantes  $C_{ij}^m$  não citadas são nulas. Os tipos de Bianchi são:

Típo I:  $C_{mn}^i = 0$

$$\begin{aligned} K_1 &= \partial_1 & X_1 &= \partial_1 & \omega^1 &= dx^1 \\ K_2 &= \partial_2 & X_2 &= \partial_2 & \omega^2 &= dx^2 \\ K_3 &= \partial_3 & X_3 &= \partial_3 & \omega^3 &= dx^3 \\ d\omega^1 &= 0, & d\omega^2 &= 0, & d\omega^3 &= 0. \end{aligned}$$

Típo II:  $C_{23}^1 = -C_{32}^1 = 1$

$$\begin{aligned} K_1 &= \partial_2 & X_1 &= \partial_2 \\ K_2 &= \partial_3 & X_2 &= x^1 \partial_2 + \partial_3 \\ K_3 &= \partial_1 + x^3 \partial_2 & X_3 &= \partial_1 \\ \omega^1 &= dx^2 - x^1 dx^3 & d\omega^1 &= \omega^2 \wedge \omega^3 \\ \omega^2 &= dx^3 & d\omega^2 &= 0 \\ \omega^3 &= dx^1 & d\omega^3 &= 0 \end{aligned}$$

Típo III:  $C_{13}^1 = -C_{31}^1 = 1$

$$\begin{aligned} K_1 &= \partial_2 & X_1 &= e^{x^1} \partial_2 \\ K_2 &= \partial_3 & X_2 &= \partial_3 \end{aligned}$$

$$K_3 = \partial_1 + x^2 \partial_2$$

$$\omega^1 = e^{-x^1} dx^2$$

$$\omega^2 = dx^3$$

$$\omega^3 = dx^1$$

$$X_3 = \partial_1$$

$$d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega^2$$

$$d\omega^2 = 0$$

$$d\omega^3 = 0$$

Τίπο IV:  $C_{13}^1 = -C_{31}^1 = 1$

$$C_{23}^1 = -C_{32}^1 = 1$$

$$C_{23}^2 = -C_{32}^2 = 1$$

$$K_1 = \partial_2$$

$$K_2 = \partial_3$$

$$K_3 = \partial_1 + (x^2 + x^3) \partial_2 + x^3 \partial_3$$

$$\omega^1 = e^{-x^1} dx^2 - x^1 e^{-x^1} dx^3$$

$$\omega^2 = e^{-x^1} dx^3$$

$$\omega^3 = dx^1$$

$$X_1 = e^{x^1} \partial_2$$

$$X_2 = x^1 e^{x^1} \partial_2 + e^{x^1} \partial_3$$

$$X_3 = \partial_1$$

$$d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega^3 + \omega^2 \wedge \omega^3$$

$$d\omega^2 = \omega^2 \wedge \omega^3$$

$$d\omega^3 = 0$$

Τίπο V:  $C_{13}^1 = -C_{31}^1 = 1$

$$C_{23}^2 = -C_{32}^2 = 1$$

$$K_1 = \partial_2$$

$$K_2 = \partial_3$$

$$K_3 = \partial_1 + x^2 \partial_2 + x^3 \partial_3$$

$$X_1 = e^{x^1} \partial_2$$

$$X_2 = e^{x^1} \partial_3$$

$$X_3 = \partial_1$$

$$\begin{aligned} \omega^1 &= e^{-x^1} dx^2 & d\omega^1 &= \omega^1 \Lambda \omega^3 \\ \omega^2 &= e^{-x^1} dx^3 & d\omega^2 &= \omega^2 \Lambda \omega^3 \\ \omega^3 &= dx^1 & d\omega^3 &= 0 \end{aligned}$$

Τίπο VI:  $C_{13}^1 = -C_{31}^1 = 1$

$$C_{23}^2 = -C_{32}^2 = h (h \neq 0, 1)$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \partial_2 & X_1 &= e^{x^1} \partial_2 \\ K_2 &= \partial_3 & X_2 &= e^{hx^1} \partial_3 \\ K_3 &= \partial_1 + x^2 \partial_2 + hx^3 \partial_3 & X_3 &= \partial_1 \\ \omega^1 &= e^{-x^1} dx^2 & d\omega^1 &= \omega^1 \Lambda \omega^3 \\ \omega^2 &= e^{-hx^1} dx^3 & d\omega^2 &= h\omega^2 \Lambda \omega^3 \\ \omega^3 &= dx^1 & d\omega^3 &= 0 \end{aligned}$$

Τίπο VII:  $C_{13}^2 = -C_{31}^2 = 1$

$$C_{23}^1 = -C_{32}^1 = -1$$

$$C_{23}^1 = -C_{32}^1 = h \quad (h^2 < 4)$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \partial_2 & X_1 &= (A+kB) \partial_2 - B \partial_3 \\ K_2 &= \partial_3 & X_2 &= B \partial_2 + (A-kB) \partial_3 \\ K_3 &= \partial_1 - x^3 \partial_2 + (x^2 + hx^3) \partial_3 & X_3 &= \partial_1 \end{aligned}$$

$$\omega^1 = (C - kD) dx^2 - D dx^3 \quad d\omega^1 = -\omega^2 \wedge \omega^3$$

$$\omega^2 = D dx^2 + (C + kD) dx^3 \quad d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega^3 + h\omega^2 \wedge \omega^3$$

$$\omega^3 = dx^1 \quad d\omega^3 = 0$$

onde

$$A = e^{kx^1} \cos ax^1 \quad ; \quad B = -\frac{1}{a} e^{kx^1} \operatorname{sen} ax^1$$

$$C = e^{-kx^1} \cos ax^1 \quad ; \quad D = -\frac{1}{a} e^{-kx^1} \operatorname{sen} ax^1$$

e

$$k = \frac{h}{2} \quad , \quad a = \sqrt{1 - k^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 - h^2}$$

$$\text{Tipo VIII: } c_{23}^1 = -c_{32}^1 = -1$$

$$c_{31}^2 = -c_{13}^2 = 1$$

$$c_{12}^3 = -c_{21}^3 = 1$$

$$K_1 = \frac{1}{2} e^{-x^3} \partial_1 + \frac{1}{2} \left[ e^{x^3} - (x^2)^2 e^{-x^3} \right] \partial_2 - x^2 e^{-x^3} \partial_3$$

$$K_2 = \partial_3$$

$$K_3 = \frac{1}{2} e^{-x^3} \partial_1 - \frac{1}{2} \left[ e^{x^3} + (x^2)^2 e^{-x^3} \right] \partial_2 - x^2 e^{-x^3} \partial_3$$

$$X_1 = \frac{1}{2} \left[ 1 + (x^1)^2 \right] \partial_1 + \frac{1}{2} \left[ 1 - 2x^1 x^2 \right] \partial_2 - x^1 \partial_3$$

$$X_2 = -x^1 \partial_1 + x^2 \partial_2 + \partial_3$$

$$X_3 = \frac{1}{2} \left[ 1 - (x^1)^2 \right] \partial_1 + \frac{1}{2} \left[ 2x^1 x^2 - 1 \right] \partial_2 + x^1 \partial_3$$

$$\omega^1 = dx^1 + \left[ 1 + (x^1)^2 \right] dx^2 + \\ + \left[ x^1 - x^2 - (x^1)^2 x^2 \right] dx^3$$

$$\omega^2 = 2x^1 dx^2 + (1 - 2x^1 x^2) dx^3$$

$$\omega^3 = dx^1 + \left[ (x^1)^2 - 1 \right] dx^2 + \\ + \left[ x^1 + x^2 - (x^1)^2 x^2 \right] dx^3$$

$$d\omega^1 = -\omega^2 \wedge \omega^3, \quad d\omega^2 = \omega^3 \wedge \omega^1, \quad d\omega^3 = \omega^1 \wedge \omega^2.$$

$$\text{Tipo IX: } C_{23}^1 = -C_{32}^1 = 1$$

$$C_{31}^2 = -C_{13}^2 = 1$$

$$C_{12}^3 = -C_{21}^3 = 1$$

$$K_1 = \partial_2$$

$$K_2 = \cos x^2 \partial_1 - \cotg x^1 \operatorname{sen} x^2 \partial_2 + \frac{\operatorname{sen} x^2}{\operatorname{sen} x^1} \partial_3$$

$$K_3 = -\operatorname{sen} x^2 \partial_1 - \cotg x^1 \cos x^2 \partial_2 + \frac{\cos x^2}{\operatorname{sen} x^1} \partial_3$$

$$X_1 = -\operatorname{sen} x^3 \partial_1 + \frac{\cos x^3}{\operatorname{sen} x^1} \partial_2 - \cotg x^1 \cos x^3 \partial_3$$

$$X_2 = \cos x^3 \partial_1 + \frac{\operatorname{sen} x^3}{\operatorname{sen} x^1} \partial_2 - \operatorname{sen} x^3 \cotg x^1 \partial_3$$

$$X_3 = \partial_3$$

$$\omega^1 = -\sin x^3 dx^1 + \sin x^1 \cos x^3 dx^2$$

$$\omega^2 = \cos x^3 dx^1 + \sin x^1 \sin x^3 dx^2$$

$$\omega^3 = \cos x^1 dx^2 + dx^3$$

$$d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^3, \quad d\omega^2 = \omega^3 \wedge \omega^1, \quad d\omega^3 = \omega^1 \wedge \omega^2$$

"Os seis primeiros tipos têm ao menos um subgrupo real  $G_1$  invariante. No tipo VII, ao contrário, não existe nenhum subgrupo  $G_1$  real" (21).

Os grupos dos sete primeiros tipos são integráveis, enquanto que os dois últimos não (21). O leitor que desejar detalhes da classificação acima poderá encontrá-los nas referências (23), (24), (25), (26) e (27).

## CAPITULO II

### MODELOS COSMOLÓGICOS INCLINADOS

#### 2.1 - INTRODUÇÃO

Ressaltar o vínculo, ou a ligação, entre os Modelos Cosmológicos Inclinados e os Modelos com Rotação, foi a motivação fundamental ao escrevermos este capítulo. Como julgamos que seríamos melhor entendidos se, no início, apresentássemos as quantidades cinemáticas associadas a uma congruência de curvas, assim procedemos.

A segunda parte deste capítulo é dedicada ao seu tema principal, ou seja, aos modelos cosmológicos inclinados. Acreditamos ter deixado claro que nem todo modelo inclinado possui rotação, mas todo modelo com rotação e espacialmente homogêneo é um modelo inclinado. Existem, por outro lado, modelos com vorticidade que não são geometrias inclinadas. Este é, por exemplo, o caso do famoso universo de Gödel.

Na última seção, apresentamos brevemente, com referências ao apêndice, a técnica de cálculo dos componentes do tensor de Riemann, largamente utilizada em todo este trabalho, denominada de técnica de tetradas ortogonais.

#### 2.2 - CONGRUÊNCIA DE CURVAS TIPO TEMPO E QUANTIDADES CINEMÁTICAS

Seja  $V^\alpha$  um campo vetorial definido em uma variedade espaço tempo  $(M_4, g)$ . Em cada ponto  $P \in M_4$ , o conjunto de vetores ortogonais a  $V^\alpha$  constitui um subespaço vetorial  $H$ , do espaço  $T_P$ , tangente à variedade no ponto considerado. O subespaço  $H$  poderá

ser de três tipos: tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz. No que se segue, faremos a hipótese que  $H$  é tipo-espaço, ou seja,

$$g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta > 0, \quad (2.2.1)$$

que normalizaremos

$$g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = 1. \quad (2.2.2)$$

Quando  $v^\alpha$  é o campo de velocidades do fluido galáctico,  $H$  é denominado de *espaço de repouso local* ou *referencial inercial* do observador que se move com quadrivelocidade  $v^\alpha$ .

Com o campo  $v^\alpha$  e a métrica  $g_{\alpha\beta}$  podemos construir o tensor simétrico  $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - v_\alpha v_\beta$ , que possui as seguintes propriedades:

i) É um projetor:

$$h^\alpha_\beta h^\beta_\lambda = h^\alpha_\lambda \quad (2.2.3)$$

ii) Projeta ortogonalmente a  $v^\alpha$ , ou seja, dado um campo  $y^\alpha$  de  $M_4$ , denotando por  $y^\alpha_\perp = h^\alpha_\lambda y^\lambda$  a sua projeção sobre  $H$ , teremos

$$v_\beta y^\beta_\perp = g_{\alpha\beta} v^\alpha y^\beta_\perp = 0 \quad (2.2.4)$$

iii) Possui traço igual a 3, isto é,  $h^\alpha_\alpha = h = 3$ .

Podemos interpretar  $h_{\alpha\beta}$  como a métrica de  $H$ , no sentido de que a construção acima permite escrever

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (v_\mu dx^\mu)^2 + h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.2.5)$$

para o elemento de linha, ou distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos  $P$  e  $Q$ , da variedade espaço-tempo  $M_4$ . Assim,

a distância entre  $P$  e  $Q$  fica dividida em uma distância puramente espacial  $dl^2 = h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  e um intervalo de tempo  $dt = V_\mu dx^\mu$ .

Chamaremos de *congruência de curvas* a uma família de curvas  $\alpha(s, t)$ , definidas em  $M_4$ , de modo que por cada ponto passe uma, e apenas uma, destas curvas (28). O parâmetro  $s$  é o comprimento ao longo de cada curva, e o parâmetro  $t$  está associado às diferentes curvas de congruência. Em um sistema de coordenadas locais  $\{x^\alpha\}$ , a congruência será dada por  $x^\alpha(s, t)$ , de modo que  $V^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$  é o vetor tangente a uma curva ( $t = \text{fixo}$ ). Trataremos apenas de *congruência de curvas tipo tempo*, ou seja, das congruências em que o vetor tangente  $V^\alpha$  satisfaz a eq. (1), ao qual imporemos a condição dada pela eq. (2).

Considere dois pontos  $P$  e  $Q$  de  $M_4$  tais que  $P(s_0, t_0) \in x^\alpha(s, t)$  e  $Q(s_0, t_0 + \Delta t) \in x^\alpha(s, t_0 + \Delta t)$  com  $(\Delta t)^2 \ll \Delta t$ . O quadrivetor  $X^\alpha$  que une  $P$  e  $Q$  é dado por

$$X^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \left| \begin{array}{l} \Delta t \\ s = \text{const.} \\ t = t_0 \end{array} \right. \quad (2.2.6)$$

é denominado *vetor de conexão*. Em geral,  $V^\alpha$  não é ortogonal às superfícies  $\{s = \text{constante}\}$ , e  $X^\alpha$  não pertence ao subespaço  $H$ . O *vetor posição relativa* de  $Q$  com respeito a  $P$ , é a projeção de  $X^\alpha$  no subespaço ortogonal a  $V^\alpha$ , ou seja

$$X^\alpha \perp = h^{\alpha\lambda} X^\lambda \quad (2.2.7)$$

que corresponde ao conceito newtoniano de vetor posição relativa, representando o deslocamento espacial de  $P$  a  $Q$  (29).

A velocidade relativa entre  $P$  e  $Q$  será dada pela

variação do vetor posição relativa:

$$\begin{aligned}
 v_{(rel.)}^{\alpha} &= h^{\alpha}_{\epsilon} \frac{D}{D\delta} (h^{\epsilon}_{\lambda} X^{\lambda}) = h^{\alpha}_{\epsilon} (h^{\epsilon}_{\lambda} X^{\lambda})_{||\delta} v^{\delta} = \\
 &= h^{\alpha}_{\epsilon} h^{\epsilon}_{\lambda ||\delta} X^{\lambda} v^{\delta} + h^{\alpha}_{\lambda} X^{\lambda}_{||\delta} v^{\delta} = \\
 &= - h^{\alpha}_{\epsilon} \dot{v}^{\epsilon} X^{\lambda} v_{\lambda} + h^{\alpha}_{\lambda} v^{\lambda}_{||\delta} X^{\delta} = \\
 &= (h^{\alpha}_{\delta} v^{\delta}_{||\lambda} - h^{\alpha}_{\epsilon} \dot{v}^{\epsilon} v_{\lambda}) X^{\lambda}
 \end{aligned}
 \tag{2.2.8}$$

onde  $\dot{v}^{\epsilon} = v^{\epsilon}_{||\lambda} v^{\lambda}$  e onde empregamos o fato que  $LX = 0$ , por construção (28). Podemos simplificar a eq. (8) de forma a obter

$$\begin{aligned}
 v_{(rel.)}^{\alpha} &= h^{\alpha}_{\delta} h^{\epsilon}_{\lambda} v^{\delta}_{||\epsilon} h^{\lambda}_{\gamma} X^{\gamma} = \\
 &= h^{\alpha}_{\delta} h^{\epsilon}_{\lambda} v^{\delta}_{||\epsilon} X^{\lambda}_{\perp}
 \end{aligned}
 \tag{2.2.9}$$

ou ainda

$$v_{(rel.)}^{\alpha} = c^{\alpha}_{\lambda} X^{\lambda}_{\perp} .
 \tag{2.2.10}$$

onde

$$c^{\alpha}_{\lambda} = h^{\alpha}_{\delta} h^{\epsilon}_{\lambda} v^{\delta}_{||\epsilon}
 \tag{2.2.11}$$

é um tensor que contém toda a informação da variação da posição de  $Q$  em relação a  $P$ . Podemos decompor  $c_{\alpha\beta}$  em suas partes simétrica e antissimétrica

$$c_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta}
 \tag{2.2.12}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \theta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (c_{\alpha\beta} + c_{\beta\alpha}) = \\
 &= \frac{1}{2} h^{\lambda}_{\alpha} h^{\epsilon}_{\beta} (v_{\lambda ||\epsilon} + v_{\epsilon ||\lambda})
 \end{aligned}
 \tag{2.2.13}$$

e

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (C_{\alpha\beta} - C_{\beta\alpha}) = \\ &= \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\lambda} h_{\beta}^{\epsilon} (V_{\lambda||\epsilon} - V_{\epsilon||\lambda}) \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

O tensor  $\Theta_{\alpha\beta}$  pode ainda ser decomposto em duas partes, um dos quais  $\sigma_{\alpha\beta}$ , possui traço nulo

$$\Theta_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} \Theta \quad (2.2.15)$$

onde

$$\Theta = \Theta^{\alpha}_{\alpha} = V^{\alpha}{}_{||\alpha} \quad (2.2.16)$$

e

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\lambda} h_{\beta}^{\epsilon} V_{(\lambda||\epsilon)} - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \Theta. \quad (2.2.17)$$

De maneira que, finalmente, teremos

$$C_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \Theta \quad (2.2.18)$$

Da definição de  $\sigma_{\alpha\beta}$  e  $\omega_{\alpha\beta}$  verifica-se facilmente que

$$\sigma_{\alpha\beta} V^{\beta} = 0 \quad (2.2.19)$$

$$\omega_{\alpha\beta} V^{\beta} = 0 \quad (2.2.20)$$

Por outro lado, da eq. (11) podemos escrever (29):

$$\begin{aligned} C^{\alpha}_{\lambda} &= h^{\alpha}_{\nu} h_{\lambda}^{\epsilon} V^{\nu}{}_{||\epsilon} = (\delta^{\alpha}_{\nu} - V^{\alpha} V_{\nu}) (\delta^{\epsilon}_{\lambda} - V_{\lambda} V^{\epsilon}) V^{\nu}{}_{||\epsilon} = \\ &= (\delta^{\alpha}_{\nu} \delta^{\epsilon}_{\lambda} - \delta^{\alpha}_{\nu} V_{\lambda} V^{\epsilon} - \delta^{\epsilon}_{\lambda} V^{\alpha} V_{\nu} + V^{\alpha} V_{\nu} V_{\lambda} V^{\epsilon}) V^{\nu}{}_{||\epsilon} = \\ &= V^{\alpha}{}_{||\lambda} - V^{\alpha}{}_{||\epsilon} V^{\epsilon} V_{\lambda} - V^{\nu}{}_{||\lambda} V^{\alpha} V_{\nu} + \dot{V}^{\nu} V_{\nu} V_{\lambda} V^{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Como  $V^{\nu}{}_{||\lambda} V_{\nu} = 0 = \dot{V}^{\nu} V_{\nu}$ , resulta

$$h^{\alpha}_{\nu} h^{\epsilon}_{\beta} v^{\nu} |_{|\epsilon} = v^{\alpha} |_{|\beta} - \dot{v}^{\alpha} v_{\beta}. \quad (2.2.22)$$

As eqs. (18) e (22) nos levam à seguinte decomposição

$$v_{\alpha} |_{|\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \theta + \dot{v}_{\alpha} v_{\beta}. \quad (2.2.23)$$

Quando  $v^{\alpha}$  é o campo de velocidades do fluido, fonte de curvatura de um dado modelo cosmológico, cada um dos termos<sup>(\*)</sup> dessa decomposição recebe uma denominação específica e uma interpretação definida, que mencionaremos a seguir (30, 27).

Iniciemos por  $\theta = v^{\alpha} |_{|\alpha}$ , denominado de *expansão*. Este parâmetro descreve a expansão pura e simples (sem rotação ou distorção) estando, desta forma, associado à variação de volume espacial.

O tensor  $\sigma_{\alpha\beta}$ , denominado de *distorção*, está associado às mudanças na forma, mantendo o volume fixo ( $\sigma^{\alpha}_{\alpha} = 0$ ). Ele mede, por exemplo, a deformação de uma esfera do fluido em uma elipsóide de mesmo volume. Sua intensidade é definida por

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} \geq 0; \quad (2.2.24)$$

então  $\sigma = 0 \Leftrightarrow \sigma_{\alpha\beta} = 0$ .

O vetor  $\dot{v}_{\alpha} \equiv a_{\alpha}$  é denominado de *aceleração*, e representa os efeitos de forças não gravitacionais, anulando-se quando somente forças gravitacionais atuam sobre as partículas do fluido.

O tensor  $\omega_{\alpha\beta}$  é chamado de tensor de *rotação ou vorticidade*, e está associado a uma mudança de orientação de, por

---

(\*) Denominados de Quantidades Cinemáticas.

exemplo, uma esfera de partículas do fluido, sem alterar sua forma ou volume. A partir de  $\omega_{\alpha\beta}$  podemos definir univocamente o vetor

$$\omega^\alpha = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} V_\beta \omega_{\mu\nu} \quad (2.2.25)$$

onde

$$\eta^{\alpha\beta\mu\nu} = - \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \quad (2.2.26)$$

sendo  $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$  o símbolo de Levi-Civita e  $g = \det(g_{\alpha\beta})$ . É imediato verificar que

$$\omega_\alpha V^\alpha = 0 \quad (2.2.27)$$

e

$$\omega^2 = \omega^\alpha \omega_\alpha = \frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} \leq 0 \quad (2.2.28)$$

No caso do fluido não possuir rotação, teremos

$$\omega^\alpha = 0 \Leftrightarrow \eta^{\alpha\beta\mu\nu} V_\beta C_{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta\mu\nu} V_\beta (V_{\mu||\nu} - \dot{V}_\mu V_\nu) = 0$$

$$\Leftrightarrow V_{[\beta} V_{\mu||\nu]} = 0. \quad (2.2.29)$$

De acordo com um teorema do cálculo tensorial (31), se a conexão for simétrica (torção nula), então

$$V_{[\beta} V_{\mu||\nu]} = 0 \Leftrightarrow V_{[\beta} V_{\mu|\nu]} = 0 \Leftrightarrow \exists \text{ localmente funções } f(x^\alpha) \text{ e } t(x^\alpha) \text{ tais que } V_\alpha = f t_{|\alpha}.$$

Como  $t_{|\alpha}$  é um vetor normal às hipersuperfícies  $\{t = \text{constante}\}$ , essa é a condição para que  $V_\alpha$  seja ortogonal a estas hipersuperfícies (\*). Neste caso particular, os referenciais

---

(\*) A vorticidade é nula se, e somente se, o campo de velocidades do fluido  $V^\alpha$  é ortogonal a uma família de hipersuperfícies no espaço-tempo.

de repouso  $H$  se juntam, continuamente, de forma a originar uma hipersuperfície, espacialmente orientada e ortogonal ao campo de vetores  $V^\alpha$ . A função  $t(x^\alpha)$  pode ser pensada como um tempo cosmológico definido pelo fluido. A função  $t(x^\alpha)$ , contudo, não é o tempo próprio ao longo das linhas do universo das partículas do fluido. Quando, no entanto,  $\dot{V}_\alpha = 0$  e  $\omega^\alpha = 0$ , teremos

$$C[\alpha\beta] = V[\alpha||\beta] = 0 \Leftrightarrow V[\alpha|\beta] = 0 \Leftrightarrow \exists t(x^\alpha) \text{ tal}$$

que  $V_\alpha = t|_\alpha$ , e  $t$  mede o tempo próprio de cada observador ao longo de sua linha de universo.

### 2.3 - UMA NOTA SOBRE OS MODELOS COSMOLÓGICOS INCLINADOS

Em uma série de artigos (25, 32, 33), Ellis e MacCallum estudaram soluções exatas das equações de Einstein (aspectos observacionais e comportamento assintótico), sob as seguintes hipóteses:

i) A fonte de curvatura do espaço-tempo é um fluido perfeito de densidade  $\rho$  e pressão  $p$ , ou seja, o tensor momentum energia com a forma

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu - p(g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu) \quad ,$$

$$V^\mu V_\mu = 1 \quad e \quad \rho > 0 \quad p \geq 0 \quad , \quad (2.3.1)$$

onde  $\bar{e}$  é a quadrivelocidade do fluido.

ii) A variedade espaço-tempo  $\bar{e}$  é espacialmente homogênea, ou seja, localmente invariante sob um grupo de isometria  $G_3$ , simplesmente transitivo sobre su-

perfícies tipo espaço  $S(\tilde{t})$ .

iii) A quadrivelocidade do fluido  $v^\mu$  é ortogonal às superfícies de homogeneidade.

Em um trabalho posterior (34), King e Ellis investigaram as soluções exatas das equações de Einstein

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = kT_{\alpha\beta} \quad (2.3.2)$$

sob as hipóteses (i) e (ii), mas não exigiram que a velocidade do fluido fosse ortogonal à hipersuperfície de homogeneidade, havendo, desta forma, uma inclinação entre  $v^\alpha$  e a normal a  $S(\tilde{t})$ . Estes modelos cosmológicos foram denominados de *modelos cosmológicos inclinados*, e alguns de seus aspectos serão objetos do estudo que faremos a seguir.

Indicaremos por  $S(\tilde{t})$  às superfícies de homogeneidade,  $n^\alpha$  o campo de normais a estas superfícies e por  $v^\alpha$  o campo de velocidades do fluido.

Como  $S(\tilde{t})$  é tipo espaço, devemos ter

$$n^\alpha n_\alpha = 1 \quad (2.3.3)$$

A congruência de curvas que tem  $n^\alpha$  como campo de vetores tangentes, é uma congruência de geodésicas pois, sendo  $n_\alpha$  ortogonal a três campos vetoriais de Killing  $K_{(\kappa)}^\alpha$  ( $\kappa = 1, 2, 3$ ;  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ), linearmente independentes em cada ponto, teremos

$$K_{(\kappa)}^\alpha n^\alpha = 0 \Rightarrow K_{(\kappa)}^\alpha ||_\beta n^\alpha + n^\alpha ||_\beta K_{(\kappa)}^\alpha = 0. \quad (2.3.4)$$

Multiplicando por  $n^\beta$  e usando que  $K_{(\kappa)}^\alpha ||_\beta = 0$ , resulta

$$n^\alpha \parallel_\beta n^\beta \quad K_{(\lambda)\alpha} = 0 \Rightarrow n^\alpha \parallel_\beta n^\beta = 0 \quad (2.3.5)$$

Associado à congruência definida pelo campo vetorial  $n^\alpha$ , podemos definir o projetor

$$\tilde{h}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta, \quad (2.3.6)$$

que é a métrica das superfícies de homogeneidade  $S(\tilde{t})$  e projeta ortogonalmente a  $n^\alpha$ . Da mesma forma que definimos as quantidades cinemáticas na seção anterior, podemos definir quantidades correspondentes para a congruência de curvas associadas ao campo de vetores  $n^\alpha$ . A eq. (5) acima traduz o fato que a "aceleração" é nula. Como  $n^\alpha$  é normal às superfícies  $S(\tilde{t})$ , a "rotação" é nula, ou seja,

$$n \left[ \alpha n_\beta \parallel \lambda \right] = 0. \quad (2.3.7)$$

Das eqs. (5) e (6) resulta (veja seção anterior), que

$$n \left[ \alpha \parallel \beta \right] = 0 \Leftrightarrow n \left[ \alpha \mid \beta \right] = 0, \quad (2.3.8)$$

e portanto, existem localmente funções  $\tilde{t} = \tilde{t}(x^\alpha)$ , tais que

$$n_\alpha = \tilde{t} \mid_\alpha. \quad (2.3.9)$$

como  $n^\alpha n_\alpha = 1$ , teremos

$$n^\alpha \tilde{t} \mid_\alpha = 1. \quad (2.3.10)$$

As superfícies  $\{\tilde{t} = \text{constante}\}$  são, portanto, as hipersuperfícies de homogeneidade do grupo de isometria  $G_3$ .

Para completar o paralelo que estávamos fazendo com a seção anterior, mencionamos o fato que, de acordo com as

eqs. (5) e (6), a derivada covariante de  $n_\alpha$  é

$$n_\alpha ||\beta = \tilde{\Theta}_{\alpha\beta} \quad (2.3.11)$$

onde  $\tilde{\Theta}_{\alpha\beta} = \tilde{\Theta}_{(\alpha\beta)}$ . É claro que

$$\tilde{\Theta}_{\alpha\beta} n^\beta = 0 \quad e \quad \tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \tilde{\Theta}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \tilde{\Theta} \tilde{h}_{\alpha\beta} \quad (2.3.12)$$

onde  $\tilde{\Theta} = \tilde{\Theta}_\alpha^\alpha$ .

Associado à congruência de linha de universo do fluido podemos definir o tensor

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - V_\alpha V_\beta \quad (2.3.13)$$

que projeta no espaço de repouso local ortogonal a  $V^\alpha$  ( $h^\alpha_\beta V^\beta = 0$ ). Obviamente, podemos definir as quantidades cinemáticas correspondentes à congruência definida pelo campo de velocidade  $V^\alpha$ . Indicaremos por  $t$ , o tempo ao longo das linhas de universo das partículas ao fluido, de maneira que  $t = t(\tilde{t})$  e  $dt/d\tilde{t} \neq 0$ .

A relação entre a normal  $n^\alpha$  e a quadrivelocidade  $V^\alpha$  fica completamente determinada pelo conhecimento do ângulo de inclinação  $\Psi$ , onde

$$\cosh \Psi = n^\alpha V_\alpha, \quad \Psi = \Psi(\tilde{t}) \quad (2.3.14)$$

e pela direção de inclinação, que pode ser especificada de duas maneiras<sup>(\*)</sup>:

i) A direção  $C^\alpha$  da projeção da normal  $n^\alpha$  no subes-

---

(\*) Veja a figura adiante.

paço  $H$ , de repouso do observador  $v^\alpha$

$$h^\alpha_\beta n^\beta = - C^\alpha \operatorname{senh} \Psi \Rightarrow C_\alpha v^\alpha = 0. \quad (2.3.15)$$

ii) A direção  $\tilde{C}^\alpha$  da projeção de  $v^\alpha$  nas superfícies de homogeneidade  $S(\tilde{t})$

$$\tilde{h}^\alpha_\beta v^\beta = \tilde{C}^\alpha \operatorname{senh} \Psi \Rightarrow \tilde{C}_\alpha n^\alpha = 0. \quad (2.3.16)$$

Da eq. (16) acima, teremos

$$\begin{aligned} \tilde{C}^\alpha \tilde{C}_\alpha &= \frac{\tilde{h}^\alpha_\lambda \tilde{h}^\lambda_{\alpha\beta} v^\lambda v^\beta}{\operatorname{senh}^2 \Psi} = \frac{\tilde{h}^\lambda_{\lambda\beta} v^\lambda v^\beta}{\operatorname{senh}^2 \Psi} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{cosh}^2 \Psi}{\operatorname{senh}^2 \Psi} = -1, \end{aligned} \quad (2.3.17a)$$

Analogamente

$$C^\alpha C_\alpha = -1 \quad (2.3.17b)$$

Por outro lado, a eq. (16) também nos permite encontrar a expressão para  $v^\alpha$  em termos de  $n^\alpha$  e  $\tilde{C}^\alpha$ . De fato,

$$\begin{aligned} \tilde{h}^\alpha_\beta v^\beta &= \operatorname{senh} \Psi \tilde{C}^\alpha \Rightarrow (\delta^\alpha_\beta - n^\alpha n_\beta) v^\beta = \\ &= \operatorname{senh} \Psi \tilde{C}^\alpha \Rightarrow v^\alpha - n^\alpha \operatorname{cosh} \Psi = \operatorname{senh} \Psi \tilde{C}^\alpha \end{aligned}$$

e finalmente

$$v^\alpha = n^\alpha \operatorname{cosh} \Psi + \tilde{C}^\alpha \operatorname{senh} \Psi \quad (2.3.18)$$

Procedendo de maneira análoga com a eq. (15), resulta que

$$n^\alpha = V^\alpha \cosh \Psi - C^\alpha \sinh \Psi \quad (2.3.19)$$

De maneira que, de acordo com as eqs. (18) e (19), verificamos, como afirmamos anteriormente, que o conhecimento do ângulo de inclinação  $\Psi$ , e a componente  $C^\alpha$  da projeção de  $n^\alpha$  no subespaço  $H$ , determina a relação entre  $V^\alpha$  e a normal. Similarmente, o ângulo  $\Psi$  e a componente  $\tilde{C}^\alpha$  de  $V^\alpha$  nas superfícies  $S(\tilde{t})$ , também determina a relação entre  $n^\alpha$  e  $V^\alpha$ .

Para completar as relações algébricas, obteremos a forma explícita para  $C^\alpha$  e  $\tilde{C}^\alpha$ . Levando  $n^\alpha$  da eq. (19) na eq. (18), após alguma manipulação, teremos

$$\tilde{C}^\alpha = C^\alpha \cosh \Psi - V^\alpha \sinh \Psi . \quad (2.3.20)$$

Levando  $V^\alpha$  da eq. (18) na eq. (19), resulta

$$C^\alpha = \tilde{C}^\alpha \cosh \Psi + n^\alpha \sinh \Psi . \quad (2.3.21)$$

A figura abaixo ilustra de maneira cartesiana e grossa a relação entre os vetores  $V^\alpha$ ,  $n^\alpha$ ,  $\tilde{C}^\alpha$  e  $C^\alpha$ .

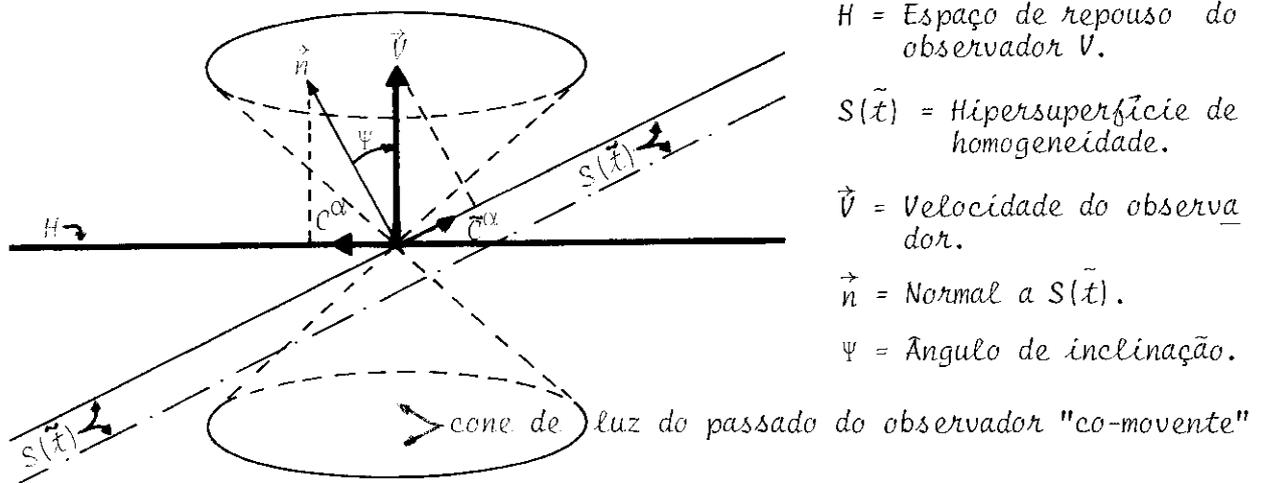


Figura 2.3.1 - Vizinhaça de um observador em um espaço-tempo inclinado.

As quantidades físicas  $\rho(\tilde{t})$  e  $p(\tilde{t})$  são invariantes sobre as superfícies de homogeneidade. Para uma função qualquer  $f(\tilde{t})$ , teremos

$$f|_{\alpha} = \frac{df}{d\tilde{t}} \tilde{t}|_{\alpha} \quad (2.3.22)$$

ou, empregando a eq. (9):

$$f|_{\alpha} = n_{\alpha} \frac{df}{d\tilde{t}} \Leftrightarrow f|_{\alpha} n^{\alpha} = \frac{df}{d\tilde{t}}. \quad (2.3.23)$$

Temos ainda que

$$f|_{\alpha} \tilde{h}^{\alpha}_{\beta} = 0 \quad (2.3.24)$$

onde utilizamos as eqs. (6) e (23).

Indicaremos com um ponto a derivada covariante ao longo das linhas de fluxo do fluido. Se  $f(\tilde{t})$  é uma função escalar, pelas eqs. (23) e (14), devemos ter

$$\dot{f} \equiv f|_{|\alpha} v^{\alpha} = f|_{\alpha} v^{\alpha} = n_{\alpha} v^{\alpha} \frac{df}{d\tilde{t}} = \cosh \Psi \frac{df}{d\tilde{t}} \quad (2.3.25)$$

e também

$$f|_{\alpha} h^{\alpha}_{\beta} = n_{\alpha} \frac{df}{d\tilde{t}} h^{\alpha}_{\beta} = \sinh \Psi \frac{df}{d\tilde{t}} \tilde{C}_{\beta}. \quad (2.3.26)$$

A eq. (26) nos mostra que, em geral, os modelos inclinados parecerão "inomogeneos" para o observador que se move com quadrivelocidade  $v^{\alpha}$ . Para tal observador grandezas físicas (homogêneas), tais como a densidade  $\rho(\tilde{t})$  e a pressão  $p(\tilde{t})$ , se apresentarão com um gradiente espacial  $\sinh \Psi \frac{d\rho}{d\tilde{t}}$  (ou  $\sinh \Psi \frac{dp}{d\tilde{t}}$ ), na direção definida pelo vetor tipo-espaço  $\tilde{C}_{\alpha}$ . Em cosmologia, diz-se que uma variedade espaço-tempo localmente invariante sob

um grupo de isometria  $G_3$ , simplesmente transitivo sobre hipersuperfície tipo-espaço,  $\tilde{e}$  espacialmente homogênea. Em tal definição de homogeneidade (critério de grupo) se prescinde, ou se omite, o observador; o que nos parece errôneo. Contudo, acabamos de mostrar que quantidades físicas homogêneas (como  $\rho(\tilde{t})$  e  $p(\tilde{t})$ ), para um dado observador ( $n^\alpha$ ), não serão homogêneas para um outro observador ( $V^\alpha$ ), o que nos parece fisicamente bastante razoável. Podemos ter uma idéia de como estas coisas acontecem, para o observador  $V^\alpha$ , se utilizarmos a fig. (1): através dela podemos ver que para um dado instante  $t = t_0 = \text{const.}$  ( $t$  é o tempo próprio ao longo da congruência definida por  $V^\alpha$ ), o observador que se move com velocidade  $V^\alpha$  terá acesso a hipersuperfícies de homogeneidades distintas em seu subespaço de repouso local. As superfícies de homogeneidade ( $\tilde{t} = \text{constante}$ ) não são superfícies de simultaneidade para o fluido. Reciprocamente, as hipersuperfícies de simultaneidade do fluido não são as superfícies de homogeneidade  $S(\tilde{t})$ .

Podemos decompor, relativamente a  $n^\alpha$ , o tensor momentum energia de fluido perfeito

$$T_{\alpha\beta} = \rho V_\alpha V_\beta - p(g_{\alpha\beta} - V_\alpha V_\beta) \quad (2.3.27)$$

para um modelo inclinado. A eq. (18) nos fornece

$$\begin{aligned} V_\alpha V_\beta &= \cosh^2 \Psi n_\alpha n_\beta + 2 \sinh \Psi \cosh \Psi n_{(\alpha} \tilde{C}_{\beta)} + \\ &+ \sinh^2 \Psi \tilde{C}_\alpha \tilde{C}_\beta. \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

Levando a eq. (28) na eq. (27), após alguns rearranjos simples, encontramos que o tensor momentum energia toma a

forma

$$T_{\alpha\beta} = \tilde{\rho} n_{\alpha} n_{\beta} - p \tilde{h}_{\alpha\beta} + 2\tilde{q}_{(\alpha} n_{\beta)} + \tilde{\Pi}_{\alpha\beta} \quad (2.3.29)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \rho \cosh^2 \Psi + p \sinh^2 \Psi \\ \tilde{q}_{\alpha} &= (\rho+p) \sinh \Psi \tilde{C}_{\alpha} , \\ \tilde{p} &= p + \frac{1}{2} (\rho+p) \sinh^2 \Psi \\ \tilde{\Pi}_{\alpha\beta} &= (\rho+p) \sinh^2 \Psi (\tilde{C}_{\alpha} \tilde{C}_{\beta} - \frac{1}{3} \tilde{h}_{\alpha\beta}) . \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

As eqs. (16) e (17), nos levam a

$$\tilde{q}_{\alpha} n^{\alpha} = 0 , \quad \tilde{\Pi}_{\alpha\beta} n^{\beta} = 0 , \quad \tilde{\Pi}^{\alpha}_{\alpha} = 0 \quad (2.3.31)$$

como era de se esperar.

Como  $(\rho+p) > 0$ , a eq. (30) acima nos mostra que

$$\Psi > 0 \Rightarrow \tilde{q}_{\alpha} \neq 0 \quad e \quad \tilde{\Pi}_{\alpha\beta} \neq 0 \quad (2.3.32)$$

ou seja, no referencial ligado a  $n^{\alpha}$ , o tensor momentum energia (fluido perfeito) de um modelo inclinado,  $\tilde{e}$  o tensor momentum energia de um fluido imperfeito.

Associado ao campo de velocidades  $v^{\alpha}$ , do fluido, podemos definir as quantidades cinemáticas. Estaremos, no entanto, particularmente interessados na rotação. Da eq. (18) podemos escrever

$$\begin{aligned} v_{\alpha} | |_{\beta} &= \cosh \Psi n_{\alpha} | |_{\beta} + \sinh \Psi \tilde{C}_{\alpha} | |_{\beta} + \\ &+ (\cosh \Psi) |_{\beta} n_{\alpha} + (\sinh \Psi) |_{\beta} \tilde{C}_{\alpha} . \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

Os dois últimos termos da equação acima podem ser simplificados,

com o uso das eqs. (23) e (21). Com efeito,

$$\begin{aligned}
 & (\cosh \Psi) |_{\beta} n_{\alpha} + (\sinh \Psi) |_{\beta} \tilde{C}_{\alpha} = \\
 & = \sinh \Psi \frac{d\Psi}{d\tilde{t}} n_{\alpha} n_{\beta} - \cosh \Psi \frac{d\Psi}{d\tilde{t}} \tilde{C}_{\alpha} n_{\beta} = \\
 & = n_{\beta} \frac{d\Psi}{d\tilde{t}} (n_{\alpha} \sinh \Psi + \tilde{C}_{\alpha} \cosh \Psi) = \\
 & = C_{\alpha} n_{\beta} \frac{d\Psi}{d\tilde{t}} \quad (2.3.34)
 \end{aligned}$$

Desta forma, teremos:

$$v_{\alpha} |_{\beta} = C_{\alpha} n_{\beta} \frac{d\Psi}{d\tilde{t}} + \cosh \Psi \tilde{\Theta}_{\alpha\beta} + \sinh \Psi \tilde{C}_{\alpha} |_{\beta} \quad (2.3.35)$$

e portanto

$$\begin{aligned}
 v_{\alpha} |_{\beta} v^{\beta} & = \sinh \Psi (\tilde{C}_{\alpha})' + \left( \frac{d\Psi}{d\tilde{t}} C_{\alpha} n_{\beta} + \right. \\
 & + \left. \cosh \Psi \tilde{\Theta}_{\alpha\beta} \right) (n^{\beta} \cosh \Psi + \tilde{C}^{\beta} \sinh \Psi) = \\
 & = \sinh \Psi (\tilde{C}_{\alpha})' + \frac{d\Psi}{d\tilde{t}} \cosh \Psi C_{\alpha} + \\
 & + \sinh \Psi \cosh \Psi \tilde{\Theta}_{\alpha\beta} \tilde{C}^{\beta} \quad (2.3.36)
 \end{aligned}$$

onde utilizamos as eqs. (5), (12) e (16). Da equação acima, temos a aceleração

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_{\alpha} & = \cosh \Psi \frac{d\Psi}{d\tilde{t}} C_{\alpha} + \sinh \Psi \cosh \Psi n_{\alpha} |_{\beta} \tilde{C}^{\beta} + \\
 & + \sinh \Psi (\tilde{C}_{\alpha})' \quad (2.3.37)
 \end{aligned}$$

A eq. (35) nos fornece a expressão para a expansão

$$\begin{aligned} \Theta = V^\alpha \Big|_{|\alpha} &= \sinh \Psi \frac{d\Psi}{d\tilde{t}} + \cosh \Psi \tilde{\Theta} + \\ &+ \sinh \beta \tilde{C}_\alpha \Big|_{|\beta} \tilde{h}^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

Isto porque, de acordo com as eqs. (15) e (17), devemos ter

$$C_\alpha n^\alpha = C_\alpha h^{\alpha\beta} n_\beta = - C^\alpha C_\alpha \sinh \Psi = \sinh \Psi. \quad (2.3.39)$$

O vetor de rotação  $\omega^\alpha = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} V_\beta V_\mu \Big|_{|\nu}$ , de acordo com as eqs. (35) e (18), será dado por:

$$\omega^\alpha = \sinh \Psi \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} V_\beta \tilde{C}_\mu \Big|_{|\nu}. \quad (2.3.40)$$

As eqs. (37) e (40) nos mostram como o fluido, em um modelo cosmológico inclinado, pode ter uma aceleração e/ou uma rotação. Fisicamente podemos pensar que uma variação da pressão  $p = p(\tilde{t})$  no tempo, acarretará um gradiente espacial de pressão (eq. (26)), que fará o fluido se mover sobre curvas aceleradas e ele apresentará, em geral, rotação.

A projeção da rotação  $\omega^\alpha$  na direção  $\tilde{C}^\alpha$  é

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\alpha \omega^\alpha &= \sinh \Psi \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} (\cosh \Psi n_\beta + \\ &+ \sinh \Psi \tilde{C}_\beta) \tilde{C}_\mu \Big|_{|\nu} \tilde{C}_\alpha = \\ &= \sinh \Psi \cosh \Psi \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} \tilde{C}_\alpha n_\beta \tilde{C}_\mu \Big|_{|\nu} \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

Por outro lado, a eq. (19) nos fornece:

$$\begin{aligned}
 n_{\alpha} \omega^{\alpha} &= \sinh \Psi \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} V_{\beta} \tilde{C}_{\mu||\nu} (\cosh \Psi V_{\alpha} - \sinh \Psi C_{\alpha}) = \\
 &= - \sinh^2 \Psi \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} V_{\beta} \tilde{C}_{\mu||\nu} C_{\alpha} = - \sinh \Psi \omega^{\alpha} C_{\alpha} \quad (2.3.42)
 \end{aligned}$$

Portanto, usando a eq. (16), temos finalmente:

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_{\alpha} \omega^{\alpha} &= \sinh \Psi \cosh \Psi \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} \tilde{C}_{\alpha} n_{\beta} \tilde{C}_{\mu||\nu} = \\
 &= - \coth \Psi \omega^{\alpha} n_{\alpha} . \quad (2.3.43)
 \end{aligned}$$

Assim, o vetor  $\omega^{\alpha}$  estará na superfície de homogeneidade ( $n_{\alpha} \omega^{\alpha} = 0$ ) se, e somente se, ele for ortogonal a  $\tilde{C}^{\alpha}$  (eq. (43)), e  $C^{\alpha}$  (eq. (42)).

As expressões para a expansão  $\Theta_{\alpha\beta}$  e a distorção  $\sigma_{\alpha\beta}$ :

$$\begin{aligned}
 \Theta_{\alpha\beta} &= h_{\alpha}^{\lambda} h_{\beta}^{\epsilon} V_{(\lambda||\epsilon)} = V_{(\alpha||\beta)} + \dot{V}_{(\alpha} V_{\beta)} \\
 \sigma_{\alpha\beta} &\equiv \Theta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \Theta h_{\alpha\beta} \quad (2.3.44)
 \end{aligned}$$

são razoavelmente complexas e não as discutiremos aqui.

King e Ellis (34) utilizam a expressão "modelos cosmológicos inclinados", exclusivamente para os modelos inclinados ( $\Psi \neq 0$ ) em que a fonte é um fluido perfeito. Um importante teorema por eles demonstrado é que: "Não há modelos inclinados do tipo Bianchi I. Modelos inclinados Bianchi II têm rotação nula. Modelos inclinados dos tipos Bianchi VIII e IX têm rotação diferente de zero".

O resultado de que os modelos inclinados do tipo Bianchi II têm rotação nula (que é uma generalização do trabalho de Oszvath (35) para poeira), é obtido com o uso das equações de

Einstein, e portanto, admite, como hipótese, que a fonte é um fluido perfeito. Na obtenção das outras afirmativas mencionadas, contudo, King e Ellis não fazem apelo às equações de Einstein, não fazem uso da hipótese de que o fluido é perfeito, sendo tais resultados obtidos como decorrência da existência do grupo de isometria  $G_3$  dos tipos mencionados. Desta forma, podemos afirmar que, independente da fonte de curvatura, não há modelos inclinados do tipo Bianchi I, e que todo modelo inclinado Bianchi VIII e IX possui rotação,

A literatura dos modelos cosmológicos inclinados é relativamente pequena. O leitor que desejar maiores detalhes sobre tais modelos, além do trabalho primeiro de King e Ellis (34), poderá encontrá-los em Ellis e King (36), Collins (37) Collins e Ellis (38), Dunn e Tupper (39, 40).

#### 2.4 - O CÁLCULO COM TETRADAS

Considere uma variedade Riemanniana de dimensão quatro e localmente Lorentziana. Sejam  $g_{\alpha\beta}$  as componentes do tensor métrico  $g$  na base de coordenadas, de maneira que o elemento de linha de nossa variedade tem a forma

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.4.1)$$

Tomemos quatro campos vetoriais  $e_{(A)}$  ( $A = 0, 1, 2, 3$ ) linearmente independentes e tais que

$$g(e_{(A)}, e_{(B)}) = \eta_{AB} = \text{diag } (+, -, -, -) \quad (2.4.2)$$

ou seja,  $e_{(0)}$  do tipo-tempo e os outros  $e_{(A)}$  do tipo-espço, e

ortonormalizados. Chamaremos a estes quatro campos vetores de tetradas<sup>(\*)</sup>. Na base de coordenadas, teremos:

$$e_A = e_{(A)}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Leftrightarrow \partial_\alpha = e_\alpha^{(A)} e_{(A)} . \quad (2.4.3)$$

O fato dos campos serem linearmente independentes se traduz, em termos da matriz  $4 \times 4$  formada com as componentes  $e_{(A)}^\alpha$ , por  $\det (e_{(A)}^\alpha) \neq 0$ , ou seja, a matriz  $e_{(A)}^\alpha$  é não singular.

Denotaremos por  $\Theta^A$  as 1-formas duais aos vetores  $e_{(A)}$ . Designaremos por  $e_\alpha^{(A)}$  as componentes de  $\Theta^A$  na base canônica. Desta forma, teremos

$$\Theta^A = e_\alpha^{(A)} dx^\alpha \quad (2.4.4)$$

e

$$\Theta^A [e_{(B)}] = \delta^A_B \Rightarrow e_\alpha^{(A)} e_{(B)}^\alpha = \delta^A_B \quad (2.4.5)$$

e portanto:

$$dx^\alpha = e_{(A)}^\alpha \Theta^A \quad (2.4.6)$$

$$dx^\alpha [\partial_\beta] = \delta^\alpha_\beta = e_{(A)}^\alpha e_\beta^{(A)} . \quad (2.4.7)$$

Calculando a derivada exterior da 1-forma  $\Theta^A$ , utilizando a eq. (6) acima, resulta

$$\begin{aligned} d\Theta^A &= e_{\alpha|\beta}^{(A)} dx^\beta \wedge dx^\alpha = - e_{\alpha||\beta}^{(A)} dx^\alpha \wedge dx^\beta = \\ &= e_{\alpha||\beta}^{(A)} e_{(B)}^\alpha e_{(C)}^\beta \Theta^C \Theta^B \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

---

(\*) Na maior parte das vezes, costuma-se chamar também de tetradas as 1-formas duais associadas a tais vetores.

onde usamos a eq. (6). A equação acima nos será de utilidade adiante.

O elemento de linha de nossa variedade, dado pela eq. (1), é tal que, de acordo com a eq. (2), pode ser escrito como

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B \quad (2.4.9)$$

de maneira que, usando a eq. (4), resulta

$$g_{\alpha\beta} = e_{\alpha}^{(A)} e_{\beta}^{(B)} \eta_{AB} \quad (2.4.10)$$

ou

$$\eta_{AB} = e_{(A)}^{\alpha} e_{(B)}^{\beta} g_{\alpha\beta} \quad (2.4.11)$$

onde utilizamos a eq. (5). Definindo a inversa  $\eta^{BC}$  da matriz  $\eta_{AB}$

$$\eta_{AB} \eta^{BC} = \delta_A^C \Leftrightarrow \eta^{BC} = \text{diag} (+, -, -, -) \quad (2.4.12)$$

Podemos verificar facilmente que os índices latinos maiúsculos, que denominaremos de índices de tetrada, podem ser abaixados e levantados com as matrizes  $\eta_{AB}$  e  $\eta^{AB}$ , respectivamente. Com efeito, da eq. (10) temos

$$g_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{(C)} \equiv e_{\beta(C)} = \eta_{CB} e_{\beta}^{(B)} \quad (2.4.13)$$

e usando a matriz inversa  $\eta^{AB}$ , teremos:

$$e_{\beta}^{(A)} = \eta^{CA} e_{\beta(C)} \quad (2.4.14)$$

Assim, relativamente aos índices de tetradas,  $\eta_{AB}$  e/ou  $\eta^{AB}$  funcionam como métrica.

O grande mérito da escolha das tetradas locais  $e_{(A)}$

(e das correspondentes 1-formas  $\theta^A$ ) é que, de acordo com a eq. (2), relativamente a esta base, as componentes do tensor métrico são constantes. Isto nos fornecerá um eficiente método de cálculo das componentes do tensor de curvatura, como veremos a seguir.

De acordo com a eq. (A.5.18), devemos ter

$$\Gamma_{ABC} = - \Gamma_{BAC} \quad (2.4.15)$$

onde fizemos  $\eta_{AM} \Gamma_{BC}^M \equiv \Gamma_{ABC}$ . Utilizando as eqs. (A.5.21) e (A.5.15), teremos também as simetrias

$$\omega_{AB} = - \omega_{BA} \Rightarrow \Omega_{AB} = - \Omega_{BA} \quad (2.4.16)$$

No caso que estamos tratando, as componentes da conexão  $\Gamma_{BC}^A$ , e as 1-formas  $\omega_B^A$ , são denominadas coeficientes de rotação de Ricci e 1-formas de rotação, respectivamente.

De acordo com a eq. (A.5.29) e a eq. (8) acima devemos identificar

$$\Gamma_{BC}^A = - e_{\alpha}^{(A)} |_{\beta} e_{(B)}^{\alpha} e_{(C)}^{\beta} \quad (2.4.17)$$

Podemos determinar os coeficientes de rotação de Ricci a partir dos coeficientes de estrutura. De fato, usando a eq. (A.7.13) e abaixando o primeiro índice, teremos

$$\Gamma_{ABC} = - \frac{1}{2} (C_{ABC} - C_{BAC} - C_{CBA}) . \quad (2.4.18)$$

Estamos agora em condições de explicitar o método do cálculo das componentes do tensor de Riemann, que mencionamos anteriormente. Dado um elemento de linha  $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$ , escolhemos as tetradas  $\theta^A$  (ou equivalentemente as tetradas  $e_{(A)}$ ) de forma que  $ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B$ . Em seguida, tomamos a derivada exte-

rior das 1-formas  $\theta^A$ , e, de acordo com a eq. (A.4.41) ( $d\theta^A = -\frac{1}{2} c_{BC}^A \theta^B \wedge \theta^C$ ), temos os coeficientes  $c_{BC}^A$ . Utilizando a eq. (18) obtemos os coeficientes de rotação de Ricci, que de acordo com a eq. (A.5.21) ( $\omega_B^A = \Gamma_{BC}^A \theta^C$ ), nos fornecerão a 1-forma de rotação  $\omega_B^A$ . De posse das 1-formas  $\omega_B^A$ , e usando a 2ª equação de estrutura de Cartan ( $\Omega_B^A = d\omega_B^A + \omega_C^A \wedge \omega_B^C$ ), calculamos as 2-formas de curvatura, que de acordo com a eq. (A.6.19) ( $\Omega_B^A = \frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D$ ), nos fornecerão as componentes do tensor de Riemann na base de tetradas.

*"It is a dangerous habit of the human mind to generalize and to extrapolate without noticing that it is doing so. The physicist should therefore attempt to counter this habit by unceasing vigilance in order to detect any such extrapolation. Most of the great advances in physics have been concerned with showing up the fallacy of such extrapolations, which were supposed to be self-evident that they were not considered hypotheses. These extrapolations constitute a far greater danger to the progress of physics than so-called speculation".*

*H. Bondi*

## CAPÍTULO III

### VIOLAÇÃO DA CAUSALIDADE NA COSMOLOGIA

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

Em 1949, Kurt Gödel (19) apresentou um exemplo de um novo tipo de solução cosmológica das equações de Einstein, que pode ser caracterizada como se segue.

Considere a variedade  $M_4 = H^3 \times \mathbb{R}$  grupo de cobertura universal da álgebra de Lie

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= -X_0, \quad [X_2, X_0] = X_1, \quad [X_0, X_1] = X_2, \\ [X_a, X_3] &= 0 \quad a = 0, 1, 2 \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

dos campos invariantes à esquerda  $X_0, X_1, X_2$  e  $X_3$ , que podem ser representados (20, 41) por

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{\partial}{\partial x^0} \\ X_1 &= -\sin x^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \cos x^0 \frac{\partial}{\partial x^1} + e^{-x^1} \sin x^0 \frac{\partial}{\partial x^2} \\ X_2 &= -\cos x^0 \frac{\partial}{\partial x^0} - \sin x^0 \frac{\partial}{\partial x^1} + e^{-x^1} \cos x^0 \frac{\partial}{\partial x^2} \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial x^3} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

onde  $X_0, X_1$  e  $X_2$  são campos invariantes à esquerda, definidos globalmente sobre o hiperbolóide grupo de Lie  $H^3$ . As 1-formas invariantes correspondentes aos campos dados pela eq. (2) são:

$$\begin{aligned}
 \omega^0 &= dx^0 + e^{x^1} dx^2 \\
 \omega^1 &= \cos x^0 dx^1 + e^{x^1} \operatorname{sen} x^0 dx^2 \\
 \omega^2 &= -\operatorname{sen} x^0 dx^1 + e^{x^1} \cos x^0 dx^2 \\
 \omega^3 &= dx^3
 \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

onde obviamente

$$\begin{aligned}
 d\omega^0 &= \omega^1 \wedge \omega^2, & d\omega^1 &= -\omega^2 \wedge \omega^0 \\
 d\omega^2 &= -\omega^0 \wedge \omega^1, & d\omega^3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Introduzindo na variedade grupo de Lie  $M_4 = H^3 \times \mathbb{R}$  a métrica

$$ds^2 = a^2 \left[ 2(\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2 \right], \quad a = \text{const.}, \tag{3.1.5}$$

podemos verificar que ela é solução das equações de Einstein - com constante cosmológica - tendo como fonte um fluido perfeito de densidade constante  $\rho$  (19, 42). Com novas coordenadas definidas por

$$x^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{x}^0, \quad \bar{x}^1 = x^1, \quad x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{x}^2, \quad \bar{x}^3 = x^3, \tag{3.1.6}$$

o elemento de linha dado pela eq. (5) assume o seguinte aspecto:

$$ds^2 = a^2 \left[ (dx^0)^2 + 2e^{x^1} dx^0 dx^2 + \frac{1}{2} e^{2x^1} (dx^2)^2 - (dx^1)^2 - (dx^3)^2 \right] \tag{3.1.7}$$

que é a forma originalmente apresentada por Gödel em 1949, e onde omitimos a barra sobre as coordenadas.

Admitimos na Relatividade Especial, que a velocidade da luz é o limite de velocidade fisicamente permitida para

uma partícula, e portanto, um dado evento  $\bar{s}$  pode ser influenciado causalmente pelos eventos do seu cone de luz do passado. Da mesma maneira, um dado evento  $\bar{s}$  pode ter influência causal sobre o conjunto de eventos no seu cone de luz do futuro. Como os cones de luz do passado e do futuro nunca se interceptam, estes conjuntos de eventos são disjuntos. Na Relatividade Geral, contudo, não é tão simples assim (43, 44). As equações de Einstein permitem soluções cujo comportamento global leva-nos à violação do princípio de causalidade. Quem pela primeira vez apontou este fato foi Gödel, quando afirmou que seu modelo possuía curvas tipo-tempo fechadas. A existência de tais curvas em seu universo foi por ele demonstrada introduzindo novas coordenadas  $t, \kappa, \phi, z$  (onde  $\kappa, \phi, t$  são coordenadas cilíndricas no subespaço  $x^3 = \text{constante}$ ) da seguinte forma:

$$e^{x^1} = \cosh(2\kappa) + \cos\phi \sinh(2\kappa)$$

$$x_2 e^{x^1} = \sqrt{2} \sin\phi \sinh(2\kappa)$$

$$tg \left[ \frac{\phi}{2} + \frac{x_0 - 2t}{2\sqrt{2}} \right] = e^{-2\kappa} tg \frac{\phi}{2} \quad (3.1.8)$$

$$x^3 = 2z$$

onde

$$\left| \frac{x_0 - 2t}{2\sqrt{2}} \right| < \frac{\pi}{2} \quad (3.1.9)$$

que nos leva à seguinte expressão para o elemento de linha<sup>(\*)</sup>

---

(\*) Os detalhes de como passar da eq. (7) para eq. (10) podem ser encontrados em Stein (45).

$$ds^2 = 4a^2 \left[ dt^2 + 2 H(\kappa) d\phi dt + G(\kappa) d\phi^2 - dz^2 - d\kappa^2 \right] \quad (3.1.10)$$

onde

$$G(\kappa) = \sinh^4 \kappa - \sinh^2 \kappa$$

e

$$H(\kappa) = 2\sqrt{2} \sinh^2 \kappa \quad (3.1.11)$$

Assim, se definimos um raio crítico  $\kappa_c$  tal que  $\sinh \kappa_c = 1$  (ou seja,  $\kappa_c = \ln(\sqrt{2} + 1)$ ), então, para qualquer  $\kappa > \kappa_c$ , teremos que  $\sinh^4 \kappa - \sinh^2 \kappa > 0$ . Portanto, as circunferências definidas por

$$\kappa = R = \text{const.} > \kappa_c, \quad t = z = \text{const.} \quad (3.1.12)$$

são curvas tipo tempo fechadas. A existência de tais curvas permite a violação da causalidade. Um observador poderá alterar sua própria história. O universo de Gödel, portanto, não obedece um princípio de causalidade global.

Poder-se-ia argumentar que: primeiro, no interior do raio crítico nada de excepcional ocorre, ou seja, um observador que passasse a sua existência no interior da região limitada pelo raio crítico, não tomaria conhecimento da violação da causalidade em seu universo. Segundo, que alargando-se o espectro de possíveis fontes de curvatura, a causalidade poderia ser evitada ou mesmo tornar-se mais compreensível (46). Neste capítulo, apresentaremos o resultado de nossas recentes investigações neste sentido (Novello-Rebouças (47) e Rebouças (48)). Mostramos que se admitimos fontes de curvatura mais complexas, as dificuldades relativas ao fenômeno de quebra de causalidade não desaparecem, se ampliam.

### 3.2 - A MÉTRICA E O TENSOR DE RIEMANN

Consideremos o elemento da linha na forma de Gödel

$$ds^2 = dt^2 + 2H(r)d\phi dt + G(r)d\phi^2 - dr^2 - dz^2 \quad (3.2.1)$$

onde indicaremos as coordenadas na ordem  $(t, r, \phi, z)$ .

Definindo as 1-formas  $\theta^A$ , por

$$\theta^0 = dt + H(r)d\phi, \quad \theta^2 = \delta(r)d\phi \quad (3.2.2)$$

$$\theta^1 = dr, \quad \theta^3 = dz \quad (3.2.3)$$

onde

$$\delta^2 = H^2 - G, \quad (3.2.4)$$

a geometria dada pela eq. (1), pode ser escrita como<sup>(\*)</sup>.

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2 \quad (3.2.5)$$

onde, evidentemente,  $\eta_{AB} = \text{diag}(+, -, -, -)$ .

As 1-formas  $\theta^A = e_{\alpha}^{(A)} dx^{\alpha}$  definem o campo de tetradas

$$\begin{aligned} e_0^{(0)} &= 1, & e_1^{(1)} &= 1, & e_3^{(3)} &= 1, \\ e_2^{(0)} &= H, & e_2^{(2)} &= \delta. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Associado às 1-formas  $\theta^A$  teremos o campo de vetores  $e_{(A)} = e_{(A)}^{\alpha} \partial_{\alpha}$ , definidos, de acordo com a eq. (2.4.5), por

---

(\*) As letras latinas maiúsculas são índices de tetradas que variam de 0 a 3. Eles são levantados e abaixados com as matrizes de Lorentz  $\eta^{AB}$  e  $\eta_{AB}$ , respectivamente.

$$e_{(0)}^0 = 1 \quad , \quad e_{(1)}^1 = 1 \quad , \quad e_{(3)}^3 = 1 \quad ,$$

$$e_{(2)}^0 = -\frac{H}{\delta} \quad , \quad e_{(2)}^2 = \frac{1}{\delta} \quad . \quad (3.2.7)$$

Empregando a eq. (3), resulta

$$d\Theta^0 = \frac{H'}{\delta} (\Theta^1 \wedge \Theta^2) \quad ,$$

$$d\Theta^2 = \frac{\delta'}{\delta} (\Theta^1 \wedge \Theta^2) \quad ,$$

$$d\Theta^3 = d\Theta^1 = 0 \quad , \quad (3.2.8)$$

onde a linha (') significa derivada com relação à variável  $\kappa$ .

As 1-formas  $\omega_B^A$  são dadas por

$$\omega_1^0 = \frac{1}{2} \frac{H'}{\delta} \Theta^2 \quad ,$$

$$\omega_2^0 = -\frac{1}{2} \frac{H'}{\delta} \Theta^1 \quad ,$$

$$\omega_3^0 = \omega_3^1 = \omega_3^2 = 0 \quad ,$$

$$\omega_2^1 = \frac{1}{2} \frac{H'}{\delta} \Theta^0 - \frac{\delta'}{\delta} \Theta^2 \quad . \quad (3.2.9)$$

Os coeficientes de rotação de Ricci, definidos pela eq. (2.4.17), não nulos são

$$\gamma_{12}^0 = \frac{1}{2} \frac{H'}{\delta} \quad , \quad \gamma_{21}^0 = -\frac{1}{2} \frac{H'}{\delta} \quad , \quad (3.2.10)$$

$$\gamma_{20}^1 = \frac{1}{2} \frac{H'}{\delta} \quad , \quad \gamma_{22}^1 = -\frac{\delta'}{\delta} \quad ,$$

que estão sujeitos a simetria  $\gamma_{ABC} = -\gamma_{BAC}$ .

A partir dos valores encontrados para  $\omega^A_B$  (eq.(9)), calculamos a 2-formas de curvatura  $\Omega^A_B$  e, com o uso da eq.(A.6.19), encontramos as componentes  $R^A_{BCD}$ , não nulas, do tensor de Riemann

$$\begin{aligned} R^0_{101} &= -\frac{1}{4} \left( \frac{H'}{\delta} \right)^2, \\ R^0_{112} &= \frac{1}{2} \frac{H''}{\delta} - \frac{1}{2} \frac{H' \delta'}{\delta^2}, \\ R^0_{202} &= -\frac{1}{4} \left( \frac{H'}{\delta} \right)^2, \\ R^1_{212} &= \frac{3}{4} \left( \frac{H'}{\delta} \right)^2 - \frac{\delta''}{\delta}. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

### 3.3 - A FONTE DE CURVATURA DAS SOLUÇÕES

Recentemente (49), Bampi e Zordan mostraram que as soluções das Equações de Einstein, para um elemento de linha da forma dada pela eq. (3.2.1), com fluido perfeito como fonte, são todas isométricas à geometria de Gödel. Como desejamos investigar, principalmente, o fenômeno de violação de causalidade com fontes de curvatura mais complexas que a "poeira incoerente" admitida por Gödel, diante do fato citado acima, o candidato natural para nosso tensor momentum energia é

$$T_{AB} = \rho v_A v_B - p h_{AB} + T_{AB}^{(em)} \quad (3.3.1)$$

onde

$$h_{AB} = \eta_{AB} - v_A v_B \quad (3.3.2)$$

$$T_{AB}^{(em)} = -\eta^{CD} F_{AC} F_{BD} + \frac{1}{4} \eta_{AB} F_{CD} F^{CD} \quad (3.3.3)$$

e onde  $\rho$  e  $p$  são, respectivamente, a densidade e a pressão do fluido como medidas pelo observador  $V^A$ . O tensor eletromagnético  $F^{AB}$  é dado por (31):

$$F^{AB} = \begin{vmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.3.4)$$

No referencial inercial local definido por  $\theta^A = e^A_{\alpha} dx^{\alpha}$ , as equações de Maxwell

$$F^{\mu\nu}{}_{|\nu} = J^{\mu} \quad (3.3.5)$$

$$F_{[\mu\nu|\lambda]} = 0 \quad (3.3.6)$$

tomam, respectivamente, a forma

$$F^{AB}{}_{;B} + \gamma^A_{MB} F^{MB} + \gamma^C_{MC} F^{AM} = J^A \quad (3.3.7)$$

$$F_{[AB;C]} + 2F_M[C \gamma^M_{AB}] = 0 \quad (3.3.8)$$

onde

$$F_{AB;C} = e^{\alpha}_{(C)} \frac{\partial F_{AB}}{\partial x^{\alpha}}.$$

Como veremos adiante, a única direção espacial que

pode ser individualizada,  $\bar{e}$  a direção definida pelo vetor rotação. Desta forma, descreveremos nosso campo eletromagnético por

$$F_{03} = -F_{30} = E, \quad F_{12} = -F_{21} = B.$$

As equações de Maxwell, sem fonte, implicam que

$$E_{;3} + \frac{H'}{\delta} B = 0, \quad (3.3.9)$$

$$B_{;3} - \frac{H'}{\delta} E = 0, \quad (3.3.10)$$

onde  $E = E(z)$  e  $B = B(z)$ . Utilizando a eq. (3.2.7) e o fato que

$$\frac{H'}{\delta} = \text{constante} \equiv -2\Omega, \quad (3.3.11)$$

que demonstraremos adiante, as equações de Maxwell tornam-se:

$$\frac{dE}{dz} - 2\Omega B = 0, \quad (3.3.12)$$

$$\frac{dB}{dz} + 2\Omega E = 0. \quad (3.3.13)$$

Uma solução destas equações é

$$B = B_0 \cos(2\Omega z), \quad E = E_0 \sin(2\Omega z) \quad (3.3.14)$$

onde  $E_0 = B_0 = \text{constante}$ .

As componentes não nulas para o tensor momentum energia do campo eletromagnético são

$$T_{00}^{(em)} = T_{11}^{(em)} = T_{22}^{(em)} = -T_{33}^{(em)} = \rho_{em} \quad (3.3.15)$$

onde

$$\rho_{em} = \frac{1}{2} (E_0^2 + B_0^2).$$

O observador "comovente" é tal que

$$v^\alpha = \delta^\alpha_0 \Rightarrow v^A = e^{(A)}_0 = \delta^A_0 \quad (3.3.16)$$

onde empregamos a eq. (3.2.6). Desta forma, na base de tetradas, o tensor momentum energia tem as seguintes componentes não nulas

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho + \rho_{em} & T_{11} &= T_{22} = p + \rho_{em} \\ T_{33} &= p - \rho_{em} \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

com o traço  $T = T_{AB} \eta^{AB}$ , dado por

$$T = \rho - 3p. \quad (3.3.18)$$

### 3.4 - AS QUANTIDADES CINEMÁTICAS

Calcularemos agora as quantidades cinemáticas associadas à congruência de linhas do fluido. Sabemos que

$$\begin{aligned} \dot{v}^\alpha &= v^\alpha \parallel_\lambda v^\lambda, & \theta &= v^\alpha \parallel_\alpha, \\ \sigma_{\alpha\beta} &= h_\alpha^\lambda h_\beta^\epsilon v_{(\lambda \parallel \epsilon)} - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \theta, & (3.4.1) \\ \omega_{\alpha\beta} &= h_\alpha^\lambda h_\beta^\epsilon v_{[\lambda \parallel \epsilon]}. \end{aligned}$$

Na base de tetradas, a distorção  $\sigma_{AB}$ , a rotação  $\omega_{AB}$ , a expansão  $\Theta$ . e a aceçeração  $\dot{V}^A$ , da congruência definida por  $V^A = \delta^A_0$ , são dadas por

$$\begin{aligned}\sigma_{AB} &= -\frac{1}{2} (\gamma^0_{AB} + \gamma^0_{BA}) - \frac{1}{3} \Theta h_{AB} \quad , \\ \omega_{AB} &= -\frac{1}{2} (\gamma^0_{AB} - \gamma^0_{BA}) \quad , \\ \Theta &= -\gamma^0_{BC} \eta^{BC} \quad , \quad \dot{V}^A = \gamma^A_{00} \quad .\end{aligned}\tag{3.4.2}$$

onde  $h_{AB} = \eta_{AB} - V_A V_B$ . Portanto, o fluido não tem distorção, aceçeração e expansão, mas tem rotação dada por

$$\omega_{12} = -\frac{1}{2} \frac{H'}{\delta} = \text{const.} \equiv \Omega \quad ,\tag{3.4.3}$$

O fato que  $\omega_{12} = \text{const.}$  mostraremos adiante. O vetor de rotação

$$\omega^A = \frac{1}{2} \epsilon^{ABCD} \omega_{BC} V_D, \quad \bar{\epsilon} \text{ é dado por}$$

$$\omega^A = (0, 0, 0, \Omega) \quad .\tag{3.4.4}$$

### 3.5 - UM UNIVERSO COM ROTAÇÃO E SUCESSIVAS REGIÕES CAUSAIS E NÃO CAUSAIS

Um cálculo direto nos fornece, a partir da eq. (3.2.11), o valor das componentes não nulas do tensor de Ricci

$$R_{AB} = \eta^{DC} R_{DACB}. \quad \text{Elas são}$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} \left( \frac{H'}{\delta} \right)^2 \quad , \quad R_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{H'}{\delta} \right)^2 - \frac{\delta''}{\delta}$$

$$R_{02} = \frac{1}{2} \left[ \frac{H''}{\delta} - \frac{H' \delta'}{\delta^2} \right] \quad e \quad R_{11} = R_{22} . \quad (3.5.1)$$

A fonte de curvatura de nossa geometria  $\bar{e}$ , como vimos, tal que

$$T_{00} = \rho + \rho_{em} \quad , \quad T_{11} = T_{22} = p + \rho_{em} \quad (3.5.2)$$

$$T_{33} = p - \rho_{em} \quad , \quad T = \rho - 3p \quad ,$$

$$\rho_{em} = \frac{1}{2} (E_0^2 + B_0^2) .$$

As equações de Einstein com constante cosmológica

$$R_{AB} = k(T_{AB} - \frac{1}{2} T \eta_{AB}) - \Lambda \eta_{AB} \quad (3.5.3)$$

assumem a forma seguinte

$$R_{02} = 0 \quad (3.5.4)$$

$$R_{00} = \frac{k}{2} (\rho + 3p) + k\rho_{em} - \Lambda \quad (3.5.5)$$

$$R_{11} = R_{22} = \frac{k}{2} (\rho - p) + k\rho_{em} + \Lambda \quad (3.5.6)$$

$$R_{33} = \frac{k}{2} (\rho - p) - k\rho_{em} + \Lambda = 0 \quad (3.5.7)$$

A eq. (4) implica que

$$\left( \frac{H'}{\delta} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{H'}{\delta} = \text{const.} \equiv -2\Omega \quad (3.5.8)$$

como mencionamos anteriormente. As equações de Einstein restantes nos fornecem

$$k(\rho + 3p) = 4\Omega^2 - 2k\rho_{em} + 2\Lambda \quad (3.5.9)$$

$$k(\rho - p) = 2k\rho_{em} - 2\Lambda \quad (3.5.10)$$

$$\frac{\delta''}{\delta} = -\frac{k}{2}(\rho - p) - k\rho_{em} - \Lambda + 2\Omega^2 \quad (3.5.11)$$

Uma solução deste conjunto de equações é

$$\delta = \text{sen}(a\tau) \quad , \quad a = \text{const.} \quad (3.5.12)$$

Assim, nós obtemos

$$k\rho = -\Lambda + \Omega^2 + kB_0^2 \quad (3.5.13)$$

$$kp = \Lambda + \Omega^2 - kE_0^2 \quad (3.5.14)$$

$$a^2 = 2(kE_0^2 - \Omega^2) \quad (3.5.15)$$

A positividade da densidade de energia e da pressão estará assegurada, se o valor da constante cosmológica permanecer entre os limites

$$kE_0^2 - \Omega^2 < \Lambda < \Omega^2 + kB_0^2 \quad (3.5.16)$$

Por outro lado, da eqs. (13) e (14), temos que  $p = \lambda\rho$ , onde

$$\lambda = \frac{\Lambda + \Omega^2 - kE_0^2}{-\Lambda + \Omega^2 + kB_0^2} \quad (3.5.17)$$

Como devemos ter  $\lambda \leq 1$ , a equação acima impõe uma restrição adicional à constante cosmológica

$$\Lambda \leq kE_0^2 \quad (3.5.18)$$

As eqs. (14) e (15), evidenciam que não teremos solução do tipo da eq. (12), quando  $\Lambda = 0$ , pois  $\Lambda = 0 \Rightarrow p < 0$ .

No caso em que  $\lambda = 0$  ( $p = 0$ ), teremos as seguintes relações

$$k\rho = 2\Omega^2 \quad (3.5.19)$$

$$\Lambda = kE_0^2 - \Omega^2 = \frac{a^2}{2} . \quad (3.5.20)$$

Determinaremos agora as funções métricas  $H(\kappa)$  e  $G(\kappa)$ . As eqs. (8) e (12) nos fornecem

$$H(\kappa) = \frac{2\Omega}{a} \cos(a\kappa) \quad (3.5.21)$$

Como  $\delta^2 = H^2 - G$ , teremos

$$G(\kappa) = \frac{4\Omega^2 + a^2}{a^2} \cos^2(a\kappa) - 1 \quad (3.5.22)$$

É imediato observar, que a presença do campo eletromagnético não eliminou o fenômeno de violação da causalidade em nossa solução. Com efeito, as raízes da função  $G(\kappa)$  são dadas por

$$a\kappa_n = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + \Omega^2}} + 2n\pi \quad (3.5.23)$$

onde  $n$  é um natural. Na região  $0 < \kappa < \kappa_0$ ,  $G(\kappa)$  é positiva e as circunferências

$$t = z = \text{const.} , \quad \kappa = \text{const.} < \kappa_0$$

são curvas tipo tempo fechadas, e temos uma região não causal.

Na região seguinte  $r_0 < r < r_1$ , a função  $G(r)$  é sempre negativa; não existirão circunferências que violam a causalidade. Esta é uma região causal. A próxima região  $r_1 < r < r_2$ , não é causal, e assim sucessivamente. Assim, alargando o espectro de possíveis fontes de curvatura, o problema da causalidade permanece e assume aspectos mais complexos.

Chamamos fluido de Stokes àquele em que o tensor de pressões  $\Pi_{ij}$ , é uma função contínua do tensor de dilatação (29). Em tais fluidos, a resposta à deformação é um funcional das alterações provocadas sobre ele. Um fluido é dito não-stokesiano (29), quando o tensor de pressões é um funcional da matriz de vorticidade  $\Omega^i_j$  ou da matriz de aceleração  $A^i_j$ , definidas por

$$\Omega_{ij} = \omega_i \omega_j + \frac{1}{3} \omega^2 h_{ij} \quad (3.5.24)$$

$$A_{ij} = \dot{v}_i \dot{v}_j + \frac{1}{3} a^2 h_{ij} \quad (3.5.25)$$

onde  $\omega^i$  é o vetor de rotação,  $\dot{v}^i$  é a aceleração, e  $\omega^2 = -\omega_i \omega^i$ ;  $a^2 = -v^i v_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ).

O modelo cosmológico apresentado acima, pode ser visto como um universo cuja fonte é um fluido não-stokesiano (\*), cuja pressão anisotrópica é do tipo (47).

$$\Pi_{ij} = -\gamma^2 \Omega_{ij} \quad (3.5.26)$$

onde  $\gamma^2 = \text{constante}$ . Neste caso, teremos

---

(\*) Além desta, outras soluções conhecidas na literatura podem ser interpretadas como tendo um fluido não-stokesiano como fonte. Para detalhes veja a referência (102).

$$\Omega_{AB} = \frac{1}{3} \text{diag} (-\Omega^2, -\Omega^2, 2\Omega^2) \quad (3.5.27)$$

e as equações de Einstein são

$$\begin{aligned} R_{02} &= 0 \quad , \\ R_{00} &= \frac{k}{2} (\rho + 3p) - \Lambda , \\ R_{11} &= R_{22} = \frac{k}{2} (\rho - p) + k\alpha + \Lambda \quad , \\ R_{33} &= \frac{k}{2} (\rho - p) - 2k\alpha + \Lambda \quad , \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{3} \gamma^2 \Omega^2 \quad , \quad (3.5.29)$$

com uma solução dada por

$$\begin{aligned} G(\kappa) &= \left[ \frac{k\gamma^2 + 2}{k\gamma^2 - 2} \right] \cos^2(a\kappa) - 1 \quad , \\ H(\kappa) &= - \frac{2}{(k\gamma^2 - 2)^{1/2}} \cos(a\kappa) - 1 \quad , \end{aligned} \quad (3.5.30)$$

onde

$$\begin{aligned} k\gamma^2 > 2 \quad , \quad \left(1 - \frac{1}{3} k\gamma^2\right) < \Lambda < (1 + k\gamma^2)\Omega^2 \quad , \\ a^2 &= (k\gamma^2 - 2)\Omega^2 \quad . \end{aligned} \quad (3.5.31)$$

### 3.6 - UM UNIVERSO COM ROTAÇÃO QUE VIOLA A CAUSALIDADE

As equações de Einstein

$$\frac{1}{2} \left( \frac{H'}{\delta} \right)^2 = \frac{k}{2} (\rho + 3p) + k\rho_{em} - \Lambda \quad (3.6.1)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{H'}{\delta} \right)^2 - \frac{\delta''}{\delta} = \frac{k}{2} (\rho - p) + k\rho_{em} + \Lambda \quad (3.6.2)$$

$$\frac{H''}{\delta} - \frac{H'\delta'}{\delta^2} = \frac{k}{2} (\rho - p) - k\rho_{em} + \Lambda = 0 \quad (3.6.3)$$

para o elemento de linha

$$ds^2 = dt^2 + 2H(r) dt d\phi + G(r) d\phi^2 - dr^2 - dz^2, \quad (3.6.4)$$

onde  $\delta^2 = H^2 - G$ , e a fonte dada pela eq. (3.5.2), admite uma classe de solução diferente (48), que analisaremos agora. Das eqs. (1) e (3), resulta

$$\frac{H'}{\delta} = -2\Omega = \text{const.}, \quad (3.6.5)$$

$$k\rho = -\Lambda + \Omega^2 + k\rho_{em} \quad (3.6.6)$$

$$kp = \Lambda + \Omega^2 - k\rho_{em}. \quad (3.6.7)$$

Definindo a constante  $m$  por

$$m^2 = 2(\Omega^2 - \rho_{em}), \quad (3.6.8)$$

a eq. (2) acima nos fornecerá a solução seguinte

$$\delta = \text{senh}(mr). \quad (3.6.9)$$

A positividade da densidade de energia  $\rho$  e da pressão  $p$  estará assegurada pela condição

$$-\frac{m^2}{2} < \Lambda < \tilde{m}^2 \quad (3.6.10)$$

onde  $\tilde{m}^2 = \Omega^2 + kE_0^2$ . Como  $p = \lambda\rho$ , e devemos ter  $0 \leq \lambda \leq 1$ , a restrição final sobre a constante cosmológica é

$$-\frac{m^2}{2} < \Lambda \leq kE_0^2 \quad (3.6.11)$$

As funções  $G(r)$  e  $H(r)$ , neste caso, são dadas por

$$G(r) = \left( \frac{\Omega^2 + kE_0^2}{\Omega^2 - kE_0^2} \right) \cosh^2(mr) + 1 \quad ,$$

$$H(r) = -\frac{2\Omega}{m} \cosh(mr) \quad (3.6.12)$$

Como a função  $G(r)$  sempre positiva, as circunferências

$$t = z = 0 \quad r = \text{const} > 0 \quad (3.6.13)$$

são curvas tipo-tempo fechadas para todo  $r \neq 0$ . A presença do campo eletromagnético não evitou, também neste caso, a violação da causalidade.

As componentes não identicamente nulas do tensor de Weyl

$$C_{ABCD} = R_{ABCD} - \frac{1}{2} (\eta_{AC}R_{BD} + \eta_{BD}R_{AC} - \eta_{AD}R_{BC} - \eta_{BC}R_{AD}) +$$

$$+ \frac{R}{6} (\eta_{AC} \eta_{BD} - \eta_{AD} \eta_{BC}) \quad (3.6.14)$$

são, de acordo com as eqs. (3.2.11) e (3.5.1), dadas por

$$C_{0101} = C_{0202} = \frac{1}{6} \left[ \frac{\delta''}{\delta} - \left( \frac{H'}{\delta} \right)^2 \right], \quad (3.6.15)$$

$$C_{0303} = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{H'}{\delta} \right)^2 - \frac{\delta''}{\delta} \right], \quad (3.6.16)$$

$$\begin{aligned} C_{0112} &= \frac{1}{4} \left( \frac{H''}{\delta} - \frac{H' \delta'}{\delta^2} \right) = \frac{1}{2} R_{02} = \\ &= C_{0323} = 0. \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

Das equações acima, podemos obter as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl, relativamente ao observador  $v^A = \delta^A_0$ . Por definição

$$E_{AB} = - C_{ACBD} v^C v^D \quad e \quad H_{AB} = {}^* C_{ACBD} v^C v^D \quad (3.6.18)$$

onde

$${}^* C_{ACBD} = \frac{1}{2} \eta_{AC}{}^{MN} C_{MNBD}$$

É imediato mostrar que

$$E = E^A_A = 0, \quad E_{AB} = E_{BA};$$

$$H^B_B = 0, \quad H_{AB} = H_{BA}. \quad (3.6.19)$$

Com um cálculo simples mostramos que a parte magnética do tensor de Weyl  $\bar{e}$  é nula, e as componentes não nulas de  $E_{AB}$  são

$$E_{11} = E_{22} = \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{H'}{\delta} \right)^2 - \frac{\delta''}{\delta} \right] ,$$

$$E_{33} = \frac{1}{3} \left[ \frac{\delta''}{\delta} - \left( \frac{H'}{\delta} \right)^2 \right] \quad (3.6.20)$$

ou ainda

$$E_{11} = E_{22} = \frac{1}{3} (\Omega^2 + kB_0^2) ,$$

$$E_{33} = -\frac{2}{3} (\Omega^2 + kE_0^2) , \quad (3.6.21)$$

onde utilizamos as eqs. (8), (5) e (9).

O modelo definido através das eqs. (4) e (12) tem, evidentemente, os seguintes vetores de Killing:

$$K_1 = \frac{\partial}{\partial t} , \quad K_2 = \frac{\partial}{\partial \phi} , \quad K_3 = \frac{\partial}{\partial z} . \quad (3.6.22)$$

A existência destes geradores de isometria, e o "comportamento de variáveis físicas tais como, a densidade, a pressão, a vorticidade, a distorção e a expansão", levaram, recentemente, Raychaudhuri e Thakurta (50), a examinarem se a nossa solução (eq. (12)) seria homogênea no espaço-tempo, e transformável, sob certas circunstâncias, à métrica de Gödel. Como vimos no capítulo primeiro, para haver tal homogeneidade é necessário que tenhamos mais um vetor de Killing linearmente independente. Raychaudhuri e Thakurta examinaram sob que condições uma métrica

na forma

$$ds^2 = dt^2 + 2H(r) dt d\phi + G(r) d\phi^2 - dr^2 - dz^2 \quad (3.6.23)$$

admitirã um quarto vetor de Killing linearmente independente. Eles mostraram, que nossa geometria preenchia as condições necessárias para a existência deste quarto gerador de isometria, ou seja, satisfazia às equações

$$\frac{H'}{\delta} = \text{constante} \quad (3.6.24)$$

$$\delta = (A_1 e^{ar} + A_2 e^{-ar}) \quad (3.6.25)$$

onde  $\delta^2 = H^2 - G$ ;  $a$ ,  $A_1$  e  $A_2$  constantes. De fato, de acordo com a eq. (5), e para  $A_1 = -A_2 = \frac{1}{2}$ , as equações acima são satisfeitas.

### 3.7 - AS CURVAS NÃO CAUSAIS SÃO GEODÉSICAS?

Investigando as geodésicas da geometria de Gödel, em 1961, Chandrasekhar e Wright<sup>(\*)</sup> (51) mostraram que as curvas tipo tempo fechadas não eram geodésicas, ou seja, um observador que se movesse livremente neste universo, não poderia violar a causalidade. Embora isto possa ser dito a respeito de tais curvas, um observador acelerado, contudo, poderá violar a causalidade no universo de Gödel.

As circunferências tipo tempo fechadas das duas geometrias apresentadas anteriormente (eqs. (3.5.21), (3.5.22) e

---

(\*) As geodésicas no universo de Gödel foram examinadas sob um ângulo distinto, recentemente, por Lathrop e Teglas (52).

(3.6.12), assim como na métrica de Gödel, não são trajetórias "naturais". Com efeito, uma curva que tem um vetor tangente  $T$ , será geodésica se

$$\dot{T}^\alpha \equiv T^\alpha ||_{\lambda} T^\lambda = 0 \quad (3.7.1)$$

Na base de tetradas definida por  $\Theta^A = e^A_\alpha dx^\alpha$ , a equação acima torna-se

$$\dot{T}^A = T^A_{;B} T^B + \gamma^A_{BC} T^B T^C \quad (3.7.2)$$

onde

$$T^A_{;B} = e^\alpha_{(B)} \frac{\partial T^A}{\partial x^\alpha} \quad (3.7.3)$$

As circunferências que violam a causalidade têm, evidentemente,  $\partial_\phi$  para vetor tangente, ou seja,

$$T = T^\alpha \partial_\alpha \quad \text{e} \quad T^\alpha = \delta^\alpha_2 \quad (3.7.4)$$

Portanto

$$T^A = e^{(A)}_2 = (0, 0, \delta, 0) \quad (3.7.5)$$

Desta forma, de acordo com as eqs. (3.2.10) e (3.2.7), teremos

$$\dot{T}^A = T^A_{;2} \delta + \gamma^A_{22} \quad (3.7.6)$$

ou seja,

$$\dot{T}^A = (0, -\frac{\delta'}{\delta}, 0, 0) \quad (3.7.7)$$

Para a geometria definida pelas eqs. (3.5.21) e (3.5.22), teremos

$$\dot{T}^A = (0, -a \operatorname{ctg}(a\kappa), 0, 0) \quad (3.7.8)$$

Assim

$$\dot{T}^A = 0 \Rightarrow a\kappa_n = 2n\pi \pm (-1)^n \frac{\pi}{2} \quad (3.7.9)$$

onde  $n$  é um natural. Mas, de acordo com a eq. (3.5.32), as circunferências em que  $\dot{T}^A = 0$  (Geodésicas) são tipo-espaço.

Para a métrica dada pela eq. (3.6.12), obtemos

$$\dot{T}^A = (0, -m \operatorname{coth}(m\kappa), 0, 0) \quad (3.7.10)$$

Como  $\operatorname{coth}(m\kappa) \neq 0$  sempre,  $\dot{T}^A \neq 0$ , e as circunferências geodésicas são tipo-espaço; as circunferências tipo tempo fechadas não são geodésicas. Uma solução não-homogênea das equações de Einstein, em que as curvas não causais são geodésicas, foi recentemente encontrada por Soares (53).

### 3.8 - CONSEQUÊNCIAS DA ESTRUTURA CAUSAL DAS SOLUÇÕES

Uma variedade espaço-tempo pode não conter curvas tipo-tempo fechadas e violar a causalidade. Para isto, basta que ela contenha curvas tipo-luz fechadas. Dizemos que a causalidade é preservada em ponto  $P$ , de uma dada variedade espaço-tempo  $M_4$ , se não existirem curvas, tipo-tempo ou tipo-luz, que passem por  $P$  mais que uma vez. Existem, por outro lado, variedades que possuem curvas tipo-tempo "quase fechadas", elas violam a *condição de causalidade forte*, que pode ser enunciada da seguinte forma (54, 1):

Dizemos que a *causalidade forte* vale em um ponto  $P \in M_4$ , se toda vizinhança de  $P$  contém uma vizinhança aberta  $U$  de

$P$ , tal que não existem curvas tipo-tempo ou tipo-luz, que atravessem  $U$  mais que uma vez. A condição de causalidade forte é, normalmente, admitida como hipótese dos teoremas sobre a existência de singularidades (55, 54), e, de certa forma, sua violação é considerada como uma anomalia. Um espaço-tempo que não satisfaz a condição de causalidade forte, em todos os seus pontos, está à beira da violação da causalidade, no sentido que uma pequena perturbação de sua métrica, poderá provocar o aparecimento de curvas tipo-tempo fechadas (54).

No estudo das propriedades das variedades da teoria da Relatividade Geral, considera-se que um dado espaço-tempo possui um comportamento causal satisfatório, quando satisfaz a *condição de estabilidade causal*. Uma variedade espaço-tempo é dita ter estabilidade causal, ou ser causalmente estável, se não existirem curvas, tipo-luz ou tipo-tempo, fechadas, em qualquer métrica  $h_{\alpha\beta}$ , suficiente próxima da métrica  $g_{\alpha\beta}$  da variedade considerada (44, 1). Um espaço-tempo com curvas tipo-tempo ou tipo-luz fechadas, ou que viola a condição de causalidade forte, necessariamente viola a condição de estabilidade causal (56). Desta forma, as soluções por nós encontradas anteriormente, por possuírem curvas tipo-tempo fechadas, violam a condição de estabilidade causal, não obedecem, portanto, às hipóteses dos teoremas de singularidades.

Suponhamos que um espaço-tempo  $M_4$  tem uma função tempo cósmico, isto é, um campo escalar  $t$  cujo gradiente é sempre tipo-tempo. Então  $M_4$  é causalmente estável, e, reciprocamente, se o espaço-tempo  $M_4$  é causalmente estável, então ele possui uma função tempo cósmico (57). Assim, estabilidade causal é completamente equivalente à existência de um tempo cósmico. As su-

perfícies de mesmo tempo, todavia, não necessitam ter as propriedades usualmente associadas com as superfícies tipo-espaço. Em geral, elas são desconexas (44). As soluções cosmológicas das seções (3.5) e (3.6) não possuem, por conseguinte, como o modelo de Gödel, um tempo cósmico.

Uma superfície de Cauchy global  $S$ , é por definição, uma hipersuperfície tipo-espaço, tal que toda curva tipo-tempo ou tipo-luz, a intercepta apenas uma vez. A hipótese de existência de uma superfície de Cauchy global é uma condição extremamente forte sobre as variedades espaço-tempo - em particular é mais forte que todas as outras condições que discutimos acima. Assim, se um espaço-tempo tem uma superfície de Cauchy global, ele deve ser causalmente estável (57). Além disso, podemos escolher a função tempo cósmico de maneira que  $t=constante$  seja uma superfície de Cauchy global, assim, por cada ponto do espaço-tempo, passará uma hipersuperfície de Cauchy global. Reciprocamente, uma variedade espaço-tempo que possui curvas tipo-tempo fechadas, como as soluções de Novello-Rebouças (47) e Rebouças (48), não admitem hipersuperfície de Cauchy global.

### 3.9 - ALGUMAS REFLEXÕES SOBRE A CAUSALIDADE

No espaço-tempo de Minkowski, da Relatividade Restrita, um dado evento só possui relação de causa com os eventos do seu cone de luz do passado (que o podem influenciar), ou do seu cone de luz do futuro (sobre os quais ele pode ter influência). As variedades espaço-tempo da Relatividade Geral, são localmente Lorentzianas, e portanto, a causalidade é mantida localmente. A questão global é deixada em aberto. Consequentemente,

a Relatividade Geral, da maneira em que é formulada, não exclui ou proíbe a existência de curvas tipo-tempo fechadas. Em larga escala, podemos ter o fenômeno de quebra ou violação da causalidade. Isto acontece nas variedades espaço-tempo de Gödel (19), Taub - NUT (24, 57, 58, 59) e na solução estendida do tipo Kerr (60), por exemplo. Se devemos ou não eliminar ou excluir, por razões físicas, tais geometrias, é uma outra questão (61, 62, 63) que ainda permanece em aberto (63). A existência de curvas tipo-tempo fechadas nos conduz, inevitavelmente, a paradoxos de ordem lógica: um observador que viaja ao longo de uma tal curva, pode retornar ao ponto de origem antes de partir, e alterar ou evitar sua partida, o que certamente é uma contradição com a noção usual do livre-arbítrio (1). Poder-se-ia aumentar, contudo, que a capacidade de violar nossa concepção mais básica de como o mundo é governado, funciona, ou opera, deve ser evitada impondo-se que não é fisicamente aceitável um espaço-tempo com quebra de causalidade. Por outro lado, a história da física nos tem mostrado que, frequentemente, teorias físicas sugerem novos e inesperados fenômenos. A violação da causalidade pode ser um caso destes (57), e assim, devemos encarar a possibilidade de não validade (global) do princípio de causalidade, seriamente. Até porque, as fontes de curvatura das variedades em que tal anomalia ocorre, são fisicamente bastante aceitáveis.

Devemos estar cientes que se decidirmos impor o princípio de causalidade para fenômenos em larga escala no universo, estamos extrapolando para uma escala cosmológica o que sabemos funcionar em uma escala menor. Tais extrapolações, a primeira vista imperceptíveis, devem ser detectadas e refletidas,

pois, como Bondi (64), acreditamos que elas constituem, de longe, um perigo maior para a ciência, que a chamada especulação.

## CAPÍTULO IV

### MODELOS COSMOLÓGICOS COM ROTAÇÃO DEPENDENTE DO TEMPO

#### 4.1 - INTRODUÇÃO

O problema de obter soluções das equações de Einstein, em que a fonte de curvatura do espaço-tempo possui rotação, é bastante antigo. Sua origem remonta ao ano de 1918, com o trabalho do Thirring e Lense (65). Bach (66) foi quem tratou pela primeira vez, o campo produzido por uma esfera de matéria girando lentamente, e obteve a solução de Schwarzschild como aproximação de ordem zero de sua solução. Dois anos depois, Lanczos (67) considerou um caso especial de campos estacionários, e encontrou uma solução não-homogênea das equações do campo gravitacional. Posteriormente, Akeley (68) e Andress (69) trataram casos mais gerais de campos gravitacionais, produzidos pela matéria em rotação estacionária. Em 1932, Lewis (70) determinou uma solução exata, cuja fonte é matéria com rotação, e que contém as soluções aproximadas devido a Bach e Andress, como um caso particular. Cinco anos depois, Stockum (71) conseguiu uma nova solução - não homogênea e exata - das equações de Einstein, para matéria com rotação constante em torno de seu eixo de simetria. Ele mostrou que, dependendo das condições de contorno, sua solução continha a de Lewis. K. Gödel (19) foi, no entanto, o primeiro a exibir uma *solução cosmológica* exata das equações de campo de Einstein, com rotação.

O modelo de Gödel pode ser caracterizado como uma

solução exata das equações de Einstein, com matéria incoerente de densidade constante como fonte, sem expansão e distorção e com rotação constante. Apesar de certas anomalias (violação da causalidade, ausência de uma superfície de Cauchy Global, não orientabilidade do tempo, etc.), o novo exemplo de solução cosmológica apresentado por Gödel constituía (e constitui) um considerável estímulo à investigação de soluções mais complexas do que as estudadas até então. A literatura das soluções cosmológicas exatas das equações de Einstein, em que o conteúdo material do modelo possui rotação, é hoje relativamente extensa (19, 20, 22, 42, 47, 48, 53, 72-85). Todas elas, no entanto, possuem uma característica em comum: a rotação é constante com respeito ao tempo. Tal característica provocou, entre os cosmólogos, a idéia geral de que a estrutura das equações de Einstein não permitia, em cosmologia, uma rotação que variasse com o tempo. Neste capítulo da tese, mostraremos que este sentimento não é verdadeiro, exibindo as primeiras soluções exatas das equações de Einstein em que a rotação é dependente do tempo (86, 87).

#### 4.2 - O TENSOR MOMENTUM ENERGIA DAS SOLUÇÕES

São as soluções homogêneas e isotrópicas de Friedmann, que melhor se ajustam aos dados observacionais, que dispomos acerca do universo em seu estágio atual. No entanto, as soluções tipo Friedmann, assim como a grande maioria dos modelos cosmológicos relativistas, tratam o conteúdo material do universo como um fluido perfeito de densidade  $\rho$ , e pressão  $p$ . Tal hipótese, apesar de simplificar grandemente o tratamento e a descrição do universo, nos tem conduzido, sistematicamente, a cosmos

com singularidades. As investigações sobre o universo e o fluido galáctico em sua fase primordial (próxima à singularidade), têm levado alguns autores, a incorporarem, através de relações fenomenológicas, emprestadas da mecânica dos fluidos, termos dissipativos ao tensor momentum energia do conteúdo material do universo.

A descoberta da radiação isotrópica de  $3^{\circ}K$ , levou Misner (88) a empregar, no exame das causas desta isotropia, uma relação entre a pressão anisotrópica e a distorção ( $\pi_{\mu\nu} = \lambda \sigma_{\mu\nu}$ ), com a introdução de um coeficiente de viscosidade. Murphy (89), Nightingale (90) e outros, no tratamento de modelos homogêneos e isotrópicos sem singularidades, utilizaram o segundo coeficiente de viscosidade (91). Belinskii e Khalatnikov (92) investigaram a influência da viscosidade sobre o caráter da evolução cosmológica, em modelos homogêneos do tipo Bianchi I, usando expressões que adicionam à pressão  $p$ , termo proporcional à expansão, através de coeficientes de viscosidade. Relações fenomenológicas do tipo  $q_{\alpha} = - \chi h_{\alpha}^{\lambda} (\tau_{|\lambda} + \tau \dot{V}_{\lambda})$ , por exemplo, que relacionam o fluxo de calor  $q_{\alpha}$  e a aceleração  $\dot{V}_{\lambda}$ , através de uma função-temperatura e do coeficiente de condução  $\chi$ , têm sido propostas (93). Recentemente (82), configurações em que o fluido galáctico encontra-se fora do equilíbrio térmico, foram analisadas, introduzindo-se um fluxo de calor  $q^{\alpha}$ , entre as partes do conteúdo material, através de uma base cinemática, construída com os vetores velocidade, aceleração e rotação ( $q^{\alpha} = \zeta(x^{\lambda})a^{\alpha} + \psi(x^{\lambda})\omega^{\alpha} + \phi(x^{\lambda})\eta_{\epsilon\beta\nu}^{\alpha} \nu^{\epsilon}\omega^{\beta}\dot{V}^{\nu}$ ). Tal construção é possível sempre que o vetor de rotação gera uma isometria (82). Mesmo mais recentemente, soluções cosmológicas com fluxo de calor, têm sido determinadas (94, 95). Neste contexto, o conteúdo material de nossos modelos é um fluido em que

hã troca de calor entre suas partes

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p) V_{\alpha} V_{\beta} - p g_{\alpha\beta} + 2 q_{(\alpha} V_{\beta)} \quad , \quad (4.2.1)$$

onde

$$q_{\alpha} V^{\alpha} = 0 \quad . \quad (4.2.2)$$

Como o vetor de rotaçãõ nãõ ã um vetor de Killing (82), adotaremos um caminho novo para introduzir o fluxo de calor. Usaremos o campo de vetores  $e_{\alpha}^{(A)}$ , que estarãõ definidos a partir das 1-formas  $\theta^A = e_{\alpha}^{(A)} dx^{\alpha}$ , para expressar o quadrivetor  $q^A$ , ou seja

$$q^A = e_{\alpha}^{(A)} \Psi^{\alpha}(x^{\mu}) \quad , \quad (4.2.3)$$

ou equivalentemente

$$q_A = e_{(A)}^{\alpha} \Psi_{\alpha}(x^{\mu}) \quad , \quad (4.2.4)$$

onde  $e_{\alpha}^{(A)} e_{(B)}^{\alpha} = \delta^A_B$ , e  $\Psi_{\alpha}(x^{\mu})$  sãõ funções escalares. Tal decomposiçãõ, tem as vantagens de nãõ assumir relações fenomenolõgicas a priori (como  $q_{\alpha} = \chi(T_{|\lambda} + T\dot{V}_{\lambda})$ ), permitindo-nos impor condições adicionais sobre  $q_{\alpha}$ , e de ser inteiramente geral, tratando-se apenas da decomposiçãõ de um vetor em uma base arbitrãria.

Nos modelos que estudaremos neste capítulo, a decomposiçãõ dada pela eq. (3) serã, como veremos adiante, equivalente a usarmos a base constituída pelos campos vetoriais invariãntes ã esquerda  $y_A$ , das seções  $\{t = \text{constante}\}$ , ou seja

$$\vec{q} = q^A y_A \quad , \quad (4.2.5)$$

onde  $A = 1, 2, 3$  .

### 4.3 - A ESFERA $S^3$ COMO GRUPO DE LIE. A MÉTRICA

Discutiremos inicialmente o grupo de movimento e a topologia dos universos finitos, com rotação dependente do tempo, que determinamos. Os métodos de cálculo usados nesta seção, foram extraídos do trabalho de Oszvāth e Schucking (74), e apresentaremos com detalhes aqui para maior clareza do texto.

Considere o espaço Euclidiano  $E_4$ , e sejam  $q^\mu$  e  $\vec{e}_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ), as coordenadas cartesianas, e os vetores unitários ao longo dos eixos coordenados, respectivamente. O espaço vetorial sobre os reais  $E_4$ , pode ser convertido em uma álgebra, se introduzirmos

$$\begin{aligned}\vec{e}_0 \vec{e}_\mu &= \vec{e}_\mu \vec{e}_0 = \vec{e}_\mu, \\ \vec{e}_i \vec{e}_i &= -\vec{e}_0, \\ \vec{e}_i \vec{e}_j &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k \quad (i \neq j)\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

onde os índices gregos variam de 0 a 3, e os índices latinos variam de 1 a 3. Com a lei de multiplicação dada pela eq. (1),  $E_4$  torna-se uma álgebra denominada álgebra de quatérnios<sup>(\*)</sup>, e os vetores

$$\vec{q} = q^\mu \vec{e}_\mu = q^0 \vec{e}_0 + \sum_{i=1}^3 q^i \vec{e}_i\tag{4.3.2}$$

são chamados de quatérnios de Hamilton, ou simplesmente quatérnios.

Associado a um quatérnio arbitrário  $\vec{q}$ , definimos

---

(\*) Uma introdução simples e intuitiva sobre os quatérnios poderá ser encontrada, pelo leitor, em Brand (96)

seu conjugado  $\vec{q}^*$ , e sua norma  $N(\vec{q})$ , respectivamente por

$$\vec{q}^* = q^0 \vec{e}_0 - \sum_{i=1}^3 q^i \vec{e}_i \quad (4.3.3)$$

e

$$N(\vec{q}) = \vec{q} \vec{q}^* = (q^0)^2 + \sum_{i=1}^3 (q^i)^2 \quad (4.3.4)$$

onde na última igualdade omitimos o  $\vec{e}_0$ , pois identificamos o subcorpo  $q \vec{e}_0$  com o corpo dos números reais, devido ao isomorfismo entre eles.

O conjunto dos quatêrnios constitui um corpo, associativo (96) e não comutativo (eq. (1)), com as seguintes propriedades:

Dados dois quatêrnios  $\vec{p}$  e  $\vec{q}$ , então

$$i) \quad N(\vec{q}) = \sum_{\mu=0}^3 (q^\mu)^2 \geq 0 \quad e \quad N(\vec{q}) = 0 \Leftrightarrow \vec{q} = 0$$

$$ii) \quad \text{Se } \vec{q} \neq 0, \text{ existe o quatêrnio inverso } q^{-1}, \text{ tal que } \vec{q} \vec{q}^{-1} = \vec{q}^{-1} \vec{q} = 1, \text{ que é dado por}$$

$$q^{-1} = \frac{\vec{q}^*}{N(\vec{q})}$$

iii) Vale a igualdade

$$(\vec{q} \vec{p})^* = \vec{q}^* \vec{p}^* \quad (4.3.5)$$

iv) Vale também que

$$(\alpha_1 \vec{q} + \alpha_2 \vec{p})^* = \alpha_1 \vec{q}^* + \alpha_2 \vec{p}^*. \quad (4.3.6)$$

O conjunto de todos os quatêrnios, evidentemente

constitui um grupo  $G$ , sob a operação definida pela eq. (1). Um subgrupo de  $G$ ,  $\bar{G}$ , é o conjunto dos quatérnios que satisfazem a equação

$$N(\vec{q}) = (q^0)^2 + (q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2 = 1, \quad (4.3.7)$$

ou seja, o conjunto dos quatérnios de norma unitária. A eq. (7) define o lugar geométrico dos pontos de  $E_4$  equidistantes da origem, ou seja, é a equação da esfera  $S^3$  com centro na origem, e imersa em  $E_4$ .

O grupo de movimento, do espaço tridimensional esférico  $S^3$ , pode ser expresso, facilmente, pelo produto quaterniônico à esquerda. De fato, seja  $\vec{p}$  um quatérnio qualquer de  $S^3$  ( $\vec{p} \vec{p}^* = 1$ ). Uma translação à esquerda é expressa por

$$\vec{q}' = \vec{p} \vec{q}. \quad (4.3.8)$$

Usando a eq. (5), encontramos

$$\vec{q}' \vec{q}'^* = \vec{p} \vec{q} \vec{q}^* \vec{p}^* = 1. \quad (4.3.9)$$

Mais ainda

$$\vec{p}^* \vec{q}' = \vec{p}^* \vec{p} \vec{q} = \vec{q}. \quad (4.3.10)$$

Além disso, a distância entre dois pontos vizinhos  $\vec{q}$  e  $\vec{q} + d\vec{q}$  é preservada pela translação à esquerda, pois

$$d\vec{q}' = \vec{p} d\vec{q} \quad (4.3.11)$$

e portanto

$$d\vec{q}' d\vec{q}'^* = N(d\vec{q}') = \sum_{\mu=0}^3 dq^\mu dq^\mu \quad (4.3.12)$$

Desta forma, uma translação à esquerda transforma

um ponto  $\vec{q}$  de  $S^3$ , em um outro ponto  $\vec{q}'$  do espaço esférico, e ainda, pela eq.(10), existe uma única translação dada pela eq. (8), que tranforma um dado  $\vec{q} \neq 0$  em um dado  $\vec{q}'$  de mesma norma. Em outras palavras, as translações à esquerda convertem  $S^3$  em um grupo de Lie simplesmente transitivo, e podemos, portanto, identificar  $S^3$  com o grupo de movimento (veja eq. (12) de  $S^3$ , com  $S^3$  atuando sobre si mesmo, por translações à esquerda.

Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos da esfera  $S^3$  e os elementos do grupo  $SU_2$ . Com efeito, representando os quatêrnios de base  $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$ , respectivamente por

$$\begin{aligned} \vec{e}_0 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & , & \quad \vec{e}_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & , \\ \vec{e}_2 &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} & , & \quad \vec{e}_3 \rightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} & , \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

um quatêrnio unitário qualquer  $\vec{q} = q^\mu \vec{e}_\mu$ , será representado pela matriz

$$\vec{q} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} q^0 + iq^3 & q^1 + iq^2 \\ -q^1 + iq^2 & q^0 - iq^3 \end{pmatrix} \tag{4.3.14}$$

e o produto quaterniônico é levado no produto matricial. Como  $N(q) = 1$ , teremos

$$\det(A) = N(\vec{q}) = 1 . \tag{4.3.15}$$

Introduzindo as coordenadas de Euler (ângulos)  $\{x^1, x^2, x^3\}$ , por

$$\begin{aligned}
 q^0 &= \cos \frac{x^1}{2} \cos \frac{x^1 + x^3}{2}, & q^1 &= -\operatorname{sen} \frac{x^1}{2} \operatorname{sen} \frac{x^2 - x^3}{2}, \\
 q^2 &= \operatorname{sen} \frac{x^1}{2} \cos \frac{x^2 - x^3}{2}, & q^3 &= \cos \frac{x^1}{2} \operatorname{sen} \frac{x^2 + x^3}{2},
 \end{aligned}$$

(4.3.16)

onde  $0 \leq x^1 \leq \pi$  e  $0 \leq x^2, x^3 \leq 2\pi$ , teremos

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{x^1}{2} \exp\left[i \frac{x^2 + x^3}{2}\right] & i \operatorname{sen} \frac{x^1}{2} \exp\left[i \frac{x^2 - x^3}{2}\right] \\ i \operatorname{sen} \frac{x^1}{2} \exp\left[-i \frac{x^2 - x^3}{2}\right] & \cos \frac{x^1}{2} \exp\left[-i \frac{x^2 + x^3}{2}\right] \end{pmatrix}$$

(4.3.17)

As 1-formas invariantes  $\bar{\omega}$  esquerda de um grupo de matrizes em que  $A$  é um elemento genérico, podem ser obtidas calculando-se

$$\bar{\Omega} = A^{-1} dA$$

como é mostrado, por exemplo, por Flanders (97). Desta forma, teremos:

$$\begin{aligned}
 \bar{\Omega} &= \begin{pmatrix} \frac{i}{2} (\cos x^1 dx^2 + dx^3) & \frac{1}{2} e^{-ix^3} (idx^1 - \operatorname{sen} x^1 dx^2) \\ \frac{1}{2} e^{ix^3} (idx^1 + \operatorname{sen} x^1 dx^2) & -\frac{i}{2} (\cos x^1 dx^2 + dx^3) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} i\omega^3 & \omega^1 + i\omega^2 \\ -\omega^1 + i\omega^2 & -i\omega^3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(4.3.18)

onde empregamos a representação dada pela eq. (13).

A eq. (18) nos fornece as seguintes 1-formas invariantes à esquerda, linearmente independentes:

$$\begin{aligned}\omega^1 &= \cos x^3 dx^1 + \operatorname{sen} x^1 \operatorname{sen} x^3 dx^2 \\ \omega^2 &= -\operatorname{sen} x^3 dx^1 + \operatorname{sen} x^1 \cos x^3 dx^2 \\ \omega^3 &= \cos x^1 dx^2 + dx^3\end{aligned}\quad (4.3.19)$$

com os correspondentes campos invariantes à esquerda dados por

$$\begin{aligned}X_1 &= \cos x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\operatorname{sen} x^3}{\operatorname{sen} x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} - \operatorname{cotg} x^1 \operatorname{sen} x^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \\ X_2 &= -\operatorname{sen} x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\cos x^3}{\operatorname{sen} x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} - \operatorname{cotg} x^1 \cos x^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial x^3} .\end{aligned}\quad (4.3.20)$$

Evidentemente

$$\begin{aligned}d\omega^1 &= -\omega^2 \wedge \omega^3 , \\ d\omega^2 &= -\omega^3 \wedge \omega^1 , \\ d\omega^3 &= -\omega^1 \wedge \omega^2 .\end{aligned}\quad (4.3.21)$$

ou

$$\begin{aligned}[X_1, X_2] &= X_3 , \\ [X_3, X_1] &= X_2 , \\ [X_2, X_3] &= X_1 .\end{aligned}\quad (4.3.22)$$

Portanto, a álgebra dos campos invariantes  $\bar{\omega}$  esquerda sobre a variedade grupo de Lie  $S^3$ , coincide com a álgebra dos campos invariantes do tipo Bianchi IX, conforme a seção 7 do capítulo primeiro.

Construiremos a métrica de nossa variedade espaço-tempo definindo as 1-formas

$$\begin{aligned}\Theta^0 &= dt - \alpha A(t)\omega^3 \\ \Theta^1 &= B_0 \omega^1 \\ \Theta^2 &= B_0 \omega^2 \quad (\alpha, B_0 = \text{const. } \alpha^2 \neq 1) \\ \Theta^3 &= A(t)\omega^3\end{aligned}\tag{4.3.23}$$

e exigindo o caráter Lorentziano local, isto é

$$ds^2 = \eta_{AB} \Theta^A \Theta^B \quad (A, B = 0, 1, 2, 3)\tag{4.3.24}$$

onde

$$\eta_{AB} = \text{diag. } (+, -, -, -) \quad .\tag{4.3.25}$$

Assim, as seções  $t = \text{const.}$  de nossa geometria, serão do tipo IX da classificação de Bianchi, que é compatível com a estrutura topológica de uma esfera  $S^3$ . Na verdade, a construção dada pela eq. (23) acima, pode ser entendida como correspondendo a uma deformação da esfera  $S^3$  em um elipsóide  $\bar{S}^3$ , e assim, os universos construídos via eqs. (23) e (24) serão finitos.

#### 4.4 - AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

As 1-formas  $\Theta^A = e_{\alpha}^{(A)} dx^{\alpha}$ , dadas pela eq. (4.2.23), definem o campo de tetradas

$$\begin{aligned}
 e^{(0)}_0 &= 1 \quad , \\
 e^{(0)}_2 &= -\alpha A \cos x^1 \quad , \\
 e^{(0)}_3 &= -\alpha A \quad , \\
 e^{(1)}_1 &= B_0 \cos x^3 \quad , \\
 e^{(1)}_2 &= B_0 \operatorname{sen} x^1 \operatorname{sen} x^3 \quad , \\
 e^{(2)}_1 &= -B_0 \operatorname{sen} x^3 \quad , \\
 e^{(2)}_2 &= B_0 \operatorname{sen} x^1 \cos x^3 \quad , \\
 e^{(3)}_2 &= A \cos x^1 \quad , \\
 e^{(3)}_3 &= A \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.4.1}$$

Os campos  $e_{(A)} = e_{(A)}^\alpha \partial_\alpha$  associados às 1-formas  $\theta^A(\theta^A[e_B] = \delta^A_B)$ , de acordo com a eq. (1), são dados por

$$\begin{aligned}
 e^0_{(0)} &= 1 \quad , \\
 e^0_{(3)} &= \alpha \quad , \\
 e^1_{(1)} &= \frac{1}{B_0} \cos x^3 \quad , \\
 e^1_{(2)} &= -\frac{1}{B_0} \operatorname{sen} x^3 \quad , \\
 e^2_{(1)} &= \frac{1}{B_0} \frac{\operatorname{sen} x^3}{\operatorname{sen} x^1} \quad , \\
 e^2_{(2)} &= \frac{1}{B_0} \frac{\cos x^3}{\operatorname{sen} x^1} \quad , \\
 e^3_{(1)} &= -\frac{1}{B_0} \operatorname{cotg} x^1 \operatorname{sen} x^3 \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{4.4.2}$$

$$e^3_{(2)} = - \frac{1}{B_0} \operatorname{cotg} x^1 \cos x^3 ,$$

$$e^3_{(3)} = \frac{1}{A} .$$

Derivando exteriormente as 1-formas  $\Theta^A$ , dadas pela eq. (4.3.23), teremos

$$d\Theta^0 = - \alpha \frac{\dot{A}}{A} (\Theta^0 \wedge \Theta^3) + \alpha \frac{A}{B_0^2} (\Theta^1 \wedge \Theta^2) ,$$

$$d\Theta^1 = - \frac{1}{A} (\Theta^2 \wedge \Theta^3) ,$$

(4.4.3)

$$d\Theta^2 = \frac{1}{A} (\Theta^1 \wedge \Theta^2) ,$$

$$d\Theta^3 = \frac{\dot{A}}{A} (\Theta^0 \wedge \Theta^3) - \frac{A}{B_0^2} (\Theta^1 \wedge \Theta^2) ,$$

onde o ponto denota derivada com respeito ao tempo.

As 1-formas  $\omega^A_B$  são dadas por

$$\omega^0_1 = \frac{\alpha}{2} \frac{A}{B_0^2} \Theta^2 ,$$

$$\omega^0_2 = - \frac{\alpha}{2} \frac{A}{B_0^2} \Theta^1 ,$$

(4.4.4)

$$\omega^0_3 = \alpha \frac{\dot{A}}{A} \Theta^0 + \frac{\dot{A}}{A} \Theta^3 ,$$

$$\omega^1_3 = \frac{1}{2} \frac{A}{B_0^2} \Theta^2 ,$$

$$\omega^1_2 = \frac{\alpha}{2} \frac{A}{B_0^2} \Theta^0 + \left( \frac{A}{2B_0^2} - \frac{1}{A} \right) \Theta^3 ,$$

$$\omega^2_3 = - \frac{1}{2} \frac{A}{B_0^2} \Theta^1 .$$

De posse das 1-formas  $\omega^A_B$ , calculamos a 2-formas  $\Omega^A_B$  e, com o uso da eq. (A.6.19), determinamos as componentes não nulas do tensor de curvatura. Elas são:

$$\begin{aligned} R^0_{101} = R^0_{202} = -\alpha R^0_{113} = -\alpha R^0_{223} &= -\frac{\alpha^2}{4} \frac{A^2}{B_0^2} , \\ R^0_{123} = -R^0_{213} &= \frac{(1-\alpha)}{2} \frac{\dot{A}}{B_0^2} , \\ R^0_{303} &= (1-\alpha^2) \frac{\ddot{A}}{A} , \\ R^0_{312} &= (\alpha^2-1) \frac{\dot{A}}{B_0^2} , \\ R^0_{313} = R^2_{323} &= \frac{1}{4} \frac{A^2}{B_0^4} , \\ R^1_{212} &= \frac{3(\alpha^2-1)}{4} \frac{A^2}{B_0^4} + \frac{1}{B_0^2} . \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

As componentes do tensor de Ricci  $R_{AB} = \eta^{CD} R_{DACB}$  são dadas por

$$\begin{aligned} R_{00} &= (\alpha^2-1) \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\alpha^2}{B_0^4} \frac{A^2}{2} \\ R_{03} &= \frac{\alpha}{B_0^4} \frac{A^2}{2} \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

$$R_{11} = R_{22} = \frac{(\alpha^2 - 1)}{B_0^4} \frac{A^2}{2} + \frac{1}{B_0^2},$$

$$R_{33} = \frac{1}{B_0^4} \frac{A^2}{2} - (\alpha^2 - 1) \frac{\ddot{A}}{A}.$$

As equações de Einstein com constante cosmológica assumem a forma

$$R_{AB} = k T_{AB} - \frac{k}{2} T \eta_{AB} + \Lambda \eta_{AB} \quad (4.4.7)$$

onde  $T = T^{AB} \eta_{AB}$ . Em virtude de nossas convenções no cálculo do tensor de Riemann, temos que  $k > 0$ .

O fato de  $R_{01} = R_{02} = 0$  implica que  $T_{01} = T_{02} = 0$ , e conseqüentemente

$$\Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 = \cos x^1 \Psi_3 \quad (4.4.8)$$

onde utilizamos as eqs. (4.2.1), (4.2.4) e (4.3.23). Assim, na base de coordenadas, encontramos

$$q_\alpha = (0, 0, \cos x^1, 1) \Psi_3 \quad (4.4.9)$$

As equações de Einstein restantes são:

$$R_{00} = \frac{k}{2} (\rho + p) + kp + \Lambda$$

$$k \Psi_3 = \frac{\alpha}{B_0^4} \frac{A^2}{2} \quad (4.4.10)$$

$$R_{11} = R_{22} = \frac{k}{2} (\rho - p) - \Lambda$$

$$R_{33} = \frac{k}{2} (\rho + p) - kp - \Lambda$$

Tomando  $\Lambda = -B_0^{-2}$  e assumindo uma equação de estado do tipo

$$p = \lambda \rho \quad , \quad 0 \leq (\lambda = \text{const.}) < 1. \quad (4.4.11)$$

reduzimos o sistema de equações acima a uma única equação

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{1}{B_0^4} \left[ \frac{(\alpha^2 - 2)}{\alpha^2 - 1} \right] \frac{A^2}{2} = \frac{\Lambda}{(\alpha^2 - 1)} \quad (4.4.12)$$

com

$$\frac{k}{2} \rho = \frac{1}{(1 - \lambda)} \frac{(\alpha^2 - 1)}{B_0^4} \frac{A^2}{2} \quad (4.4.13)$$

onde

$$\alpha^2 = \frac{\lambda + 3}{3\lambda + 1} \quad , \quad 1 < \alpha^2 \leq 3 \quad (4.4.14)$$

Esta última equação, nos assegura a positividade da densidade de energia e da pressão, e nos garante a compatibilidade do sistema de equações.

Na integração da eq. (12), temos que distinguir três diferentes classes de soluções. A primeira delas ocorre quando  $\alpha^2 = 2$ , que corresponde a uma equação de estado  $p = \rho/5$ . Neste caso, a eq. (12) se reduz a equação diferencial de um oscilador harmônico simples, cuja solução é:

$$A = A_0 \text{ sen} [ B_0^{-1} (t - t_0) ] \quad (4.4.15)$$

onde  $A_0$  e  $t_0$  são constantes reais arbitrárias.

A segunda delas ocorre quando  $1 < \alpha^2 < 2$  ( $p = \lambda \rho$ ,  $\frac{1}{5} < \lambda < 1$ ), e a eq. (12) é, neste caso, formalmente idêntica a equação

diferencial de um pêndulo simples, que pode ser integrada em termos das funções elípticas de Jacobi (98).

$$A = J_0 \operatorname{sn} [\delta(t - t_0), k] \quad (4.4.16)$$

onde  $t_0$  e  $\delta$  são constantes reais arbitrárias, e onde  $k^2$  e  $J_0$  são determinadas por

$$k^2 = \frac{B_0^2 \delta^2 (1 - \alpha^2) + 1}{\delta^2 B_0^2 (\alpha^2 - 1)}, \quad (4.4.17)$$

$$J_0^2 = \frac{4\delta^2 B_0^4 (1 - \alpha^2) + 4B_0^2}{2 - \alpha^2}.$$

A positividade de  $k^2$  e  $J_0^2$ , restringe  $\alpha^2$  ao intervalo acima especificado.

A terceira classe ocorre quando  $2 < \alpha^2 \leq 3$ , ou seja,  $p = \lambda\rho$  com  $0 \leq \lambda < 1/5$ . Novamente a integral da eq. (12), é dada em termos de funções elípticas

$$A = C_0 \operatorname{dn} [\eta(t - t_0), k] \quad (4.4.18)$$

onde  $\eta$  e  $t_0$  são constantes reais arbitrárias, e onde  $k^2$  e  $C_0$  são determinadas por

$$k^2 = \frac{2\eta^2 B_0^2 (\alpha^2 - 1) + 1}{\eta^2 (\alpha^2 - 1) B_0^2}, \quad (4.4.19)$$

$$C_0^2 = \frac{4\eta^2 (\alpha^2 - 1) B_0^4}{\alpha^2 - 2}.$$

A figura da página seguinte, ilustra, graficamente, o aspecto das soluções das duas últimas classes.

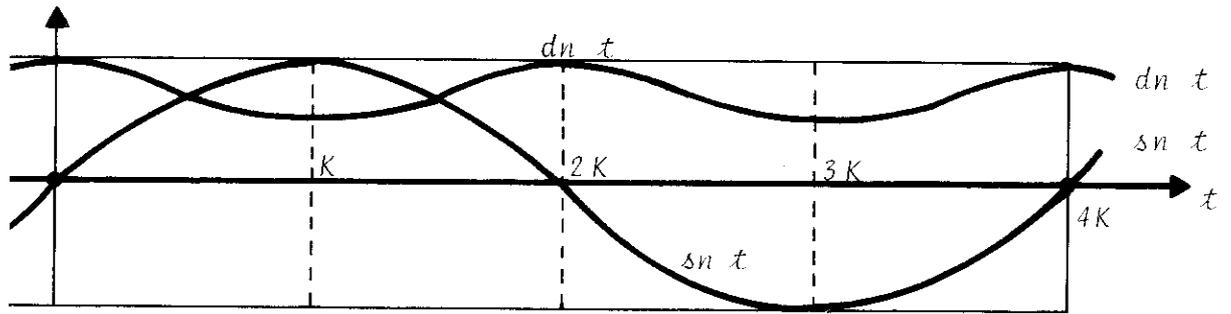


Fig. (4.4.1) - Ilustra o comportamento típico das funções elípticas  $dn t$  e  $sn t$ .

Finalmente, observamos que no caso  $\lambda = 1$ , as equações de Einstein não podem ser compatibilizadas.

#### 4.5 - QUANTIDADES CINEMÁTICAS

Calcularemos nesta seção as quantidades cinemáticas, associadas ao fluido fonte de curvatura do espaço-tempo. Na base de tetradas definida por  $\theta^A = e^{(A)}_{\alpha} dx^{\alpha}$ , a aceleração  $a^A$ , a expansão  $\Theta$ , a distorção  $\sigma_{AB}$ , e a rotação  $\omega_{AB}$ , são dadas por

$$a^A = v^A_{;C} v^C + \gamma^A_{BC} v^B v^C \quad (4.5.1)$$

$$\Theta = v_{A;C} \eta^{AC} - \gamma^A_{BC} \eta^{BC} v_A \quad (4.5.2)$$

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2} h_A^M h_B^N \left[ v_{M;N} + v_{N;M} + (\gamma_{MPN} + \gamma_{NPM}) v^P \right] - \frac{1}{3} \Theta h_{AB} \quad (4.5.3)$$

$$\omega_{AB} = \frac{1}{2} h_A^M h_B^N \left[ V_{M;N} - V_{N;M} + (\gamma_{MPN} - \gamma_{NPM}) V^P \right] \quad (4.5.4)$$

onde

$$V^A_{;C} = e^{\alpha}_{(C)} \frac{\partial V^A}{\partial x^{\alpha}} \quad (4.5.5)$$

Na base de tetradas o observador "comovente"  $V^{\alpha} = \delta^{\alpha}_0$ , tem, de acordo com a eq. (4.4.1), a quadrivelocidade  $V^A = \delta^A_0$ .

Os coeficientes de rotação de Ricci

$$\gamma^A_{BC} = - e^{(A)}_{\alpha} e^{\alpha}_{(B)} e^{\beta}_{(C)},$$

têm as seguintes componentes não nulas:

$$\gamma^0_{12} = -\gamma^0_{21} = \gamma^1_{20} = \frac{\alpha}{2} \frac{A}{2B_0^2},$$

$$\gamma^0_{30} = \alpha \frac{\dot{A}}{A}, \quad \gamma^0_{33} = \frac{\dot{A}}{A},$$

$$\gamma^1_{32} = -\gamma^2_{31} = \frac{1}{2} \frac{A}{2B_0^2},$$

$$\gamma^1_{23} = \frac{1}{2} \frac{A}{B_0^2} - \frac{1}{A}.$$

Portanto, usando as equações acima, obtemos

$$a^A = (0, 0, 0, \alpha \frac{\dot{A}}{A}), \quad (4.5.6)$$

$$\theta = \frac{\dot{A}}{A}, \quad (4.5.7)$$

e as componentes não nulas

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -\frac{1}{2} \quad \sigma_{33} = \frac{1}{3} \frac{\dot{A}}{A} \quad (4.5.8)$$

$$\omega_{12} = -\frac{\alpha}{2} \frac{A}{B_0^2} \quad (4.5.9)$$

O vetor de rotação  $\omega^A = \frac{1}{2} \epsilon^{ABCD} \omega_{BC} v_D$  é dado por

$$\omega^A = (0, 0, 0, \frac{\alpha}{2} \frac{A}{B_0^2}) \quad (4.5.10)$$

De maneira que, como mencionamos na introdução, todas as quantidades cinemáticas associadas à congruência do fluido, são dependentes do tempo.

Para as três classes diferentes de solução, teremos:

i) Primeira Classe:  $\alpha^2 = 2$ ,  $p = \rho/5$

$$\begin{aligned} A &= A_0 \operatorname{sen} \left[ B_0^{-1} (t-t_0) \right] \\ \frac{\dot{A}}{A} &= \frac{1}{B_0} \operatorname{cotg} \left[ B_0^{-1} (t-t_0) \right] \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

ii) Segunda Classe:  $1 < \alpha^2 < 2$ ;  $p = \lambda\rho$ ,  $\frac{1}{5} < \lambda < 1$ .

$$\begin{aligned} A &= J_0 \operatorname{sn} \left[ \delta (t-t_0), k \right] \\ \frac{\dot{A}}{A} &= \delta J_0 \operatorname{cs} \left[ \delta (t-t_0), k \right] \operatorname{dn} \left[ \delta (t-t_0), k \right] \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

iii) Terceira Classe:  $2 < \alpha^2 \leq 3$ ;  $p = \lambda\rho$ ,  $0 \leq \lambda < 1/5$ .

$$A = C_0 \operatorname{dn} \left[ \eta (t-t_0), k \right] \quad (4.5.13)$$

$$\frac{\dot{A}}{A} = -k^2 \eta^2 \operatorname{sd}[\eta(t-t_0), k] \operatorname{cn}[\delta(t-t_0), k] .$$

Para as definições das funções elípticas  $\operatorname{cn} u$ ,  $\operatorname{cs} u$ , e  $\operatorname{sd} u$ , veja, por exemplo, a referência (99).

#### 4.6 - RESULTADOS DIVERSOS E ALGUNS COMENTÁRIOS

As componentes não identicamente nulas do tensor de Weyl

$$C_{ABCD} = R_{ABCD} - \frac{1}{2} (\eta_{AC} R_{BD} + \eta_{BD} R_{AC} - \eta_{AD} R_{BC} - \eta_{BC} R_{AD}) + \frac{R}{6} (\eta_{AC} \eta_{BD} - \eta_{AD} \eta_{BC}) , \quad (4.6.1)$$

são dadas por

$$C_{0101} = C_{0202} = \frac{1}{2} (\alpha^2 - 1) \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{1}{3} \frac{(1 - \alpha^2) A}{2B_0^2} - \frac{1}{6B_0^2} =$$

$$= -C_{1313} = -C_{2323} , \quad (4.6.2)$$

$$C_{0303} = C_{1212} = \frac{1}{3} \frac{(\alpha^2 - 1)}{B_0^4} A^2 + \frac{1}{3B_0^2} ,$$

$$C_{0213} = \frac{1}{2} C_{0312} = -C_{0123} = \frac{(1 - \alpha^2) \dot{A}}{B_0^2} .$$

Relativamente ao observador  $V^A$ , podemos decompor o tensor de Weyl em suas partes elétrica e magnética

$$E_{AB} = C_{ACBD} V^C V^D , \quad H_{AB} = \frac{1}{2} \eta_{AC}^{MN} C_{MNBD} V^C V^D \quad (4.6.3)$$

Para o observador comovente  $v^A = \delta^A_0$ , teremos as seguintes componentes

$$\begin{aligned}
 E_{11} = E_{22} &= \frac{(\alpha^2 - 1)}{2} \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{(1 - \alpha^2)A - 1}{6B_0^2} , \\
 E_{33} &= \frac{(\alpha^2 - 1) A^2 + B_0^2}{3B_0^2} , \\
 H_{11} &= \frac{(\alpha^2 - 1) \dot{A}}{B_0^2} = H_{22} , \quad H_{33} = 0 .
 \end{aligned}
 \tag{4.6.4}$$

Assim, nossas geometrias não são conformalmente planas e, como no modelo de Novello-Rebouças (82), apresentam componentes elétricas e magnéticas do tensor de Weyl<sup>(\*)</sup>, relativamente ao observador que se move com o fluido.

De acordo com a eq. (1.2.33), os campos invariantes à direita  $K_i$  sobre  $S^3$  satisfazem a condição

$$[K_i , X_j] = 0
 \tag{4.6.5}$$

$i, j = 1, 2, 3$ . Portanto, o elemento de linha dado pela eq. (4.3.23), terá  $K_i$  como vetores de Killing, que em coordenadas de Euler são expressos, de acordo com a seção (1.7), por

$$K_1 = \frac{\partial}{\partial x^2}
 \tag{4.6.6}$$

$$K_2 = \cos x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - \cotg x^1 \operatorname{sen} x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\operatorname{sen} x^2}{\operatorname{sen} x^1} \frac{\partial}{\partial x^3}$$

---

(\*) A existência das partes: elétrica e magnética do tensor de Weyl, parece ser uma característica das geometrias fora do equilíbrio térmico.

$$K_3 = - \operatorname{sen} x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - \operatorname{cotg} x^1 \cos x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\cos x^2}{\operatorname{sen} x^1} \frac{\partial}{\partial x^3}$$

Uma interessante característica das soluções dadas pelas eqs. (4.4.15), (4.4.16) e (4.4.18) é que como

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{du^2} \operatorname{sn} u &= 2k^2 \operatorname{sn}^3 u - (1+k^2) \operatorname{sn} u, \\ \frac{d^2}{du^2} \operatorname{dn} u &= 2(2-k^2) \operatorname{dn} u - 2\operatorname{dn}^3 u, \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

e de acordo com as eqs. (4.4.5) e (4.4.13), tais geometrias não possuem singularidades - a curvatura do espaço-tempo e a densidade do fluido são finitas para todo tempo de qualquer observador. Isto não contradiz o resultado geral encontrado por Ryan (100, 101), o qual assegura que "nos universos, Bianchi IX com expansão, distorção e rotação, o caráter da singularidade não pode ser drasticamente alterado pela rotação". A razão da não contradição reside no fato da análise feita pelo Ryan ser restrita a fluido perfeito (com  $p = 0$ ), que não é o caso de nossas soluções. Assim, a ausência da singularidade em nossos modelos cosmológicos, pode ser devida à presença da rotação e/ou à existência de processos dissipativos (troca de calor), como ocorre no universo de Murphy (89).

Em um modelo do universo espacialmente homogêneo, isto é, uma variedade espaço-tempo que possui uma seção espacial de homogeneidade  $S(t)$ , localmente invariante sob um grupo de isometria  $G_3$ , simplesmente transitivo, o movimento do fluido galáctico é descrito por uma congruência de curvas tipo tempo, que tem  $V^\alpha$  como campo de vetores tangentes. Em geral, conforme estu

damos no capítulo 2, a velocidade do fluido não é ortogonal à superfície de homogeneidade,  $v^\alpha$  não é geodético. Nos modelos espacialmente homogêneos com rotação isto ocorre sempre, ou seja, tais modelos são inclinados. Os modelos inclinados (34) parecerão "inhomogêneos" para o observador que se move com quadrivelocidade  $v^\alpha$ : grandezas físicas ("homogêneas"), tais como a densidade  $\rho(t)$  e a pressão  $p(t)$ , exibirão um gradiente espacial. Nossos modelos são inclinados, e gozam das propriedades gerais de tais modelos, que podem ser encontradas no capítulo 2 desta tese

#### 4.7 - UM UNIVERSO BIANCHI II COM ROTAÇÃO DEPENDENTE DO TEMPO

Nas seções anteriores desta tese apresentamos três diferentes classes de universos anisotrópicos, finitos, homogêneos, não singulares, com rotação dependente do tempo, e tais que, as seções  $t = \text{constante}$  admitiam um grupo de Lie  $G_3$  simplesmente transitivo do tipo IX da classificação de Bianchi. Nesta seção, exibiremos (86) uma solução cosmológica das equações de Einstein, com rotação dependente do tempo e tal que as seções  $t = \text{constante}$  são variedades grupos de Lie do tipo II da classificação de Bianchi. O conteúdo material de nossa geometria é um fluido fora do equilíbrio térmico

$$T_{\alpha\beta} = \rho v_\alpha v_\beta - p h_{\alpha\beta} + 2 q_{(\alpha} v_{\beta)} \quad (4.7.1)$$

onde

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - v_\alpha v_\beta, \quad q_\alpha v^\alpha = 0. \quad (4.7.2)$$

E o fluxo de calor  $q^\alpha$  é introduzido de maneira inteiramente análoga à descrita na seção (4,2), valendo aqui também as motivações colocadas naquela seção. Em outras palavras, introduziremos o vetor  $q^A$ , através da base invariante  $v_A$ , de nossas seções  $t = \text{cons}$

tante, que aqui são do tipo Bianchi II, isto é,

$$\vec{q} = q^A X_A . \quad (4.7.3)$$

onde  $A = 1, 2, 3$ .

Tomando  $\{x^1, x^2, x^3\}$  como coordenadas locais sobre as seções  $t = \text{constante}$  de nossa geometria, construiremos nosso elemento de linha como se segue.

As 1-formas invariantes das variedades tridimensionais do tipo Bianchi II, conforme vimos no capítulo 1, são dadas por

$$\begin{aligned} \omega^1 &= dx^1 + x^2 dx^3 , \\ \omega^2 &= dx^2 , \\ \omega^3 &= dx^3 . \end{aligned} \quad (4.7.4)$$

Os campos invariantes correspondentes são

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x^1} , \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial x^2} , \\ X_3 &= -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^3} . \end{aligned} \quad (4.7.5)$$

Evidentemente

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = 0, \quad [X_2, X_3] = -X_1 . \quad (4.7.6)$$

Definimos o elemento de linha através das 1-formas  $\theta^A$ :

$$\begin{aligned}
 \Theta^0 &= dt + \sqrt{2} B(t) \omega^1 \\
 \Theta^1 &= B(t) \omega^1 \\
 \Theta^2 &= B(t) \omega^2 \\
 \Theta^3 &= B(t) \omega^3
 \end{aligned}
 \tag{4.7.7}$$

e exigindo o caráter Minkowskiano local, isto é,

$$ds^2 = \eta_{AB} \Theta^A \Theta^B, \quad (A, B = 0, 1, 2, 3) \tag{4.7.8}$$

onde

$$\eta_{AB} = \eta^{AB} = \text{diag. } (+, -, -, -) .$$

A métrica dada pela eq. (8) acima, tem, obviamente, por construção, os seguintes vetores de Killing

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{\partial}{\partial x^1}, \\
 K_2 &= -x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2}, \\
 K_3 &= \frac{\partial}{\partial x^3}.
 \end{aligned}
 \tag{4.7.9}$$

Um cálculo direto nos fornece o valor do tensor de Ricci no referencial de tetradas locais definido por  $\Theta^A = e_{\alpha}^{(A)} dx^{\alpha}$  (Veja eq. (7)). Encontramos que as componentes não nulas do tensor de Ricci são

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= -\frac{\ddot{B}}{B} + 4 \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{1}{B^2} \\
 R_{01} &= 2\sqrt{2} \frac{\ddot{B}}{B} - 2\sqrt{2} \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{\sqrt{2}}{2B^2}
 \end{aligned}
 \tag{4.7.10}$$

$$R_{11} = -5 \frac{\ddot{B}}{B} + 2 \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{1}{2B^2}$$

$$R_{22} = R_{33} = -\frac{\ddot{B}}{B} - 2 \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{1}{2B^2}$$

onde o ponto denota derivada em relação ao tempo.

As equações de Einstein na base de tetradas com  $\Lambda \neq 0$  são:

$$R_{AB} = k T_{AB} - \frac{k}{2} T \eta_{AB} + \Lambda \eta_{AB} \quad (4.7.11)$$

onde  $k > 0$ . Como  $R_{03} = R_{02} = 0 \Rightarrow T_{03} = T_{02} = 0$  e, conseqüentemente

$$q_\alpha = (0, 1, 0, x^2) \Psi_1 .$$

As equações de Einstein restantes, na base de tetradas, são

$$R_{00} = \frac{k}{2} (\rho + 3p) + \Lambda ,$$

$$k\Psi_1 = 2\sqrt{2} B \begin{pmatrix} \dot{B} \\ - \\ B \end{pmatrix} \cdot - \frac{\sqrt{2}}{2} B^{-1} , \quad (4.7.12)$$

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = \frac{k}{2} (\rho - p) - \Lambda .$$

Uma solução pode ser facilmente encontrada:

$$B = B_0 e^{-bt} \quad (4.7.13)$$

sendo  $B_0$  e  $b$  constantes, e onde

$$\frac{k}{2} p = \frac{3}{2} b^2 + \frac{1}{8} B^{-2} - \frac{1}{2} \Lambda , \quad (4.7.14)$$

$$\frac{k}{2} \rho = -\frac{3}{2} b^2 + \frac{5}{8} B^{-2} + \frac{1}{2} \Lambda.$$

Não analisaremos a equação de estado  $p = p(\rho)$ , no caso geral. Mas se, por exemplo, tomarmos  $b^2 = \Lambda/3$ , as equações acima nos fornecem  $p = \rho/5$ , e teremos assegurada a positividade de  $\rho$  e  $p$ , e as condições de energia (1).

Calcularemos agora os parâmetros cinemáticos associados à congruência do fluido  $v^A = \delta^A_0$ . Os coeficientes de rotação de Ricci

$$\gamma_{BC}^A = -e^{(A)}_{\alpha||\beta} e^\alpha_{(B)} e^\beta_{(C)} \quad (4.7.15)$$

não nulos são

$$\begin{aligned} \gamma^0_{11} &= \gamma^0_{22} = \gamma^0_{33} = \frac{\dot{B}}{B}, \\ \gamma^0_{10} &= -\gamma^1_{22} = -\gamma^1_{33} = -\sqrt{2} \frac{\dot{B}}{B}, \\ \gamma^0_{23} &= -\gamma^0_{32} = \gamma^2_{30} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{B}, \\ \gamma^1_{23} &= -\gamma^1_{32} = -\gamma^2_{31} = \frac{1}{2B}. \end{aligned} \quad (4.7.16)$$

Portanto, empregando as eqs. (4.5.1 - 4.5.5), encontramos que o fluido não possui distorção, mas tem aceleração, expansão e rotação, dadas por

$$a^A = \left( 0, \frac{\sqrt{2} \dot{B}}{B}, 0, 0 \right), \quad (4.7.17)$$

$$\Theta = 3 \frac{\dot{B}}{B}, \quad (4.7.18)$$

$$\omega_{23} = \frac{\sqrt{2}}{2B} . \quad (4.7.19)$$

O vetor de rotação  $\omega^A = \frac{1}{2} \epsilon^{ABCD} \omega_{BC} V_D$  tem  $\omega^1$  como única componente diferente de zero

$$\omega^1 = - \frac{\sqrt{2}}{2B} . \quad (4.7.20)$$

Como  $B$  é uma função do tempo nossa geometria possui, de fato, a propriedade mencionada na introdução.

## APÊNDICE A

### NOTAS SOBRE GEOMETRIA DIFERENCIAL

Nosso objetivo neste apêndice é apresentar, de maneira rápida e sucinta, algumas definições e resultados da Geometria Diferencial, que são largamente utilizados no corpo desta Tese. A maioria dos resultados aqui mencionados não são demonstrados, pois, se assim tentássemos proceder, não escreveríamos um apêndice, e sim um livro. Esperamos que um leitor que nunca tenha tido um contato com o assunto aqui tratado, possa aproveitá-lo de maneira eficiente, desde que faça uso, para esclarecimentos específicos, de nossas principais fontes: Lovelock e Hund (103), Hawking e Ellis (1), Hicks (104), Assad (27), Westenholtz (2), Flanders (97), Carmo (105), Maia (106), Soares (107), Cohn (7) e Boothby (3).

#### 1 - VARIEDADE DIFERENCIÁVEL

Do ponto de vista matemático, o conceito de variedade diferenciável surgiu como uma generalização da noção de superfície regular do  $R^3$ , e nos permite estender os métodos do Cálculo Diferencial a espaços mais gerais que o  $R^n$ . Do ponto de vista da Física, diríamos como o Rayn (17), que "nada é tão vital na Relatividade Geral, por exemplo, quanto a realidade física de um evento (ou ponto do espaço-tempo) completamente isolada do sistema de coordenadas utilizado para descrevê-la". Sobre a superfície da Terra, por exemplo, Natal é Natal, não importando

que latitude e que longitude atribuímos a ela. A Matemática moderna reconhece, separa e leva em conta a diferença entre um ponto e as coordenadas que lhes doamos ou atribuímos. Tais fatos são levados em consideração no conceito de variedade diferenciável. Embora Gauss já houvesse entrevisto a noção de variedade, foi necessário aproximadamente um século para que tal idéia atingisse a forma que apresentaremos aqui.

Seja  $M$  um conjunto de pontos tal que qualquer ponto  $P \in M$  está contido em um subconjunto aberto  $U_\alpha \subset M$ . Suponhamos que, para cada  $U_\alpha$ , existe uma aplicação biunívoca  $\phi_\alpha$  de  $U_\alpha$  sobre um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ . Desta forma, fica definido um sistema de coordenadas sobre cada  $U_\alpha$  no sentido de que podemos associar univocamente a cada ponto  $P \in U_\alpha$ ,  $n$  números reais  $\phi(P) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ . A cada par  $(\phi_\alpha, U_\alpha)$  denominaremos de *carta* ou *mapa* e ao conjunto  $U_\alpha$  chamaremos *vizinhança de coordenada*.

Quando ocorrer que a interseção  $U_\alpha \cap U_\beta$  seja não vazia, faremos a hipótese que existe uma aplicação biunívoca e contínua.

$$\Psi = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (\text{A.1.1})$$

com inversa  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} = \Psi^{-1}$  contínua, de um aberto do  $\mathbb{R}^n$  do outro subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$  (veja fig. A.1.1). Se  $M$  for tal que  $M = \bigcup U_\alpha$ , a coleção  $\{\phi_\alpha, U_\alpha\}$  chamaremos de *atlas*. Se ainda  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$  for de classe  $C^{k(*)}$  diremos que o atlas é  $C^k$ .

---

(\*) Uma função é, por definição, de Classe  $C^k$  quando possui derivadas contínuas até ordem  $k$ .

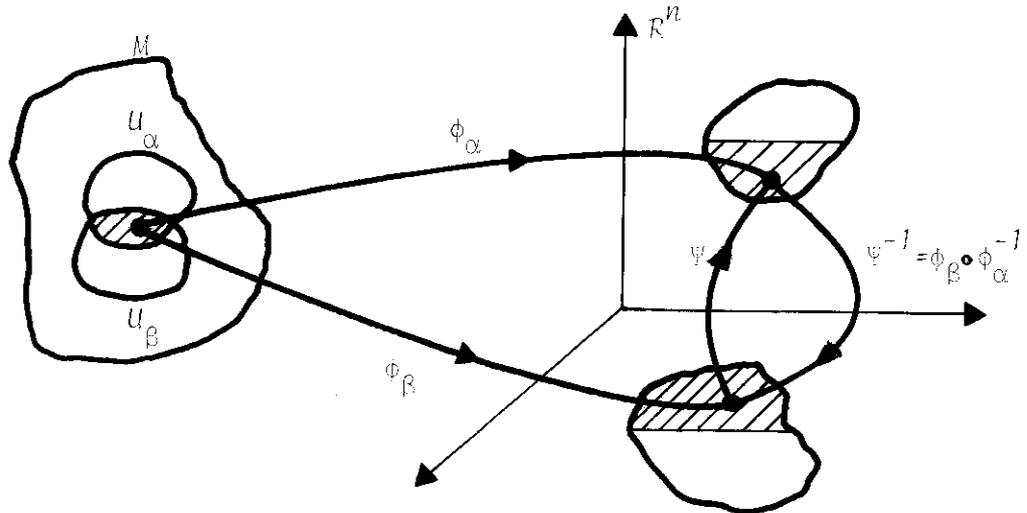


Figura A.1.1 - Quando a interseção entre duas vizinhanças  $U_\alpha$  e  $U_\beta$  é não-vazia, as coordenadas estão relacionadas por um mapeamento  $C^k$  dado por  $\Psi = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ .

Posto isto, definimos variedade diferenciável  $n$ -dimensional, de classe  $C^k$ , ao conjunto  $M$  dotado de um atlas  $C^k$ .

Parece-nos importante observar que se  $P \in (U_\alpha \cap U_\beta)$ , correspondendo às duas cartas  $\phi_\alpha$  e  $\phi_\beta$ ,  $P$  tem coordenadas  $\phi_\alpha(P) = (x^1, \dots, x^n)$  e  $\phi_\beta(P) = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ , então a propriedade expressa pela eq. (1) acima assegura-nos que no domínio de definição cada coordenada pode ser expressa como uma função contínua das outras, ou seja,

$$x^\alpha = x^\alpha(\bar{x}^\gamma)$$

e

(A.1.2)

$$\bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^\gamma)$$

onde  $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$ .

## 2 - VETORES

Quando nos deparamos com a necessidade de definir ou estender às variedades diferenciáveis, o conceito de vetor tangente, recorreremos ao que conhecemos sobre o  $\mathbb{R}^n$ . A definição de um vetor tangente a uma variedade é uma generalização da derivada direcional no  $\mathbb{R}^n$  (104, 105, 106).

Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $F(M)$  o conjunto de todas as funções reais e diferenciáveis em  $M$ . Um *vetor tangente*  $V$  em  $P \in M$  é um operador

$$V : F(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.2.1})$$

sobre o conjunto das funções diferenciáveis em  $P$ , satisfazendo as propriedades

$$i) \quad V[af + bg] = a V[f] + b V[g], \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (\text{A.2.2})$$

$$ii) \quad V[fg] = f V[g] + g V[f], \quad f, g \in F(M)$$

Desta forma, o vetor  $V$  associa a cada função diferenciável em  $P \in M$  um número real  $V[f]$ . Mostra-se (7, 97, 103) que se  $c$  é a função constante  $V[c] = 0$ .

Podemos dotar o conjunto de todos os vetores tangentes à variedade no ponto  $P \in M$ , de uma estrutura de espaço vetorial, definindo a combinação linear de vetores tangentes por

$$(a V_1 + b V_2)[f] = a V_1[f] + b V_2[f], \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.2.3})$$

Tal espaço vetorial é denominado de *espaço tangente à variedade no ponto  $P$* , e denotado por  $T_P(M)$ , ou simplesmente por  $T_P$ . Este

espaço representa o conjunto de todas as direções em  $P$ .

Suponha que  $\{x^\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, n\}$  é um sistema de coordenadas local, definido em uma vizinhança de  $P \in M$ . Então a coleção de operadores

$$N_i = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_P \equiv \left. \partial_i \right|_P, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{A.2.4})$$

é um conjunto de vetores tangentes à  $M$  em  $P$  (satisfaz as propriedades dadas pela eq. (2)), e constitui uma base para o espaço vetorial  $T_P$  (1). Tal base é comumente denominada de *base canônica*, *base local*, *base natural* ou *base de coordenadas*. Na verdade, pode-se mostrar (7, 106) que dado um vetor  $V \in T_P(M)$ , então

$$V = y^\alpha \partial_\alpha = y^\alpha \left. \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right|_P, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{A.2.5})$$

onde

$$V = y [x^\alpha]. \quad (\text{A.2.6})$$

É imediato verificar que, sob transformações de coordenadas locais  $\bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^\beta)$ , os elementos  $N_i$  da base natural de  $T_P(M)$  se transformam com a inversa da matriz jacobiana (106). Este fato deu origem ao nome *vetores contravariantes* para os elementos de  $T_P(M)$ .

Em geral, se  $\{E_i; i = 1, 2, \dots, n\}$  é um conjunto de  $n$  vetores em  $P \in M$ , que são linearmente independentes, então qualquer vetor  $V \in T_P$  pode ser escrito como  $V = V^i E_i^{(*)}$ , onde  $V^i$  são as componentes do vetor  $V$  com respeito à base  $\{E_i\}$  em  $P$ . Parti-

---

(\*) Vale aqui a convenção de soma de Einstein.

cularmente, podemos tomar  $E_i = N_i$ , ou seja, escolher a base natural. Neste caso,  $V = V^i \partial_i$  e as componentes  $V^i = V[x^i]$  (eq. 5)) são as derivadas das funções coordenadas  $x^i$  na direção  $V$ .

No estudo de um espaço vetorial sobre um corpo, as transformações lineares do espaço sobre o corpo, têm interesse suficiente para merecer um nome especial: formas lineares. Considere o espaço vetorial  $T_p(M)$ , sobre o corpo  $R$ . Uma *forma linear* sobre  $T_p$  é, por definição, um mapeamento

$$\omega : T_p(M) \rightarrow R \quad (A.2.7)$$

tal que

$$i) \text{ qualquer } V \in T_p(M) \rightarrow \omega[V] \in R \quad (A.2.8)$$

$$ii) \omega[a V_1 + b V_2] = a \omega[V_1] + b \omega[V_2] ;$$

$$a, b \in R \text{ e } V_1, V_2 \in T_p(M) . \quad (A.2.9)$$

O conjunto de todas as formas lineares sobre  $T_p$  denotado por  $T_p^*(M)$ , ou simplesmente  $T_p^*$ , munido da propriedade:

$$(a \omega_1 + b \omega_2)[V] = a \omega_1[V] + b \omega_2[V]$$

onde  $a, b \in R$ ;  $\omega_1, \omega_2 \in T_p^*$  e  $V \in T_p$ , constitui um espaço vetorial sobre  $R$ , denominado *espaço dual*<sup>(\*)</sup> de  $T_p$ .

Dada uma base  $\{E_i\}$  de vetores em  $P$ , podemos definir um único conjunto de  $n$  1-formas  $\{E^i\}$  pela condição:  $E^i$  aplicada a um vetor qualquer  $V \in T_p$  fornece o número  $V^i \in R$  ( $i$ -ésima componente do vetor  $V$  com respeito à base  $\{E_i\}$ ). Explicitamente:

---

(\*) Também denominado espaço cotangente a  $M$  em  $P$ .

$$E^i : T_p \rightarrow \mathbb{R}$$

ē tal que

$$E^i[V] = v^i \in \mathbb{R} . \quad (\text{A.2.10})$$

Assim

$$V = E^i[V] E_i . \quad (\text{A.2.11})$$

Particularmente

$$E^i[E_j] = \delta^i_j . \quad (\text{A.2.12})$$

É um resultado conhecido da Álgebra Linear (6), que o conjunto de todos os vetores  $E^i \in T_p^*$  assim definidos, ē uma base<sup>(\*)</sup> para  $T_p^*$ , unicamente determinada pela eq. (12). Assim, qualquer  $\omega \in T_p^*$  pode ser escrito como

$$\omega = \omega_i E^i \quad (\text{A.2.13})$$

e teremos

$$\omega[E_j] = \omega_i E^i[E_j] = \omega_j . \quad (\text{A.2.14})$$

Portanto

$$\omega = \omega[E_j] E^j . \quad (\text{A.2.15})$$

Para quaisquer  $\omega \in T_p^*$  e  $V \in T_p$ , podemos expressar o número real  $\omega[V]$  em termos das componentes  $\omega_i$  e  $v^i$ , de  $\omega$  e  $V$  com relação às bases  $\{E_j\}$  e  $\{E^i\}$  (com  $E^i[E_j] = \delta^i_j$ ), pelas relações

$$\omega[V] = \omega_i E^i[V^j E_j] = \omega_j v^j . \quad (\text{A.2.16})$$

Cada função  $f \in F(M)$  define a 1-forma  $df \in T_p^*$ , sobre  $T_p$ ,

---

(\*) Denominada base dual à base  $E_j$ .

por

$$d\zeta[V] = V[\zeta] \quad (\text{A.2.17})$$

onde  $V$  é um vetor qualquer de  $T_P(M)$ . A 1-forma  $d\zeta$  é denominada *diferencial de  $\zeta$* . Se  $\{x^1, \dots, x^n\}$  são coordenadas locais em uma vizinhança de  $P$ , o conjunto de diferenciais  $\{dx^1, dx^2, \dots, dx^n\}$  forma uma base das 1-formas, dual à base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$  de vetores em  $P$ , pois

$$dx^i \left[ \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j, \quad (\text{A.2.18})$$

em termos desta base, a diferencial  $d\zeta$  de uma função arbitrária  $\zeta \in F(M)$  é dada por

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial x^i} dx^i \quad (\text{A.2.19})$$

onde utilizamos a eq. (15).

Os elementos de  $T_P^*(M)$  que, até aqui, chamamos de *formas diferenciais*, também são denominados de *vetores covariantes*. A razão deste nome é que, sob transformações de coordenadas locais  $\bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^\rho)$ , a base  $\{dx^\alpha\}$  dual à base  $\{\partial_\alpha\}$ , se transforma com a matriz jacobiana  $(\partial \bar{x}^\alpha / \partial x^\rho)$ , da transformação de coordenadas.

Definimos *campo vetorial  $V$*  em uma variedade diferenciável  $M$ , como uma coleção de vetores um em cada ponto  $P \in M$ . De maneira análoga, definimos *campo de formas* <sup>(\*)</sup>  $\omega$ , sobre uma variedade  $M$ , com uma coleção de formas diferenciais uma em cada pon-

---

(\*) Também conhecido como *campo vetorial covariante*.

to  $P \in M$ . Estes conceitos também são formulados em termos matemáticos mais sofisticados da maneira abaixo.

O conjunto de todos os vetores tangentes a todos os pontos de uma variedade  $\bar{E}$  é outra variedade, denominada fibrado tangente a  $M$ , e denotado por  $F_T(M)$ . Cada espaço tangente  $T_P(M)$  está contido em  $F_T(M)$ , e  $\bar{E}$  é denominado uma fibra de  $F_T(M)$ . Um campo vetorial  $V$  em  $M$  é uma aplicação

$$V : M \rightarrow F_T(M) \quad (\text{A.2.20})$$

que associa a cada  $P \in M$  um vetor tangente  $V(P) \in T_P(M)$ .

De maneira análoga, definimos fibrado tangente  $F_T^*(M)$  como o conjunto de todas as formas lineares (vetores covariantes) definidos em todos os pontos de  $M$ . Cada  $T_P^*(M)$  é uma fibra do espaço cotangente. Um campo de formas é uma aplicação

$$\omega : M \rightarrow F_T^*(M)$$

que associa a cada  $P \in M$  uma forma  $\omega(P) \in T_P^*(M)$ .

### 3 - TENSORES E ÁLGEBRA TENSORIAL

Seja  $M$  uma variedade diferenciável, e considere o produto cartesiano de ordem  $n$  em  $P \in M$

$$\Pi_n = \underbrace{T_P \times T_P \cdots \times T_P}_{n \text{ - fatores}} \quad (\text{A.3.1})$$

Tal produto nada mais é que a coleção de vetores ordenados  $\{V_1, \dots, V_n\}$  onde os  $V_i \in T_P$  são vetores arbitrários de  $T_P$ . Um tensor covariante de ordem  $n$  em  $P \in M$  é uma aplicação

$$G : \Pi_n \rightarrow R \quad , \quad (\text{A.3.2})$$

que é linear em cada um de seus argumentos. Escreveremos o número real em que  $G$  leva o elemento  $(V_1, \dots, V_\kappa)$  de  $\Pi_\kappa$  como  $G(V_1, \dots, V_\kappa) \in \mathbb{R}$ .

De maneira semelhante, definimos um tensor contravariante de ordem  $s$  em  $\mathcal{P}$  com a aplicação multilinear

$$H : \Pi^\delta = \underbrace{T_{\mathcal{P}}^* \times T_{\mathcal{P}}^* \times \dots \times T_{\mathcal{P}}^*}_{s\text{-fatores}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\text{A.3.3})$$

e indicamos por  $H(\omega^1, \dots, \omega^\delta) \in \mathbb{R}$  ao número real que  $H$  associa ao elemento  $(\omega^1, \dots, \omega^\delta) \in \Pi^\delta$ .

Um tensor misto do tipo  $(s, \kappa)$ ,  $s$  - contravariante e  $\kappa$  - covariante é uma função

$$T : \Pi_\kappa^\delta = \underbrace{T_{\mathcal{P}} \times T_{\mathcal{P}} \times \dots \times T_{\mathcal{P}}}_{\kappa\text{-fatores}} \times \underbrace{T_{\mathcal{P}}^* \times T_{\mathcal{P}}^* \times \dots \times T_{\mathcal{P}}^*}_{s\text{-fatores}} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (\text{A.3.4})$$

Denotamos por  $T(V_1, \dots, V_\kappa, \omega^1, \dots, \omega^\delta) \in \mathbb{R}$  o número que  $T$  associa o elemento  $(V_1, \dots, V_\kappa, \omega^1, \dots, \omega^\delta) \in \Pi_\kappa^\delta$ .

A linearidade em cada um de seus argumentos (multilinearidade) acima mencionada implica, por exemplo, que

$$\begin{aligned} & T(V_1, \dots, aV + bW, \dots, V_\kappa, \omega^1, \dots, \omega^\delta) = \\ & = aT(V_1, \dots, V, \dots, V_\kappa, \omega^1, \dots, \omega^\delta) + \\ & + bT(V_1, \dots, W, \dots, V_\kappa, \omega^1, \dots, \omega^\delta) \end{aligned} \quad (\text{A.3.5})$$

é verdadeira para todo  $a, b \in \mathbb{R}$   $V, W \in T_{\mathcal{P}}$ .

Definimos a adição e a multiplicação por escalar de tensores mistos (tensores do tipo  $(s, \kappa)$ ) em  $\mathcal{P}$ , respectivamente,

por

i) Se  $T$  e  $T'$  são tensores do tipo  $(s, \kappa)$  em  $P \in M$ , a soma  $S = T + T'$  é um tensor  $(s, \kappa)$  tal que:

$$(T + T')(V_1, \dots, V_\kappa, \omega^1, \dots, \omega^s) = T(V_1, \dots, V_\kappa, \omega^1, \dots, \omega^s) + T'(V_1, \dots, V_\kappa, \omega^1, \dots, \omega^s) \equiv S(V_1, \dots, V_\kappa, \omega^1, \dots, \omega^s) \quad (\text{A.3.6})$$

onde  $V_i \in T_P^*$  ( $i = 1, \dots, \kappa$ ) e  $\omega^j \in T_P^*$  ( $j = 1, \dots, s$ ) são vetores e formas, ambos arbitrários.

ii) Se  $T$  é um tensor do tipo  $(s, \kappa)$  em  $P \in M$ , a multiplicação  $(\alpha T) = M$  é um tensor de mesmo tipo que o tensor  $T$ , e tal que, para todo  $V_i \in T_P^*$  ( $i = 1, \dots, \kappa$ ) e  $\omega^j \in T_P^*$  ( $j = 1, \dots, s$ ), a equação

$$(\alpha T)(V_1, \dots, V_\kappa, \omega^1, \dots, \omega^s) \equiv M(V_1, \dots, V_\kappa, \omega^1, \dots, \omega^s) = \alpha T(V_1, \dots, V_\kappa, \omega^1, \dots, \omega^s) \quad (\text{A.3.7})$$

é verdadeira.

Como as operações de adição e multiplicação por escalar definidas acima, o conjunto de todos os tensores do tipo  $(s, \kappa)$  em  $P \in M$ , que indicaremos por  $\tau_\kappa^s(P)$ , é um espaço vetorial sobre os reais de dimensões igual a  $n^{\kappa+s}$  (1).

Seja  $T \in \tau_\kappa^s(P)$  e  $S \in \tau_q^p(P)$ , indicaremos por  $T \otimes S$  ao elemento  $\tau_{\kappa+q}^{s+p}(P)$ , que aplica o elemento  $(V_1, \dots, V_\kappa, \dots, V_{\kappa+q}, \omega^1, \dots, \omega^s, \dots, \omega^{s+q}) \in \Pi_{\kappa+q}^{s+p}$  em  $R$ , da forma abaixo:

$$T \otimes S(V_1, \dots, V_\kappa, \dots, V_{\kappa+q}, \omega^1, \dots, \omega^s, \dots, \omega^{s+q}) = T(V_1, \dots, V_\kappa, \omega^1, \dots, \omega^s) S(V_{\kappa+1}, \dots, V_{\kappa+q}, \omega^{s+1}, \dots, \omega^{s+q}) \quad (\text{A.3.8})$$

O produto definido pela eq. (8) é denominado de *produto tensorial* e com ele convertemos o espaço dos tensores em em uma álgebra (8).

O produto tensorial goza das seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
 i) \quad T \otimes (S + R) &= T \otimes S + T \otimes R \\
 ii) \quad (S + R) \otimes T &= S \otimes T + R \otimes T \\
 iii) \quad (aT) \otimes S &= T \otimes (aS) \\
 iv) \quad T \otimes (R \otimes S) &= T \otimes R \otimes S
 \end{aligned} \tag{A.3.9}$$

que podem ser verificadas facilmente.

Se  $\{E_i\}$  e  $\{E^j\}$  são bases para  $T_P$  e  $T_P^*$ , respectivamente, estão a coleção

$$E_{i_1} \otimes E_{i_2} \otimes \dots \otimes E_{i_s} \otimes E^{j_1} \otimes E^{j_2} \otimes \dots \otimes E^{j_n}, \tag{A.3.10}$$

onde cada  $i_m$  (e cada  $j_i$ ) varia de 1 até  $n$ .,  $\bar{e}$  é uma base para  $\tau_n^s(P)$ . Assim, um tensor qualquer  $T \in \tau_n^s(P)$  pode ser escrito como

$$T^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_n} E_{i_1} \otimes \dots \otimes E_{i_s} \otimes E^{j_1} \otimes \dots \otimes E^{j_n} \tag{A.3.11}$$

onde  $\{T^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_n}\}$  são as componentes do tensor relativas às bases  $\{E_i\}$  e  $\{E^j\}$ , que satisfazem a  $E^i[E_j] = \delta^i_j$ . Mostraremos este resultado para um tensor particular  $T \in \tau_2^1(P)$ , ou seja, 1-contravariante e 2-covariante. Com efeito, usando a definição de tensor e o fato que  $\{E_i\}$  e  $\{E^j\}$  são bases de  $T_P$  e  $T_P^*$ , para vetores arbitrários  $V_1, V_2 \in T_P$  e  $\omega \in T_P^*$ , teremos:

$$\begin{aligned}
 T(V_1, V_2, \omega) &= T\left(V_1^i E_i, V_2^j E_j, \omega_k E^k\right) = \\
 &= V_1^i V_2^j \omega_k T\left(E_i, E_j, E^k\right)
 \end{aligned} \tag{A.3.12}$$

Como  $T_P$  e  $(T_P^*)^*$  são isomorfos (6), então os vetores de  $T_P$  podem ser considerados como uma aplicação de  $T_P^*$  (103) em  $R$ , e teremos

$$\omega_k = E_k(\omega). \quad (\text{A.3.13})$$

Como, pela eq. (2.10),  $V^i = E^i[V]$ , retornando a eq. (12) acima, ficaremos com

$$\begin{aligned} T(V_1, V_2, \omega) &= T(E^i, E^j, E^k) E^i[V_1] E^j[V_2] E_k[\omega] = \\ &= T_{ij}^k E^i \otimes E^j \otimes E_k \end{aligned} \quad (\text{A.3.14})$$

onde utilizamos a definição de produto tensorial e batizamos

$$T(E^i, E^j, E^k) \equiv T_{ij}^k. \quad (\text{A.3.15})$$

As operações adição, multiplicação por escalar e produto tensorial podem ser colocadas em termos de componentes, e resultam

$$\begin{aligned} i) \quad (T + T')^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_n} &= T^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_n} + T'^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_n} \\ ii) \quad (\alpha T)^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_n} &= \alpha T^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_n} \\ iii) \quad (T \otimes S)^{j_1 \dots j_s \dots j_{s+p}}_{i_1 \dots i_n \dots i_{s+q}} &= \\ &= T^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_n} S^{j_{s+1} \dots j_{s+p}}_{i_{n+1} \dots i_{s+q}} \end{aligned} \quad (\text{A.3.16})$$

como podemos verificar facilmente se tomarmos duas bases duais

$\{E_j\}$  e  $\{E^j\}$ , e utilizando as definições destas operações dadas anteriormente.

É também simples mostrar que sob mudanças de base

$$\tilde{E}_i = a^k{}_i E_k \quad (\text{A.3.17})$$

com  $\det(a^k{}_i) \neq 0$ , em que as bases duais estão relacionadas por

$$\tilde{E}^j = b^j{}_m E^m \quad (\text{A.3.18})$$

com  $\det(b^j{}_m) \neq 0$ , teremos

$$\tilde{E}^j [E_i] = b^j{}_m E^m [a^k{}_i E_k] = b^j{}_k a^k{}_i \equiv \delta^j{}_i \quad (\text{A.3.19})$$

ou seja, as matrizes de transformação são inversas uma da outra. Mais ainda: sob as transformações (17) e (18) as componentes de um tensor  $T \in T_p(M)$  se transformam com

$$\tilde{T}^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_r} = b^{i_1}{}_s b^{i_2}{}_q \dots b^{i_p}{}_n a^t{}_p \dots a^h{}_r T^{s q \dots n}{}_{t \dots h} \quad (\text{A.3.20})$$

Uma operação que iremos necessitar adiante é a contração de um tensor do tipo  $(s, r)$ , ou seja, a contração do seu índice contravariante  $p$  ( $1 \leq p \leq s$ ) com seu índice covariante  $q$  ( $1 \leq q \leq r$ ), que é um tensor  $T' = C^p{}_q T = C^p{}_q T$  do tipo  $(s-1, r-1)$ , dado por

$$T' = C^p{}_q T = T^{i_1 \dots i_{p-1} i_p i_{p+1} \dots i_s}{}_{j_1 \dots j_{p-1} j_p j_{p+1} \dots j_r} \quad (\text{A.3.21})$$

$$E_{i_1} \otimes \dots \otimes E_{i_{p-1}} \otimes E_{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes E_{i_s} \otimes E^{j_1} \otimes E^{j_{p-1}} \otimes \dots \otimes E^{j_r}$$

Em particular

$C = C_1^1 : \tau_1^1(M) \rightarrow F \equiv$  (funções diferenciáveis em  $M$ ), é dado por

$$C(Y \otimes \omega) = \omega[Y] . \quad (\text{A.3.22})$$

Da mesma forma que no caso dos vetores, definimos um campo tensorial  $T$  em  $A \subset M$  como uma coleção de tensores  $T$ , um em cada ponto  $P \in A$ . Podemos também conceituar campos tensoriais como aplicações do fibrado tensorial sobre  $A \subset M$ . Para detalhes, ver as referências (103, 27, 2).

Buscaremos agora definições de tensores antissimétricos e simétricos, diferente da forma tradicional com que se conceituam tais simetrias: com o uso das componentes tensoriais. Sejam  $V \in T_P$  e  $\omega, \eta, \alpha \in T_P^*$  e sejam ainda  $\{E_i\}$  e  $\{E^j\}$  bases duais de  $T_P$  e  $T_P^*$ . Desta forma

$$\begin{aligned} T(V, \omega, \eta, \alpha) &= T(V^i E_i, \omega_j E^j, \eta_k E^k, \alpha_l E^l) = \\ &= V^i \omega_j \eta_k \alpha_l T_i^{jkl} \end{aligned} \quad (\text{A.3.23})$$

onde usamos as eqs. (5) e (15). Se, por exemplo, o tensor  $T$  tem a propriedade de antissimetria  $T_i^{jkl} = -T_i^{kjl}$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} T(V, \omega, \eta, \alpha) &= V^i \omega_j \eta_k \alpha_l T_i^{jkl} = -V^i \omega_j \eta_k \alpha_l T_i^{kjl} \\ &= E^i[V] E_j[\omega] E_k[\eta] E_l[\alpha] T_i^{kjl} = \\ &= -T_i^{kjl} E^i \otimes E_k \otimes E_j \otimes E_l (V, \eta, \omega, \alpha) \\ &= -T(V, \eta, \omega, \alpha) . \end{aligned} \quad (\text{A.3.24})$$

Assim, a propriedade de antissimetria se reflete na forma antissimétrica em que  $T$  depende do argumento. O mesmo procedimento pode ser aplicado para tensores antissimétricos em quaisquer índices e de uma ordem qualquer. Somos, (motivados pela eq. (32)), levados a dizer que um *tensor contravariante é antissimétrico* se para cada  $1 \leq p, q \leq s$ , temos

$$T(\omega^1, \dots, \omega^p, \dots, \omega^q, \dots, \omega^s) = -T(\omega^1, \dots, \omega^q, \dots, \omega^p, \dots, \omega^s). \quad (\text{A.3.25})$$

Da mesma forma, se para cada  $1 \leq p, q \leq r$  vale a igualdade

$$S(V_1, \dots, V_p, \dots, V_q, \dots, V_r) = -S(V_1, \dots, V_q, \dots, V_p, \dots, V_r) \quad (\text{A.3.26})$$

diremos que o *tensor covariante  $S$  é antissimétrico*.

De maneira semelhante, definimos tensores covariante e contravariante simétricos, em uma linguagem independente de coordenada. Não faremos isto aqui pois nos parece óbvio demais.

Um tensor covariante totalmente antissimétrico é denominado *forma exterior*. Se o tensor for de ordem  $r$ , chamaremos de  $r$ -*forma*. Com as operações de soma e multiplicação por escalar definidas pelas eqs. (6) e (7), o conjunto de tensores covariantes totalmente antissimétricos do tipo  $(0, r)$ , que denotaremos por  $F_r(T_p)$ , é um subespaço vetorial do espaço  $\tau_r^0(T_p)$ .

Em geral, o produto tensorial de dois elementos de  $F_r(T_p)$ , não é totalmente antissimétrico. No entanto, podemos dotar o espaço vetorial  $F_r(T_p)$  de uma operação de produto fechada. Sejam  $R \in F_r(T_p)$  e  $S \in F_s(T_p)$ , definimos o produto exterior de  $R$  por  $S$ , denotado por  $R \wedge S$ , através da equação

$$R \wedge S = A(R \otimes S) \quad (\text{A.3.27})$$

onde  $A$  é um operador, denominado operador de alternância sobre  $\tau_{\kappa}^0(T_p)$ , definido por

$$A : \tau_{\kappa}^0(T_p) \rightarrow F_{\kappa}(T_p) \quad (\text{A.3.28})$$

$$A(V_1, \dots, V_{\kappa}) = \frac{1}{\kappa!} \sum_{(j_1, \dots, j_{\kappa})} \epsilon_{j_1, \dots, j_{\kappa}} T(V_{j_1}, \dots, V_{j_{\kappa}})$$

onde  $\epsilon_{j_1 \dots j_{\kappa}}$  é o símbolo de Levi-Civita. Com a operação de produto exterior acima, o espaço das formas se converte em uma álgebra, conhecida por *álgebra exterior*, ou *álgebra de Grassmann*.

Mostra-se (3), que o operador  $A$  é um projetor  $A^2 = A$  e tal que se  $T \in F_{\kappa}(T_p)$ , então  $AT = T$ .

O produto exterior goza das seguintes propriedades:

i) Se  $R \in F_{\kappa}(T_p)$  e  $S \in F_{\delta}(T_p)$ , então

$$R \wedge S = (-1)^{\kappa\delta} S \wedge R \quad (\text{A.3.29})$$

ii) Se  $R, S, T$  são formas, então

$$a) (R \wedge S) \wedge T = R \wedge (S \wedge T) \quad (\text{A.3.30})$$

$$b) (aR + bS) \wedge T = aR \wedge T + bS \wedge T, \quad a, b \text{ são reais, } (\text{A.3.31})$$

que não vamos demonstrá-las aqui. Ilustraremos, no entanto, a propriedade dada pela eq. (29) acima. Sejam as 1-formas  $\omega, \alpha \in T_p^*$ , a definição de produto exterior implica que

$$\begin{aligned} \omega \wedge \alpha (V_1, V_2) &= A(\omega \otimes \alpha)(V_1, V_2) = \frac{1}{2} \{ \omega[V_1] \alpha[V_2] - \\ &- \omega[V_2] \alpha[V_1] \} = \frac{1}{2} [ \omega \otimes \alpha - \alpha \otimes \omega ] (V_1, V_2) = \end{aligned}$$

$$= - \frac{1}{2} [\alpha \otimes \omega - \omega \otimes \alpha](V_1, V_2) = - \alpha \wedge \omega(V_1, V_2). \quad (\text{A.3.32})$$

Seja  $\{E^j\}$  uma base para  $T_P^*$  e seja  $T \in F_n(T_P)$  assim

$$T = T_{i_1 \dots i_n} E^{i_1} \otimes \dots \otimes E^{i_n}.$$

Como  $T \in F_n(T_P)$ ,  $AT = T$ , e portanto

$$T = T_{i_1 \dots i_n} E^{i_1} \wedge \dots \wedge E^{i_n} \quad (i_1 < i_2 < \dots < i_n).$$

(A.3.33)

Portanto, a coleção  $\{E^{i_1} \wedge \dots \wedge E^{i_n}\}$  é composta de  $\binom{n}{n}$  elementos, e é uma base para  $F_n(T_P)$ .

#### 4 - DERIVADA EXTERIOR E DERIVADA DE LIE

Até aqui lidamos apenas com propriedades e operações algébricas de tensores em um ponto  $P$  da variedade  $M$ . Apesar de havermos conceituado campos vetoriais e campos tensoriais, não lidamos com estes conceitos. Como para haver derivação, precisamos, de alguma forma, comparar tensores ou objetos geométricos, evidentemente, para introduzirmos as derivadas mencionadas no título desta seção, necessitamos que os objetos geométricos com que iremos lidar, estejam definidos pelo menos em um subconjunto  $A \subset M$ , ou seja, necessitamos do conceito de campo sobre  $A \subset M$ , especificamente: campos tensoriais. Muitas vezes não usaremos expressões como campo vetorial ou campo tensorial, usaremos (incorretamente, a rigor!) as palavras vetores e tensores, deixando implícita ou oculta a palavra campo.

Habitualmente, no cálculo de formas, define-se a operação de derivada exterior de uma  $\kappa$ -forma, com apelo a um dado sistema de coordenadas, da seguinte forma: seja a  $\kappa$ -forma diferenciável  $\omega$  que em um dado sistema de coordenadas  $\{x^\alpha\}$  se escreve como

$$\omega = \omega_{\alpha\beta\dots\gamma\rho}(x) \overbrace{dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge \dots \wedge dx^\gamma \wedge dx^\rho}^{\kappa\text{-fatores}}. \quad (\text{A.4.1})$$

Sua derivada exterior  $d\omega$  e, por definição, a  $(\kappa+1)$ -forma

$$d\omega = \frac{\partial \omega_{\alpha\beta\dots\gamma\rho}}{\partial x^\lambda} \underbrace{dx^\lambda \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge \dots \wedge dx^\rho}_{(\kappa+1)\text{-fatores}}. \quad (\text{A.4.2})$$

Podemos, no entanto, definir a derivada exterior  $d\omega$  de um  $\kappa$ -forma  $\omega$  sem referência a nenhum sistema de coordenadas. De fato, a derivada exterior de  $\kappa$ -forma, em  $P \in M$ , resulta da aplicação do operador

$$d : F_\kappa(T_P) \longrightarrow F_{\kappa+1}(T_P) \quad (\text{A.4.3})$$

que possui as propriedades seguintes:

1) Se  $f$  é uma 0-forma (campo escalar) então:  $d_f[V] = V[f]$ , para um campo vetorial qualquer  $V$ .

2) Se  $\omega$  é uma  $\kappa$ -forma e  $\alpha$  é uma  $s$ -forma, então

$$d(\omega \wedge \alpha) = d\omega \wedge \alpha + (-1)^\kappa \omega \wedge d\alpha \quad (\text{A.4.4})$$

3) O operador  $d$  é linear, ou seja,

$$d(a\omega + b\eta) = a d\omega + b d\eta \quad (\text{A.4.5})$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $\omega, \eta$  são formas.

4) Para qualquer  $\kappa$ -forma  $\omega$ , teremos

$$d(d\omega) \equiv d^2\omega = 0. \quad (\text{A.4.6})$$

É fácil verificar (103) que esta definição de derivada exterior, através de suas propriedades, é idêntica à definição dada pela eq. (2), onde uma carta  $(U, \phi)$  foi utilizada. Por outro lado, os que adotam a definição em termos de uma carta mostram (6) que existe um único operador  $d : F_\kappa(M) \rightarrow F_{\kappa+1}(M)$ , que satisfaz as propriedades (1 - 4).

Uma  $\kappa$ -forma  $T$  é dita exata ou integrável se existe uma  $(\kappa-1)$ -forma tal que

$$T = dS.$$

Uma  $p$ -forma  $R$  é dita fechada se

$$dR = 0 \quad (\text{A.4.7})$$

Toda forma exata,  $R = dS$ , por exemplo, é fechada, pois  $dR = d^2S \equiv 0$ . A recíproca deste teorema é verdadeira, no entanto, bem mais trabalhosa de ser demonstrada. Uma demonstração em termos de componentes, pelo método de indução, pode ser encontrada na referência (31). Na Geometria Euclidiana o correspondente do resultado acima é: se  $\text{rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = 0 \iff \vec{V} = \text{grad } \phi = \vec{\nabla} \phi$ .

A segunda operação de derivação que podemos introduzir em uma variedade diferenciável  $M$ , e que também prescindir da existência de uma conexão e/ou de uma métrica, é a derivada de Lie. Sejam  $X$  e  $Y$  campos vetoriais definidos em uma variedade diferenciável  $M$ , a derivada de Lie do campo vetorial  $Y$  em relação ao campo vetorial  $X$ , indicada por  $L_X Y$ , é por definição

$$\underset{X}{L} Y = [X, Y] = XY - YX \quad (\text{A.4.8})$$

onde  $XY$  denota a composição de  $Y$  e  $X$  sobre um campo escalar  $\mathbb{F}$ . A derivada de Lie acima definida é um campo vetorial, pois satisfaz como se pode mostrar facilmente, as propriedades dadas pela eq. (2.2). Explicitamente:

$$\text{a) } \underset{X}{L}(a\mathbb{f} + b\mathbb{g}) = a \underset{X}{L}\mathbb{f} + b \underset{X}{L}\mathbb{g} \quad (\text{A.4.9})$$

$$\text{b) } \underset{X}{L}(\mathbb{f}\mathbb{g}) = \mathbb{f} \underset{X}{L}\mathbb{g} + \mathbb{g} \underset{X}{L}\mathbb{f}$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $\mathbb{f}, \mathbb{g} \in \mathbb{F}$ . A rigor, mostra-se (105) que o campo  $Z = [X, Y]$  existe e é único.

A derivada de Lie goza das seguintes propriedades facilmente verificáveis com o uso da eq. (8):

$$\text{i) } [X, Y] = -[Y, X] \quad (\text{A.4.10})$$

$$\text{ii) } [aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \quad (\text{A.4.11})$$

$$\text{iii) } [Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y] \quad (\text{A.4.12})$$

$$\text{iv) } [X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$$

(denominada identidade de Jacobi) (A.4.13)

$$\text{v) } [\mathbb{f}X, \mathbb{g}Y] = \mathbb{f}\mathbb{g}[X, Y] + \mathbb{f}X[\mathbb{g}]Y - \mathbb{g}Y[\mathbb{f}]X \quad (\text{A.4.14})$$

onde  $X, Y$  e  $Z$  são campos diferenciáveis em  $M$ ;  $a, b$  são números reais e  $\mathbb{f}, \mathbb{g}$  são campos escalares diferenciáveis.

Em uma base  $\{E_i\}$ , usando as propriedades dadas pelas eqs. (11), (12) e (14), teremos

$$[X, Y] = \left[ X^i E_i, Y^j E_j \right] = \left\{ X^i E_i [Y^k] - Y^j E_j [X^k] + C_{ij}^k X^i Y^j \right\} E_k. \quad (\text{A.4.15})$$

Onde usamos que o comutador de vetores de base  $\bar{e}$  é um novo vetor, que pode ser expresso na base original, ou seja,

$$[E_i, E_j] = C_{ij}^m E_m \quad (\text{A.4.16})$$

As funções componentes  $C_{ij}^m$  são denominadas *coeficientes de estrutura*, que, particularmente, no caso da variedade  $M$  ser um grupo de Lie são constantes, denominadas *constantes de estrutura*. As propriedades (i) e (iv) implicam que

$$C_{ij}^m = -C_{ji}^m \quad (\text{A.4.16})$$

e

$$E_k [C_{jn}^m] + E_n [C_{kj}^m] + E_j [C_{nk}^m] + C_{jn}^l C_{kt}^m + C_{kj}^l C_{nt}^m + C_{nk}^l C_{jt}^m = 0 \quad (\text{A.4.17})$$

que são restrições sobre as funções coeficientes de estrutura.

Uma base de coordenadas tem a propriedade:  $(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \xi = 0$ . Pode-se mostrar (104) também que, se  $C_{\mu\nu}^\lambda = 0$  a base  $\bar{e}$  é uma base de coordenadas. A expressão dada pela eq. (15) toma, em uma base de coordenadas, a seguinte forma

$$[X, Y] = \{X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j\} \partial_j \quad (\text{A.4.18})$$

assim

$$\left(\frac{L}{X} Y\right)^j = [X, Y]^j = X^i Y^j |_{,i} - Y^i X^j |_{,i} \quad (\text{A.4.19})$$

onde usamos a notação  $\partial_j [V^k] = \frac{\partial V^k}{\partial X^i} \equiv V^k |_{,j}$ .

Como a operação derivada de Lie  $\bar{e}$  é de extrema importância no tratamento de simetrias de uma dada variedade Riemanniana  $M$ , achamos por bem apresentar outra maneira de defini-la

(tal como Yano (16)). Esta segunda definição, nos permitirá fazer uma imagem geométrica da operação de derivação (de Lie), e justificará o batismo: derivada de Lie, para o colchete de dois campos vetoriais.

Considere um ponto  $P \in M$  e duas vizinhanças de coordenada  $U$  e  $U'$ , tais que  $U \subset U'$ . Seja  $\{x^\alpha\}$  um sistema de coordenadas admissível em  $U$ . Neste sistema de coordenadas uma transformação de ponto  $T : P \rightarrow Q$ , onde  $P, Q \in U'$ , é descrita por uma função, digamos  $f$ , das coordenadas locais

$$x_Q^\alpha = f^\alpha(x_P) \quad (\text{A.4.20})$$

e leva, evidentemente, o ponto  $P \in U'$  de coordenadas  $x_P^\alpha$  no ponto  $Q \in U'$  de coordenadas  $x_Q^\alpha$  (veja fig. A.4.1).

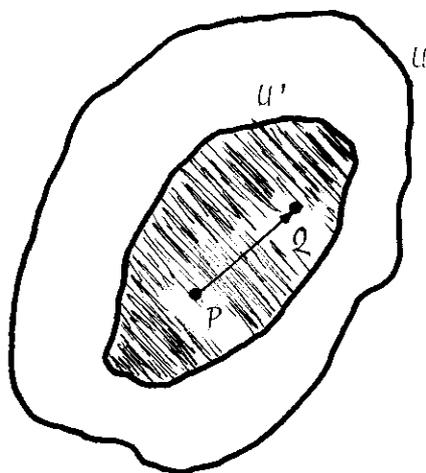


Figura A.4.1 - Ilustra a transformação de pontos  $T : P \rightarrow Q$ , em uma vizinhança  $U' \subset U$ .

Utilizando a transformação inversa  $T^{-1} : Q \rightarrow P$  podemos definir em  $U'$  um sistema de coordenadas  $\{x'^\alpha\}$ , de forma que as coordenadas de  $P$  no novo sistema sejam iguais às co-

ordenadas de  $Q$  no antigo sistema, isto é, definimos o novo sistema pela transformação

$$x'_P{}^\alpha = x_Q^\alpha \quad (\text{A.4.21})$$

ou, utilizando a eq. (20)

$$x'_P{}^\alpha = \delta^\alpha(x_P) \quad (\text{A.4.22})$$

que, evidentemente, é uma transformação de coordenadas<sup>(\*)</sup> definida na interseção não vazia  $U' = U \cap U'$ , ou seja, definida vizinhança  $U'$  de  $P \in M$ .

Considere agora que  $P$  e  $Q$  são infinitesimalmente próximos, e que por eles passe a curva integral  $\Gamma$ , de um campo vetorial  $X$ , definido na vizinhança  $U'$ , pelo menos.

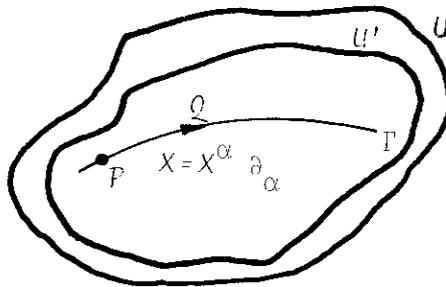


Figura A.4.2 - Dois pontos infinitesimalmente próximos  $P \rightarrow Q$  sobre uma curva  $\Gamma$  numa vizinhança  $U' \subset U$ .

Considere também que temos, definido em  $U'$ , um campo vetorial  $Y$ . Em um sistema de coordenadas  $\{x^\alpha\}$ , a transformação de  $T : P \rightarrow Q$ , tem a seguinte forma:

(\*) O processo  $\{x^\alpha\} \rightarrow \{x'^\alpha\}$  é denominado de "arrastamento" do sistema de coordenadas.

$$x_Q^\alpha = x_P^\alpha + \epsilon X^\alpha(x_P) = (1 + \epsilon X) \left[ x_P^\alpha \right] \quad (\text{A.4.23})$$

Conforme vimos  $T^{-1}$  induz uma transformação de coordenadas, denominada de arrastamento, dada por  $x_P'^\alpha = x_Q^\alpha$ , ou seja,

$$x_P'^\alpha = x_Q^\alpha = x_P^\alpha + \epsilon X^\alpha(x_P) = (1 + \epsilon X) \left[ x_P^\alpha \right] \quad (\text{A.4.24})$$

ou, omitindo o índice inferior,

$$x'^\alpha = x^\alpha + \epsilon X^\alpha(x) = (1 + \epsilon X) \left[ x^\alpha \right] \quad (\text{A.4.25})$$

que vale na vizinhança  $U'$ .

No sistema de coordenadas  $\{x^\alpha\}$  o campo  $Y$  é dado por

$$Y = Y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

e, sob transformação infinitesimal de coordenadas  $\{x^\alpha\} \rightarrow \{x'^\alpha\}$ , definida pela eq. (24), teremos:

$$Y'^\alpha(x'_P) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} (x_P) Y^\rho(x_P) \quad (\text{A.4.26})$$

ou, usando a eq. (24),

$$Y'^\alpha(x'_Q) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} (x_P) Y^\rho(x_P) . \quad (\text{A.4.27})$$

A equação acima, define um transporte do campo  $Y$  ( $Y(P) \rightarrow Y(Q)$ ), que denominaremos de *transporte inalterado*. Posto isto, definiremos a *derivada de Lie* do campo vetorial  $Y$  em relação ao campo vetorial  $X$  por

$$\left( \underset{X}{L} Y \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Y^\alpha(x_Q) - Y'^\alpha(x_Q)}{\epsilon} \quad (\text{A.4.28})$$

Usando as eqs. (24) ou (25) e (27), é fácil mostrar que em primeira ordem em  $\epsilon$  a definição acima se reduz à dada pela eq. (19).

O procedimento utilizado acima, na definição da derivada de Lie de um campo vetorial, poderia ser aplicado ou transposto, na conceituação da derivada de Lie de um objeto geométrico qualquer (16). Como, no entanto, optamos por uma linguagem independente de coordenadas, definiremos a derivada de Lie de um campo escalar (0-forma)  $\phi$  por

$$\frac{L}{X} \phi = X[\phi] \tag{A.4.29}$$

e a derivada de Lie de uma 1-forma  $\omega$  por

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{X} \omega\right)[Y] &= X[\omega[Y]] - \omega\left[\frac{L}{X} Y\right] \\ &= \frac{L}{X}(\omega[Y]) - \omega\left[\frac{L}{X} Y\right] \end{aligned} \tag{A.4.30}$$

onde  $Y$  é um campo vetorial arbitrário. Relativamente à base canônica, utilizando as eqs. (15) e (30), teremos

$$\left(\frac{L}{X} \omega\right)_\alpha = X^\alpha \omega_\lambda|_\alpha + \omega_\lambda X^\lambda|_\alpha \tag{A.4.31}$$

que é a expressão da componente  $\alpha$  da derivada de Lie da 1-forma  $\omega$ .

As eqs. (8), (29) e (30) nos sugerem a definição da derivada de Lie de uma campo tensorial  $T$  do tipo  $(s, r)$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{X} T\right)[y_1, \dots, y_r, \omega^1, \dots, \omega^s] &= \frac{L}{X}(T(y_1, \dots, y_r, \omega^1, \dots, \omega^s)) \\ &- T\left[\frac{L}{X} y_1, y_2, \dots, y_r, \omega^1, \dots, \omega^s\right] - T\left[y_1, \frac{L}{X} y_2, y_3, \dots, y_r, \omega^1, \dots, \omega^2\right] \\ &- \dots \dots \dots - T\left[y_1, \dots, y_r, \omega^1, \dots, \frac{L}{X} \omega^s\right] \end{aligned} \tag{A.4.32}$$

onde  $y_1, \dots, y_n$  e  $\omega^1, \dots, \omega^s$  são, respectivamente, campos de vetores e campos de formas arbitrários. É imediato verificar que quando  $s = 0, n = 1$ , a expressão acima reproduz a eq. (8) e quando  $s = 1, n = 0$ , teremos a eq. (30).

Na base natural, em termos de componentes, podemos com o uso da eq. (32) mostrar que

$$\begin{aligned} \left( \frac{L T}{X} \right)^{\alpha\beta\dots\rho}_{\mu\nu\dots\lambda} &= X^\epsilon T^{\alpha\beta\dots\rho}_{\mu\nu\dots\lambda} |_\epsilon \\ &- T^{\epsilon\alpha\dots\rho}_{\mu\nu\dots\lambda} X^\alpha |_\epsilon - \dots - T^{\alpha\beta\dots\epsilon}_{\mu\nu\dots\lambda} X^\rho |_\epsilon \\ &+ T^{\alpha\beta\dots\rho}_{\epsilon\nu\dots\lambda} X^\epsilon |_\mu + \dots + T^{\alpha\beta\dots\rho}_{\mu\nu\dots\epsilon} X^\epsilon |_\lambda \end{aligned} \quad (\text{A.4.33})$$

vale.

As propriedades abaixo podem ser mostradas em dificuldades

$$i) \quad \frac{L(T \otimes S)}{X} = \left( \frac{L T}{X} \right) \otimes S + T \otimes \left( \frac{L S}{X} \right) \quad (\text{A.4.34})$$

$$ii) \quad \frac{L(\omega \wedge \alpha)}{X} = \left( \frac{L \alpha}{X} \right) \wedge \omega + \omega \wedge \left( \frac{L \omega}{X} \right) \quad (\text{A.4.35})$$

$$iii) \quad \frac{L C T}{X} = C \left( \frac{L T}{X} \right) \quad (\text{A.4.36})$$

onde  $T$  e  $S$  são tensores,  $\omega$  e  $\alpha$  são formas e  $C$  é o operador de contração do  $p$ -ésimo índice contravariante com  $p$ -ésimo índice covariante.

Para uma 0-forma  $f$  existe uma relação entre sua derivada de Lie e sua derivada exterior, a saber:

$$\frac{L f}{X} = X[f] = df[X]$$

ẽ, portanto, natural indagar sobre a possibilidade de uma rela-  
 ao entre as derivadas exterior e de Lie de uma p-forma. De fato,  
 uma tal relaao existe. No caso de uma 1-forma, tal relaao nos  
 será de grande utilidade, e a obteremos agora. Da eq. (30), te-  
 remos

$$\left(\frac{L}{X}\omega\right)[Y] - Y\omega[X] = X\omega[Y] - Y\omega[X] - \omega\left[\frac{L}{X}Y\right] \quad (\text{A.4.37})$$

Por outro lado, na base canônica, teremos

$$\left(\frac{L}{X}\omega\right)[Y] - Y\omega[X] = (\omega_{\alpha|\lambda} - \omega_{\lambda|\alpha})X^\lambda Y^\alpha$$

e como também

$$\omega = \omega_\alpha dx^\alpha \implies d\omega = \omega_{\alpha|\lambda} dx^\lambda \wedge dx^\alpha = \frac{1}{2} (\omega_{\alpha|\lambda} - \omega_{\lambda|\alpha}) dx^\lambda \wedge dx^\alpha \quad (\text{A.4.38})$$

teremos

$$d\omega[X, Y] = \frac{1}{2} (\omega_{\alpha|\lambda} - \omega_{\lambda|\alpha}) X^\lambda Y^\alpha \quad (\text{A.4.39})$$

e, finalmente, usando as eqs. (39), (38) e (37), resulta

$$d\omega[X, Y] = \frac{1}{2} X[Y] - Y\omega[X] - \omega\left[\frac{L}{X}Y\right] \quad (\text{A.4.40})$$

que ẽ a expressão que desejvamos.

Particularmente, se  $\omega = E^k$ , teremos:

$$\begin{aligned} dE^k &= dE^k(E_i, E_j)E^i \wedge E^j = -\frac{1}{2} E^k \left[\frac{L}{E_i} E_j\right] E^i \wedge E^j = \\ &= -\frac{1}{2} E^k \left[C_{ij}^m E_m\right] E^i \wedge E^j = -\frac{1}{2} C_{ij}^k E^i \wedge E^j \end{aligned} \quad (\text{A.4.41})$$

onde usamos que  $E^k[E_m] = \delta_m^k$ .

Para concluir, mencionamos, sem demonstração, que para qualquer  $p$ -forma  $\omega$  vale a equação

$$d(L_X \omega) = L_X(dw) \quad (\text{A.4.42})$$

ou  $X$  é um campo arbitrário em  $M$  (1).

### 5 - DERIVADA COVARIANTE, TORÇÃO E A 1ª EQUAÇÃO DE ESTRUTURA DE CARTAN

No que fizemos até aqui, ou seja, a construção da álgebra tensorial e da álgebra exterior, e a definição da derivada exterior e da derivada de Lie (para ser resumido), não exigimos que a nossa variedade,  $M$ , fosse munida de uma conexão. Para conceituarmos derivada covariante, no entanto, necessitamos exigir que nossa variedade seja dotada de uma conexão afim, que é uma estrutura adicional sobre  $M$ .

Indicaremos por  $\tau_0^1(M)$  o conjunto dos campos vetoriais em  $M$ . Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é um operador diferenciável que associa a cada elemento  $X \in \tau_0^1(M)$  um mapeamento  $\nabla_X : \tau_0^1(M) \rightarrow \tau_0^1(M)$ , que satisfaz as seguintes propriedades

$$i) \quad \nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z \quad (\text{A.5.1})$$

$$ii) \quad \nabla_X (aY + bZ) = a \nabla_X Y + b \nabla_X Z \quad (\text{A.5.2})$$

$$iii) \quad \nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X[f] Y \quad (\text{A.5.3})$$

onde  $X, Y, A \in \tau_0^1(M)$  e  $f, g$  são funções definidas na variedade  $M$ . De outra maneira, poderíamos definir uma conexão afim  $\nabla$  em  $M$  como

$\nabla : \tau_0^1(M) \times \tau_0^1(M) \rightarrow \tau_0^1(M)$ , que indicamos por  $(X; Y) \xrightarrow{\nabla_X} \nabla_X Y$ , e que satisfaz as propriedades (i), (ii) e (iii). O operador  $\nabla_X$  é chamado de operador de derivação covariante em relação a  $X$ , e  $\nabla_X Y$  é um campo vetorial, denominado derivada covariante de  $Y$  na direção  $X$ .

Sejam  $\{E^i\}$  e  $\{E_j\}$  bases duais  $M$ . Desejamos encontrar uma expressão para  $\nabla_X Y$  em termos de uma base arbitrária. Como o operador  $\nabla_X$  mantém o caráter vetorial, podemos escrever

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ji}^k E_k. \quad (\text{A.5.4})$$

Esta equação define os coeficientes de conexão  $\Gamma_{ij}^k$ , pois

$$E^m \left[ \nabla_{E_i} E_j \right] = \Gamma_{ji}^m. \quad (\text{A.5.5})$$

De forma que, se  $X = X^i E_i$  e  $Y = Y^j E_j$ , teremos

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= X^i \nabla_{E_i} (Y^j E_j) = X^i \left\{ E_i \left[ Y^j \right] + Y^m \Gamma_{mi}^j \right\} E_j \\ &= \left\{ X^i E^j \left[ Y \right] + \Gamma_{mi}^j E^m \left[ Y \right] E^i \left[ X \right] \right\} E_j. \end{aligned} \quad (\text{A.5.6})$$

Onde utilizamos as propriedades expressas pelas eqs. (1), (2) e (3). Particularmente, se  $X = \partial_\ell$  a  $j$ -ésima componente de  $\nabla_X Y$  é

$$(\nabla_{\partial_\ell} Y)^j = (Y^j|_\ell + \Gamma_{m\ell}^j Y^m) \equiv Y^j|_{|\ell} \quad (\text{A.5.6})$$

que é a definição usual da derivada covariante de um campo vetorial  $Y$  em termos de suas componentes.

Podemos estender a definição de derivada covariante a campos tensoriais do tipo  $(s, \kappa)$ , através das propriedades seguintes:

- a) Se  $T$  é um campo tensorial do tipo  $(s, \kappa)$ , então  $\nabla_X T$  é um tensor do mesmo tipo que  $T$ , e tal que

$$\nabla_{fX+gY} T = f \nabla_X T + g \nabla_Y T \quad (\text{A.5.7})$$

- b) O operador  $\nabla_X$  aplicado a funções obedece a equação:

$$\nabla_X f = X[f] \quad (\text{A.5.8})$$

- c) Se  $T$  e  $S$  são campos tensoriais arbitrários, então:

$$\nabla_X (S \otimes T) = (\nabla_X S) \otimes T + S \otimes (\nabla_X T) \quad (\text{A.5.9})$$

- d)  $\nabla_X$  comuta com a contração  $C$  no sentido que o resultado de aplicar  $\nabla_X$  e  $C$  a um dado campo tensorial, é independente da ordem de aplicação.

Usando a propriedade expressa pela eq. (9), o fato que  $f \in F$  é uma  $0$ -forma e eq. (8), teremos:

$$\nabla_X f T \equiv \nabla_X f \otimes T = X[f] T + f \nabla_X T \quad (\text{A.5.10})$$

para um tensor  $T$  arbitrário.

A propriedade (c) aplicada ao particular produto tensorial  $Y \otimes \omega$  onde  $Y \in \tau_0^1(M)$  e  $\omega \in \tau_1^0(M)$ , fornece

$$\nabla_X (Y \otimes \omega) = (\nabla_X Y) \otimes \omega + Y \otimes \nabla_X \omega \quad (\text{A.5.11})$$

onde  $X \in \tau_1^0(M)$ . Aplicando o operador de contração a ambos os mem

bros da eq. (11), resulta:

$$\begin{aligned} (\nabla_X \omega) [Y] &= \nabla_X \omega [Y] - \omega [\nabla_X Y] = \\ &= X [\omega [Y]] - \omega [\nabla_X Y] \end{aligned} \quad (\text{A.5.12})$$

isto porque, de acordo com as propriedades do operador  $C$ , devemos ter

$$\begin{aligned} C \nabla_X (Y \otimes \omega) &= \nabla_X C(Y \otimes \omega) = \nabla_X \omega [Y] \\ C \left[ \left( \nabla_X Y \right) \otimes \omega \right] &= \omega \left[ \nabla_X Y \right] = \\ C \left[ Y \otimes \nabla_X \omega \right] &= \left( \nabla_X \omega \right) [Y] \end{aligned} \quad (\text{A.5.13})$$

e ainda  $C_q^p(T+S) = C_q^p(T) + C_q^p(S)$  como é mostrado pelo Hicks (104).

Particularmente, se  $X = E_i$ ,  $Y = E_m$   $\omega = E^k$  onde  $E^k [E_m] = \delta_j^k$ , a eq. (12) nos fornece

$$\left( \nabla_{E_i} E^k \right) [E_m] = - E^k \left[ \nabla_{E_i} E_m \right] = - \Gamma_{mi}^k$$

ou seja,

$$\left( \nabla_{E_i} E^k \right)_m = - \Gamma_{mi}^k \Rightarrow \nabla_{E_i} E^k = - \Gamma_{mi}^k E^m \quad (\text{A.5.14})$$

Desta forma, a expressão da derivada de uma 1-forma  $\omega$  em relação a um vetor de base  $E_i$  é dada por

$$\nabla_{E_i} \omega = \nabla_{E_i} \omega_m E^m = \{ E_i [\omega_k] - \omega_m \Gamma_{ki}^m \} E^k \quad (\text{A.5.15})$$

onde usamos a eq. (10). Se  $E_i = \partial_i$ , resulta que a  $k$ -ésima componente de  $\nabla_{\partial_i} \omega$ , é

$$(\nabla_{\partial \dot{\lambda}} \omega)_k = \omega_k | \dot{\lambda} - \Gamma_{k\dot{\lambda}}^m \omega_m \equiv \omega_k || \dot{\lambda} \quad (\text{A.5.16})$$

que é a expressão da derivada covariante de uma 1-forma em termos de suas componentes.

Da mesma forma que procedemos com a derivada de Lie, as eqs. (8), (12) e as propriedades acima, nos sugerem a seguinte definição para a derivada covariante de um campo tensorial do tipo  $(s, r)$

$$\begin{aligned} (\nabla_X T) [y_1, \dots, y_r, \omega^1, \dots, \omega^s] &= \nabla_X (T(y_1, \dots, y_r, \omega^1, \dots, \omega^s)) \\ &- T[\nabla_X y_1, \dots, y_r, \omega^1, \dots, \omega^s] - \dots - T[y_1, \dots, \nabla_X y_r, \omega^1, \dots, \omega^s] \\ &- \dots - T[y_1, \dots, y_r, \nabla_X \omega^1, \dots, \omega^s] - \dots - T[y_1, \dots, y_r, \omega^1, \dots, \nabla_X \omega^s] \end{aligned} \quad (\text{A.5.17})$$

Tal equação, pode ser obtida usando a regra de Leibnitz na expressão  $\nabla_X (T \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_r \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^s)$  e contraindo-se em todas as posições; procedimento análogo ao feito para encontrar a eq. (12).

A título de ilustração calcularemos  $\nabla_X g$ , onde  $g$  é um tensor de segunda ordem covariante.

$$\begin{aligned} (\nabla_X g) [Y, Z] &= \nabla_X (g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = \\ &= X[g(Y, Z)] - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \end{aligned}$$

Se  $X = E_m$ ,  $Y = E_i$ ,  $Z = E_j$ , resulta

$$(\nabla_{E_m} g)(E_i, E_j) = (\nabla_{E_m} g)_{ij} = E_m[g_{ij}] - \Gamma_{im}^\alpha g_{\alpha j} - \Gamma_{jm}^\beta g_{i\beta} \quad (\text{A.5.18})$$

onde usamos que  $g = g_{\alpha\beta} E^\alpha \otimes E^\beta$  e a eq. (4).

Consideraremos no que se segue, que a variedade  $M$  é munida de uma conexão  $\nabla$ . Neste caso, podemos definir o campo vetorial

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - L_X Y \quad (\text{A.5.19})$$

Usando as propriedades dadas pelas eqs. (4.10), (4.14), (1) e (3) é imediato verificar que

$$T(X, Y) = T(Y, X) \quad (\text{A.5.20})$$

$$T(\delta X, Y) = \delta T(X, Y)$$

O mapeamento  $(X, Y, \omega) \rightarrow \omega[T(X, Y)]$  é uma aplicação multilinear sobre  $\tau_0^1(M) \times \tau_0^1(M) \times \tau_1^0(M)$  e define, desta forma, um campo tensorial do tipo (1, 2) em  $M$ . Tal campo tensorial é chamado de *torção*.

Nosso objetivo agora é obter a primeira equação de estrutura de Cartan. Antes porém, vamos definir as 1-forma de conexão por

$$\omega_m^j = \Gamma_{m\lambda}^j E^\lambda \quad (\text{A.5.21})$$

A componente  $T^j$  do vetor que define a torção (eq. (19)), pode ser calculada facilmente. Em termos das bases  $\{E_\lambda\}$  e  $\{E^j\}$ , teremos

$$\begin{aligned} E^j \left[ \nabla_X Y - \nabla_Y X \right] &= X E^j [Y] - Y E^j [X] + \Gamma_{m\lambda}^j E^\lambda [X] Y^m - \Gamma_{m\lambda}^j E^\lambda [Y] X^m = \\ &= X E^j [Y] - Y E^j [X] + \omega_m^j [X] E^m [Y] - \omega_m^j [Y] E^m [X] = \\ &= X E^j [Y] - Y E^j [X] + 2 A(\omega_m^j \otimes E^m) (X, Y) = \end{aligned} \quad (\text{A.5.22})$$

$$= X E^j [Y] - Y E^j [X] + 2(\omega_m^j \wedge E^m)(X, Y)$$

onde empregamos as eqs. (6), (21) e (3.27). Assim, como  $T^j = E^j [T]$ ; da eq. (19) teremos

$$T^j(X, Y) = X E^j [Y] - Y E^j [X] - E^j \left[ \frac{L}{X} Y \right] + 2(\omega_m^j \wedge E^m)(X, Y) \quad (\text{A.5.23})$$

ou, utilizando a eq. (4.40)

$$\frac{1}{2} T^j(X, Y) = (dE^j + \omega_m^j \wedge E^m)(X, Y) \quad (\text{A.5.24})$$

Temos, desta forma, a primeira equação de estrutura de Cartan

$$T^j = dE^j + \omega_m^j \wedge E^m \quad (\text{A.5.25})$$

onde  $\omega_m^j$  são as 1-formas de conexão definidas pela eq. (21).

Uma conexão  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é dita simétrica quando  $T = 0$ . Neste caso, a 2ª equação de estrutura de Cartan torna-se

$$dE^j = - \omega_m^j \wedge E^m. \quad (\text{A.5.26})$$

Lembramos que na Relatividade Geral a hipótese  $T = 0$  é feita, e a 1ª equação de estrutura de Cartan toma a forma dada pela eq. (26).

Empregando as eqs. (19), (14) e (4.16), temos que as componentes do tensor  $\tau$  de torção são

$$\tau_{jm}^i \equiv E^i T(E_j, E_m) = \Gamma_{mj}^i - \Gamma_{jm}^i - C_{jm}^i \quad (\text{A.5.27})$$

se  $\tau = 0$ , ou equivalentemente, se  $T=0$ , resulta

$$C_{jm}^i = \Gamma_{mj}^i - \Gamma_{jm}^i \quad (\text{A.5.27a})$$

na base canônica,  $[\partial_j, \partial_m] = 0 \Rightarrow C_{jm}^i = 0$ , e portanto

$$\Gamma_{mj}^i = \Gamma_{jm}^i \quad (\text{A.5.28})$$

Desta forma, a palavra simétrica para designar a conexão, quando  $T = 0$ , fica justificada, ou seja, na base canônica  $T = 0$  implica na simetria dos índices inferiores da conexão. É importante acentuar, no entanto, que esta simetria é particular: só ocorre na base de coordenadas, ou seja, quando  $C_{jm}^i = 0$ , e em variedades sem torção.

No que se segue, faremos a hipótese que  $T = 0$ . Neste caso, a eq. (26) pode, com o uso da eq. (21) e (4.41), ser posta na forma

$$dE^j = \Gamma_{mk}^j E^m \wedge E^k = -\frac{1}{2} C_{mk}^j E^m \wedge E^k \quad (\text{A.5.29})$$

Para finalizar, observamos que em variedades onde  $T = 0$ , a derivada parcial das eqs. (4.2) e (4.33) pode ser substituída pela derivada covariante na direção dos campos tangentes às linhas coordenadas, ou seja, a barra simples pode ser trocada pela dupla barra nas eqs. (4.2) e (4.33).

## 6 - CURVATURA E SEGUNDA EQUAÇÃO DE ESTRUTURA DE CARTAN

A curvatura  $R$  em uma variedade  $M$  é uma lei que associa a cada par de campos  $X, Y \in \tau_0^1(M)$  uma aplicação  $R(X, Y) : \tau_0^1(M) \rightarrow \tau_0^1(M)$  dada por

$$R(X, Y) [Z] = \nabla_X (\nabla_Y Z) - \nabla_Y (\nabla_X Z) - [\nabla_{[X, Y]} Z] \quad (\text{A.6.1})$$

onde  $Z \in \tau_0^1(M)$  e  $\nabla$  é a conexão em  $M$ .

A curvatura  $R$  goza das seguintes propriedades:

i)  $R$  é bilinear, ou seja,

$$R(fX + gY, Z) = fR(X, Z) + gR(Y, Z) \quad (\text{A.6.2})$$

$$R(X, fY + gZ) = fR(X, Y) + gR(X, Z) \quad (\text{A.6.3})$$

onde  $f, g \in F$  e  $X, Y, Z \in \tau_0^1(M)$ .

ii) O operador curvatura é linear para todo par de campos vetoriais  $X, Y \in \tau_0^1(M)$ , isto é,

$$R(X, Y) [Z + W] = R(X, Y) Z + R(X, Y) W \quad (\text{A.6.4})$$

$$R(X, Y) [fZ] = fR(X, Y) Z \quad (\text{A.6.5})$$

iii)  $R$  é antissimétrico

$$R(X, Y) = -R(Y, X), \quad (\text{A.6.6})$$

A verificação de tais propriedades pode ser feita sem grandes dificuldades com o uso da eq. (1) e das propriedades das derivadas de Lie e covariante. Deixamos tal tarefa a cargo do leitor.

Usando  $R(X, Y)$  podemos definir um campo tensorial do tipo (1, 3), denominado tensor de curvatura de Riemann, ou simplesmente, tensor de curvatura. A definição de tal tensor é:

$$R(X, Y, Z, \omega) = \omega [R(X, Y) [Z]] \quad (\text{A.6.7})$$

onde  $\omega$  é uma 1-forma diferencial. Mais precisamente, a equação acima define um mapeamento  $(X, Y, Z, \omega) \rightarrow \omega [R(X, Y) [Z]]$ , com as propriedades de linearidade exigidas na definição de tensores, e que é uma aplicação de  $\tau_0^1(M) \times \tau_0^1(M) \times \tau_0^1(M) \rightarrow F(M)$ .

Para uma base  $\{E_i\}$ ,  $R(E_i, E_j)[E_k]$  é um campo vectorial

$$R(E_i, E_j)[E_k] \equiv R^m_{kij} E_m \quad (A.6.8)$$

onde  $R^m_{kij}$  é um conjunto de funções denominadas componentes do tensor de curvatura.

Na base de coordenadas ( $X = X^\ell \partial_\ell$ ;  $[\partial_k, \partial_m] = 0$ ), teremos

$$(R(\partial_i, \partial_j)[X])^\ell = X^\ell \parallel j \parallel i - X^\ell \parallel i \parallel j \quad (A.6.9)$$

que implica

$$X^\ell \parallel j \parallel i - X^\ell \parallel i \parallel j = R^{\ell}_{kij} X^k \quad (A.6.10)$$

que é a equação usualmente utilizada na definição do tensor de Riemann.

Usando as eqs. (5.6) e (5.21), teremos

$$\begin{aligned} \nabla_{X Y}(\nabla Z) &= \{X Y E^k[Z] + \Gamma^k_{mi} E^i[Y] X E^m[Z] + \\ &+ X[\Gamma^k_{mi} E^i[Y]] E^m[Z] + \Gamma^k_{mi} E^i[X] Y E^m[Z] + \\ &+ \Gamma^k_{mi} E^i[X] \Gamma^m_{\ell i} E^i[Y] E^\ell[Z]\} E_k = \\ &= \{X Y E^k[Z] + \omega^k_m[Y] X E^m[Z] + E^m[Z] X \omega^k_m[Y] + \\ &+ \omega^k_m[X] Y E^m[Z] + \omega^k_m[X] \omega^m_\ell[Y] E^\ell[Z]\} E_k \end{aligned} \quad (A.6.11)$$

De maneira que

$$\nabla_{X Y}(\nabla Z) - \nabla_{Y X}(\nabla Z) = \{([\!X, Y\!] E^k[Z]) + (X \omega^k_\ell[Y] -$$

$$- y \omega_{\ell}^k [X] + \omega_m^k [X] \omega_{\ell}^m [Y] - \omega_m^k [Y] \omega_{\ell}^m [X] E^{\ell} [Z] \} E_k$$

De maneira que

$$\begin{aligned} \nabla_X (\nabla_Y Z) - \nabla_Y (\nabla_X Z) &= \{ ([X, Y] E^k [Z]) + (X \omega_{\ell}^k [Y] - \\ &- Y \omega_{\ell}^k [X] + \omega_m^k [X] \omega_{\ell}^m [Y] - \omega_m^k [Y] \omega_{\ell}^m [X]) E^{\ell} [Z] \} E_k \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \nabla_{[X, Y]} Z &= \{ [X, Y] E^k [Z] + \Gamma_{m\ell}^k E^{\ell} \left[ \frac{L}{X} Y \right] E^m [Z] \} E_k = \\ &= \{ [X, Y] E^k [Z] + \omega_m^k \left[ \frac{L}{X} Y \right] E^m [Z] \} E_k. \end{aligned} \quad (A.6.12)$$

Assim, levando as eqs. (11) e (12) na eq. (1), teremos

$$\begin{aligned} R(X, Y) [Z] &= \{ (X \omega_{\ell}^k [Y] - Y \omega_{\ell}^k [X] - \omega_{\ell}^k \left[ \frac{L}{X} Y \right] + \\ &+ \omega_m^k [X] \omega_{\ell}^m [Y] - \omega_m^k [Y] \omega_{\ell}^m [X]) E^{\ell} [Z] \} E_k \end{aligned} \quad (A.6.13)$$

usando as eqs. (4.40) e (3.27), resulta

$$\begin{aligned} R(X, Y) [Z] &= 2 \{ d\omega_{\ell}^k (X, Y) + A(\omega_m^k \otimes \omega_{\ell}^m) (X, Y) \} E^{\ell} [Z] E_k = \\ &= 2 (d\omega_{\ell}^k + \omega_m^k \wedge \omega_{\ell}^m) (X, Y) E^{\ell} [Z] E_k. \end{aligned} \quad (A.6.14)$$

Definiremos 2-forma de curvatura por

$$\Omega_{\ell}^k = d\omega_{\ell}^k + \omega_m^k \wedge \omega_{\ell}^m. \quad (A.6.15)$$

Esta equação é denominada *segunda equação de estrutura de Cartan* e nos permitirá, como veremos adiante, o cálculo das componentes do tensor de Riemann. A eq. (14) torna-se

$$\frac{1}{2} R(X, Y) [Z] = \Omega_{\ell}^k (X, Y) E^{\ell} [Z] E_k. \quad (A.6.16)$$

Se  $X = E_i$ ,  $Y = E_j$  e  $Z = E_q$ , teremos

$$\frac{1}{2} R(E_i, E_j) [E_q] = \Omega_{\ell}^k (E_i, E_j) E^{\ell} [E_q] E_k =$$

$$= \Omega^k_q (E_i, E_j) E_k. \quad (\text{A.6.17})$$

As componentes do tensor de Riemann em termos da 2-forma de curvatura  $\bar{\omega}$  é então obtida por

$$\frac{1}{2} R^p_{qij} = \frac{1}{2} E^p [R(E_i, E_j) [E_q]] = \Omega^p_q (E_i, E_j). \quad (\text{A.6.18})$$

Logo

$$\Omega^p_q = \Omega^p_q (E_i, E_j) E^i \wedge E^j = \frac{1}{2} R^p_{qij} E^i \wedge E^j \quad (\text{A.6.19})$$

Portanto, como mencionamos acima, a eq. (15) e a eq. (19), nos permitem obter as componentes do tensor de curvatura, conhecidas as componentes da 2-forma  $\Omega^p_q$ .

Tomando  $X = E_i$ ,  $Y = E_j$ ,  $Z = E_q$  na eq. (13) acima, teremos

$$\begin{aligned} R(E_i, E_j) [E_q] &= \{E_i \omega^k_\ell [E_j] - E_j \omega^k_\ell [E_i] - \omega^k_\ell [L_{E_i} E_j] + \\ &+ \omega^k_m [E_i] \omega^m_\ell [E_j] - \omega^k_m [E_j] \omega^m_\ell [E_i] \delta^{\ell}_q\} E_k = \\ &= \{E_i \Gamma^k_{qj} - E_j \Gamma^k_{qi} - \Gamma^k_{qs} C^s_{ij} + \Gamma^k_{mi} \Gamma^m_{qj} - \Gamma^k_{mj} \Gamma^m_{qi}\} E_k, \end{aligned} \quad (\text{A.6.20})$$

Portanto

$$\begin{aligned} R^p_{qij} &= E^p [R(E_i, E_j) [E_q]] = \\ &= E_i \Gamma^p_{qj} - E_j \Gamma^p_{qi} + \Gamma^p_{mi} \Gamma^m_{qj} - \Gamma^p_{mj} \Gamma^m_{qi} - C^m_{ij} \Gamma^p_{qm} \end{aligned} \quad (\text{A.6.21})$$

Na base de coordenadas  $E_i = \partial_i$ ,  $[\partial_j, \partial_k] = 0 \Rightarrow C^m_{ij} = 0$  e teremos a expressão usual de  $R^p_{qij}$ .

Do formalismo apresentado, podemos extrair três pro-

priedades de simetria do tensor de Riemann, a saber: a antissimetria no último par de índices (consequência da eq. 6), a identidade cíclica (consequência de  $R(X; Y)[Z] + R(Z, X)[Y] + R(Y, Z)[X] = 0$ , que resulta ser a identidade de Jacobi), e a identidade de Bianchi ( $R^p_{q[ij][k]} = 0$ ). Para detalhes, ver Hawking, Carmo e Hicks (1, 105, 104). As outras simetrias do tensor de Riemann, como a antissimetria no primeiro par de índices e a simetria nos pares índices, exigem que nossa variedade seja dotada de uma métrica, para que possamos passar de componentes contra para covariante.

## 7 - A MÉTRICA

Podemos, neste ponto, dotar nossa variedade diferenciável  $M$  de uma métrica que é um campo tensorial  $g$  do tipo  $(0,2)$  e que satisfaz as propriedades

$$a) \quad g(X, Y) = g(Y, X) \quad (A.7.1)$$

$$b) \quad \text{Se } g(X, Y) = 0 \text{ para todo } X, \text{ então } Y=0, \quad (A.7.2)$$

ou seja, é um campo tensorial, covariante, simétrico e não singular<sup>(\*)</sup>. O fato de ser não singular, em termos de suas componentes, significa que  $g = \det(g_{ij}) = \det(g(E_i, E_j)) \neq 0$ . Assim, existe uma matriz inversa, que indicaremos por  $g^{jk}$ , tal que  $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$ .

Como  $g$  é um campo tensorial do tipo  $(0,2)$ , podemos escrever

$$g = g_{\alpha\beta} E^\alpha \otimes E^\beta \quad (A.7.3)$$

---

(\*) Uma variedade  $M$  dotada de uma métrica com as propriedades acima, é dita ser uma Variedade Riemanniana.

e portanto

$$g(X, Y) = g_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta ; \quad g_{\alpha\beta} = g(E_\alpha, E_\beta). \quad (\text{A.7.4})$$

O operador dado pela eq. (3) define o elemento de distância  $ds^2$  da seguinte forma: dada uma vizinhança  $U$  e dois de seus pontos  $P$  e  $Q$ , infinitesimalmente próximos, ligados pelo vetor  $X = \Delta x^\alpha \partial_\alpha$ , o elemento de distância, ou distância entre  $P$  e  $Q$  é, por definição,

$$ds^2 = g(X, X) = g_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta. \quad (\text{A.7.5})$$

Os tensores com componentes  $g_{ij}$  e  $g^{ij}$  podem ser usados para definir um isomorfismo entre vetores contravariantes e vetores covariantes. Um vetor  $X$  é dito ser o equivalente contravariante do vetor covariante  $\omega$  se

$$g(X, Y) = \omega[Y] \quad (\text{A.7.6})$$

para todo vetor  $Y$ . Como  $g$  é não singular,  $X$  é univocamente determinado pela equação acima se  $\omega$  é dado:

$$g_{ij} X^i Y^j = \omega_j Y^j \Rightarrow \omega_i = g_{ij} X^j \quad (\text{A.7.7})$$

Frequentemente  $\omega_i$  é escrito como  $X_i$ , ou seja, define-se  $\omega_i \equiv X_i = g_{ij} X^j$ . Reciprocamente, dado  $X$ ,  $\omega$  é univocamente determinado, em componentes

$$g^{ki} \omega_i = X^k \equiv \omega^k \quad (\text{A.7.8})$$

onde usamos a eq. (7). Desta forma, ficam definidas as operações de levantamento (com  $g^{ij}$ ) e abaixamento (com  $g_{ij}$ ) de índices, que valem para tensores de maneira geral.

No que vimos até agora, o tensor métrico e a conexão,

foram introduzidas como estruturas separadas em  $M$ . No entanto, dada uma métrica  $g$  em uma variedade sem torção  $M$ , existe uma única conexão afim  $\nabla$  em  $M$  definida pela condição da derivada covariante de  $g$  ser nula, isto é

$$\nabla_X g = 0 \quad (\text{A.7.9})$$

para qualquer campo vetorial  $X$  definido sobre toda  $M$ . Com efeito, de acordo com a eq. (5.17), e usando que  $\nabla_X g = 0$ , teremos

$$X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (\text{A.7.10})$$

Escrevendo expressões análogas para  $Z g(X, Y)$  e  $Y g(Z, X)$ , somando-as, e subtraindo a expressão acima para  $X g(Y, Z)$ , teremos

$$\begin{aligned} Y g(Z, X) + Z g(X, Y) - X g(Y, Z) &= \\ &= g(\nabla_Y X - \nabla_X Y, Z) + g(\nabla_Z X - \nabla_X Z, Y) + \\ &+ g(\nabla_Y Z + \nabla_Z Y, X) \end{aligned} \quad (\text{A.7.11})$$

onde usamos o fato que  $g$  é tensor e, portanto, possui as propriedades deste objeto geométrico. Utilizando o fato que  $\nabla$  é simétrico, ou seja,  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ , teremos

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z Y, X) &= Y g(Z, X) + Z g(X, Y) - X g(Y, Z) \\ &+ g([X, Y], Z) + g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X). \end{aligned} \quad (\text{A.7.12})$$

Escolhendo uma base arbitrária, ou seja, tomando  $X = E_h$ ,  $Y = E_j$  e  $Z = E_k$  e usando as eqs. (3.10), (4.16), (5.4), (5.5), teremos<sup>(\*)</sup>

(\*) Usaremos que os índices de  $\Gamma_{ijk}$  são levantados e abaixados da mesma forma que índices tensoriais.

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{i\kappa} (E_j [g_{k\kappa}] + E_k [g_{j\kappa}] - E_\kappa [g_{jk}]) + \frac{1}{2} (g^{i\kappa} g_{mk} C_{\kappa j}^m + g^{i\kappa} g_{mj} C_{\kappa k}^m - C_{jk}^i) \quad (\text{A.7.13})$$

que determina as componentes da conexão. Particularmente, na base de coordenadas ( $E_i = \partial_i$ ,  $C_{jk}^i \equiv 0$ ) as conexões são os símbolos de Christoffel, ou seja,  $\Gamma_{jk}^i = \{^i_{jk}\}$  :

O tensor de curvatura de Riemann além das três propriedades de simetria apontadas no final da seção 6, com a conexão definida pela métrica, goza das seguintes propriedades de simetria

$$R_{pqij} = -R_{qpij} \quad (\text{A.7.14})$$

que pode ser verificada sem grande esforço. A propriedade acima juntamente com as propriedades de simetria apontadas anteriormente nos conduzem a

$$R_{pqij} = R_{ijpq} \quad (\text{A.7.15})$$

que é uma nova simetria do tensor de Riemann. A eq. (15) implica que o tensor de Ricci

$$R_{ij} = R^\Delta{}_{isj} = g^{\Delta p} R_{p isj} \quad (\text{A.7.16})$$

é simétrico ( $R_{ij} = R_{ji}$ ) .

## BIBLIOGRAFIA

- 1) - Hawking, S.W., Ellis, G.F.R. - "The Large Scale structure of Space-Time", 1a. Edição, Cambridge University Press (1973), Capítulos 2 e 4.
- 2) - Westenholtz, C.V. - "Differential Forms in Mathematical Physics", 1a. Edição, North-Holland Publishing Company, (1978).
- 3) - Boothby, W.M. - "An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry", 1a. Edição, Academic Press (1975).
- 4) - Kreider, D.L., Kuller, R.G., Osterg, D.R., Perkins, F.W. - "An introduction to Linear Analysis", 1a. Edição, Addison-Wesley Publishing Company (1966), Capítulo 1.
- 5) - Lang, S. - "Linear Algebra", 1a. Edição, Addison-Wesley Publishing Company (1966), Capítulo 4.
- 6) - Hoffman, K., Kunze, R. - "Linear Algebra", 1a. Edição, Prentice-Hall Inc. (1961), Capítulo 3.
- 7) - Cohn, P.M. - "Lie Groups", 1a. Edição, Cambridge University Press (1957), Capítulos 1, 2 e 3.
- 8) - Gilmore, R. - "Lie Group, Lie Algebras and Some for their Applications", 1a. Edição, John Wiley and Sons (1974), Capítulo 4.
- 9) - MacCallum, M.A.H. - "Cosmological Models from a Geometrical Point of View, Cargèse Lectures in Physics", Vol. 6, Gordon and Breach (1973).
- 10) - Kramer, D., Stephani, H., MacCallum, M., Herlt, E. - "Exact Solutions of Einstein's Fields Equations", 1a. Edição - VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (1980), Capítulo 9.
- 11) - Eisenhart, L.P. - "Riemannian Geometry", 2a. Edição, Prin-

- Princeton University Press* (1949), Cap. 4.
- 12) - Bonnor, W.B., Sulaiman, A.H., Tomimura, N. - "Szekeres's Space-Times Have no Killing Vectors", *Gen. Rel. Grav.* 8 (1977), 549.
  - 13) - Szekeres, P. - "A Class of Inhomogeneous Cosmological Models", *Commun. Math. Phys.* 41 (1975), 55.
  - 14) - Eisenhart, L.P. - "Continuous Groups of Transformations", 2a. Edição, *Dover Publications* (1961).
  - 15) - Lightman, A.P., Press, W.H., Price, R.H., Teukolsky, S.A. - "Problem Book in Relativity and Gravitation", 1a. Edição, *Princeton University Press* (1975), Cap. 8.
  - 16) - Yano, K. - "Theory of Lie Derivatives and Its Applications", 1a. Edição, *North-Holland Publishing Co.* (1955), Cap. 1.
  - 17) - Rayn Jr., M.P.; Shepley, L.C. - "Homogeneous Relativistic Cosmologies", 1a. Edição, *Princeton University Press* (1975).
  - 18) - MacCallum, M.A.H. - "Anisotropic and Inhomogeneous Cosmologies, General Relativity: An Einstein Centenary Survey", ed. por Hawking, S.W. e Israel, W., 1a. Edição, *Cambridge U.P.* (1979).
  - 19) - Gödel, K. - "An Example of a New Type of Cosmological Solution of Einstein's Field Equation of Gravitation", *Rev. Mod. Phys.*, 21 (1949), 447.
  - 20) - Ozsvath, I. - "Dust-Filled Universes of Class II and Class III", *J. Math. Phys.* 11 (1970), 2871.
  - 21) - Kantowski, R., Sachs, R.K. - "Some Spatially Homogeneous Anisotropic Relativistic Cosmological Models", *J. Math. Phys.* 7 (1966), 443.
  - 22) - Stewart, J.M., Ellis, G.F.R. - "Solutions of Einstein's Equations for a Fluid which Exhibit Local Rotational Symmetry", *J. Math. Phys.* 9 (1968), 1072.

- 23) - Bianchi, L. - "Sugli Spazi a tre Dimensioni che Ammettono un Gruppo Continuo di Movimenti", *Mem. Soc. It. delle Sc. (dei XL)*, 3 (1897), 267.
- 24) - Taub, A.H. - "Empty Space-Times Admitting a Three Parameter Group of Motion", *Ann. Math.* 53 (1951), 472.
- 25) - Ellis, G.F.R., MacCallum, M.A.H. - "A Class of Homogeneous Cosmological Models", *Commun. Math. Phys.* 12 (1969), 108.
- 26) - Estabrook, F.B., Wahlquist, H.D., Behr, C.G. - "Dyadic Analysis of Spatially Homogeneous World Models", *J. Math. Phys.* 9 (1968), 497.
- 27) - Assad, M.J.D. - "Modelos Cosmológicos Anisotrópicos Bianchi VIII/IX com Matéria e Campo Eletromagnético", *Tese de Mestrado - C.B.P.F.* (1980).
- 28) - Salim, J.M. - "Monopolos Gravitacionais", *Tese de Mestrado - C.B.P.F.* (1976), Cap. 1 e Apêndice.
- 29) - Novello, M. - "Cosmologia Relativista, II Escola de Gravitação e Cosmologia", Vol. 1, Ed. por Novello, M., C.B.P.F. (1980).
- 30) - Ellis, G.F.R. - "Relativistic Cosmology, Cargèse Lectures in Physics", Vol. 6, *Gordon and Breach* (1973).
- 31) - Adler, R., Bazin, M., Schiffer, M. - "Introduction to General Relativity", 2a. Edição *McGraw - Hill, Inc.* (1975), Cap. 3.
- 32) - MacCallum, M.A.H., Ellis, G.F.R. - "A Class of Homogeneous Cosmological Models II. Observations", *Commun. Math. Phys.* 19 (1970), 31.
- 33) - MacCallum, M.A.H. - "A Class of Homogeneous Cosmological Models III: Asymptotic Behaviour", *Commun. Math. Phys.* 20 (1971), 57.
- 34) - King, A.R., Ellis, G.F.R. - "Tilted Homogeneous Cosmological Models", *Commun. Math. Phys.* 31 (1973), 203.
- 35) - Ozsváth, I. - "Spatially Homogeneous World Models", *J. Math. Phys.* 11 (1970), 2860.

- 36) - Ellis, G.F.R., King, A.R. - "Was the Big Bang a Whimper?", *Commun. Math. Phys.* 38 (1974), 119.
- 37) - Collins, C.B. - "Tilting at Cosmological Singularities", *Commun. Math. Phys.* 39 (1974), 131.
- 38) - Collins, C.B., Ellis, G.F.R. - "Singularities in Bianchi Cosmologies", *Phys. Reports* 50 (1979), 65.
- 39) - Dunn, K.A., Tupper, B.O.J. - "Tilting and Viscous Models in a Class of Type VI<sub>0</sub>. Cosmologies", *Astrophys. J.* 222 (1978), 405.
- 40) - Dunn, K.A., Tupper, B.O.J. - "Type I, II and III Spatially Homogeneous Cosmologies with Electromagnetic Field", *Astrophys. J.* 235 (1980), 307.
- 41) - Soares, I.D. - "Gravitational Coupling of Neutrinos to Matter vorticity: Microscopic Asymmetries", *Phys. Rev. D.* 23 (1981), 272.
- 42) - Rebouças, M.J. - "Cosmologia Fora do Equilíbrio: Universo com Rotação", *Tese de Mestrado - C.B.P.F.* (1977).
- 43) - Kronheimer, E.H., Penrose, R. - "On the Structure of Causal Spaces", *Proc. Camb. Phil. Soc.* 63 (1967), 481.
- 44) - Geroch, R. - "Space-Time Structure from a Global Viewpoint", *Rendiconti della Scuola Internazionale di Fisica Enrico Fermi, Course XLVII, Varena* (1969).
- 45) - Stein, H. - "On the Paradoxical Time-Structure of Gödel ", *Phylos. Sci.* 37 (1970), 589.
- 46) - Novello, M. - "Algumas Questões Cosmológicas", *Rev. Bras. Phys.* 10 (1980), 599.
- 47) - Novello, M., Rebouças, M.J. - "Rotating Universe with Successive Causal and Noncausal Regions", *Phys. Rev. D.* 19 (1979), 2850.
- 48) - Rebouças, M.J. - "A Rotating Universe with Violation of Causality", *Phys. Lett.* 70A (1979), 161.
- 49) - Bampi, F., Zordan, C. - "A Note on Gödel Metric", *Gen.Rel. Grav.* 9 (1978), 393.
- 50) - Raychaudhuri, A.K., Thakurta, S.N.G. - "Homogeneous Space-

- Times of the Gödel type", *Phys. Rev. D* 22 (1980), 802.
- 51) - Chandrasekhar, S., Wright, J.P. - "The Geodesics in Gödel's Universe", *Proc. N.A.S.* 47 (1961), 341.
- 52) - Lathrop, J., Teglas, R. - "Dynamics in Gödel Universe" - *Nuov. Ciment.* 43B (1978), 162.
- 53) - Soares, I.D. - "Inhomogeneous Rotating Universes with Closed Timelike Geodesics of Matter", *J. Math. Phys.* 21 (1980), 521.
- 54) - Hawking, S.W. - "The Occurrence of Singularities in Cosmology. III. Causality and Singularities", *Proc. Roy. Soc. Lond.* 300 A (1967), 187.
- 55) - Hawking, S.W. - "The Occurrence of Singularities in Cosmology", *Proc. Roy. Soc. Lond.* 249 A (1966), 511.
- 56) - Hawking, S.W. - "The Existence of Cosmic Time Functions", *Proc. Roy. Soc. Lond.* 308 A (1969), 433.
- 57) - Geroch, R., Horowitz, G.T. - "Global Structures of Spacetimes, General Relativity: An Einstein Centenary Survey", Ed. por Hawking, S.W. e Israel, W., 1a. Edição, Cambridge U.P., (1979).
- 58) - Newman, E., Tauburino, L., Until, T. - "Empty-Space Generalization of the Schwarzschild Metric", *J. Math. Phys.* 4 (1963), 915.
- 59) - Misner, C.W. - "The Flatter Regions of Newman Until and Tauburino's Generalized Schwarzschild Space", *J. Math. Phys.* 4 (1963), 924.
- 60) - Carter, B. - "Global Structure of Kerr Family of Gravitational Fields", *Phys. Rev.* 174 (1968), 1559.
- 61) - Reichenbach, H. - "The Philosophy of Space and Time", 1a. Edição, Dover (1957).
- 62) - Tipler, F.J. - "Causality Violation in Asymptotically Flat Space-Times", *Phys. Rev. Lett.* 37 (1976), 879.
- 63) - Tipler, F.J. - "Singularities and Causality Violation", *Ann. Phys.* 108 (1977), 1.
- 64) - Bondi, H. - "Cosmology", 2a. Edição, Cambridge University

*Press.* (1968), Capítulo 1.

- 65) - Thirring, W.E., Lense, J. - "Über den Einfluss der Eigenrotation der zentral Körper auf Bewegung der Planeten und Monde nach Einsteinschen Gravitationstheorie", *Phys. Z.*, 19 (1918), 156.
- 66) - Bach, R. - "Neue Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen", *Mat. Z.*, 13 (1922), 134.
- 67) - Lanczos, K. - "Über eine stationäre Kosmologie in Sinne der Einsteinschen Gravitationstheorie", *Phys. Z.* 21 (1924), 73.
- 68) - Akeley, E.S. - "The Axially Symmetric Stationary Gravitational Field", *Phil. Mag.* 11 (1931), 322.
- 69) - Adress, W.R. - "Some Solutions of Einstein's Gravitational Equations for Systems with Axial Symmetry", *Proc. Roy Soc. A*, 126 (1930), 592.
- 70) - Lewis, T. - "Some Solutions of the Equation of Axially Symmetric Gravitational Fields", *Proc. Roy. Soc. A*, 136 (1932), 176.
- 71) - Stockum, W.J.van - "The Gravitational Field of a Distribution of Particles Rotating about an Axis of Symmetry", *Proc. Roy Soc. Edinburgh* 57 (1937), 135.
- 72) - Wright, J.P. - "Solution of Einstein's Equations for a Rotating, stationary, and Dust-Filled Universe", *J. Math. Phys.* 6 (1965), 103.
- 73) - Maitra, S.C. - "Stationary Dust-Filled Cosmological Solution with  $\Lambda = 0$  and Without Closed Timelike Lines", *J. Math. Phys.* 7 (1966), 1025.
- 74) - Ozsvath, I., Schucking, E.L. - "The Finite Rotating Universe", *Ann. Phys.* 55 (1969), 166.
- 75) - Demianski, M., Grishchuk, L.P. - "Homogeneous Rotating Universe with a Flat Space", *Commun. Math. Phys.* 25 (1972), 233.
- 76) - Wainwright, J. - "A Class of Algebraically Special Perfect Fluid Space-Times", *Commun. Math. Phys.* 17 (1970), 42.
- 77) - Ozsvath, I. - "New Homogeneous Solutions of Einstein's

- Field Equations with Incoherent Matter obtained by a Spinor Technique", *J. Math. Phys.* 6 (1965), 590.
- 78) - Som, M.M., Raychaudhuri, A.K. - "Cylindrically Symmetric Charged Dust Distribution in Rigid Rotation in General Relativity", *Proc. Roy Soc. A*, 304 (1968), 81.
- 79) - Ozsvath, I. - "Homogeneous Lichnerowicz Universes", *J. Math. Phys.* 8 (1967), 326.
- 80) - Banerjee, A., Bannerji, S. - "Stationary Distributions of Dust and Electromagnetic Fields in General Relativity", *J. Phys. A (Proc. Phys. Soc.)* 1 (1968), 188.
- 81) - Raval, H.M., Vaidya, P.C. - "On Generalizations of Gödel's Universe", *Ann. Inst. Henri Poincaré A*, 4 (1966), 21.
- 82) - Novello, M., Rebouças, M.J. - "The Stability of a Rotating Universe", *Astrophys. J.*, 225 (1978), 719.
- 83) - Ellis, G.F.R. - "Dynamics of Pressure-Free Matter in General Relativity", *J. Math. Phys.* 8 (1967), 1171.
- 84) - Krasinski, A. - "Solutions of the Einstein Field Equations for a Rotating Perfect Fluid", *Acta Phys. Pol. B*, 5 (1974), 411.
- 85) - Bray, M.M. - "Quelques Univers Magnétohydrodynamiques du type de Gödel", *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, A, 274 (1972), 809.
- 86) - Rebouças, M.J. - "Time-Dependent, Bianchi II, Rotating Universe", C.B.P.F.-Report NF-008/81, aceito para publicação na Revista *Nuov. Ciment.*
- 87) - Rebouças, M.J., Lima, J.A.S. - "Time-Dependent, Finite, Rotating Universes", C.B.P.F.-Report NF-009/81. Aceito para publicação no *J. Math. Phys.*; dezembro (1981).
- 88) - Misner, C.W. - "The Isotropy of the Universe", *Astrophys. J.* 151 (1968), 431.
- 89) - Murphy, G.L. - "Big-Bang Model Without Singularities", *Phys. Rev. D*, 8 (1973), 4231.
- 90) - Nightingale, J.D. - "Independent Investigations Concerning Bulk Viscosity in Relativistic Homogeneous Isotropic Cos-

- mologies", *Astrophys. J.*, 185 (1973), 105.
- 91) - Landau, L.D., Lifshitz, E.M. - "Fluid Mechanics", 1a. Ed. Pergamon Press (1959), Capítulos 2 e 15.
- 92) - Belinskii, V.A., Khalatnikov, I.M. - "Influence of Viscosity on the Character of Cosmological Evolution", *Sov. Phys. JEPT*, 42 (1976), 205.
- 93) - Ellis, G.F.R. - "Relativistic Cosmology, Scuola Internazionale de Fisica Enrico Fermi", 1a. Ed., Academic Press (1971), Course XLVII, Varena (1969).
- 94) - Bergmann, O. - "A Cosmological Solution of the Einstein Equations with Heat Flow", *Phys. Lett.*, 82 A (1981), 383.
- 95) - Dipankar, R. - "Gödel-Like Cosmological Solutions", *J. Math. Phys.*, 21 (1980), 2797.
- 96) - Brand, L. - "Vector and Tensor Analysis", 1a. Ed., John Wiley and Sons, Inc. (1947), Capítulo 10.
- 97) - Flanders, H. - "Differential Forms with Applications to the Physical Sciences", 1a. Ed., Academic Press (1963), Capítulo 9, pág. 153.
- 98) - Davis, H.T. - "Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equation", 1a. Ed., Dover (1963), Capítulo 7.
- 99) - Milne-Thomson, L.M. - "Jacobian Elliptic Functions and theta Function", Capítulo 16 do Handbook of Mathematical Functions, ed. por Abramowitz, M., Stegun, I.A., 1a. Ed. Dover (1965).
- 100) - Ryan Jr, M.P. - "Qualitative Cosmology: Diagrammatic Solutions for Bianchi IX Universes with Expansion, Rotation and Shear. I. The Symmetric Case", *Ann. Phys.*, 65 (1971), 506.
- 101) - Ryan Jr, M.P. - "Qualitative Cosmology: Diagrammatic Solutions for Bianchi IX Universes with Expansion, Rotation and Shear. II. The General Case", *Ann. Phys.*, 68 (1971), 541.
- 102) - Novello, M. - "Stokesian Fluid and Cosmology", *Nucleonica*, 25 (1980), 1405.
- 103) - Lovelock, D., Rund, H. - "Tensor, Differential Forms, and Variational Principles", 1a. Ed. John Wiley and Sons, Inc.

- (1975), Apêndice e Capítulos 3 e 5.
- 104)- Hicks, N.J. - "Notes on Differential Geometry", 1a. Edição Van Nostrand Reinhold Company (1971), Capítulos 1,4,5 e 7.
- 105)- Carmo, M. - "Geometria Riemanniana", 1a. Edição, Editora Hamburg Ltda. (1979), Projeto Euclides. Capítulos 0,1,2 e 4.
- 106)- Maia, M.D. - "Grupos de Transformações", 2a. Escola de Cosmologia e Gravitação C.B.P.F./U.F.Pb. (1980), Vol. 1, Capítulo 1. Ed. por M. Novello.
- 107)- Soares, I.D. - "Notas de Aula do Curso de Cosmologia" - C.B.P.F. (1979).



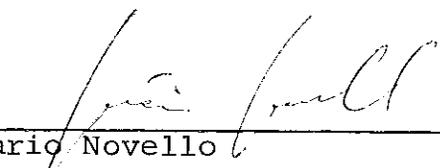
CNPq

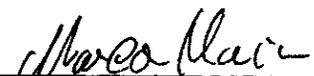
CONSELHO NACIONAL  
DE DESENVOLVIMENTO  
CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO

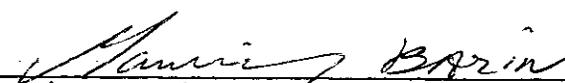
Ilmo. Sr. Coordenador de Ensino

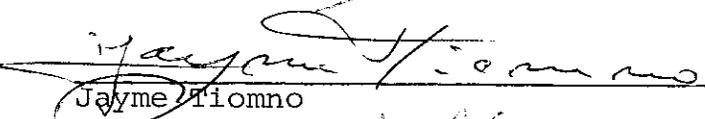
A Banca Examinadora constituída pelos Professores Mario Novello (CBPF), Marcos Duarte Maia (UnB), Maurice Bazin (PUC-RJ), Jayme Tiomno (CBPF) e Carlos Guido Bollini (CBPF), em reunião no dia 31 de agosto de 1981, que precedeu a exposição da Tese de Doutorado "MODELOS DO UNIVERSO COM ROTAÇÃO DEPENDENTE DO TEMPO E A VIOLAÇÃO DA CAUSALIDADE NA COSMOLOGIA", por Marcelo José Rebouças, considerou a Tese apta para defesa imediata.

Rio de Janeiro, 31 de agosto de 1981.

  
\_\_\_\_\_  
Mario Novello

  
\_\_\_\_\_  
Marcos Duarte Maia

  
\_\_\_\_\_  
Maurice Bazin

  
\_\_\_\_\_  
Jayme Tiomno

  
\_\_\_\_\_  
Carlos Guido Bollini

