

LUIZ CARLOS SANTOS DE OLIVEIRA

ESTUDO DAS CORREÇÕES RADIATIVAS COM APLICAÇÃO
AO ESPALHAMENTO ELÉTRON-NEUTRINO

Tese de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

- 1977 -

AGRADECIMENTOS

Desejo deixar ressaltado o meu agradecimento a várias pessoas e instituições que colaboraram efetivamente para que este trabalho tivesse êxito:

- Ao Prof. Takeshi Kodama, pela idéia, pela orientação segura em todas as etapas, e pela paciência demonstrada nas discussões deste trabalho.

- Aos Profs. L. Tauhata e D.A.C. Binns, pelo constante encorajamento no campo da pesquisa, desde a época de minha Iniciação Científica.

- Ao Prof. P.P. Srivastava, pelas frutíferas discussões sobre o tema deste trabalho.

- Aos pesquisadores do grupo de Física Nuclear Teórica e Astrofísica do CBPF, pelo estímulo oferecido durante todo o trabalho.

- À Helena de Souza Ciccarino, pelo excelente desempenho e paciência no trabalho datilográfico do manuscrito, que tanto o valorizou.

- Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, pela acolhida em seu ambiente Científico.

- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pela bolsa de estudos concedida durante os anos de 1974 e 1975.

- A todos que, direta ou indiretamente, deram a sua contribuição para a realização deste trabalho.

R E S U M O

Neste trabalho utilizamos os métodos de cálculo de correções radiativas, da Teoria Quântica dos Campos, na obtenção de probabilidades de transições em processos de interação fraca, a saber: " μ and E -decays" e espalhamento elétron-neutrino.

Num sentido mais amplo, calculamos a probabilidade de transição de um processo fraco genérico, no caso o decaimento de uma partícula, nos cinco possíveis tipos de interação, i.e. escalar, vetor, tensor, pseudovetor e pseudoescalar, utilizando como suporte uma interação geral a quatro componentes. A seguir, como exemplos, aplicamos esses resultados aos processos de decaimentos beta do neutrão e do muon.

Um novo cálculo, usando o mesmo método empregado anteriormente, da probabilidade de transição para o processo de espalhamento elétron-neutrino é realizado mas, agora, tendo como base uma interação do tipo (V-A).

Verificamos uma não simetria na integral em relação aos neutrinos, termos cruzados do tipo (vetor x axial vetor) e o cancelamento da divergência do infravermelho, no caso do cálculo do espalhamento.

Na parte final do trabalho discutimos resultados, especialmente os relacionados com o cancelamento de divergências, tanto do infravermelho quanto do ultravioleta.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE TABELAS	vii
INTRODUÇÃO	1
<u>CAPÍTULO I</u> - INTRODUÇÃO ÀS INTERAÇÕES FRACAS	6
1.1 - Teoria de Fermi do Decaimento Beta	6
1.2 - Violação da Paridade nas Interações Fracas	10
1.3 - As Várias Interações Fracas	12
1.4 - A Lagrangeana Efetiva para Processos Fracos; Classi- ficação dos Processos Fracos	13
1.5 - O Problema das Correções Radiativas	16
<u>CAPÍTULO II</u> - UM MÉTODO DE CÁLCULO DE CORREÇÕES RADIATIVAS	19
2.1 - Introdução	19
2.2 - Correções Radiativas para Fótons Virtuais	20
2.3 - Probabilidades de Transição	34
2.4 - Bremsstrahlung Interno	48
<u>CAPÍTULO III</u> - APLICAÇÕES A PROCESSOS FUNDAMENTAIS	78
3.1 - Correções para o Decaimento do Muon Polarizado	78
3.2 - Correções Radiativas para o Decaimento Beta	80
3.3 - Correções Radiativas para o Espalhamento Elétron- -Neutrino	81
<u>CAPÍTULO IV</u> - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES	97
<u>APÊNDICE A</u> - REDUÇÃO PADRÃO NA E.Q.	102
<u>APÊNDICE B</u> - UM MÉTODO PARA RESOLVER AS INTEGRAIS $J_{(1;2\sigma;3\sigma\tau)}$	104
<u>APÊNDICE C</u> - TRANSFORMAÇÃO DE FIERZ	106
<u>REFERÊNCIAS</u>	107

LISTA DE FIGURAS

<u>Fig.</u>	<u>Pág.</u>
1.1.1	8
2.1.1	21
2.4.1	49
3.3.1	94

LISTA DE TABELAS

<u>Tab.</u>	<u>Pág.</u>
1.4.1	17

INTRODUÇÃO

Os cálculos de Teoria Quântica de Campos já estão bastante estabelecidos na literatura ^(1,2) e são largamente utilizados em todas as áreas da física onde, o conceito quântico se faz presente.

Mas, os cálculos não são triviais, especialmente, quando aparecem problemas de divergência, em analogia com a Eletrodinâmica Quântica, e.g., divergências do infravermelho e do ultravioleta.

Neste sentido aparecem diversos problemas, sendo um deles o da correção radiativa para interação fraca.

Já existe feito um cálculo padrão para esse problema, Kinoshita-Sirlin ⁽³⁾.

Nos trabalhos sobre correções radiativas os autores partiram do fato de que todas as instabilidades das partículas elementares são modificadas por flutuações de seus campos eletromagnéticos. E essas flutuações são responsáveis, primeiro pela emissão de fótons reais simultaneamente com o processo e independente da matéria que a rodeia (bremsstrahlung interno), segundo por efeitos de amortecimento associados com o campo não irradiado. Esse amortecimento pode ser descrito em termos de fótons virtuais e é exatamente similar aos processos responsáveis pelo deslocamento Lamb-Retherford.

Assim eles, como uma regra, calcularam a probabilidade de transição para fótons virtuais e para o bremsstrahlung interno e as somaram, dado que os dois processos tem estados fi

nais diferentes, i.e. o último tem uma partícula real (o fóton) no estado final.

Um detalhe nesses cálculos é o de que os processos de bremsstrahlung e fótons virtuais são tratados de uma maneira consistente, isto é, nos dois casos dão uma massa λ_{\min} ao fóton para resolver o problema da divergência do infravermelho e depois tendem-na a zero. Um outro modo seria tratar os fótons real e virtual exatamente sem massa. Entretanto, muito cuidado teria de ser tomado no sentido de cancelar impropriamente essas divergências.

Os primeiros trabalhos sobre correções radiativas, ref. (3), foram feitos usando uma teoria geral a quatro componentes mas, todos os trabalhos seguintes usaram a teoria (V-A) como ponto de partida, uma vez que o problema da quebra da paridade nas interações fracas estava bem estabelecido.

Um fato importante observado em todos os trabalhos, é que a divergência do infravermelho que aparece nos cinco tipos de interações, i.e., escalar, vetor, tensor, axial vetor e pseudoescalar, na probabilidade de transição para fótons virtuais é cancelada por um termo similar surgindo do bremsstrahlung interno.

Por outro lado a divergência do ultravioleta que aparece somente nos casos escalar, pseudoescalar e tensorial na probabilidade de transição para fótons virtuais não tem similar no bremsstrahlung interno para haver o cancelamento. Assim como uma consequência imediata, uma teoria de campo contendo uma interação beta não é renormalizável, i.e., não se conhece quantos resultados sensíveis podem ser extraídos das infinidades que apa

recem em tal teoria.

Num trabalho mais recente A. Sirlin ⁽⁴⁾, faz uma generalização das correções radiativas para o decaimento beta, onde ela é agora renormalizável, usando um modelo de Gauge $SU(2)_L \otimes U(1)$ (Weinberg-Salam).

No nosso trabalho calculamos as correções radiativas para um processo puramente leptônico, o espalhamento elétron - neutrino ($e\nu$), usando a teoria (V-A) como ponto de partida.

Escolhemos esse processo porque ele representa um papel fundamental na Astrofísica Nuclear. Como ficou estabelecido por vários autores, e.g. Bahcall ⁽⁵⁾, o espalhamento elétron-neutrino torna-se importante nos últimos estágios da evolução de uma estrela. Assim o que pretendemos é observar de que modo essas correções alteram as taxas de transição do processo fundamental dado pela ref. (5).

O método de cálculo utilizado neste trabalho e o mesmo da ref. (3) onde usamos os gráficos e as regras de Feynman para descrever essas correções.

Aqui tivemos também, a intenção de estabelecer primeiro todas as técnicas usadas e esclarecer o método de cálculo das correções radiativas. Por outro lado, procuramos confirmar o cancelamento da divergência do infravermelho nos nossos cálculos.

Temos então no capítulo I, um resumo fenomenológico das interações fracas onde, é realçada a analogia com a Eletrodinâmica Quântica no sentido da interação corrente-corrente e apresentamos um quadro geral dos vários processos fracos existentes.

No capítulo II, procuramos esclarecer o método de cálculo utilizado explicitando-os e calculando tanto a correção com fótons virtuais quanto com fótons reais usando a teoria geral a quatro componentes. Fizemos os cálculos para todos os tipos de interações, i.e., escalar, vetor, tensor, axial vetor e pseudoescalar. Auxiliando esse capítulo temos os apêndices A e B onde, são tratados os problemas de redução padrão e um método de resolver as integrais que aparecem nessa redução, respectivamente.

No capítulo III, aplicamos os resultados obtidos no capítulo anterior para os processos de decaimento do muon e do beta do neutron. No caso do decaimento do muon usamos a aproximação do limite de pequena massa, isto é, desprezamos a massa do elétron em relação a sua energia e consideramos o cálculo para o muon completamente polarizado. No outro caso usamos uma aproximação na qual o momento do elétron é desprezado em comparação com a massa do próton. Auxiliando este capítulo temos o apêndice C que trata de transformações de Fierz.

Fizemos todos os cálculos para o processo de espalhamento elétron-neutrino, para a teoria de duas componentes do neutrino⁽⁶⁾ e a Lagrangeana de interação (V-A), no sistema centro de massa (S.C.M.).

É feita uma análise mais apurada do S.C.M., já que não é tão trivial pois envolve problemas de mais de dois corpos. Observações são feitas em relação a simetria no espaço dos neutrinos e ao problema do cancelamento da divergência do infravermelho da probabilidade de transição com o do bremsstrahlung interno onde, este último é tomado no limite de baixo momento do

fóton.

No capítulo IV, discutimos os diversos aspectos relacionados com os problemas sobre correções radiativas, de um modo geral, e especificamente aqueles relacionados com o espalhamento elétron-neutrino.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO ÀS INTERAÇÕES FRACAS

1.1 - Teoria de Fermi do Decaimento Beta

O início do estudo das interações fracas data de 1932 onde as únicas partículas elementares conhecidas eram o fóton, o elétron, o próton e recentemente descoberto o neutrão e a única interação fraca conhecida, o decaimento beta nuclear, parecia totalmente confuso e misterioso.

Acreditava-se então que a energia cedida ao elétron no decaimento beta devia ser igual a diferença, em energias de repouso, dos núcleos inicial e final: $\Delta = (M_i - M_f)C^2$, sendo c a velocidade nuclear inteiramente desprezado.

Entretanto experiências demonstravam claramente que o espectro de energia do elétron do decaimento era contínuo, com uma energia máxima correspondendo a Δ .

Assim a conservação de energia-momento parecia ter sido quebrada. Além disso, o elétron possui spin semi-inteiro, enquanto que a troca no spin nuclear acompanhando o decaimento beta era inteiro, então a conservação de momento angular parecia estar também quebrada.

Numa tentativa de salvar essas leis fundamentais, Pauli^(*) propôs que uma partícula neutra de spin semi-inteiro de

(*) Esta proposta foi realizada em 1933 no Congresso de Solvay (Bruxelas).

massa aproximadamente zero, ou mesmo zero (depois chamada de neutrino por Fermi) era emitida junto com o elétron e que escapava à detecção por causa de sua interação com a matéria ser desprezível.

Pouco tempo depois, estimulado pelas idéias de Pauli, Enrico Fermi⁽⁷⁾ apresentou sua teoria sobre o decaimento beta. As idéias de Fermi foram formuladas em analogia com a Eletrodinâmica Quântica^(*), que tinha sido desenvolvida vários anos antes por Dirac e outros.

Na E.Q., a interação entre uma partícula carregada e o campo de radiação (quantizado) é descrito por uma densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L}_{EM}(\vec{x}, t) = -e j_{\alpha}(\vec{x}, t) A^{\alpha}(\vec{x}, t) \quad (1.1.1)$$

onde A^{α} é o operador potencial 4-vetor do campo eletromagnético quantizado e $(e j_{\alpha})$ é a densidade de corrente do elétron.

Em termos da E.Q. para processos nos quais os elétrons são criados e destruídos, j_{α} é dado por:

$$j_{\alpha} = \bar{\Psi}(\vec{x}, t) \gamma_{\alpha} \Psi(\vec{x}, t) \quad (1.1.2)$$

onde $\bar{\Psi}$ e Ψ são os operadores de criação e aniquilação do elétron, respectivamente e γ_{α} são as matrizes de Dirac. Note que este termo transforma-se como um vetor, por transformação de Lorentz.

(*) O termo Eletrodinâmica Quântica será referido, a partir de agora, por E.Q.

Aqui, os exemplos mais simples que podemos imaginar são a emissão ou absorção de um fóton por um elétron livre (fig. 1.1.1).

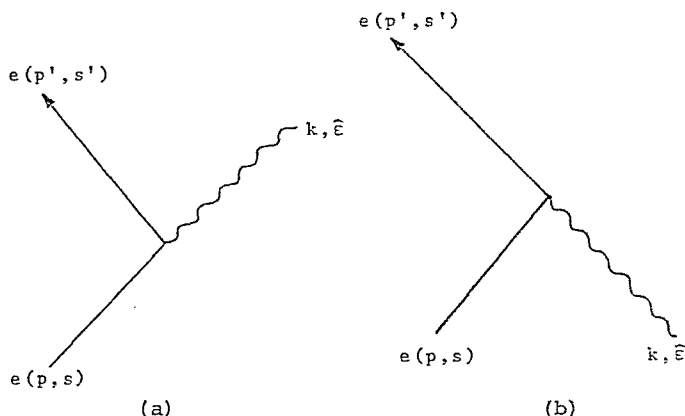


Fig. 1.1.1 - Gráfico de Feynman para a emissão (a) e absorção (b) de um fóton por um elétron livre. Aqui p, p', K, K' são os momentos inicial e final do elétron e do fóton e $S, S', \bar{\epsilon}$ são os vetores de polarização do elétron e do fóton, respectivamente.

Como sabemos, um elétron não pode emitir nem absorver um fóton se a energia e o momento linear são conservados. Portanto o elemento de matriz para a emissão do fóton é zero;

$$\int d^4x \langle p', S'; K, \bar{\epsilon} | \mathcal{L}_{EM}(x) | p, S \rangle = 0 \quad (1.1.3)$$

Entretanto, esse processo de 1ª ordem hipotético também serve como um modelo conveniente para construir uma teoria

de decaimento beta que no caso mais simples é justamente o decaimento do neutron livre num próton, num elétron e o que nós conhecemos hoje ser um antineutrino:

$$n + p + e^{-} + \bar{\nu}_e \quad (1.1.4)$$

Na teoria de Fermi, o par elétron-antineutrino desempenha o papel formalmente designado para o fóton (emissão) enquanto que o nucleon transformante desempenha o papel da partícula carregada.

Portanto, a seguinte sugestão é aceitável:

$$j_{\alpha} + \bar{\Psi}_p \gamma_{\alpha} \Psi_n \quad (1.1.5)$$

e

$$A^{\alpha} + \bar{\Psi}_e \gamma_{\alpha} \Psi_{\nu} \quad (1.1.6)$$

Aqui, a carga (-e) da lagrangeana eletromagnética é trocada por uma nova constante: $G/\sqrt{2}$, onde G (a constante de acoplamento de Fermi ou de interação fraca) deve ser determinada pela experiência. Como vimos a interação fraca é representada por uma interação corrente-corrente de fermions assim, a constante de acoplamento fraca tem a dimensão de (comprimento)² ou equivalentemente (massa)⁻²; uma escolha razoável é $m = m_p$ (m_p é a massa do próton) onde encontramos que $G = 1.03 \times 10^{-5} m_p^{-2}$.

Assim,

$$\mathcal{L}_{\beta} = \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{\Psi}_p \gamma_{\alpha} \Psi_n) \cdot (\bar{\Psi}_e \gamma^{\alpha} \Psi_{\nu}) + h.c \quad (1.1.7)$$

onde a parte do conjugado hermitiano é introduzida para descre-

ver os processos inversos, a saber: emissão de pósitron e captura eletrônica.

1.2 - Violação da Paridade nas Interações Fracas

Retomemos a descrição original de Fermi do decaimento beta, incorporada na lagrangeana da eq. (1.1.7). Construída que foi em inteira analogia com a E.Q., \mathcal{L}_β é um produto escalar de dois 4-vetores (polar) e é assim invariante em relação à transformações de Lorentz próprias e impróprias (paridade).

Em 1936, Gamow e Teller⁽⁸⁾ notaram que existem outras formas de construir uma lagrangeana escalar.

\mathcal{L}_β , pode ser uma combinação linear dos termos

$$\begin{array}{ll}
 (\bar{\Psi}_p \Psi_n) (\bar{\Psi}_e \Psi_\nu) & - \text{(escalar x escalar)} \\
 (\bar{\Psi}_p \gamma_\alpha \Psi_n) (\bar{\Psi}_e \gamma^\alpha \Psi_\nu) & - \text{(vetor x vetor)} \\
 (\bar{\Psi}_p \sigma_{\lambda\delta} \Psi_n) (\bar{\Psi}_e \sigma^{\lambda\delta} \Psi_\nu) & - \text{(tensor x tensor)} \\
 (\bar{\Psi}_p \gamma_\lambda \gamma^5 \Psi_n) (\bar{\Psi}_e \gamma^\lambda \gamma^5 \Psi_\nu) & - \text{(axial vetor x axial vetor)} \\
 (\bar{\Psi}_p \gamma^5 \Psi_n) (\bar{\Psi}_e \gamma^5 \Psi_\nu) & - \text{(pseudoescalar x pseudoescalar)}
 \end{array}$$

Os coeficientes da combinação linear podem ser determinados pelas experiências mas, Gamow e Teller observaram o seguinte: no limite não relativístico dos nucleons, o qual é apropriado para o decaimento beta, como a transferência de momento para os leptons é pequena ($\sim 1\text{MeV}$), o termo pseudoescalar anula-se e as seguintes regras de seleção de spin nucleares são obedecidas.

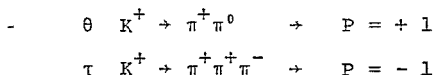
Para SS, VV $\Delta J = 0$

Para AA, TT $\Delta J = 0, \pm 1$ exceto $J_i = 0$ e $J_f = 0$

Entretanto, enquanto que as descrições de Fermi são apropriadas para transições $\Delta J = 0$, alguma amplitude AA e/ou TT pode estar presente para contribuir em $|\Delta J| = 1$ no decaimento beta. Naturalmente, estas previsões foram feitas sobre a hipótese de que \mathcal{L}_β era um escalar i.e., invariante na paridade.

Mas em 1956, Lee e Yang⁽⁶⁾ sugeriram que a paridade era violada nas interações fracas e no mesmo ano, esta previsão foi confirmada por C.S. Wu⁽⁹⁾, no decaimento beta do Co^{60} polarizado.

Isso foi feito primeiramente levando em consideração o enigma de $\tau\theta$, que estava relacionado com a questão: porque pode os decaimentos



ambos originários do mesmo estado inicial, terem paridades finais diferentes? (*)

Foi introduzida então a hipótese que se admite até hoje, de que cada corrente fraca é composta de uma porção vetorial polar e uma porção vetorial axial. Então produtos escalares ($V \times V$, $A \times A$) e produtos pseudoescalares ($V \times A$) ocorrem.

Portanto a chamada lagrangeana (V-A) como um conjunto de paridade mista é capaz de descrever processos fracos violan-

(*) Para um entendimento desta questão, veja a nota no fim da página 11 do livro: "Weak Interactions" de E.D. Commins, 1973 McGraw-Hill, Inc.

do a paridade.

Nas correntes leptônicas temos

$$j_{\ell}^{\lambda}(x) = \bar{\Psi}_{\ell}(x) \gamma^{\lambda} (1 + \gamma^5) \Psi_{\ell}(x) \quad . \quad (1.2.1)$$

No caso das correntes hadrônicas, por causa das interações fortes, é uma boa aproximação tratar os elementos de matriz entre estados específicos, em particular como uma soma das porções vetorial e axial-vetor:

$$J^{\lambda} = v^{\lambda} + A^{\lambda} \quad . \quad (1.2.2)$$

1.3 - As Várias Interações Fracas

Nas várias décadas seguintes novas partículas elementares foram descobertas e agora sabemos que o decaimento beta nuclear é somente um entre os vários processos fracos. Podemos esquematizar esses vários processos. Primeiro de tudo, notamos que cada partícula elementar pode ser classificada como uma ressonância ou como uma partícula estável.

Se é uma ressonância, a partícula decai por interação forte e geralmente tem um tempo de vida curto ($\approx 10^{-20}$ seg) e correspondentemente uma largura de ressonância que para as interações fracas não tem nenhuma importância.

Assim para as interações fracas apenas as partículas com tempos de vidas mais longos ($\approx 10^{-8}$ seg), interessam.

Existem três partículas o π^0 , η^0 e Σ^0 que têm tempos de vida muito pequenos comparados com os de outras partículas

($\approx 10^{-16}$), mas seus tempos de vida são muito maiores do que os de qualquer ressonância. Isso ocorre porque essas partículas decaem por interação eletromagnética.

Temos várias formas de decaimento: aquela que envolve somente leptons, por exemplo $\mu + e + \nu + \bar{\nu}$; outras, tais como $\pi + \mu\nu$ ou $K + \mu\nu$, o hadron instável transforma-se no estado final consistindo inteiramente de leptons. Outros decaimentos são semileptônicos, por exemplo $n + p + e + \nu$. Temos também decaimentos não leptônicos tais como $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$ e $\Lambda^0 \rightarrow p \pi^-$.

Em alguns decaimentos a estranheza é conservada (e.g. "β-decay" do neutron) enquanto que em outros a estranheza é violada (e.g. $K \rightarrow \mu\nu$).

Além dessa variedade de decaimentos, a interação fraca manifesta-se como um fenômeno de espalhamento de neutrino, captura de elétron e muon por núcleos e variação na estranheza no sistema K neutro.

1.4 - A Lagrangeana Efetiva para Processos Fracos; Classificação dos Processos Fracos

Para descrever os processos fracos, postulamos a existência de uma lagrangeana de interação fraca simétrica

$$\mathcal{L}_W^S(x) = \frac{1}{2} \frac{G}{\sqrt{2}} \left[J^\lambda(x) J_\lambda^+(x) + J_\lambda^+(x) J^\lambda(x) \right] \quad (1.4.1)$$

onde J^λ é a 4-corrente fraca universal e J_λ^+ é o seu conjugado hermitiano.

A corrente fraca $J^\lambda(x)$ consiste de quatro partes:

$$J^\lambda(x) = j_e^\lambda(x) + j_\mu^\lambda(x) + J_0^\lambda(x) + J_1^\lambda(x) \quad (1.4.2)$$

Uma observação deve ser feita em relação a existência de dois tipos de neutrinos: o eletrônico e o muônico. Os dois primeiros termos da eq. (1.4.2) são as correntes fracas do elétron e muon. Elas descrevem transformações das seguintes espécies:

$$j_e \begin{cases} \nu_e \rightarrow e^- \\ e^+ \rightarrow \bar{\nu}_e \end{cases} \quad e \quad j_\mu \begin{cases} \nu_\mu \rightarrow \mu^- \\ \mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu \end{cases}$$

Assim,

$$j_e^+ \begin{cases} e^- \rightarrow \nu_e \\ \bar{\nu}_e \rightarrow e^+ \end{cases} \quad e \quad j_\mu^+ \begin{cases} \mu^- \rightarrow \nu_\mu \\ \bar{\nu}_\mu \rightarrow \mu^+ \end{cases}$$

Admitimos que os neutrinos e antineutrinos são eletricamente neutros. Então j_e e j_μ são correntes carregadas mas experiências recentes (10,11) mostram a existência de corrente eletrônica ou muônica neutra.

Eles também possuem massa zero e uma helicidade^(*) de finida, que é uma primeira manifestação de violação de paridade em interações fracas.

O terceiro termo J_0 , descreve a conservação de estranheza da transformação fraca de hádrons

(*) Helicidade é definida como a projeção do spin sobre a direção do movimento: $h = \vec{\sigma} \cdot \vec{P} / |\vec{P}|$, onde $\vec{\sigma}$ é o operador de spin de Pauli e \vec{P} é o 3-momento da partícula.

$$\begin{array}{l}
 J_0 \left\{ \begin{array}{l} \pi^+ \rightarrow \text{estado de vácuo} \\ \pi^- \rightarrow \pi^0 \end{array} \right. \\
 \\
 J_0^+ \left\{ \begin{array}{l} \pi^- \rightarrow \pi^+ \\ \pi^- \rightarrow \text{estado de vácuo} \\ n \rightarrow p \\ \Sigma^- \rightarrow \Lambda^0 \end{array} \right. \quad \Delta S = 0
 \end{array}$$

O quarto termo J_1 , descreve a violação de estranheza

$$\begin{array}{l}
 J_1 \left\{ \begin{array}{l} K^+ \rightarrow \text{estado de vácuo} \\ K^+ \rightarrow \pi^0 \end{array} \right. \\
 \\
 J_1^+ \left\{ \begin{array}{l} K^- \rightarrow \text{estado de vácuo} \\ \Sigma^- \rightarrow n \\ \Lambda^0 \rightarrow p \end{array} \right. \quad |\Delta S| = 1
 \end{array}$$

As correntes J_0 e J_1 são também carregadas ($\Delta Q = -1$), de modo que $\Delta Q = -1$ para todo $J^\lambda(x)$. $\Delta Q = +1$ para J^+ e como $\mathcal{L} = \bar{\psi} J J^+$ a carga elétrica é conservada para cada interação fraca como um todo.

Podemos classificar os processos fracos numa maneira conveniente escrevendo a densidade de lagrangeana na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_W = \frac{G}{\sqrt{2}} & (j_e^+ j_e + j_\mu^+ j_\mu + j_e^+ j_0 + j_e^+ j_1 \\
 & + j_\mu^+ j_e + j_\mu^+ j_\mu + j_\mu^+ j_0 + j_\mu^+ j_1 \\
 & + j_0^+ j_e + j_0^+ j_\mu + j_0^+ j_0 + j_0^+ j_1 \\
 & + j_1^+ j_e + j_1^+ j_\mu + j_1^+ j_0 + j_1^+ j_1)
 \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Na tab. 1.4.1 temos os vários processos fracos correspondendo aos vários termos da eq. (1.4.3).

Em relação aos decaimentos beta do neutrons e do muon, Feynman e Gell-Mann⁽¹²⁾ criaram as hipóteses da corrente vetorial conservada (CVC) da interação fraca em conexão com a teoria da interação universal (V-A) e mostraram, que essas hipóteses davam uma explicação simples da universalidade das constantes de acoplamento do " β -decay" e do " μ -decay".

Mas um outro problema muito importante é que, nas interações violando a estranheza (caixas 9 a 12 da tab. (1.4.1)) existia uma classificação confusa de decaimentos envolvendo kaons e hyperons, neutrons e carregados.

Assim, numa tentativa de esclarecer a relação de J_0 para J_1 , Cabibbo⁽¹³⁾ fez uma hipótese a qual estabelece que a corrente fraca hadrônica pode ser representada como integrante de uma classificação de hadrons de SU(3).

Esta teoria é uma generalização da outra, desenvolvida por Feynman e Gell-Mann, e introduz apenas um parâmetro o ângulo θ (chamado ângulo de Cabibbo) que descreve as rotações no plano de SU(3).

1.5 - O Problema das Correções Radiativas

Quando tratamos com partículas carregadas, uma forma de interação torna-se importante: a eletromagnética. Neste caso, as partículas interagem com o campo externo e com seu próprio campo alterando resultados como, por exemplo, a seção de choque e a taxa de transição por um processo conhecido como cor

TABELA 1.4.1 - Classificação dos Processos Fracos de Acordo com a eq. (1.4.3)

j_e	j_μ	j_0	j_1
$e^- + \nu_e + \nu_e + e^-$ $e^- + \bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$ $e^+ + e^- \rightarrow \nu_e + \bar{\nu}_e$ [1]	$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ [2]	$(Z, N) \rightarrow (Z-1, N+1) e^+ + \nu_e$ $p \rightarrow p + d + e^+ + \nu_e$ $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ $\pi^+ + e^+ + \nu_e$ $\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$ [5]	$K^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$ $K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$ $K_L^0 \rightarrow \pi^- + e^+ + \nu_e$ [9]
$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ [3]	$\mu^- + \nu_\mu \rightarrow \nu_\mu + \mu^-$ $\bar{\mu}^- + \bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \mu^-$ $\mu^+ + \mu^- \rightarrow \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ [4]	$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ $\bar{\mu}^- + p \rightarrow n + \nu_\mu$ $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + \mu^+$ [7]	$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ $K^+ \rightarrow \pi^0 + \mu^+ + \nu_\mu$ $K_L^0 \rightarrow \pi^- + \mu^+ + \nu_\mu$ [11]
$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ $\nu_e + n \rightarrow p + e^-$ $\pi^- \rightarrow e^- + \nu_e$ [6]	$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ $\nu_\mu + n \rightarrow p + \mu^-$ [8]	$n + p \rightarrow p + n$ [15]	$\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$ $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$ $K \rightarrow 2\pi, 3\pi$ [13]
$K^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ $\Lambda^0 \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ $\Sigma^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e$ $K_L^0 \rightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ $\Xi \rightarrow \Lambda + e^- + \bar{\nu}_e$ [10]	$K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ $K_L^0 \rightarrow \pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ [12]	$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$ $\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$ $K \rightarrow 2\pi, 3\pi$ [14]	$\Lambda^0 \rightarrow p + p + \Lambda^0$ [16]

reções radiativas.

Essas correções são do mesmo tipo encontradas na E.Q. e vamos calculá-las com a teoria tradicional de corrente-corrente com a renormalização usual (ver cap. II). Elas alteram pouco o resultado, em torno de 4%, mas em certos casos tornam-se importantes.

Já existem vários trabalhos sobre correções radiativas na literatura para processos fundamentais, e.g., Behrends, Finkelstein e Sirlin ⁽¹⁴⁾, Berman ⁽¹⁵⁾, Berman e Sirlin ⁽¹⁶⁾ e Kuznetson ^(17,18) mas, como o processo de cálculo não é trivial vamos fazê-lo explicitamente para servir de apoio à compreensão dos resultados.

No capítulo II seguiremos a orientação da ref. ⁽¹⁴⁾, onde uma interação geral a quatro componentes conservando a paridade é assumida mas, desde a descoberta da violação da paridade de todos os outros cálculos assumiram a teoria (V-A) como ponto de partida.

CAPÍTULO II

UM MÉTODO DE CÁLCULO DE CORREÇÕES RADIATIVAS

2.1 - Introdução

Consideremos o decaimento de uma partícula (energia de repouso m_1) em uma mais leve (energia de repouso m_2) como resultado de uma interação tensorial arbitrária (Γ).

A lagrangeana de interação aconselhável para estudar correções radiativas pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{INT} = g \sum_{\sigma, \rho} a_{\sigma} \phi_{\rho}^{\sigma} (\bar{\Psi}_1 \Gamma_{\rho} \Psi_2) + e \sum_{K=1}^2 \sum_{\mu} A_{\mu} (\bar{\Psi}_K \gamma_{\mu} \Psi_K) \quad (2.1.1)$$

Aqui a interação eletromagnética é dada na sua forma original. O primeiro termo é uma combinação linear de invariantes misturados nas proporções $g_{\sigma} = g a_{\sigma}$ onde, $\sigma = 0, \dots, 4$ e construídos dos campos tensoriais ϕ_{ρ}^{σ} (e.g. campo do neutrino, $\bar{\Psi}_2 \Gamma_{\rho}^{\sigma} \Psi_1$ onde, o tensor ϕ_{ρ}^{σ} é formado das funções de onda ϕ_1 e ϕ_2 de dois neutrinos) que são responsáveis pelo decaimento. O índice ρ corre sobre todas as componentes de cada tensor, por exemplo, no caso vetorial $\rho = 0, \dots, 3$.

A eq. (2.1.1) será abreviada para:

$$\mathcal{L}_{INT} = g \bar{\Psi}_1 \Phi \Psi_2 + e \sum_{K=1}^2 \bar{\Psi}_K \mathcal{A}' \Psi_K \quad (2.1.2)$$

onde,

$$\phi = \sum_{\sigma, \rho} a_{\sigma} \phi_{\rho}^{\sigma} \Gamma_{\rho}^{\sigma} \quad (2.1.3)$$

$$\mathcal{K} = \sum_{\mu} A_{\mu} \gamma^{\mu} \quad (2.1.4)$$

Seguindo a orientação de Behrends, Finkelstein e Sir-
lin⁽¹⁴⁾, vamos calcular as correções de ordem α (constante de
estrutura fina) para o decaimento.

No sentido de compreendermos melhor a cinemática do
problema podemos dizer que, um processo em que há troca nas mas-
sas de repouso deve estar relacionado a uma rotação de Lorentz
de seus vetores momentos (p_1). Seja θ o ângulo da rotação de Lo-
rentz e ω o ângulo relacionado com a troca de massa. Eles po-
dem ser definidos pelas relações:

$$\cosh \theta = p_1 \cdot p_2 / m_1 m_2 \quad (2.1.5)$$

e

$$\omega = \ln (m_1 / m_2) \quad (2.1.6)$$

2.2 - Correções Radiativas para Fótons Virtuais

Designemos os três diagramas de Feynman de ordem e^2
por (a), (b) e (c), (fig. 2.1.1).

A correção para o elemento de matriz (parte do opera-
dor) associado com o diagrama (a) da fig. 2.1.1 é

$$\Delta_a M(\phi) = (ge^2/4\pi i) \int \gamma_{\mu} \frac{1}{(\not{p}_2 - \not{k} - m_2)} \phi \frac{1}{(\not{p}_1 - \not{k} - m_2)} \gamma^{\mu} k^{-2} C(k^2) d^4 k \quad (2.2.1)$$

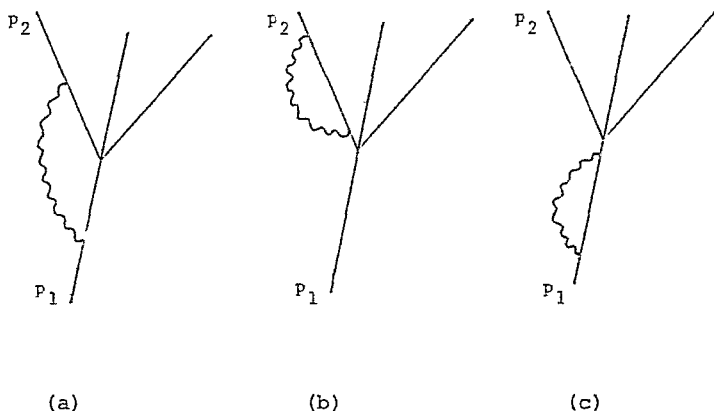


Fig. 2.1.1 - Diagrama de Feynman para os processos de fôtons virtuais.

Aqui seguimos a notação de Feynman ⁽¹⁹⁾. As regras usadas para construir o elemento de matriz dado pela eq. (2.2.1) são as seguintes:

- i - Um fator g designando 1ª ordem em interação fraca;
- ii - Um fator e^2 designando 2ª ordem em interação eletromagnética;
- iii - Um fator i que vem da expansão da matriz S ;
- iv - Um fator $(\not{p}-\not{k}-m)$ para todas as linhas de fermions internas;
- v - Um fator \not{k}^{-2} , acoplado a $\gamma_\mu \dots \gamma^\mu$, para linhas de fôtons;
- vi - Um fator $\int d^4 q_i / (2\pi)^4$ sobre todas as linhas internas, de fermions e bosons onde, q_i representa os momentos;
- vii - Um fator, no caso Φ , para a interação com o campo.

Na eq. (2.2.1), como podemos observar, já foram feitas as integrações nas linhas de fermions internas restando somente a integração na linha do bôson, i.e., o fôton. Mas a integral so

bre d^4k é divergente, portanto usa-se um artifício que é introduzir um fator, $C(k^2)$, na integral. Esse fator é escolhido de modo que $C(0) = 1$ e $C(k^2) \rightarrow 0$ quando $k^2 \rightarrow \infty$. Assim uma escolha aceitável é

$$C(k^2) = -\lambda^2 k^2 (k^2 - \lambda^2)^{-1} (k^2 - \lambda_{\min}^2)^{-1}$$

onde λ representa uma massa hipotética dada ao fóton. Temos também que:

$$M(\phi) = \sum_{\sigma, \rho} a_{\sigma} \phi_{\rho}^{\sigma} M(\Gamma_{\rho}^{\sigma}) .$$

Por uma redução padrão (ver apêndice A), obtemos:

$$\Delta_a M(\phi) = (-ge^2/8\pi) \left\{ \gamma_{\mu} (\not{p}_2 + m_2) \phi (\not{p}_1 + m_1) \gamma^{\mu} J_1 - \right. \\ \left. - \left[\gamma_{\mu} \gamma_{\sigma} \phi (\not{p}_1 + m_1) \gamma^{\mu} + \gamma_{\mu} (\not{p}_2 + m_2) \phi \gamma_{\sigma} \gamma^{\mu} \right] J_{2\sigma} + \gamma_{\mu} \gamma_{\sigma} \phi \gamma_{\tau} \gamma^{\mu} J_{3\sigma\tau} \right\} \quad (2.2.2)$$

onde,

$$J_1 = \int_0^1 (dy/p_y^2) \ln(p_y^2/\lambda_{\min}^2) \quad (2.2.3)$$

$$J_{2\sigma} = \int_0^1 (dy/p_y^2) p_{y\sigma} \quad (2.2.4)$$

$$J_{3\sigma\tau} = \int_0^1 dy \left[p_{y\sigma} p_{y\tau} / p_y^2 + \frac{1}{4} \delta_{\sigma\tau} - \frac{1}{2} \delta_{\sigma\tau} \ln(\lambda^2/p_y^2) \right] \quad (2.2.5)$$

e

$$p_y = y p_1 + (1-y) p_2$$

Um método de calcular essas integrais está indicado no apêndi -

ce B. Resultam:

$$J_1 = \left[F_1 + \theta(\omega - 2\omega_c) \right] / m_1 m_2 \sinh \theta \quad (2.2.6)$$

$$J_{2\sigma} = \left[(F_2 - F_3) p_{2\sigma} + F_3 p_{1\sigma} \right] / m_1 m_2 \quad (2.2.7)$$

$$J_{3\sigma\tau} = (q_\sigma q_\tau / q^2) F_4 - \left[(p_{2\sigma} q_\tau + q_\sigma p_{2\tau}) / 2m_1 m_2 \right] F_3 + (p_{2\sigma} p_{2\tau} / 2m_1 m_2) F_2 + F_5 q_\sigma q_\tau \quad (2.2.8)$$

onde q é o momento transferido no decaimento:

$$q = p_2 - p_1 \quad (2.2.9)$$

e ω_c é o ângulo de "cut-off" mínimo:

$$\omega_c = \ln (\lambda_{\min} / m_2) \quad (2.2.10)$$

As funções F_K são definidas como segue

$$F_1(\theta, \omega) = L \left(\frac{2 \sinh \theta}{e^\omega - e^{-\theta}} \right) - L \left(\frac{2 \sinh \theta}{e^\theta - e^{-\omega}} \right) + (\omega - \theta) \ln \left(\frac{\sinh \frac{1}{2}(\omega - \theta)}{\sinh \frac{1}{2}(\omega + \theta)} \right) \quad (2.2.11)$$

$$F_2(\theta) = 2\theta / \sinh \theta \quad (2.2.12)$$

$$F_3(\theta, \omega) = \frac{1}{\sinh \theta} \left(\theta + \frac{\omega \sinh \theta - \theta \sinh \omega}{\cosh \omega - \cosh \theta} \right) \quad (2.2.13)$$

$$F_4(\theta, \omega) = 1 + \omega + \frac{\theta \sinh \theta - \omega \sinh \omega}{\cosh \omega - \cosh \theta} + \frac{\theta e^{-\omega}}{\sinh \theta} \quad (2.2.14)$$

$$F_5(\theta, \omega) = \frac{\omega \sinh \omega - \theta \sinh \theta}{2(\cosh \omega - \cosh \theta)} + \frac{1}{2} (\omega - 2\omega_c) - \frac{3}{4} \quad (2.2.15)$$

Em F_5 aparece o ângulo de "cut-off" máximo ω_c :

$$\omega_{>} = \ln(\lambda/m_2) \quad (2.2.16)$$

Aqui $L(x)$ é uma das funções de Spence e é definida por

$$L(x) = \int_0^x \ln(1-t) (dt/t) \quad (2.2.17)$$

Um estudo detalhado dessas funções é dado por Mitchell (20).

Se tomarmos o elemento de matriz, eq. (2.2.2), entre estados de onda plana inicial e final, u e \bar{u} , e usando a relação $\gamma_{\mu} \not{A} = -\not{A} \gamma_{\mu} + 2 A_{\mu}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta aM(\phi) = & (-ge^2/2\pi) \{ (p_1 \cdot p_2) J_1^{\phi} - \frac{1}{2} [\not{p}_1 \not{p}_2^{\phi} + \phi \not{p}_2 \not{p}_1] + \\ & + \frac{1}{4} \gamma_{\mu} \gamma_{\sigma} \phi \gamma_{\tau} \gamma^{\mu} J_{3\sigma\tau} \} \quad (2.2.18) \end{aligned}$$

Após a renormalização da massa e função de onda e usando as regras dos gráficos de Feynman dados anteriormente, as contribuições dos outros dois gráficos (os diagramas de "self-energy" (b) e (c) da fig.2.1.1 são dadas por:

$$-(ge^2/2\pi) (R_D + R_C) \phi \quad (2.2.19)$$

onde

$$R_D = \frac{1}{2} \ln(\lambda/m_2) - \ln(m_2/\lambda_{\min}) + 9/8 = \frac{1}{2} \omega_{>} + \omega_{<} + 9/8 \quad (2.2.20)$$

Para obtermos R_C substituímos m_2 por m_1 na eq. (2.2.20). Assim

$$\begin{aligned} R_C &= \frac{1}{2} \ln(\lambda/m_1) - \ln(m_1/\lambda_{\min}) + 9/8 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\lambda}{m_1} \frac{m_2}{m_2}\right) - \ln\left(\frac{m_1}{m_2} \frac{m_2}{\lambda_{\min}}\right) + 9/8 \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\lambda}{m_2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{m_1}{m_2}\right) - \ln\left(\frac{m_1}{m_2}\right) + \ln\left(\frac{\lambda_{\min}}{m_2}\right) + 9/8 \end{aligned}$$

Isso pôde ser feito devido às relações contidas nas eqs. (2.1.5) e (2.1.6). Então,

$$R = R_D + R_C = w_> + 2w_< - \frac{3}{2}w + 9/4 \quad (2.2.21)$$

Para ordem e^2 , a correção radioativa para o elemento de matriz dos fótons virtuais é portanto,

$$\Delta M(\phi) = (-ge^2/2\pi) \{ [(p_1 \cdot p_2) J_1 + R] \phi - \frac{1}{2} [\not{p}_1 \not{p}_2 \phi + \phi \not{p}_2 \not{p}_1] + \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\sigma \phi \gamma_\tau \gamma^\mu J_{3\sigma\tau} \} \quad (2.2.22)$$

Como estamos tratando ainda, com a parte do operador do elemento de matriz da eq. (2.2.22) temos que tomá-lo entre os estados inicial e final. Isso acarretará a eliminação de várias matrizes gamas de Dirac do elemento de matriz.

Assim, para o caso escalar $\phi = 1 \equiv \Gamma^0$, a eq. (2.2.22) torna-se:

$$\Delta M(\Gamma^0) = (-ge^2/2\pi) \{ [(p_1 \cdot p_2) J_1 + R] - \frac{1}{2} [\not{p}_1 \not{p}_2 + \not{p}_2 \not{p}_1] + \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\tau \gamma^\mu J_{3\sigma\tau} \} \Gamma^0$$

Seja o termo $\frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\tau \gamma^\mu J_{3\sigma\tau}$; por ser $J_{3\sigma\tau}$ completamente simétrico em σ e τ ele torna-se

$$\frac{1}{4} \frac{1}{2} \gamma_\mu (\gamma_\sigma \gamma_\tau + \gamma_\tau \gamma_\sigma) \gamma^\mu J_{3\sigma\tau} = \frac{1}{4} \frac{1}{2} \gamma_\mu (2g_{\sigma\tau}) \gamma^\mu J_{3\sigma\tau} = \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma^\mu J_{3\sigma\sigma} = J_{3\sigma\sigma}$$

O termo $[\not{p}_1 \not{p}_2 + \not{p}_2 \not{p}_1]$ usando a eq. (2.2.7) torna-se

$$[\not{p}_1 \gamma_\sigma + \gamma_\sigma \not{p}_2] [(F_2 - F_3) p_{2\sigma} + F_3 p_{1\sigma}] / m_1 m_2 = [\not{p}_1 \not{p}_2 (F_2 - F_3) + p_1^2 F_3 + p_2^2 (F_2 - F_3) + \not{p}_1 \not{p}_2 F_3] / m_1 m_2$$

mas $\cancel{p}_1 \cancel{p}_2 = 2p_1 \cdot p_2 - \cancel{p}'_2 \cancel{p}_1$, $p_1^2 = m_1^2$ e $p_2^2 = m_2^2$, então,

$$[\cancel{p}'_1 \cancel{p}_2 + \cancel{p}_2 \cancel{p}'_1] = [(2p_1 \cdot p_2 - \cancel{p}'_2 \cancel{p}_1)F_2 + m_1^2 F_3 + m_2^2 (F_2 - F_3)] / m_1 m_2$$

utilizando o fato de que $\cancel{p}_1 |u_1\rangle = m_1 |u_1\rangle$ e $\langle u_2 | \cancel{p}'_2 = \langle u_2 | m_2$, temos que

$$[\cancel{p}'_1 \cancel{p}_2 + \cancel{p}_2 \cancel{p}'_1] = [(2 \cosh \theta - 1)F_2 + e^{\omega} F_3 + e^{-\omega} (F_2 - F_3)]$$

Portanto,

$$\Delta M(\Gamma^0) = (-ge^2/2\pi) \{ \cotgh \theta [\bar{F}_1 + \theta(\omega - 2\omega_<)] + \omega_> + 2\omega_< - \frac{3}{2}\omega +$$

$$+ 9/4 - \frac{1}{2} [(2 \cosh \theta - 1)F_2 + e^{\omega} F_3 + e^{-\omega} (F_2 - F_3)] +$$

$$+ F_4 - \frac{p_2 \cdot q}{m_1 m_2} F_3 + \frac{1}{2} e^{-\omega} F_2 + 4F_5 \} \Gamma^0$$

$$= (-ge^2/2\pi) \{ \cotgh \theta [\bar{F}_1 + \theta(\omega - 2\omega_<)] + \omega_> + 2\omega_< - \frac{3}{2}\omega + 9/4 -$$

$$- \frac{1}{2} [(2 \cosh \theta - 1)F_2 + (e^{\omega} + e^{-\omega})F_3] + F_4 - \cosh \theta F_3 + 4F_5 \} \Gamma^0$$

$$= (-ge^2/2\pi) \{ \cotgh \theta [\bar{F}_1 + \theta(\omega - 2\omega_<)] + \omega_> + 2\omega_< - \frac{3}{2}\omega + 9/4 -$$

$$- \frac{1}{2} [(2 \cosh \theta - 1)F_2 - (\cosh \omega - \cosh \theta)F_3 + F_4 + 4F_5] \} \Gamma^0$$

$$= (-ge^2/2\pi) \{ \cotgh \theta [\bar{F}_1 + \theta(\omega - 2\omega_<)] + \omega_> + 2\omega_< - \frac{3}{2}\omega + 9/4 -$$

$$- 2\theta \cotgh \theta + \frac{\theta}{\sinh \theta} - (\cosh \omega - \cosh \theta) \frac{1}{\sinh \theta} (\theta + \frac{\omega \sinh \theta - \theta \sinh \omega}{\cosh \omega - \cosh \theta}) +$$

$$+ 1 + \omega + \frac{\theta \sinh \theta - \omega \sinh \omega}{\cosh \omega - \cosh \theta} + \frac{\theta e^{-\omega}}{\sinh \theta} + \frac{2(\omega \sinh \omega - \theta \sinh \theta)}{(\cosh \omega - \cosh \theta)} + 2(\omega - 2\omega_>) - 3 \} \Gamma^0$$

$$\begin{aligned}
 &= (-ge^2/2\pi) \left\{ \cotgh\theta \left[F_1 + \theta(\omega - 2\omega_<) \right] - 3\omega_> + \frac{3}{2}\omega + \frac{1}{4} + 2\omega_< - \frac{(\theta \sinh\theta - \omega \sinh\omega)}{(\cosh\omega - \cosh\theta)} \right\} + \\
 &+ \frac{\theta e^{-\omega}}{\sinh\theta} - 2\theta \cotgh\theta + \frac{\theta}{\sinh\theta} - (\cosh\omega - \cosh\theta) \frac{1}{\sinh\theta} \left(\theta + \frac{\omega \sinh\theta - \theta \sinh\omega}{\cosh\omega - \cosh\theta} \right) \Gamma^0 \\
 &= (ge^2/2\pi) \left\{ S + T - \frac{\theta}{\sinh\theta} + r_0 \right\} \Gamma^0. \tag{2.2.23}
 \end{aligned}$$

onde

$$S = (\theta - F_1) \cotgh\theta + (1 - \theta \cotgh\theta) (\omega - 2\omega_<) \tag{2.2.24}$$

$$T = (\theta \sinh\theta - \omega \sinh\omega) / (\cosh\omega - \cosh\theta) \tag{2.2.25}$$

$$r_0 = 3\omega_> - \frac{3}{2}\omega - \frac{1}{4} \tag{2.2.26}$$

Podemos observar o aparecimento das divergências do infravermelho e do ultravioleta nas expressões de S e r_0 , respectivamente.

Para o caso Pseudoescalar, $\varphi = \gamma^5 \equiv \Gamma^4$, a eq. (2.2.22) torna-se:

$$\begin{aligned}
 \Delta M(\Gamma^4) &= (-ge^2/2\pi) \left\{ \left[(p_1 \cdot p_2) J_1 + R \right] \gamma^5 - \frac{1}{2} \left[\cancel{p}_1 \cancel{p}_2 \gamma^5 + \gamma^5 \cancel{p}_2 \cancel{p}_1 \right] \right. + \\
 &+ \left. \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma^5 \gamma_\tau \gamma^\mu J_{3\sigma\tau} \right\} \\
 &= (-ge^2/2\pi) \left\{ \left[(p_1 \cdot p_2) J_1 + R \right] \gamma^5 - \frac{1}{2} \left[(2p_1 \cdot p_2 - \cancel{p}_2 \cancel{p}_1) \gamma^5 F_2 + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. (m_1^2 F_3 + m_2^2 (F_2 - F_3)) \gamma^5 \right] / m_1 m_2 + J_{3\sigma\sigma} \gamma^5 \right\} \\
 &= (-ge^2/2\pi) \left\{ \left[(p_1 \cdot p_2) J_1 + R \right] \gamma^5 - \frac{1}{2} \left[(2p_1 \cdot p_2 + \cancel{p}_2 \cancel{p}_1) F_2 + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. (m_1^2 F_3 + m_2^2 (F_2 - F_3)) \gamma^5 \right] / m_1 m_2 + J_{3\sigma\sigma} \gamma^5 \right\}
 \end{aligned}$$

$$= (-ge^2/2\pi) \left\{ \left[(p_1 \cdot p_2) J_1 + R \right] - \frac{1}{2} \left[(2\cosh\theta + 1) F_2 + e^\omega F_3 + e^{-\omega} (F_2 - F_3) \right] + J_{3\sigma\sigma} \right\} \Gamma^4$$

A única diferença para o caso anterior está no termo $(2\cosh\theta + 1)F_2$ ao invés de $(2\cosh\theta - 1)F_2$, onde o fator $\theta/\sinh\theta$ será agora negativo, isto é por causa do fator γ^5 pois ele anticomuta com todos os outros outros gamas, dessa forma podemos agrupar os dois resultados dando:

$$\Delta M(\Gamma^{(0,4)}) = (ge^2/2\pi) \left\{ S+T + \frac{e}{\sinh\theta} + r_0 \right\} \Gamma^{(0,4)} \quad (2.2.27)$$

onde essa notação significa que para o elemento de matriz dependendo de Γ^0 valem os sinais superiores e para o Γ^4 valem os inferiores.

Para o caso vetorial, $\phi = \gamma_\rho \equiv \Gamma^1$, a eq. (2.2.22) torna-se:

$$\Delta M(\Gamma^1) = (ge^2/2\pi) \left\{ \left[(p_1 \cdot p_2) J_1 + R \right] \gamma_\rho - \frac{1}{2} \left[\not{p}_1 \not{p}_2 \gamma_\rho + \gamma_\rho \not{p}_2 \not{p}_1 \right] + \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\rho \gamma_\tau \gamma^\mu J_{3\sigma\tau} \right\}$$

O segundo termo é igual a

$$\begin{aligned} \left[\not{p}_1 \not{p}_2 \gamma_\rho + \gamma_\rho \not{p}_2 \not{p}_1 \right] &= \left[\not{p}_1 \gamma_\sigma \gamma_\rho + \gamma_\rho \gamma_\sigma \not{p}_1 \right] \left[(F_2 - F_3) p_{2\sigma} + F_3 p_{1\sigma} \right] / m_1 m_2 \\ &= \left[\not{p}_1 \not{p}_2 (F_2 - F_3) \gamma_\rho + p_1^2 \gamma_\rho F_3 + \gamma_\rho (F_2 - F_3) p_2^2 + \gamma_\rho \not{p}_1 \not{p}_2 F_3 \right] / m_1 m_2 \\ &= \left[(2p_1 \cdot p_2 - p_2^2 p_1) (F_2 - F_3) \gamma_\rho + m_1^2 \gamma_\rho F_3 + \gamma_\rho (F_2 - F_3) m_2^2 + \gamma_\rho (2p_1 \cdot p_2 - p_2^2 p_1) F_3 \right] / m_1 m_2 \\ &= \left[2p_1 \cdot p_2 F_2 \gamma_\rho + (\not{p}_2 \gamma_\rho \not{p}_1 - 2p_2 p_1) (F_2 - F_3) + (\not{p}_2 \gamma_\rho \not{p}_1 - 2p_2 p_1) F_3 \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + m_1^2 \gamma_\rho F_3 + \gamma_\rho (F_2 - F_3) m_2^2] / m_1 m_2 \\
 = & \{ [2p_1 \cdot p_2 F_2 + m_1 m_2 F_2 + m_1^2 F_3 + m_2^2 (F_2 - F_3)] \gamma_\rho - [2m_2 p_{1c} (F_2 - F_3) + 2p_{2c} m_1 F_3] \} / m_1 m_2 \\
 = & [(2 \cosh \theta + 1) F_2 + e^\omega F_3 + e^{-\omega} (F_2 - F_3)] \gamma_\rho - 2 \left[\frac{p_{1c}}{m_1} (F_2 - F_3) + \frac{p_{2c}}{m_2} F_3 \right]
 \end{aligned}$$

O terceiro termo é igual a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\rho \gamma_\tau \gamma^\mu \gamma^\nu J_{3\sigma\tau} &= \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\sigma (2g_{\rho\tau} - \gamma_\tau \gamma_\rho) \gamma^\mu \gamma^\nu J_{3\sigma\tau} \\
 &= \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu J_{3\sigma\rho} - \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\tau \gamma_\rho \gamma^\mu \gamma^\nu J_{3\sigma\tau} \\
 &= -\gamma_\sigma J_{3\sigma\rho} - \frac{1}{4} \frac{1}{2} \gamma_\mu (\gamma_\sigma \gamma_\tau + \gamma_\tau \gamma_\sigma) \gamma_\rho \gamma^\mu \gamma^\nu J_{3\sigma\tau} \\
 &= -\gamma_\sigma J_{3\sigma\rho} - \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma^\mu \gamma^\nu J_{3\sigma\sigma} \\
 &= \frac{1}{2} J_{3\sigma\sigma} \gamma_\rho - \gamma_\sigma J_{3\sigma\rho}
 \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}
 -\gamma_\sigma J_{3\sigma\rho} &= -(\alpha_\rho / \alpha^2) F_4 + \left[(\beta_2 \alpha_\rho + \alpha p_{2\rho}) / 2m_1 m_2 \right] F_3 - (\beta_2 p_{2\rho} / 2m_1 m_2) F_2 - F_5 \gamma_\rho \\
 &= -(m_2 - m_1) \alpha_\rho (F_4 / \alpha^2) + \frac{(F_3 \alpha_\rho)}{2m_1} + \frac{(m_2 - m_1)}{2m_1 m_2} p_{2\rho} F_3 - \frac{p_{2\rho}}{2m_1} F_2 - F_5 \gamma_\rho
 \end{aligned}$$

Somamos agora os termos $+ \frac{p_{1c}}{m_1} (F_2 - F_3) + \frac{p_{2c}}{m_2} F_3$, então temos

$$- \left[(m_2 - m_1) (F_4 / \alpha^2) - \frac{F_3}{2m_1} \right] \alpha_\rho + \frac{p_{2\rho}}{2m_1} F_3 - \frac{p_{2c} F_3}{2m_2} - \frac{p_{2\rho}}{2m_1} F_2 - F_5 \gamma_\rho +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{p_{1\rho}}{m_1} (F_2 - F_3) + \frac{p_{2\rho}}{m_2} F_3 \\
= & - \left[(m_2 - m_1) (F_4/q^2) - \frac{F_3}{2m_1} \right] \alpha_\rho + \frac{p_{2\rho} F_3}{2m_2} - \frac{p_{2\rho} (F_2 - F_3)}{2m_1} + \frac{p_{1\rho} (F_2 - F_3) - F_5 \gamma_\rho}{m_1} \\
= & - \left[(m_2 - m_1) (F_4/q^2) - \frac{F_3}{2m_1} \right] \alpha_\rho + \frac{p_{2\rho} F_3}{2m_2} + \frac{p_{1\rho} (F_2 - F_3)}{2m_1} - \left[(F_2 - F_3)/2m_1 \right] \alpha_\rho - F_5 \gamma_\rho \\
= & - \left\{ (m_2 - m_1) (F_4/q^2) + (F_2 - 2F_3)/2m_1 \right\} \alpha_\rho + \left[(F_2 - F_3)/2m_1 \right] p_{1\rho} + \\
& + (F_3/2m_2) p_{2\rho} \} \Gamma^0 - F_5 \gamma_\rho \\
\equiv & A_\rho^0 \cdot \Gamma^0 - F_5 \gamma_\rho
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta M(\Gamma^1) = & (-ge^2/2\pi) \{ (p_1 \cdot p_2) J_{1+R} - \frac{1}{2} \left[(2\cosh\theta + 1) F_2 + e^\omega F_3 + \right. \\
& \left. + e^{-\omega} (F_2 - F_3) \right] + \frac{1}{2} J_{3\sigma\sigma} - F_5 \} \Gamma^1 + A_\rho^0 \Gamma^0
\end{aligned}$$

Calculemos o termo proporcional a Γ^1 da equação acima;

$$\begin{aligned}
& (-ge^2/2\pi) \{ (p_1 \cdot p_2) J_{1+R} - \frac{1}{2} \left[(2\cosh\theta + 1) F_2 + e^\omega F_3 + e^{-\omega} (F_2 - F_3) \right] + \frac{1}{2} J_{3\sigma\sigma} - F_5 \} \\
= & (-ge^2/2\pi) \{ (p_1 \cdot p_2) J_{1+R} - \frac{1}{2} \left[(2\cosh\theta + 1) F_2 + e^\omega F_3 + e^{-\omega} (F_2 - F_3) \right] + \\
& + \frac{1}{4} e^{-\omega} F_2 + \frac{1}{2} F_4 - \frac{e^{-\omega}}{2} F_3 + \frac{\cosh\theta}{2} F_3 + 2F_5 - F_5 \} \\
= & (-ge^2/2\pi) \{ (p_1 \cdot p_2) J_{1+R} - \frac{1}{2} \left[(2\cosh\theta + 1) F_2 + e^\omega F_3 + \frac{e^{-\omega}}{2} F_2 \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{F_4}{2} + \frac{\cosh \theta}{2} F_3 + F_5 \} \\
 = & (-ge^2/2\pi) \{ (p_1 \cdot p_2) J_{1+R} - \frac{1}{2} \left[(2\cosh \theta + 1) F_2 + e^\omega F_3 + \frac{e^{-\omega}}{2} F_2 \right] + \\
 & + \frac{1}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{\theta \sinh \theta - \omega \sinh \omega}{2(\cosh \omega - \cosh \theta)} + \frac{\theta e^{-\omega}}{2 \sinh \theta} + \frac{\cosh \theta}{2} F_3 + \\
 & + \frac{\omega \sinh \omega - \theta \sinh \theta}{2(\cosh \omega - \cosh \theta)} + \frac{\omega}{2} - \omega > - \frac{3}{4} \\
 = & (-ge^2/2\pi) \{ (p_1 \cdot p_2) J_{1+R+\omega-\omega} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left[2\cosh \theta + 1 \right] F_2 - \frac{1}{2} (e^\omega - \cosh \theta) F_3 \\
 = & (-ge^2/2\pi) \{ (p_1 \cdot p_2) J_{1+R+\omega-\omega} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left[2\cosh \theta + 1 \right] F_2 - \frac{1}{2} (\cosh \omega + \sinh \omega - \cosh \theta) F_3 \\
 = & (-ge^2/2\pi) \{ (p_1 \cdot p_2) J_{1+R+\omega-\omega} - \frac{1}{4} - 2\theta \cot \theta \operatorname{th} \theta - \frac{\theta}{\sinh \theta} \frac{1}{2} \sinh \omega F_3 - \\
 & - \frac{1}{2} (\cosh \omega - \cosh \theta) \frac{1}{\sinh \theta} \times \left(\theta + \frac{\omega \sinh \theta - \theta \sinh \omega}{\cosh \omega - \cosh \theta} \right) \} \\
 = & (-ge^2/2\pi) \{ (p_1 \cdot p_2) J_{1+R+\omega-\omega} - \frac{1}{4} - 2\theta \cot \theta \operatorname{th} \theta - \frac{\theta}{\sinh \theta} - \frac{1}{2} \sinh \omega F_3 \\
 & - \frac{\theta \cosh \omega}{2 \sinh \theta} + \frac{1}{2} \theta \cot \theta \operatorname{th} \theta - \frac{\omega}{2} + \frac{\theta \sinh \omega}{2 \sinh \theta} \} \\
 = & (-ge^2/2\pi) \{ (p_1 \cdot p_2) J_{1+R+\frac{\omega}{2}-\omega} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \theta \cot \theta \operatorname{th} \theta - \frac{\theta}{\sinh \theta} - \\
 & - \frac{\theta \cosh \omega}{2 \sinh \theta} + \frac{\theta \sinh \omega}{2 \sinh \theta} - \frac{\theta \sinh \omega}{2 \sinh \theta} - \frac{\omega \sinh \omega}{2(\cosh \omega - \cosh \theta)} - \frac{\theta \sinh^2 \omega}{2 \sinh \theta (\cosh \omega - \cosh \theta)} \} \\
 = & (-ge^2/2\pi) \{ (p_1 \cdot p_2) J_{1+R+\frac{3\omega}{2}-\omega-\omega} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \theta \cot \theta \operatorname{th} \theta - \frac{\theta}{\sinh \theta} - \frac{\theta \sinh \omega}{2 \sinh \theta} + \\
 & + \frac{\theta \sinh^2 \omega}{2 \sinh \theta (\cosh \omega - \cosh \theta)} - \frac{\omega \sinh \omega}{2(\cosh \omega - \cosh \theta)} \}
 \end{aligned}$$

$$= (-ge^2/2\pi) \left\{ (p_1 \cdot p_2) J_{1+R} - \frac{3\omega}{2} - \omega - \omega_{>} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\theta \cotgh\theta - \frac{\theta}{\sinh\theta} - \right. \\ \left. - \frac{\omega \sinh\omega}{2(\cosh\omega - \cosh\theta)} + \frac{-\theta \cosh\omega (\cosh\omega - \cosh\theta) + \theta \sinh^2\omega}{2\sinh\theta (\cosh\omega - \cosh\theta)} \right\}$$

$$= (-ge^2/2\pi) \left\{ (p_1 \cdot p_2) J_{1+R} - \frac{3\omega}{2} - \omega - \omega_{>} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\theta \coth\theta - \frac{\theta}{\sinh\theta} - \right. \\ \left. - \frac{\omega \sinh\omega}{2(\cosh\omega - \cosh\theta)} + \frac{-\theta \cosh^2\omega + \theta \sinh^2\omega + \theta \cosh\omega \cosh\theta}{2\sinh\theta (\cosh\omega - \cosh\theta)} \right\}$$

$$= (-ge^2/2\pi) \left\{ (p_1 \cdot p_2) J_{1+R} - \frac{3\omega}{2} - \omega - \omega_{>} - \frac{3}{2}\theta \cotgh\theta - \frac{\theta}{\sinh\theta} - \right. \\ \left. - \frac{\omega \sinh\omega}{2(\cosh\omega - \cosh\theta)} + \frac{\theta (\cosh\omega \cosh\theta - 1)}{2\sinh\theta (\cosh\omega - \cosh\theta)} \right\}$$

mas

$$\frac{\theta (\cosh\omega \cosh\theta - 1)}{2\sinh\theta (\cosh\omega - \cosh\theta)} = \frac{\theta (\cosh\omega \cosh\theta - \cosh^2\theta + \sinh^2\theta)}{2\sinh\theta (\cosh\omega - \cosh\theta)} = \\ = \frac{\theta \sinh\theta}{2(\cosh\omega - \cosh\theta)} + \frac{\theta}{2} \cotgh\theta$$

Então

$$\Delta M(\Gamma^1) = (-ge^2/2\pi) \left\{ (\cotgh\theta \left[F_1 + \theta(\omega - 2\omega_{<}) \right] + \omega_{>} + 2\omega_{<} - \frac{3}{2}\omega + \frac{9}{4} - \right. \\ \left. - \frac{3\omega}{2} - \omega - \omega_{>} = \theta \cotgh\theta - \frac{\theta}{\sinh\theta} - \frac{1}{2} \frac{(\omega \sinh\omega - \theta \sinh\theta)}{(\cosh\omega - \cosh\theta)} \right\} \Gamma_{\rho}^1 + A_{\rho}^0 \Gamma^0 \quad \left. \right\} \\ = (ge^2/2\pi) \left\{ (S - \frac{1}{2} T + \theta/\sinh\theta + r_1) \Gamma_{\rho}^1 + A_{\rho}^0 \Gamma^0 \right\} \quad (2.2.28)$$

onde

$$r_1 = -2 \quad (2.2.29)$$

Para o caso Pseudovetorial, $\vartheta = \gamma^5 \gamma_\rho \equiv \Gamma^3$

Neste caso acontece a mesma coisa como no Pseudoesca-
lar, assim podemos ver facilmente que a única diferença entre
 Γ^1 e Γ^3 está no sinal do termo $\theta/\sinh\theta$, devido também ao proble-
ma da anticomutação dos γ^5 , portanto agrupando os termos vetori-
al e axial vetor a eq. (2.2.22) torna-se:

$$\Delta M(\Gamma^{(1,3)}) = (ge^2/2\pi) \left\{ (S - \frac{1}{2} T \pm \theta/\sinh\theta + r_1) \Gamma^{(1,3)} + A_\rho^{(0,4)} \Gamma^{(0,4)} \right\} \quad (2.2.30)$$

onde

$$A_\rho^{(0,4)} \Gamma^{(0,4)} = \left[(F_3 - F_2/2m_1) P_{1\rho} + (F_3/2m_2) P_{2\rho} + \left[(m_2 + m_1) (F_4/q^2) + (F_2 - 2F_3)/2m_1 \right] q_\rho \right. \quad (2.2.31)$$

Notamos que nos casos vetorial e pseudovetorial só apa-
rece a divergência do infravermelho em S.

Para o caso tensorial, $\phi = \frac{1}{2} (\gamma_\rho \gamma_\lambda - \gamma_\lambda \gamma_\rho) \equiv \Gamma^2$.

Aqui faremos o mesmo procedimento que foi feito no ca-
so vetorial com uma única diferença, teremos agora que atraves-
sar duas matrizes γ de Dirac para fora da expressão de $\Delta M(\phi)$,
eq. (2.2.22) ao invés de uma como no caso vetorial. Dessa forma

$$\Delta M(\Gamma^2) = (ge^2/2\pi) \left\{ (S - T - \theta/\sinh\theta + r_2) \Gamma^2 + \epsilon_{\rho\lambda\nu\mu} B_\mu \Gamma^1 \right\} \quad (2.2.32)$$

onde

$$r_2 = -\omega_\gamma + \frac{\omega}{2} - 9/4 \quad (2.2.33)$$

$$B_\mu = \left[(F_2 - F_3)/m_1 \right] P_{1\mu} - (F_3/m_2) P_{2\mu} \quad (2.2.34)$$

Novamente temos o aparecimento das divergências de infravermelho e do ultravioleta em S e r_2 , respectivamente.

$\epsilon_{\rho\lambda\nu\mu}$ é o tensor completamente anti-simétrico de valor absoluto unitário.

Os resultados (2.2.23) - (2.2.33) são as correções radioativas de menor ordem para uma transição associada com uma interação tensorial arbitrária e conectando dois estados espino-riais de diferentes massas de repouso.

A divergência do infravermelho aparece exatamente da mesma forma em todas as cinco interações. Essa contribuição será cancelada por um termo similar surgindo do bremstrahlung interno, i.e., dos fótons reais.

Por outro lado, a divergência do ultra-violeta não cancela, exceto nos casos vetoriais e pseudovetoriais.

2.3 - Probabilidades de Transição

No decaimento de dois neutrinos

$$\phi_{\rho}^{\sigma} = \bar{\phi}_2 \Gamma_{\rho}^{\sigma} \phi_1 \quad (2.3.1)$$

onde o tensor ϕ_{ρ}^{σ} é formado pelas funções de onda dos dois neutrinos ϕ_2 e ϕ_1 .

A probabilidade de transição por unidade de tempo p_{α} ra o decaimento de uma partícula de massa de repouso m_1 numa partícula de massa de repouso m_2 , e dois neutrinos é dada por:

$$P d^3 p = (d^3 p / 2 (2\pi)^5 E_1 E_2) \sum_{\sigma\sigma'} a_{\sigma} a_{\sigma'} (I_{\rho\lambda}^{\sigma\sigma'} / 4) \text{Tr} \{ (\not{p}_2 + m_2) M_{\rho}^{\sigma} (\not{p}_1 + m_1) \bar{M}_{\lambda}^{\sigma'} \} \quad (2.3.2)$$

onde E_1 e E_2 são as energias das partículas carregadas inicial e final, p é o momento da última e \bar{M} é definido como $\gamma^0 M^\dagger \gamma^0$. O traço aparece quando fazemos a soma em todas as possibilidades de spin. $M_\rho^\sigma = M_\rho^{(0)\sigma} + \Delta M_\rho^\sigma$, é o elemento de matriz completo. Finalmente,

$$I_{\rho\lambda}^{\sigma\sigma'} = \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\gamma_\mu \Gamma_\rho^\sigma \gamma_\nu \bar{\Gamma}_\lambda^{\sigma'} \right] J_{\mu\nu} \quad (2.3.3)$$

onde

$$J_{\mu\nu} = \int \int d^3k d^3k' \delta(p_1 - p_2 - k - k') k'_\mu k_\nu / KK' \quad (2.3.4)$$

onde k e K representam os momentos e as energias dos dois neutrinos.

A integral, eq. (2.3.4), pode ser calculada facilmente notando que ela depende somente do vetor $q = p_2 - p_1$, que ela é de dimensão do quadrado do momento e é um tensor simétrico em relação a transformações de Lorentz.

Esses fatos são suficientes para fixar sua forma como:

$$J_{\mu\nu} = A q^2 g_{\mu\nu} + B q_\mu q_\nu \quad (2.3.5)$$

onde os coeficientes numéricos A e B serão determinados.

Para encontrar A e B multiplicamos ambos os lados da eq. (2.3.5) por $g^{\mu\nu}$ e por $q^\mu q^\nu$ e obtemos

$$g^{\mu\nu} J_{\mu\nu} = 4 A q^2 + B q^2 \quad (2.3.6)$$

$$q^\mu q^\nu J_{\mu\nu} = A q^4 + B q^4 \quad (2.3.7)$$

Da eq. (2.3.4) é evidente que

$$g^{\mu\nu} J_{\mu\nu} = \int \int \frac{\delta(p_1 - p_2 - k - k') k \cdot k'}{K K'} d^3 k d^3 k' \quad (2.3.8)$$

$$q^\mu q^\nu J_{\mu\nu} = \int \int \frac{\delta(p_1 - p_2 - k - k') (k \cdot k')^2}{K K'} d^3 k d^3 k' \quad (2.3.9)$$

Como $g^{\mu\nu} J_{\mu\nu}$ e $q^\mu q^\nu J_{\mu\nu}$ são invariantes, escolhemos um sistema de coordenadas convenientes para calcularmos as integrais, eqs. (2.3.8) e (2.3.9). Assim escolhemos o sistema no qual $k = -k'$, então $q = (q_0, 0)$.

Agora

$$\int \delta^3(k + k' - q) d^3 k' = 1$$

Assim eq. (2.3.8) e eq. (2.3.9) tornam-se, respectivamente

$$g^{\mu\nu} J_{\mu\nu} = 8\pi \int k^2 dk \delta(2k - q_0) = \pi q^2.$$

$$q^\mu q^\nu J_{\mu\nu} = 16\pi \int k^4 dk \delta(2k - q_0) = \frac{\pi}{2} q^4$$

Então

$$g^{\mu\nu} J_{\mu\nu} = \pi q^2 = 4Aq^2 + B q^2$$

$$q^\mu q^\nu J_{\mu\nu} = \frac{\pi q^4}{2} = A q^4 + B q^4$$

que resulta em $A = \pi/6$ e $B = \pi/3$.

Portanto, a eq. (2.3.5) resulta em:

$$J_{\mu\nu} = \frac{\pi}{6} (q^2 g_{\mu\nu} + 2q_\mu q_\nu) \quad (2.3.10)$$

A seguir observemos um fato importante que, para $\sigma \neq \sigma'$

$$\text{Tr}[\underline{\gamma}_\mu \underline{\gamma}_\sigma \underline{\gamma}_\nu \underline{\gamma}_{\sigma'}] = - \text{Tr}[\underline{\gamma}_\nu \underline{\gamma}_{\sigma'} \underline{\gamma}_\mu \underline{\gamma}_\sigma]$$

donde resulta que $I^{\sigma\sigma'} = 0$. (2.3.11)

Os coeficientes definidos na eq. (2.3.3) são agora calculados

$$\begin{aligned} I^{\infty} &= \frac{1}{4} \text{Tr}[\underline{\gamma}_\mu \underline{\gamma}_\nu] \frac{\pi}{6} (q^2 g_{\mu\nu} + 2q_\mu q_\nu) \\ &= g_{\mu\nu} \frac{\pi}{6} (q^2 g_{\mu\nu} + 2q_\mu q_\nu) \\ &= \frac{\pi}{6} (4q^2 + 2q^2) = \pi q^2 \\ \\ I^{44} &= \frac{1}{4} \text{Tr}[\underline{\gamma}_\mu \underline{\gamma}^5 \underline{\gamma}_\nu \underline{\gamma}^5] \frac{\pi}{6} (q^2 g_{\mu\nu} + 2q_\mu q_\nu) \\ &= + \frac{1}{4} \text{Tr}[\underline{\gamma}_\mu \underline{\gamma}_\nu (\underline{\gamma}^5)^2] \frac{\pi}{6} (q^2 g_{\mu\nu} + 2q_\mu q_\nu) \\ &= \pi q^2 = I^{\infty} \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

$$\begin{aligned} I_{\rho\lambda}^{11} &= \frac{\pi}{6} (q^2 g_{\mu\nu} + 2q_\mu q_\nu) \frac{1}{4} \text{Tr}[\underline{\gamma}_\mu \underline{\gamma}_\rho \underline{\gamma}_\nu \underline{\gamma}_\lambda] \\ &= \frac{\pi}{6} (q^2 g_{\mu\nu} + 2q_\mu q_\nu) [g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} + g_{\rho\nu} g_{\mu\lambda}] \\ &= \frac{\pi}{6} \{ q^2 (g_{\rho\lambda} - 4g_{\rho\lambda} + g_{\rho\lambda}) + 2(q_\rho q_\lambda - q^2 g_{\rho\lambda} + 2q_\lambda q_\rho) \} \\ &= \frac{\pi}{6} (4q_\rho q_\lambda - 4q^2 g_{\rho\lambda}) \\ &= (2\pi/3) [q_\rho q_\lambda - q^2 g_{\rho\lambda}] \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Da mesma forma $I_{\rho\lambda}^{33} = I_{\rho\lambda}^{11}$, e

$$I_{\lambda\rho; \lambda'\rho'}^{22} = (\pi/12) (1-P_{\lambda\rho}) (1-P_{\lambda'\rho'}) (g_{\rho\rho'}^2 - 4g_{\rho\rho}g_{\rho'\rho'}) g_{\lambda\lambda'} \quad (2.3.14)$$

onde $P_{\lambda\rho}$ é um operador de transposição.

Em virtude da eq. (2.3.11), a dupla soma se reduz a uma

$$P = \left[1/2 (2\pi)^5 E_1 E_2 \right] \sum_{\sigma} a_{\sigma}^2 \sum_{\rho\lambda} (I_{\rho\lambda}^{\sigma\sigma}/4) \text{Tr} \left[(\not{p}_2 + m_2) M_{\rho}^{(0)\sigma} (\not{p}_1 + m_1) (\bar{M}_{\lambda}^{(0)\sigma} + 2\Delta\bar{M}_{\lambda}^{\sigma}) \right] \quad (2.3.15)$$

Com o auxílio das eqs. (2.3.12)-(2.3.14), podemos fazer agora o cálculo. No caso tensorial, existe uma simplificação porque $M_{\lambda\rho}^{(0)}$ e $\Delta M_{\lambda'\rho'}$ são anti-simétricos em $\lambda\rho$ e $\lambda'\rho'$, respectivamente.

Portanto, $I_{\lambda\rho, \lambda'\rho'}^{22}$ da eq. (2.3.14) pode ser trocado para

$$I_{\lambda\rho, \lambda'\rho'}^{22} = (\pi/3) g_{\lambda\lambda'} (g_{\rho\rho'}^2 - 4g_{\rho\rho}g_{\rho'\rho'})$$

Os resultados dos $I_{\rho\lambda}^{\sigma\sigma'}$ foram primeiro obtidos por Lenard ⁽²¹⁾.

Para o caso escalar, a eq. (2.3.15) torna-se

$$P_0 = \left[1/2 (2\pi)^5 E_1 E_2 \right] a_0^2 \frac{\pi g^2}{4} \text{Tr} \left[(\not{p}_2 + m_2) g (\not{p}_1 + m_1) (g + 2(g e^2/2\pi) (S+T-\theta/\sinh\theta+r_0)) \right]$$

$$= \left[1/2 (2\pi)^5 E_1 E_2 \right] (g_0^2 + 2(g_0^2 e^2/2\pi) (S+T-\theta/\sinh\theta+r_0)) \frac{\pi g^2}{4} \text{Tr} \left[(\not{p}_2 + m_2) (\not{p}_1 + m_1) \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[1/2 (2\pi)^5 E_1 E_2 \right] g_0^2 (1 + (e^2/2\pi) 2 (S+T-\theta/\sinh\theta + r_0)) \frac{\pi q^2}{4} \text{Tr} \left[\not{x}'_2 \not{x}'_1 + m_1 m_2 \right] \\
 &= \left[1/2 (2\pi)^5 E_1 E_2 \right] g_0^2 (1 + (e^2/2\pi) \alpha_0) \pi q^2 \left[p_1 \cdot p_2 + m_1 m_2 \right] \\
 &= \left[1/2 (2\pi)^5 E_1 E_2 \right] g_0^2 (1 + (e^2/2\pi) \alpha_0) \pi (p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 \cdot p_2) m_1 m_2 \left[\cosh\theta + 1 \right] \\
 &= \left[1/2 (2\pi)^5 E_1 E_2 \right] g_0^2 (1 + (e^2/2\pi) \alpha_0) \pi (m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cosh\theta) m_1 m_2 \left[\cosh\theta + 1 \right] \\
 &= \left[1/2 (2\pi)^5 E_1 E_2 \right] g_0^2 (1 + (e^2/2\pi) \alpha_0) \pi (e^\omega + e^{-\omega} - 2\cosh\theta) m_1^2 m_2^2 (\cosh\theta + 1) \\
 &= \left[1/2 (2\pi)^5 E_1 E_2 \right] g_0^2 (1 + (e^2/2\pi) \alpha_0) 2\pi (\cosh\omega - \cosh\theta) m_1^2 m_2^2 (\cosh\theta + 1) \\
 &= \left[m_1^2 m_2^2 / 2 (2\pi)^4 E_1 E_2 \right] g_0^2 (1 + (e^2/2\pi) \alpha_0) \left[(\cosh\omega - \cosh\theta) \cosh\theta + (\cosh\omega - \right. \\
 &\quad \left. - \cosh\theta) \right] \quad (2.3.16)
 \end{aligned}$$

onde

$$\frac{1}{2} \alpha_0 = S - \theta / \sinh\theta + T + r_0 \quad (2.3.17)$$

Para o caso pseudo-escalar, a eq. (2.3.15) torna-se:

$$\begin{aligned}
 P_4 &= \left[1/2 (2\pi)^5 E_1 E_2 \right] a_4^2 \frac{\pi q^2}{4} \text{Tr} \left[(\not{x}'_2 + m_2) g \gamma^5 (\not{x}'_1 + m_1) (g \gamma^5 + 2(g e^2/2\pi) \right. \\
 &\quad \left. (S+T+\theta/\sinh\theta + r_0) \gamma^5) \right] \\
 &= \left| 1/2 (2\pi)^5 E_1 E_2 \right| g_4^2 (1 + (e^2/2\pi) \alpha_4) \frac{\pi q^2}{4} \text{Tr} \left| (\not{x}'_2 + m_2) \gamma^5 (\not{x}'_1 + m_1) \gamma^5 \right| \\
 &= \left[1/2 (2\pi)^5 E_1 E_2 \right] g_4^2 (1 + (e^2/2\pi) \alpha_4) \frac{\pi q^2}{4} \text{Tr} \left[\not{x}'_2 \not{x}'_1 - m_1 m_2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{1}{2} (2\pi)^5 E_1 E_2 \right] g_4^2 (1 + (e^2/2\pi) \alpha_4) \pi (m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cosh \theta) m_1 m_2 (\cosh \theta - 1) \\
 &= \left[\frac{1}{2} (2\pi)^5 E_1 E_2 \right] g_4^2 (1 + (e^2/2\pi) \alpha_4) 2\pi (\cosh \omega - \cosh \theta) m_1^2 m_2^2 (\cosh \theta - 1) \\
 &= \left[\frac{m_1^2 m_2^2}{2} (2\pi)^4 E_1 E_2 \right] g_4^2 (1 + (e^2/2\pi) \alpha_4) \left[(\cosh \omega - \cosh \theta) \cosh \theta \right. \\
 &\quad \left. - (\cosh \omega - \cosh \theta) \right] \quad (2.3.18)
 \end{aligned}$$

onde

$$\frac{1}{2} \alpha_4 = S + \theta / \sinh \theta + T + r_0 \quad e \quad \overline{\gamma^5} = \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^5 \quad (2.3.19)$$

Para o caso vetorial, a eq. (2.3.15) torna-se:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \left[\frac{1}{2} (2\pi)^5 E_1 E_2 \right] a_1^2 \frac{2\pi}{3} \left[\alpha_\rho \alpha_\lambda - q^2 g_{\rho\lambda} \right] \frac{1}{4} \text{Tr} \left[(\not{x}_2 + m_2) \not{g} \gamma_\rho (\not{x}'_1 + m_1) \right. \\
 &\quad \left. (g \overline{\gamma}_\lambda + 2 (g e^2 / 2\pi) \{ (S - \frac{T}{2} + \theta / \sinh \theta + r_1) \overline{\gamma}_\lambda + A_\lambda^0 \}) \right] \\
 &= \left[\frac{1}{2} (2\pi)^5 E_1 E_2 \right] g_1^2 \frac{2\pi}{3} \left[\alpha_\rho \alpha_\lambda - q^2 g_{\rho\lambda} \right] \frac{1}{4} \left\{ \text{Tr} \left[(\not{x}_2 + m_2) \gamma_\rho (\not{x}'_1 + m_1) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. (1 + 2 (e^2 / 2\pi) (S - \frac{T}{2} + \theta / \sinh \theta + r_1)) \gamma_\lambda \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \text{Tr} \left[(\not{x}_2 + m_2) \gamma_\rho (\not{x}'_1 + m_1) 2 (e^2 / 2\pi) A_\lambda^0 \right] \right\}
 \end{aligned}$$

O primeiro traço da eq. acima é:

$$\text{Tr} \left[(\not{x}_2 + m_2) \gamma_\rho (\not{x}'_1 + m_1) \gamma_\lambda \right] = \text{Tr} \left[\not{x}_2 \gamma_\rho \not{x}'_1 \gamma_\lambda + m_1 m_2 \gamma_\rho \gamma_\lambda \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= p_2^\mu p_1^\nu \text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\lambda] + m_1 m_2 \text{Tr} [\gamma_\rho \gamma_\lambda] \\
 &= 4 \{ p_2^\mu p_1^\nu (g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\nu} g^{\rho\lambda} + g^{\rho\nu} g^{\mu\lambda}) + m_1 m_2 g^{\rho\lambda} \} \\
 &= 4 \{ p_2^\rho p_1^\lambda - (p_1 \cdot p_2 - m_1 m_2) g^{\rho\lambda} + p_2^\lambda p_1^\rho \}
 \end{aligned}$$

O segundo traço é igual a:

$$\text{Tr} [(\not{p}_2 + m_2) \gamma_\rho (\not{p}_1 + m_1)] = \text{Tr} [m_1 \not{p}_2 \gamma_\rho + m_2 \not{p}_1 \gamma_\rho] = 4 \{ m_1 p_2^\rho + m_2 p_1^\rho \}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 P_1 = & \left[1/2 (2\pi)^4 E_1 E_2 \right] g_1^2 \frac{1}{3} [q_\rho q_\lambda - q^2 g_{\rho\lambda}] \left\{ \left[1 + 2 (e^2/2\pi) (s - \frac{T}{2}) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + e/\text{senh}\theta + r_1 \right] \left[p_2^\rho p_1^\lambda - (p_1 \cdot p_2 - m_1 m_2) g^{\rho\lambda} + p_2^\lambda p_1^\rho \right] + \right. \\
 & \left. + 2 (e^2/2\pi) A_\lambda^0 [m_1 p_2^\rho + m_2 p_1^\rho] \right\}
 \end{aligned}$$

O produto $[q_\rho q_\lambda - q^2 g_{\rho\lambda}] [p_2^\rho p_1^\lambda - (p_1 \cdot p_2 - m_1 m_2) g^{\rho\lambda} + p_2^\lambda p_1^\rho]$ fica

$$\begin{aligned}
 & [q_\rho q_\lambda - q^2 g_{\rho\lambda}] [p_2^\rho p_1^\lambda - (p_1 \cdot p_2 - m_1 m_2) g^{\rho\lambda} + p_2^\lambda p_1^\rho] = [(p_2 \cdot q) (p_1 \cdot q) - \\
 & - q^2 (p_1 \cdot p_2) + (p_2 \cdot q) (p_1 \cdot q) - q^2 (p_1 \cdot p_2) - q^2 (p_1 \cdot p_2) + 4q^2 (p_1 \cdot p_2) + \\
 & + m_1 m_2 q^2 - 4m_1 m_2 q^2] \\
 & = 2(p_1 \cdot q) (p_2 \cdot q) + q^2 (p_1 \cdot p_2) - 3m_1 m_2 q^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(m_1 m_2 \cosh \theta - m_1^2) (m_2^2 - m_1 m_2 \cosh \theta) + m_1 m_2 \cosh \theta (m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cosh \theta) - \\
 &\quad - 3m_1 m_2 (m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cosh \theta) \\
 &= 2(m_2^2 m_1 m_2 \cosh \theta - m_1^2 m_2^2 \cosh \theta - m_1^2 m_2^2 + m_1^2 m_1 m_2 \cosh \theta) + m_1^2 m_2^2 \cosh \theta (\cosh \omega - \\
 &\quad - \cosh \theta) - 6m_1^2 m_2^2 (\cosh \omega - \cosh \theta) \\
 &= m_1^2 m_2^2 \left[2\{ (e^\omega + e^{-\omega}) \cosh \theta - \cosh^2 \theta - 1 \} + 2 \cosh \theta (\cosh \omega - \cosh \theta) - 6 (\cosh \omega - \cosh \theta) \right] \\
 &= m_1^2 m_2^2 \left[2\{ (e^\omega + e^{-\omega}) \cosh \theta - \cosh^2 \theta - 1 \} + 2 \cosh \theta (\cosh \omega - \cosh \theta) - 6 (\cosh \omega - \cosh \theta) \right] \\
 &= m_1^2 m_2^2 \left[4 \cosh \omega \cosh \theta - 2 \cosh^2 \theta - 2 + 2 \cosh \theta (\cosh \omega - \cosh \theta) - 6 (\cosh \omega - \cosh \theta) \right] \\
 &= m_1^2 m_2^2 \left[4 \cosh \theta (\cosh \omega - \cosh \theta) + 2 \sinh^2 \theta + 2 \cosh \theta (\cosh \omega - \cosh \theta) - \right. \\
 &\quad \left. - 6 (\cosh \omega - \cosh \theta) \right] \\
 &= m_1^2 m_2^2 \left[6 \cosh \theta (\cosh \omega - \cosh \theta) - 6 (\cosh \omega - \cosh \theta) + 2 \sinh^2 \theta \right]
 \end{aligned}$$

O produto $[\alpha_\rho \alpha_\lambda - \alpha^2 g_{\rho\lambda}] [m_1 p_2^\rho + m_2 p_1^\rho] A_\lambda^0$ fica

$$\begin{aligned}
 &A_\lambda [\alpha_\rho \alpha_\lambda - \alpha^2 g_{\rho\lambda}] [m_1 p_2^\rho + m_2 p_1^\rho] = A_\lambda^0 \{ [m_1 (p_2 \cdot g) + m_2 (p_1 \cdot g)] \alpha^\lambda - m_1 \alpha^2 p_2^\lambda - m_2 \alpha^2 p_1^\lambda \} \\
 &= \left\{ \left[(F_3 - F_2) / 2m_1 \right] p_{1\lambda} - (F_3 / 2m_2) p_{2\lambda} + \left[(m_2 - m_1) (F_4 / \alpha^2) + (F_2 - 2F_3) / 2m_1 \right] \alpha_\lambda \right\} \\
 &\quad \{ m_1 (p_2 \cdot g) + m_2 (p_1 \cdot g) \} \alpha^\lambda - m_1 \alpha^2 p_2^\lambda - m_2 \alpha^2 p_1^\lambda \} \\
 &= - \left[(F_3 - F_2) / 2m_1 \right] m_2 \alpha^2 p_1^2 + (F_3 / 2m_2) m_1 \alpha^2 p_2^2 + \left[(m_2 - m_1) (F_4 / \alpha^2) \right. +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (F_2 - 2F_3) / 2m_1 \left[m_1 (p_2 \cdot q) + m_2 (p_1 \cdot q) \right] q^2 + \\
 & + (p_1 \cdot p_2) \{ m_2 q^2 (F_3 / 2m_2) - m_1 q^2 \left[(F_3 - F_2) / 2m_1 \right] \} + (p_1 \cdot q) \left\{ \left[(F_3 - F_2) / 2m_1 \right] \right. \\
 & \quad \left[m_1 (p_2 \cdot q) + m_2 (p_1 \cdot q) \right] - m_2 q^2 \left[(m_2 - m_1) (F_4 / q^2) + \right. \\
 & \quad \left. \left. (F_2 - 2F_3) / 2m_1 \right] \right\} - (p_2 \cdot q) \left\{ (F_3 / 2m_2) \left[m_1 (p_2 \cdot q) + m_2 (p_1 \cdot q) \right] + m_1 q^2 \right. \\
 & \quad \left. \left[(m_2 - m_1) (F_4 / q^2) + (F_2 - 2F_3) / 2m_1 \right] \right\} \\
 = & \frac{F_2}{2} \left[m_1 m_2 q^2 + (p_1 \cdot p_2) q^2 - (p_1 \cdot q) (p_2 \cdot q) \right] + m_2 (p_1 \cdot q)^2 (F_3 - F_2) / 2m_1 - \\
 & - m_1 (p_2 \cdot q)^2 F_3 / 2m_2 \\
 = & \frac{F_2}{2} \left[m_1 m_2 (m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cosh \theta) + m_1 m_2 \cosh \theta (m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cosh \theta) \right. \\
 & \quad \left. - (m_1 m_2 \cosh \theta - m_1^2) (m_2^2 - m_1 m_2 \cosh \theta) \right] + \\
 & + e^{-\omega} (m_1 m_2 \cosh \theta - m_1^2)^2 (F_3 - F_2) / 2 - e^{\omega} (m_2^2 - m_1 m_2 \cosh \theta) F_3 / 2 \\
 = & \frac{F_2}{2} \left[2m_1^2 m_2^2 (\cosh \omega - \cosh \theta) + 2m_1^2 m_2^2 \cosh \theta (\cosh \omega - \cosh \theta) - m_1^2 m_2^2 (\cosh \omega \cosh \theta \right. \\
 & \quad \left. - \cosh^2 \theta - 1) - m_1^2 m_2^2 (\cosh^2 \theta + e^{2\omega} - 2e^{\omega} \cosh \theta) e^{-\omega} \right] + \\
 & + \frac{F_3}{2} \left[m_1^2 m_2^2 (\cosh^2 \theta + e^{2\omega} - 2e^{\omega} \cosh \theta) e^{-\omega} - m_1^2 m_2^2 (\cosh^2 \theta + e^{-2\omega} - \right. \\
 & \quad \left. - 2e^{-\omega} \cosh \theta) e^{\omega} \right] \\
 = & m_1^2 m_2^2 \left\{ \frac{F_2}{2} \left[2 (\cosh \omega - \cosh \theta) - \sinh^2 \theta - e^{-\omega} \cosh^2 \theta - e^{\omega} + 2 \cosh \theta \right] + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{F_3}{2} \left[e^{-\omega} \cosh^2 \theta + e^{\omega} - 2 \cosh \theta - e^{\omega} \cosh^2 \theta - e^{-\omega} + 2 \cosh \theta \right] \}$$

$$= m_1^2 m_2^2 \left\{ -\frac{F_2}{2} (e^{\omega} + 1) \sinh^2 \theta - \frac{F_3}{2} 2 \sinh \omega \sinh^2 \theta \right\}$$

$$= -m_1^2 m_2^2 \sinh^2 \theta \left[\frac{F_2}{2} (e^{\omega} + 1) + F_3 \sinh \omega \right]$$

$$= m_1^2 m_2^2 \left[-\theta \sinh \theta (e^{\omega} + 1) - \sinh \theta \sinh \omega \left(\theta + \frac{\omega \sinh \theta - \theta \sinh \omega}{\cosh \omega - \cosh \theta} \right) \right]$$

Então

$$P_1 = \left[m_1^2 m_2^2 / 2 (2\pi)^4 E_1 E_2 \right] g_1^2 \left[1 + 2 (e^2 / 2\pi) (S - \frac{T}{2} + \theta / \sinh \theta + r_1) \right]$$

$$\left[2 \cosh \theta (\cosh \omega - \cosh \theta) - 2 (\cosh \omega - \cosh \theta) + \frac{2}{3} \sinh^2 \theta \right] +$$

$$+ \left[m_1^2 m_2^2 / 2 (2\pi)^4 E_1 E_2 \right] g_1^2 \frac{2}{3} (e^2 / 2\pi) \left[-\theta \sinh \theta (e^{\omega} + 1) - \sinh \theta \sinh \omega \right.$$

$$\left. \left(\theta + \frac{\omega \sinh \theta - \theta \sinh \omega}{\cosh \omega - \cosh \theta} \right) \right]$$

Fatorando o termo $P_1^{(0)}$ na eq. acima temos:

$$P_1 = \left[m_1^2 m_2^2 / 2 (2\pi)^4 E_1 E_2 \right] g_1^2 \left[2 \cosh \theta (\cosh \omega - \cosh \theta) - 2 (\cosh \omega - \cosh \theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} \sinh^2 \theta \right] \left[1 + 2 (e^2 / 2\pi) \left\{ (S - \frac{T}{2} + \theta / \sinh \theta + r_1) - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3} \left[\theta \sinh \theta (e^{\omega} + 1) + \sinh \theta \sinh \omega \left(\theta + \frac{\omega \sinh \theta - \theta \sinh \omega}{\cosh \omega - \cosh \theta} \right) \right] \right]$$

$$\left\{ 2 \left[(\cosh \omega - 1) (\cosh \omega - \cosh \theta) + \frac{1}{3} \sinh^2 \theta \right] \right\}^{-1} \left. \right]$$

$$= \left[m_1^2 m_2^2 / 2 (2\pi)^4 E_1 E_2 \right] g_1^2 \left[2 \cosh \theta (\cosh \omega - \cosh \theta) - 2 (\cosh \omega - \cosh \theta) + \right.$$

$$+ \frac{2}{3} \operatorname{senh}^2 \theta \left[1 + 2 (e^2/2\pi) \left\{ (S - \frac{T}{2} + \theta/\operatorname{senh} \theta + r_1) - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{6} \left[\theta \operatorname{senh} \theta (e^\omega + 1) + \operatorname{senh} \theta \operatorname{senh} \omega (\theta + \frac{\omega \operatorname{senh} \theta - \theta \operatorname{senh} \omega}{\operatorname{cosh} \omega - \operatorname{cosh} \theta}) \right] \right]$$

$$\left[(\operatorname{cosh} \theta - 1) \left[(\operatorname{cosh} \omega - \operatorname{cosh} \theta) + \frac{1}{3} (\operatorname{cosh} \theta + 1) \right] \right]^{-1} \left. \right]$$

Portanto,

$$P_{11} = \left[m_1^2 m_2^2 / 2 (2\pi)^4 E_1 E_2 \right] g_1^2 \left[1 + (e^2/2\pi) \alpha_1 \right] \left[2 \operatorname{cosh} \theta (\operatorname{cosh} \omega - \operatorname{cosh} \theta) - \right. \\ \left. - 2 (\operatorname{cosh} \omega - \operatorname{cosh} \theta) + \frac{2}{3} \operatorname{senh}^2 \theta \right] \quad (2.3.20)$$

$$\text{onde } \frac{1}{2} \alpha_1 = S + \theta/\operatorname{senh} \theta + \frac{\frac{1}{2} \omega \operatorname{senh} \omega - \frac{1}{3} \theta \operatorname{senh} \theta}{\operatorname{cosh} \omega - \operatorname{cosh} \theta + \frac{1}{3} (\operatorname{cosh} \theta + 1)} + r_1 \quad (2.3.21)$$

Para o caso pseudo-vetorial, a eq. (2.3.15) resulta:

$$P_3 = \left[1/2 (2\pi)^5 E_1 E_2 \right] a_3^2 \frac{2\pi}{3} \left[\bar{q}_\rho \bar{q}_\lambda - q^2 g_{\rho\lambda} \right] \frac{1}{4} \operatorname{Tr} \left[(\not{x}_2 + m_2) g \gamma_\rho \gamma^5 (\not{x}'_1 + m_1) \right. \\ \left. (g \gamma_\lambda \gamma^5 + 2 (ge^2/2\pi) \left\{ (S - \frac{T}{2} - \theta/\operatorname{senh} \theta + r_1) \gamma_\lambda \gamma^5 + A_\lambda^4 \gamma^5 \right\}) \right]$$

$$= \left[1/2 (2\pi)^5 E_1 E_2 \right] g_3^2 \frac{2\pi}{3} \left[\bar{q}_\rho \bar{q}_\lambda - q^2 g_{\rho\lambda} \right] \frac{1}{4} \left\{ \operatorname{Tr} \left[(\not{x}_2 + m_2) \gamma_\rho \gamma^5 (\not{x}'_1 + m_1) \right. \right. \\ \left. \left. (1 + 2 (ge^2/2\pi) (S - \frac{T}{2} - \theta/\operatorname{senh} \theta + r_1)) \gamma_\lambda \gamma^5 \right] + \right. \\ \left. + \operatorname{Tr} \left[(\not{x}_2 + m_2) \gamma_\rho \gamma^5 (\not{x}'_1 + m_1) 2 (e^2/2\pi) A_\lambda^4 \gamma^5 \right] \right\}$$

$$\text{onde } \overline{\gamma_\lambda \gamma^5} = - \gamma^5 \gamma_\lambda.$$

O primeiro traço é igual a

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[(\not{p}_2 + m_2) \gamma_\rho \gamma^5 (\not{p}_1 + m_1) \overline{\gamma_\lambda \gamma^5} \right] &= \text{Tr} \left[-\not{p}_2 \gamma_\rho \gamma^5 \not{p}_1 \gamma^5 \gamma_\lambda - m_1 m_2 \gamma_\rho \gamma^5 \gamma_\lambda \right] \\ &= \text{Tr} \left[\not{p}_2 \gamma_\rho \not{p}_1 \gamma_\lambda - m_1 m_2 \gamma_\rho \gamma_\lambda \right] \\ &= 4 \{ p_2^\rho p_1^\lambda - (p_1 \cdot p_2 + m_1 m_2) g^{\rho\lambda} - p_2^\lambda p_1^\rho \} \end{aligned}$$

O segundo traço é igual a

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[(\not{p}_2 + m_2) \gamma_\rho \gamma^5 (\not{p}_1 + m_1) \overline{\gamma^5} \right] &= \text{Tr} \left[-m_1 \not{p}_2 \gamma_\rho + m_2 \gamma_\rho \gamma^5 \not{p}_1 \overline{\gamma^5} \right] = \\ &= 4 \{ -m_1 p_2^\rho + m_2 p_1^\rho \} \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} P_3 &= \left[1/2 (2\pi)^4 E_1 E_2 \right] g_3^2 \frac{1}{3} \left[q_\rho q_\lambda - q^2 g_{\rho\lambda} \right] \left\{ \left[1 + 2 (e^2/2\pi) (S - \frac{T}{2} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \theta/\sinh\theta + r_1) \right] \left[p_2^\rho p_1^\lambda - (p_1 \cdot p_2 + m_1 m_2) g^{\rho\lambda} + p_2^\lambda p_1^\rho \right] + 2 (e^2/2\pi) A_\lambda^4 \left[m_1 p_2^\rho - m_2 p_1^\rho \right] \right\} \end{aligned}$$

O produto $\left[q_\rho q_\lambda - q^2 g_{\rho\lambda} \right] \left[p_2^\rho p_1^\lambda - (p_1 \cdot p_2 + m_1 m_2) g^{\rho\lambda} + p_2^\lambda p_1^\rho \right]$ da equação acima fica:

$$\begin{aligned} \left[q_\rho q_\lambda - q^2 g_{\rho\lambda} \right] \left[p_2^\rho p_1^\lambda - (p_1 \cdot p_2 + m_1 m_2) g^{\rho\lambda} + p_2^\lambda p_1^\rho \right] &= \left[(p_2 \cdot q) (p_1 \cdot q) \right. \\ &\left. - q^2 (p_1 \cdot p_2) + (p_2 \cdot q) (p_1 \cdot q) - q^2 (p_1 \cdot p_2) - q^2 (p_1 \cdot p_2) + 4q^2 (p_1 \cdot p_2) - \right. \\ &\left. - m_1 m_2 q^2 + 4 m_1 m_2 q^2 \right] = m_1^2 m_2^2 \left[6 \cosh\theta (\cosh w - \cosh\theta) + 6 (\cosh w - \cosh\theta) + \right. \\ &\left. + 2 \sinh^2\theta \right] \end{aligned}$$

O produto $[q_\rho q_\lambda - q^2 g_{\rho\lambda}] [-m_2 p_2^\rho + m_2 p_1^\rho] A_\lambda^4$ fica

$$\begin{aligned}
 A_\lambda^4 [q_\rho q_\lambda - q^2 g_{\rho\lambda}] [m_1 p_2^\rho - m_2 p_1^\rho] &= -\frac{F_2}{2} \{ [(p_1 \cdot p_2) - m_1 m_2] q^2 - \\
 & - (p_1 \cdot q) (p_2 \cdot q) \} + m_2 (p_1 \cdot q)^2 (F_3 - F_2) / 2 m_1 - m_1 (p_2 \cdot q)^2 F_3 / 2 m_2 \\
 &= -\frac{F_2}{2} m_1^2 m_2^2 [2 (\cosh \theta - 1) (\cosh \omega - \cosh \theta) - (2 \cosh \omega \cosh \theta - \cosh^2 \theta - 1) + \\
 & + e^{-\omega} (\cosh^2 \theta + e^{2\omega} - 2e^\omega \cosh \theta)] + \\
 & - \frac{F_3}{2} m_1^2 m_2^2 [e^\omega (\cosh^2 \theta + e^{-2\omega} - 2e^{-\omega} \cosh \theta) - e^{-\omega} (\cosh^2 \theta + e^{2\omega} - 2e^\omega \cosh \theta)] \\
 &= -m_1^2 m_2^2 \frac{F_2}{2} [-2 (\cosh \omega - \cosh \theta) - \sinh^2 \theta + e^{-\omega} \cosh^2 \theta + e^\omega - 2 \cosh \theta] + \\
 & + \frac{F_3}{2} [2 \sinh^2 \theta \sinh \omega] = -m_1^2 m_2^2 \left\{ \frac{F_2}{2} [(e^\omega - 1) \sinh^2 \theta] + F_3 \sinh^2 \theta \sinh \omega \right\} \\
 &= m_1^2 m_2^2 \left[-\theta \sinh \theta (e^\omega - 1) - \sinh \theta \sinh \omega (\theta + \frac{\omega \sinh \theta - \theta \sinh \omega}{\cosh \omega - \cosh \theta}) \right]
 \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
 P_3 &= [m_1^2 m_2^2 / 2 (2\pi)^4 E_1 E_2] g_3^2 [2 \cosh \theta (\cosh \omega - \cosh \theta) + 2 (\cosh \omega - \cosh \theta) + \\
 & + \frac{2}{3} \sinh^2 \theta] [1 + 2 (e^2 / 2\pi) \{ (S - \frac{T}{2} - \theta / \sinh \theta + r_1) \\
 & - \frac{1}{6} [\theta \sinh \theta (e^\omega - 1) + \sinh \theta \sinh \omega (\theta + \frac{\omega \sinh \theta - \theta \sinh \omega}{\cosh \omega - \cosh \theta})] \\
 & [(\cosh \theta + 1) [(\cosh \omega - \cosh \theta) + \frac{1}{3} (\cosh \theta - 1)]^{-1}]
 \end{aligned}$$

Portanto

$$P_3 = \left[m_1^2 m_2^2 / 2 (2\pi)^4 E_1 E_2 \right] g_3^2 \left[1 + (e^2 / 2\pi) \alpha_3 \right] \left[2 \cosh \theta (\cosh \omega - \cosh \theta) + 2 (\cosh \omega - \cosh \theta) + \frac{2}{3} \sinh^2 \theta \right] \quad (2.3.22)$$

onde

$$\frac{1}{2} \alpha_3 = S - \theta / \sinh \theta + \frac{\frac{1}{2} \omega \sinh \omega - \frac{1}{3} \theta \sinh \theta}{\cosh \omega - \cosh \theta + \frac{1}{3} (\cosh \theta - 1)} + r_1 \quad (2.3.23)$$

Para o caso tensorial utilizamos os mesmos procedimentos dos casos anteriores e obtemos

$$P_2 = \left[m_1^2 m_2^2 / 2 (2\pi)^4 E_1 E_2 \right] g_2^2 \left[1 + (e^2 / 2\pi) \alpha_2 \right] \left[2 \cosh \theta (\cosh \omega - \cosh \theta) + \frac{4}{3} \sinh^2 \theta \right] \quad (2.3.24)$$

onde

$$\frac{1}{2} \alpha_2 = S + \frac{(\omega \sinh \omega - \frac{1}{3} \theta \sinh \theta) \cosh \theta - (\cosh \omega - \cosh \theta) (\theta / \sinh \theta)}{(\cosh \theta) (\cosh \omega - \cosh \theta) + \frac{2}{3} \sinh^2 \theta} \quad (2.3.25)$$

Assim o resultado final pode ser dado na forma

$$P d^3 p = \sum_{\sigma=0}^4 \left(1 + \frac{e^2}{2\pi} \alpha_{\sigma} \right) P_{\sigma}^{(0)} d^3 p \quad (2.3.26)$$

onde $P_{\sigma}^{(0)} d^3 p$ é a probabilidade de transição não corrigida.

2.4 - Bremsstrahlung Interno

Os processos de bremsstrahlung interno também contri-

buen para correções de ordem $e^2/2\pi$ do espectro da partícula 2. Eles o fazem, apesar de serem uma ordem superior na perturbação, pois tem estado final diferente dos com fótons virtuais portanto, o elemento de matriz é diferente da probabilidade de transição, mas o resultado final, quando ele é elevado ao quadrado, é proporcional a $e^2/2\pi$.

A probabilidade de transição para o decaimento de uma partícula em outra mais um fóton de energia-momento (ϵ, k) é dado por

$$P_{\gamma} d^3 p d^3 k = \frac{2\pi}{8E_1 E_2 \epsilon (2\pi)^9} \int d^3 k \left[\frac{d^3 k'}{KK'} \frac{1}{2} \sum_{\text{spin } \theta} |\langle f | R | i \rangle|^2 \right. \\ \left. \delta(p_1 - p_2 - k - k') d^3 p d^3 k \right] \quad (2.4.1)$$

onde agora o elemento de matriz $\langle f | R | i \rangle$ é obtido da teoria de perturbação de segunda ordem. Em (2.4.1), θ representa o estado de polarização linear do fóton emergente.

Os gráficos de Feynman correspondentes são mostrados na fig. 2.4.1.

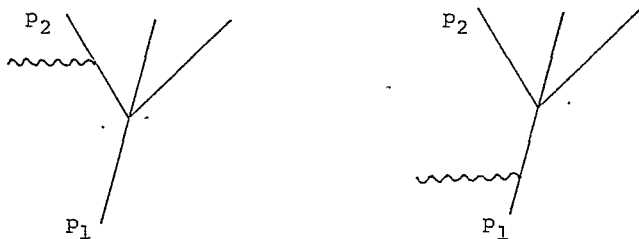


Fig.2.4.1-Gráficos de Feynman correspondentes aos processos de fótons reais (bremsstrahlung).

A amplitude total aplicando as regras de Feynman, dadas na seção 2.2, aos dois gráficos da fig. 2.4.1, é portanto :

$$\langle E | R | i \rangle = (4\pi e^2)^{1/2} \int_{\sigma} g_{\sigma} \left[\bar{v}(k) \Gamma_{\sigma} v(k') \right] \left\{ \bar{u}(p_2) \left[\epsilon \frac{1}{\not{p}_2 + \not{k} - m_2} \Gamma_{\sigma} + \Gamma_{\sigma} \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k} - m_1} \epsilon \right] u(p_1) \right\}$$

onde ϵ é o vetor de polarização do fóton e satisfaz: $\epsilon^0 = 0$
 $e \cdot e = 1$; $e \cdot k = 0$.

Assim,

$$P_Y d^3 p d^3 k = \left[d^3 p d^3 k e^2 / 8 (2\pi)^6 E_1 E_2 \epsilon \right] \int_{\sigma} g_{\sigma}^2 N_{\sigma} \quad (2.4.2)$$

onde

$$N_{\sigma} = \int_{\theta} \Gamma_{\rho \lambda}^{\sigma \sigma'} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m_2) \left[\frac{\not{\epsilon} \not{k}}{2 \not{p}_2 \cdot k} \Gamma_{\rho}^{\sigma} + \Gamma_{\rho}^{\sigma} \frac{\not{k} \not{\epsilon}}{2 \not{p}_1 \cdot k} + \left(\frac{e \cdot p_2}{\not{p}_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{\not{p}_1 \cdot k} \right) \Gamma_{\rho}^{\sigma} \right] (\not{p}_1 + m_1) \left[\bar{\Gamma}_{\lambda}^{\sigma'} \frac{\not{k} \not{e}}{2 \not{p}_2 \cdot k} + \frac{\not{\epsilon} \not{k}}{2 \not{p}_1 \cdot k} \bar{\Gamma}_{\lambda}^{\sigma'} + \bar{\Gamma}_{\lambda}^{\sigma'} \left(\frac{e \cdot p_2}{\not{p}_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{\not{p}_1 \cdot k} \right) \right] \right\} \quad (2.4.3)$$

Como já vimos anteriormente, $I^{\sigma, \sigma'} = 0$ se $\sigma \neq \sigma'$.

A integral sobre o momento dos neutrinos tem a mesma forma da eq. (2.3.4) e a única diferença é que agora, o momento do fóton k também aparece no argumento da função δ .

O resultado (2.3.10) é também aplicável, pois coloca

mos

$$G = p_2 - p_1 - k \quad (2.4.4)$$

ao invés de $q = p_2 - p_1$.

Portanto, para o caso escalar ($\sigma=0$) temos que a eq.

(2.4.3) torna-se:

$$N_0 = \int_0^1 G^2 \frac{1}{4} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m_2) \left[\frac{\not{\epsilon} k}{2p_2 \cdot k} + \frac{k \not{\epsilon}}{2p_1 \cdot k} + \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \right] \right. \\ \left. (\not{p}_1 + m_1) \left[\frac{k \not{\epsilon}}{2p_2 \cdot k} + \frac{\not{\epsilon} k}{2p_1 \cdot k} + \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \right] \right\}$$

e podemos escrever na forma

$$N_0 = \int_0^1 G^2 \frac{1}{4} \{ A_0 + B_0 + C_0 + D_0 + E_0 + F_0 + H_0 + I_0 + L_0 \} \quad (2.4.5)$$

onde

$$A_0 = \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m_2) \frac{\not{\epsilon} k}{2p_2 \cdot k} (\not{p}_1 + m_1) \frac{k \not{\epsilon}}{2p_2 \cdot k} \right\} = \frac{1}{4(p_2 \cdot k)^2} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m_2) \not{\epsilon} k (\not{p}_1 + m_1) k \not{\epsilon} \right\} \\ = \frac{1}{4(p_2 \cdot k)^2} \text{Tr} \left\{ \not{p}_2 \not{\epsilon} k \not{p}_1 k \not{\epsilon} + m_1 m_2 \not{\epsilon} k k \not{\epsilon} \right\}$$

Assim

$$\text{Tr} \left\{ \not{p}_2 \not{\epsilon} k \not{p}_1 k \not{\epsilon} \right\} = 4 | -p_2 \cdot k (p_1 \cdot k + p_1 \cdot k) | = -8 (p_1 \cdot k) (p_2 \cdot k)$$

e

$$\text{Tr} \left\{ \not{\epsilon} k k \not{\epsilon} \right\} = 0$$

Então

$$A_0 = -2 \frac{p_1 \cdot k}{p_2 \cdot k}$$

$$B_0 = \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m_2) \frac{\not{\epsilon} k}{2p_2 \cdot k} (\not{p}_1 + m_1) \frac{\not{\epsilon} k}{2p_1 \cdot k} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k)} \text{Tr}\{p_2 \not{\epsilon} k p_1 \not{\epsilon} k + m_1 m_2 \not{\epsilon} k \not{\epsilon} k\}$$

Os resultados dos traços dão

$$\text{Tr}\{p_2 \not{\epsilon} k p_1 \not{\epsilon} k\} = 4 \left[-p_2 \cdot k (-p_1 \cdot k) + p_2 \cdot k (p_1 \cdot k) \right] = 8(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k)$$

e

$$\text{Tr}\{\not{\epsilon} k \not{\epsilon} k\} = 0$$

Portanto

$$B_0 = 2.$$

O terceiro termo é igual a:

$$\begin{aligned} C_0 &= \text{Tr}\left\{ (\not{p}_2 + m_2) \frac{\not{\epsilon} k}{2p_2 \cdot k} (\not{p}_1 + m_1) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2(p_2 \cdot k)} \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \text{Tr}\{p_2 \not{\epsilon} k p_1 + m_1 m_2 \not{\epsilon} k\} \end{aligned}$$

Os traços resultam:

$$\text{Tr}\{p_2 \not{\epsilon} k p_1\} = 4 \left[e \cdot p_2 p_1 \cdot k - e \cdot p_1 p_2 \cdot k \right] = 4(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)$$

e

$$\text{Tr}\{\not{\epsilon} k\} = 0$$

Temos então

$$C_0 = 2(p_1 \cdot k) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2$$

O quarto termo é igual a:

$$D_0 = \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m_2) \frac{\not{k}\not{\epsilon}}{2p_1 \cdot k} (\not{p}_1 + m_1) \frac{\not{k}\not{\epsilon}}{2p_2 \cdot k} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k)} \text{Tr} \{ p_2 k \not{\epsilon} p_1 k \not{\epsilon} + m_1 m_2 k \not{\epsilon} k \not{\epsilon} \}$$

Os traços resultam

$$\text{Tr} \{ p_2 k \not{\epsilon} p_1 k \not{\epsilon} \} = 4 \left[+p_2 \cdot k (p_1 \cdot k) - p_2 \cdot k (-p_1 \cdot k) \right] = 8(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k)$$

e

$$\text{Tr} \{ k \not{\epsilon} k \not{\epsilon} \} = 0$$

Portanto,

$$D_0 = 2$$

O quinto termo é igual a:

$$E_0 = \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m_2) \frac{\not{k}\not{\epsilon}}{2p_1 \cdot k} (\not{p}_1 + m_1) \frac{\not{\epsilon}k}{2p_1 \cdot k} \right\} = \frac{1}{4(p_1 \cdot k)^2} \text{Tr} \{ p_2 k \not{\epsilon} p_1 \not{\epsilon} k +$$

$$+ m_1 m_2 k \not{\epsilon} \not{\epsilon} k \}$$

Os traços resultam

$$\text{Tr} \{ p_2 k \not{\epsilon} p_1 \not{\epsilon} k \} = 4 \left[+p_2 \cdot k (-p_1 \cdot k - p_1 \cdot k) \right] = -8(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k)$$

e

$$\text{Tr} \{ k \not{\epsilon} \not{\epsilon} k \} = 0$$

Temos então:

$$E_0 = -2 \frac{p_2 \cdot k}{p_1 \cdot k}$$

O sexto termo é igual a:

$$F_0 = \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m_2) \frac{\not{k}\not{\epsilon}}{2p_1 \cdot k} (\not{p}_1 + m_1) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2p_1 \cdot k} \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \text{Tr} \{ p_2' k' p_1' + m_1 m_2 k' \}$$

Os traços resultam

$$\text{Tr} \{ p_2' k' p_1' \} = 4 \left[e \cdot p_1 p_2 \cdot k - e \cdot p_2 p_1 \cdot k \right] = -4 (p_1 \cdot k) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) (p_2 \cdot k)$$

e

$$\text{Tr} \{ k' \} = 0$$

Portanto,

$$F_0 = -2 (p_2 \cdot k) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2$$

O sétimo termo é igual a:

$$\begin{aligned} H_0 &= \text{Tr} \{ (p_2' + m_2) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) (p_1' + m_1) \frac{k'}{2p_2 \cdot k} \} = \\ &= \frac{1}{2p_2 \cdot k} \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \text{Tr} \{ p_2' p_1' k' + m_1 m_2 k' \} \end{aligned}$$

Os traços resultam:

$$\text{Tr} \{ p_2' p_1' k' \} = 4 \left[e \cdot p_2 p_1 \cdot k - e \cdot p_1 p_2 \cdot k \right] = 4 (p_1 \cdot k) (p_2 \cdot k) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)$$

e

$$\text{Tr} \{ k' \} = 0$$

Temos então:

$$H_0 = 2 (p_1 \cdot k) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2$$

O oitavo termo é igual a:

$$I_0 = \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m_2) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) (\not{p}_1 + m_1) \frac{\not{\epsilon} k}{2 p_1 \cdot k} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2 p_1 \cdot k} \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \text{Tr} \{ p_2 \not{p}_1 \not{\epsilon} k + m_1 m_2 \not{\epsilon} k \}$$

Os traços resultam

$$\text{Tr} \{ \not{p}_2 \not{p}_1 \not{\epsilon} k \} = 4 \left[e \cdot p_1 p_2 \cdot k - e \cdot p_2 p_1 \cdot k \right] = -4 (p_1 \cdot k) (p_2 \cdot k) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)$$

e

$$\text{Tr} \{ \not{\epsilon} k \} = 0$$

Portanto

$$I_0 = -2 (p_2 \cdot k) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2$$

O nono termo é igual a:

$$L_0 = \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m_2) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) (\not{p}_1 + m_1) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \right\} =$$

$$= \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 \text{Tr} \{ \not{p}_2 \not{p}_1 + m_1 m_2 \}$$

Os traços resultam

$$\text{Tr} \{ \not{p}_2 \not{p}_1 \} = 4 p_1 \cdot p_2 \quad \text{e} \quad \text{Tr} \{ 1 \} = 4$$

Portanto,

$$L_0 = 4 (p_1 \cdot p_2 + m_1 m_2) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2$$

Para os cálculos dos traços usamos a seguinte regra:

$$\text{Tr} \{ \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6 \} = \frac{1}{4} \text{Tr} \{ \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_5} \gamma_{\mu_6} \} =$$

$$= \{ g^{\mu_1 \mu_2} T^{\mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6} - g^{\mu_1 \mu_3} T^{\mu_2 \mu_4 \mu_5 \mu_6} + g^{\mu_1 \mu_4} T^{\mu_2 \mu_3 \mu_5 \mu_6} - \\ - g^{\mu_1 \mu_5} T^{\mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_6} + g^{\mu_1 \mu_6} T^{\mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5} \}$$

onde

$$T^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_3 \mu_4} - g^{\mu_1 \mu_3} g^{\mu_2 \mu_4} + g^{\mu_2 \mu_3} g^{\mu_1 \mu_4}$$

Assim, a eq. (2.4.5) torna-se

$$N_0 = \int_0^{\theta} G^2 \frac{1}{4} \left[-2 \frac{(p_1 \cdot k)}{(p_2 \cdot k)} + 2 + 2(p_2 \cdot k) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 + 2 - 2 \frac{(p_2 \cdot k)}{(p_1 \cdot k)} - \right. \\ \left. - 2(p_2 \cdot k) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 + 2(p_1 \cdot k) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 - \right. \\ \left. - 2(p_2 \cdot k) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 + 4(p_1 \cdot p_2 + m_1 m_2) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 \right] \\ = \int_0^{\theta} G^2 \frac{1}{4} \left[4(p_1 \cdot p_2 + m_1 m_2 + p_1 \cdot k - p_2 \cdot k) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 + 4 - \frac{2(p_1 \cdot k)}{(p_2 \cdot k)} - \frac{2(p_2 \cdot k)}{(p_1 \cdot k)} \right] \\ = \int_0^{\theta} G^2 \left[2(2p_1 \cdot p_2 + 2m_1 m_2 + 2p_1 \cdot k - 2p_2 \cdot k) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{2(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k) - (p_1 \cdot k)^2 - (p_2 \cdot k)^2}{(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k)} \right) \right] \\ = \int_0^{\theta} G^2 \left[(p_1^2 + p_2^2 + 2m_1 m_2 - p_1^2 - p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 + 2p_1 \cdot k - 2p_2 \cdot k) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 - \right. \\ \left. - 2(k \cdot G)^2 / (p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k) \right] \\ = \left| (m_1 + m_2)^2 - G^2 \right| G^2 \Omega - 2(k \cdot G)^2 G^2 / (p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k) \quad (2.4.6)$$

onde

$$\Omega = \sum_{\theta=1,2} \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 \quad (2.4.7)$$

Para o caso pseudo-escalar ($\sigma = 4$) temos que a eq. (2.4.3) torna-se:

$$N_4 = \int_0^1 G^2 \frac{1}{4} \text{Tr} \{ (\not{p}_2 + m_2) \left[\frac{\not{e}k}{2p_2 \cdot k} \gamma^5 + \gamma^5 \frac{k\not{e}}{2p_1 \cdot k} + \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \gamma^5 \right] (\not{p}_1 + m_1) \left[\gamma^5 \frac{k\not{e}}{2p_2 \cdot k} + \frac{\not{e}k}{2p_1 \cdot k} \gamma^5 + \gamma^5 \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \right] \} \quad (2.4.8)$$

$$N_4 = \int_0^1 G^2 \frac{1}{4} \{ A_4 + B_4 + C_4 + D_4 + E_4 + F_4 + H_4 + I_4 + L_4 \}$$

Fazendo os cálculos explicitamente, vimos que os fatos A_4, B_4, C_4, \dots são iguais a A_0, B_0, C_0, \dots exceto o termo L_4 que é diferente de L_0 , devido novamente a anticomutatividade do γ^5 , portanto:

$$L_4 = \text{Tr} \{ (\not{p}_2 + m_2) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \gamma^5 (\not{p}_1 + m_1) \gamma^5 \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \} =$$

$$= \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 \text{Tr} \{ \not{p}_2 \not{p}_1^{-m_1} m_2 \}$$

$$L_4 = 4 \left[p_1 \cdot p_2^{-m_1} m_2 \right] \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2$$

Assim, a eq. (2.4.8) torna-se

$$N_4 = \int_0^1 G^2 \frac{1}{4} \left[4 (p_1 \cdot p_2^{-m_1} m_2 + p_1 \cdot k - p_2 \cdot k) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 + 4 - \right]$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[\frac{2(p_1 \cdot k)}{(p_2 \cdot k)} - \frac{2(p_2 \cdot k)}{(p_1 \cdot k)} \right] \\
 = & \left[(m_1 - m_2)^2 - G^2 \right] G^2 \Omega - 2(k \cdot G)^2 G^2 / (p_1 \cdot k) (p_2 \cdot k) \quad (2.4.9)
 \end{aligned}$$

Para o caso vetorial ($\sigma = 1$) a eq. (2.4.3) torna-se:

$$\begin{aligned}
 N_1 = & \int_{\theta} \frac{2}{3} \left[G^{\rho} G^{\lambda} - G^2 g^{\rho\lambda} \right] \frac{1}{4} \text{Tr} \left\{ \not{p}_2 + m_2 \right\} \left[\frac{\not{\epsilon} k}{2p_2 \cdot k} \gamma_{\rho} + \gamma_{\rho} \frac{k \not{\epsilon}}{2p_1 \cdot k} + \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \gamma_{\rho} \right] \\
 & \left[\bar{\gamma}_{\lambda} \frac{k \not{\epsilon}}{2p_2 \cdot k} + \frac{\not{\epsilon} k}{2p_1 \cdot k} \bar{\gamma}_{\lambda} + \bar{\gamma}_{\lambda} \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \right] \quad (2.4.10)
 \end{aligned}$$

Então

$$N_1 = \int_{\theta} \frac{2}{3} \left[G^{\rho} G^{\lambda} - G^2 g^{\rho\lambda} \right] \frac{1}{4} \left[A_1 + B_1 + C_1 + D_1 + E_1 + F_1 + H_1 + I_1 + L_1 \right]$$

onde

$$\begin{aligned}
 A_1 = & \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m_2) \frac{\not{\epsilon} k}{2p_2 \cdot k} \gamma_{\rho} (\not{p}_1 + m_1) \bar{\gamma}_{\lambda} \frac{k \not{\epsilon}}{2p_1 \cdot k} \right\} = \\
 = & \frac{1}{4(p_2 \cdot k)^2} \text{Tr} \left\{ \not{p}_2 \not{\epsilon} k \gamma_{\rho} \not{p}_1 \gamma_{\lambda} k \not{\epsilon} + m_1 m_2 \not{\epsilon} k \gamma_{\rho} \gamma_{\lambda} k \not{\epsilon} \right\}
 \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} \{ \not{p}_2 \not{\epsilon} k \gamma_{\rho} \not{p}_1 \gamma_{\lambda} k \not{\epsilon} \} = & 4 \left\{ e \cdot p_2 \left[k_{\rho} (k_{\lambda} e \cdot p_1 - e_{\lambda} p_1 \cdot k) - p_1 \cdot k (e_{\rho} k_{\lambda} - e_{\lambda} k_{\rho}) \right. \right. \\
 & \left. \left. + k_{\lambda} (e_{\rho} p_1 \cdot k - k_{\rho} e \cdot p_1) \right] - p_2 \cdot k \left[e_{\rho} (k_{\lambda} e \cdot p_1 - e_{\lambda} p_1 \cdot k) - e \cdot p_1 (e_{\rho} k_{\lambda} - e_{\lambda} k_{\rho}) \right. \right. \\
 & \left. \left. + e_{\lambda} (e_{\rho} p_1 \cdot k - k_{\rho} e \cdot p_1) + (k_{\lambda} p_{1\rho} - g_{\rho\lambda} p_1 \cdot k + k_{\rho} p_{1\lambda}) - e_{\rho} (e_{\lambda} p_1 \cdot k - k_{\lambda} e \cdot p_1) \right. \right. \\
 & \left. \left. + e \cdot p_1 (e_{\lambda} k_{\rho} - e_{\rho} k_{\lambda}) - e_{\lambda} (k_{\rho} e \cdot p_1 - e_{\rho} p_1 \cdot k) + (k_{\rho} p_{1\lambda} - g_{\rho\lambda} p_1 \cdot k + k_{\lambda} p_{1\rho}) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -8p_2 \cdot k \left[e_\rho (k_\lambda e_{\cdot p_1} - e_{\lambda p_1} \cdot k) - e_{\cdot p_1} (e_\rho k_\lambda - e_{\lambda k} \rho) + e_\lambda (e_\rho p_1 \cdot k - k_\rho e_{\cdot p_1}) \right. \\
 &+ \left. (k_\lambda p_{1\rho} - g_{\rho\lambda} p_1 \cdot k + k_\rho p_{1\lambda}) \right] = 8p_2 \cdot k \left[g_{\rho\lambda} p_1 \cdot k - k_\lambda p_{1\rho} - k_\rho p_{1\lambda} \right]
 \end{aligned}$$

e

$$\text{Tr}\{\not{\epsilon} \not{k} \gamma_\rho \gamma_\lambda \not{k} \not{\epsilon}\} = 0 \quad .$$

No sentido de obtermos N_1 , eq. (2.4.10), vamos multiplicar todos os fatores, a partir de agora, por $I_{\rho\lambda}^{11}$, eq.(2.3.13), mas agora usando G ao invés de q.

Assim, o primeiro termo fica

$$\begin{aligned}
 A_1 \cdot [G^\rho G^\lambda - G^2 g^{\rho\lambda}] &= 8p_2 \cdot k [G^2 p_1 \cdot k - k \cdot G p_1 \cdot G - k \cdot G p_1 \cdot G - 4G^2 p_1 \cdot k + G^2 p_1 \cdot k + \\
 &+ G^2 p_1 \cdot k] \frac{1}{4(p_2 \cdot k)^2} = -\frac{2}{p_2 \cdot k} [G^2 p_1 \cdot k + 2k \cdot G p_1 \cdot G] \quad .
 \end{aligned}$$

O segundo termo é igual a:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \text{Tr}\{(\not{p}_2 + m_2) \frac{\not{\epsilon} \not{k}}{2p_2 \cdot k} \gamma_\rho (\not{p}_1 + m_1) \frac{\not{\epsilon} \not{k}}{2p_1 \cdot k} \bar{\gamma}_\lambda \} = \\
 &= \frac{1}{4(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k)} \text{Tr}\{\not{p}_2 \not{\epsilon} \not{k} \gamma_\rho \not{p}_1 \not{\epsilon} \not{k} \gamma_\lambda + m_1 m_2 \not{\epsilon} \not{k} \gamma_\rho \not{\epsilon} \not{k} \gamma_\lambda \}
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 B_1 &\equiv \text{Tr}\{\not{p}_2 \not{\epsilon} \not{k} \gamma_\rho \not{p}_1 \not{\epsilon} \not{k} \gamma_\lambda\} = 4 \{ e_{\cdot p_2} [k_\rho (k_\lambda e_{\cdot p_1} - e_{\lambda p_1} \cdot k) - p_1 \cdot k (e_\rho k_\lambda - e_{\lambda k} \rho) + \\
 &+ k_\lambda (k_\rho e_{\cdot p_1} - e_{\rho p_1} \cdot k) - e_\rho (k_\lambda p_1 \cdot k + k_\lambda p_1 \cdot k) + e_{\cdot p_1} (k_\rho k_\lambda + k_\lambda k_\rho)] - \\
 &- p_2 \cdot k [e_\rho (k_\lambda e_{\cdot p_1} - e_{\lambda p_1} \cdot k) - e_{\cdot p_1} (e_\rho k_\lambda - e_{\lambda k} \rho) + (k_\lambda p_{1\rho} - k_\rho p_{1\lambda} + g_{\rho\lambda} p_1 \cdot k) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +e_{\lambda} (k_{\rho} e \cdot p_1 - e_{\rho} p_1 \cdot k) - e_{\rho} (e_{\lambda} p_1 \cdot k + k_{\lambda} e \cdot p_1) + e \cdot p_1 (e_{\lambda} k_{\rho} + e_{\rho} k_{\lambda}) - \\
 & - (k_{\rho} p_1 \lambda - g_{\rho \lambda} p_1 \cdot k + k_{\lambda} p_1 \rho) + e_{\lambda} (k_{\rho} e \cdot p_1 - e_{\rho} p_1 \cdot k) \Big] + p_{2\rho} (k_{\lambda} p_1 \cdot k + k_{\lambda} p_1 \cdot k) - \\
 & - p_1 \cdot p_2 (k_{\rho} k_{\lambda} + k_{\rho} k_{\lambda}) \Big] \\
 & = 8 \Big[2 (k_{\lambda} e \cdot p_2 - e_{\lambda} p_2 \cdot k) (k_{\rho} e \cdot p_1 - e_{\rho} p_1 \cdot k) + p_1 \cdot k (k_{\lambda} p_{2\rho} - g_{\rho \lambda} p_2 \cdot k) + \\
 & + k_{\rho} (p_{1\lambda} p_2 \cdot k - k_{\lambda} p_1 \cdot p_2) \Big]
 \end{aligned}$$

e

$$B_1'' = \text{Tr} \{ \cancel{e} \cancel{k} \gamma_{\rho} \cancel{e} \cancel{k} \gamma_{\lambda} \} = 4 (k_{\rho} k_{\lambda} + k_{\rho} k_{\lambda}) = 8 k_{\rho} k_{\lambda}.$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
 B_1' \cdot [G^{\rho} G^{\lambda} - G^2 g^{\rho \lambda}] &= 8 \Big[2 (k \cdot G e \cdot p_2 - e \cdot G p_2 \cdot k) (k \cdot G e \cdot p_1 - e \cdot G p_1 \cdot k) + \\
 & + p_1 \cdot k (k \cdot G p_2 \cdot G - G^2 p_2 \cdot k) + k \cdot G (p_1 \cdot G p_2 \cdot k - k \cdot G p_1 \cdot p_2) - \\
 & - 2 G^2 p_1 \cdot k p_2 \cdot k - G^2 p_1 \cdot k p_2 \cdot k + 4 G^2 p_1 \cdot k p_2 \cdot k - G^2 p_1 \cdot k p_2 \cdot k \Big] \\
 & = 8 \Big[2 (k \cdot G e \cdot p_2 - e \cdot G p_2 \cdot k) (k \cdot G e \cdot p_1 - e \cdot G p_1 \cdot k) + k \cdot G (p_1 \cdot k p_2 \cdot G + p_1 \cdot G p_2 \cdot k) - \\
 & - (k \cdot G)^2 p_1 \cdot p_2 - G^2 p_1 \cdot k p_2 \cdot k \Big]
 \end{aligned}$$

e

$$B_1'' \cdot [G^{\rho} G^{\lambda} - G^2 g^{\rho \lambda}] = 8 (k \cdot G)^2$$

Portanto

$$B_1 \cdot [G^\rho G^\lambda - G^2 g^{\rho\lambda}] = \frac{2}{(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k)} \left[2(k \cdot Ge \cdot p_2 - e \cdot G p_2 \cdot k) \right. \\ \left. (k \cdot Ge \cdot p_1 - e \cdot G p_1 \cdot k) + k \cdot G(p_1 \cdot k p_2 \cdot G + p_1 \cdot G p_2 \cdot k) - G^2 p_1 \cdot k p_2 \cdot k \right. \\ \left. - (k \cdot G)^2 (p_1 \cdot p_2 - m_1 m_2) \right]$$

O terceiro termo é igual a:

$$C_1 = \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m_2) \frac{\not{\epsilon} k}{2p_2 \cdot k} \gamma_\rho (\not{p}_1 + m_1) \bar{\gamma}_\lambda \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \right\} = \\ = \frac{1}{2p_2 \cdot k} \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \text{Tr} \{ \not{p}_2 \not{\epsilon} k \gamma_\rho \not{p}_1 \gamma_\lambda + m_1 m_2 \not{\epsilon} k \gamma_\rho \gamma_\lambda \}$$

onde

$$C_1' = \text{Tr} \{ \not{p}_2 \not{\epsilon} k \gamma_\rho \not{p}_1 \gamma_\lambda \} = 4 \left[e \cdot p_2 (k_\rho p_{1\lambda} - g_{\rho\lambda} p_1 \cdot k + k_\lambda p_{1\rho}) \right. \\ \left. - p_2 \cdot k (e_\rho p_{1\lambda} - g_{\rho\lambda} e \cdot p_1 + e_\lambda p_{1\rho}) + p_{2\rho} (e_\lambda p_{1\lambda} \cdot k - k_\lambda e \cdot p_1) \right. \\ \left. - p_1 \cdot p_2 (e_\lambda k_\rho - e_\rho k_\lambda) + p_{2\lambda} (k_\rho e \cdot p_1 - e_\rho p_1 \cdot k) \right]$$

e

$$C_1'' = \text{Tr} \{ \not{\epsilon} k \gamma_\rho \gamma_\lambda \} = 4 \left[e_\lambda k_\rho - e_\rho k_\lambda \right]$$

$$C_1 \cdot [G^\rho G^\lambda - G^2 g^{\rho\lambda}] = 4 \{ e \cdot p_2 \left[(k \cdot G p_1 \cdot G - G^2 p_1 \cdot k + k \cdot G p_1 \cdot G) \right. \\ \left. - p_2 \cdot k (e \cdot G p_1 \cdot G - G^2 e \cdot p_1 + e \cdot G p_1 \cdot G) + p_2 \cdot G (e \cdot G p_1 \cdot k - k \cdot G e \cdot p_1) \right. \\ \left. + p_2 \cdot G (k \cdot G e \cdot p_1 - e \cdot G p_1 \cdot k) \right] - G^2 \left[e \cdot p_2 (p_1 \cdot k - 4 p_1 \cdot k + p_1 \cdot k) \right. \\ \left. - (k \cdot G)^2 (p_1 \cdot p_2 - m_1 m_2) \right]$$

$$-p_2 \cdot k (e \cdot p_1 - 4e \cdot p_1 + e \cdot p_1) + (e \cdot p_2 p_1 \cdot k - p_2 \cdot k e \cdot p_1) + (p_2 \cdot k e \cdot p_1 - e \cdot p_2 p_1 \cdot k)]$$

$$= 4 \left[2p_1 \cdot G (e \cdot p_2 k \cdot G - p_2 \cdot k e \cdot G) + G^2 (e \cdot p_2 p_1 \cdot k - e \cdot p_1 p_2 \cdot k) \right]$$

e

$$C_1'' \cdot [G^\rho G^\lambda - G^2 g^{\rho\lambda}] = 0$$

Portanto,

$$C_1 \cdot [G^\rho G^\lambda - G^2 g^{\rho\lambda}] = 2p_1 \cdot k \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 (2p_1 \cdot G + G^2)$$

O quarto termo é igual a:

$$D_1 = \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m_2) \gamma_\rho \frac{k_\epsilon}{2p_1 \cdot k} (\not{p}_1 + m_1) \bar{\gamma}_\lambda \frac{k_\epsilon}{2p_2 \cdot k} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k)} \text{Tr} \{ \not{p}_2 \gamma_\rho \not{k}_\epsilon \not{p}_1 \gamma_\lambda k_\epsilon + m_1 m_2 \gamma_\rho k_\epsilon \gamma_\lambda k_\epsilon \}$$

onde

$$D_1' = \text{Tr} \{ \not{p}_2 \gamma_\rho k_\epsilon \not{p}_1 \gamma_\lambda k_\epsilon \} = 4 \{ e \cdot p_2 \left[k_\rho (k_\lambda e \cdot p_1 - e_\lambda p_1 \cdot k) - k_\rho (e_\lambda p_1 \cdot k - \right.$$

$$\left. - k_\lambda e \cdot p_1) + k_\rho (k_\lambda e \cdot p_1 - e_\lambda p_1 \cdot k) + k_\rho (k_\lambda e \cdot p_1 - e_\lambda p_1 \cdot k) \right] -$$

$$- p_2 \cdot k \left[e_\rho (k_\lambda e \cdot p_1 - e_\lambda p_1 \cdot k) - p_{1\rho} k_\lambda + g_{\rho\lambda} p_1 \cdot k - k_\rho (e_\lambda e \cdot p_1 - e_\lambda e \cdot p_1 + p_{1\lambda}) + \right.$$

$$\left. + e_\rho (k_\lambda e \cdot p_1 - e_\lambda p_1 \cdot k) + k_\rho (e_\lambda e \cdot p_1 - e_\lambda e \cdot p_1 + p_{1\lambda}) - e_\rho (e_\lambda p_1 \cdot k - k_\lambda e \cdot p_1) + \right.$$

$$\left. + p_{1\rho} k_\lambda + g_{\rho\lambda} p_1 \cdot k + e_\rho (k_\lambda e \cdot p_1 - e_\lambda p_1 \cdot k) \right] + p_{2\rho} (-p_1 \cdot k k_\lambda + k_\lambda p_1 \cdot k) -$$

$$- p_1 \cdot p_2 (k_\rho k_\lambda + k_\rho k_\lambda) + p_{2\lambda} (k_\rho p_1 \cdot k + k_\rho p_1 \cdot k) \}$$

$$= 8 \left[2 (k_\rho e \cdot p_2 - e_\rho p_2 \cdot k) (k_\lambda e \cdot p_1 - e_\lambda p_1 \cdot k) + p_1 \cdot k (p_2 \lambda^\rho - g_{\rho\lambda} p_2 \cdot k) - \right. \\ \left. - p_1 \cdot p_2 k_\rho k_\lambda \right]$$

e

$$D_1'' = \text{Tr} \{ \gamma_\rho \not{k} \not{e} \gamma_\lambda \not{k} \not{e} \} = 4 \left[k_\rho k_\lambda + k_\rho k_\lambda \right] = 8 k_\rho k_\lambda \quad .$$

Temos então que:

$$D_1' = \left[G^\rho G^\lambda - G^2 g^{\rho\lambda} \right] = 8 \left[2 (k \cdot G e \cdot p_2 - e \cdot G p_2 \cdot k) (k \cdot G e \cdot p_1 - e \cdot G p_1 \cdot k) + \right. \\ \left. + p_1 \cdot k p_2 \cdot G k \cdot G - p_1 \cdot p_2 (k \cdot G)^2 \right]$$

e

$$D_1'' \cdot \left[G^\rho G^\lambda - G^2 g^{\rho\lambda} \right] = 8 (k \cdot G)^2$$

Portanto,

$$D_1 \cdot \left[G^\rho G^\lambda - G^2 g^{\rho\lambda} \right] = \frac{2}{(p_1 \cdot k) (p_2 \cdot k)} \left[2 (k \cdot G e \cdot p_2 - e \cdot G p_2 \cdot k) (k \cdot G e \cdot p_1 - \right. \\ \left. - e \cdot G p_1 \cdot k) + p_1 \cdot k p_2 \cdot G k \cdot G - (k \cdot G)^2 (p_1 \cdot p_2 - m_1 m_2) \right] \quad .$$

O quinto termo é igual a:

$$E_1 = \text{Tr} \{ (\not{p}_2 + m_2) \gamma_\rho \not{k} \not{e} \not{p}_1 \not{e} k \gamma_\lambda (\not{p}_1 + m_1) \frac{\not{e} k}{2 p_1 \cdot k} \gamma_\rho \} = \\ = \frac{1}{4 (p_1 \cdot k)^2} \text{Tr} \{ p_2 \gamma_\rho \not{k} \not{e} \not{p}_1 \not{e} k \gamma_\lambda + m_1 m_2 \gamma_\rho \not{k} \not{e} k \gamma_\lambda \}$$

onde

$$\begin{aligned}
 E_1' &= \text{Tr}\{\not{p}_2 \gamma_\rho \not{k} \not{p}_1 \not{k} \gamma_\lambda\} = 4i e \cdot p_2 \left[k_\rho (k_\lambda e \cdot p_1 - e_\lambda p_1 \cdot k) + \right. \\
 &+ e_\rho (k_\lambda p_1 \cdot k + k_\lambda p_1 \cdot k) - k_\rho (e_\lambda p_1 \cdot k + k_\lambda e \cdot p_1) + k_\rho (k_\lambda e \cdot p_1 + e_\lambda p_1 \cdot k) - \\
 &- e_\rho (k_\lambda p_1 \cdot k + k_\lambda p_1 \cdot k) - k_\rho (k_\lambda e \cdot p_1 - e_\lambda p_1 \cdot k) \left. \right] - p_2 \cdot k \\
 &\left[e_\rho (k_\lambda e \cdot p_1 - e_\lambda p_1 \cdot k) - p_{1\rho} k_\lambda + e_\rho (k_\lambda e \cdot p_1 + e_\lambda p_1 \cdot k) - \right. \\
 &- k_\rho (e_\lambda e \cdot p_1 - p_{1\lambda} + e_\lambda e \cdot p_1) - g_{\rho\lambda} p_1 \cdot k + k_\rho (e_\lambda e \cdot p_1 - p_{1\lambda} + e_\lambda e \cdot p_1) - \\
 &- e_\rho (e_\lambda p_1 \cdot k + k_\lambda e \cdot p_1) + p_{1\rho} k_\lambda - e_\rho (k_\lambda e \cdot p_1 - e_\lambda p_1 \cdot k) - g_{\rho\lambda} p_1 \cdot k \left. \right] + \\
 &+ p_{2\rho} (-k_\lambda p_1 \cdot k - k_\lambda p_1 \cdot k) - p_1 \cdot p_2 (k_\rho k_\lambda - k_\lambda k_\rho) + p_{2\lambda} (-k_\rho p_1 \cdot k - k_\rho p_1 \cdot k) \} \\
 &= 8 p_1 \cdot k \left[k_\lambda p_{2\rho} + k_\rho p_{2\lambda} - g_{\rho\lambda} p_2 \cdot k \right]
 \end{aligned}$$

e

$$E_1'' = \text{Tr}\{\gamma_\rho \not{k} \not{p}_1 \not{k} \gamma_\lambda\} = 0$$

Portanto

$$E_1 \cdot \left[G^\rho G^\lambda - G^2 g^{\rho\lambda} \right] = - \frac{2}{p_1 \cdot k} \left[G^2 p_2 \cdot k + 2k \cdot G p_2 \cdot G \right]$$

O sexto termo é igual a:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \text{Tr}\left\{ (\not{p}_2 + m_2) \gamma_\rho \frac{\not{k} \not{e}}{2 p_1 \cdot k} (\not{p}_1 + m_1) \bar{\gamma}_\lambda \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \right\} = \\
 &= \frac{1}{2 p_1 \cdot k} \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \text{Tr}\{ \not{p}_2 \gamma_\rho \not{k} \not{p}_1 \gamma_\lambda + m_1 m_2 \gamma_\rho \not{k} \not{e} \gamma_\lambda \}
 \end{aligned}$$

onde

$$F_1' = \text{Tr}\{\not{\epsilon}_2 \gamma_\rho \not{k} \not{\epsilon}_1 \gamma_\lambda\} = 4 \left[p_{2\rho} (k_\lambda e \cdot p_1 - e_\lambda p_1 \cdot k) - p_2 \cdot k (e_\rho p_{1\lambda} - e_\lambda p_{1\rho}) + \right. \\ \left. + g_{\rho\lambda} (e \cdot p_1) + e \cdot p_2 (k_\rho p_{1\lambda} - k_\lambda p_{1\rho} + g_{\rho\lambda} p_1 \cdot k) - p_1 \cdot p_2 (e_\lambda k_\rho - e_\rho k_\lambda) + \right. \\ \left. + p_{2\lambda} (k_\rho e \cdot p_1 - e_\rho p_1 \cdot k) \right]$$

e

$$F_1'' = \text{Tr}\{\gamma_\rho \not{k} \not{\epsilon}' \gamma_\lambda\} = 4 \left[e_\lambda k_\rho - e_\rho k_\lambda \right] .$$

Temos então que

$$F_1' \cdot \left[G^\rho G^\lambda - G^2 g^{\rho\lambda} \right] = 4 \left[2p_2 \cdot G (k \cdot G e \cdot p_1 - e \cdot G p_1 \cdot k) - G^2 (p_1 \cdot k) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \right. \\ \left. (p_2 \cdot k) \right]$$

e

$$F_1'' \cdot \left[G^\rho G^\lambda - G^2 g^{\rho\lambda} \right] = 0$$

Portanto

$$F_1 \cdot \left[G^\rho G^\lambda - G^2 g^{\rho\lambda} \right] = 2 (p_2 \cdot k) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 \left[2p_2 \cdot G - G^2 \right] .$$

O sétimo termo é igual a:

$$H_1 = \text{Tr}\{(\not{\epsilon}_2 + m_2) \gamma_\rho \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) (\not{\epsilon}_1 + m_1) \bar{\gamma}_\lambda \frac{\not{k} \not{\epsilon}}{2p_2 \cdot k}\} = \frac{1}{2p_2 \cdot k} \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)$$

$$\text{Tr}\{\not{p}_2 \gamma_\rho \not{p}_1 \gamma_\lambda \not{k} \not{\epsilon} + m_1 m_2 \gamma_\rho \gamma_\lambda \not{k} \not{\epsilon}\}$$

onde

$$H_1' = \text{Tr}\{\not{p}_2 \gamma_\rho \not{p}_1 \gamma_\lambda \not{k} \not{e}\} = 4 \left[p_{2\rho} (k_\lambda e \cdot p_1 - e_\lambda p_1 \cdot k) - p_1 \cdot p_2 (e_\rho k_\lambda - e_\lambda k_\rho) + p_{2\lambda} (e_\rho p_1 \cdot k - k_\rho e \cdot p_1) - p_2 \cdot k (e_\lambda p_{1\rho} - g_{\rho\lambda} e \cdot p_1 + e_\rho p_{1\lambda}) + e \cdot p_2 (k_\lambda p_{1\rho} - g_{\rho\lambda} p_1 \cdot k + k_\rho p_{1\lambda}) \right]$$

e

$$H_1'' = \text{Tr}\{\gamma_\rho \gamma_\lambda \not{k} \not{e}\} = 4 [e_\rho k_\lambda - e_\lambda k_\rho]$$

Temos então que

$$H_1' \cdot [G^\rho G^\lambda - G^2 g^{\rho\lambda}] = 4 \left[2p_1 \cdot G (k \cdot G e \cdot p_2 - e \cdot G p_2 \cdot k) + G^2 (p_1 \cdot k) (p_2 \cdot k) \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \right]$$

e

$$H_1'' \cdot [G^\rho G^\lambda - G^2 g^{\rho\lambda}] = 0.$$

Portanto,

$$H_1 \cdot [G^\rho G^\lambda - G^2 g^{\rho\lambda}] = 2p_1 \cdot k \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 [2p_1 \cdot G + G^2]$$

O oitavo termo é igual a:

$$I_1 = \text{Tr}\{(\not{p}_2 + m_2) \gamma_\rho \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) (\not{p}_1 + m_1) \frac{\not{k} \gamma_\lambda}{2p_1 \cdot k}\} = \frac{1}{2p_1 \cdot k} \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \text{Tr}\{\not{p}_2 \gamma_\rho \not{p}_1 \not{k} \gamma_\lambda + m_1 m_2 \gamma_\rho \not{k} \gamma_\lambda\}$$

onde

$$L_1^i = \text{Tr}\{\not{\epsilon}_2 \gamma_\rho \not{\epsilon}_1 \gamma_\lambda\} = 4 \left[p_{2\rho} p_{1\lambda} - g^{\rho\lambda} p_1 \cdot p_2 + p_{1\rho} p_{2\lambda} \right]$$

e

$$L_1^u = \text{Tr}\{\gamma_\rho \gamma_\lambda\} = 4g_{\rho\lambda}$$

Temos então que

$$L_1^i \cdot [G^\rho G^\lambda - G^2 g^{\rho\lambda}] = 4 \left[2p_1 \cdot G p_2 \cdot G + G^2 p_1 \cdot p_2 \right]$$

e

$$L_1^u \cdot [G^\rho G^\lambda - G^2 g^{\rho\lambda}] = 4 \left[-3G^2 \right]$$

Portanto

$$L_1 \cdot [G_\rho G_\lambda - G^2 g_{\rho\lambda}] = 4 \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 \left[2p_1 \cdot G p_2 \cdot G + G^2 p_1 \cdot p_2 - 3m_1 m_2 G^2 \right].$$

Para os cálculos dos traços no caso vetorial usamos a seguinte regra

$$\begin{aligned} T \cdot \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6 \mu_7 \mu_8 &= \frac{1}{4} \text{Tr}\{\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_4} \gamma^{\mu_5} \gamma^{\mu_6} \gamma^{\mu_7} \gamma^{\mu_8}\} = \\ &= \{g^{\mu_1 \mu_2} T^{\mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6 \mu_7 \mu_8} - g^{\mu_1 \mu_3} T^{\mu_2 \mu_4 \mu_5 \mu_6 \mu_7 \mu_8} + \\ &+ g^{\mu_1 \mu_4} T^{\mu_2 \mu_3 \mu_5 \mu_6 \mu_7 \mu_8} - g^{\mu_1 \mu_5} T^{\mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_6 \mu_7 \mu_8} + g^{\mu_1 \mu_6} T^{\mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_7 \mu_8} - \\ &- g^{\mu_1 \mu_7} T^{\mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6 \mu_8} + g^{\mu_1 \mu_8} T^{\mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6 \mu_7}\} \end{aligned}$$

onde os $T^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6}$ já foram definidos anteriormente.

Então a eq. (2.4.10) torna-se:

$$\begin{aligned} N_1 = \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{2}{3} \left\{ - \frac{2}{p_2 \cdot k} \left[G^2 p_1 \cdot k + 2k \cdot G p_1 \cdot G \right] + \frac{2}{(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k)} \left[2(k \cdot G e \cdot p_2 - \right. \right. \\ \left. \left. - e \cdot G p_2 \cdot k)(k \cdot G e \cdot p_1 - e \cdot G p_1 \cdot k) + k \cdot G(p_1 \cdot k p_2 \cdot G + p_1 \cdot G p_2 \cdot k) - G^2 p_1 \cdot k p_2 \cdot k - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(k.G)^2 (p_1 \cdot p_2 - m_1 m_2) \Big] + 2p_1 \cdot k \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 (2p_1 \cdot G + G^2) \quad + \\
 & + \frac{2}{(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k)} \left[2(k \cdot G e \cdot p_2 - e \cdot G p_2 \cdot k)(k \cdot G e \cdot p_1 - e \cdot G p_1 \cdot k) + p_1 \cdot k p_2 \cdot G k \cdot G - \right. \\
 & -(k.G)^2 (p_1 \cdot p_2 - m_1 m_2) - \frac{2}{p_1 \cdot k} \left[G^2 p_2 \cdot k + 2k \cdot G p_2 \cdot G \right] + 2p_2 \cdot k \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \right. \\
 & \left. - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 (2p_2 \cdot G - G^2) + 2p_1 \cdot k \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 (2p_1 \cdot G + G^2) \quad + \\
 & + 2p_2 \cdot k \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 (2p_2 \cdot G - G^2) + 4 \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 \\
 & \left. (2p_1 \cdot G p_2 \cdot G + G^2 p_1 \cdot p_2 - 3m_1 m_2 G^2) \right\} \tag{2.4.11}
 \end{aligned}$$

e reduz-se (*) a:

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{4} N_1 = & \left\{ G^2 \left[\frac{1}{2} (m_1 - m_2)^2 - 2m_1 m_2 - G^2 \right] + \frac{1}{2} (m_1^2 - m_2^2) \right\} \Omega + 4G^2 + (k \cdot G)^2 \left[2G^2 + \right. \\
 & \left. + (m_1 - m_2)^2 \right] / (p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k) \tag{2.4.12}
 \end{aligned}$$

Para o caso pseudo-vetorial ($\sigma=3$) a eq. (2.4.3) torna-se:

$$\begin{aligned}
 N_3 = & \int_{\theta} \frac{2}{3} \left[G^0 G^\lambda - G^2 g^{\rho\lambda} \right] \frac{1}{4} \text{Tr} \{ (\not{p}_2 + m_2) \left[\frac{\not{e} \not{k}}{2p_2 \cdot k} \gamma_\rho \gamma^5 + \gamma_\rho \gamma^5 \frac{\not{k} \not{e}}{2p_1 \cdot k} + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \gamma_\rho \gamma^5 \right] (\not{p}_1 + m_1) \left[\overline{\gamma}^\lambda \gamma^5 \frac{\not{k} \not{e}}{2p_2 \cdot k} + \frac{\not{e} \not{k}}{2p_1 \cdot k} \overline{\gamma}^\lambda \gamma^5 + \overline{\gamma}^\lambda \gamma^5 \right.
 \end{aligned}$$

(*) Para se reduzir a eq. (2.4.11) à eq. (2.4.12) foi usado o fato de que: $p_1 \cdot G = p_1 \cdot p_2 - p_1^2 - p_1 \cdot k$; $p_2 \cdot G = p_2^2 - p_1 \cdot p_2 - p_2 \cdot k$; $k \cdot G = p_2 \cdot k - p_1 \cdot k$ e por último $e \cdot G = e \cdot p_2 - e \cdot p_1$.

(**) Ω foi definido na eq. (2.4.7)

$$\left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)] \quad (2.4.13)$$

$$N_3 = \int_{\theta} \frac{2}{3} \left[G^{\rho} G^{\lambda} - G^2 g^{\rho\lambda} \right] \frac{1}{4} \left[A_3 + B_3 + C_3 + D_3 + E_3 + F_3 + H_3 + I_3 + L_3 \right]$$

Fazendo os cálculos explicitamente vemos que, os termos $A_3, B_3, C_3 \dots$ são iguais aos termos do caso vetorial exceto os fatores B_3, D_3 e L_3 , que são

$$B_3 \cdot \left[G^{\rho} G^{\lambda} - G^2 g^{\rho\lambda} \right] = \frac{2}{(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k)} \left[2(k \cdot Ge \cdot p_2 - e \cdot Gp_2 \cdot k)(k \cdot Ge \cdot p_1 - e \cdot Gp_1 \cdot k) + k \cdot G(p_1 \cdot k p_2 \cdot G + p_1 \cdot Gp_2 \cdot k) - G^2 p_1 \cdot k p_2 \cdot k - (k \cdot G)^2 (p_1 \cdot p_2 + m_1 m_2) \right]$$

$$D_3 \cdot \left[G^{\rho} G^{\lambda} - G^2 g^{\rho\lambda} \right] = \frac{2}{(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k)} \left[2(k \cdot Ge \cdot p_2 - e \cdot Gp_2 \cdot k)(k \cdot Ge \cdot p_1 - e \cdot Gp_1 \cdot k) + p_1 \cdot k p_2 \cdot Gk \cdot G - (k \cdot G)^2 (p_1 \cdot p_2 + m_1 m_2) \right]$$

$$L_3 \left[G^{\rho} G^{\lambda} - G^2 g^{\rho\lambda} \right] = 4 \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 \left[2p_1 \cdot Gp_2 \cdot G + G^2 p_1 \cdot p_2 + 3m_1 m_2 G^2 \right]$$

Assim,

$$N_3 = \frac{4}{3} \left\{ G^2 \left[\frac{1}{2} (m_1 + m_2)^2 + 2m_1 m_2 - G^2 \right] + \frac{1}{2} (m_1^2 - m_2^2) \right\} \Omega + 4G^2 + (k \cdot G)^2 \left[2G^2 + (m_1 + m_2)^2 \right] / (p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k) \quad (2.4.14)$$

E, finalmente

$$\frac{3}{4} N_2 = \left[(m_1^2 - m_2^2)^2 - 4(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k) - \frac{1}{2} G^2 - \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2) G^2 \right] \Omega -$$

$$\begin{aligned}
 & - (k.G)^2 [G^2 + 4(p_1 \cdot p_2)] / (p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k) - 4G^2 + 4[(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k)]^{-1} - \\
 & - (p_2 \cdot k)(p_1 \cdot k)^{-1} [p_1 \cdot G + p_2 \cdot G] . \quad (2.4.15)
 \end{aligned}$$

Aqui nós estamos interessados no espectro da partícula 2, ao contrário do que na probabilidade de transição diferencial. Assim, o próximo passo é integrar sobre o momento do fóton.

Isso leva a uma integral invariante

$$I = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\bar{k}} \int_0^{\bar{k}} \frac{d^3 k}{\epsilon} \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 \quad (2.4.16)$$

que é mais conveniente trabalhar na representação de Coester⁽²²⁾ do campo méson vetorial na qual tratamos k como um 4-momento de um méson vetorial de massa λ_{\min} e energia ϵ , e somamos sobre todas as direções de polarização dos mésons vetoriais.

Nesse caso, a soma da forma $\sum_{\text{pol}} (M.e)(M.e)$ é sobre as 3 direções de polarização e pode ser expressada de acordo com Berman⁽¹⁵⁾, como

$$\sum_{\text{pol}} (M.e)(M.e) = -M^2 + \frac{1}{\lambda_{\min}^2} (M.k)^2 \quad (2.4.17)$$

Se $M.e$ é o elemento de matriz para o bremsstrahlung interno, $M.k$ é de ordem λ_{\min}^2 de modo que para pequeno λ_{\min} podemos desprezar o segundo termo da direita da eq. (2.4.17). É mais conveniente calcular a integral no sistema de repouso da partícula 1, assim a eq. (2.4.16) torna-se

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\bar{k}} \frac{k^2 dk}{\epsilon} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \left(\frac{2p_1 \cdot p_2}{(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k)} - \frac{m_2^2}{(p_2 \cdot k)^2} - \frac{m_1^2}{(p_1 \cdot k)^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_0^{k\bar{m}\alpha x} \frac{k^2 dk}{\epsilon} \int_{-1}^1 dx \left(\frac{2m_1 E_2}{m_1 \epsilon E_2 (\epsilon - \beta kx)} - \frac{m_2^2}{E_2^2 (\epsilon - \beta kx)^2} - \frac{m_1^2}{m_1^2 \epsilon^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{k\bar{m}\alpha x} \frac{k^2 dk}{\epsilon} \int_{-1}^1 dx \left(\frac{2}{\epsilon (\epsilon - \beta kx)} - \frac{m_2^2}{E_2^2 (\epsilon - \beta kx)^2} - \frac{1}{\epsilon^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{k\bar{m}\alpha x} \frac{k^2 dk}{\epsilon} \int_{-1}^1 dx \left(\frac{2\epsilon E_2^2 (\epsilon - \beta kx) - m_2^2 \epsilon^2 - E_2^2 (\epsilon - \beta kx)^2}{E_2^2 \epsilon^2 (\epsilon - \beta kx)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{k\bar{m}\alpha x} \frac{k^2 dk}{\epsilon} \int_{-1}^1 dx \left(\frac{2E_2^2 \epsilon^2 - 2E_2^2 \epsilon \beta kx - m_2^2 \epsilon^2 - E_2^2 \epsilon^2 + 2E_2^2 \epsilon \beta kx - E_2^2 \beta^2 k^2 x^2}{E_2^2 \epsilon^2 (\epsilon - \beta kx)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{k\bar{m}\alpha x} \frac{k^2 dk}{\epsilon} \int_{-1}^1 dx \left(\frac{E_2^2 \epsilon^2 - m_2^2 \epsilon^2 - E_2^2 \beta^2 k^2 x^2}{E_2^2 \epsilon^2 (\epsilon - \beta kx)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{k\bar{m}\alpha x} \frac{k^2 dk}{\epsilon} \int_{-1}^1 dx \left(\frac{p_2^2 \epsilon^2 - E_2^2 \beta^2 k^2 x^2}{E_2^2 \epsilon^2 (\epsilon - \beta kx)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{k\bar{m}\alpha x} \frac{k^2 dk}{\epsilon} \int_{-1}^1 dx \left[\frac{E_2^2 \beta^2 \epsilon^2 (1 - k^2 x^2 / \epsilon^2)}{E_2^2 \epsilon^2 (\epsilon - \beta kx)^2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \beta^2 \int_{-1}^1 dx \int_0^{k\bar{m}\alpha x} \frac{k^2 dk}{\epsilon} \frac{(1 - x^2 k^2 / \epsilon^2)}{(\epsilon - \beta kx)^2} \tag{2.4.18}
 \end{aligned}$$

onde

$$\epsilon = (k^2 + \lambda_{\min}^2)^{1/2} \quad \text{e} \quad \beta = p_2 / E_2$$

A integração sobre k pode ser facilmente realizada se escolhermos $v=k/\epsilon$ como nova variável.

Temos nesse caso que,

$$k^2 = \frac{v^2 \lambda_{\min}^2}{(1-v^2)} \quad ; \quad \epsilon = \lambda_{\min} \left(\frac{1}{1-v^2} \right)^{1/2} \quad ; \quad dk = \frac{\lambda_{\min}}{(1-v^2)^{3/2}} dv$$

Substituindo na eq. (2.4.18) resulta:

$$I = \frac{1}{2} \beta^2 \int_{-1}^1 dx \int_0^{k_{\max}} \frac{(k_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2)^{1/2}}{(k^2_{\max} + \lambda_{\min}^2)^{1/2}} \frac{(v^2 - x^2 v^4)}{(1-\beta xv)^2 (1-v^2)} dv \quad (2.4.19)$$

O integrando da eq. (2.4.19) pode ser transformado em

$$\frac{(v^2 - x^2 v^4)}{(1-\beta xv)^2 (1-v^2)} = \frac{a}{(1-\beta xv)} + \frac{b}{(1-\beta xv)^2} + \frac{(cv+d)}{(1-v^2)} + e \quad (2.4.20)$$

onde os parâmetros a, b, c, d, e são para ser determinados. Os cálculos mostram que eles são iguais a:

$$a = -\frac{2}{\beta^2} - \frac{2(\beta x)^2 (1-x^2)}{[1-(\beta x)^2]^2} \quad ; \quad b = \frac{1}{\beta^2} + \frac{(1-x^2)}{[1-(\beta x)^2]} \quad ;$$

$$c = \frac{2\beta x(1-x^2)}{[1-(\beta x)^2]^2} \quad ; \quad d = \frac{(1-x^2)[1+(\beta x)^2]}{[1-(\beta x)^2]^2} \quad ; \quad e = \frac{1}{\beta^2} .$$

A integração em v dos termos à direita da eq. (2.4.20) é agora trivial. Temos

$$\int_0^R \frac{a}{(1-\beta xv)} dv = -\frac{a}{\beta x} \ln |\beta x R - 1| \quad ; \quad \int_0^R \frac{b}{(1-\beta xv)^2} dv = \frac{bR}{\beta x R - 1}$$

$$\int_0^R e^v dv = e^R \quad \text{e finalmente} \quad \int_0^R \frac{(cv+d)}{(1-v^2)} dv$$

Nesta última integral, transformamos o integrando para

$$\frac{cv+d}{(1-v^2)} = \frac{z}{1-v} + \frac{y}{1+v} \quad \therefore \quad z(1+v) + y(1-v) = cv+d$$

Portanto

$$\begin{cases} z+y = d \\ z-y = c \end{cases} \quad \rightarrow \quad z = \frac{c+d}{2} \quad ; \quad y = \frac{d-c}{2}$$

Então,

$$\int_0^R \frac{(cv+d)}{(1-v^2)} dv = -z \ln |R-1| + y \ln |R+1|$$

onde

$$R = \frac{k_{\max}}{(k_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2)^{1/2}}$$

Assim

$$R+1 = \frac{k_{\max} + \sqrt{k_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2}}{\sqrt{k_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2}} \quad ; \quad R-1 = \frac{-\lambda_{\min}^2}{\sqrt{k_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2} (k_{\max} + \sqrt{k_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2})} \quad e,$$

$$\int_0^R \frac{(cv+d)}{(1-v^2)} dv = -z \ln \left[\frac{\lambda_{\min}^2}{\sqrt{k_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2} (k_{\max} + \sqrt{k_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2})} \right] +$$

$$+ y \ln \left(\frac{k_{\max} + \sqrt{k_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2}}{\sqrt{k_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2}} \right)$$

$$= z \ln \frac{\sqrt{k_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2} (k_{\max} + \sqrt{k_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2})}{\lambda_{\min}^2} + y \ln \left(\frac{k_{\max} + \sqrt{k_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2}}{\sqrt{k_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2}} \right)$$

$$= (z+y) \ln (k_{\max} + \sqrt{k_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2}) + (z-y) \ln (\sqrt{k_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2}) = z \ln \lambda_{\min}^2$$

$$= d \ln (k_{\max} + \sqrt{k_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2}) + c \ln (\sqrt{k_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2}) - (c+d) \ln \lambda_{\min}^2$$

No limite $k_{\max}^2 \gg \lambda_{\min}^2$, portanto

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{(cv+d)}{(1-v^2)} dv &= d \ln (2k_{\max}) + c \ln (k_{\max}) - (c+d) \ln \lambda_{\min} \\ &= d \ln 2 + (c+d) \ln \left(\frac{k_{\max}}{\lambda_{\min}} \right) \end{aligned}$$

Substituindo todos esses valores na eq. (2.4.19), obtemos

$$I = I_0 + c$$

onde

$$I_0 = \frac{1}{2} \beta^2 \int_{-1}^1 \ln \left(\frac{k_{\max}}{\lambda_{\min}} \right) \frac{1-x^2}{(1-\beta x)^2} dx \quad (2.4.21)$$

e

$$c = 2 \ln 2 \left(\frac{1}{\beta} \operatorname{tgh}^{-1} \beta - 1 \right) + 1 + \frac{1}{2\beta} \operatorname{tgh}^{-1} \beta \left[2 + \ln \left(\frac{1-\beta^2}{4} \right) \right] + \frac{1}{\beta} \left[L(\beta) - L(-\beta) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\beta} \left[L\left(\frac{1-\beta}{2}\right) - L\left(\frac{1+\beta}{2}\right) \right] \quad (2.4.22)$$

onde a função $L(x)$ é definida na eq. (2.2.17).

Integrando agora a eq. (2.4.21) e levando em conta a conservação de energia-momento presentes nas eqs. (2.4.6)

(2.4.15), temos

$$P_Y \bar{d}_P^3 = \bar{d}_P^3 (e^2/2\pi) \sum_{\sigma=0}^4 b_{\sigma} P_{\sigma}^{(0)} \quad (2.4.23)$$

onde

$$b_{0;4} = 2D + (\cosh\theta \pm 1)^{-1} (\cosh\omega - \cosh\theta) W + C \quad (2.4.24)$$

$$b_{1;3} = 2D + \left[Q + (\cosh\omega - \cosh\theta)^2 Y \right] \left[3(\cosh\omega - \cosh\theta) (\cosh\theta \mp 1) + \sinh^2\theta \right]^{-1} + C \quad (2.4.25)$$

$$b_2 = 2D + \left[2Q + 2(\cosh\omega - \cosh\theta)^2 Z \right] \left[3(\cosh\omega - \cosh\theta) \cosh\theta + 2\sinh^2\theta \right]^{-1} + C \quad (2.4.26)$$

e

$$D = 2(\theta \cot\theta - 1) (\omega - \omega_{\zeta} - 1 - \ln 2) + \left[L(e^{-\theta-\omega}) - L(e^{\theta-\omega}) \right] (\cot\theta) - 1$$

$$- \theta e^{-\omega} / \sinh\theta + \left[2\theta \cot\theta + (\sinh\omega) / (\sinh\theta) - 1 \right] \ln(1 - e^{-\theta-\omega})$$

$$+ \left[2\theta \cot\theta - (\sinh\omega) / (\sinh\theta) - 1 \right] \ln(1 - e^{\theta-\omega}) \quad (2.4.27)$$

onde C é dado na eq. (2.4.22)

$$Q = 4(\theta \cot\theta - 1) \sinh^2\omega \quad (2.4.28)$$

$$W = (5/3)\theta \cot\theta + \theta (\cosh\omega) / 3\sinh\theta - 2 \quad (2.4.29)$$

$$Y = (10/3)(\theta \cot\theta - 1) + \left[(5/3) \cosh\omega \mp 1 \right] (\theta / \sinh\theta) \quad (2.4.30)$$

$$Z = \frac{1}{6} \frac{\theta \cosh\omega}{\sinh\theta} + \frac{5}{6} \theta \cot\theta - \frac{5}{3} - \frac{\sinh\omega}{\sinh\theta} \ln \frac{\sinh \frac{1}{2}(\omega - \theta)}{\sinh \frac{1}{2}(\omega + \theta)} \quad (2.4.31)$$

É importante notar que na expressão para D existe um fator, $\ln(1-e^{\theta-\omega})$, que é logaritmicamente divergente no final do espectro ($\theta = \omega$).

Uma excelente aproximação, como é mostrado na ref. (14) é considerarmos

$$\frac{1}{\Delta^3 P} \int_{p-\Delta p}^p \ln(1-e^{\theta-\omega}) d^3 p = \ln(1-e^{\theta-\omega} + e^{\theta-1} (p_1 \cdot \Delta p_2) / m_1^2 \sinh \theta) \quad (2.4.32)$$

O resultado final do cálculo do bremsstrahlung é então dado pela eq.(2.4.24),ff., onde na expressão para D, trocamos o fator $\ln(1-e^{\theta-\omega})$ pelo lado direito da eq. (2.4.32).

Observamos que as divergências do infravermelho surgindo dos fótons virtuais são compensadas por termos similares originários do cálculo do bremsstrahlung interno.

CAPÍTULO III

APLICAÇÕES A PROCESSOS FUNDAMENTAIS

Agora utilizaremos os resultados dos cálculos das correções radiativas, a dois processos fundamentais de decaimento, do muon, do beta do neutron e calcularemos novamente essas correções para um processo de espalhamento, no caso o do elétron-neutrino.

3.1 - Correções para o Decaimento do Muon Polarizado

Primeiramente, consideremos o efeito das correções radiativas ao espectro de decaimento de muons completamente polarizados. Nos restringiremos apenas no caso da teoria de duas componentes do neutrino onde, somente as interações V e A estão presentes. Para obtermos esse resultado precisamos fazer algumas modificações nos resultados obtidos no capítulo anterior.

A primeira delas, é considerarmos o limite de pequena massa, i.e. $E_e \gg m_e$ onde E_e e m_e representam a energia e a massa do elétron respectivamente, nos resultados $\alpha_{1,3}$ e $b_{1,3}$ dados pelas eqs. (2.3.21), (2.3.23) e (2.4.25). A segunda é considerarmos o problema da polarização nos cálculos da probabilidade de transição tanto para os fótons virtuais quanto para o bremsstrahlung interno.

Assim, o espectro de decaimento de muons completamen-

te polarizados é dado, para ordem α , por:

$$dN(x, \theta) = \frac{1}{2} A \left\{ 3-2x + \frac{\alpha}{2\pi} f(x) + 6\zeta \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right) \frac{1-x}{x} + \xi \cos \theta \left[1-2x + \frac{\alpha}{2\pi} g(x) \right] \right\} x^2 dx d\Omega \quad (3.1.1)$$

onde, $x=2p_e/m_\mu$, θ é o ângulo entre o momento do elétron e do muon,

$$A = \left(\frac{m_\mu^5}{2^{10} x \pi^4} \right) 8 \left[|g_1|^2 + |g_3|^2 \right] \quad (3.1.2)$$

$$\zeta = \left[|g_3|^2 - |g_1|^2 / |g_3|^2 + |g_1|^2 \right] \quad (3.1.3)$$

e

$$\xi = 2\text{Re}(g_1^* g_3) / \left[|g_3|^2 + |g_1|^2 \right] \quad (3.1.4)$$

As constantes A , ζ e ξ estão em inteira analogia com a fórmula dos três parâmetros de Michel ⁽²³⁾ para o espectro de decaimento do muon não corrigido. Observa-se que o termo proporcional a (m_e/m_μ) anula no caso da interação puramente (V-A).

As quantidades $f(x)$ e $g(x)$ representam as correções radiativas para os termos isotrópico e $\cos \theta$ da eq. (3.1.1), respectivamente.

Temos que:

$$f(x) = (6-4x) R(x) + (6-6x) \ln x + \frac{1-x}{3x^2} \left[(5+17x-34x^2) (\omega + \ln x) - 22x + 34x^2 \right] \quad (3.1.5)$$

e

$$g(x) = (2-4x) R(x) + (2-6x) \ln x - \frac{1-x}{3x^2} \left[(1+x+34x^2) (\omega + \ln x) + 3-7x - 32x^2 + \frac{4(1-x)^2}{x} \ln(1-x) \right] \quad (3.1.6)$$

onde

$$R(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} - \frac{\pi^2}{3} - 2 + \omega \left[\frac{3}{2} + 2 \ln \left(\frac{1-x}{x} \right) \right] - \ln x (2 \ln x - 1) + \\ + (3 \ln x - 1 - \frac{1}{x}) \ln(1-x) \quad (3.1.7)$$

3.2 - Correções Radiativas para o Decaimento Beta

Para o caso do decaimento beta, temos que a interação fraca é descrita por meio da lagrangeana efetiva

$$L = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\bar{\psi}_p \gamma_\mu (1 + \rho \gamma^5) \psi_n \right] \left[\bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \psi_\nu \right] + \text{h.c.} \quad (3.2.1)$$

onde $\rho = -G_A/G_V$, G_V e G_A são as constantes de acoplamento vetorial polar (Fermi) e axial vetor (Gamow-Teller), respectivamente.

Assim os cálculos são feitos não para a teoria exata (V-A), i.e., quando $\rho=1$, mas para (V-1.2A), onde o fator 1.2 advém da corrente hadrônica presente na interação.

Fazendo algumas mudanças nos resultados obtidos no capítulo anterior; desprezando termos de ordem $\alpha E/m_p$, αv e $\alpha E/\lambda$ mas mantendo todas as contribuições de ordem $\alpha m_p/\lambda$ (E e v são a energia do elétron e a velocidade do nucleon, respectivamente e λ é o cutoff do ultravioleta), o espectro de decaimento beta é dado por:

$$\Delta P d^3 p = \frac{\alpha}{2\pi} P^0 d^3 p \left\{ 3 \ln \left(\frac{m_p}{m_e} \right) + \frac{3}{2} + 4 \left(\frac{\text{tgh}^{-1} \beta}{\beta} - 1 \right) \left[\frac{E_m - E}{3E} - \frac{3}{2} + \ln \left(\frac{2(E_m - E)}{m_e} \right) \right] + \right. \\ + \frac{2}{\beta} \left[L(\beta) - L(-\beta) + L\left(\frac{2\beta}{1+\beta}\right) + \frac{1}{2} L\left(\frac{1-\beta}{2}\right) - \frac{1}{2} L\left(\frac{1+\beta}{2}\right) \right] + \frac{1}{\beta} \text{tgh}^{-1} \beta \left[2(1+\beta^2) + \right. \\ \left. + \frac{(E_m - E)^2}{6E^2} - 2 \ln \left(\frac{2}{1-\beta} \right) \right] + \left. \left(\frac{10+6\rho}{4} - 1 \right) \ln r + \frac{9}{4}(\rho-1) + C(r, \rho) \right\} \quad (3.2.2)$$

onde $r = \lambda^2/m_p^2$, $\beta = p/E$ e $L(x)$ é a função de Spence.

A função $C(r, \rho)$ é dada por:

$$C(r, \rho) = \left[\frac{5}{2} - \frac{5}{2} r - \frac{r^2}{12} \right] \ln r + \frac{21}{4} + \frac{r}{6} + \left[-\frac{23}{3} + \frac{7}{3} r + \frac{r^2}{12} \right] Q_0 + \\ + \frac{(10+6\rho)}{2} \left\{ \frac{r}{6} - \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{2} + \frac{r^2}{12} \right) \ln r + \left(\frac{4}{3} - \frac{2r}{3} + \frac{r^2}{12} \right) Q_0 \right\} \quad (3.2.3)$$

onde

$$Q_0 = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2/r) + 1 - x} \quad (3.2.4)$$

A função $C(r, \rho)$ tem a propriedade assintótica, $\lim_{r \rightarrow \infty} C(r, \rho) = 0$. Essa função dependente do cutoff corresponde a escolher o regulador de Feynman como $\lambda^2/(\lambda^2 - k^2)$.

3.3 - Correções Radiativas para o Espalhamento Elétron-Neutrino

Os processos de neutrinos são bastante importantes em Cosmologia e Astrofísica Nuclear. Em particular na Astrofísica, onde o espalhamento elétron-neutrino torna-se importante nos últimos estágios de evolução estelar, como é mostrado por Bahcall, ref. (5).

Acredita-se, geralmente, que as estrelas se originam de tênues núvens de gás (principalmente de H), que se contraem por motivo da auto-gravitação.

Para estrelas de massas entre 4 a 10 $M_{\odot}^{(*)}$, o último estágio de sua evolução é seguido pelo colapso gravitacional, em que a escala de tempo hidrodinâmica é drasticamente afetada (ace

(*)

M_{\odot} significa massa do sol.

lerada) pela emissão de neutrinos.

No caso da explosão de supernova, segundo Colgate e White ⁽²⁴⁾, o que ocorre é o seguinte: os neutrinos emitidos do caroço denso transferem energia para as camadas mais externas da estrela por deposição. O calor produzido dá origem a violentas ondas de choque que vão lançar estas camadas ao espaço. Tal fenômeno é conhecido por explosão de supernova.

A correção radiativa, apesar de alterar pouco o processo, é importante para estimarmos a variação da seção de choque do espalhamento e, então, utilizá-la no cálculo do modelo de explosões de supernovas. Como existem muitas ambiguidades no cálculo estimativo hidrodinâmico da taxa de captura de elétrons por núcleos, tal pequena correção não foi considerada até agora. Entretanto, para futuro cálculo será necessário utilizar este processo, porque a correção radiativa altera a dependência da opacidade em temperatura. Nesta seção aplicamos o cálculo do capítulo II para o processo de espalhamento elétron-neutrino.

Neste processo, usando a teoria do tipo (V-A), a interação corrente-corrente usual é do tipo

$$\mathcal{L} = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\bar{\Psi}_e \gamma_\mu (1 + \gamma^5) \Psi_\nu \right] \cdot \left[\bar{\Psi}_\nu \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \Psi_e \right] \quad (3.3.1)$$

Por uma transformação de Fierz ⁽²⁵⁾ obtemos: (ver apêndice C)

$$\mathcal{L} = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\bar{\Psi}_e \gamma_\mu (1 + \gamma^5) \Psi_e \right] \left[\bar{\Psi}_\nu \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \Psi_\nu \right] \quad (3.3.2)$$

Dessa forma, podemos utilizar o método empregado no capítulo II, onde neste caso, a eq. (2.1.6) torna-se

$$\omega = \ln \frac{m_1}{m_2} = 0 \quad (3.3.3)$$

porque no espalhamento $m_1 = m_2$.

No sistema centro de massa temos que:

$$|\vec{p}_1| = |\vec{k}| = |\vec{p}| \quad ; \quad K = K'$$

e $E_1 = E_2 = \sqrt{p^2 + m^2}$, onde $\vec{p}_1, E_1, \vec{p}_2, E_2, k$ e k' são o momento-energia dos elétrons 1 e 2 e os 4-momentos dos neutrinos, respectivamente. K e K' representam as energias dos neutrinos incidente e espalhado.

Assim a eq. (2.1.5) fica

$$\cosh \theta = \frac{p_1 \cdot p_2}{m_1 m_2} = \frac{p^2 + m^2 - p^2 \cos \theta_\wedge}{m^2} = \frac{p^2 (1 - \cos \theta_\wedge) + m^2}{m^2} \quad (3.3.4)$$

onde θ_\wedge é o ângulo de espalhamento.

A energia total no S.C.M. é

$$E_{C.M.} = E_1 + K$$

mas

$$|\vec{p}_1| = p_{v_1} = K$$

então

$$E_{C.M.} = \sqrt{p^2 + m^2} + p \quad \therefore \quad p = \frac{E_{CM}^2 - m^2}{2E_{CM}}$$

Substituindo este último resultado na eq. (3.3.4) resulta

sulta

$$\cosh \theta = \frac{\left(\frac{E_{CM}^2 - m^2}{2E_{CM}}\right)^2 (1 - \cos \theta_\wedge) + m^2}{m^2} \quad (3.3.5)$$

A probabilidade de transição para o espalhamento é da do por

$$Pd^3P_2 = (d^3P/2(2\pi)^5 E_1 E_2) \sum_{\substack{\sigma, \sigma' \\ \rho, \lambda}} a_{\sigma} a_{\sigma'} (I_{\rho\lambda}^{\sigma\sigma'} / 4) \text{Tr} \left[(\not{p}'_2 + m) M_{\rho}^{\sigma} (\not{p}'_1 + m) \bar{M}_{\lambda}^{\sigma'} \right]$$

onde $M_{\rho}^{\sigma} = M^{(0)} 1_{+\Delta M} + M^{(0)} 3_{+\Delta M}^3$, para o caso (V-A). 1 e 3 representam os termos vetor e axial, respectivamente e \bar{M} continua sendo dado por $\gamma^0 M^{\dagger} \gamma^0$.

Quando calculamos essa probabilidade para o espalhamento no S.C.M. fixamos a entrada do neutrino incidente, com isso, a integral nos neutrinos já não é feita mais levando em conta todas as possibilidades de direções dos neutrinos portanto, resulta numa não simetria, i.e., σ pode ser diferente de σ' . Essa é uma diferença importante para o caso do decaimento.

Assim,

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} &= \iint d^3k' d^3k \delta^4(p_1 - p_2 + k - k') k'_{\mu} k_{\nu} / K^2 \delta^3(\vec{p}'_1 - \vec{k}) \\ &= \delta(E_1 - E_2 + E_{\nu_1} - E_{\nu_2}) k'_{\mu} k_{\nu} / K^2 \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

e

$$\begin{aligned} I_{\rho\lambda}^{(V-A)} &= \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\gamma_{\mu} \gamma_{\rho} (1 + \gamma^5) \gamma_{\nu} \gamma_{\lambda} (1 + \gamma^5) \right] \delta(E_1 - E_2 + K - K') k'_{\mu} k_{\nu} / K^2 \\ &= \frac{2}{K^2} \delta(E_1 - E_2 + K - K') k'_{\mu} k_{\nu} \chi_{\mu\rho\nu\lambda} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

onde $\chi_{\mu\rho\nu\lambda} = 4(g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} + g_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - i\epsilon_{\mu\rho\nu\lambda})$.

Então

$$P^{(V-A)} d^3 P_2 = \frac{G^2}{K^2} \left[d^3 P_2 / (2\pi)^5 E^2 \right] \delta(E_1 - E_2 + K - K') k'_\mu k'_\nu \chi_{\mu\rho\nu\lambda} \frac{1}{4}$$

$$\text{Tr} \left[(\not{P}_2 + m) M_\rho^\sigma (\not{P}_1 + m) \overline{M}_\lambda^{\sigma'} \right] = \frac{G^2}{K^2} \left[d^3 P_2 / (2\pi)^5 E^2 \right] \delta(E_1 - E_2 + K - K')$$

$$k'_\mu k'_\nu \chi_{\mu\rho\nu\lambda} \frac{1}{4} \text{Tr} \left[(1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7) + (8) + (9) + (10) + \right. \\ \left. + (11) + (12) \right]$$

onde

$$\text{Tr}(1) + \text{Tr}(2) + \text{Tr}(3) + \text{Tr}(4) = \text{Tr} \left[(\not{P}_2 + m) M^{(0)1} (\not{P}_1 + m) \overline{M}^{(0)1} \right] + \\ + \text{Tr} \left[(\not{P}_2 + m) M^{(0)1} (\not{P}_1 + m) \overline{M}^{(0)3} \right] + \text{Tr} \left[(\not{P}_2 + m) M^{(0)3} (\not{P}_1 + m) \overline{M}^{(0)1} \right] + \\ + \text{Tr} \left[(\not{P}_2 + m) M^{(0)3} (\not{P}_1 + m) \overline{M}^{(0)3} \right] = 2p_2^\theta p_1^\tau \chi^{\theta\rho\tau\lambda}$$

$$\text{Tr}(5) = \text{Tr} \left[(\not{P}_2 + m) M^{(0)1} (\not{P}_1 + m) \overline{\Delta M}^1 \right] = \text{Tr} \left[(\not{P}_2 + m) \gamma^\rho (\not{P}_1 + m) (e^2/2\pi) \right. \\ \left. (F \overline{\gamma}^\lambda + A_0^\lambda \overline{1}) \right] \\ = 4(e^2/2\pi) \left\{ F \left[P_2^\rho P_1^\lambda - (P_1 \cdot P_2 - m^2) g^{\rho\lambda} + P_2^\lambda P_1^\rho \right] + A_0^\lambda \left[P_2^\rho + P_1^\rho \right] m \right\}$$

onde $F = (S - \frac{1}{2} T + \theta/\sinh\theta + r_1)$

e S , T , r_1 e A_0^λ estão definidos no capítulo II, eqs. (2.2.24), (2.2.25), (2.2.29) e (2.2.31), respectivamente.

$$\text{Tr}(6) = \text{Tr} \left[(\not{P}_2 + m) M^{(0)1} (\not{P}_1 + m) \overline{\Delta M}^3 \right] = \text{Tr} \left[(\not{P}_2 + m) \gamma^\rho (\not{P}_1 + m) (e^2/2\pi) \right. \\ \left. (E \overline{\gamma}^\lambda \overline{\gamma}^5 + A_4^\lambda \overline{\gamma}^5) \right] \\ = -4(e^2/2\pi) i E P_2^\theta P_1^\tau \epsilon^{\theta\rho\tau\lambda}$$

onde $E = (S - \frac{1}{2} T - \theta/\sinh\theta + r_1)$ e A_4^λ é definido na eq.(2.2.31).

$$\begin{aligned} \text{Tr}(7) &= \text{Tr} \left[(\not{x}_2+m) \Delta M^1 (\not{x}_1+m) \overline{M^{(0)1}} \right] = \text{Tr} \left[(\not{x}_2+m) (e^2/2\pi) (F\gamma^\rho + A_0^\rho) \right. \\ &\quad \left. (\not{x}_1+m) \overline{\gamma^\lambda} \right] \\ &= 4 (e^2/2\pi) \{ F [P_2^\rho P_1^\lambda - (p_1 \cdot p_2 - m^2) g^{\rho\lambda} + P_2^\lambda P_1^\rho] + A_0^\rho [P_2^\lambda + P_1^\lambda] m \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(8) &= \text{Tr} \left[(\not{x}_2+m) \Delta M^1 (\not{x}_1+m) \overline{M^{(0)3}} \right] = \text{Tr} \left[(\not{x}_2+m) (e^2/2\pi) (F\gamma^\rho + A_0^\rho) \right. \\ &\quad \left. (\not{x}_1+m) \overline{\gamma^\lambda \gamma^5} \right] \\ &= -4 (e^2/2\pi) i F P_2^\theta P_1^\tau \varepsilon^{\theta\rho\tau\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(9) &= \text{Tr} \left[(\not{x}_2+m) M^{(0)3} (\not{x}_1+m) \overline{\Delta M^1} \right] = \text{Tr} \left[(\not{x}_2+m) \gamma^\rho \gamma^5 (\not{x}_1+m) \right. \\ &\quad \left. (e^2/2\pi) (F\overline{\gamma^\lambda} + A_0^\lambda) \right] \\ &= -4 (e^2/2\pi) i F P_2^\theta P_1^\tau \varepsilon^{\theta\rho\tau\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(10) &= \text{Tr} \left[(\not{x}_2+m) M^{(0)3} (\not{x}_1+m) \overline{\Delta M^3} \right] = \text{Tr} \left[(\not{x}_2+m) \gamma^\rho \gamma^5 (\not{x}_1+m) \right. \\ &\quad \left. (e^2/2\pi) (E\overline{\gamma^\lambda \gamma^5} + A_4^\lambda) \right] \\ &= 4 (e^2/2\pi) \{ E [P_2^\rho P_1^\lambda - (p_1 \cdot p_2 + m^2) g^{\rho\lambda} + P_2^\lambda P_1^\rho] + A_4^\lambda [-P_2^\rho + P_1^\rho] m \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(11) &= \text{Tr} \left[(\not{x}_2+m) \Delta M^3 (\not{x}_1+m) \overline{M^{(0)1}} \right] = \text{Tr} \left[(\not{x}_2+m) (e^2/2\pi) \right. \\ &\quad \left. (E\gamma^\rho \gamma^5 + A_4^\rho) (\not{x}_1+m) \overline{\gamma^\lambda} \right] \\ &= -4 (e^2/2\pi) i E P_2^\theta P_1^\tau \varepsilon^{\theta\rho\tau\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(12) &= \text{Tr} \left[(\not{p}_2 + m) \Delta M^3 (\not{p}_1 + m) \overline{M^{(0)3}} \right] = \text{Tr} \left[(\not{p}_2 + m) (e^2/2\pi) \right. \\ &\quad \left. (E \gamma^\rho \gamma^5 + A_4^\rho) (\not{p}_1 + m) \gamma^\lambda \gamma^5 \right] \\ &= 4 (e^2/2\pi) \{ E \left[p_2^\rho p_1^\lambda - (p_1 \cdot p_2 + m^2) g^{\rho\lambda} + p_2^\lambda p_1^\rho \right] + A_4^\rho \left[-p_2^\lambda + p_1^\lambda \right] m \} \end{aligned}$$

Somando

$$\begin{aligned} \text{Tr}(5) + \text{Tr}(7) + \text{Tr}(8) + \text{Tr}(9) &= 4 (e^2/2\pi) \{ 2E p_2^\theta p_1^\tau \chi^{\theta\rho\tau\lambda} + 2m^2 g^{\rho\lambda} F + \\ &\quad + m \left[A_0^\lambda (p_2^\rho + p_1^\rho) + A_0^\rho (p_2^\lambda + p_1^\lambda) \right] \} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{Tr}(6) + \text{Tr}(10) + \text{Tr}(11) + \text{Tr}(12) &= 4 (e^2/2\pi) \{ 2E p_2^\theta p_1^\tau \chi^{\theta\rho\tau\lambda} - 2m^2 g^{\rho\lambda} E + \\ &\quad + m \left[A_4^\lambda (-p_2^\rho + p_1^\rho) + A_4^\rho (-p_2^\lambda + p_1^\lambda) \right] \} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} P^{(V-A)} d^3 p_2 &= \left[d^3 p_2 / (2\pi)^5 E^2 \right] \frac{G^2}{K^2} \delta(E_1 - E_2 + K - K') k_\mu^\dagger k_\nu \chi_{\mu\nu\sigma\lambda} \\ &\quad 2p_2^\theta p_1^\tau \chi^{\theta\rho\tau\lambda} \left[1 + (e^2/2\pi) (F+E) \right] + (e^2/2\pi) \left[2m^2 g^{\rho\lambda} (F-E) + m \left[p_2^\rho (A_0^\lambda - A_4^\lambda) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + p_2^\lambda (A_0^\rho - A_4^\rho) + p_1^\rho (A_0^\lambda + A_4^\lambda) + p_1^\lambda (A_0^\rho + A_4^\rho) \right] \right] \} \\ &= \frac{2G^2}{K^2} \left[d^3 p_2 / (2\pi)^5 E^2 \right] \delta(E_1 - E_2 + K - K') \{ p_1 \cdot k p_2 \cdot k' \left[1 + (e^2/2\pi) (F+E) \right] + \right. \\ &\quad \left. + (e^2/2\pi) \left[-2m^2 (F-E) k \cdot k' + m \left[p_2 \cdot k' B \cdot k + p_2 \cdot k B \cdot k' + p_1 \cdot k' Y \cdot k + p_1 \cdot k Y \cdot k' - \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$- k.k' (p_2.B + p_1.Y) \Big] \Big] \Big] \quad (3.3.8)$$

onde

$$B = A_0 - A_4 \quad e \quad Y = A_0 + A_4 .$$

Podemos observar aqui que na probabilidade de transição, dada pela eq. (3.3.8), está incluída a probabilidade não corrigida dada por Bahcall (5).

Desenvolvendo todos os termos que aparecem na eq. (3.3.8), temos:

$$B = B_1 p_1 + B_2 p_2$$

$$Y = B_2 p_1 + B_1 p_2$$

onde

$$B_1 = \frac{1}{m} \frac{1}{(1-\cosh\theta)} (1-\theta \cotgh\theta)$$

$$B_2 = -\frac{1}{m} \frac{1}{(1-\cosh\theta)} \left[1 + \frac{\theta}{\sinh\theta} - 2\theta \cotgh\theta \right]$$

A cinemática é dada por:

$$\begin{cases} e_1 = e_1(E, p_1) \\ e_2 = e_2(E, p_2) \\ v_1 = v_1(K, -p_1) \\ v_2 = v_2(K, -p_2) \end{cases}$$

Daí

$$p_1.k = EK + p^2$$

$$p_2.k' = EK + p^2$$

$$p_1.k' = EK + p^2 + m^2(1-\cosh\theta)$$

$$p_2.k = EK + p^2 + m^2(1-\cosh\theta)$$

$$k.k' = -m^2(1-\cosh\theta)$$

Temos também que:

$$F + E = 2\left(S - \frac{1}{2}T + r_1\right)$$

e

$$F - E = \frac{2\theta}{\sinh\theta}$$

Assim sendo, a probabilidade de transição corrigida para o espalhamento elétron-neutrino é dada por:

$$P_d^3 P = \frac{G^2 d^3 p \delta(E_1 - E_2 + K - K')}{(2\pi)^5 E^2 K^2} \{ (EK + p^2)^2 \left[1 + \frac{2e^2}{2\pi} \left(S - \frac{1}{2}T + r_1 \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{e^2}{2\pi} \frac{2\theta}{\sinh\theta} \left[m^2(1-\cosh\theta) \left[m^2 - 2(EK + p^2) \right] - 2(EK + p^2)^2 \right] \right\} \quad (3.3.9)$$

onde

$$S = (\theta - F_1) \cot\theta - 2\omega_c(1 - \theta \cot\theta)$$

$$T = \frac{\theta \sinh\theta}{1 - \cosh\theta}$$

$$r_1 = -2$$

Podemos considerar também que esta probabilidade é a soma de duas partes: uma divergente e outra não, i.e.,

$$P = P_{ND} + P_D$$

onde

$$P_D = -\frac{4e^2}{2\pi} \frac{G^2 \delta(E_1 - E_2 + K - K')}{(2\pi)^5 E^2 K^2} (EK + p^2)^2 (1 - \theta \cot\theta) \ln(\lambda_{\min}) \quad (3.3.10)$$

e

$$P_{ND} = \frac{G^2 \delta(E_1 - E_2 + K - K')}{(2\pi)^5 E^2 K^2} \{ (EK + p^2)^2 \left[1 + \frac{2e^2}{2\pi} \left(S' - \frac{1}{2}T + r_1 \right) \right] + \right.$$

$$+ \frac{e^2}{2\pi} \frac{2\theta}{\sinh\theta} \left[m^2 (1 - \cosh\theta) \left[m^2 - 2(EK + p^2) \right] - 2(EK + p^2)^2 \right] \}. \quad (3.3.11)$$

Agora,

$$S' = (\theta - F_1) \cotgh\theta + 2(1 - \theta \cotgh\theta) \ln(m_e) \quad .$$

Uma observação que podemos fazer, é que todas as fórmulas do capítulo II usadas nestes cálculos, foram feitas usando a condição para o espalhamento, i.e., $\omega = 0$.

A seguir, vamos calcular o bremsstrahlung interno para este processo. Temos que,

$$\Delta P_{\gamma} d^3 p_2 d^3 k = \left[d^3 p_2 d^3 k e^2 / 8(2\pi)^6 E_1 E_2 \epsilon \right] \sum_{\sigma, \sigma'} g_{\sigma} g_{\sigma'} N_{\sigma\sigma'} \quad (3.3.12)$$

onde

$$N_{\sigma, \sigma'} = \sum_{\theta} I_{\rho, \lambda}^{\sigma, \sigma'} \frac{1}{4} \text{Tr} \{ (\not{p}_2 + m) \left[\frac{\not{\epsilon} \not{k}}{2p_2 \cdot k} \Gamma_{\rho}^{\sigma} + \Gamma_{\rho}^{\sigma} \frac{\not{k} \not{\epsilon}}{2p_1 \cdot k} + \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \Gamma_{\rho}^{\sigma} \right] (\not{p}_1 + m) \left[\Gamma_{\lambda}^{\sigma'} \frac{\not{k} \not{\epsilon}}{2p_2 \cdot k} + \frac{\not{\epsilon} \not{k}}{2p_1 \cdot k} \Gamma_{\lambda}^{\sigma'} + \Gamma_{\lambda}^{\sigma'} \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \right] \} \}$$

e ϵ, k, θ representam a energia, o momento e a polarização do $\underline{f\omega}$ ton, respectivamente.

O termo $I_{\rho, \lambda}^{\sigma, \sigma'}$ mantém-se inalterado mas $J_{\mu\nu}$ é agora dado por

$$J_{\mu\nu} = \iint d^3 k d^3 k' \delta^4(p_1 - p_2 + k - k' - k) k_{\mu}' k_{\nu} / KK' \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{k})$$

$$= \delta(E_1 - E_2 + K - K' - \epsilon) k_{\mu}' k_{\nu} / KK' \quad .$$

Assim a única diferença entre os termos $I_{\rho\lambda}^{\sigma\sigma'}$ da probabilidade de transição e do bremsstrahlung está na função delta de energia.

Portanto,

$$I_{\rho\lambda}^{(V-A)} = \frac{2}{KK'} \delta(E_1 - E_2 + K - K' - \varepsilon) k'_\mu k_\nu \chi_{\mu\rho\nu\lambda} \quad (3.3.13)$$

e

$$\begin{aligned} N^{(V-A)} &= \int_{\theta} I_{\rho\lambda}^{(V-A)} \frac{1}{4} \text{Tr} \{ (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7) + (8) + (9) \} \\ &= \int_{\theta} I_{\rho\lambda}^{(V-A)} \frac{1}{4} \{ \text{Tr} \left[\not{p}_2 \not{\varepsilon} k \gamma^\rho (1+\gamma^5) \not{p}_1 \overline{\gamma^\lambda (1+\gamma^5)} k \not{\varepsilon} + m^2 \not{\varepsilon} k \gamma^\rho (1+\gamma^5) \overline{\gamma^\lambda (1+\gamma^5)} \right] \\ &\quad \frac{1}{4(p_2 \cdot k)^2} + \\ &+ \text{Tr} \left[\not{p}_2 \not{\varepsilon} k \gamma^\rho (1+\gamma^5) \not{p}_1 \not{\varepsilon} \overline{k \gamma^\lambda (1+\gamma^5)} + m^2 \not{\varepsilon} k \gamma^\rho (1+\gamma^5) \not{\varepsilon} \overline{k \gamma^\lambda (1+\gamma^5)} \right] \frac{1}{4p_2 \cdot k p_1 \cdot k} + \\ &+ \text{Tr} \left[\not{p}_2 \not{\varepsilon} k \gamma^\rho (1+\gamma^5) \not{p}_1 \overline{\gamma^\lambda (1+\gamma^5)} + m^2 \not{\varepsilon} k \gamma^\rho (1+\gamma^5) \overline{\gamma^\lambda (1+\gamma^5)} \right] \\ &\quad \frac{1}{2p_2 \cdot k} \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) + \\ &+ \text{Tr} \left[\not{p}_2 \gamma^\rho (1+\gamma^5) k \not{\varepsilon} \not{p}_1 \overline{\gamma^\lambda (1+\gamma^5)} k \not{\varepsilon} + m^2 \gamma^\rho (1+\gamma^5) k \not{\varepsilon} \overline{\gamma^\lambda (1+\gamma^5)} k \not{\varepsilon} \right] \frac{1}{4p_2 \cdot k p_1 \cdot k} + \\ &+ \text{Tr} \left[\not{p}_2 \gamma^\rho (1+\gamma^5) k \not{\varepsilon} \not{p}_1 \not{\varepsilon} \overline{k \gamma^\lambda (1+\gamma^5)} + m^2 \gamma^\rho (1+\gamma^5) k \not{\varepsilon} \not{\varepsilon} \overline{k \gamma^\lambda (1+\gamma^5)} \right] \frac{1}{4(p_1 \cdot k)^2} + \\ &+ \text{Tr} \left[\not{p}_2 \gamma^\rho (1+\gamma^5) k \not{\varepsilon} \not{p}_1 \overline{\gamma^\lambda (1+\gamma^5)} + m^2 \gamma^\rho (1+\gamma^5) k \not{\varepsilon} \overline{\gamma^\lambda (1+\gamma^5)} \right] \\ &\quad \frac{1}{2p_1 \cdot k} \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) + \end{aligned}$$

$$+\text{Tr} \left[\cancel{p}_2 \gamma^\rho (1+\gamma^5) \cancel{p}_1 \overline{\cancel{p}_1 \gamma^\lambda (1+\gamma^5)} \cancel{e} + m^2 \gamma^\rho (1+\gamma^5) \overline{\cancel{p}_1 \gamma^\lambda (1+\gamma^5)} \cancel{e} \right]$$

$$\frac{1}{2p_2 \cdot k} \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) +$$

$$+\text{Tr} \left[\cancel{p}_2 \gamma^\rho (1+\gamma^5) \cancel{p}_1 \overline{\cancel{p}_1 \cancel{k} \gamma^\lambda (1+\gamma^5)} + m^2 \gamma^\rho (1+\gamma^5) \overline{\cancel{p}_1 \cancel{k} \gamma^\lambda (1+\gamma^5)} \right]$$

$$\frac{1}{2p_1 \cdot k} \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) +$$

$$+\text{Tr} \left[\cancel{p}_2 \gamma^\rho (1+\gamma^5) \cancel{p}_1 \overline{\cancel{p}_1 \gamma^\lambda (1+\gamma^5)} + m^2 \gamma^\rho (1+\gamma^5) \overline{\cancel{p}_1 \gamma^\lambda (1+\gamma^5)} \right] \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2$$

Para o cálculo desses traços foram usadas as seguintes relações:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = - \begin{vmatrix} g^{\alpha\mu} g^{\alpha\nu} g^{\alpha\rho} g^{\alpha\sigma} \\ g^{\beta\mu} g^{\beta\nu} g^{\beta\rho} g^{\beta\sigma} \\ g^{\gamma\mu} g^{\gamma\nu} g^{\gamma\rho} g^{\gamma\sigma} \\ g^{\delta\mu} g^{\delta\nu} g^{\delta\rho} g^{\delta\sigma} \end{vmatrix} ; \quad \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} = - \begin{vmatrix} g^{\beta\nu} g^{\beta\rho} g^{\beta\sigma} \\ g^{\gamma\nu} g^{\gamma\rho} g^{\gamma\sigma} \\ g^{\delta\nu} g^{\delta\rho} g^{\delta\sigma} \end{vmatrix}$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} = -2 \begin{vmatrix} g^{\gamma\rho} g^{\gamma\sigma} \\ g^{\delta\rho} g^{\delta\sigma} \end{vmatrix}$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma} = -6g^{\delta\sigma} ; \quad \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -24 .$$

Notamos facilmente que os termos proporcionais a m^2 , nos traços, dão zero porque, sempre resultam de um produto $(1 + \gamma^5)(1 - \gamma^5)$.

Então

$$\begin{aligned}
 N^{(V-A)} = & \sum_{\theta} \left\{ -\frac{2}{p_2 \cdot k} (p_1 \cdot k' k \cdot k + p_1 \cdot k k' \cdot k) + \frac{1}{p_1 \cdot k p_2 \cdot k} \left[4 \{ (k' \cdot k e \cdot p_2 - \right. \right. \\
 & - e \cdot k' p_2 \cdot k) (k \cdot k e \cdot p_1 - e \cdot k p_1 \cdot k) + (k \cdot k e \cdot p_2 - e \cdot k p_2 \cdot k) (k' \cdot k e \cdot p_1 - e \cdot k' p_1 \cdot k) - \\
 & - k' \cdot k k \cdot k p_1 \cdot p_2 \} + p_1 \cdot k (2k' \cdot k p_2 \cdot k + 2p_2 \cdot k' k \cdot k - 3k' \cdot k p_2 \cdot k) + \\
 & + p_2 \cdot k (k' \cdot k p_1 \cdot k + k \cdot k p_1 \cdot k') \left. \right] + \frac{4}{p_2 \cdot k} \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \left[e \cdot p_2 (k \cdot k p_1 \cdot k' + \right. \\
 & + k' \cdot k p_1 \cdot k) - p_2 \cdot k (e \cdot k p_1 \cdot k' + e \cdot k' p_1 \cdot k) \left. \right] + \frac{2}{p_1 \cdot k} (k \cdot k p_2 \cdot k + k' \cdot k p_2 \cdot k) + \\
 & + \frac{4}{p_1 \cdot k} \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right) \left[p_2 \cdot k' (k \cdot k e \cdot p_1 - e \cdot k p_1 \cdot k) + p_2 \cdot k (k' \cdot k e \cdot p_1 - \right. \\
 & - e \cdot k p_1 \cdot k) \left. \right] + 8 \left(\frac{e \cdot p_2}{p_2 \cdot k} - \frac{e \cdot p_1}{p_1 \cdot k} \right)^2 p_1 \cdot k p_2 \cdot k' \} \times \frac{2}{\hbar \hbar^2} \delta(E_1 - E_2 + K - K' - \epsilon)
 \end{aligned}$$

Somando em polarizações temos:

$$\begin{aligned}
 N^{(V-A)} = & \left\{ \frac{1}{p_2 \cdot k} \left[-2 (p_1 \cdot k' k \cdot k + p_1 \cdot k k' \cdot k) + 6 (k' \cdot k p_2 \cdot k + k \cdot k p_2 \cdot k') + \right. \right. \\
 & + 4 (p_2 \cdot k p_1 \cdot k' + p_2 \cdot k' p_1 \cdot k) + 8 p_2 \cdot k p_2 \cdot k' \left. \right] + \frac{1}{p_1 \cdot k} \left[5 (k \cdot k p_1 \cdot k' + k' \cdot k p_1 \cdot k) + \right. \\
 & + 2 (k \cdot k p_2 \cdot k + k' \cdot k p_2 \cdot k) - 4 (p_1 \cdot k p_2 \cdot k' + p_1 \cdot k' p_2 \cdot k) - 8 p_1 \cdot k p_1 \cdot k' \left. \right] + \\
 & + \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot k p_2 \cdot k} \left[-12 k' \cdot k k \cdot k + 4 (k \cdot k p_1 \cdot k' + k' \cdot k p_1 \cdot k) - 4 (k \cdot k p_2 \cdot k' + k' \cdot k p_2 \cdot k) + \right. \\
 & + 16 p_1 \cdot k p_2 \cdot k' \left. \right] + \frac{m^2}{(p_1 \cdot k)^2} \left[4 (k \cdot k p_2 \cdot k' + k' \cdot k p_2 \cdot k) - 8 p_1 \cdot k p_2 \cdot k' \right] - \\
 & - \frac{m^2}{(p_2 \cdot k)^2} \left[4 (k \cdot k p_1 \cdot k' + k' \cdot k p_1 \cdot k) + 8 p_1 \cdot k p_2 \cdot k' \right] - 11 k' \cdot k \} \times
 \end{aligned}$$

$$\times \frac{2}{KK'} \delta(E_1 - E_2 + K - K' - \epsilon) \quad (3.3.14)$$

O próximo passo seria integrarmos em d^3k mas antes , vamos fazer um estudo da cinemática do processo.

Temos no S.C.M. o seguinte, (fig. 3.3.1) ,

$$\text{S.C.M.} \quad \begin{cases} P_1 = k \\ P_2 + k' + k = p_1 + k \\ E_{CM} = \sqrt{p_2^2 + m^2} + \sqrt{k^2 + \lambda_{\min}^2} + K' = \sqrt{p_1^2 + m^2} + K \end{cases}$$

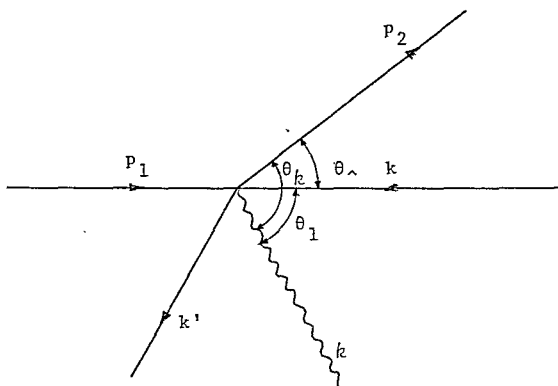


Fig. 3.3.1 - Uma visão da cinemática do processo de bremsstrahlung interno no S.C.M.

$$P_1 = \frac{E_{CM} - m^2}{2E_{CM}} ; P_2 = \frac{k \cos \theta_k (A + m^2) \pm |E - \sqrt{k^2 + \lambda_{\min}^2}| \sqrt{(A - m^2)^2 - 4k^2 m^2 \sin^2 \theta_k}}{2 [k^2 \cos^2 \theta_k - (E - \sqrt{k^2 + \lambda_{\min}^2})^2]}$$

onde $\cos \theta_k = \sin \theta_{\wedge} \sin \theta_1 \cos \phi_1 + \cos \theta_{\wedge} \cos \theta_1$, ϕ_1 é o ângulo azimutal e

$$A = E_{CM}^2 + \lambda_{\min}^2 - 2E_{CM} \sqrt{k^2 + \lambda_{\min}^2}. \quad \text{Assim}$$

$$p_1 \cdot k = E_1 \epsilon - p_1 k \cos \theta_1 \quad (3.3.15)$$

$$p_2 \cdot k = E_2 \varepsilon - p_2 k \cos \theta_k \quad (3.3.16)$$

Estamos interessados na parte que dá a divergência do infravermelho, deste modo, vamos inspecionar quais os fatores em $N^{(V-A)}$ que podem contribuir. Portanto,

$$N^{(V-A)} = \frac{16}{KK'} \delta(E_1 - E_2 + E_{\nu_1} - E_{\nu_2} - \varepsilon) p_1 \cdot k p_2 \cdot k' \left[\frac{2p_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot k p_2 \cdot k} - \frac{m^2}{(p_2 \cdot k)^2} - \frac{m^2}{(p_1 \cdot k)^2} \right] \quad (3.3.17)$$

Aqui consideremos o "soft-photon limit", isto é, $k \rightarrow 0$ e então temos:

$$p_1 \cdot k \cong (E_1 - p_1 \cos \theta_1) k ; p_2 \cdot k \cong (E_2 - p_2 \cos \theta_k) k ; K' \rightarrow K ; E_2 \rightarrow E_1$$

Quando integramos agora em d^3k/ε a expressão entre parêntesis à direita da eq. (3.3.17) é semelhante àquela da eq. (2.4.16) e calculando essa integral também no sistema de repouso da partícula 1 resulta:

$$\Delta P_Y^{(V-A)} d^2P_2 \cong \frac{2G_2^2}{K^2} \left[d^3P_2 / (2\pi)^5 E^2 \right] (e^2/2\pi) p_1 \cdot k p_2 \cdot k' \delta(E_1 - E_2 + E_{\nu_1} - E_{\nu_2}) (2D+C) \quad (3.3.18)$$

onde D e C são dados pelas eqs. (2.4.27) e (2.4.22).

Assim vemos claramente que a divergência do infravermelho cancela-se também para o espalhamento elétron-neutrino.

Temos que, tanto na probabilidade de transição quanto no bremsstrahlung interno fica satisfeita a condição de espalhamento, isto é, $\omega = 0$.

Os resultados dos nossos cálculos da probabilidade de

transição e do bremsstrahlung interno, são dados pelas eqs. (3.3.9) e (3.3.14), a saber:

$$P d^3 p = \frac{G^2 d^3 p \delta(E_1 - E_2 + K - K')}{(2\pi)^5 E_2^2} \{ (EK + p^2)^2 \left[1 + \frac{2e^2}{2} (S - \frac{1}{2} T + r_1) \right] + \frac{e^2}{2\pi} \frac{2\theta}{\sinh\theta} \left[m^2 (1 - \cosh\theta) \left[m^2 - 2(EK + p^2) \right] - 2(EK + p^2)^2 \right] \} \quad (3.3.9)$$

e

$$\Delta P_{\gamma} d^3 p d^3 k = \frac{G^2 d^3 p d^3 k \delta(E_1 - E_2 + K - K' - \epsilon)}{8(2\pi)^6 E_1 E_2 K K'} \left\{ \frac{1}{P_2 \cdot k} \left[-2(p_1 \cdot k' k \cdot k + p_1 \cdot k k' \cdot k) + 6(k' \cdot k p_2 \cdot k + k \cdot k p_2 \cdot k') + 4(p_2 \cdot k p_1 \cdot k' + p_2 \cdot k' p_1 \cdot k) + 8p_2 \cdot k p_2 \cdot k' \right] + \frac{1}{p_1 \cdot k} \left[5(k \cdot k p_1 \cdot k' + k' \cdot k p_1 \cdot k) + 2(k \cdot k p_2 \cdot k + k' \cdot k p_2 \cdot k) - 4(p_1 \cdot k p_2 \cdot k' + p_1 \cdot k' p_2 \cdot k) - 8p_1 \cdot k p_1 \cdot k' \right] + \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot k p_2 \cdot k} \left[-12k' \cdot k k \cdot k + 4(k \cdot k p_1 \cdot k' + k' \cdot k p_1 \cdot k) - 4(k \cdot k p_2 \cdot k' + k' \cdot k p_2 \cdot k) + 16p_1 \cdot k p_2 \cdot k' \right] + \frac{m^2}{(p_1 \cdot k)^2} \left[4(k \cdot k p_2 \cdot k' + k' \cdot k p_2 \cdot k) - 8p_1 \cdot k p_2 \cdot k' \right] - \frac{m^2}{(p_2 \cdot k)^2} \left[4(k \cdot k p_1 \cdot k' + k' \cdot k p_1 \cdot k) + 8p_1 \cdot k p_2 \cdot k' \right] - 11k' \cdot k \right\} \quad (3.3.14)$$

Para se obter a seção de choque deve-se integrar a primeira expressão em relação ao elétron e a segunda em relação ao fóton e ao elétron e depois dividir tudo pelo fluxo.

A integral em relação ao fóton da eq. (3.3.14) pode ser feita, termo por termo, se escolhermos, para cada um deles, um sistema de referências apropriado.

CAPÍTULO IV

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Em relação aos decaimentos do μ e do β dados no capítulo III é interessante, em primeiro lugar, discutirmos porque o cálculo da correção radiativa é finito para o primeiro, em quanto que é divergente para o segundo. Senão vejamos:

Na teoria V-A a lagrangeana dscrevendo o " μ -decay" é

$$\mathcal{L}_w = \frac{G(\mu)}{\sqrt{2}} \left[\bar{\Psi}_\nu \gamma_\lambda (1+\gamma^5) \Psi_\mu \right] \left[\bar{\Psi}_e \gamma_\lambda (1+\gamma^5) \Psi_\nu \right] . \quad (4.1)$$

Fazendo uso da transformação de Fierz isso pode ser também escrito como

$$\mathcal{L}_w = \frac{G(\mu)}{\sqrt{2}} \left[\bar{\Psi}_e \gamma_\lambda (1+\gamma^5) \Psi_\mu \right] \left[\bar{\Psi}_\nu \gamma_\lambda (1+\gamma^5) \Psi_\nu \right] . \quad (4.2)$$

Nessa expressão o segundo covariante faz o papel de um campo externo neutro enquanto que as duas partículas carregadas estão acopladas no primeiro covariante através de $\gamma_\lambda (1+\gamma^5)$.

Primeiro consideremos a correção radiativa da parte vetorial $\bar{\Psi}_e \gamma_\lambda \Psi_\mu$. Aqui a única diferença comparada ao caso da E.Q. é a troca de massa do campo espinorial para o ponto espaço-tempo onde o "campo externo do neutrino" atua. E é fácil de ver por inspeção explícita dos diagramas de Feynman que, após renormalizações de carga e massa, as divergências que permane-

na E.Q. não devemos esperar que um cancelamento similar ocorra.

Até agora tratamos apenas com processos fundamentais mas, no caso de considerarmos o problema de muitos corpos, e.g. o decaimento beta nuclear, aparecem várias dificuldades. A mais importante delas, está relacionada ao fato de que se quisermos calcular o processo real de muitos corpos temos de saber as funções de onda de todos os estados que contribuem no processo, inclusive os intermediários por causa dos propagadores. A outra é que o valor de p^2 , no caso de muitos corpos, não é necessariamente igual a m^2 como no caso de partícula livre. Assim o que se faz é considerar a contribuição individual de cada nucleon que decai. Portanto, temos duas maneiras de associarmos as correções radiativas: uma é aditiva, i.e. consideramos as correções como um termo somado ao elemento de matriz e a outra, multiplicativa, é quando consideramos as correções como uma porcentagem associada ao elemento de matriz.

Esse assunto tem sido tratado explicitamente ou implicitamente por vários autores ⁽²⁶⁻³⁰⁾ e até agora não está resolvido, pois ainda apresenta alguma ambiguidade.

Uma outra característica que difere o espalhamento do decaimento no caso leptônico, está ligada ao fato de que quando tratamos com interação do tipo (V-A) pura não temos no segundo termos cruzados, i.e. do tipo VA, mas o temos no primeiro. Vamos explicar melhor:

Se temos corrente do tipo $j=(V-A)$, tanto a taxa de transição quanto o bremsstrahlung são proporcionais a

$$P \propto |(V_\nu - A_\nu)(V_\ell - A_\ell)|^2 \quad (4.4.)$$

onde ν, ℓ significam neutrino e lepton respectivamente. Então,

$$P \propto \left[(V_\nu - A_\nu)^\dagger (V_\nu - A_\nu) (V_\ell - A_\ell)^\dagger (V_\ell - A_\ell) \right] \\ \propto \left[I_{\sigma\sigma'}^V, M_{\sigma\sigma'}^L \right]$$

Assim

$$P \propto \left[I_{VV} - I_{VA} - I_{AV} + I_{AA} \right] \left[M_{VV} - M_{VA} - M_{AV} + M_{AA} \right] \quad (4.5)$$

Como vimos, no decaimento, quando integramos no espaço dos neutrinos como eles tem todas as possibilidades no espaço para decairem o resultado da integral é simétrico em σ, σ' .

Portanto os termos I_{VA} e I_{AV} são nulos, isso implica que a parte imaginária nos traços desaparece, daí:

$$P \propto \left[I_{VV} + I_{AA} \right] \left[M_{VV} - M_{VA} - M_{AV} + M_{AA} \right].$$

Temos que $I_{VV} = I_{AA}$, então

$$P \propto 2I \left[M_{VV} - M_{VA} - M_{AV} + M_{AA} \right]$$

Mas a probabilidade de transição tem que ser real, então M_{VA} e M_{AV} são também nulos.

Finalmente,

$$P \propto 2 \left[I_{VV} M_{VV} + I_{AA} M_{AA} \right] \quad (4.6)$$

No caso do espalhamento chegamos também a eq. (4.5), mas o resultado da integral nos neutrinos agora não é simétrica portanto, existe uma contribuição dos termos I_{VA} e I_{AV} .

Eles são imaginários mas, como os termos M_{VA} e M_{AV}

também o sãõ, o produto dos dois é real e portanto contribuem para a taxa de transiçãõ.

Uma conclusãõ que podemos tirar entãõ, é que no caso do decaimento não importa se utilizamos a interaçãõ (V-A) ou não, pois o resultado é puramente VV ou AA o que já não acontece com o espalhamento onde o problema da quebra de paridade tem que ser levado em consideraçãõ.

Outra característica bãstante importante nos cálculos de correçãõ radiativa é que, a divergência do infravermelho que aparece na probabilidade de transiçãõ (fãtons virtuais) é cancelada por um termo similar que advém do bremsstrahlung interno (fãtons reais), o que foi confirmado nos nossos cálculos do espalhamento.

Vimos aqui que um cálculo de correçãõ radiativa para decaimento beta não é renormalizãvel, i.e., não sabemos quantos resultados sensíveis podem ser extraídos das infinidades surgindo de tal cálculo.

Assim, é de nosso interesse estender o presente trabalho para teorias mais recentes, nas quais o cálculo para decaimento beta é renormalizãvel, por exemplo, Teoria de Gauge.

Uma comparaçãõ qualitativa pode ser feita entre os nossos resultados, do espalhamento, e os feitos por Bahcall ⁽⁵⁾, em termos do comportamento do espectro do espalhamento em relaçãõ à energia incidente. Notamos que o espectro com correções radiativas tem um comportamento similar do espectro sem correções dado por esse autor.

APÊNDICE A

REDUÇÃO PADRÃO NA E.Q.

O elemento de matriz da correção de vértice para fôtons virtuais é dado por:

$$\Delta_a^M(\phi) = (ge^2/4\pi i) \int \gamma_\mu \frac{1}{(\not{p}_2 - \not{k} - m_2)} \phi \frac{1}{(\not{p}_1 - \not{k} - m_1)} \gamma_\mu k^{-2} C(k^2) d^4k \quad (A.1)$$

Multiplicando e dividindo o integrando da eq. (A.1) por $(\not{p}_2 - \not{k} + m_2)(\not{p}_1 - \not{k} + m_1)$ obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_a^M(\phi) &= (ge^2/4\pi i) \int \gamma_\mu \frac{(\not{p}_2 - \not{k} + m_2)}{(\not{p}_2 - \not{k} - m_2)(\not{p}_2 - \not{k} + m_2)} \phi \frac{(\not{p}_1 - \not{k} + m_1)}{(\not{p}_1 - \not{k} - m_1)(\not{p}_1 - \not{k} + m_1)} \\ \gamma_\mu k^{-2} C(k^2) d^4k &= (ge^2/4\pi i) \int \gamma_\mu \frac{(\not{p}_2 - \not{k} + m_2)}{(\not{p}_2 - \not{k})^2 - m_2^2} \phi \frac{(\not{p}_1 - \not{k} + m_1)}{(\not{p}_1 - \not{k})^2 - m_1^2} \gamma_\mu k^{-2} C(k^2) d^4k \\ &= (ge^2/4\pi i) \int \gamma_\mu \frac{(\not{p}_2 - \not{k} + m_2)}{p_2^2 - 2p_2 \cdot k + k^2 - m_2^2} \phi \frac{(\not{p}_1 - \not{k} + m_1)}{p_1^2 - 2p_1 \cdot k + k^2 - m_1^2} \gamma_\mu k^{-2} C(k^2) d^4k \end{aligned} \quad (A.2)$$

Usando o fato de que $p_1^2 = m_1^2$; $p_2^2 = m_2^2$, resulta

$$\Delta_a^M(\phi) = (ge^2/4\pi i) \int \gamma_\mu \frac{(\not{p}_2 - \not{k} + m_2)}{k^2 - 2p_2 \cdot k} \phi \frac{(\not{p}_1 - \not{k} + m_1)}{k^2 - 2p_1 \cdot k} \gamma_\mu k^{-2} C(k^2) d^4k \quad (A.3)$$

No sentido de calcular a integral (A.3), esta pode

ser escrita como uma soma de três termos (desde que $k=k_\sigma \gamma_\sigma$), assim

$$\Delta_{\underline{a}} M(\Phi) = (ge^2/4\pi i) \{ \gamma_\mu (\not{p}_2 + m_2) \Phi (\not{p}_1 + m_1) \gamma^\mu J_1^i - [\gamma_\mu \gamma_\sigma \Phi (\not{p}_1 + m_1) \gamma^\mu + \gamma_\mu (\not{p}_2 + m_2) \Phi \gamma_\sigma \gamma^\mu] J_{2\sigma}^i + \gamma_\mu \gamma_\sigma \Phi \gamma_\tau \gamma^\mu J_{3\sigma\tau}^i \} \quad (A.4)$$

onde

$$J_{(1;2\sigma;3\sigma\tau)}^i = \int (1; k_\sigma; k_\sigma k_\tau) \mathcal{K}^{-2} C(\mathcal{K}^2) (k^2 - 2p_2 \cdot k)^{-1} (k^2 - 2p_1 \cdot k)^{-1} d^4 k$$

que quando integrados em $d^4 k$ resultam

$$\Delta_{\underline{a}} M(\Phi) = (-ge^2/8\pi) \{ \gamma_\mu (\not{p}_2 + m_2) \Phi (\not{p}_1 + m_1) \gamma^\mu J_1^i - [\gamma_\mu \gamma_\sigma \Phi (\not{p}_1 + m_1) \gamma^\mu + \gamma_\mu (\not{p}_2 + m_2) \Phi \gamma_\sigma \gamma^\mu] J_{2\sigma}^i + \gamma_\mu \gamma_\sigma \Phi \gamma_\tau \gamma^\mu J_{3\sigma\tau}^i \} \quad (A.5)$$

agora $J_{(1;2\sigma;3\sigma\tau)}^i$ são dados pelas eqs. (2.2.3)-(2.2.6).

APÊNDICE B

UM MÉTODO PARA RESOLVER AS INTEGRAIS $J_{(1;2\sigma;3\sigma\tau)}$

Consideremos para exemplo a integral

$$\int_0^1 (dy/p_y^2) \ln(p_y^2/\lambda_{\min}^2) \quad (B.1)$$

fazendo as substituições

$$y = b \coth \alpha + a; \quad a = -(p_2 \cdot q)/q^2; \quad b^2 = a^2 - m_2^2/q^2; \quad p_y^2 = b^2 q^2 \operatorname{cosech}^2 \alpha$$

a eq. (B.1) torna-se

$$-(1/bq^2) \left\{ \begin{array}{l} 1/2 \ln \left[e^{-\theta} \frac{\sinh \frac{1}{2}(\omega - \theta)}{\sinh \frac{1}{2}(\omega + \theta)} \right] \\ \\ 1/2 \ln \left[e^{\theta} \frac{\sinh \frac{1}{2}(\omega - \theta)}{\sinh \frac{1}{2}(\omega + \theta)} \right] \end{array} \right. d\alpha (-2 \ln \operatorname{senh} \alpha + \ln b^2 q^2 / \lambda_{\min}^2) \quad (B.2)$$

O primeiro termo do integrando da eq. (B.2) pode ser integrado usando a forma exponencial de $\operatorname{senh} \alpha$. O resultado é

$$\frac{2}{m_1 m_2 \operatorname{senh} \theta} \left[\frac{\theta}{2} \ln \left(\frac{4 \sinh \frac{1}{2}(\omega - \theta)}{\sinh \frac{1}{2}(\omega + \theta)} \right) + 2L \left(\frac{\sinh \frac{1}{2}(\omega - \theta)}{\sinh \frac{1}{2}(\omega + \theta)} e^{-\theta} \right) - 2L \left(\frac{\sinh \frac{1}{2}(\omega - \theta)}{\sinh \frac{1}{2}(\omega + \theta)} e^{\theta} \right) \right] \quad (B.3)$$

onde $L(x)$ é uma das funções de Spence e usando as relações

$$L(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2 \quad , \quad x \leq 1$$

$$L(x) = - \frac{\pi^2}{3} - L(1/x) + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln(-1)(\ln x) \quad , \quad x > 1$$

$$L(x) = \ln(1-x)\ln(x) - \frac{\pi^2}{6} - L(1-x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

passamos a forma das eqs. (2.2.11) a (2.2.15).

APÊNDICE C

TRANSFORMAÇÃO DE FIERZ

Temos que os invariantes de Lorentz, formado por quatro espiniores $\bar{\psi}$

$$(\bar{\psi}_1 \Gamma^i \psi_2) (\bar{\psi}_3 \Gamma^i \psi_4) \quad (C.1)$$

e pode ser expandido em termos dos invariantes do tipo

$$\begin{aligned} \text{escalar} - S &= 1 \\ \text{vetorial} - V &= \gamma^\mu \\ \text{tensorial} - T &= \sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} \\ \text{axial-vetor} - A &= \gamma^\mu \gamma^5 \\ \text{pseudoescalar} - P &= \gamma^5 \end{aligned}$$

Assim,

$$(\bar{\psi}_1 \Gamma^i \psi_2) (\bar{\psi}_3 \Gamma^i \psi_4) = \sum_j C^{ij} (\bar{\psi}_1 \Gamma^j \psi_4) (\bar{\psi}_3 \Gamma^j \psi_2) \quad (C.2)$$

onde,

$$C^{ij} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 & 2 \\ -8 & -4 & 0 & 4 & 8 \\ 24 & 0 & -4 & 0 & 24 \\ -8 & 4 & 0 & -4 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (C.3)$$

Pelos coeficientes C^{ij} dados pela eq. (C.3) vemos que fazendo-se uma transformação de Fierz para a teoria (V-A), a forma da interação se mantém, i.e., continua (V-A).

REFERÊNCIAS

- 1) - J.M. Jauch and F. Rohrlich; "The Theory of Photons and Electrons", Addison Wesley, (1955).
- 2) - J.D. Bjorken and S.D. Drell; "Relativistic Quantum Mechanics", McGraw-Hill, New York, (1964).
- 3) - T. Kinoshita and A. Sirlin; "Radiative Corrections to Fermi-Interactions", Phys. Rev., 113 (1959) 1652.
- 4) - A. Sirlin; "Generalization of the Radiative Corrections to β and μ Decays in the $SU(2)_L \times U(1)$ Gauge Model", Nucl. Phys., B100 (1975) 291.
- 5) - J.N. Bahcall; "Neutrino Opacity I. Neutrino Lepton Scattering", Phys. Rev., 136 (1964) B1164.
- 6) - T.D. Lee and C.N. Yang; "Question of Parity Conservation in Weak Interactions", Phys. Rev., 104 (1956) 254.
- 7) - E. Fermi; "Versuch einer Theorie der β -Strahlen. I", Z. Physik, 88 (1934) 161.
- 8) - G. Gamow and E. Teller; "Selection Rules for the β -Disintegration", Phys. Rev., 49 (1936) 895.
- 9) - C.S. Wu et. al.; "Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay", Phys. Rev., 105 (1957) 1413.
- 10) - F.J. Hasert, H. Faissner, W. Krenz, J. Von Krogh, D. Lanske, J. Morfin, K. Schultze and H. Weerts. III Physikalisches Institut der Technischen Hochschule, Aachen, Germany.
 - G.H. Bertrand-Coremans, J. Lemonne, J. Sacton, W. van Doeninck and P. Vilain. Interuniversity Institute for High Energies, U.L.B., V.U.B. Brussels, Belgium.
 - C. Baltay, D.C. Cundy, D. Haidt, M. Jaffre. P. Musset, A. Pullia, S. Natali, J.B.M. Pattison, D.H. Perkins, A. Rousset, W. Venus and H.W. Wachsmuth. CERN, Geneve, Switzerland.
 - V. Brisson, B. Degrange, M. Haguenaer, L. Kluberg, U.

- Nguyen-Khac and P. Petiau. Laboratoire de Physique des Hautes Energies, Ecole Polytechnique, Paris, France.
- E. Bellotti, S. Bonetti, D. Cavalli, C. Conta, E. Fiorini and M. Rollier. Istituto di Fisica dell'Università, Milano and I.N.F.N. Milano, Italy.
 - B. Aubert, L.M. Chounet, P. Heusse, A. Lagarrigue, A.M. Lutz and J.P. Vialle. Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire, Orsay, France.
 - F.W. Bullock, M.J. Esten, T. Jones, J. McKenzie, A.G. Michette, G. Myatt, J. Pinfold and W.G. Scott. University College, University of London, England; "Search for Elastic Muon-Neutrino Electron Scattering", Phys. Lett., 46B, (1973) 121.
- 11) - F.J. Hasert, S. Kabe, W. Krenz, J. von Krogh, D. Lanske, J. Morfin, K. Schultze and H. Weerts. III Physikalisches Institut der Technischen Hochschule, Aachen, Germany.
- G.H. Bertrand-Coremans, J. Sacton, W. van Doninck and P. Vilain. Interuniversity Institute for High Energies, U.L.B., V.U.B. Brussels, Belgium.
 - D.C. Cundy, D. Haidt, U. Camerini, R. Baldi, I. Danilchenko, W.F. Fry, B. Osculati, R. Palmer, P. Musset, A. Pullia, S. Natali, T.B.M. Pattison, D.H. Perkins, A. Rousset, W. Venus and H.W. Wachsmuth. CERN, Geneva, Switzerland.
 - V. Brisson, B. Degrange, M. Haguenaer, L. Kluberg, U. Nguyen-Khac and P. Pétiau. Laboratoire de Physique des Hautes Energies, Ecole Polytechnique, Paris, France.
 - E. Bellotti, S. Bonetti, D. Cavalli, C. Conta, E. Fiorini and M. Rollier. Istituto di Fisica dell'Università, Milano and I.N.F.N. Milano, Italy.
 - B. Aubert, L.M. Chounet, P. Heusse, A. Lagarrigue, A. M. Lutz, J.P. Vialle, D. Blum, A. Orkin-Lecourtois. Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire, Orsay, France.
 - F.W. Bullock, M.J. Esten, T. Jones, J. McKenzie, A.G. Michette, G. Myatt and G. Scott. University College, University of London, England; "Observation of Neutrino-Like Interactions Without Muon or Electron in the Gargamelle Neutrino Experiment", Phys. Lett., 46B (1973) 138.

- 12) - R.P. Feynman and M. Gell-Mann; "Theory of the Fermi Interaction", Phys. Rev., 109 (1958) 193.
- 13) - N. Cabibbo, "Unitary Symmetry and Leptonic Decays", Phys. Rev. Letters, 10 (1963) 531.
- 14) - R.E. Behrends, R.J. Finkelstein and A. Sirlin; "Radiative Corrections to Decay Processes", Phys. Rev., 101 (1956) 866.
- 15) - S.M. Berman; "Radiative Corrections to Muon and Neutron Decay", Phys. Rev., 112 (1958) 267.
- 16) - S.M. Berman and A. Sirlin; "Some Considerations on the Radiative Corrections to Muon and Neutron Decay", Ann. Phys., 20 (1962) 20.
- 17) - V.P. Kuznetsov; "On Electromagnetic Corrections in μ -e Decay", Soviet Phys. JEPT, 10 (1960) 784.
- 18) - V.P. Kuznetsov; "Internal Bremsstrahlung and Electromagnetic Corrections to μ -e Decay", Soviet Phys. JEPT, 12 (1961) 1202.
- 19) - R.P. Feynman; "Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics", Phys. Rev., 76 (1949) 769.
- 20) - K. Mitchell; "Tables of the Function $\int_0^z \frac{-\log|1-y|}{y} dy$, with an Account of Some Properties of this 0 and Related Functions", Phil. Mag., 40 (1949) 351.
- 21) - A. Lenard; "Inner Bremsstrahlung in μ -Meson Decay", Phys. Rev., 90 (1953) 968.
- 22) - F. Coester; "Quantum Electrodynamics with Nonvanishing Photon Mass", Phys. Rev., 83 (1951) 798.
- 23) - L. Michel; "Interaction Between Four Half-Spin Particles and the Decay of the μ -Meson", Proc. Phys. Soc. (London), A63 (1950) 514.
- 24) - S.A. Colgate and R.H. White; "The Hydrodynamic Behaviour of Supernovae Explosions", Ap. J., 143 (1966) 626.
- 25) - M. Fierz; "Zur Fermischen Theorie des β -Zerfalls", Z. Phys., 104 (1937) 553.
- 26) - B. Chern, T.A. Halpern and L. Logue; "ft Values of Some

$0^+ \rightarrow 0^+$ Beta Decays and the Value of the Vector Coupling Constant", Phys. Rev., 161 (1967) 1116.

- 27) - L. Logue and B. Chern; "Static Coulomb Corrections to the Point-Nucleus Fermi Function in Nuclear Beta Decay", Phys. Rev., 175 (1968) 1367.
- 28) - E.S. Abers, D.A. Dicus and R. E. Norton; "Radiative Corrections to the Fermi Part of Strangeness-Conserving β Decay", Phys. Rev., 167 (1968) 1461.
- 29) - D.A. Dicus and R.E. Norton; "Universality of the Weak Vector Coupling Constant", Phys. Rev., D1, (1970) 1360.
- 30) - M.A.B. Bég, J. Bernstein and A. Sirlin; "Questions Pertaining to Charge Dependence of Radiative Corrections to Superallowed Fermi Transitions", Phys. Rev., D6 (1972), 2597.

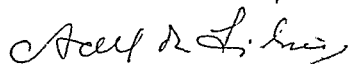
Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tec-
nológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes
professores:



Takeshi Kodama - Presidente



Prem Prakash Srivastava



Adel da Silveira

Rio de Janeiro, 02 de agosto de 1977