SOBRE UM PRINCÍPIO AMPLO DE RELATIVIDADE

Tese de Mestrado

LUIZ CARLOS BANDEIRA RYFF

SOBRE UM PRINCÍPIO AMPLO DE RELATIVIDADE

Agradecimentos

Ao Professor Adel da Silveira, meu orientador. À minha colega Lígia Rodrigues. À minha esposa.

RESUMO

Discute-se a necessidade de ampliar o Princípio da Relatividade e deriva-se um grupo de transformações que contêm as de Lorentz como caso especial. As mudanças a serem feitas, de modo a construir uma mecânica consistente com este Princípio mais amplo, são esboçadas e mostra-se que não são incompatíveis com os resultados clássicos conhecidos. Discutem-se novos aspectos do paradoxo dos relógios e duas aplicações são feitas: o caso de um relógio em repouso num campo gravitacional Newtoniano; e de uma partícula numa caixa.

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho foi escrito com um duplo objetivo. O primeiro consiste em dar uma expressão matemática à afirmação de que o conceito de espaço absoluto é desprovido de significado, i.e., somente os movimentos relativos devem ser considerados.

Einstein formulou sua Teoria da Relatividade Geral em 1916 [1] e desde então ela tem sido constantemente discutida. Atualmente [2] parece não haver restado dúvidas de que o postulado da covariância geral das leis da Física não deve ser considerado uma imposição relativista *. Dessa forma, algumas questões fundamentais, levantadas naquela época, permanecem atuais.

O segundo objetivo consiste em procurar analisar as consequências físicas dos resultados matemáticos obtidos. Toda teoria de relatividade estabelece um programa: formular as leis da Física de modo a serem covariantes sob o grupo de transformações da teoria. Em geral tal programa é formulado através de um princípio de relatividade. No nosso caso iremos postular um "Princípio Amplo de Relatividade".

Podemos mostrar, por meio do seguinte exemplo, a necessidade de se construir uma teoria mais ampla que a da Relatividade Restrita: tomemos o conhecido problema do paradoxo dos relógios [3]. A solução geralmente aceita [4] pressupõe que apenas um dos relógios esteja associado a um referencial inercial; isto quebra a simetria que deu origem ao paradoxo. Devemos notar, contudo, que as transformações de Lorentz podem ser obtidas

* Aqui a palavra relativista se refere à relatividade do movimento.

à partir de considerações puramente cinemáticas, sendo que a contradição decorre da aplicação de tais transformações. Portanto, a menos que se mostre explicitamente que cinemática e dinâmica estão necessariamente relacionadas, é bastante questionável o emprego de um argumento de caráter dinâmico neste caso. O mesmo tipo de argumento, por exemplo, nos levaria a uma contradição caso nos fosse permitido associar referenciais inerciais a partículas aceleradas, o que em princípio é perfeitamente possível. * Poderíamos tentar evitar tal contradição abandonando a "hipótese do relógio", que associa a um relógio acelerado um referencial de Lorentz instantâneo. Permaneceria, porém, o fato indiscutível: se considerarmos períodos de aceleração suficientemente pequenos, poderemos nos valer apenas da Relatividade Restrita, sendo levados à concluir que no momento do reencontro dos dois relógios, aquele que se moveu (não inercial) estará atrasado em relação ao que ficou parado. Isto torna claro que as transformações de Lorentz devem ser consideradas como um caso especial (relativo ao movimento retilíneo uniforme) dentro de um grupo mais amplo de transformações. Tal grupo deve ser considerado em sua totalidade caso se queira formular uma cinemática, per se, livre de contradições.

Veremos, adiante, que será necessário abandonar a suposição, extremamente restritiva, de que as transformações entre referenciais equivalentes devam ser lineares [5] **. Argumenta-se frequentemente, com o objetivo

* Isto não acarretaria necessariamente nenhuma modificação nas transformações de Lorentz.

** A Relatividade Geral, expandindo a noção de sistemas equivalentes, abandonou esta restrição, passando a considerar todas as transformações pontuais no mesmo pé de igualdade, o que pode ser criticado [2]. Tal procedimento não nos parece satisfatório, uma vez que a idéia da relatividade do movimento não foi enfatizada.

de sustentar tal conclusão, que um corpo em movimento em retilíneo uniforme em relação a um referencial inercial estará ainda em movimento retilíneo uniforme em relação a qualquer outro referencial inercial.[6] Deixando de lado o fato de até hoje não se ter chegado a uma definição precisa de referencial inercial, devemos notar, uma vez que, em princípio, estamos interessados em referenciais cinematicamente equivalentes, que não é necessário levar em conta tal argumento. Veremos como obter novos resultados de uma maneira simples desde que a idéia de relatividade seja ampliada.

2. A IDÉIA DE RELATIVIDADE NUM SENTIDO AMPLO

Consideremos um referencial S no qual um acontecimento é descrito por meio das coordenadas espaciais x, y e z, componentes de $\vec{r}$, e a coordenada temporal t. Uma consequência daquilo que foi proposto no início da Introdução é que deve ser possível associar a uma partícula,* qualquer que seja o seu movimento, um referencial no qual ela se encontra em repouso. Tal referencial, doravante designado por S', emprega coordenadas espaciais x', y' e z', componentes de $\vec{r}\,'$, e a coordenada temporal t'. Nosso principal objetivo será determinar S', i.e., determinar o movimento de cada um de seus pontos em relação a S. Nosso problema pode ser formulado da seguinte maneira: dada uma partícula cujo movimento é descrito por $\vec{r}(t)$, determine seu referencial próprio S' caracterizado por $\vec{v}(\vec{r}, t)$, sabendo que

---

* Devemos notar que aqui a palavra corpo seria totalmente inadequada: poderíamos ter diferentes pontos de um mesmo corpo pertencendo a referenciais diferentes. É importante ter isto em mente ao se tentar verificar experimentalmente as consequências da teoria.

$\vec{v}\left[\vec{r}(t),\, t\right] \equiv \vec{v}(t) = d\vec{r}(t)/dt$. As transformações $\vec{r}\,'(\vec{r}, t)$ e $t'(\vec{r}, t)$, que nos dão a posição e o instante de um acontecimento descrito em S' quando se conhece a descrição em S, devem depender da forma de $\vec{v}(\vec{r}, t)$. S' descreverá S por meio de $\vec{v}\,'(\vec{r}\,', t')$.

É importante notar que o fato de ser o referencial S' "visto" em S com um certo movimento não implica em que S seja "visto" em S' com o mesmo movimento na direção oposta. Argumenta-se frequentemente,[3, 4] que se o Universo fosse despojado de todo o seu conteúdo material, não restando senão dois relógios, nós estariamos envolvidos num paradoxo (desde que as transformações de Lorentz continuassem válidas), uma vez que, por razões de simetria, cada um deles deveria "ver" o outro com o mesmo tipo de movimento. (Agora teriamos realmente um paradoxo dos relógios). Dessa forma o "conteúdo material" permitiria distinguir qual dos dois estaria associado a um referencial inercial. Certamente tal raciocínio não pode ser considerado correto. Devemos notar que o fato de termos formulado o problema do paradoxo *num certo referencial* pode significar uma quebra de simetria, o que torna a conhecida hipótese de Mach [7] desnecessária. Esta é uma conclusão satisfatória, pois *em princípio* a solução para o paradoxo dos relógios deve ser obtida por meio de considerações puramente cinemáticas.

É igualmente importante notar que a imposição de homogeneidade do espaço e do tempo [5] não implica na constância dos coeficientes dos dx^{μ} nas relações

$$dx'^{\nu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\, dx^{\mu} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

onde empregamos a notação tensorial por razões de simplicidade. A única conclusão possível é que eles não podem depender de $\vec{r}$ e t explicitamente, mas apenas implicitamente, através de $\vec{v}$, $\vec{v}'$ e suas derivadas no ponto, i.e., através das condições cinemáticas. Considerações semelhantes podem ser feitas a respeito de $\partial x^{\nu}/\partial x'^{\mu}$.

Apesar da ênfase que estamos dando ao aspecto cinemático das transformações, podemos prever, considerando o sucesso do programa Newtoniano, expresso pela equação $m \cdot d\vec{v}/dt = \vec{f}$, que cinemática e dinâmica estejam intimamente relacionadas.

3. AS RELAÇÕES DE TRANSFORMAÇÃO

Trataremos inicialmente do problema a uma dimensão espacial. Este é um importante caso: corresponde ao de uma partícula em movimento retilíneo, sendo apenas consideradas as transformações sôbre o eixo dos xx sôbre o qual se desloca a partícula. Por outro lado isto servirá como uma preparação que nos permitirá abordar mais facilmente o caso tridimensional.

Vamos supor que a cada par de números (x, t) esteja univocamente associado um par (x', t'), o que significa que a coincidência entre acontecimentos permanece inalterada sob as transformações que iremos considerar. Estas por sua vez serão tratadas na forma diferencial, o que simplificará grandemente o problema pois trabalharemos com relação lineares em dx e dt. Numa etapa posterior examinaremos a possibilidade de integra-las. Além disso, estamos supondo que as transformações que relacionam S' e S num certo ponto dependem apenas das condições neste ponto (v, v' e suas derivadas): não há nenhuma vantagem em se considerar as transformações na forma x' = x'(x,t) e $t' = t'(x,t)$. Portanto, partiremos das relações

$$dx' = \frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial t} dt \qquad \text{e} \qquad dt' = \frac{\partial t'}{\partial t} dt + \frac{\partial t'}{\partial x} dx \;. \quad (1)$$

Quando $dx' = 0$, temos que $dx/dt = v$; logo,

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = -fv \quad (2)$$

onde $f \equiv \partial x'/\partial x$, (faremos $f' \equiv \partial x/\partial x'$).

É claro que as igualdades (1) e (2) permanecerão válidas se efetuarmos uma troca entre as variáveis com e sem linha (lembremos que S' descreve S por meio de $v'(x', t')$). Dessa forma podemos expressar dx em termos de dx' e dt'; usando (1) e (2) obtemos uma identidade envolvendo dx e dt que nos permite escrever que

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = -f\frac{v}{v'} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{f}{v'} \;[x;\, x'] \;, \quad (3)$$

onde $[x;\, x'] \equiv 1 - \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'}\right)^{-1}$. Substituindo (3) e (2) em (1) obtemos que

$$dx' = f(dx - v\,dt), \; (4a) \qquad \text{e} \qquad dt' = \frac{f}{v'}(-v\,dt + [x;\, x']). \; (4b)$$

Para a lei de composição de velocidade obtemos a expressão

$$u' = \frac{v'(u-v)}{-v+[x;\, x']u} \equiv u'(u,\, v,\, y',\, [x;\, x']) \;. \quad (5)$$

Consideremos agora três referenciais; S, S' e S". S descreve S' e S" respectivamente por meio de $v_1(x,\, t)$ e $v_3(x,t)$, S' descreve S" por meio de

$v_2(x', t')$. Vamos impor a condição de que as transformações constituam um grupo. A relação (5) nos dá que

$$u' = u'(u, v_1, v_1', [x; x']), \quad (5a); \quad u'' = u''(u', v_2, v_2', [x'; x'']), (5b)$$

e

$$u'' = u''(u, v_3, v_3', [x; x'']) \,. \tag{5c}$$

Substituindo (5a) em (5b) e comparando o resultado com (5c) obtemos

$$\frac{1}{v_1' \, v_2'} - \frac{[x'; x'']}{v_2 \, v_2'} = - \frac{v_3}{v_3'} \left(\frac{1}{v_1 \, v_2} - \frac{[x; x']}{v_1 \, v_1'} \right) . \tag{6}$$

Tomemos, em seguida, um certo ponto do espaço-tempo; x, t, x', t' e x", t" têm agora valores bem definidos. Façamos a seguinte hipótese: o conhecimento de v_1 em tal ponto não é suficiente para a determinação de v_1', que neste caso depende também do conhecimento das derivadas de v_1. Observemos que poderíamos ter empregado, na derivação de (6), outro referencial S' tal que, no ponto, sua velocidade fôsse diferente de v_1 mas cujas derivadas da velocidade tivessem sido escolhidas de modo a deixar v_1' ainda com o mesmo valor. Poderíamos, ainda, ter empregado outro S" tal que v_2 e v_2', relativas ao novo S', e as derivadas correspondentes não fossem alteradas. Porém, de acôrdo com a homogeneidade do espaço e do tempo, $[x'; x'']$ só depende de v_2, v_2' e suas derivadas, enquanto $[x; x']$ só depende de v_1, v_1' e suas derivadas. Portanto, o lado esquerdo da igualdade (6) ficaria inalterado; o mesmo, entretanto, não aconteceria com o lado direito. Isto mostra que a nossa hipótese inicial deve estar errada e que o conhecimento de v_1 num certo ponto deve ser suficiente para a determinação de v_1' no mesmo ponto. Escolhendo a mesma orientação para os eixos dos xx e dos x'x', o princípio de relatividade nos dá então que

$$v'(x', t') = -v(x, t) \tag{7}$$

Substituindo (7) em (6) e notando em v_1 e v_2 são independentes, obtemos o resultado geral

$$\frac{[x; x']}{v^2} = c_0 \tag{8}$$

onde c_0 = constante. Para termos as transformações de Lorentz como um caso especial é necessário que $c_0 = c^{-2}$. *

Substituindo (7) em (8)($c_0 = c^{-2}$) em (4b) vem que

$$dt' = f\left(dt - \frac{v}{c^2}\,dx\right) . \tag{4b'}$$

Para a lei de composição de velocidade, obtemos a conhecida relação

$$u' = \frac{u-v}{1 - \frac{vu}{c^2}} \equiv u'(u, v) . \tag{4c}$$

Vemos que a velocidade da luz é constante para todos os observadores, mesmo ao considerarmos a relatividade no sentido amplo.

4. A CONSTRUÇÃO DE UM REFERENCIAL

O fato de termos chegado às transformações procuradas (4a, b') não significa que devemos nos dar por satisfeitos: é necessário, agora, mos-

---

* Teríamos obtido um curioso grupo de transformações se tivéssemos feito $c_0 = -c^{-2}$: a velocidade da luz ainda seria uma constante fundamental mesmo não sendo invariante para os diferentes observadores.

trar a possibilidade de construir referenciais para os quais elas são válidas. Em outras palavras, como tais transformações implicam na constância da velocidade da luz, elas nos permitem idealizar certos procedimentos operacionais, os quais devem ser consistentes com as próprias transformações. Um referencial pode ser idealizado da seguinte maneira: um conjunto contínuo de pontos, fixos uns em relação aos outros, e um conjunto de relógios sincronizados (um em cada ponto). Portanto, a primeira condição a que um conjunto de pontos deve satisfazer para termos um referencial é que a distância entre qualquer um deles permaneça constante no tempo (rigidez). Tal condição pode ser testada por meio da seguinte "experiência":

Emitimos de um ponto A, dois sinais luminosos separados pelo intervalo de tempo δt. Os sinais atingem um outro ponto B e são refletidos em direção a A. A condição para que B esteja fixo em relação a A é que os dois sinais atinjam A separados pelo mesmo intervalo δt (a velocidade da luz não se compõe com a de B).

Vamos considerar agora o mesmo experimento sendo realizado entre A' e B', dois pontos fixos em S', que está relacionado a S pelas transformações (4a, b'). O primeiro sinal alcança A' no instante t_2' que pode ser calculado por meio da relação

$$t_2' - t_1' = \frac{2|A' - B'|}{c} \quad ; \qquad (9)$$

t_1' é o instante de saída. Da mesma forma, como o segundo sinal parte no instante $t_1' + \delta t'$, o instante de chegada é dado por $t_2' + \delta t'$. Por outro lado, o relógio colocado em A' marcará t_2' e $t_2' + \delta t'$ para os instantes de chegada do primeiro e segundo sinal respectivamente, pois as transformações (4a, b') deixam a velocidade da luz invariante. Concluimos que tais transformações são consistentes com a primeira condição.

A segunda condição exige que relógios em diferentes pontos estejam sincronizados, o que pode ser testado por meio da seguinte "experiência":

Emitimos de A para B dois sinais luminosos separados pelo intervalo de tempo δt. A condição é satisfeita se eles chegam a B separados pelo mesmo intervalo δt (o experimento anterior confirmou a rigidez). *

Imaginemos agora o mesmo experimento sendo realizado entre A' e B' em S'. Se o primeiro sinal é emitido em t_1' ele alcança B' em t_2', que pode ser calculado por meio da mesma relação (9) (sem o fator 2, pois estamos considerando apenas o caminho de A' para B'). O sinal emitido em $t_1' + \delta t'$ deve atingir B' em $t_2' + \delta t'$, pelo mesmo cálculo. Por outro lado, o relógio colocado em B' deve mostrar os mesmos instantes de chegada, pois as transformações (4a, b') deixam a velocidade da luz invariante. Concluimos que tais transformações são consistentes também com segunda condição.

É importante observar que tais "experiências" nos dão condições necessárias e suficientes para que tenhamos um referencial rígido e sincronizado.

Vejamos agora de que maneira as noções de coincidência espacial e temporal nos conduzem, necessariamente, às transformações (4a, b'). Nas demonstrações que se seguem, poderíamos ter substituido o sinal luminoso por qualquer outro tipo de sinal e usado a lei de composição de velocidades para chegarmos aos mesmos resultados; mas isto apenas traria complicações des

---

* Na verdade isto apenas nos diz que os relógios em A e B são idênticos, o que nos permite realizar a sincronização.

necessárias.

Podemos obter dois acontecimentos espacialmente coincidentes por meio do seguinte método:

Emitimos um sinal luminoso de A para B, por razões de simplicidade, fixo em relação a A. Em B o sinal é refletido de volta para A. A saída e a chegada do sinal em A são acontecimentos espacialmente coincidentes.

Vamos usar o mesmo método em S', o qual é caracterizado em S por $v(x, t)$. As relações (4a) e (4b) devem ser válidas quaisquer que sejam as transformações que relacionem x e t com x' e t'. A distância $|A' - B'| = \delta x'$ será vista em S como uma Δx. De acordo com (4a) é válida a relação

$$\delta x' = f\, \Delta x \ .$$

δt, o intervalo de tempo determinado em S, que transcorre entre a saída e a chegada do sinal em A', será dado por

$$\delta t = \Delta x \left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} \right)$$

Expressando Δx em termos de $\delta x'$ nesta relação e observando que $2\, \delta x'/c = \delta t'$ (o intervalo de tempo determinado em S') e que, além disso, $\delta t/\delta t' = \partial t/\partial t'$ (os acontecimentos em S' se dão no mesmo ponto do espaço mas em instantes diferentes), concluímos que

$$f \frac{\partial t}{\partial t'} = \gamma^2(v) \ , \tag{10}$$

onde $\gamma(v) \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Vejamos agora o problema da coincidência temporal. Se dois relógios, em A e B, estão sincronizados, dois sinais luminosos que partem no mesmo instante de um ponto equivalente de A e B devem alcançar tais pontos num mesmo instante posterior. Desse modo produzimos dois acontecimentos temporalmente coincidentes.

Empreguemos o mesmo método em S'. A distância entre os dois acontecimentos será determinada em S pela relação

$$\delta x = c(\delta t_1 + \delta t_2) \; ,$$

onde δt_1 e δt_2 são os tempos gastos pelos sinais para alcançar A' e B', respectivamente. Mas,

$$\delta t_1 = \frac{\Delta x}{2(c-v)} \; , \qquad \text{e} \qquad \delta t_2 = \frac{\Delta x}{2(c+v)} \; .$$

Logo, expressando Δx em termos de $\delta x'$ e substituindo na relação para δx e observando, além disso, que em S' a chegada dos sinais em A' e B' são acontecimentos simultâneos, isto é, $\delta x/\delta x' = \partial x/\partial x'$, obtemos (8) (com $c_0 = c^{-2}$). Aplicando (8) e (10) às relações (4a) e (4b) obtemos (4b').

Pode-se criticar o que aqui foi feito argumentando-se que o nosso resultado não tem significado físico, sendo simplesmente a consequência de uma definição que conduziu necessariamente às transformações (4a, b'). Por exemplo: os "observadores" em S e S' concordam em tomar a velocidade de um sinal luminoso emitido em S como unidade de velocidade.

Uma análise da lei de composição de velocidades serve para mostrar que tal crítica não se justifica. As relações obtidas nos dizem que um sinal emitido em S' com velocidade u' é visto em S, de acordo com (4c), com a velocidade $u = u(u', v)$: em princípio, esta é apenas uma relação matemática, desprovida de significado físico, pois relaciona quantidades medidas em dois referenciais diferentes. Uma lei física deve ser necessariamente formulada num referencial. Consideremos agora o sinal sendo emitido em S onde é visto com a velocidade $\bar{u}$. O que está sendo considerado um fato experimental é que quando o sinal é emitido em S' temos que $u = u(\bar{u}, -v)$, isto é, $u' = \bar{u}$. Não há dúvida de que este é um resultado físico. Tal fato foi levado em conta ao analisarmos o procedimento que nos permite determinar a rigidez.

Um fenômeno que precisa ser estudado para que se estabeleça a equivalência, ao menos cinemática, entre S e S', é o da modificação do ritmo de um relógio que se move de uma maneira arbitrária. Em outras palavras, se construirmos um relógio e o ligarmos ao referencial S', se comportará ele de acordo com as transformações (4a, b') ? Certamente não é possível construir todos os relógios que se possa imaginar para verificar em cada caso o que acontecerá. Entretanto, existe um que se comporta de acordo com os nossos resultados. Para construí-lo empregamos o mesmo método que nos permitiu produzir acontecimentos espacialmente coincidentes. Agora, o intervalo de tempo entre a saída e a chegada do sinal em A determina uma unidade de tempo δt. Já vimos que a relação entre δt e $\delta t'$, considerando agora o relógio em S', é dada por (10), o que está de acordo com as relações obtidas. Contudo, se de fato acreditamos na equivalência entre os referenciais S e S', devemos esperar que qualquer relógio associado a S' satisfaça às transformações (4a, b'). Na verdade isto significa supor uma equivalência dinâmica (não apenas cinemática), uma vez que diferentes tipos de forças nos permitem construir diferentes relógios. Isto justifica que se postule a covariância das leis da Física sob as transformações (4a, b'), o que corresponde à formulação de um princípio amplo de relatividade.

5. RESTRIÇÕES SOBRE v(x,t) e f(x,t)

Vamos examinar agora a possibilidade de integrar as relações obtidas. As duas condições

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 x'}{\partial x \partial t} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 t'}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 t'}{\partial x \partial t}$$

devem ser satisfeitas. A primeira delas quando aplicada à (4a) nos dá

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial (fv)}{\partial x} . \tag{11}$$

A segunda, aplicada à (4b'), nos dá

$$- \frac{1}{c^2} \frac{\partial (fv)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} . \tag{12}$$

Multiplicando (12) por v e somando à (11) obtemos que

$$\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial t} = \gamma^2(v) \left(\frac{v}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) , \tag{13}$$

logo,

$$f = \gamma(v) \exp \left(- \int_{t_o}^{t} \gamma^2(v) \frac{\partial v}{\partial x} dt + g(x) \right) . \tag{14}$$

Multiplicando (11) por v/c^2 e somando à (12) vem que

$$\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\gamma^2(v)}{c^2} \left(v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial t} \right) , \tag{15}$$

logo,

$$f = \gamma(v)\,\exp\left(-\frac{1}{c^2}\int_{x_0}^{x} \gamma^2(v)\,\frac{\partial v}{\partial t}\,dx + h(t)\right) \qquad (16)$$

As expressões (14) e (16) nos dão imediatamente, após igualarmos os expoentes e derivarmos, que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\gamma^2(v)\,\frac{\partial v}{\partial x}\right] = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\gamma^2(v)\,\frac{\partial v}{\partial t}\right] = \psi(x,t)\ , \qquad (17)$$

onde $\psi(x, t)$ foi introduzida para simplificar a notação. Chegamos assim ao importante resultado que estabelece que $v(x, t)$ deve satisfazer à equação (17). É fácil verificar agora que

$$g(x) = -\frac{1}{c^2}\int_{x_0}^{x}\left[\gamma^2(v)\,\frac{\partial v}{\partial t}\right]_{t=t_0} dx + \ell n\left[f_0\,\gamma^{-1}(v_0)\right]\ , \qquad (14a)$$

e

$$h(t) = -\int_{t_0}^{t}\left[\gamma^2(v)\,\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=x_0} dt + \ell n\left[f_0\,\gamma^{-1}(v_0)\right]\ , \qquad (16a)$$

onde $v_0 \equiv v(x_0, t_0)$ e $f_0 \equiv f(x_0, t_0)$.

As transformações de Lorentz, como era de se esperar, são um caso particular das que obtivemos. De fato, se v = constante = v_0, vem que f = = constante = f_0. Por outro lado, $v' = -v_0$ e $f' = f_0'$. Pela isotropia do espaço, $f_0 = f_0'$. A relação (8) nos dá então que $f = \gamma(v)$.

NOTA: Vimos que se (11) e (12) são válidas, a cada par (x, t) está univocamente associado um par (x', t'). Podemos verificar facilmente que as transformações (7) e (8) são consistentes com a condição de que a cada par (x', t') esteja univocamente associado um par (x, t).

6. DETERMINAÇÃO DA FORMA DE $v(x,t)$ e $f(x,t)$

As expressões que obtivemos para f não são totalmente satisfatórias pois envolvem x_0, t_0 e f_0, onde (x_0, t_0) pode representar qualquer ponto do espaço-tempo. Veremos que f pode ser escrito apenas em termos de x e t.

Por conveniência definimos as duas quantidades, $F(x, t)$ e $G(x, t)$, tais que

$$\exp\left(-\frac{1}{c^2}\int_{x_0}^{x}\gamma^2(v)\,\frac{\partial v}{\partial t}\,dx\right) = F(x, t)\,F^{-1}(x_0, t) \quad , \tag{18}$$

e

$$\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\gamma^2(v)\,\frac{\partial v}{\partial x}\,dt\right) = G(x, t)\,G^{-1}(x, t_0) \ . \tag{19}$$

(16) e (16a) nos dão então que

$$f\,\gamma^{-1}(v)\,F^{-1}(x, t) = f_0\,\gamma^{-1}(v_0)\,G^{-1}(x_0, t_0)\,F^{-1}(x_0,t)\,G(x_0, t) \ .$$

Mas f deve depender apenas da forma de $v(x, t)$ e do ponto (x, t). Notemos ainda que o lado direito desta expressão é uma função de x_0, t_0 e t. Portanto, deve existir uma função $c_F(t)$ tal que

$$f\,\gamma^{-1}(v)\,F^{-1}(x, t) = c_F(t) \ . \tag{20}$$

Da mesma maneira é fácil mostrar que deve existir uma função $c_G(x)$ tal que

$$f\,\gamma^{-1}(v)\,G^{-1}(x, t) = c_G(x) \ . \tag{21}$$

Vejamos agora o que pode ser concluido a respeito de $v(x, t)$. Usando (17) e a identidade

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\gamma^2(v)\,\frac{\partial v}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\gamma^2(v)\,\frac{\partial v}{\partial x}\right] ,$$

obtemos que

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

Portanto, em geral,

$$\psi(x, t) = \frac{c}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dk\; k^2\left[A(k)e^{ik(x-ct)} + B(k)e^{ik(x+ct)}\right] , \tag{22}$$

onde os fatores $c/2$ e k^2 foram introduzidos por conveniência de cálculo. Substituindo (22) em (17) e levando em conta que $v/c < 1$, obtemos, integrando, duas expressões para $v(x, t)$ dadas pela relação

$$\ell n\; \Lambda(v) = -\int_{-\infty}^{\infty} dk\left[A(k)e^{ik(x-ct)} + B(k)e^{ik(x+ct)}\right] + R , \tag{23}$$

onde,

$$\Lambda(v) \equiv \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}} \qquad \text{e} \qquad R = \begin{cases} a_1(x)t + a_2(x) \\ \\ b_1(t)x + b_2(t) \end{cases} ; \tag{23a}$$

$a_1(x)$ e $a_2(x)$ são funções de x apenas e $b_1(t)$ e $b_2(t)$ funções de t. Isto implica que

$$R = c_1xt + c_2x + c_3t + c_4 ,$$

onde c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes. Vemos que $\ln\Lambda(v)$ também satisfaz à equação de onda e pode ser escrito como uma superposição de ondas planas. Por este motivo faremos $R = 0$ em (23).

Retomemos o problema da determinação de $f(x, t)$. Para simplificar a notação faremos

$$F(x, t) = \exp(\sigma_F) \qquad e \qquad G(x, t) = \exp(\sigma_G) \; .$$

(18) e (19), combinadas com (17), nos dão respectivamente que

$$\left.\begin{matrix}\sigma_F \\ \\ \sigma_G\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[-A(k)e^{ik(x-ct)} + B(k)e^{ik(x+ct)}\right] + \begin{cases} \text{Função de } t & (24) \\ & . \\ \text{Função de } x & (25) \end{cases}$$

Tomando os valores para f dados por (20) e (21) e levando em conta (24) e (25), obtemos

$$f = \alpha\gamma(v) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[A(k)e^{ik(x-ct)} - B(k)e^{ik(x+ct)}\right]\right), \tag{26}$$

onde α é uma constante que só pode depender da forma de $v(x, t)$. Devemos notar, porém, que caso esta última afirmativa fosse verdadeira, seria possível, por meio de algum método, associar um certo número a cada função $v(x, t)$. Isto significa que deveríamos considerar esta função em todo espaço-tempo, o que contraria a hipótese de que as transformações (4a, b') só devem depender dos dados obtidos no ponto onde estão sendo consideradas. Somos levados a concluir que α deve ser a mesma para qualquer $v(x, t)$.

7. O PROBLEMA FUNDAMENTAL DA RELATIVIDADE

Estamos agora em condições de abordar o problema fundamental da relatividade quando considerada no seu sentido amplo. Levando em conta (23) (R=0), podemos escrever que

$$- \int_{-\infty}^{\infty} dk\; A(k) e^{ik(x-ct)} = \left[\frac{1}{2} + \phi(x,t)\right] \ln \Lambda[v(x,t)] \;; \tag{27}$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} dk\; B(k) e^{ik(x+ct)} = \left[\frac{1}{2} - \phi(x,t)\right] \ln \Lambda[v(x, t)] \;; \tag{28}$$

onde $\phi(x, t)$ é uma função cujo significado será examinado posteriormente. Substituindo (27) e (28) em (26) vem que

$$f = \alpha\,\gamma\,(v)\;\Lambda^{\phi}(v)\;. \tag{29}$$

Na Relatividade Restrita (v = constante), (27) e (28) nos dão, respectivamente que

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\,\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$

Logo, ϕ = constante. Neste caso a isotropia do espaço impõe que $f = f'$ (invariância de valor) o que nos permite fazer $\phi = 0$ e $\alpha = 1$. Portanto, f será dado em geral por (29) fazendo-se $\alpha = 1$.

Nosso problema consiste em, dado o movimento de uma partícula descrito por v(t) e uma certa função $\phi(t)$, construir o referencial associado à partícula e caracterizado por v(x, t). (27) e (28) nos dão respectivamente que

$$A(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\{v[x(t),t] - c\}\, e^{-ik[x(t)-ct]}\left\{\frac{1}{2} + \phi[x(t),t]\right\}\ell n\, \Lambda\{v[x(t),t]\}. \tag{30}$$

e

$$B(k) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\{v[x(t),t]+c\}\, e^{-ik[x(t)+ct]}\left\{\frac{1}{2} - \phi[x(t),t]\right\}\ell n\, \Lambda\{v[x(t),t]\} - \tag{31}$$

Devemos notar que quando $t \to \pm\infty$, $x - ct \to \mp\infty$ e $x + ct \to \pm\infty$. Levando (30) e (31) em (23) (R=0) obtemos que

$$\ell n\{\Lambda[v(x,t)]\} = \left[\frac{1}{2} + \phi(\tau')\right]\ell n\{\Lambda[v(\tau')]\} + \left[\frac{1}{2} - \phi(\tau'')\right]\ell n\{\Lambda[v(\tau'')]\}\ , \tag{32}$$

onde τ' e τ'' são, respectivamente, soluções das equações

$$\frac{x-x(\tau')}{t-\tau'} = c \qquad \text{e} \qquad \frac{x-x(\tau'')}{t-\tau''} = -c\ . \tag{32a}$$

Vemos que para construir o referencial associado à partícula é necessário conhecer o seu passado e seu futuro. Isto certamente não implica em nenhuma quebra de causalidade: na verdade, ainda não podemos concluir nada a respeito da interação entre partículas.

8. SUGESTÕES PARA A FORMULAÇÃO DA DINÂMICA

Vimos em (32) que apenas o conhecimento de $v(t)$ é insuficiente para a determinação do referencial associado à partícula e caracterizado por

$v(x, t)$, sendo que $v[x(t), t] = v(t)$. Isto significa que necessitamos, além dos dados cinemáticos, de outro tipo de dados contidos na função $\phi(t)$. É natural supor que tais dados estejam relacionados à situação física da partícula: a dinâmica deve nos dar o que está faltando. Iremos supor, como se faz habitualmente, que esta possa ser formulada a partir de um princípio variacional: o movimento de uma partícula de massa m satisfaz à condição $- mc\delta\int ds = 0$, onde $ds = cd\tau$. * Vemos imediatamente que quando v é constante e $\phi = 0$ temos os resultados da Relatividade Restrita. Isto nos dará uma formulação invariante sob (4a, b'), o que está de acordo com o Princípio Amplo de Relatividade. Escrevendo que $- mcds = Ldt$, usando (4b') e (29) (com $\alpha = 1$), obtemos que

$$L = - m\, c^2\, \gamma^{-1}(v)\, \Lambda^{\phi}(v) \ , \tag{33}$$

onde v é a velocidade da partícula.

No caso não-relativista, a conexão entre esta Lagrangeana e a habitual, pode ser obtida, como uma primeira aproximação, se fizermos

$$\Lambda^{\phi}(x) = 1 + m^{-1}\, c^{-2}\, \gamma(v) V \tag{34}$$

onde V é a energia potencial da partícula. Se considerarmos o caso de uma partícula em repouso submetida a um potencial newtoniano Φ, (4b'), (29) e (34) nos dão que

$$dt = d\tau\, \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)^{-1} \simeq d\tau \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) . \tag{35}$$

---

* $d\tau$ é o tempo próprio da partícula. Sua invariância pode ser facilmente verificada (veja o apêndice).

Este é o resultado obtido por Einstein [8], em primeira aproximação, para o retardamento no ritmo de um relógio na presença de um campo gravitacional.

Devemos notar que a quantidade $f = \partial x'/\partial x$ que aparece em (4a, b') é > 0; portanto, ao considerarmos estas transformações, será necessário levar em conta que a aproximação (34) só será válida se $(V/m)c^{-2} > -1$.

Infelizmente, não há um procedimento geral que nos permita relacionar $\Lambda^{\phi}(v)$ com a energia potencial. Podemos, entretanto, tentar atacar o problema de uma maneira mais direta: procuraremos determinar os coeficientes $A(k)$ e $B(k)$ em (23). Em outras apalavras, dadas certas condições, procuraremos determinar $v(x, t)$ e em seguida, resolvendo uma equação diferencial (o que possivelmente não será fácil), determinar o movimento da partícula. Vejamos uma aplicação extremamente simples deste método no caso de uma partícula não-relativista contida numa caixa. Vamos supor que nas paredes da caixa $v(x,t) = 0$, o que nos assegura que a partícula não poderá ser encontrada fora da caixa. Escreveremos, então que

$$v(x, t) = 0, \begin{cases} x = 0 \\ x = a . \end{cases} \tag{36}$$

Desprezando termos da ordem de v^2/c^2, vem que

$$\ell n\, \Lambda\,(v) \simeq 2\,\frac{v}{c}\,. \tag{37}$$

Ao mesmo tempo vamos considerar (23) como uma superposição muito simples de ondas planas dada por

$$\frac{1}{2}\,\{\text{sen}\,[k(x - ct)] + \text{sen}\,[k(x + ct)]\}\quad . \tag{38}$$

Desenvolvendo esta expressão e combinando com (37) vemos que a condição (36) exige que $k = n\pi/a$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Temos, então, que resolver a equação

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{a}\right) . \tag{39}$$

(39) pode ser facilmente integrada nos dando que

$$x = \frac{2a}{n\pi} \operatorname{arc\,tg}\left\{\operatorname{tg}\frac{n\pi x_0}{2a} \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{a}\right)\right\} , \qquad x_0 \equiv x(0) . \tag{40}$$

Para a velocidade da partícula, obtemos que

$$v = c \frac{e^{1/2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{a}\right)} \cos\left(\frac{n\pi ct}{a}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{n\pi x_0}{2a}\right) e^{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{a}\right)}} \operatorname{tg}\left(\frac{n\pi x_0}{2a}\right) . \tag{41}$$

Vemos que a partícula realiza um movimento oscilatório, apresentando certas propriedades quânticas. Isto pode ser verificado mais facilmente se tomarmos o valor médio de $|v|$ para um período completo. Tomar $|v|_{\text{médio}}$ equivale a tomar (41) num certo instante $t = \Theta$, onde Θ é um valor intermediário entre t e $t + T$, sendo T o período. Podemos escolher a origem dos tempos de maneira a termos $\Theta = 0$. Por outro lado, $|v|_{\text{médio}}$ não pode ter um valor arbitrário; na nossa aproximação $v/c \ll 1$. Por esta razão consideraremos os casos em que $\operatorname{tg}[(n\pi x_0)/(2a)] \ll 1$, o que nos permite escrever que

$$|v|_{\text{médio}} \simeq c \frac{n\pi x_0}{2a} . \tag{42}$$

É interessante notar que se $x_o = \lambda_{Compton} = \hbar/mc$, então

$$|p|_{médio} \simeq \frac{n\pi\hbar}{2a} \quad , \tag{43}$$

que coincide com o caso quântico.

REFERENCES

1. Einstein, A.: Die Grundlage der Allgemeinen Relativitatstheorie, Annalen der Physik, 49, 1916 (English edition by Dover Publications).

2. Fock, V.: The Theory of Space Time and Gravitation, Pergamon Press, New York, 1959.
Wigner, E. P.: Events, Laws of Nature and Invariance Principles, The Nobel Prize Lectures, 1964 (Reprinted in Symmetries and Reflections, Scientific Essays of E. P. Wigner, M. I. T. Press, 1970).

3. Tonnelat, M. A.: Histoire du Principle de Relativité; (Flammarion, Éditeur, Paris, 1971).

4. Pauli, W.: Theory of Relativity, Pergamon Press, 1958.
Rindler, W.: Special Relativity (Oliver & Boyd, Edinburgh, 1969).

5. Einstein, A.: Zur Elektrodynamik bewegeter Korper, Annalen der Physik, 17, 1905 (English edition by Dover Publications).
Terletskii, Y. P.: Paradoxes in the Theory of Relativity, Plenum Press, 1968.

6. Aharoni, J.: The Special Theory of Relativity, Oxford, at the Claredon Press, 1965. (See also Pauli - ref. 4).

7. Mach, E.: The Science of Mechanics, The Open Court Publishing Co. Illinois, 1960.

8. Einstein, A.: On the Influence of Gravitation on the Propagation of Light, (Transl. Ann. Phys., 35, 1911), em The Principles of Relativity: a collection of original memoirs on the Special and General Theory of Relativity, Dover Publication, Inc., New York, 1923.