

Luiz Carlos Santos de Oliveira

ESTUDO DAS PROPRIEDADES
DO MODELO DE KINK RELATIVÍSTICO GERÁL (GRK)

Tese de

DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

-1980-

- À *Eliane*,

minha esposa, pelo incentivo irrestrito, sem o qual esta tese não teria sido possível.

AGRADECIMENTOS

- Ao prof.^o ~~SUTIF~~ Takeshi Kodama, orientador e amigo, pela constante ajuda e compreensão em todas as etapas desta tese, o meu sincero agradecimento.

- Aos profs. Chung Kai Cheong e Antônio F. da F. Teixeira, pela leitura e crítica do manuscrito, e constantes discussões sobre o tema.

- Aos profs. Neusa Amato, Filadelfo C. Santos, Sergio B. Duarte, Luis A.R. de Oliveira e Nazareth S. de Araujo pelo incentivo.

- Ao prof. Ivano D. Soares por inúmeras explicações.

- À Helena S. Ferreira pela excelente datilografia do texto.

- E a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram de alguma forma nesta tese, os meus agradecimentos.

RESUMO

Estuda-se a estabilidade do modelo de kink relativístico geral (GRK). Mostra-se que o modelo é estável pelo menos contra perturbações radiais. Além disso, estuda-se o campo de Dirac no "background" da geometria gerada pelo GRK. Verifica-se que o GRK localiza, em torno da região de maior curvatura, o campo de Dirac. Discute-se a interpretação física deste sistema (o campo de Dirac no "background" do GRK).

ABSTRACT

The stability of the general relativistic kink model (GRK) is studied. It is shown that the model is stable at least against radial perturbations. Furthermore, the Dirac field in the background of the geometry generated by the GRK is studied. It is verified that the GRK localizes the Dirac field, around the region of largest curvature. The physical interpretation of this system (the Dirac field in the GRK background) is discussed.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
ABSTRACT	v
LISTA DE FIGURAS	vii
INTRODUÇÃO	1
<u>CAPÍTULO 1</u> - O MODELO GRK	5
1.1 - Motivação ao modelo	5
1.2 - O modelo $\lambda\phi^4$	8
1.3 - O Teorema Pseudo-Virial	16
1.4 - A Solução G.R.K.	18
<u>CAPÍTULO 2</u> - ESTABILIDADE DO MODELO GRK	31
<u>CAPÍTULO 3</u> - O CAMPO DE DIRAC NO "BACKGROUND" DO GRK	43
<u>CAPÍTULO 4</u> - CONCLUSÕES	63
BIBLIOGRAFIA	65

LISTA DE FIGURAS

<u>Fig.</u>	<u>Pág.</u>
1.2.1 - A densidade de energia potencial clássica $v(\phi)$ para o campo ϕ .	10
1.2.2 - A solução estática ϕ_{kink} centrada em $x = 0$	11
1.2.3 - Uma visão da densidade de energia potencial $v(\phi(x))$ plotada como uma função de ϕ para cada x . Essa figura combina as informações contidas nas figs. 1.2.1 e 1.2.2.....	14
1.2.4 - Um par kink-anti-kink assintoticamente separados. Este pode ser pensado como uma excitação do vácuo em $\phi_0 = +m/\sqrt{\lambda}$	16
1.4.1 - Soluções de y para $f=0.77, 1.0$ e 1.25 plotadas contra x	24
1.4.2 - A função q e as métricas $e^{2\eta}$ e $e^{-2\alpha}$ plotadas em função de x para o caso $f=1.0$. O valor assintótico de q , $q(\infty)$, define a massa do sistema.....	25
1.4.3 - As quantidades $[f^{-2}q(\infty)]^{1/2}$ e x_0/f^2 plotadas em função de f .	25
2.1 - Solução estática do GRK. a) Coordenada radial \bar{x} como uma função de u . b) Campo escalar \bar{y} como uma função de u . Dessa figura, a propriedade de kink da solução é evidente. c) Expoente métrico \bar{h} como uma função de u . O valor de f é tomado como 1.25.	36
2.2 - Plot das funções $\omega_1(\alpha)$ e $\omega_2(\alpha)$ no plano $\alpha-\omega$ para $f=1.25$. O autovalor discreto é obtido da interseção das duas curvas, i.e. $\omega=0$. Para $\omega \geq 2$ os autovalores são contínuos	39
3.1 - As funções F_+^0 e F_-^0 plotadas em função de \bar{E}/m_D . Para o caso $m_D = 10.$, aparece um exemplo típico de estado ligado	57
3.2 - Funções $G(u)$ e $F(u)$ correspondentes ao estado fundamental com: $m_D = 1.0$ e $\kappa = 1$	58
3.3 - Funções $G(u)$ e $F(u)$ correspondentes ao estado fundamental com: $m_D = 1.0$ e $\kappa = 1$	58

3.4 - Gráfico de \bar{E} em unidades de \bar{m}_D versus \bar{m}_D . O valor de \bar{m}_D^{\min} em contrado foi de ≈ 0.65	59
3.5 - As funções de onda $g(u)$ e $f(u)$, no caso $\bar{m}_D = 0$, para: a) $\kappa=1$ e; b) $\kappa = -1$	61

INTRODUÇÃO

O conhecimento das propriedades de partículas elementares teve um grande aumento nas últimas duas décadas e a taxa de acumulação de novos dados promete aumentar. Não existe, ainda, nenhuma teoria capaz de descrever a enorme variedade de fenômenos descobertos no laboratório. Mas, existe uma gama de idéias teóricas que clarificam, com razoável sucesso, alguns desses fenômenos. Essas idéias tem sido desenvolvidas na base de certas hipóteses fundamentais que são: (a) a teoria quântica é aplicável à física de partículas elementares; (b) a descrição de todos os fenômenos devem ser consistentes com a teoria especial da relatividade; (c) e certas simetrias internas restringem os fenômenos.

A fusão dos dois primeiros desses princípios na teoria quântica dos campos tem tido um sucesso espetacular. A teoria quântica dos campos tem previsto uma grande classe de fenômenos, tais como a conexão entre spin e estatística, a existência de antipartículas e a possibilidade de produção múltipla de partículas em colisões a altas energias, que não podiam ser discutidas com teoria clássica ou mecânica quântica não-relativística. Além disso, para uma outra classe de fenômenos que formam o objeto de estudo da Eletrodinâmica Quântica, na qual as dificuldades técnicas tem sido superadas, a teoria está em excelente acordo com a experiência.

A teoria quântica de campo também fornece uma base para a formalização de uma variedade de simetrias internas. Tive-

mos também o desenvolvimento das teorias de gauge que, primeiramente, levou à verificação das interações fraca e eletromagnéticas e agora, tenta fazer a unificação de todos os tipos de interações.

Apesar de todos esses sucessos, algumas questões básicas podem ser colocadas. A mecânica quântica, por si só, impede a observação de "partes" de partículas, visto que, ao fazermos a medida de uma grandeza (observável), ela já se encontra num de terminado auto-estado. A teoria quântica de campos aproveita tais princípios para formalizar, como já dissemos, processos fundamentais, sem se preocupar com a constituição microscópica das partículas e desse modo já admitir a partícula formada. Mas é possível pensar, com outro tipo de enfoque, que por trás dos conceitos quânticos podemos ter acesso a informações que podem ser obtidas através da visão clássica. A título de exemplo, vejamos o que ocorre no caso do oscilador harmônico quântico. Quando efetuamos a medição da energia, obtemos sempre um espectro discreto. Na prática, as informações sobre o espectro de energia e o conjunto de auto-estados especificam completamente o problema do oscilador harmônico quântico. Mas, por outro lado, essas informações não levam necessariamente à imagem de uma partícula ligada a um potencial harmônico com uma força restauradora apesar, de operacionalmente, seja melhor descrever o oscilador harmônico com operadores de criação e aniquilação. Entretanto, o oscilador harmônico clássico (que tem um espectro contínuo de energia) nos fornece esta imagem e que cuja quantização, leva naturalmente ao oscilador harmônico quântico. Dessa forma, temos uma opção em aberto, para se perguntar sobre a própria origem do potencial do oscilador harmônico. Assim, em analogia, podemos pensar numa

teoria clássica de campos que nos traga alguma informação sobre a própria existência e estrutura interna das partículas.

Outro ponto interessante a se questionar é: Até que ponto os conceitos surgidos da teoria quântica de campos, tais como o conceito de antipartículas, o spin-estatística, podem ser reinterpretados sob o ponto de vista clássico, já que eles são considerados conceitos essencialmente quânticos ?

Assim, apesar dos sucessos da teoria quântica de campos, achamos válido considerar a teoria clássica para tentar construir um modelo no qual algumas entidades que caracterizam uma partícula pudessem vir a ser representadas. Por exemplo, como no modelo $\lambda\phi^4$ a solução de kink tem uma visão geométrica extremamente simples para representar tanto as partículas como as antipartículas, a idéia principal é então tentar generalizar o kink, para o espaço a quatro dimensões, insistindo em manter esta visão geométrica simples.

Esta linha de raciocínio, apesar de não ter sido levantado recentemente (Einstein já pensava nele⁽¹⁾) tem levado grande número de pesquisadores a trabalhar nesta direção nos últimos anos⁽²⁻²⁴⁾. Neste espírito, foi construído um modelo clássico, usando-se um campo escalar associado à relatividade geral que apresenta um carácter de objeto estendido, i.e., com estrutura interna⁽²⁵⁾, o qual foi denominado de GRK. A solução GRK é um modelo tentativo, preliminar, para compreender, do ponto de vista da teoria clássica de campos, alguns aspectos referentes a uma estrutura fundamental que pode estar intimamente relacionada às partículas elementares que existem na natureza. A idéia está baseada, em princípio, na solução de kink que aparece no modelo não linear $\lambda\phi^4$ bi-dimensional (1 tempo, 1 espaço) da teoria

clássica de campos.

O objetivo principal desta tese é fazer um estudo sobre uma generalização do modelo $\lambda\phi^4$ para 4 dimensões.

Na tentativa de generalizar a solução de kink para uma situação mais realística (4-dimensões), depara-se com uma séria dificuldade. O teorema pseudo-virial (Rosen⁽⁴¹⁾) não permite uma generalização simples, imediata.

Desta forma, a primeira parte desta tese ocupa-se em apresentar e discutir a solução de kink do modelo $\lambda\phi^4$ e de que maneira logrou-se contornar a dificuldade criada pelo teorema pseudo-virial, a fim de obter a generalização desta solução de kink.

Estes resultados apresentados na tese são uma reprodução daqueles obtidos por Kodama⁽²⁵⁾, onde mostra-se que existe uma saída para generalizar a solução de kink através da introdução da relatividade geral no problema; a solução GRK que representa um objeto com massa.

Um fato importante nestes resultados é que só existe solução no caso em que a assinatura do campo escalar é negativa, i.e., campo fantasma. Sabe-se que um campo com assinatura negativa num modelo, pode trazer instabilidade a este. Por outro lado, como tenciona-se, no futuro, aplicar o GRK para um modelo de partículas é de todo conveniente verificar se ele é estável. Assim, juntando o problema do campo fantasma torna-se imperioso estudar a estabilidade do GRK.

Além disso, aproveitando uma idéia de Wheeler⁽⁴⁸⁾, é interessante verificar se o GRK aprisiona outros campos quando estes passam por ele. Como uma consequência imediata temos que: Se o GRK aprisiona algum outro campo pode-se associar, de uma

maneira simples, as características deste campo do GRK.

Portanto, na segunda parte deste trabalho, que é a contribuição original da tese, estuda-se a estabilidade do modelo GRK contra perturbações radiais. Estuda-se, também, o comportamento de um campo espinorial neste modelo.

Mostra-se que o GRK é estável, pelo menos em relação a perturbações radiais. O problema da estabilidade contra modos mais gerais de perturbações (e.g., deformações, etc.) será objeto de estudos futuros. Mostra-se, também, que o GRK pode apri - sionar o campo de Dirac. Como consequência temos que o conjunto ("background" do GRK + campo de Dirac) funciona como um objeto com massa e com propriedades de espinores.

Seguindo, então, esta linha de trabalho, apresentarememos no Capítulo 1, a motivação, os conceitos e uma revisão completa de como foi obtida esta solução. No Capítulo 2, tratare - mos exclusivamente do problema da estabilidade da solução. No Capítulo 3, estudaremos o comportamento da solução quando introduzimos o campo de Dirac. E finalmente, no Capítulo 4, faremos um resumo de toda a tese e discutiremos os resultados.

CAPÍTULO 1

O MODELO GRK

1.1 - Motivação ao modelo

A idéia principal de que se partiu, idêntica ao raciocínio usado por Einstein, é a de usar o modelo de campo clássico para descrever as partículas elementares.

Mas uma questão surge imediatamente: Por que campo? A resposta mais satisfatória é porque, do ponto de vista da Mecânica Clássica, representar a estrutura de partículas elementares e algumas de suas propriedades só não era possível devido à própria limitação imposta ao modelo, tipo partícula puntiforme, que as descrevia. Para podermos compreender melhor este fato, tomemos como exemplo a equação de movimento para uma partícula. Se é introduzido na Lagrangeana, a priori, um termo que represente a massa da partícula, a equação de movimento resultante descreverá uma partícula puntiforme com a massa já especificada. A primeira consequência disto é que não podemos ver qualquer estrutura interna associada a ela, e segundo, que não podemos questionar sobre o aparecimento deste termo na teoria; isto significa que a partícula é forçada a aparecer. Em outras palavras, como já dissemos anteriormente, isto é equivalente, no caso do oscilador harmônico clássico, como se estivéssemos discutindo o Hamiltoniano clássico usando o espectro já quantizado, tendo em vista que o valor da massa das partículas é uma consequência de uma observação quântica. Assim já estaríamos levando em consideração um

aspecto quântico, apesar de estarmos lidando com uma teoria clássica.

Sob este ponto de vista, um modelo de campo clássico contorna este problema, pois temos apenas o campo preenchendo todo o espaço e a partícula é apenas uma manifestação desse campo. Desse modo, esse modelo é capaz de responder questões acerca do aparecimento das partículas e não estamos introduzindo aprioristicamente nenhum parâmetro (observável). Além disso, como essa partícula é representada como uma concentração do campo numa determinada região do espaço, temos aí surgido o conceito de objeto estendido no qual é possível analisarmos a sua estrutura interna espacial. Assim, a escolha de por que usamos campo fica respondida. Este fato é, sem dúvida, um avanço em relação ao modelo puntiforme, desde que neste modelo (puntiforme) a partícula já era imposta e não podíamos discutir como ela apareceu e nem tão pouco discutir alguma propriedade ligada a um grau de liberdade interna espacial.

A quantização desse modelo de campo deverá apresentar um espectro de massa que, quando obtido, reproduz uma partícula fisicamente observada.

Infelizmente, um modelo estendido de partículas, baseado numa estrutura de teoria clássica de campo linear, não é possível, pois não podemos concentrar o campo numa determinada região do espaço para termos esse caráter de partícula.

Entretanto, na Hidrodinâmica, é conhecido que alguns tipos de ondas não-lineares tem a propriedade de concentrar energia numa determinada região do espaço e que se propagam mantendo essa concentração (sóliton)⁽²⁶⁾. Essa propriedade das ondas não-lineares tem mostrado várias aplicações em diversos ramos da

física (27-32), inclusive no das partículas elementares. O sôliton tem uma propriedade muito importante: uma grande estabilidade, sendo portanto um bom parâmetro para um modelo de partículas. Desse modo, uma saída quase que natural para contornar a dificuldade intrínseca de uma teoria linear, seria construir um modelo baseado numa teoria clássica não-linear de campo.

A idéia central das teorias não-lineares de campos é olhar para as soluções clássicas das suas equações de campo (soluções de kink ou sôliton) e construir, então, estados quânticos em torno delas. Devemos chamar a atenção para o fato de que não pretendemos dispensar a utilização do formalismo quântico no que se concerne à obtenção de estrutura de níveis, dinâmica de interação, etc.

Por outro lado, conhecemos do mundo físico-real a existência de entidades denominadas antipartículas. Tais entidades tiveram origem, historicamente, quando Dirac formulou a sua teoria para o elétron em termos de Mecânica Quântica Relativística. Podemos ver que o fato de termos partícula-antipartícula está ligado intimamente com o processo de aniquilação. Isto é, neste processo, duas partículas, uma antipartícula da outra, interagem e se aniquilam, transformando suas massas totalmente em energia. Mas, por outro lado, a relação relativística não quântica, $E = mc^2$, possibilita, em princípio, a ocorrência desse processo. Então, cabe a pergunta: O conceito de partícula-antipartícula é intrinsecamente quântico? O objetivo de tocar neste ponto agora é salientar que acreditamos que este conceito possa ser analisado, usando-se uma teoria não-linear de campo clássico. Recentes desenvolvimentos de teorias de campos não-lineares (33-35) tem mostrado esta possibilidade, utilizando a topologia.

Na seção seguinte, mostraremos como as vantagens de teorias de campo não-lineares funcionam num modelo teórico simples.

1.2 - O modelo $\lambda\phi^4$

Os recentes desenvolvimentos de teorias não-lineares de campos apresentam um interessante ponto de vista sobre a origem dos espectros de massa e estrutura de partículas elementares. A maioria deles está ligado aos conceitos de sôliton, vácuo degenerado e soluções topológicas os quais discutiremos a seguir.

De todas essas teorias, talvez a mais simples delas seja o chamado modelo $\lambda\phi^4$ que mostraremos com alguns detalhes e discussões. Este exemplo foi primeiramente desenvolvido por Dashen, Hasslacher e Neven⁽³⁶⁻³⁸⁾, por Goldstone e Jackiw⁽³⁹⁾ e também por Polyakov. Em essência é o seguinte:

Consideremos um campo escalar real $\phi(x,t)$ bidimensional (1 espaço, 1 tempo) com uma densidade de lagrangeana

$$L(x) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda \phi^4, \quad (1.2.1)$$

onde m e λ são constantes. A eq. (1.2.1) tem a forma da equação de Klein-Gordon com termo de auto-interação, mas chamamos a atenção para o fato de que o termo m^2 foi trocado para $-m^2$.

Vamos escrever a lagrangeana como

$$L = \int L(x) dx = \int \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx - V[\phi], \quad (1.2.2)$$

onde a energia potencial $V[\phi]$ é dada por

$$V[\phi] = \int dx \left[\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right]. \quad (1.2.3)$$

A equação de movimento \bar{e} (dada por)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\delta V[\phi]}{\delta \phi} = \square\phi - m^2\phi + \lambda\phi^3 = 0. \quad (1.2.4)$$

Em particular, soluções clássicas independentes do tempo satisfazem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 &= - \frac{\delta V}{\delta \phi} \\ &= \nabla^2 \phi + m^2 \phi - \lambda \phi^3 \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

e são, portanto, extremos do potencial.

É claro que o mínimo absoluto de V ocorrerá para ϕ independente do espaço. Então, a densidade de potencial $v = -\frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4$ tem a forma familiar mostrada na fig. 1.2.1 com um máximo para $\phi = 0$ e mínimos para $\phi = \pm m/\sqrt{\lambda}$.

O par de mínimos degenerados em $\phi(x,t) = \pm m/\sqrt{\lambda}$ é um mínimo absoluto do funcional de energia potencial. Cada um desses mínimos pode ser usado para construir um conjunto de níveis correspondendo a um vácuo. Fica então estabelecido o conceito de vácuos degenerados. Os estados construídos em torno de cada um desses dois mínimos não manterão a simetria $\phi \rightarrow -\phi$ que a lagrangiana possui. Este é um exemplo simples de quebra espontânea de simetria.

Para obtermos níveis de energia quânticos desse sistema, partimos dos mínimos do potencial encontrados acima. Vamos

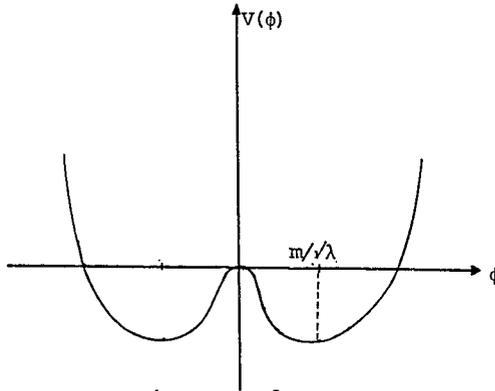


Fig. 1.2.1 - A densidade de energia potencial clássica $v(\phi)$ para o campo ϕ .

trabalhar apenas no limite de acoplamento fraco, i.e., quando o parâmetro dimensional $\lambda/m^2 \ll 1$. Claramente, em torno de cada mínimo, existe um poço de potencial local no espaço de campo. Na aproximação de acoplamento fraco, podemos construir um conjunto separado de níveis de energia em torno de cada um desses mínimos.

Os mesmos métodos semi-clássicos usados em teorias de campo dão a seguinte expressão para os níveis de energia:

$$E_{\text{vácuo}} \approx -\frac{m^4}{4\lambda} L + \frac{1}{2} \sum_k \sqrt{k^2 + 2m^2}, \quad (1.2.6)$$

e as excitações dos estados mais baixos são dadas por

$$E\{N_k\} \approx -\frac{m^4}{4\lambda} L + \sum_k (N_k + \frac{1}{2}) \sqrt{k^2 + 2m^2}, \quad (1.2.7)$$

onde tomamos $\hbar = 1$, e $\omega^2 = k^2 + 2m^2$ é o autovalor das autofunções e^{ikx} do operador $(-\nabla^2 + 2m^2)$ de V . k_n satisfaz condições de contorno periódicas $k_n L = 2n\pi$, onde L é a dimensão do espaço para a normalização.

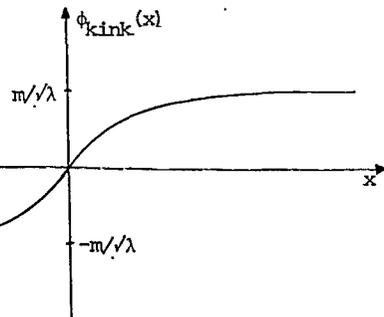
A equação de movimento independente do tempo, eq.(1.2.5), tem outras soluções além de $\phi = \pm m/\sqrt{\lambda}$. São elas

$$\phi(x) = (m/\sqrt{\lambda}) \tanh m(x-a)/\sqrt{2} \equiv \phi_{\text{kink}}^{(a)} \quad (1.2.8)$$

para qualquer valor da constante a . Consideremos qualquer uma das soluções, digamos com $a = 0$, e a chamaremos ϕ_{kink} . Podemos notar que ϕ_{kink} não é um sôliton, embora ele se assemelhe em forma com a solução correspondente da equação de Sine-Gordon que é um sôliton. Na terminologia de equações não-lineares, ϕ_{kink} é uma onda solitária, i.e., ela não tem nenhuma dependência no tempo num referencial de Lorentz e move-se sem distorção na forma, em outros referenciais. Sôlitons, entretanto, devem satisfazer mais requisitos. Por exemplo, quando dois sôlitons se aproximam um do outro e colidem, eles emergem da colisão assintoticamente sem distorção na forma ou trocas na velocidade. Ao que sabemos, o ϕ_{kink} não se comporta assim. De fato, cálculos numéricos indicam⁽⁴⁰⁾ que, após a colisão, eles decaem e "irradiam" ondulações.

A forma de ϕ_{kink} está mostrada na fig. 1.2.2.

Fig. 1.2.2 - A solução estática ϕ_{kink} centrada em $x = 0$.
 Numa solução ϕ_{kink} , ϕ tende assintoticamente a dois diferentes valores $\pm m/\sqrt{\lambda}$ para $x \rightarrow \pm\infty$. Esses valores são justamente o dos dois



vácuos clássicos. Assim, classicamente, a densidade de energia do kink é diferente da do vácuo somente localmente, próximo de $x = 0$. Sua energia total clássica difere da do vácuo por uma quantidade finita, sempre que $L \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
 E_{\text{kink}}^{\text{cl}} - E_{\text{vac}}^{\text{cl}} &\equiv V[\phi_{\text{kink}}] - V[\phi_0] \\
 &= \frac{m^4}{\lambda} \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial (mx)} \left(\tanh \frac{mx}{\sqrt{2}} \right) \right]^2 - \frac{1}{2} \tanh^2 \frac{mx}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \tanh^4 \frac{mx}{\sqrt{2}} \right\} dx + \\
 &\quad + \int_{-L/2}^{L/2} dx \frac{m^4}{4\lambda} \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m^3}{\lambda} \quad (1.2.9)
 \end{aligned}$$

A solução ϕ_{kink} é também estável classicamente, senão vejamos. Expandindo $V(\phi)$ em torno de ϕ_{kink} até termos quadráticos temos

$$\begin{aligned}
 V(\phi) &= \int dx \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 \\
 &= V(\phi_{\text{kink}}) + \frac{1}{2} \int dx \eta(x) \left\{ -\nabla^2 - m^2 + 3\lambda \frac{m^2}{\lambda} \tanh^2 \frac{mx}{\sqrt{2}} \right\} \eta(x) + \\
 &\quad + \lambda \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \int \tanh \frac{mx}{\sqrt{2}} \eta^3(x) dx + \frac{\lambda}{4} \int \eta^4(x) dx \quad , \quad (1.2.10)
 \end{aligned}$$

onde usamos $\eta(x) \equiv \phi - \phi_{\text{kink}}$.

As derivadas segundas de V para o kink são dadas pelo operador $\{-\nabla^2 - m^2 + 3m^2 \tanh^2(mx/\sqrt{2})\}$. As autofunções e os autovalores desse operador são calculados analiticamente. A equação de autovalores é

$$\left[-\nabla^2 - m^2 + 3m^2 \tanh^2(mx/\sqrt{2}) \right] \eta_i(x) = \omega_i^2 \eta_i(x) \quad (1.2.11)$$

Usando uma transformação de variáveis de x para $z = mx/\sqrt{2}$, essa equação torna-se

$$\left[-\frac{1}{2} \partial^2 / \partial z^2 + U(z) \right] \eta_i(z) = \epsilon_i \eta_i(z) \quad (1.2.12)$$

onde $\epsilon_i = (\omega_i^2/m^2) - 2$ e $U(z) = 3(\tanh^2 z - 1) = -3\text{sech}^2 z$. A eq. (1.2.12) é justamente a equação de Schrödinger para uma partícula de massa unitária num poço de potencial unidimensional $U(z)$. Este é um problema solúvel e tem dois estados ligados, $\epsilon = -2$, $\epsilon = -\frac{1}{2}$ e são seguidos por estados de espalhamento para $\epsilon > 0$. Estas soluções são

$$\epsilon_0 = -2 \quad \omega_0^2 = 0 \quad \text{para } \eta_0(z) = (\cosh^2 z)^{-1} \quad (1.2.13)$$

$$\epsilon_1 = -\frac{1}{2} \quad \omega_1^2 = \frac{3}{2} m^2 \quad \text{para } \eta_1(z) = (\sinh z)(\cosh^2 z)^{-1} \quad (1.2.14)$$

e

$$\epsilon = \frac{1}{2} k^2 \quad \omega_k^2 = m^2 \left(\frac{k^2}{2} + 2 \right) \quad \text{para } \eta_k(z) = e^{ikz} (3 \tanh^2 z - 1 - k^2 - 3ik \tanh z). \quad (1.2.15)$$

Todos os valores de ω_i^2 são positivos, exceto ω_0^2 que é zero. Portanto, a solução de kink é classicamente estável em todos os modos, exceto um, que tem estabilidade neutra. Essa frequência de modo zero pode ser vista como uma consequência da simetria de invariância translacional da lagrangeana original.

O fato importante que realçaremos a seguir é que a solução de kink é topologicamente separada dos estados de vácuo. Podemos confirmar isto, pelo menos de uma maneira heurística, da

seguinte forma: Fora de uma região finita próxima de $x \sim 0$, ϕ_{kink} está no fundo de um dos vales (vácuo) em aproximadamente metade do espaço e no fundo do outro vale na outra metade do espaço. Em contraste, cada um dos vácuos clássicos, digamos $\phi_0(x) = +m/\sqrt{\lambda}$, está inteiramente no fundo de um dos vales separados por uma barreira de potencial, veja fig. 1.2.3. Agora, para converter ϕ_{kink} em alguma excitação finita em torno de ϕ_0 , nós devemos levar o campo em essencialmente metade do espaço, de $-m/\sqrt{\lambda}$ a $+m/\sqrt{\lambda}$ através da barreira. Isto requer atravessar uma barreira de potencial, de peso $m^4/4\lambda$ em cada ponto, perfazendo uma barreira total de $\frac{1}{2} L m^4/4\lambda$, que claramente diverge quando $L \rightarrow \infty$. Neste sentido, existe uma barreira de potencial infinita no espaço de funções separando ϕ_{kink} e ϕ_0 . Assim, jamais uma solução de kink cai num único vale do potencial. Esse argumento da barreira de potencial também nos mostra que esta teoria tem dois vácuos degenerados com espaços de Hilbert separados, i.e., que os estados construídos em torno de um dos vales não passarão para o outro vale em qualquer quantidade finita de tempo. De fato, sabe-se (40) que esta solução também é quanticamente estável.

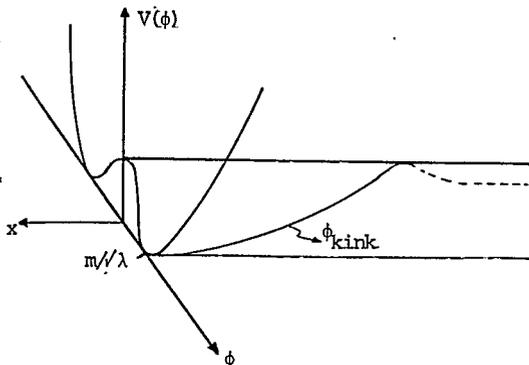


Figura 1.2.3 - Uma visão da densidade de energia potencial $v(\phi(x))$ plotada como uma função de ϕ para cada x . Essa figura combina as informações contidas nas figs. 1.2.1 e 1.2.2.

Fica flagrante, agora, por que motivo as soluções de kink do modelo não-linear de campo $\lambda\phi^4$ foram usadas para descrever partículas. Primeiro, porque este modelo concentra uma determinada quantidade finita de energia, e segundo, pela sua estabilidade. Além disso, o fato de que a solução de kink é topologicamente separada dos estados de vácuo é particularmente útil para descrever fermions, pois estes nunca decaem para o estado de vácuo; vimos que os estados construídos em torno de ϕ_{kink} não se misturam com os construídos em torno de cada um dos vácuos, $\pm\phi_0$. Podemos associar, então, os números $B = 1$ para ϕ_{kink} e $B = 0$ para os vácuos, que indicam a própria topologia das soluções. Como, pela equação de movimento, as soluções topológicas do vácuo não se misturam com as soluções topológicas ϕ_{kink} , temos que B é um número estritamente conservado. Dessa forma, B é um bem número quântico e representa a conservação do número fermiônico.

Com a idéia do kink, podemos de um modo bem simples introduzir o conceito de anti-kink, i.e., a antipartícula do kink, como sendo a solução topológica inversa do kink. Notamos que $\phi_{\text{anti-kink}} \equiv -\phi_{\text{kink}}$ é também uma solução estática das equações de movimento (eq. (1.2.5)), e que os estados construídos em torno dessa solução formam um setor topológico separado. A solução $\phi_{\text{anti-kink}}$ não decai na solução de vácuo pelas mesmas razões de barreira de potencial infinita discutidas anteriormente. Podemos associar a $\phi_{\text{anti-kink}}$ o número $B = -1$. Um par kink-anti-kink, assintoticamente separado como mostra a fig. 1.2.4, pode decair para um estado de vácuo, de vez que $B = +1$ do kink combinado a $B = -1$ do anti-kink dá $B = 0$ do vácuo. Assim, com esta visão podemos descrever, classicamente, o processo de aniquilação que era um dos nossos principais interesses.

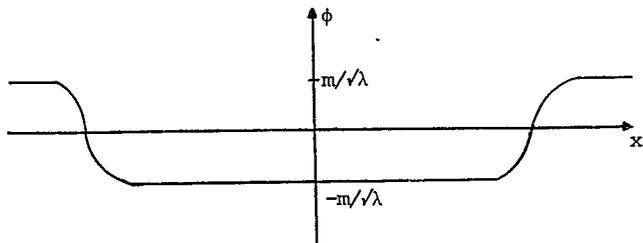


Fig. 1.2.4 - Um par kink-anti-kink assintoticamente separados. Este pode ser pensado como uma excitação do vácuo em $\phi_0 = +\pi/\sqrt{\lambda}$.

1.3 - O Teorema Pseudo-virial

Vimos, no parágrafo anterior, o modelo $\lambda\phi^4$ bi-dimensional (1 espaço, 1 tempo). Este modelo não representa, obviamente, o nosso mundo físico real, visto que ele é a duas dimensões apenas. Entretanto, infelizmente, uma simples extensão desse modelo para o caso tri-dimensional espacial não é possível. A existência do chamado teorema pseudo-virial, que foi construído por Rosen⁽⁴¹⁾ impede tal extensão. Esse teorema expressa as condições não triviais que as soluções independentes do tempo da teoria de campo devem satisfazer, para garantir a existência de qualquer solução tipo partícula de energia finita. Vamos mostrar, explicitamente, este teorema.

As soluções independentes do tempo para teorias de campos associadas a um princípio de ação satisfazem equações da forma

$$\delta E / \delta f(x) = 0 \quad , \quad (1.3.1)$$

onde o funcional de energia $E = E[f(x)]$ depende dos campos (reais e/ou complexos), representados na eq. (1.3.1) pela quantidade genérica $f(x)$. Vamos fazer uma decomposição linear de E ,

$$E = \sum_{\{\omega\}} E^{(\omega)} \quad , \quad (1.3.2)$$

na qual $E^{(\omega)}$ é um funcional de "peso" ω em relação a trocas na forma de $f(x)$ devido a dilatações espaciais,

$$E^{(\omega)} = E^{(\omega)} [f(x)] \equiv \lambda^{-\omega} E^{(\omega)} [f(\lambda x)] \quad , \quad (1.3.3)$$

para todo $\lambda > 0$ real. Então, o teorema pseudovirial

$$\sum_{\{\omega\}} \omega E^{(\omega)} [f(x)] = 0 \quad (1.3.4)$$

segue-se imediatamente das equações (1.3.2) e (1.3.3), porque a equação

$$\left\{ \frac{d}{d\lambda} E [f(\lambda x)] \right\}_{\lambda=1} = 0 \quad (1.3.5)$$

é uma consequência direta da eq. (1.3.1).

Cada uma das quantidades $E^{(\omega)} [f(x)]$ deve ser finita, no sentido de dar significado à eq. (1.3.4) e portanto o teorema pseudovirial aplica-se a soluções localizadas espacialmente independentes do tempo, sem singularidades sérias.

Para o caso de um campo escalar S real, estático e com simetria esférica a eq. (1.3.4) se torna

$$\langle S_1^2 \rangle + 3\langle V \rangle = 0 \quad , \quad (1.3.6)$$

onde o índice l representa a derivada em relação a r (coordenada radial) e $\langle \rangle$ denota integração espacial total. Aqui, V é a forma mais geral de qualquer potencial de auto-interação para o campo S .

Assim, podemos ver claramente que, se o termo de potencial na eq. (1.3.7) for positivo-definido, essa equação jamais será satisfeita, desde que o termo $\langle S_l^2 \rangle$ é sempre positivo e portanto não teríamos a solução tipo partícula.

Neste ponto, temos de recorrer a algumas alternativas para sanar essa dificuldade. Uma alternativa seria introduzir um termo de potencial tipo negativo-definido que iria satisfazer, então, a equação (1.3.7). Mas, Kodama e colaboradores⁽⁴²⁾ mostraram que este tipo de potencial levaria a solução a ser instável, o que não seria aconselhável para um modelo de partículas. Outra alternativa seria introduzir outros campos como o vetorial, tensorial, etc. Como exemplo, teríamos o monopolo de t'Hooft⁽⁴³⁾ da teoria de gauge. Mas, o teorema pseudo-virial também é uma consequência, no limite de gravitação fraca, da equivalência entre a fonte de energia e a fonte de gravitação para um campo escalar⁽⁴⁴⁾. Isso sugere que uma outra possível alternativa seria a introdução da gravitação forte no problema, de modo que o teorema pseudo-virial fosse alterado permitindo, assim, uma solução do tipo partícula. De fato, mostrou-se⁽²⁵⁾ que existe uma solução do tipo kink da equação de Einstein-Higgs com uma particular geometria de espaço-tempo. Tal solução foi chamada de GRK (General Relativistic Kink), e a seguir mostraremos explicitamente como foi obtida.

1.4 - A Solução G.R.K.

Em primeiro lugar, vamos obter as equações de campo

necessárias para o problema. Para tanto, partimos de uma densidade de Lagrangeana dada por

$$kL = (-g)^{1/2} \left\{ \frac{1}{2} R + \epsilon \left[S_{,\alpha} S_{,\beta} g^{\alpha\beta} - V(S^2) \right] \right\}, \text{ com } k=8\pi G/c^4, \quad (1.4.1)$$

onde g é o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, R é o escalar de curvatura, S é um campo escalar e a notação $S_{,\alpha}$ representa a derivada de S em relação à coordenada x^α . V é um potencial que descreve a auto-interação do campo escalar S e que depende somente de S^2 . ϵ é a assinatura do campo S e assume os valores $+1$ para o campo usual ou -1 para o campo fantasma (campo que tem uma densidade de energia negativa-definida).

Para o caso estático e esfericamente simétrico, escolhamos o elemento de linha dado por

$$ds^2 = e^{2\eta}(dx^0)^2 - e^{2\alpha}(dr)^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (1.4.2)$$

onde η e α são funções apenas da coordenada radial r .

Junto com a definição do elemento de linha, eq. (1.4.2), as equações de Einstein reduzem-se às seguintes equações:

$$\eta_{,1} = \epsilon r S_1^2 - \alpha_1, \quad (1.4.3)$$

$$2r\alpha_1 = \epsilon r^2 S_1^2 + 1 - (1 - \epsilon r^2 V) e^{2\alpha}, \quad (1.4.4)$$

$$S_{11} + (\eta_1 - \alpha_1 + 2/r)S_1 = S e^{2\alpha} dV/d(S^2) = 0, \quad (1.4.5)$$

onde o índice 1 significa a derivada em relação a r .

Aqui, vamos investigar o potencial

$$V(S^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{f}\right)^2 (1 - f^2 S^2)^2 \quad (1.4.6)$$

ondé f e μ são constantes. Então o estado de vácuo clássico do campo é dado por $S = \pm f^{-1}$. Podemos notar que a equação (1.4.6) nada mais é do que o termo da Lagrangeana do modelo $\lambda\phi^4$, exceto pelo termo constante adicional $(\mu^2/2f^2)$, que é necessário para eliminar a fonte gravitacional para o estado de vácuo clássico de S .

Para ficar operacionalmente melhor, vamos introduzir quantidades adimensionais e variáveis tais como:

$$x = \mu r \quad , \quad (1.4.7)$$

$$y = fs \quad , \quad (1.4.8)$$

$$q = f^2 \mu (1 - e^{-2\alpha})r \quad (1.4.9)$$

e

$$v = (f/\mu)^2 V \quad . \quad (1.4.10)$$

Nessas variáveis, as equações de Einstein eqs. (1.4.3-5) são escritas como

$$y'' + 2y'/x = - \left[y(1-y^2) + y'f^{-2}(q/x^2 - \epsilon xv) \right] e^{2\alpha} \quad , \quad (1.4.11)$$

$$q' = \epsilon x^2 (y'^2 e^{-2\alpha} + v) \quad , \quad (1.4.12)$$

onde a linha (') representa d/dx e

$$e^{-2\alpha} = 1 - f^{-2} q/x \quad , \quad v = \frac{1}{2} (1 - y^2)^2 \quad . \quad (1.4.13)$$

Podemos notar que, no limite de $f \rightarrow \infty$ com u finito, a

equação (1.4.11) tende ao modelo $\lambda\phi^4$ não relativístico geral. Portanto, pelo teorema pseudo-virial, não existe uma solução não-singular que satisfaça as condições de contorno: $|y|$ tendendo à unidade para x grande e o potencial métrico α sendo finito em todo o espaço. Uma possível saída seria a de que o segundo termo no parênteses do lado direito da eq. (1.4.11) fosse predominante, pelo menos em alguma região do espaço. Entretanto, encontrou-se que apenas a redução de f para pequenos valores (gravidade forte) não é suficiente para ter-se uma solução consistente se as métricas são não-singulares. Mas, mostraremos que soluções não-singulares estáticas para y são permitidas se é feita uma generalização da topologia do espaço-tempo. Conseguimos isto se admitimos que $e^{2\alpha}$ pode ter uma singularidade em $x=x_0$. Por uma simples análise de singularidade, encontramos que uma solução consistente é possível somente se $e^{2\alpha} \propto (x-x_0)^{-1}$. Isso nada mais é do que a singularidade do tipo de Schwarzschild. Entretanto, é conhecido que tal singularidade na métrica não implica qualquer singularidade física da estrutura do espaço-tempo. Discutiremos a geometria do espaço-tempo implicada por nossa métrica com mais detalhes posteriormente. Temos que o comportamento de y e q próximo de $x = x_0$ é dado por $y \propto (x-x_0)^{1/2}$ e $q = \text{cte}$, respectivamente.

Escrevemos então

$$y = \sqrt{\rho} Z(\rho) \quad , \quad (1.4.14)$$

$$e^{-2\alpha} = \rho E(\rho) \quad , \quad (1.4.15)$$

onde $\rho \equiv x-x_0$ e Z e E são funções analíticas de ρ próximas de

$\rho = 0$. A fim de manter a ordem da singularidade, devemos ter $E(0) \neq 0$.

Inserindo as eqs. (1.4.14) e (1.4.15) nas eqs. (1.4.11-13), temos

$$Z'' = \rho^{-2} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2f^2 E} \left(\frac{q}{x^2} - \epsilon x v \right) \right] Z - \rho^{-1} \left\{ Z' + \frac{Z}{x} + \frac{1}{E} \left[Z + \frac{1}{f^2} \left(\frac{q}{x^2} - \epsilon x v \right) Z' \right] \right\} + \left(\frac{Z^3}{E} - \frac{2}{x} Z' \right), \quad (1.4.16)$$

$$E = \left(1 - \frac{1}{f^2} \frac{q}{x} \right) / \rho, \quad (1.4.17)$$

$$q' = \epsilon x^2 \left[\frac{1}{4} (Z + 2\rho Z')^2 E + v \right], \quad (1.4.18)$$

com

$$v = \frac{1}{2} (1 - \rho Z^2)^2 \quad (1.4.19)$$

A exigência de analiticidade de Z e E para $\rho = 0$ dão as seguintes condições de contorno:

$$\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2f^2 E} \left(\frac{q}{x^2} - \epsilon x v \right) \right]_{\rho=0} = 0, \quad (1.4.20)$$

$$Z(0) \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2f^2 E} \left(\frac{q}{x^2} - \epsilon x v \right) \right]_{\rho=0}' - \left\{ Z' + \frac{Z}{x} + \frac{1}{E} \left[Z + \frac{1}{f^2} \left(\frac{q}{x^2} - \epsilon x v \right) Z' \right] \right\}_{\rho=0} = 0, \quad (1.4.21)$$

e.

$$\left(1 - \frac{1}{f^2} \frac{q}{x}\right)_{\rho=0} = 0 \quad . \quad (1.4.22)$$

Por uma álgebra simples, obtemos os valores das funções no ponto $\rho = 0$, resultando

$$q(0) = f^2 x_0 \quad , \quad (1.4.23)$$

$$E(0) = \frac{1}{x_0} (2 - \epsilon x_0^2 f^{-2}) \quad , \quad (1.4.24)$$

e

$$x_0 f^{-2} Z^2(0) = -2\epsilon \quad . \quad (1.4.25)$$

Desde que x_0 , no nosso caso, $\bar{\epsilon}$ sempre positivo, concluímos da eq. (1.4.25) que só existe solução se $\epsilon = -1$. Assim as eqs. (1.4.25) e (1.4.24) tornam-se respectivamente

$$Z^2(0) = \frac{2}{x_0} f^2 \quad , \quad (1.4.26)$$

e

$$E(0) = \frac{1}{x_0} (2 + x_0^2 f^{-2}) \quad . \quad (1.4.27)$$

A primeira derivada de Z em $\rho = 0$, $Z'(0)$, $\bar{\epsilon}$ também calculada da eq. (1.4.21) como uma função de x_0 e f . Assim, para um dado valor de f , as soluções ficam completamente determinadas especificando-se x_0 . Por outro lado, a condição de contorno $y + 1$ para $x \rightarrow \infty$ forma um problema de autovalor para x_0 . Podemos notar que, se a condição de contorno $\bar{\epsilon}$ é satisfeita, a métrica $e^{2\alpha}$ automaticamente apresenta um comportamento assintótico de Schwarzschild $e^{2\alpha} \rightarrow (1-2m/x)^{-1}$ para $x \rightarrow \infty$, onde m é uma constante relacionada à massa do sistema. Desse modo, nosso potenci-

al, eq. (1.4.6), especifica completamente a massa sem introduzir qualquer constante de integração. Esse fato é para nós, sem dúvida, de grande importância como foi abordado no item 1.1.

As equações (1.4.16-18), junto com as condições de contorno para $x = x_0$, podem ser resolvidas numericamente. Para um dado valor de f , o valor de x_0 para o qual y satisfaz a condição de contorno no infinito é unicamente determinado. Na figura 1.4.1, são mostradas três soluções de y para diferentes valores de f , obtidas por Kodama (25).

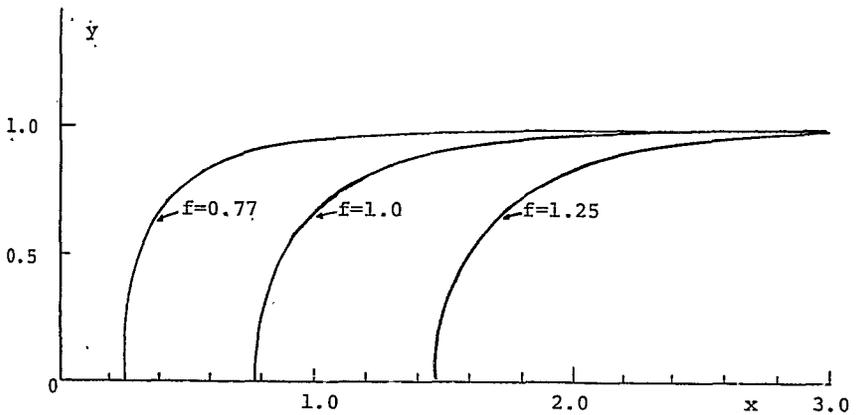


Fig. 1.4.1 - Soluções de y para $f = 0.77, 1.0$ e 1.25 plotadas contra x .

A típica dependência de q , $e^{2\eta}$ e $e^{-2\alpha}$ sobre x para o caso $f = 1.0$ é mostrada na fig. 1.4.2, obtida também por Kodama.

O valor assintótico de q , $q(\infty)$, está relacionado à massa M do sistema por

$$M = (f^{-2}/2\mu)(c^2/G)q(\infty) \quad , \quad (1.4.28)$$

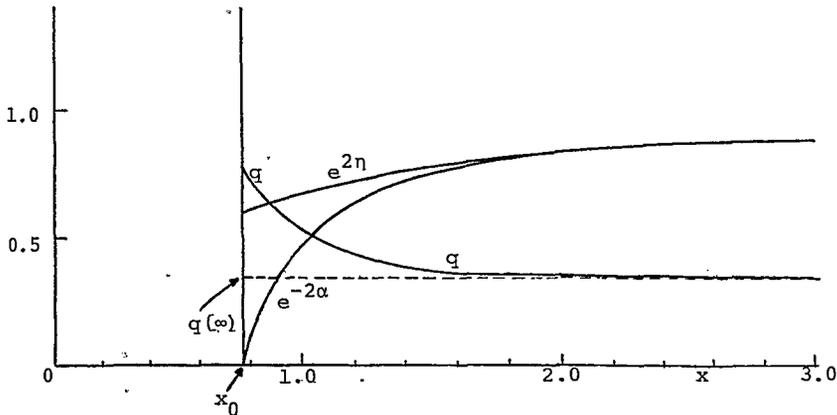


Fig. 1.4.2 - A função q e as métricas $e^{2\eta}$ e $e^{-2\alpha}$ plotadas em função de x para o caso $f = 1.0$. O valor assintótico de q , $q(\infty)$, define a massa do sistema.

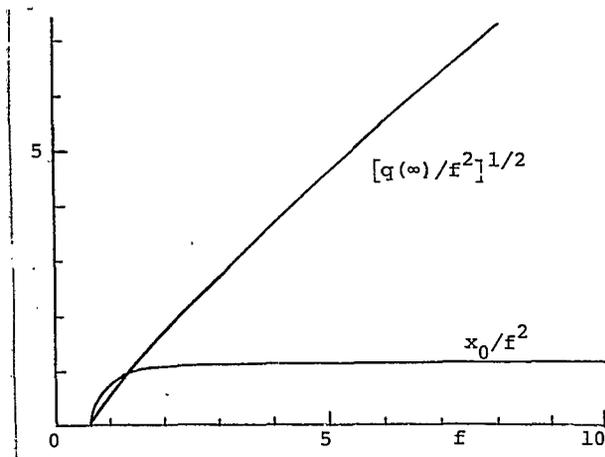


Fig. 1.4.3 - As quantidades $[f^{-2}q(\infty)]^{1/2}$ e x_0/f^2 plotadas em função de f .

onde $q(\infty)$ é uma função de f . Na fig. 1.4.3, mostra-se o plot, obtido por Kodama, das quantidades $[f^{-2}q(\infty)]^{1/2}$ e x_0/f^2 contra f . Notamos que a quantidade $[f^2q(\infty)]^{1/2}$ tende a zero li

nearmente, de modo que q se comporta como $q \sim (f-f_0)^2$ próximo de $f = f_0 \approx 0.645$. Parece que para $f < f_0$ não existe solução, embora isso ainda precise ser confirmado e só não o foi devido a dificuldades computacionais. Agora na quantidade x_0/f^2 encontrou-se que, para grandes f , x_0 se comporta como $x_0 \approx 1.3f^2$.

Uma solução analítica desse modelo foi encontrada por Clément⁽⁴⁵⁾, no caso limite ($\mu \rightarrow 0$, $f \rightarrow 2/\pi$) de um auto-acoplamento nulo do campo escalar. Entretanto, essa solução limite tem energia total zero.

O potencial métrico η pode ser obtido da equação

$$\eta' = \frac{1}{2} f^{-2} \left[e^{2\alpha} \left(\frac{q}{x^2} + xv \right) - xy'^2 \right]. \quad (1.4.29)$$

Em virtude das eqs. (1.4.20) e (1.4.26), podemos verificar que em η não existe nenhuma singularidade em $x = x_0$. Tomando a condição de contorno $\eta(\infty) = 0$, temos que

$$\dot{\eta} = - \frac{1}{2} f^{-2} \int_x^\infty \left[e^{2\alpha} \left(\frac{q}{x^2} + xv \right) - xy'^2 \right] dx. \quad (1.4.30)$$

Por causa do comportamento não singular da métrica $e^{2\eta}$ em $x = x_0$, a estrutura desse espaço-tempo é diferente daquela da solução de Schwarzschild, senão vejamos; O elemento de linha próximo a $r = r_0 \equiv x_0/\mu$ tem a forma

$$ds^2 \approx A(dx^0)^2 - \left[(1 - r_0/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (1.4.31)$$

ao invés de

$$ds^2 \approx (1-r_0/r)(dx^0)^2 - \left[(1-r_0/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (1.4.32)$$

onde A é uma constante ($0 < A < 1$). Para $r \gg r_0$, o elemento de linha tem a forma assintótica

$$ds^2 \approx (1-2m/r)(dx^0)^2 - \left[(1-2m/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (1.4.33)$$

Apesar da diferença acima, é fácil ver que essa geometria espacial ainda exibe uma estrutura topológica similar à ponte de Rosen-Einstein sobre uma hipersuperfície tipo espaço $x^0 = \text{const}$, i.e., dois espaços assintoticamente chatos conectados por uma ponte de raio r_0 . Assim, a raiz quadrada da variável ρ na eq. (1.4.14) é equivalente à coordenada u livre de singularidade de Rosen e Einstein, que foi usada para descrever a topologia da geometria de Schwarzschild. Podemos definir, mais especificamente,

$$u^2 = \rho$$

ou

$$x = x_0 + u^2. \quad (1.4.34)$$

Então, o elemento de linha é escrito como

$$ds^2 = e^{2\eta} (dx^0)^2 - \frac{4u^{-2}}{E(\rho)} (du)^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (1.4.35)$$

Desde que $e^{2\eta}$ e $E(\rho)$ são não singulares e não têm zeros para $0 \leq \rho < \infty$, esse elemento de linha é sempre regular.

Por outro lado, as equações geodésicas radiais são dadas por

$$\frac{d}{ds} \left(e^{2\eta} \frac{dx^0}{ds} \right) = 0, \quad (1.4.36)$$

$$\frac{d}{ds} \left(e^{2\alpha} \frac{dr}{ds} \right) = -\eta' e^{2\eta} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 + \alpha' e^{2\alpha} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2,$$

que se reduzem às seguintes equações para $u = u(s)$ e $x^0 = x^0(s)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 &= \frac{u^2 E}{4} (e^{-2\eta} - 1) \quad , \\ \frac{dx^0}{ds} &= e^{-2\eta} \quad . \end{aligned} \tag{1.4.37}$$

Das propriedades de $e^{-2\eta}$ e E , vemos facilmente que não existe comportamento singular para as geodésicas $u = u(s)$ e $x^0 = x^0(s)$. As geodésicas dadas pela eq. (1.4.37) conectam analiticamente as regiões $u > 0$ e $u < 0$. Assim, cada ponto do espaço-tempo é especificado por u ao invés de r . Para um dado r , correspondem dois pontos distintos no espaço-tempo, i.e., um para $u > 0$ e outro para $u < 0$. Tanto o espaço $u > 0$ quanto o espaço $u < 0$ são assintoticamente chatos e são conectados um ao outro pela ponte de Rosen-Einstein de raio r_0 . Entretanto, contrário ao caso da solução de Schwarzschild, a região $r < r_0$ está completamente desconectada desse espaço. As geodésicas conectam o espaço superior ($u > 0$) ao espaço inferior ($u < 0$), mas nunca penetram na região $r < r_0$. Além disso, a assinatura da variedade nessa região é zero, de modo que ela não corresponde ao espaço-tempo físico. Este ponto é fundamental nesse modelo, desde que não existe nada na região $r < r_0$ nem campo (matéria) nem espaço-tempo, desse modo a solução é completamente livre de singularidades.

Por outro lado, nós observamos que essa solução de campo $y = \sqrt{\rho} z(\rho)$ é uma parte de uma função inteira $y^2 = \rho z^2(\rho)$. A outra parte $y = -\sqrt{\rho} z(\rho)$ é também uma solução das equações de campo. Tomando o ramo $y = \sqrt{\rho} z(\rho)$ num espaço (digamos, $u > 0$) e o ramo $y = -\sqrt{\rho} z(\rho)$ no outro, temos então uma solução analí-

tica $y = uz(u^2)$ definida sobre a geometria espacial total ($-\infty < u < +\infty$). Concluímos assim que $y = uz(u^2)$ é uma extensão natural da solução de kink unidimensional usual nessa geometria, conectando os dois estados de vácuo de um espaço chato ($u \rightarrow +\infty$) a outro ($u \rightarrow -\infty$), através da ponte. Desse modo, vemos claramente como a introdução da relatividade geral alterou o teorema pseudo virial, i.e., alterou a estrutura do espaço-tempo, de modo a permitir que tenha sentido ter-se uma solução de kink indo de $+\infty$ a $-\infty$ num espaço físico real. A solução $y = uz(u^2)$ não é somente um kink no sentido usual, mas é também dobrada na parede da ponte.

Devemos enfatizar que a singularidade aparente em $e^{2\alpha}$ para $x = x_0$ não implica qualquer comportamento singular da geometria espacial. Mas, é devida à natureza topológica particular desse espaço, que é completamente não-singular em qualquer lugar. Com efeito, o invariante de curvatura calculou-se ser

$$\begin{aligned}
 I &\equiv R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} \\
 &= 4 \left[\left(v - \frac{2}{x} n' u^2 E \right)^2 + \frac{2}{x^4} (u^2 E n')^2 + f^{-4} \frac{q^2}{x^6} + \frac{1}{x^2} (E + u^2 E')^2 \right], \quad (1.4.38)
 \end{aligned}$$

que é não singular no espaço inteiro ($-\infty < u < +\infty$). A singularidade $x = 0$ nunca ocorre no espaço físico. Esta é a razão por que o raio da ponte de Rosen-Einstein é unicamente determinado, não introduzindo qualquer constante de integração arbitrária, quando os dois parâmetros μ e f na densidade de Lagrangeana original são especificados. O parâmetro μ^{-1} descreve a dimensão do sistema e f decide a massa do sistema, exceto pelo fator

de escala μ^{-1} na eq. (1.4.28). Se μ^{-1} não é extremamente pequeno ($\mu^{-1} > 10^{-53}$ cm), então o valor de f para dar a ordem de grandeza das massas de partículas elementares ($\approx 10^{-24}$ g) é praticamente f_0 . Num limite apropriado de $\mu^{-1} \rightarrow 0$ e $f \rightarrow f_0$, esse modelo contém uma partícula pontual com uma massa arbitrária M .

ESTABILIDADE DO MODELO GRK

Um ponto sobre o qual devemos chamar a atenção é que o campo escalar introduzido no modelo GRK é um campo fantasma, i.e., sua densidade de energia local é negativa-definida, apesar da energia total do sistema (massa total) ser positiva.

Em geral, os campos fantasmas podem trazer sérios problemas. Dentre eles, o mais fundamental é a possível instabilidade da solução. Esta instabilidade pode ser criada desde que o campo fantasma, como já dissemos acima, tem uma densidade de energia negativa-definida, a qual não é limitada inferiormente, podendo assim funcionar como um fornecedor ilimitado de energia ao resto do sistema. Deste modo, é de extrema importância estudarmos a estabilidade do modelo GRK.

Como iremos tratar de soluções dependentes no tempo, para estudar a estabilidade, é necessário introduzir um sistema de coordenadas que não contenha nenhuma singularidade. Isto permite a aplicação do método de perturbação, visto que com qualquer singularidade não podemos aplicar este método.

No caso de estabilidade contra perturbações radiais, existe este sistema de coordenadas, desde que a singularidade mostrada em $e^{2\alpha}$ para $x = x_0$ é aparente e a geometria, ela própria, é não singular em todo o espaço. Através de uma transformação de coordenadas conveniente, podemos colocar o elemento de li

nha dado pela eq. (1.4.2) na forma

$$ds^2 = e^{2h}(dx^0)^2 - dR^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.1)$$

onde agora $h = h(x^0, R)$ e $r = r(x^0, R)$. Para a métrica estática, a nova coordenada radial R é relacionada à coordenada r por

$$(dr/dR)^2 = e^{-2\alpha}. \quad (2.2)$$

Vamos agora reescrever as equações de Einstein, com essa nova métrica, usando a mesma densidade de Lagrangeana, equação (1.4.1), o mesmo potencial eq. (1.4.6) e introduzindo também quantidades e variáveis dimensionais

$$u = \mu R,$$

$$x = \mu r,$$

$$y = fs,$$

$$\tau = \mu ct,$$

$$v = (f/\mu)^2 V = \frac{1}{2} (1-y^2)^2.$$

Assim as equações ficam:

$$\frac{1}{x^2} (1-x'^2 + \dot{x}^2 e^{-2h}) - \frac{2}{x} x'' = -f^{-2} (\dot{y}^2 e^{-2h} + y'^2 + v), \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{x} (\dot{x}' - \dot{x}h') = f^{-2} \dot{y}y', \quad (2.4)$$

$$\frac{2}{x} \left\{ e^{-2h} (\ddot{x} - \dot{x}\dot{h}) - x'h' \right\} + \frac{1}{x^2} (1-x'^2 + \dot{x}^2 e^{-2h}) = f^{-2} (\dot{y}^2 e^{-2h} + y'^2 - v), \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{x} \left\{ e^{-2h} (\ddot{x} - \dot{x}\dot{h}) - x' h' \right\} - (h'' + h'^2) - \frac{x''}{x} = f^{-2} (\dot{y}^2 e^{-2h} - y'^2 - v) , \quad (2.6)$$

e

$$e^{-2h} \left\{ \ddot{y} + \dot{y} \left(\frac{2\dot{x}}{x} - \dot{h} \right) \right\} - \left\{ y'' + y' \left(h' + \frac{2x'}{x} \right) \right\} = -y \frac{dv}{dy^2} , \quad (2.7)$$

onde o ponto e a linha significam a derivada em relação a τ e u , respectivamente.

O GRK estático satisfaz então as seguintes equações:

$$\frac{1}{x^2} (1 - \bar{x}'^2) - \frac{2}{x} \bar{x}'' = -f^{-2} (\bar{y}'^2 + \bar{v}) , \quad (2.8)$$

$$-\frac{2}{x} \bar{x}' \bar{h}' + \frac{1}{x^2} (1 - \bar{x}'^2) = f^{-2} (\bar{y}'^2 - \bar{v}) , \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{x} \bar{x}' \bar{h}' + (\bar{h}'' + \bar{h}'^2) + \frac{\bar{x}''}{x} = f^{-2} (\bar{y}'^2 + \bar{v}) , \quad (2.10)$$

e

$$\bar{y}'' + \bar{y}' \left(\bar{h}' + \frac{2\bar{x}'}{x} \right) = \bar{y} \frac{d\bar{v}}{d\bar{y}^2} , \quad (2.11)$$

onde colocamos barra para as quantidades estáticas a fim de distinguí-las das quantidades dependentes do tempo.

Nessa forma, a vantagem do novo sistema de coordenadas torna-se evidente. Todas as quantidades \bar{x} , \bar{y} e \bar{h} são funções analíticas de u e não contêm nenhum comportamento singular. Este fato nos permite resolver numericamente as equações com alta precisão (46).

O conjunto de equações eq. (2.3) a eq. (2.7) é necessário quando queremos, por exemplo, estudar o problema da estabilidade da solução. Aqui discutiremos somente a estabilidade do GRK contra perturbações radiais. Primeiro colocamos

$$x(\tau, u) = \bar{x}(u) + \delta x(\tau, u) \quad , \quad (2.12)$$

$$y(\tau, u) = \bar{y}(u) + \delta y(\tau, u) \quad , \quad (2.13)$$

$$h(\tau, u) = \bar{h}(u) + \delta h(\tau, u) \quad , \quad (2.14)$$

onde \bar{x} , \bar{y} e \bar{h} são soluções estáticas obtidas antes e δx , δy e δh são perturbações infinitesimais. Substituindo essas expressões nas eqs. (2.3 - 7) e desprezando termos de ordens mais altas em δ , temos

$$\frac{\bar{x}'}{x^2} \delta x' + \frac{1}{x^3} (1 - \bar{x}'^2) \delta x - \frac{\bar{x}''}{x^2} \delta x + \frac{1}{x} \delta x'' = f^{-2} (\bar{y}' \delta y' + \bar{y} \frac{dv}{dy^2} \delta y) \quad , \quad (2.15)$$

$$\delta \dot{x}' - \bar{h}' \delta \dot{x} = f^{-2} \bar{x} \bar{y}' \delta \dot{y} \quad , \quad (2.16)$$

$$\delta h'' + 2\bar{h}' \delta h' + \frac{2}{x} \delta x'' - \frac{2\bar{x}''}{x^2} \delta x = 2f^{-2} (2\bar{y}' \delta y' + \bar{y} \frac{dv}{dy^2} \delta y) \quad , \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} (e^{-2\bar{h}} \delta \ddot{x} - \bar{h}' \delta x' - \bar{x}' \delta h') + \frac{1}{x^2} \bar{x}' \bar{h}' \delta x - \frac{1}{x^3} (1 - \bar{x}'^2) \delta x - \\ - \frac{\bar{x}'}{x^2} \delta x' = f^{-2} (\bar{y}' \delta y' - \bar{y} \frac{dv}{dy^2} \delta y) \quad , \quad (2.18) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e^{-2\bar{h}} \delta \ddot{y} - \left[\delta y'' + (\bar{h}' + \frac{2\bar{x}'}{x}) \delta y' + \bar{y}' (\delta h' - \frac{2\bar{x}'}{x^2} \delta x' + \frac{2}{x} \delta x'') \right] = \\ = - \frac{d}{dy} (\bar{y} \frac{dv}{dy^2}) \delta y \quad . \quad (2.19) \end{aligned}$$

Verificamos, contudo, que as eqs. (2.15) e (2.16) não são independentes dado que \bar{x} , \bar{y} e \bar{h} satisfazem as eqs.(2.8-11). Assim, somente 3 equações são independentes entre as eqs.(2.15-19),

visto que a eq. (2.19) (identidade de Bianchi) não é independente das demais.

Para investigar a estabilidade dessas perturbações radiais, nós procuramos uma solução de modo normal do tipo

$$\delta x(\tau, u) = e^{i\omega\tau} X(u) \quad (2.20)$$

$$\delta y(\tau, u) = e^{i\omega\tau} Y(u) \quad , \quad (2.21)$$

$$\delta h(\tau, u) = e^{i\omega\tau} H(u) \quad (2.22)$$

Então ficamos com as seguintes equações:

$$X' - \bar{h}' X = f^{-2} \bar{x} \bar{y}' Y \quad , \quad (2.23)$$

$$H'' + 2h'H' + \frac{2}{x} X'' - \frac{2\bar{x}''}{\bar{x}^2} X = 2f^2 (2\bar{y}'Y' + \bar{y} \frac{dv}{d\bar{y}^2} Y) \quad , \quad (2.24)$$

e

$$Y'' + (h + \frac{2\bar{x}'}{\bar{x}})Y' + \bar{y}'(H' - \frac{2\bar{x}'}{\bar{x}^2} X + \frac{2}{x} X') + \left[\omega^2 e^{-2\bar{h}} - \frac{d}{d\bar{y}} \left(\bar{y} \frac{dv}{d\bar{y}^2} \right) \right] Y = 0 \quad . \quad (2.25)$$

Essas equações podem ser resolvidas numericamente de $u = 0$ até ∞ , quando as condições iniciais para $u = 0$ são dadas. A condição de contorno é que X , Y e H são finitos sempre incluindo $u \rightarrow \infty$. Sob essa condição de contorno, as eqs. (2.23) e (2.25) formam um problema de autovalor para ω^2 . Se todos os autovalores de ω^2 forem positivos, então o sistema será estável contra perturbações radiais e δx , δy e δh serão funções oscilatórias em τ . Ao contrário, se existir pelo menos um valor

negativo para ω^2 , então o sistema será instável contra perturbações radiais e δx , δy e δh serão funções não ligadas em τ .

Antes de calcularmos os autovalores, é conveniente estudar algumas propriedades analíticas das soluções. Primeiro, notamos que, como as soluções estáticas \bar{x} , \bar{y} e \bar{h} tem paridade definida sob a transformação $u \rightarrow -u$ (\bar{x} e \bar{h} são funções pares e \bar{y} é função ímpar de u , veja fig. 2.1), X , Y e H também terão uma paridade definida. Elas podem ser classificadas em dois casos

caso (a): X e H são pares, Y é ímpar

caso (b): X e H são ímpares, Y é par.

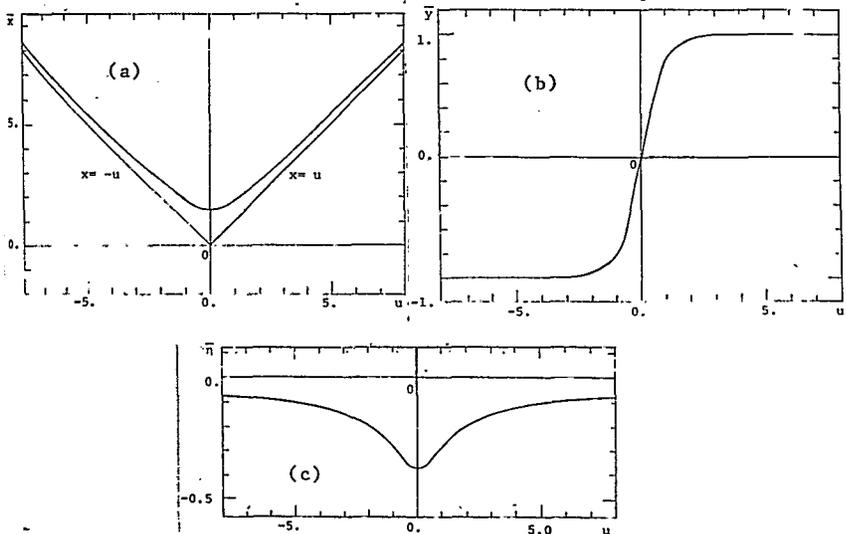


Fig. 2.1 - Solução estática do GRK. a) Coordenada radial \bar{x} como uma função de u . b) Campo escalar \bar{y} como uma função de u . Dessa figura, a propriedade de kink da solução é evidente. c) Expoente métrico \bar{h} como uma função de u . O valor de f é tomado como 1.25.

Para $u = 0$, devemos ter da eq. (2.18)

$$X(0) = - \frac{f^{-2} x_0^3 \bar{y}(0)}{1 + \omega^2 x_0^2 e^{-2\bar{h}(0)}} Y'(0) .$$

Podemos então escolher as condições iniciais

$$\text{caso (a)} \left\{ \begin{array}{l} Y(0) = 0 , \\ Y'(0) = 1 , \\ H'(0) = 0 , \\ X(0) = - \frac{f^{-2} x_0^3 \bar{y}(0)}{1 + \omega^2 x_0^2 e^{-2\bar{h}(0)}} , \end{array} \right. \quad (2.26)$$

e

$$\text{caso (b)} \left\{ \begin{array}{l} Y(0) = 1 , \\ Y'(0) = 0 , \\ H'(0) = \alpha , \\ X(0) = 0 , \end{array} \right. \quad (2.27)$$

onde usamos o fato de que as equações são lineares, de modo que podemos fixar o fator de escala, e α é uma constante que deve ser determinada dos valores assintóticos de X , Y e H' de acordo com as condições de contorno.

Por outro lado, como $\bar{y} \rightarrow 1$, $\bar{y}' \rightarrow 0$, $\bar{x} \rightarrow u$, $\bar{x}' \rightarrow (1 - \text{const}/u)$, $e^{-2\bar{h}} \rightarrow (1 - \text{const}/u)$, as propriedades assintóticas de X , Y e H são

$$Y \rightarrow \begin{cases} e^{\pm \text{const} \cdot u} & \text{para } \omega^2 \leq 2 , \\ \text{sen}(\text{const} \cdot u + \delta) & \text{para } \omega^2 \geq 2 , \end{cases} \quad (2.28)$$

$$X \rightarrow \text{const.} \cdot e^{+\bar{h}} , \quad (2.29)$$

$$H' \rightarrow \text{const.} \cdot e^{-2\bar{h}} , \quad (2.30)$$

onde somente os termos mais baixos são mantidos.

Podemos agora calcular numericamente os autovalores. Com o auxílio da eq. (2.26) ou (2.27), resolvemos as eqs.(2.23-25) de $u = 0$ a ∞ . Analisaremos primeiro o caso (a). Neste caso ω^2 é o único parâmetro para determinar o comportamento assintótico de X , Y e H . Pela eq. (2.29), vemos que a condição de contorno para X é sempre satisfeita. Tem-se que a condição de contorno para Y é satisfeita somente para um particular valor de ω^2 que está entre 0 e 2, ou para qualquer valor de $\omega^2 \geq 2$. Entretanto, qualquer valor finito de ω^2 dá sempre um valor assintótico positivo de H' . Isso significa que o elemento da métrica perturbado e^{2H} aumenta exponencialmente em u , de modo que não existe nenhum valor finito de ω^2 para o qual as condições de contorno são sempre satisfeitas. Assim, concluímos que a solução para o caso (a) é proibida.

Temos uma situação diferente no caso (b). Aqui, existem dois parâmetros para determinarmos o comportamento assintótico de X , Y e H , que são ω^2 e α . A condição de contorno para X é sempre satisfeita também. Para $\omega^2 < 2$ a função Y satisfaz a condição de contorno para um único valor de α , digamos $\alpha_1(\omega^2)$. Para $\omega^2 > 2$, Y é oscilatória em u , satisfazendo a condição de contorno independente de α . Por outro lado, o valor assintótico de H' deve ser zero, e isso ocorre para um único valor de α , digamos $\alpha_2(\omega^2)$. O autovalor ω^2 é obtido então da seguinte condição:

$$\alpha_1(\omega^2) = \alpha_2(\omega^2) \quad (2.31)$$

Na fig. 2.2, ilustramos $\alpha_1(\omega^2)$ e $\alpha_2(\omega^2)$ para $f=1.25$. Assim, os autovalores são 0 e qualquer, para $\omega < 2$ e $\omega \geq 2$ respectivamente.

O autovalor nulo é consequência da invariância translacional da solução estática, visto que na sua construção permanece um grau de liberdade para fixar a origem da coordenada u . Portanto, as eqs. (2.8-11) são invariantes sob a transformação $u \rightarrow u' = u + \text{const.}$ Sob esta transformação, as soluções estáticas são

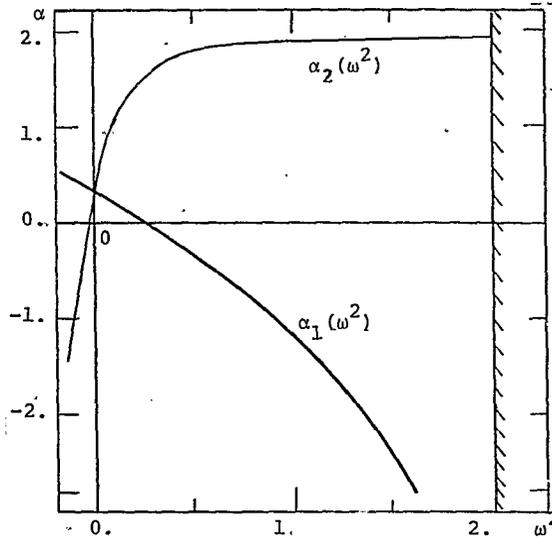


Fig. 2.2 - Plot das funções $\omega_1(\alpha)$ e $\omega_2(\alpha)$ no plano α - ω para $f=1.25$. O autovalor discreto é obtido da interseção das duas curvas, i.e. $\omega=0$. Para $\omega \geq 2$ os autovalores são contínuos.

deslocadas na coordenada u , mas permanecem invariantes na coordenada r . Tal transformação é uma espécie de transformação de calibre do tensor métrico. Para $\omega^2 = 0$, as funções X , Y e H satisfazem as mesmas equações de condições de contorno para \bar{x}' , \bar{y}' e \bar{h}' , respectivamente.

Assim concluímos que

$$\begin{aligned} X &= \epsilon \bar{x}' \quad , \\ Y &= \epsilon \bar{y}' \quad , \\ H &= \epsilon \bar{h}' \quad , \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde ϵ é uma constante infinitesimal. As soluções perturbadas são

$$\begin{aligned} x(\tau, u) &= \bar{x}(u) + \epsilon \bar{x}'(u) = \bar{x}(u + \epsilon) \quad , \\ y(\tau, u) &= \bar{y}(u) + \epsilon \bar{y}'(u) = \bar{y}(u + \epsilon) \quad , \\ h(\tau, u) &= \bar{h}(u) + \epsilon \bar{h}'(u) = \bar{h}(u + \epsilon) \quad , \end{aligned} \quad (2.33)$$

mostrando que o autovalor nulo de ω^2 corresponde as translações das soluções estáticas em u .

Vimos assim que o modelo GRK é estável, pelo menos em relação a perturbações radiais.

Devemos chamar a atenção para o fato de que essa estabilidade contra perturbações radiais não implica uma estabilidade total do modelo. De fato, outros modos de perturbações devem ser estudadas tais como deformações, etc. O estudo de tais modos está em andamento.

Para terminar este capítulo, vamos fornecer algumas implicações físicas do modelo GRK. Vimos que a solução GRK tem a propriedade de kink e que ela é estável pelo menos em relação a perturbações radiais. A sua estrutura geométrica é essencialmente vista como uma ponte que conecta duas folhas de espaços assintoticamente Minkowskianos. Na região assintótica de uma das folhas, o GRK comporta-se como uma concentração de massa. Como essa geometria é completamente não-singular e as linhas geodésicas

conectam analiticamente as duas folhas do espaço, um sinal de luz pode passar através da ponte. Em geral, qualquer espécie de fluxo de campo pode passar através da ponte de um lado ao outro das folhas. Desse modo, sempre que a corrente de fluxo for localmente conservada, por definição, a existência de tal ponte para um observador numa das folhas aparece como uma fonte ou sumidouro do fluxo de campo. Além disso, nesta visão, a corrente de campo definida numa das folhas tem necessariamente o sentido contrário quando observada na outra folha. Nesse aspecto, uma ponte com uma corrente de campo passando através dela é vista em uma das folhas como uma partícula com a massa do GRK e com a carga correspondendo à corrente, ao passo que ela é vista na outra folha como a sua antipartícula.

Este esquema na verdade não é novo, como já vimos, e foi primeiro introduzido por Wheeler na sua interpretação geométrica da carga elétrica (47,48). Vale ressaltar novamente que o modelo GRK é um pouco diferente do de Wheeler, desde que aqui o campo escalar gera automaticamente a estrutura topológica particular do espaço-tempo. A existência de um GRK estável nos sugere uma possibilidade interessante de generalizar as idéias de Wheeler. O fato é que podemos supor que nosso universo é composto de duas folhas de espaço conectadas por várias pontes. Essas pontes são caracterizadas como partículas ou antipartículas, dependendo da corrente de campo bem como da sua direção ao passar através dela. As correntes de campo circulam de uma ponte à outra satisfazendo a conservação local de correntes. Assim, a Lagrangeana não contém nenhum termo de fonte para esses campos. Tal abordagem, pelo menos ao nível clássico, deve fornecer um modelo de campo de partículas elementares livre de singularidades,

incluindo o conceito de antipartículas.

A idéia de que pelas pontes podem passar correntes de campos levou-nos a pensar na possibilidade de que o GRK pudesse confinar essas correntes no sentido de termos, associadas ao GRK, as propriedades relacionadas a estas correntes. Com esse objetivo, introduziremos nesse "background" do GRK o campo de Dirac, que discutiremos no capítulo seguinte.

CAPÍTULO . 3

O CAMPO DE DIRAC NO "BACKGROUND" DO GRK

Basicamente, existem duas propostas de continuação de trabalho no capítulo anterior. A primeira delas é que o GRK pode fazer o papel de aprisionador de outro qualquer campo, por exemplo, o campo espinorial ou o campo eletromagnético. A principal consequência disto é que podemos, ao nível clássico, associar as propriedades desses campos, por exemplo o spin, ao GRK. A segunda proposta é que, se tratamos esses campos como fluxo de correntes, podemos, dependendo do sentido deste, representar tanto as partículas quanto as suas antipartículas, também classicamente.

A fim de estudar estas propostas, utilizaremos o campo espinorial (Dirac) e o introduziremos no "background" do GRK, na esperança de obter um modelo clássico para partícula que tenha a propriedade de spin 1/2. Desse modo, devemos tratar a equação de Dirac num espaço-tempo curvo. Uma brilhante introdução a esse tema está contida no trabalho de Brill e Wheeler⁽⁴⁹⁾. Para outras referências sobre esse tópico ver I. Soares^(50,51).

Sabemos que a conexão fundamental entre espaço e spin é feita através de um campo de matrizes γ de Dirac que satisfaz a relação de anticomutação

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1} \quad (3.1)$$

para cada ponto no espaço, onde $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico e Π é a matriz unitária. Vemos que este campo de matrizes constitui uma álgebra de Clifford associada à métrica $g^{\mu\nu}$.

A definição de γ^μ dada pela eq. (3.1) pode ser sempre preenchida por uma combinação linear das matrizes $\tilde{\gamma}$ da relatividade especial. Estas são matrizes constantes que satisfazem as condições

$$\tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu \tilde{\gamma}^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \Pi \quad (3.2)$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ é o tensor métrico no espaço-tempo Minkowskiano. Assim, para cada ponto x no espaço-tempo, é possível transformar das coordenadas gerais x^μ para um sistema \tilde{x}^μ (tetrada), cuja métrica é Minkowskiana para cada ponto:

$$dx^\mu = a^\mu_\nu d\tilde{x}^\nu, \quad d\tilde{x}^\mu = b^\mu_\beta dx^\beta$$

Então a eq. (3.1) é satisfeita por

$$\gamma^\mu = b^\mu_\alpha \tilde{\gamma}^\alpha. \quad (3.3)$$

Para as matrizes de Dirac constantes, usaremos uma representação ⁽⁵³⁾ onde

$$(\tilde{\gamma}^\mu)^\dagger = \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^0$$

com

$$(\tilde{\gamma}^0)^2 = -(\tilde{\gamma}^k)^2 = \Pi, \quad k = 1, 2, 3$$

e

$$\bar{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \bar{\gamma}^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}$$

com

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

A assinatura da métrica é tomada igual a -2.

A principal característica do formalismo matemático aplicado a espinores é a definição de diferenciação covariante, que é a generalização natural da diferenciação covariante de análise tensorial. Isto é feito para que a derivada de um espinor mantenha seu caráter espinorial após ter sofrido um deslocamento paralelo. Assim, em adição aos símbolos de Christoffel usuais, $\{\overset{\sigma}{\Gamma}_{\mu\nu}\}$, formados da métrica $g^{\mu\nu}$, é necessário introduzir quatro matrizes Γ_{ν} de 4 x 4. Essas matrizes são nada mais do que as afinidades espinoriais e são comumente conhecidas como coeficientes espinoriais de Fock-Ivanenko. Dessa forma, a derivada covariante de um espinor é dada por

$$\nabla_{\mu} \psi = (\partial_{\mu} - \Gamma_{\mu}) \psi \quad , \quad (3.4)$$

onde $\partial_{\mu} \equiv \partial/\partial x^{\mu}$ é a derivação normal.

Com isso, podemos escrever a equação de Dirac:

$$\gamma^{\mu} (\partial_{\mu} - \Gamma_{\mu}) \psi + im_D \psi = 0 \quad , \quad (3.5)$$

onde m_D é um parâmetro.

No caso em que a geometria é esfericamente simétrica e estática, temos

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

onde η e α são funções apenas da coordenada radial r .

Aqui as coordenadas são $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ e $x^3 = \phi$. A fim de escrever a equação de Dirac nesta métrica, nós escolhemos um campo de matrizes γ do tipo da eq. (3.3). Duas escolhas para essas matrizes são simples: (1) escolhemos os eixos de tetrada paralelos aos eixos r , θ e ϕ em cada ponto, de modo que as matrizes γ^μ desejadas são expressas, em termos das matrizes de Dirac constantes $\tilde{\gamma}^\mu$, para um sistema de coordenadas cartesianas, pelas fórmulas

$$\gamma^0 = e^{-\eta}\tilde{\gamma}^0, \quad \gamma^1 = e^{-\alpha}\tilde{\gamma}^1, \quad \gamma^2 = r^{-1}\tilde{\gamma}^2, \quad \gamma^3 = (r\text{sen}\theta)^{-1}\tilde{\gamma}^3$$

ou (2) escolhemos os eixos de tetrada paralelos a algum sistema de coordenadas retangulares:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= e^{-\eta}\tilde{\gamma}^0 \\ \gamma^1 &= e^{-\alpha}(\text{sen}\theta \cos\phi\tilde{\gamma}^1 + \text{sen}\theta \text{sen}\phi\tilde{\gamma}^2 + \cos\theta\tilde{\gamma}^3) \\ \gamma^2 &= r^{-1}(\cos\theta \cos\phi\tilde{\gamma}^1 + \cos\theta \text{sen}\phi\tilde{\gamma}^2 - \text{sen}\theta\tilde{\gamma}^3) \\ \gamma^3 &= (r\text{sen}\theta)^{-1}(-\text{sen}\phi\tilde{\gamma}^1 + \cos\phi\tilde{\gamma}^2) \end{aligned} \quad (3.7)$$

As duas escolhas conduzem à mesma equação radial, mas

a uma dependência diferente das componentes da função de onda espinorial sobre os ângulos. Vamos mostrar os cálculos explicitamente para a escolha nº (2).

Primeiramente temos que calcular os coeficientes de Fock-Ivanenko Γ_μ . Temos que a expressão explícita para esses coeficientes é dada por (51)

$$\Gamma_\mu = A_\mu \mathbb{1} - \frac{1}{8} \left[\gamma^\alpha (\partial_\mu \gamma_\alpha) - (\partial_\mu \gamma_\alpha) \gamma^\alpha - \{\alpha\mu\}^\rho (\gamma^\alpha \gamma_\rho - \gamma_\rho \gamma^\alpha) \right] \quad (3.8)$$

onde A_μ é um campo vetorial real arbitrário. Podemos tomar $A_\mu = 0$ sem perda de generalidade (51). Os $\{\alpha\mu\}^\rho$ são os símbolos de Christoffel. Com a métrica dada pela eq. (3.6), os únicos símbolos não nulos são: $\{11\}^1$, $\{22\}^1$, $\{33\}^1$, $\{00\}^1$, $\{12\}^2$, $\{33\}^2$, $\{13\}^3$, $\{23\}^3$ e $\{10\}^0$. Devemos notar que

$$\{\mu\alpha\}^\rho = \{\alpha\mu\}^\rho$$

Explicitamente temos:

$$\{\mu\alpha\}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (g_{\lambda\mu,\alpha} + g_{\lambda\alpha,\mu} - g_{\mu\alpha,\lambda})$$

mas, como $g^{\rho\lambda}$ tem somente elementos não nulos na diagonal podemos reescrever os símbolos de Christoffel por

$$\{\mu\alpha\}^\rho = \frac{1}{2} \frac{1}{g_{\rho\rho}} \left(-\frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\rho\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\rho\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\rho} g_{\mu\alpha} \right) \quad (3.9)$$

Assim

$$\{11\}^1 = \alpha' ; \{22\}^1 = -re^{-2\alpha} ; \{33\}^1 = -re^{-2\alpha} \sin^2 \theta ; \{00\}^1 = n' e^{2(\eta-\alpha)} ;$$

$$\{12\}^2 = r^{-1} ; \{33\}^2 = -\sin\theta \cos\theta ; \{13\}^3 = r^{-1} ; \{23\}^3 = \cot\theta \text{ e } \{10\}^0 = n' .$$

Introduzindo essas expressões na eq. (3.8), obtemos os coeficientes de Fock-Ivanenko que são:

$$\Gamma_0 = -\frac{1}{2} n' e^{-\alpha} (\text{sen}\theta \cos\phi \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^1 + \text{sen}\theta \text{sen}\phi \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^2 + \cos\theta \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^3) \quad (3.10)$$

$$\Gamma_1 = 0 \quad (3.11)$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2} (e^{-\alpha} - 1) (\cos\phi \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^3 + \text{sen}\phi \tilde{\gamma}^2 \tilde{\gamma}^3) \quad (3.12)$$

$$\Gamma_3 = \frac{1}{2} (1 - e^{-\alpha}) \text{sen}\theta (\text{sen}\theta \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^2 + \cos\theta \text{sen}\phi \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^3 - \cos\theta \cos\phi \tilde{\gamma}^2 \tilde{\gamma}^3). \quad (3.13)$$

Podemos agora escrever explicitamente a eq. de Dirac , eq. (3.5):

$$\left[\tilde{\gamma}^0 (\partial_0 - \Gamma_0) + \tilde{\gamma}^1 (\partial_1 - \Gamma_1) + \tilde{\gamma}^2 (\partial_2 - \Gamma_2) + \tilde{\gamma}^3 (\partial_3 - \Gamma_3) + im \right] \psi = 0 \quad (3.14)$$

Mas, temos que

$$\tilde{\gamma}^0 (\partial_0 - \Gamma_0) = e^{-\alpha} \tilde{\gamma}^0 \partial_0 + \frac{1}{2} n' e^{-\alpha} (e_r \cdot \tilde{\gamma}) \quad (3.15)$$

$$\tilde{\gamma}^1 (\partial_1 - \Gamma_1) = e^{-\alpha} (e_r \cdot \tilde{\gamma}) \partial_r \quad (3.16)$$

$$\tilde{\gamma}^2 (\partial_2 - \Gamma_2) = \frac{1}{r} (e_\theta \cdot \tilde{\gamma}) \partial_\theta + \frac{1}{2r} (e^{-\alpha} - 1) (e_r \cdot \tilde{\gamma}) \quad (3.17)$$

$$\tilde{\gamma}^3 (\partial_3 - \Gamma_3) = \frac{1}{r \text{sen}\theta} (e_\phi \cdot \tilde{\gamma}) \partial_\phi + \frac{1}{2r} (e^{-\alpha} - 1) (e_r \cdot \tilde{\gamma}) \quad , \quad (3.18)$$

onde

$$(e_r \cdot \tilde{\gamma}) = \text{sen}\theta \cos\phi \tilde{\gamma}^1 + \text{sen}\theta \text{sen}\phi \tilde{\gamma}^2 + \cos\theta \tilde{\gamma}^3$$

$$(e_\theta \cdot \tilde{\gamma}) = \cos\theta \cos\phi \tilde{\gamma}^1 + \cos\theta \text{sen}\phi \tilde{\gamma}^2 - \text{sen}\theta \tilde{\gamma}^3$$

$$(e_\phi \cdot \tilde{\gamma}) = -\text{sen}\phi \tilde{\gamma}^1 + \cos\phi \tilde{\gamma}^2.$$

Assim a eq. (3.14) torna-se:

$$\left\{ e^{-\eta\tilde{\gamma}^0} \partial_0 + e^{-\alpha} (\mathbf{e}_r \cdot \tilde{\gamma}) \partial_r + \frac{1}{r} (\mathbf{e}_\theta \cdot \tilde{\gamma}) \partial_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} (\mathbf{e}_\phi \cdot \tilde{\gamma}) \partial_\phi + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2} \eta' e^{-\alpha} + \frac{1}{r} (e^{-\alpha} - 1) \right] (\mathbf{e}_r \cdot \tilde{\gamma}) + i m_D \right\} \psi = 0 \quad (3.19)$$

Estamos interessados na equação radial. Dessa forma, de vemos melhorar a equação acima do seguinte modo.

Vamos tentar primeiro separar a parte angular. Para is so, fazemos

$$\left\{ e^{-\eta\tilde{\gamma}^0} \partial_0 + (e^{-\alpha} - 1) \tilde{\gamma}_r \partial_r + \tilde{\gamma}_r \partial_r + \frac{1}{r} \tilde{\gamma}_\theta \partial_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \tilde{\gamma}_\phi \partial_\phi + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2} \eta' e^{-\alpha} + \frac{1}{r} (e^{-\alpha} - 1) \right] \tilde{\gamma}_r + i m_D \right\} \psi = 0 \quad (3.20)$$

onde

$$\tilde{\gamma}_r \equiv (\mathbf{e}_r \cdot \tilde{\gamma}) \quad ; \quad \tilde{\gamma}_\theta \equiv (\mathbf{e}_\theta \cdot \tilde{\gamma}) \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma}_\phi \equiv (\mathbf{e}_\phi \cdot \tilde{\gamma}) .$$

Assim, temos

$$\left\{ e^{-\eta\tilde{\gamma}^0} \partial_0 + (e^{-\alpha} - 1) \tilde{\gamma}_r \partial_r + \tilde{\gamma} \cdot \nabla + \left[\frac{1}{2} \eta' e^{-\alpha} + \frac{1}{r} (e^{-\alpha} - 1) \right] \tilde{\gamma}_r + i m_D \right\} \psi = 0 \quad (3.21)$$

mas

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} \cdot \nabla &= i \tilde{\gamma} \cdot \mathbf{P} \\ &= i \tilde{\gamma}^0 \alpha \cdot \mathbf{P} \\ &= i \tilde{\gamma}^0 \left(-i \alpha_r \partial_r + i \frac{\alpha_r}{r} \alpha \cdot \mathbf{L} \right) \\ &= \tilde{\gamma}_r \partial_r - \frac{\tilde{\gamma}_r}{r} \alpha \cdot \mathbf{L} \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde usamos

$$\tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma} = \alpha = -\tilde{\gamma}_5 \sigma.$$

Substituindo a eq. (3.22) na eq. (3.21) obtemos:

$$\left\{ e^{-n\tilde{\gamma}^0 \partial_0} + e^{-\alpha \tilde{\gamma}_r \partial_r} - \frac{1}{r} \tilde{\gamma}_r \sigma \cdot \ell + \left[\frac{1}{2} n' e^{-\alpha} + \frac{1}{r} (e^{-\alpha} - 1) \right] \tilde{\gamma}_r + i m_D \right\} \psi = 0 \quad (3.23)$$

Podemos colocar esta equação na forma $H\psi = E\psi$, resultando

$$e^{-n\tilde{\gamma}^0 \partial_0} \psi = - \left\{ e^{-\alpha \tilde{\gamma}_r \partial_r} - \frac{1}{r} \tilde{\gamma}_r \sigma \cdot \ell + \left[\frac{1}{2} n' e^{-\alpha} + \frac{1}{r} (e^{-\alpha} - 1) \right] \tilde{\gamma}_r + i m_D \right\} \psi. \quad (3.24)$$

Multiplicando ambos os membros da equação acima por i e fazendo algumas substituições temos

$$i e^{-n\partial_0} \psi = i \tilde{\gamma}_5 \sigma_r \left[e^{-\alpha \partial_r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{2} n' e^{-\alpha} - \frac{1}{r} \tilde{\gamma}^0 K + \frac{1}{r} (e^{-\alpha} - 1) \right] \psi + m_D \tilde{\gamma}^0 \psi \quad (3.25)$$

onde

$$\tilde{\gamma}^0 K = \sigma \cdot \ell + 1$$

e podemos notar que o operador K carrega toda a parte angular e satisfaz a $K\psi = \kappa\psi$ (52).

Usamos o ansatz

$$\psi = \frac{1}{r} e^{-\frac{1}{2} n(r)} \phi(r) e^{-iEt}$$

Com isto, a eq. (3.25) reduz-se a

$$E e^{-n\phi} = i \tilde{\gamma}_5 \sigma_r \left(e^{-\alpha \partial_r} - \frac{1}{r} \tilde{\gamma}^0 K \right) \phi + m_D \tilde{\gamma}^0 \phi \quad (3.26)$$

Escrevendo

$$\Phi = \begin{pmatrix} G\chi_{\kappa}^{\mu} \\ iF\chi_{-\kappa}^{\mu} \end{pmatrix}$$

e observando que o operador $i\tilde{\gamma}_5\sigma_r$ atua nos espinores da seguinte forma,

$$i\tilde{\gamma}_5\sigma_r\chi_{\kappa}^{\mu} = -\chi_{-\kappa}^{\mu}$$

e

$$i\tilde{\gamma}_5\sigma_r\chi_{-\kappa}^{\mu} = \chi_{\kappa}^{\mu}$$

e tomando também a forma explícita de $\tilde{\gamma}^0$, obtemos finalmente as equações radiais, que são:

$$\frac{dG}{dr} = e^{\alpha} \left[-\frac{\kappa}{r} G + (Ee^{-\eta} + m_D)F \right] \quad (3.29)$$

e

$$\frac{dF}{dr} = e^{\alpha} \left[\frac{\kappa}{r} F - (Ee^{-\eta} - m_D)G \right] \quad (3.30)$$

Para estudarmos estas equações na geometria do GRK, é conveniente efetuarmos primeiro uma transformação de coordenadas para um sistema de coordenadas que descreva a geometria do GRK sem singularidades,

$$(dr/dr)^2 = e^{-2\alpha}$$

e utilizaremos as variáveis do capítulo anterior.

Dessa forma, podemos reescrever as equações radiais (3.29) e (3.30) como se segue:

$$\frac{dG}{du} = \left[-\frac{\kappa}{x} G + (\bar{E}e^{-\eta} + \bar{m}_D)F \right] \quad (3.31)$$

e

$$\frac{dF}{du} = \left[\frac{\kappa}{x} F - (\bar{E}e^{-\eta} - \bar{m}_D)G \right], \quad (3.32)$$

onde $\bar{m}_D = m_D/\mu$, $\bar{E} = E/\mu$ dado que $u = \mu R$ e $x = \mu r$.

Notamos que as eqs. (3.31) e (3.32) são bastante similares ao conjunto de equações radiais da equação de Dirac usual, num campo central⁽⁵²⁾. Esta semelhança torna-se mais explícita se reescrevermos estas equações na forma

$$\frac{dG}{du} = \left\{ -\frac{\kappa}{x} G + \left[\bar{E} + \bar{m}_D - \bar{E}(1 - e^{-\eta}) \right] F \right\} \quad (3.33)$$

e.

$$\frac{dF}{du} = \left\{ \frac{\kappa}{x} F - \left[\bar{E} - \bar{m}_D - \bar{E}(1 - e^{-\eta}) \right] G \right\}, \quad (3.34)$$

onde o potencial central é

$$V(r) = \bar{E}(1 - e^{-\eta}).$$

O fator $(1 - e^{-\eta})$ representa o potencial gravitacional atuando sobre o campo de Dirac, cuja densidade total de massa é \bar{E} .

É de todo conveniente lembrar que $x = x(u)$, e que a região da variável u se estende por todos os espaços das duas folhas ($-\infty < u < +\infty$ e não de $0 \leq u < +\infty$) e portanto $x_0 \leq x < +\infty$. Assim, as eqs. (3.31) e (3.32) formam um conjunto de equações diferenciais completamente não singulares em todos os espaços. Isto ratifica a afirmação, do capítulo anterior, de que o campo atravessa a ponte criada pelo GRK sem sofrer nenhuma singularidade.

O campo gravitacional gerado pelo GRK só localiza o campo de Dirac, em torno da ponte, se existe uma solução não sin

que satisfaça a seguinte condição de contorno:

$$|G| \text{ e } |F| \text{ ambos } < \infty \text{ para } |u| \rightarrow \infty, \quad (3.35)$$

para as equações (3.31) e (3.32).

Dessa forma, as eqs. (3.31) e (3.32) mais a condição de contorno, eq. (3.35), se compõem num problema de autovalor para \bar{E} .

É útil, para resolver este problema, analisar algumas propriedades das soluções. Sabemos que as propriedades assintóticas da solução estática GRK são:

$$e \left. \begin{array}{l} x \rightarrow |u| \\ e^{-\eta} \rightarrow 1 \end{array} \right\} \text{ para } |u| \rightarrow \infty$$

Além disso, $x(u)$ e $e^{-\eta(u)}$ são funções pares, i.e.,

$$x(u) = x(-u)$$

$$e^{-\eta(u)} = e^{-\eta(-u)}$$

Desse modo, podemos obter a forma assintótica das eqs. (3.31) e (3.32) que é

$$\frac{dG}{du} \approx (\bar{E} + \bar{m}_D)F \quad (3.36)$$

e

$$\frac{dF}{du} \approx -(\bar{E} - \bar{m}_D)G \quad (3.37)$$

ou

$$G, F \sim e^{\pm \sqrt{\bar{m}_D^2 - \bar{E}^2} u} \quad (3.38)$$

Portanto, para $\bar{E} > \bar{m}_D$, a condição de contorno equação (3.35) é sempre satisfeita e o espectro de \bar{E} é contínuo. Entretanto, para $\bar{E} < \bar{m}_D$, temos que encontrar um valor de \bar{E} tal que satisfaça, simultaneamente, a

$$G, F \sim e^{-\sqrt{\bar{m}_D^2 - \bar{E}^2} u} \quad \text{para } u \rightarrow +\infty \quad (3.39)$$

e

$$G, F \sim e^{+\sqrt{\bar{m}_D^2 - \bar{E}^2} u} \quad \text{para } u \rightarrow -\infty \quad (3.40)$$

Antes de procurarmos os autovalores de \bar{E} , vamos ver como se comportam as funções G e F com a transformação $u \rightarrow -u$.

Sejam, então, $G(u)$ e $F(u)$ soluções e por definição

$$\bar{G}(u) \equiv G(-u)$$

$$\bar{F}(u) \equiv F(-u)$$

As funções $\bar{G}(u)$ e $\bar{F}(u)$ satisfazem as seguintes equações

$$\frac{d\bar{G}}{du} = \frac{\kappa}{x} \bar{G} - (\bar{E}e^{-\eta} + \bar{m}_D)\bar{F} \quad (3.41)$$

e

$$\frac{d\bar{F}}{du} = -\frac{\kappa}{x} \bar{F} + (\bar{E}e^{-\eta} - \bar{m}_D)\bar{G} \quad (3.42)$$

Dessa forma, notamos que $\bar{G}(u)$ e $\bar{F}(u)$ satisfazem, por meio das eqs. (3.41) e (3.42), as equações (3.31) e (3.32), se fizermos a seguinte troca:

$$\bar{G} \longleftrightarrow \bar{F}$$

$$F \longleftrightarrow \bar{G}$$

com $\bar{m}_D \leftrightarrow -\bar{m}_D$. Esta troca está relacionada com a conjugação de carga, embora não possamos afirmar conclusivamente tal fato sem a introdução do campo eletromagnético no problema..

Finalmente, vamos procurar os auto-estados para o nosso problema. Por simplicidade, procuramos soluções somente para o estado fundamental, no caso $\kappa = 1$. Para o caso $\kappa < 0$, encontramos os mesmos autovalores do caso $\kappa > 0$, porque a substituição $\kappa \rightarrow -\kappa$ é equivalente à transformação

$$\begin{cases} u \rightarrow -u \\ G \rightarrow -G \\ F \rightarrow F \end{cases}, \quad (3.43)$$

que obviamente não altera o espectro de \bar{E} .

Temos que $G(0)$ e $F(0)$ são as condições iniciais para as equações (3.31) e (3.32). Como estas equações são lineares, podemos escolher, sem perda de generalidade, um valor finito para qualquer uma dessas condições iniciais. Assim, tomamos

$$G(0) = 1. \quad (3.44)$$

Esta escolha altera apenas a normalização das funções F e G .

Deste modo, ficamos com dois parâmetros, \bar{E} e $F(0)$, a determinar, a fim de encontrarmos o autovalor para o estado fundamental.

Das eqs. (3.31) e (3.32), é fácil mostrar que, se a função $G(u)$ tende a um valor finito para $u \rightarrow +\infty$, isso implica que também a função $F(u)$ tende a um valor finito quando $u \rightarrow +\infty$. Do mesmo modo, se a função $G(u)$ diverge quando $u \rightarrow +\infty$, a função $F(u)$ também divergirá para $u \rightarrow +\infty$. Assim, não existe a possibili

dade de encontrarmos, para $u \rightarrow +\infty$, uma das funções convergindo e a outra divergindo. O mesmo acontece com as funções $G(-u)$ e $F(-u)$ quando $u \rightarrow -\infty$. Mas, mesmo que exista um valor de $F(0)$, para um determinado valor de \bar{E} , tal que as funções $G(u)$ e $F(u)$ tendam simultaneamente a um valor finito quando $u \rightarrow +\infty$, isto não necessariamente implica que as funções $G(-u)$ e $F(-u)$, para este par de valores $F(0)$ e \bar{E} , tendam, ao mesmo tempo, a outro valor finito quando $u \rightarrow -\infty$. Entretanto, esperamos que exista um determinado valor para $F(0)$, quando $u \rightarrow +\infty$, tal que, para um dado \bar{E} , as funções $G(u)$ e $F(u)$ tendam a um valor finito. Obviamente $F(0)$ é, neste caso, uma função de \bar{E} . Designaremos tal função por $F_+^0(\bar{E})$. Por outro lado, esperamos que exista também uma outra função, digamos $F_-^0(\bar{E})$, tal que as funções $G(-u)$ e $F(-u)$ tendam a um valor finito quando $u \rightarrow -\infty$. Deste modo, se existe um autovalor para \bar{E} , este será dado pela seguinte equação:

$$F_+^0(\bar{E}) = F_-^0(\bar{E}) . \quad (3.45)$$

De fato, existem soluções para a eq. (3.45) e mostramos um exemplo, na fig. 3.1, para os casos $\bar{m}_D = 1$. e 10., com $|\kappa| = 1$, onde a geometria de GRK foi escolhida no caso $f = 1.25$. As curvas F_+^0 e F_-^0 podem se cruzar várias vezes. O primeiro cruzamento fornece o autovalor de energia para o estado fundamental. Os outros cruzamentos, até o valor $\bar{E} = \bar{m}_D$, dão os estados ligados excitados. Na fig. 3.2, mostramos as funções de onda correspondentes ao estado fundamental (para $\kappa = 1$) da solução da fig. 3.1 no caso de $\bar{m}_D = 1$. Na fig. 3.3 mostramos as funções de onda do estado fundamental da fig. 3.1, no caso de $\bar{m}_D = 1$, para $\kappa = -1$. Aqui, as transformações dadas pela eq. (3.43) ficam evidentes.

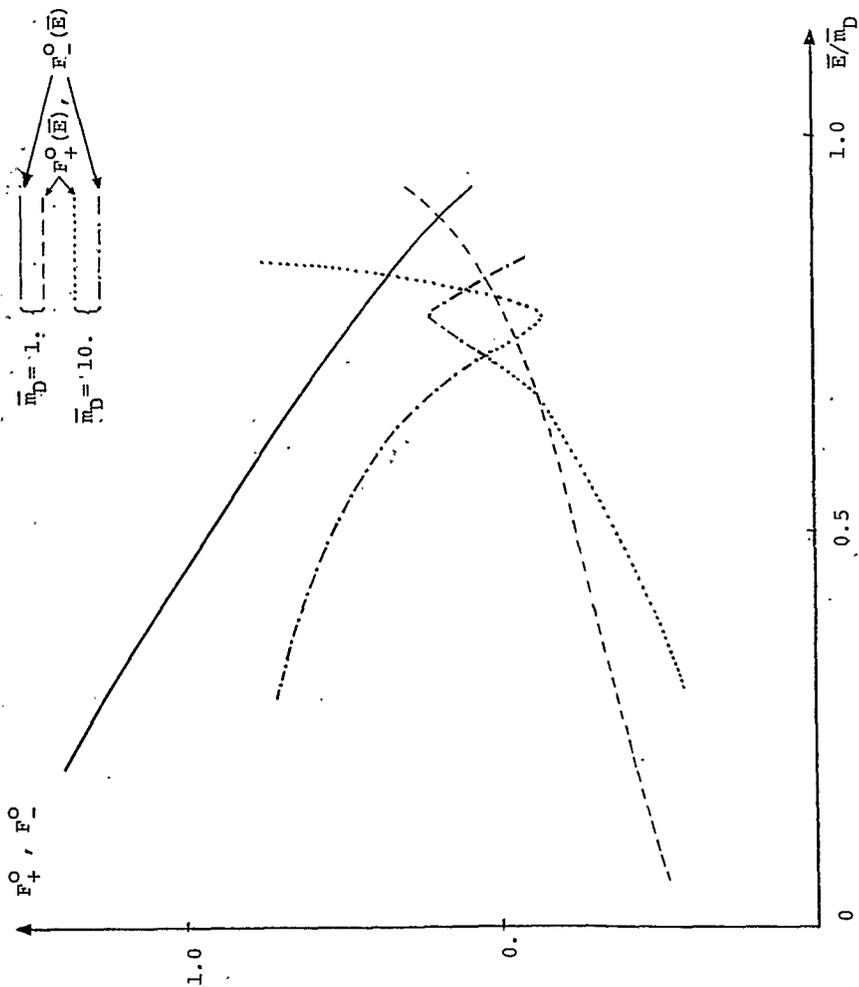


Fig. 3.1 - As funções F_+^0 e F_-^0 plotadas em função de \bar{E}/\bar{m}_D . Para o caso $\bar{m}_D = 10.$, aparece um exemplo típico de estado ligado.

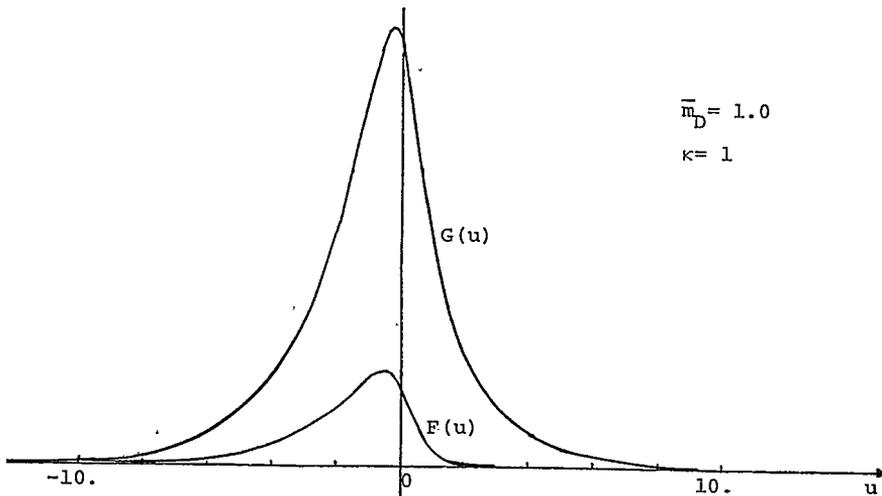


Fig. 3.2 - Funções $G(u)$ e $F(u)$ correspondentes ao estado fundamental com: $\bar{m}_D = 1.0$ e $\kappa = 1$.

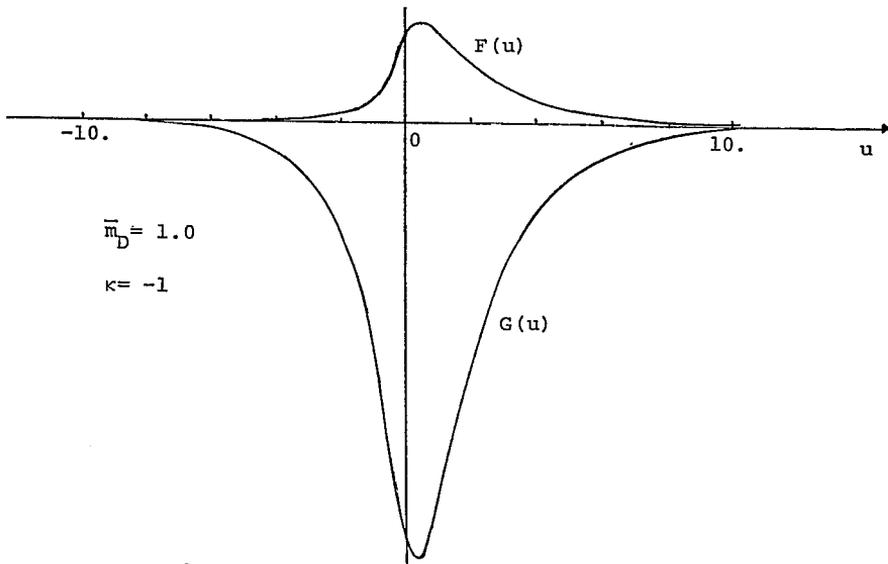
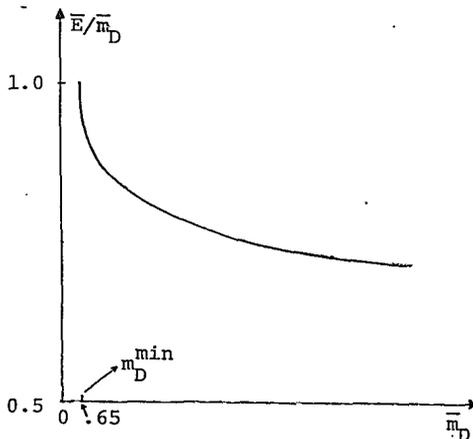


Fig. 3.3 - Funções $G(u)$ e $F(u)$ correspondentes ao estado fundamental com: $\bar{m}_D = 1.0$ e $\kappa = -1$.

Encontram-se que as soluções para a eq. (3.45) existem somente até um determinado valor mínimo de \bar{m}_D , \bar{m}_D^{\min} (ver fig.3.4). Este limite é $\bar{m}_D^{\min} \approx 0.65$. Isto pode ser explicado em analogia com o problema de se encontrar um espectro de níveis de uma partícula de massa m , num poço de potencial. O fato é que, à medida

Fig. 3.4 - Gráfico de \bar{E} em unidades de \bar{m}_D versus \bar{m}_D . O valor de \bar{m}_D^{\min} encontrado foi de ≈ 0.65 .



que a massa m vai diminuindo, devido ao aumento de sua energia cinética, os níveis vão se deslocando para cima, eliminando aqueles de energias mais altas.

Para um determinado valor de m , desaparecem todos os estados excitados, inclusive o estado fundamental. Isto é exatamente o que ocorre no nosso problema, pois o parâmetro \bar{m}_D funciona como uma massa m .

Para $\bar{m}_D > \bar{m}_D^{\min}$, o GRK pode localizar o campo de Dirac em torno da ponte. Assim, podemos interpretar tal configuração como sendo o de uma partícula com propriedades espinoriais. Temos de lembrar que a massa desta partícula é dada pela geometria do kink, e não pelo termo m_D da equação de Dirac. Isto é porque estamos tratando o campo de Dirac no "background" do GRK, consequentemente este campo não deve alterar a geometria.

Para ser consistente com o "background", temos que ter

$$m_D \ll M_{\text{kink}}$$

ou, utilizando a eq. (1.4.28) e $\bar{m}_D = m_D/\mu$,

$$\bar{m}_D \ll \frac{c^3}{\hbar G \mu^2} \frac{f^{-2} g(\infty)}{2} . \quad (3.46)$$

O lado direito da eq. (3.46) assume qualquer valor ⁽²⁵⁾ quando $f \rightarrow f_0 = 2/\pi$ e $\mu^{-1} \rightarrow 0$. Desta forma, escolhendo $f \approx f_0$ e μ apropriadamente, podemos tornar o lado direito da eq.(3.46) praticamente infinito, sem fazer nenhuma restrição a \bar{m}_D . Assim, podemos ter um modelo de uma partícula, cuja massa é dada pelo GRK, possuindo propriedades espinoriais. Isto, obviamente, fica consistente com o fato de termos usado o GRK como "background". Entretanto, para f um pouco afastado de f_0 , por exemplo fig. 3.1 onde $f = 1.25$, o valor de μ que fornece a massa do kink da ordem de uma partícula elementar é $\mu > 10^{56}$ cm. Neste caso

$$\bar{m}_D \ll 10^{-47} ,$$

que é praticamente zero. Então, $\bar{m}_D < m_D^{\min}$ e portanto está fora da região onde encontramos as soluções.

É interessante notar que, se $\bar{m}_D = 0$, existe uma outra possibilidade de se obter uma solução finita e estática ($E=0$) das eqs. (3.31) e (3.32). Estas equações tornam-se

$$\frac{dG}{dU} = - \frac{\kappa}{X} G \quad (3.47)$$

e

$$\frac{dF}{dU} = \frac{\kappa}{X} F . \quad (3.48)$$

As eqs. (3.47) e (3.48) tem como soluções

$$G(u) = G(0) e^{-\kappa \int_0^u \frac{du}{x(u)}} \quad (3.49)$$

e

$$F(u) = F(0) e^{\kappa \int_0^u \frac{du}{x(u)}} \quad (3.50)$$

Temos que, para $|u| \gg 1$, $x(u) \rightarrow u$ e as eqs.(3.49) e (3.50) ficam

$$G(u) = G(0) u^{-\kappa}$$

e

$$F(u) = F(0) u^{\kappa}$$

Para $|\kappa| = 1$, as funções $g = \frac{1}{r} G$ e $f = \frac{1}{r} F$ são finitas para $-\infty < u < +\infty$ e tem a forma mostrada na fig. 3.5a e 3.5b.

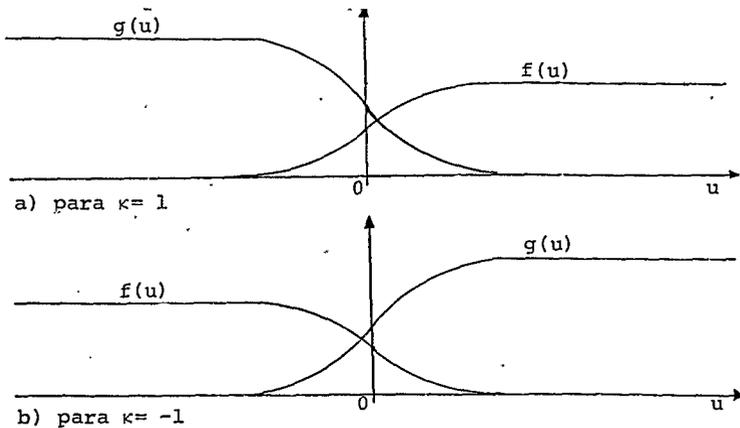


Fig. 3.5 - As funções de onda $g(u)$ e $f(u)$, no caso $\bar{m}_0 = 0$, para: a) $\kappa = 1$ e ;
b) $\kappa = -1$.

Como as funções $g(u)$ e $f(u)$ tendem a valores constantes quando $|u| \rightarrow \infty$, podemos reinterpretar estas soluções. Isto é feito deslocando o vácuo do campo para estes valores. Desta forma, as funções de onda fisicamente observadas são dadas por

$$g(u)_{\text{obs}} = g(u) - g_{\text{vac}}$$

e

$$f(u)_{\text{obs}} = f(u) - f_{\text{vac}}$$

onde

$$g_{\text{vac}} = \lim_{u \rightarrow \infty} g(u)$$

$$f_{\text{vac}} = \lim_{u \rightarrow \infty} f(u)$$

A renormalização acima não trará nenhuma inconveniência para um observador que está numa das duas folhas. Ele observará uma partícula de massa M_{GRK} , possuindo propriedade de spin $1/2$, concentrada na região da ponte.

Entretanto, sob o ponto de vista da consistência da nossa teoria, este tipo de solução contém uma dificuldade, mesmo com a renormalização do vácuo. Isto porque um campo constante estendido em todo o espaço fornece uma contribuição infinita à energia total do sistema, e isto logicamente contradiz a idéia de "background".

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES

A solução GRK (General Relativistic Kink) é uma extensão natural do modelo $\lambda\phi^4$, para o espaço tridimensional. Nesta tese, é demonstrada a estabilidade do GRK contra perturbações radiais. Para garantir a estabilidade deste modelo, é necessário, entretanto, estudá-la contra perturbações de qualquer tipo. Este estudo está em andamento.

Resolveu-se a equação de Dirac na geometria do GRK e mostrou-se a existência de soluções localizadas. Tal sistema (o GRK mais o campo de Dirac) pode servir como ponto de partida para um modelo clássico de partículas, cuja massa é dada pela geometria do kink, com propriedades espinoriais. Nesta visão, consideramos que o campo escalar determina univocamente a existência das partículas. Isto é, o campo escalar cria a geometria, ao furar o espaço-tempo, e todos os outros campos que atravessam esta geometria gerada por ele transmitem as suas propriedades ao GRK.

Por enquanto, o modelo GRK está limitado ao caso esfericamente simétrico e estático. Entretanto, para aplicá-lo a um modelo mais realístico de partículas elementares, será necessário um estudo sobre a dinâmica deste modelo. Um primeiro passo será, por exemplo, a solução do problema de dois corpos. Outro será a introdução de diversos tipos de interações com outros campos, e de que forma estas interações atuam.

A visão que fornecemos sobre o papel desempenhado pelo campo escalar e pelos outros campos dá consistência ao fato de tomarmos os últimos no "background" do primeiro. Mas, será de interesse verificarmos se algum outro campo, além do escalar, gera este tipo de geometria, ou se necessariamente esta geometria tem de ser gerada pelo campo escalar.

Todos esses problemas serão alvo de estudos futuros.

BIBLIOGRAFIA

- (1) - EINSTEIN, A. and ROSEN, N.; "The Particle Problem in the General Theory of Relativity", Phys. Rev. 48, (1935), 73.
- (2) - ROSEN, G.; "Nonexistence of Localized Periodic Solutions to Nonlinear Field Theories", J. Math. Phys. 7, (1966), 2071.
- (3) - WHEELER, J.A.; "Geometrodynamics and the Problem of Motion", Rev. Mod. Phys. 33, (1961), 63.
- (4) - DERRICK, G.H. and KAY-KONG, W.; "Particle Motion and Interactions in Nonlinear Field Theories", J. Math. Phys. 9, (1968), 232.
- (5) - DERRICK, G.H.; "Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles", J. Math. Phys. 5, (1964), 1252.
- (6) - ENZ, U.; "Discrete Mass, Elementary Length, and Topological Invariant as Consequence of Relativistic Invariant Variational Principle", Phys. Rev. 131, (1963), 1329.
- (7) - PISELLO, D.M.; "Unified Field Theory with Homotopic Charge", Int. Journ. Theor. Phys. 17, (1978), 143.
- (8) - PISELLO, D.M.; "Nonlinear Classical Theory of Electromagnetism", Int. Journ. Theor. Phys. 16, (1977), 863.
- (9) - DE RITIS, R., FINKELSTEIN, D., PISELLO, D.M. and WEIL, D., "Local Conserved Currents in Unified Field Theory", Nuovo Cimento, 48, (1978), 184.
- (10) - ROSEN, N. and ROSENSTOCK, H.B.; "The Force Between Particles in a Nonlinear Field Theory", Phys. Rev. 85, (1952), 257.
- (11) - FINKELSTEIN, R.J.; "On the Quantization of a Unitary Field Theory", Phys. Rev. 75, (1949), 1079.

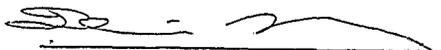
- (12) - FINKELSTEIN,R., LELEVIER,R. and RUDERMAN,M.; "Nonlinear Spinor Fields", Phys. Rev. 83,(1951),326.
- (13) - SALAM,A.; "Overlapping Divergences and the S-Matrix" Phys. Rev. 82,(1951),217.
- (14) - MALENKA,B.J.; "Nonlinearities Resulting from Vacuum Polarization in Meson-Nucleon Interactions", Phys. Rev. 85 , (1952),686.
- (15) - GARCIA,L. and VÁZQUEZ,L.; "Time-Dependent Solutions of a Classical Nonlinear Scalar Field", Lett. Nuovo Cimento , 23,(1978),23.
- (16) - CASTELL,L.; "Exact Solutions of the $\lambda\phi^4$ Theory", Phys.Rev. D, 6,(1972),536.
- (17) - SCHIFF, L.I.; "Nonlinear Meson Theory of Nuclear Forces. I. Neutral Scalar Mesons with Point-Contact Repulsion" , Phys. Rev. 84,(1951),1.
- (18) - SOLER,M.; "Classical, Stable, Nonlinear Spinor Field with Positive Rest Energy", Phys. Rev. D1,(1970),2766.
- (19) - RAÑADA,A.F., RAÑADA,M.F., SOLER,M. and VÁZQUEZ,L., "Classical Electrodynamics of a Nonlinear Dirac Field with Anomalous Magnetic Moment", Phys. Rev. D 10,(1974),517.
- (20) - VÁZQUEZ,L.; "Elementary Length in Nonlinear Classical Fields", Lett. Nuovo Cimento, 19,(1977),37.
- (21) - RAÑADA,A.F.; "Relativistic Quantum Mechanics of the Hydrogen Atom as the Weak-Field Limit of a Nonlinear Theory", Int. J. Theor. Phys., 16,(1977),795.
- (22) - RAÑADA, A.F. and SOLER,M.; "Elementary Spinorial Excitations in a Model Universe", J.Math.Phys., 5,(1972),671.
- (23) - SOLER,M.; "Classical Electrodynamics for a Nonlinear Spinor Field: Perturbative and Exact Approaches", Phys. Rev. D 8,(1973),3424.

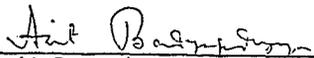
- (24) - RAÑADA, A.F. and SOLER, M.; "Perturbation Theory for an Exactly Soluble Spinor Model in Interaction with Its Electromagnetic Field", Phys. Rev. D 8, (1973), 3430.
- (25) - KODAMA, T.; "General-relativistic Nonlinear Field: A Kink Solution in a Generalized Geometry", Phys. Rev. D 18, (1978), 3529.
- (26) - LAMB, H.; "Hydrodynamics", N.Y., Dover Publications, 6th Ed., (1932), pág. 423.
- (27) - TREUMANN, R.; "Submagnetosonic Lower-Hybrid Wave Solitons" Phys. Lett. A 68, (1978), 445.
- (28) - CHEN, H.H. and LIU, C.S.; "Langmuir Solitons and Resonance Absorption in Laser-Irradiated Plasmas", do livro "Plasma Physics: nonlinear theory and experiments". New York, Plenum Press. (1977) pág. 211.
- (29) - DOROGOVITSEV, S.N. and KITTOROV, S.A.; "Soliton Pinning and the Central Peak", Phys. Lett. A 68, (1978), 271.
- (30) - HUBER, D.L.; "Interaction of a Nuclear Spin with a Soliton Gas", Phys. Lett. A 71, (1979), 353.
- (31) - CERCIGNANI, C.; "Solitons. Theory and Application", Riv. Nuovo Cimento, 7, (1977), 429.
- (32) - KARPMAN, V.I., LYNOV, J.P., MICHELSEN, P., PECSELI, H.L., RASMUSSEN, I.J. and TURIKOV, V.A.; "Modification of Plasma Solitons by Resonant Particles", Phys. Rev. Lett., 43, (1979), 210.
- (33) - FINKELSTEIN, D. and MISNER, C.; "Some New Conservation Laws", Ann. Phys. 6, (1959), 230.
- (34) - FINKELSTEIN, D.; "Kinks", J. Math. Phys. 7, (1966), 1218.
- (35) - SKYRME, T.H.R.; "A Unified Model of κ - and π -mesons", Proc. Roy. Soc. A 252, (1959), 236.
- (36) - DASHEN, R.F., HASSLACHER, B. and NEVEU, A.; "Nonperturbati

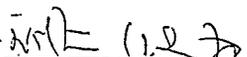
- ve Methods and Extended-hadron Models in Field Theory. I. Semiclassical Functional Methods", Phys. Rev. D10, (1974), 4114.
- (37) - DASHEN, R.F., HASSLACHER, B. and NEVEU, A.; "Nonperturbative Methods and Extended-hadron Models in Field Theory. II. Two-dimensional Models and Extended Hadrons", Phys. Rev. D 10, (1974), 4130.
- (38) - DASHEN, R.F., HASSLACHER, R. and NEVEU, A.; "Nonperturbative Methods and Extended-hadron Models in Field Theory. III. Four-dimensional Non-Abelian Models", Phys. Rev. , D 10, (1974), 4138.
- (39) - GOLDSTONE, J. and JACKIW, R.; "Quantization of Nonlinear Waves", Phys. Rev. D11, (1975), 1486.
- (40) - RAJARAMAN, R.; "Some Non-Perturbative Semi-Classical Methods in Quantum Field Theory (A Pedagogical Review)", Phys. Rep. 21, (1975), 227.
- (41) - ROSEN, G.; "Existence of Particlelike Solutions to Non-linear Field Theories", J. Math. Phys., 7, (1966), 2066.
- (42) - KODAMA, T., CHUNG, K.C. and TEIXEIRA, A.F. DA F.; "Bound States of Nonlinear Scalar Field", Nuovo Cimento, 46 B, (1978), 206.
- (43) - 't HOOFT, G.; "Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories", Nucl. Phys. B 79, (1974), 276.
- (44) - CHUNG, K.C., KODAMA, T. and TEIXEIRA, A.F. DA F.; "Relativistic Klein-Gordon Systems", Phys. Rev. D 16, (1977), 2412.
- (45) - CLÉMENT, G.; "Einstein-Maxwell-Higgs Solitons", Pre-print IPUC 80-1, Université de Constantine, Constantine, Algérie.
- (46) - KODAMA, T., OLIVEIRA, L.C.S. and SANTOS, F.C.; "Properties of General Relativistic Kink Solution", Phys. Rev. D 19, (1979), 3576.

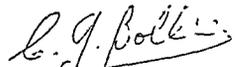
- (47) - MISNER, C.W. and WHEELER, J.A.; "Classical Physics as Geometry", Ann. Phys. 2, (1957), 525.
- (48) - WHEELER, J.A.; "Geometrodynamics and the Problem of Motion", Rev. Mod. Phys. 33, (1961), 63.
- (49) - BRILL, D.R. and WHEELER, J.A.; "Interaction of Neutrinos and Gravitational Fields", Rev. Mod. Phys. 29, (1957), 465.
- (50) - SOARES, I.D.; "Um Estudo da Interação Gravitacão-Neutrino", Tese de Doutorado, CBPF, 1976.
- (51) - SOARES, I.D.; "O Cálculo de Formas Diferenciais e a Equacão de Dirac em Espaços Curvos", I Escola de Cosmologia e Gravitação, CBPF, 1978.
- (52) - MESSIAH, A.; "Quantum Mechanics", North Holland, Amsterdam, (1962).
- (53) - GASIOROWICZ, S.; "Elementary Particle Physics", John Wiley & Sons, Inc., New York, (1966).

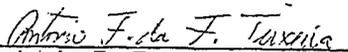
Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:


Takeshi Kodama - Presidente


Asit Banerjee


Nilton Oscar Santos


Carlos Guido Bollini


Antonio F. Fonseca Teixeira

Rio de Janeiro, 19 de dezembro de 1980