

OPERADORES COMPOSTOS LOCAIS E O GAP DE MASSA DO
MODELO DE GROSS-NEVEU

JUAN SANTIAGO CORTÉS GONZÁLEZ

Dissertação de mestrado

Orientador
Itzhak Roditi

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rio de Janeiro

Novembro de 2010

Dedicado especialmente a mis viejos, a mi familia y a mis parceros que desde lejos fueron un gran apoyo para culminar este trabajo.

Agradecimentos

Ao meu orientador, prof. Itzhak Roditi, uma grande e excelente pessoa que me aceitou como seu aluno, e que me apoiou e ajudou na realização deste trabalho de mestrado.

Aos professores do CBPF, especialmente Sebastião Alves Dias e Fernando Dantas Nobre pelas boas aulas e Ivan dos Santos Oliveira, coordenador da CFC, pela ajuda concedida para a apresentação dos trabalhos relacionados com a tese.

À CAPES pela bolsa.

Ao pessoal administrativo do CBPF.

Um parágrafo não é suficiente para expressar o meu agradecimento à minha família. Obrigado por tudo o que eu aprendi e pelo apoio infinito que recibi do meu pai Álvaro, da minha mãe Sandra e da minha irmã Natalia nos momentos difíceis, e por saber que tenho uma grande família que sempre estará comigo em tudo o que eu faça. Por isso não poderia me esquecer da minha avó, meus tios, minhas tias, e meus primos Ricardo, Felipe, Diego, Darío, Cami, Carolina, Cata, Ana Lucía, ... a lista parece não ter final, a minha família é grande mesmo! Poderia citar ao G. Cerati dizendo “Gracias totales”, mas o show tem que continuar, e eu sei que sempre vou contar com vocês para seguir com este objetivo, mesmo estando longe de casa.

Aos “parceros ”e amigas de física da “Nacho ”e do CBPF e ao pessoal que conheci aqui no Rio: Miguel Ángel, Guillermo, Gerardo, Mónica M, Juan Carlos, Ury, Mónica R, Matacho, David M, Julián, Cristina, Suema, William, David Z, Lyz, Rodrigo C, André Nicolai, Enrique, Lucho, César, Danyllo, Alejandro, Pacho.

À Derly, uma garota muito especial.

À Stephany. Sem ciúmes, Gerardo.

Às lusitanas, Liliana e Mónica, e à mexicana Rocio.

Ao pessoal da escola: Jeffrey e Javier P.

A você, pela sua atenção.

Resumo

Apresentam-se os resultados da aplicação do formalismo chamado de Operadores Compostos Locais em duas teorias, seguindo o esquema mostrado por Verschelde: teoria $\lambda\phi^4$, como introdução ao formalismo, e o modelo de Gross-Neveu, problema principal desta tese. Estudam-se os potenciais efetivos correspondentes até nível de um laço, e calculam-se as massas geradas pela quebra da simetria induzida pelas correções radiativas. Após ter feito isto, aplica-se a formulação de Teoria de Campos a Temperatura Finita para procurar um valor de temperatura crítica onde aconteça uma transição de fase associada à restauração da simetria quirial. O resultado final depende linearmente da massa do férmion, um fato que concorda com o resultado obtido no regime de Temperatura Finita.

Abstract

The results of the application in two theories of the formalism known as Local Composite Operators are presented, following the scheme showed by Verschelde: $\lambda\phi^4$ theory, as an introduction to this formalism, and the Gross-Neveu Model, main problem of this thesis. The correspondent effective potentials up to one loop level are studied, and the masses generated by the symmetry breaking induced by the radiative corrections are calculated. After having done this, the formulation of Quantum Field Theory at Finite-Temperature is applied in order to obtain a value of critical temperature where a phase transition associated to the restoration of the quiral symmetry occurs. The final result depends linearly on the fermion mass, a fact that agrees with the result obtained in the Finite-Temperature regime.

Lista de figuras

2.1. Autoenergia do campo escalar auxiliar σ	18
3.1. Diagrama de Feynman para um férmion livre.	27
3.2. Vértice de interação de 4 férmions.	27
3.3. Autoenergia do férmion a um laço.	28
3.4. Correção ao vértice de 4 férmions a um laço.	28
3.5. Diagrama de laço fermiônico e autoenergia do elétron devida ao vértice $g\sigma\bar{\psi}\psi$	32

Conteúdo

Agradecimentos	IV
Resumo	V
Abstract	VI
Lista de figuras	IX
Introdução	1
1. Operadores Compostos Locais (LCO)	3
1.1. Aplicação à teoria $\lambda\phi^4$	4
1.2. Potencial efetivo associado	9
1.3. Quebra dinâmica da simetria e geração de massas	13
2. O modelo de Gross-Neveu	15
2.1. Características principais	15
2.2. Potencial efetivo	18
2.3. Ordens superiores	21
2.4. Liberdade assintótica	22
3. Aplicação de Operadores Compostos Locais ao modelo de Gross-Neveu	23
3.1. Procedimento inicial	23
3.2. Potencial efetivo	26
4. Teoria de Campos a Temperatura Finita	37
4.1. Aspectos gerais	37
4.2. Definição da temperatura crítica	41
4.3. Propagadores para partículas escalares e spinoriais	43
4.4. Potenciais efetivos a temperatura finita	46
5. Modelo de Gross-Neveu a temperatura finita	59
5.1. Isolamento das divergências	59
5.2. Transformada de Hubbard-Stratonovich a temperatura finita	61
5.3. Potencial efetivo a temperatura finita	63
5.4. Gap de massa e temperatura crítica do sistema	68
6. Conclusões e expectativas	73
Bibliografia	76

Introdução

No problema que será desenvolvido mais adiante, um Operador Composto Local (ou LCO pelas suas siglas em inglês) é considerado como uma quantidade expressa em termos de uma potência de um produto interno de dois campos acoplada a uma fonte J que tem a propriedade de gerar novas divergências ultra-violeta na teoria estudada (comumente relacionadas com diagramas de vácuo); isto deve-se à mudança nos mínimos do potencial efetivo associado e similarmente, no estado base da teoria, fazendo que ele tenha uma maior ou menor estabilidade. Este resultado é possível somente no caso em que existe um método de renormalização adequado [1, 2, 3].

Já é um fato conhecido que os infinitos em uma teoria vêm de diagramas divergentes associados às quantidades fundamentais como por exemplo, massa da partícula e constante de acoplamento da interação. Para livrar-se destas desvantagens, são calculados os respectivos contratermos de forma tal que todas as divergências possam ser canceladas.

É importante lembrar que uma teoria é chamada de renormalizável quando é possível eliminar todas as divergências perturbativas com um número finito de contratermos, fazendo com que seja possível a obtenção de quantidades fisicamente mensuráveis (finitas). Em termos dos funcionais geradores, esta característica é dada se houver uma forma de encontrar a ação efetiva do sistema e junto com isso, as funções irreduzíveis de uma partícula (1PI). É dito então que a expansão em funções 1PI até qualquer ordem é a característica principal de uma teoria renormalizável.

Neste caso, para fornecer esta tarefa, é necessário introduzir um LCO apropriado na Lagrangiana do sistema, induzindo assim uma quebra dinâmica da simetria associada à teoria. Após este procedimento, soma-se uma quantidade dependente de J que vai fazer o papel de novo contratermo. Um exemplo para testar este formalismo é o modelo de Gross-Neveu [4]

O problema principal encontra-se no fato de interpretar o potencial efetivo como uma densidade de energia; isto só é possível se houver termos de acoplamento lineares entre a fonte e um campo (um fato que é visto na teoria de campos usual quando é estudada a produção das funções de n pontos derivando o funcional gerador em termos da fonte que cria e destrói campos do vácuo [8]). Este problema é resolvido trocando o operador composto por um campo escalar auxiliar sem pernas externas usando uma transformada de Hubbard-Stratonovich, obtendo assim a ação efetiva do sistema em termos deste campo e portanto, a expansão em funções 1PI [1,3].

Agora, lembrando que este fenômeno de quebra dinâmica acontece a temperatura zero, esperamos que se o sistema for esquentado a simetria seja restaurada acima de um valor de temperatura crítica T_C [5, 6], associando uma transição de fase ao processo [7].

Nosso trabalho se apresenta na seguinte ordem:

- No capítulo 1 revisamos as características principais do formalismo de LCO, com uma aplicação à teoria $\lambda\phi^4$ [1].

- No capítulo 2 é introduzido o modelo de Gross-Neveu como foi dado no artigo original [4].
- Após discutir sobre o modelo que vai ser considerado, é feita a aplicação de LCO no capítulo 3 até o nível de um laço, como foi desenvolvido em [3].
- Para estudar uma possível transição de fase no modelo, introduz-se no capítulo 4 o formalismo de Teoria de Campos a Temperatura Finita seguindo o formalismo de Matsubara [5, 6].
- No capítulo 5, estudamos a transição de fase no modelo de Gross-Neveu baseada no desenvolvimento feito no capítulo anterior. Comparam-se os resultados obtidos com os resultados já conhecidos dados em [7]. Neste capítulo desenvolvemos considerações originais no que diz respeito ao método LCO com temperatura finita.
- O último capítulo está focalizado nas conclusões e possíveis aplicações do formalismo de LCO.

Capítulo 1

Operadores Compostos Locais (LCO)

Nesta seção levaremos em conta a definição dada na introdução para operador composto local [1].

O caráter composto do operador vem do fato que este vem dado pelo produto interno de dois campos e o seu valor esperado é calculado no mesmo ponto do espaço-tempo, produzindo uma contribuição divergente. Comumente, esse tipo de termo encontra-se associado ao termo inercial da partícula e à constante de acoplamento da interação dada na Lagrangiana ¹.

Nesta formulação, o operador encontra-se acoplado a uma fonte externa J ; por exemplo, para um campo escalar real, o acoplamento vai ser

$$J\phi^2,$$

enquanto que para um campo spinorial, esta quantidade escreve-se como

$$J\bar{\psi}\psi.$$

Nos dois casos acima, os operadores estão associados às massas das partículas em estudo. Cada um deles produz divergências no ultra-violeta, e por essa razão, é necessário encontrar os contratermos adequados para tornar à teoria renormalizável.

A introdução do LCO induz uma quebra dinâmica da simetria na Lagrangiana do problema. Isto é percebível na geração de massas nos campos em estudo, mas para encontrá-las, precisa-se estudar o potencial efetivo associado e o(s) seu(s) valor(es) mínimo(s); aquele com maior estabilidade é definido como o verdadeiro estado de vácuo da teoria.

O procedimento acima é realizado usando correções radiativas e a quebra espontânea na simetria induzida por elas no potencial efetivo.

¹Neste documento são usados os termos Lagrangiana e Hamiltoniana para referir-se às densidades Lagrangiana e Hamiltoniana

1.1. Aplicação à teoria $\lambda\phi^4$

Para o caso da teoria $\lambda\phi^4$ sem massa (a fonte J substitui esse termo no operador ϕ^2) com uma Lagrangiana em um espaço Euclidiano de $d = 4 - 2\epsilon$ dimensões². [1]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{J}{2}\phi^2 + \frac{\lambda\mu^{2\epsilon}}{4!}\phi^4 + \mathcal{L}_{CT}, \quad (1.1.1)$$

é introduzida uma quantidade ζ com um acoplamento em J

$$\frac{\zeta}{2}J^2,$$

de forma a lidar com os contra-termos para as novas divergências proporcionais às potências de J . Então,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{J}{2}\phi^2 + \frac{\lambda\mu^{2\epsilon}}{4!}\phi^4 - \frac{\zeta}{2}\mu^{-2\epsilon}J^2 + \mathcal{L}_{CT}. \quad (1.1.2)$$

O termo linearmente proporcional corresponde à renormalização da massa, enquanto que o termo proporcional ao quadrado de J está relacionado com os diagramas do vácuo.

A Lagrangiana de contra-termos é dada por

$$\mathcal{L}_{CT} = \frac{\delta Z}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{\delta Z_2}{2}J\phi^2 + \frac{\delta Z_4}{4!}\lambda\mu^{2\epsilon}\phi^4 - \frac{\delta\zeta}{2}\mu^{-2\epsilon}J^2. \quad (1.1.3)$$

Deste modo, a Lagrangiana fica como

$$\mathcal{L} = \frac{Z}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{Z_2}{2}J\phi^2 + \frac{Z_4}{4!}\lambda\mu^{2\epsilon}\phi^4 - \frac{\zeta + \delta\zeta}{2}\mu^{-2\epsilon}J^2,$$

onde as funções Z estão definidas como

$$\begin{aligned} Z &= 1 + \delta Z, \\ Z_2 &= 1 + \delta Z_2, \\ Z_4 &= 1 + \delta Z_4. \end{aligned}$$

Definem-se as seguintes quantidades nuas:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= Z^{1/2}\phi, \quad J_0 = \frac{Z_2}{Z}J, \\ \lambda_0 &= \frac{\mu^{2\epsilon}Z_4}{Z^2}\lambda, \quad \zeta_0 J_0^2 = (\zeta + \delta\zeta)\mu^{-2\epsilon}J^2. \end{aligned}$$

Assim, a Lagrangiana nua escreve-se da forma

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_0\partial^\mu\phi_0 + \frac{1}{2}J_0\phi_0^2 + \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4 - \frac{\zeta_0 J_0^2}{2}. \quad (1.1.4)$$

² μ é um fator de re-escalamento acoplado ao termo de interação para ajustar as suas unidades de densidade de energia quando é considerada uma dimensão $d > 4$ [8].

Na teoria $\lambda\phi^4$ com massa e sem fontes, a função de n pontos renormalizada irreduzível para uma partícula ($\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$) fornece a seguinte equação do grupo de renormalização [8]:

$$\left(-n\mu \frac{\partial \ln \sqrt{Z}}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \mu \frac{\partial m}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m} \right) \Gamma^{(n)} = 0. \quad (1.1.5)$$

A equação acima é obtida levando em conta que a função de n pontos não renormalizada $\Gamma_{nr}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ não depende explicitamente do parâmetro de escala μ , i.e.,

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma_{nr}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = 0,$$

mas quando é introduzida a relação entre $\Gamma_{nr}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ e $\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$, vão ser encontradas variações em $\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ dos outros parâmetros renormalizados presentes na Lagrangiana da teoria (por exemplo, a constante de acoplamento). Isto quer dizer que uma mudança em μ é compensada com as respectivas variações nos parâmetros existentes para que a função de n pontos renormalizada irreduzível apresente invariância sob mudanças em μ [8]. Portanto, não há dependência total desse parâmetro, uma característica das quantidades fisicamente mensuráveis.

O funcional gerador $W(J)$ definido em termos da Lagrangiana renormalizada fornece funções conexas finitas e que independem do fator de escala μ . Desta forma, conclui-se que $W(J)$ tampouco depende desta variável, ou em outros termos,

$$\mu \frac{dW}{d\mu}(J) = 0.$$

$W(J)$ depende das quantidades λ , ζ e J , e a sua vez, elas dependem de μ segundo as definições dadas para as respectivas quantidades nuas. Aplicando a regra da cadeia na igualdade acima, será obtida uma equação do grupo de renormalização associada ao funcional gerador $W(J)$, i.e.,

$$\mu \frac{dW}{d\mu}(J) = \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \mu \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \mu \int d^d x \frac{\partial J}{\partial \mu} \frac{\delta}{\delta J} \right) W(J) = 0.$$

Como no caso da função $\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ citado acima, uma variação em μ é compensada por mudanças nos outros parâmetros introduzidos na Lagrangiana da teoria. Agora, das quantidades nuas dadas anteriormente, fazendo

$$J = \frac{Z}{Z_2} J_0,$$

muda-se a derivada de J por

$$\frac{\partial J}{\partial \mu} = -\frac{\partial}{\partial \mu} \ln \left(\frac{Z_2}{Z} \right) \frac{Z_2}{Z} J_0.$$

Desta forma,

$$\mu \int d^d x \frac{\partial J}{\partial \mu} \frac{\delta}{\delta J} = -\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \left(\frac{Z_2}{Z} \right) \int d^d x J \frac{\partial}{\partial J}.$$

Finalmente, a equação do funcional $W(J)$ vai ser

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \lambda} - \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \left(\frac{Z_2}{Z} \right) \int d^d x J \frac{\partial}{\partial J} + \mu \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \right] W(J) = 0.$$

Definem-se as seguintes funções do grupo de renormalização:

$$\beta(\lambda) = \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu}, \quad (1.1.6)$$

$$\gamma_2(\lambda) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \left(\frac{Z_2}{Z} \right), \quad (1.1.7)$$

$$\eta(\lambda, \zeta) = \mu \frac{\delta \zeta}{\delta \mu}. \quad (1.1.8)$$

Levando em conta as igualdades dadas acima, a equação do grupo de renormalização que vai fornecer $W(J)$ é

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial \lambda} - \gamma_2(\lambda) \int d^d x J \frac{\delta}{\delta J} + \eta(\lambda, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] W(J) = 0. \quad (1.1.9)$$

Graças à introdução da nova constante de acoplamento ζ , foi possível gerar uma equação homogênea, obtindo um funcional multiplicativamente renormalizável. O comportamento da nova função do grupo de renormalização $\eta(\lambda, \zeta)$ como função de μ pode ser estudado considerando que o funcional $W_0(J_0)$ (associado à Lagrangiana nua \mathcal{L}_0) não depende explicitamente deste parâmetro de escala. Esta é a razão pela qual cada termo deve ser independente desta variável. Então, no caso da nova função ζ introduzida, e para um valor fixo de ϵ (neste caso, $\epsilon = 0$), J_0 e ζ_0

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} (\zeta_0 J_0^2) \Big|_{\zeta_0, J_0, \epsilon} = 0.$$

Levando em conta a relação entre J e J_0 , e fazendo o limite de $d = 4 - 2\epsilon$ dimensões (com $\epsilon \rightarrow 0$), conclui-se que

$$\mu \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \Big|_{\epsilon, J_0, \zeta_0} = 2\gamma_2(\lambda)\zeta + \delta(\lambda), \quad (1.1.10)$$

onde

$$\delta(\lambda) = 2(\epsilon + \gamma_2(\lambda))\delta\zeta - \mu \frac{\partial \delta\zeta}{\partial \mu}. \quad (1.1.11)$$

A equação (1.1.10) sugere que ζ seja função de λ somente ($\zeta = \zeta(\lambda)$), porque esta constante de acoplamento apresenta um valor arbitrário para um dado μ . Isto é possível de verificar observando a função $\beta(\lambda)$ do grupo de renormalização e invertendo as derivadas

$$\beta(\lambda) \frac{d\zeta(\lambda)}{d\lambda} = 2\gamma_2(\lambda)\zeta(\lambda) + \delta(\lambda). \quad (1.1.12)$$

Esta equação permite uma expansão em series de Laurent na forma

$$\zeta(\lambda) = \frac{c_{-1}}{\lambda} + c_0 \hbar + c_1 \hbar^2 \lambda \dots$$

O termo que depende inversamente da primeira potência de λ é dado pelo pólo $\beta(\lambda) = 0$. Além disso, para obter uma aproximação até n laços, são necessárias as funções do grupo de renormalização até $n + 1$ laços.

Da equação diferencial dada para $\zeta(\lambda)$, afirma-se que esta função não depende do parâmetro de escala μ . Então, é possível gerar uma equação do grupo de renormalização que não dependa da nova função $\eta(\lambda, \zeta)$. Assim, define-se a função Z_ζ na Lagrangiana como

$$\zeta(\lambda) + \delta\zeta(\lambda) = Z_\zeta(\lambda, \epsilon)\zeta(\lambda), \quad (1.1.13)$$

enquanto que a equação para $W(J)$ muda para

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - \gamma_2(\lambda) \int d^d x J \frac{\delta}{\delta J} \right] W(J, \lambda, \mu) = 0. \quad (1.1.14)$$

Da Lagrangiana nua \mathcal{L}_0 ,

$$\begin{aligned} \frac{J_0}{2} \phi_0^2 &= \frac{Z_2}{2} J \phi^2, \\ \frac{\zeta_0 J_0^2}{2} &= \frac{Z_\zeta}{2} \zeta(\lambda) \mu^{-2\epsilon} J^2, \end{aligned}$$

define-se o seguinte operador composto local no limite $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\Delta = \frac{1}{2} (Z_2 \phi^2 - Z_\zeta \zeta(\lambda) J). \quad (1.1.15)$$

Então, da Lagrangiana,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{Z}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{Z_2}{2} J \phi^2 + \frac{Z_4}{4!} \lambda \phi^4 - \frac{Z}{2} \zeta(\lambda) J^2 \\ &= \frac{Z}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{Z_4}{4!} \lambda \phi^4 + \Delta J, \end{aligned}$$

este operador Δ tem o seguinte valor esperado no vácuo:

$$\langle \Delta \rangle = \frac{\delta W}{\delta J}. \quad (1.1.16)$$

$W(J)$ (funcional gerador das funções conexas) encontra-se relacionado com o funcional gerador Z como

$$Z(J) = \exp(-W(J)) = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[- \int d^d x \mathcal{L}(J) \right]. \quad (1.1.17)$$

Escreve-se explicitamente a dependência da Lagrangiana do termo de fonte J . Até agora, ainda estão presentes os termos que dependem de J^2 , um fato que não vai permitir interpretar o potencial efetivo como uma densidade de energia (isto seria possível se houver somente termos lineares na fonte). Para resolver este problema, obtendo no final termos de acoplamento lineares em J somente, introduz-se um campo auxiliar escalar usando uma transformação de Hubbard-Stratonovich no funcional $Z(J)$

$$1 = \int \mathcal{D}\sigma \exp \left[-\frac{1}{2Z_\zeta\zeta} \int d^d x \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\mu^\epsilon Z_2}{2} \phi^2 - \mu^{-\epsilon} Z_\zeta \zeta J \right)^2 \right].$$

O campo auxiliar não tem termos cinéticos, portanto, seus diagramas não terão pernas externas. A igualdade acima cancela os termos proporcionais a J^2 e os acoplamentos entre as potências do campo ϕ e o termo de fonte, ou seja,

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\sigma \exp \left(- \int d^d x \left[\frac{Z}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{Z_2}{2} \frac{\sigma \mu^\epsilon}{\sqrt{\lambda} Z_\zeta \zeta} \phi^2 + \left(Z_4 + \frac{3Z_2^2}{Z_\zeta \zeta} \right) \lambda \mu^{-2\epsilon} \frac{\phi^4}{4!} + \frac{\sigma^2}{2Z_\zeta \zeta \lambda} - \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \mu^{-\epsilon} J \right] \right).$$

A Lagrangiana obtida após esta transformação é dada pela seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi, \sigma) = & \frac{Z}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{\mu^\epsilon Z_2 \sigma}{2\sqrt{\lambda} Z_\zeta \zeta} \phi^2 + \frac{\lambda \mu^{2\epsilon}}{4!} \left(Z_4 + \frac{3Z_2^2}{Z_\zeta \zeta \lambda} \right) \phi^4 \\ & + \frac{\sigma^2}{2Z_\zeta \zeta \lambda} - \frac{\mu^{-\epsilon} \sigma}{\sqrt{\lambda}} J. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

A obtenção de um acoplamento linear em J e no campo auxiliar σ faz possível a expansão em diagramas 1PI do potencial efetivo, como é sabido da teoria usual [8].

Seja a Lagrangiana sem fontes

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(\phi, \sigma) = & \frac{Z}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{\mu^\epsilon Z_2 \sigma}{2\sqrt{\lambda} Z_\zeta \zeta} \phi^2 + \frac{\lambda \mu^{2\epsilon}}{4!} \left(Z_4 + \frac{3Z_2^2}{Z_\zeta \zeta \lambda} \right) \phi^4 \\ & + \frac{\sigma^2}{2Z_\zeta \zeta \lambda}. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\mathcal{L}(\phi, \sigma) = \bar{\mathcal{L}}(\phi, \sigma) - \frac{\mu^{-\epsilon} \sigma}{\sqrt{\lambda}} J. \quad (1.1.19)$$

Graças à introdução do campo escalar σ , as novas divergências produzidas por potências da fonte J foram apagadas da teoria. Aliás, o termo inercial encontra-se associado ao vértice de interação $\sigma\phi^2$.

O valor esperado do operador Δ quando $\epsilon = 0$ vai ser

$$\langle \Delta \rangle = -\frac{\langle \sigma \rangle}{\sqrt{\lambda}}. \quad (1.1.20)$$

1.2. Potencial efetivo associado

Considere-se a Lagrangiana (sem fontes) obtida após a transformada de Hubbard-Stratonovich:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(\phi, \sigma) = & \frac{Z}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{\mu^\epsilon Z_2 \sigma}{2\sqrt{\lambda} Z_\zeta \zeta} \phi^2 + \frac{\lambda \mu^{2\epsilon}}{4!} \left(Z_4 + \frac{3Z_2^2}{Z_\zeta \zeta} \right) \phi^4 \\ & + \frac{\sigma^2}{2Z_\zeta \zeta \lambda}. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Para encontrar o potencial efetivo associado a uma Lagrangiana, torna-se necessário fazer um deslocamento no(s) campo(s) que aparece(m) nela, obtendo assim uma quebra espontânea na simetria global sem mudar a estrutura divergente da teoria renormalizável [10, 11].

Sempre que este método for aplicado, o valor do deslocamento do campo corresponde ao seu valor esperado em um estado determinado de energia. No caso em que aquele valor seja dado pelo mínimo absoluto no potencial efetivo, afirma-se que ele vai corresponder ao vácuo real da teoria.

Neste caso, os deslocamentos correspondentes são: $\phi \rightarrow \phi + \phi_c$, $\sigma \rightarrow \sigma + \sigma_c$. Esses valores são considerados estacionários porque $\partial_\mu \phi_c = \partial_\mu \sigma_c = 0$. Então, após esta operação, e absorvendo alguns valores constantes, escreve-se a Lagrangiana como

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(\phi, \phi_c, \sigma, \sigma_c) = & \frac{Z}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda \mu^{2\epsilon}}{2} \left(Z_4 + \frac{3Z_2^2}{\lambda Z_\zeta \zeta} \right) + \frac{\mu^\epsilon Z_2 \sigma_c}{\sqrt{\lambda} Z_\zeta \zeta} \right] \phi^2 \\ & + \frac{\lambda \mu^{2\epsilon}}{4!} \left(Z_4 + \frac{Z_2^2}{\lambda Z_\zeta \zeta} \right) \phi^4 + \frac{\lambda \mu^{2\epsilon}}{3!} \left(Z_4 + \frac{3Z_2^2}{\lambda Z_\zeta \zeta} \right) \sigma_c \phi^3 \\ & + \frac{\mu^\epsilon Z_2}{2\sqrt{\lambda} Z_\zeta \zeta} \sigma \phi^2 + \frac{\mu^\epsilon Z_2}{\sqrt{\lambda} Z_\zeta \zeta} \sigma \phi \phi_c + \frac{\sigma^2}{2\lambda Z_\zeta \zeta} \\ & + \frac{\lambda \mu^{2\epsilon}}{4!} \left(Z_4 + \frac{3Z_2^2}{\lambda Z_\zeta \zeta} \right) \phi_c^4 + \frac{\mu^\epsilon Z_2}{2\sqrt{\lambda} Z_\zeta \zeta} \sigma_c \phi_c^2 + \frac{\sigma_c^2}{2\lambda Z_\zeta \zeta}. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Escrevendo a Lagrangiana (1.1.19) na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi, \phi_c, \sigma, \sigma_c) = & \frac{Z}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda \mu^{2\epsilon}}{2} \left(Z_4 + \frac{3Z_2^2}{\lambda Z_\zeta \zeta} \right) + \frac{\mu^\epsilon Z_2 \sigma_c}{\sqrt{\lambda} Z_\zeta \zeta} \right] \phi^2 \\ & + \frac{\lambda \mu^{2\epsilon}}{4!} \left(Z_4 + \frac{Z_2^2}{\lambda Z_\zeta \zeta} \right) \phi^4 + \frac{\lambda \mu^{2\epsilon}}{3!} \left(Z_4 + \frac{3Z_2^2}{\lambda Z_\zeta \zeta} \right) \sigma_c \phi^3 \\ & + \frac{\mu^\epsilon Z_2}{2\sqrt{\lambda} Z_\zeta \zeta} \sigma \phi^2 + \frac{\mu^\epsilon Z_2}{\sqrt{\lambda} Z_\zeta \zeta} \sigma \phi \phi_c + \frac{\sigma^2}{2\lambda Z_\zeta \zeta} \\ & + \mathcal{L}_I(\sigma_c, \phi_c), \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{L}_I(\sigma_c, \phi_c) = \frac{\lambda\mu^{2\epsilon}}{4!} \left(Z_4 + \frac{3Z_2^2}{\lambda Z_\zeta \zeta} \right) \phi_c^4 + \frac{\mu^\epsilon Z_2}{2\sqrt{\lambda} Z_\zeta \zeta} \sigma_c \phi_c^2 + \frac{\sigma_c^2}{2\lambda Z_\zeta \zeta} - \frac{\mu^{-\epsilon} \sigma}{\sqrt{\lambda}} J,$$

e da definição de ação efetiva [10]

$$\Gamma(\sigma_c) = W(J) - \int d^d x \frac{\mu^{-\epsilon} \sigma_c}{\sqrt{\lambda}} J,$$

é obtido o seguinte potencial clássico ³

$$V_{cl} = \frac{\lambda\mu^{2\epsilon}}{4!} \left(Z_4 + \frac{3Z_2^2}{\lambda Z_\zeta \zeta} \right) \phi_c^4 + \frac{\mu^\epsilon Z_2}{2\sqrt{\lambda} Z_\zeta \zeta} \sigma_c \phi_c^2 + \frac{\sigma_c^2}{2\lambda Z_\zeta \zeta}. \quad (1.2.3)$$

Sem este termo, a Lagrangiana sem fontes escreve-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_f(\phi, \phi_c, \sigma, \sigma_c) &= \frac{Z}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda\mu^{2\epsilon}}{2} \left(Z_4 + \frac{3Z_2^2}{\lambda Z_\zeta \zeta} \right) + \frac{\mu^\epsilon Z_2 \sigma_c}{\sqrt{\lambda} Z_\zeta \zeta} \right] \phi^2 \\ &+ \frac{\lambda\mu^{2\epsilon}}{4!} \left(Z_4 + \frac{Z_2^2}{\lambda Z_\zeta \zeta} \right) \phi^4 + \frac{\lambda\mu^{2\epsilon}}{3!} \left(Z_4 + \frac{3Z_2^2}{\lambda Z_\zeta \zeta} \right) \sigma_c \phi^3 \\ &+ \frac{\mu^\epsilon Z_2}{2\sqrt{\lambda} Z_\zeta \zeta} \sigma \phi^2 + \frac{\sigma^2}{2\lambda Z_\zeta \zeta} + \frac{\mu^\epsilon Z_2}{\sqrt{\lambda} Z_\zeta \zeta} \sigma \phi \phi_c. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

O último termo mistura os campos σ e ϕ . Portanto, substitui-se

$$\sigma \rightarrow \sqrt{\lambda}(\sigma - \mu^\epsilon Z_2 \phi_c \phi). \quad (1.2.5)$$

Desta forma, $\bar{\mathcal{L}}_f(\phi, \phi_c, \sigma, \sigma_c)$ vai ser

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_f(\phi, \phi_c, \sigma, \sigma_c) &= \frac{Z}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \left[\frac{\mu^{2\epsilon} \lambda}{2} \left(Z_4 + \frac{Z_2^2}{\lambda Z_\zeta \zeta} \right) \phi_c^2 + \frac{\mu^\epsilon Z_2 \sigma_c}{Z_\zeta \zeta} \right] \phi^2 \\ &+ \frac{\mu^{2\epsilon} \lambda}{4!} \left(Z_4 + \frac{3Z_2^2}{\lambda Z_\zeta \zeta} \right) \phi^4 + \frac{\mu^{2\epsilon} Z_4 \lambda}{3!} \phi_c \phi^3 \\ &+ \frac{Z_2}{2Z_\zeta \zeta} \sigma \phi^2 + \frac{\sigma^2}{2Z_\zeta \zeta}. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

A Lagrangiana livre (nível árvore) para o campo ϕ é dada pela seguinte igualdade:

$$\bar{\mathcal{L}}_f^{(0)} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{m_b^2}{2} \phi^2, \quad (1.2.7)$$

onde foi definida a massa do campo como $m_b^2 \equiv \lambda(\phi_c^2 + \sigma_c)$. O potencial efetivo neste regime vai ser dado pelo potencial clássico a ordem zero, i.e.,

$$V_{eff}^{(0)} = V_{cl}|_{0 \text{ laços}} = \frac{\lambda}{6} \phi_c^4 + \frac{\lambda \sigma_c}{2} \phi_c^4 + \frac{\lambda \sigma_c^2}{2}. \quad (1.2.8)$$

³O potencial efetivo até um laço é definido como a soma do potencial clássico dado pela equação (1.2.3) e a contribuição dada pelo laço fechado no termo da ação efetiva a primeira ordem.

Até o nível de um laço, as funções Z e a função ζ vão ser dadas por

$$\zeta = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{8\pi^2}, \quad (1.2.9)$$

$$Z_\zeta = 1 - \left(\frac{\lambda}{16\pi^2} \right) \frac{1}{2\epsilon}, \quad (1.2.10)$$

$$Z_2 = 1 - \left(\frac{\lambda}{16\pi^2} \right) \frac{1}{2\epsilon}, \quad (1.2.11)$$

$$Z_4 = 1 - \left(\frac{3\lambda}{16\pi^2} \right) \frac{1}{2\epsilon}, \quad (1.2.12)$$

enquanto que o termo para a ação efetiva escreve-se em termos da Lagrangiana livre (1.2.7) como

$$\exp(-\Gamma^{(1)}(\phi_c, \sigma_c)) = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m_b^2 \phi^2) \right].$$

Seguindo o método do cálculo encontrado em [9, 10], chega-se a

$$\bar{\mathcal{L}}_f^{(0)} = \frac{1}{2} \int d^4x' \phi(x) \mathcal{D}_{x,x'} \phi(x'),$$

se

$$\mathcal{D}_{x,x'} = \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x_\mu} \delta^{(4)}(x - x') + m_b^2 \delta^{(4)}(x - x').$$

A transformada de Fourier da quantidade anterior é

$$\mathcal{D}_{p,q}(p) = (p^2 + m_b^2) \delta^{(4)}(p - q).$$

Usando o fato que $Det A = \exp Tr \ln A$ na integral para o termo a um laço da ação efetiva,

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}(\phi_c, \sigma_c) &= -\ln \left\{ \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \phi(x) \mathcal{D}_{x,x'} \phi(x') \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} Tr \ln (\mathcal{D}). \end{aligned}$$

Efetuando o traço no espaço dos momentos e lembrando a definição para potencial efetivo, o termo a um laço vai ser

$$V_{eff,I}^{(1)} = \frac{1}{2(2\pi)^4} \int d^4p \ln(p^2 + m_b^2). \quad (1.2.13)$$

A integral acima calcula-se usando o seguinte procedimento [12]:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln(p^2 + m_b^2) &= - \frac{\partial}{\partial \alpha} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 + m_b^2)^\alpha} \Big|_{\alpha=0} \\
&= - \frac{\Gamma(-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{(m_b^2)^{-d/2}} \\
&= - \frac{\Gamma(-2 + \epsilon)}{(4\pi)^{2-\epsilon}} (m_b^2)^{2-\epsilon} \\
&= - \frac{m_b^4}{2(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln m_b^2 + \ln \mu^2 + \frac{3}{2} \right) \\
&= - \frac{m_b^4}{2(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \left[\frac{4\pi \exp(-\gamma) \mu^2}{m_b^2} \right] + \frac{3}{2} \right).
\end{aligned}$$

Na anterior equação foi introduzido um parâmetro de massa arbitrário na forma $\ln \mu^2$ para que o resultado final tenha as dimensões exatas, além de usar o fato que a dimensão é $d = 4 - 2\epsilon$, junto com o seguinte resultado para a expansão da função Gamma em torno de $\epsilon \rightarrow 0$ [8]:

$$\begin{aligned}
\Gamma(-n + \epsilon) &= \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi(n + 1) + \mathcal{O}(\epsilon) \right], \\
\Psi(n + 1) &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma,
\end{aligned} \tag{1.2.14}$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni. Agora, defina-se

$$\bar{\mu}^2 \equiv 4\pi \exp(-\gamma) \mu^2. \tag{1.2.15}$$

Introduzindo o valor da massa, ou seja, $m_b^2 = \lambda(\phi_c^2 + \sigma_c)$, o termo associado à integral (1.2.13) fica como

$$\begin{aligned}
V_{eff,I}^{(1)} &= \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{\lambda^2}{4} \phi_c^4 \ln \left(\frac{m_b^2}{\bar{\mu}^2} \right) + \frac{\lambda^2}{2} \sigma_c \phi_c^2 \ln \left(\frac{m_b^2}{\bar{\mu}^2} \right) + \frac{\lambda^2}{4} \sigma_c^2 \ln \left(\frac{m_b^2}{\bar{\mu}^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda^2}{\epsilon} \left(\frac{\phi_c^4}{4} + \sigma_c \phi_c^2 + \frac{\sigma_c^2}{4} \right) - \frac{3}{8} \lambda^2 (\phi_c^4 + 2\sigma_c \phi_c^2 + \sigma_c^2) \right].
\end{aligned} \tag{1.2.16}$$

Juntando os termos proporcionais a λ^2 no potencial clássico (1.2.3) [1]

$$\frac{\lambda^2}{16\pi^2} \left(\sigma_c \phi_c^2 + \frac{\sigma_c \phi_c^2}{2} \frac{1}{\epsilon} + \frac{\phi_c^4}{4} + \frac{\phi_c^4}{4} \frac{1}{\epsilon} + \sigma_c^2 + \frac{\sigma_c^2}{4} \frac{1}{\epsilon} \right), \tag{1.2.17}$$

e somando este resultado à igualdade (1.2.16), é obtido o seguinte potencial efetivo a nível de um laço:

$$\begin{aligned}
V_{eff}^{(1)} &= \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{\lambda^2}{4} \phi_c^4 \ln \left(\frac{m_b^2}{\bar{\mu}^2} \right) + \frac{\lambda^2}{2} \sigma_c \phi_c^2 \ln \left(\frac{m_b^2}{\bar{\mu}^2} \right) + \frac{\lambda^2}{4} \sigma_c^2 \ln \left(\frac{m_b^2}{\bar{\mu}^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda^2}{8} \phi_c^4 + \frac{\lambda^2}{4} \sigma_c \phi_c^2 + \frac{5}{8} \lambda^2 \sigma_c^2 \right].
\end{aligned} \tag{1.2.18}$$

Levando em conta o termo a nível árvore, o potencial efetivo até um laço vai ser

$$\begin{aligned}
V_{eff} = & \frac{\lambda}{6}\phi_c^4 + \frac{\lambda\sigma_c}{2}\phi_c^2 + \frac{\lambda\sigma_c^2}{2} + \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{\lambda^2}{4}\phi_c^4 \ln\left(\frac{m_b^2}{\bar{\mu}^2}\right) \right. \\
& + \frac{\lambda^2}{2}\sigma_c\phi_c^2 \ln\left(\frac{m_b^2}{\bar{\mu}^2}\right) + \frac{\lambda^2}{4}\sigma_c^2 \ln\left(\frac{m_b^2}{\bar{\mu}^2}\right) - \frac{\lambda^2}{4}\sigma_c\phi_c^2 \\
& \left. - \frac{3}{8}\lambda^2\phi_c^4 \right].
\end{aligned} \tag{1.2.19}$$

1.3. Quebra dinâmica da simetria e geração de massas

Lembrando que no início da seção anterior o campo escalar ϕ não tinha massa; a mesma era gerada pela introdução dos campos clássicos σ_c e ϕ_c após da transformada de Hubbard-Stratonovich, produzindo uma quebra na simetria associada ao sistema, neste caso, a invariância na Lagrangiana na troca de ϕ por $-\phi$ (simetria discreta Z_2). Portanto, afirma-se que a simetria foi quebrada de forma dinâmica.

No mecanismo de Goldstone (quebra espontânea da simetria), a massa do campo é gerada por um termo perturbativo de autointeração e segundo o sinal da parte harmônica no potencial [13], gerando campos não massivos com energia cinética não nula [14]. A diferença com o caso estudado encontra-se em que o campo auxiliar introduzido não carrega momento linear, embora o seu valor esperado no vácuo (campo clássico) produza a massa do campo ϕ .

Um exemplo de geração dinâmica das massas é dado pelo modelo de Nambu e Jona-Lasinio, onde é suposto que esta quantidade encontra-se associada à interação entre férmions com quiralidades opostas [15]; por esta razão, é dito que a massa está relacionada com a quebra da simetria quiral.

Capítulo 2

O modelo de Gross-Neveu

Nesta parte, apresentam-se algumas propriedades do modelo formulado em [4] para simular algumas das características da Cromodinâmica Quântica, como por exemplo:

- Uma constante de acoplamento que diminui o seu valor em um regime de energias muito altas (ou comprimentos pequenos), fazendo possível a obtenção de melhores resultados em teoria de perturbações. Isto é conhecido como liberdade assintótica.
- Geração de massas dos férmions do modelo induzindo uma quebra na simetria quiral da Lagrangiana.

A primeira característica é estudada segundo o comportamento que a constante de acoplamento apresenta no limite de um número de férmions N grande. De forma equivalente, pode estudar-se a função do grupo de renormalização associada para observar o limite no caso de uma escala de energia grande.

No caso da geração de massas, é estudado o potencial efetivo associado à teoria usando um campo escalar auxiliar seguindo uma analogia com a teoria de Yukawa para encontrar uma Lagrangiana equivalente (devido ao fato de apresentar spin semi-inteiro, não é possível associar um potencial efetivo a um campo fermiônico -a sua antisimetria faz que essa quantidade seja nula-), e desta forma, encontrar os mínimos do potencial que vão dar conta da aparição do termo inercial no campo fermiônico.

2.1. Características principais

O modelo é definido por uma Lagrangiana para N férmions de Dirac em duas dimensões espaço-temporais [4]

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \frac{1}{2}g^2(\bar{\psi}\psi)^2, \quad (2.1.1)$$

onde

$$\bar{\psi}\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\psi}_i\psi_i,$$

e $(\bar{\psi}\psi)^2$ é um vértice fermiônico de auto-interação. A Lagrangiana dada acima fica invariante sob a seguinte transformação discreta.

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \gamma_5\psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow -\bar{\psi}\gamma_5.\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

Embora a Lagrangiana (2.1.1) não represente uma teoria gauge de gauge não abeliana (p. ex. com cor), ela tem duas das propriedades associadas à interação forte:

1. Quebra dinâmica da simetria quiral quando há geração de massa.
2. Liberdade assintótica

Este último fato será mostrado depois, e ocorre porque no limite de N grande,

$$\lambda = g^2 N.\tag{2.1.3}$$

g^2 torna-se pequeno nesta consideração para N (quantidade que pode ser chamada de “número de cores”), fazendo possível uma expansão perturbativa.

Comparando a Hamiltoniana do vértice fermiônico

$$\mathcal{H}_I = -\frac{1}{2}g^2 (\bar{\psi}\psi)^2,\tag{2.1.4}$$

com o potencial dado para uma Lagrangiana de Yukawa

$$\mathcal{L}' = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + gm\bar{\psi}\psi\phi,\tag{2.1.5}$$

afirma-se que as duas interações são equivalentes no limite $m \rightarrow \infty$ (a parte cinética do campo escalar pode ser ignorada), mas isto é possível quando os vértices igm e os propagadores $i/(p^2 - m^2)$ são misturados de forma que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{i(igm)^2}{p^2 - m^2} = ig^2,$$

até qualquer ordem em teoria de perturbações. Então, fazendo o seguinte re-escalamento no campo escalar ϕ

$$\sigma = m\phi,\tag{2.1.6}$$

é obtido que

$$\mathcal{L}_\sigma = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - \frac{1}{2}\sigma^2 - g\bar{\psi}\psi\sigma.\tag{2.1.7}$$

Para encontrar este resultado, foi necessário considerar que no limite $m \rightarrow \infty$, dois vértices do tipo $gm\bar{\psi}\psi\phi$ são equivalentes a um vértice de 4 férmions $g^2 (\bar{\psi}\psi)^2 / 2$. Isto se deve ao fato de que a Lagrangiana (2.1.5) não tem termo de auto-correção.

Portanto, para o funcional gerador deste modelo, afirma-se que

$$\begin{aligned}
Z(\eta, \bar{\eta}) &= N \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ i \left[i\bar{\psi} \not{\partial} \psi + \frac{1}{2} g^2 (\bar{\psi} \psi)^2 + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right] \right\} \\
&= N' \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\sigma \exp \left[i \left(i\bar{\psi} \not{\partial} \psi - \frac{1}{2} \sigma^2 - g \bar{\psi} \psi \sigma \right) + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right].
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Na segunda igualdade, completa-se o quadrado para σ somando e subtraindo a quantidade $-g^2 (\bar{\psi} \psi)^2 / 2$. Pelo fato de ser uma gaussiana deslocada da origem, a integração nos campos σ somente redefine a constante de normalização N , obtendo o funcional gerador original. De forma equivalente, as duas funcionais produzem funções de Green iguais. Por outro lado, na Lagrangiana (2.1.7) apresenta-se uma invariância sob as transformações dadas pela inversão do campo σ e pela mudança dada pela equação (2.1.2).

Até a primeira ordem em teoria de perturbações (1 laço), ou em termos de g^2 (segundo a igualdade (2.1.3)), até ordem $1/N$, não é necessário renormalizar o campo $\bar{\psi}$ nem o vértice $\bar{\psi} \psi \sigma$. Neste caso, como o termo completo de interação é $-g \bar{\psi} \psi \sigma$, define-se a constante de acoplamento renormalizada g_R como

$$g_R = g_0 \sqrt{Z_\sigma},$$

onde Z_σ é a constante de renormalização do campo σ e g_0 é a constante de acoplamento nua. Desta forma, a função $\beta(g)$ do grupo de renormalização fica como

$$\begin{aligned}
\beta(g) &= \mu \left. \frac{\partial g_R}{\partial \mu} \right|_{g_0, \Lambda} \\
g \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \sqrt{Z_\sigma} &= g \gamma_\sigma(g).
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Λ é o parâmetro de cutoff do momento no regime ultra-violeta. Lembrando que uma mudança no parâmetro de re-escalamento μ é compensada com uma variação em outras quantidades (como por exemplo, a constante de acoplamento e a escala dos campos), o propagador normalizado do campo σ fornece a seguinte equação de grupo de renormalização:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + 2\gamma_\sigma \right] D_R(p, \mu) = 0. \tag{2.1.10}$$

Este propagador é obtido do de auto-energia do campo σ mostrado na figura 1.

A contribuição divergente escreve-se como

$$\Pi(p) = \frac{i\lambda}{2\pi} \int_0^1 d\alpha \left[\ln \left(\frac{-\Lambda^2}{\alpha(1-\alpha)p^2} \right) - 2 \right], \tag{2.1.11}$$

da qual é subtraído o caso onde $p^2 = -\mu^2$. Então, a parte finita vai ser

$$\Pi_R(p^2, \mu^2) = -\frac{i\lambda}{2\pi} \ln \left(\frac{-p^2}{\mu^2} \right). \tag{2.1.12}$$

Seja

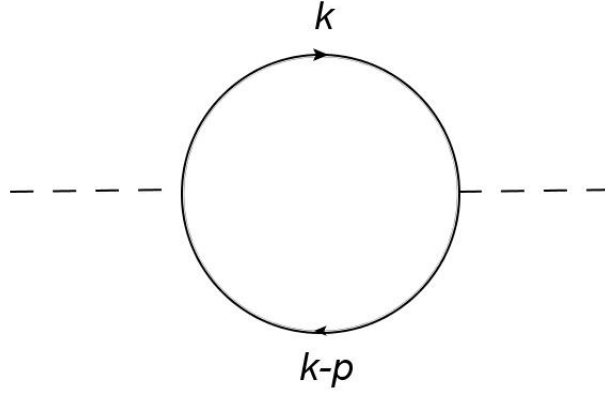


Figura 2.1: Autoenergia do campo escalar auxiliar σ .

$$D_R(p^2, \mu^2) = \frac{-i}{1 + i\Pi_R(p^2, \mu^2)}.$$

Portanto,

$$D_R(p^2, \mu^2) = \frac{-i}{1 + \frac{\lambda}{2\pi} \ln\left(\frac{-p^2}{\mu^2}\right)}. \quad (2.1.13)$$

Daqui é possível obter na igualdade (2.1.10) que

$$\beta g = -\frac{\lambda g}{2\pi} \gamma_\sigma(g) = -\frac{\lambda}{2\pi}. \quad (2.1.14)$$

Como o sinal da função $\beta(g)$ é negativo, a teoria apresenta liberdade assintótica.

2.2. Potencial efetivo

Até agora, a Lagrangiana de Gross-Neveu apresenta invariância ao fazer as trocas $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$ e $\sigma \rightarrow -\sigma$, mas no modelo apresenta-se o seguinte problema: o vácuo inicial não é o vácuo real da teoria. Isto deve-se a que as massas próprias associadas à quantidade p^2 no diagrama de auto-energia do campo σ são negativas. Para resolver isto, soma-se à Lagrangiana um termo $\bar{\psi}\psi$ acoplado a uma fonte externa constante.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - M) \psi + \frac{1}{2} g^2 (\bar{\psi}\psi)^2, \quad (2.2.1)$$

$$\mathcal{L}_\sigma = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - M) \psi - \frac{1}{2} \sigma^2 - g\sigma \bar{\psi}\psi. \quad (2.2.2)$$

A diferença em relação ao caso anterior está no fato que $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$, porque a introdução deste termo quebra a simetria quiral. Este valor esperado vai estar relacionado com o valor do campo σ no estado de vácuo, mas para encontrar um estado que possa ser considerado estável, torna-se necessário calcular as correções radiativas devidas à auto-interação fermiônica, de forma que as contribuições finitas desloquem o estado de mínima energia com valor nulo a um estado não trivial ($\sigma \neq 0$), quebrando espontaneamente a simetria de troca $\sigma \rightarrow -\sigma$ [15].

O anteriormente dito torna-se possível ao encontrar a ação efetiva em termos do campo escalar clássico σ_c (valor esperado de σ tal que $\partial_\mu \sigma = 0$). A nível árvore,

$$V_{eff}^{(0)} = \frac{1}{2}\sigma_c^2. \quad (2.2.3)$$

Até um laço, e considerando um cutoff no ultra-violeta para o momento do férmion,

$$V_{eff}(\sigma_c) = \frac{1}{2}\sigma_c^2 - \frac{\lambda}{4\pi}\sigma_c^2 [\ln \Lambda^2 + 1 - \ln(g^2\sigma_c^2)]. \quad (2.2.4)$$

Renormalizando o potencial substraindo a igualdade acima dada testada em um valor σ_0 , é obtido que

$$V_{eff}(\sigma_c) = \frac{1}{2}\sigma_c^2 + \frac{\lambda}{4\pi}\sigma_c^2 \left[\ln \left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2} \right) - 3 \right]. \quad (2.2.5)$$

O valor $\sigma = 0$, além de ser um vácuo instável (daí que se produzem massas não mensuráveis), impossibilita a imposição das condições que deve fornecer o valor mínimo do potencial, i.e,

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \sigma_c} \right|_{\sigma_c} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma_c^2} \right|_{\sigma_c} > 0.$$

As duas igualdades acima seriam infinitas se $\sigma_c = 0$ (divergências infra-vermelhas).

Como o campo ψ apresenta antissimetria (spin semi-inteiro), não é possível associar-lhe um potencial efetivo e portanto, é impossível gerar um estado de mínima energia. É por isto que se trabalha com os possíveis valores mínimos de $V_{eff}(\sigma_c)$, dos quais é deduzido um valor esperado para $\bar{\psi}\psi$, fazendo perceptível uma quebra na simetria quiral; neste caso, os valores mínimos do potencial (2.2.5) são

$$\sigma_M = \pm \sigma_0 \exp \left(1 - \frac{\pi}{\lambda} \right). \quad (2.2.6)$$

No potencial de Yukawa, afirma-se que $\sigma = g\bar{\psi}\psi$. Portanto, a massa do campo fermiônico vai ser

$$M_F = g\sigma_0 \exp \left(1 - \frac{\pi}{\lambda} \right). \quad (2.2.7)$$

A afirmação dada acima ($\sigma = g\bar{\psi}\psi$) só é possível de fazer quando é estudado o limite de cutoff $\Lambda_c \rightarrow \infty$ no funcional gerador $\mathcal{W}(J)$ para um campo Σ da forma

$$\Sigma = g\bar{\psi}\psi,$$

onde

$$\exp(i\mathcal{W}(J)) = N \int \mathcal{D}\psi \bar{\psi} \exp \left\{ i \left[\bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \frac{1}{2} g^2 (\bar{\psi}\psi)^2 + J g \bar{\psi}\psi \right] \right\}. \quad (2.2.8)$$

Define-se o campo clássico σ_c como

$$\Sigma_c = \frac{\partial \mathcal{W}(J)}{\partial J} = \langle 0 | g \bar{\psi}\psi | 0 \rangle. \quad (2.2.9)$$

O potencial efetivo correspondente escreve-se da forma

$$\mathcal{V}(\Sigma_c) = \Sigma_c J - \mathcal{W}(J). \quad (2.2.10)$$

Esta última quantidade é interpretada como a densidade de energia em um estado no qual o valor esperado é Σ_c ; aliás, $\mathcal{V}(\Sigma_c)$ precisa ser estacionário no estado base, ou em outras palavras,

$$\frac{\partial \mathcal{V}(\Sigma_c)}{\partial \Sigma_c} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{V}(\Sigma_c)}{\partial \Sigma_c^2} > 0.$$

Para construir o potencial associado ao operador composto $g\bar{\psi}\psi$, introduz-se a seguinte constante independente de J no funcional gerador:

$$\int \mathcal{D}\sigma \exp \left[-\frac{1}{2} (\sigma - J - g\bar{\psi}\psi)^2 \right].$$

Então,

$$\exp(i\mathcal{V}(J)) = N \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\sigma \exp \left[i \left(\bar{\psi} i \not{\partial} \psi - \frac{1}{2} \sigma^2 + g\sigma \bar{\psi}\psi + \sigma J - \frac{1}{2} J^2 \right) \right]. \quad (2.2.11)$$

Mas

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\sigma \exp \left(\bar{\psi} i \not{\partial} \psi - \frac{1}{2} \sigma^2 + g\sigma \bar{\psi}\psi + \sigma J \right) = \exp(W(J)).$$

Portanto,

$$\mathcal{W}(J) = W(J) - \frac{1}{2} J^2. \quad (2.2.12)$$

Deste modo, Σ_c vai ser

$$\begin{aligned} \Sigma_c &= \frac{\partial \mathcal{W}(J)}{\partial J} \\ &= \frac{\partial W(J)}{\partial J} - J = \sigma_c - J, \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

e o potencial efetivo escreve-se como

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\Sigma_c) &= \Sigma_c J - \mathcal{W} \\ &= (\sigma_c - J)J - \left(W - \frac{1}{2} J^2 \right) \\ &= V(\sigma_c) - \frac{1}{2} J^2. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Agora, introduz-se uma constante de renormalização Z_σ na Lagrangiana tal que a constante de acoplamento renormalizada fica definida como

$$g_R = g_0 (Z_\sigma)^{1/2}. \quad (2.2.15)$$

Trocamos os termos de interação na Lagrangiana por

$$\bar{\psi}i\not{\partial}\psi + \frac{1}{2}g^2Z_\sigma^{-1}(\bar{\psi}\psi)^2 + gJZ_\sigma^{-1}\bar{\psi}\psi,$$

fazendo possível a obtenção de funções de Green renormalizadas do funcional $\mathcal{W}(J)$. De forma análoga, troca-se a Lagrangiana \mathcal{L}_σ por

$$-\frac{1}{2}Z_\sigma^{-1}\sigma^2 + Z_\sigma^{-1}g\sigma\bar{\psi}\psi + Z_\sigma^{-1}\sigma J.$$

Seja o seguinte potencial renormalizado

$$\mathcal{V}(\Sigma_c) = V(\sigma_c) - \frac{1}{2}Z_\sigma^{-1}J^2, \quad (2.2.16)$$

onde

$$\Sigma_c = \sigma_c - Z_\sigma^{-1}J. \quad (2.2.17)$$

Em termos do parâmetro de cutoff,

$$Z_\sigma = 1 + \frac{\lambda}{\pi}g^2 \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right).$$

Então,

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z_\sigma^{-1} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\pi}g^2 \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)} = 0,$$

de onde é possível afirmar que $\Sigma_c = \sigma_c$, portanto, $\mathcal{V}(\Sigma_c)$ coincide com o potencial $V(\sigma_c)$.

2.3. Ordens superiores

Neste regime, as funções de Green e os parâmetros do grupo de renormalização apresentam um pólo em $\lambda = 0$, fazendo com que qualquer série em termos desta constante de acoplamento não seja convergente; isto é um fato associado ao comportamento no ultra-violeta de uma teoria renormalizável, embora exista um grande número de gráficos de Feynman divergentes para este caso.

Por outro lado, este fato não é impedimento para construir quantidades usando um método perturbativo, característica relacionada com o carácter assintótico da teoria, a qual tem uma função $\beta(g)$ em $d = 2 + \epsilon$ dimensões (com $\epsilon \rightarrow 0$) da forma

$$\beta(g) = -\frac{g\lambda}{2\pi} + \epsilon g \quad (2.3.1)$$

O ponto estável no ultra-violeta é dado por $g_0^2 N = 2\pi\epsilon$, de onde é possível dizer que a quebra espontânea da simetria acontece para $g > g_0$

2.4. Liberdade assintótica

A liberdade assintótica é a possibilidade de aplicar métodos perturbativos em uma teoria no regime de distâncias muito pequenas, ou de forma reversa, para momentos (e energias) muito grandes. Isto ocorre se a constante de acoplamento do modelo tem um valor muito menor que 1 para escalas de energia que produzam este regime. Um exemplo onde não surge esta propriedade é dado pela Eletrodinâmica Quântica: sua constante de acoplamento (constante de estrutura fina) adquire um valor muito grande na medida que a energia é acrescentada acima da escala na que é possível aplicar métodos perturbativos.

Como foi dito anteriormente, o modelo estudado apresenta liberdade assintótica, um fato de grande ajuda na aproximação perturbativa a energias muito altas. Entretanto (com respeito a partículas), este modelo não é realista, muito diferente das teorias gauge em 4 dimensões que também são assintoticamente livres [17], mas ele pode ser usado para estudar algumas propriedades destes modelos.

Capítulo 3

Aplicação de Operadores Compostos Locais ao modelo de Gross-Neveu

Com ajuda do desenvolvimento apresentado no capítulo 1, aplica-se o formalismo de LCO ao modelo de Gross-Neveu em 2 dimensões (como foi feito em [2, 3]). Neste caso, o acoplamento fonte-operador é da forma

$$J\bar{\psi}\psi,$$

e como no caso anterior, são introduzidos novos contratermos dependentes do termo de fonte. Mostra-se que, em contraste com o que foi feito no capítulo anterior para introduzir o campo escalar auxiliar, não se torna necessário fazer uma analogia com a Lagrangiana de outra teoria. Esta tarefa é feita encontrando a transformada de Hubbard-Stratonovich apropriada, removendo a dependência em potências de J , e modificando alguns termos da Lagrangiana inicial.

Da Lagrangiana equivalente obtida, é definido um LCO adequado que será usado para gerar a ação efetiva correspondente e encontrar a massa associada ao campo espinorial com ajuda do campo escalar auxiliar, o que é feito estudando a quebra espontânea na simetria do potencial efetivo devida às correções dadas pelo vértice de 4 férmions. O resultado final é dado até primeira ordem em teoria de perturbações.

3.1. Procedimento inicial

Introduzindo um termo de fonte acoplado ao operador composto $\bar{\psi}\psi$, a Lagrangiana de Gross-Neveu escreve-se como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\not{\partial} + J)\psi - \frac{g^2}{2}\mu^\epsilon(\bar{\psi}\psi)^2 + \mathcal{L}_{CT}. \quad (3.1.1)$$

A dimensão do espaço euclidiano considerado neste problema é $d = 2 - \epsilon$. Como no caso do campo escalar, é introduzida uma quantidade em função da fonte J , que produz novos contratermos na Lagrangiana modificando a equação (3.1.1) na seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\not{\partial} + J)\psi - \frac{g^2}{2}\mu^\epsilon(\bar{\psi}\psi)^2 - \frac{\zeta}{2}\mu^{-\epsilon}J^2 + \mathcal{L}_{CT}. \quad (3.1.2)$$

Os contra-termos correspondentes são

$$\mathcal{L}_{CT} = \delta Z \bar{\psi} \not{\partial} \psi + \delta Z_2 J \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2} \delta Z_g g^2 \mu^\epsilon (\bar{\psi} \psi)^2 - \frac{1}{2} \mu^{-\epsilon} \delta \zeta J^2, \quad (3.1.3)$$

dos quais são definidas as seguintes funções Z .

$$\begin{aligned} Z &= 1 + \delta Z, \\ Z_2 &= 1 + \delta Z_2, \\ Z_g &= 1 + \delta Z_g. \end{aligned}$$

Portanto, a Lagrangiana vestida (com os contratermos) vai ser

$$\mathcal{L} = Z \bar{\psi} \not{\partial} \psi + Z_2 J \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2} Z_g g^2 \mu^\epsilon (\bar{\psi} \psi)^2 - \frac{\zeta + \partial \zeta}{2} \mu^{-\epsilon} J^2,$$

de onde é possível definir as seguintes quantidades nuas:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= Z^{1/2} \psi, \quad J_0 = \frac{Z_2}{Z} J, \\ g_0^2 &= \frac{\mu^\epsilon Z_g}{Z^2} g^2, \quad \zeta_0 J_0^2 = (\zeta + \delta \zeta) \mu^{-\epsilon} J^2. \end{aligned}$$

Novamente, é usado o fato que o funcional gerador $W(J)$ de funções conexas de uma partícula não pode depender de μ porque dela são obtidas funções conexas finitas que independem de μ . Então, aplicando a regra da cadeia, é obtida a seguinte equação do grupo de renormalização para este funcional.

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial g^2}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial g^2} + \mu \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \mu \int d^d x \frac{\partial J}{\partial \mu} \frac{\delta}{\delta J} \right) W(J) = 0$$

Usando a relação entre a fonte nua e a fonte vestida e levando em conta as seguintes funções do grupo de renormalização

$$\beta(g^2) = \mu \frac{\partial g^2}{\partial \mu}, \quad (3.1.4)$$

$$\eta(g^2, \zeta) = \mu \frac{\partial \zeta}{\partial \mu}, \quad (3.1.5)$$

$$\gamma_2(g^2) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \left(\frac{Z_2}{Z} \right), \quad (3.1.6)$$

vai se obter a seguinte equação do grupo de renormalização para o funcional gerador $W(J)$.

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g^2) \frac{\partial}{\partial g^2} - \gamma_2(g^2) \int d^d x J \frac{\delta}{\delta J} + \eta(g^2, \zeta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] W(J) = 0. \quad (3.1.7)$$

Esta equação é homogênea, mas para estudar o comportamento da função $\eta(g^2, \zeta)$ em termos do parâmetro de re-escalamento é lembrado o fato que a quantidade nua $\zeta_0 J_0^2$ não depende explicitamente de μ , i.e,

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} (\zeta_0 J_0^2) \Big|_{\epsilon, \zeta_0, J_0} = 0.$$

Daqui é obtido que

$$\mu \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \Big|_{\epsilon, \zeta_0, J_0} = 2\gamma_2(g^2)\zeta + \delta(g^2), \quad (3.1.8)$$

onde

$$\delta(g^2) = \epsilon \delta \zeta + 2\gamma_2(g^2)\delta \zeta - \mu \frac{\partial \delta \zeta}{\partial \mu}. \quad (3.1.9)$$

Isto sugere que ζ seja novamente função de g^2 só, porque como no caso da teoria $\lambda\phi^4$, esta constante de acoplamento tem um valor arbitrário para um dado μ . Invertendo os operadores de derivação na função do grupo de renormalização para $\beta(g^2)$, é obtido que

$$\beta(g^2) \frac{d\zeta}{dg^2}(g^2) = 2\gamma_2(g^2)\zeta + \delta(g^2). \quad (3.1.10)$$

Isto implica que $\zeta(g^2)$ pode ser expandida como uma série de Laurent do tipo

$$\zeta(g^2) = \frac{c_{-1}}{g^2} + c_0 + c_1 g^2 + \dots \quad (3.1.11)$$

Portanto, a equação do grupo de renormalização muda para

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g^2) \frac{\partial}{\partial g^2} - \gamma_2(g^2) \int d^d x J \frac{\delta}{\delta J} \right] W(J) = 0. \quad (3.1.12)$$

Este resultado permite definir uma função Z_ζ tal que

$$\frac{\zeta + \delta \zeta}{2} \mu^{-\epsilon} J^2 = \frac{Z_\zeta}{2} \mu^{-\epsilon} \zeta J^2.$$

Agora, da Lagrangiana nua

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}_0 (\not{\partial} + J_0) \psi - \frac{g_0^2}{2} (\bar{\psi}_0 \psi_0)^2 - \frac{\zeta_0 J_0^2}{2},$$

e das quantidades nuas dadas anteriormente, formula-se o seguinte operador composto local:

$$\Delta = Z_2 \bar{\psi} \psi - \frac{Z_\zeta}{2} \mu^{-\epsilon} \zeta J. \quad (3.1.13)$$

Portanto, da Lagrangiana é deduzido que

$$\langle \Delta \rangle = \frac{\delta W}{\delta J},$$

porque

$$\mathcal{L}(J) = Z \bar{\psi} \not{\partial} \psi + \Delta J - \frac{Z_g}{2} \mu^{-\epsilon} g^2 (\bar{\psi} \psi)^2.$$

Desta forma, vai ser possível formular uma transformação de Hubbard-Stratonovich do tipo

$$1 = \int \mathcal{D}\sigma \exp \left[-\frac{1}{2Z_\zeta \zeta} \int d^d x \left(\frac{\sigma}{g} + \mu^{\epsilon/2} Z_2 \bar{\psi} \psi - \mu^{-\epsilon/2} Z_\zeta \zeta J \right)^2 \right],$$

a qual é introduzida no funcional gerador

$$Z(J) = \exp(-W(J)) = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[- \int d^d x \mathcal{L}(J) \right].$$

Neste caso,

$$\mathcal{L}(J) = Z \bar{\psi} \not{\partial} \psi + Z_2 J \bar{\psi} \psi - \frac{Z_g}{2} \mu^\epsilon g^2 (\bar{\psi} \psi)^2 - \frac{Z_\zeta}{2} \mu^{-\epsilon} \zeta J^2. \quad (3.1.14)$$

A transformada de Hubbard-Stratonovich apaga o termo proporcional a J^2 e o acoplamento fonte-operador composto, trocando a Lagrangiana acima por

$$\mathcal{L}(J) = \mathcal{L}(\bar{\psi}, \psi, \sigma) - \frac{\sigma}{g} \mu^{-\epsilon/2} J, \quad (3.1.15)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\bar{\psi}, \psi, \sigma) = & Z \bar{\psi} \not{\partial} \psi + \frac{Z_2}{g^2 Z_\zeta \zeta} g \sigma \mu^{\epsilon/2} \bar{\psi} \psi - \frac{g^2}{2} \mu^\epsilon (\bar{\psi} \psi)^2 \left(Z_g - \frac{Z_2^2}{Z_\zeta \zeta g^2} \right) \\ & + \frac{\sigma^2}{2Z_\zeta \zeta g^2}. \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

σ é um campo auxiliar que não tem pernas externas ($\partial_\mu \sigma = 0$). Portanto, vai ser possível encontrar as funções 1PI do problema em termos deste campo, obtendo assim a ação efetiva até qualquer ordem e comprovando a renormalizabilidade da teoria. Isto é feito calculando o valor esperado do operador Δ , i.e (no limite $\epsilon \rightarrow 0$),

$$\langle \Delta \rangle = -\frac{\langle \sigma \rangle}{g}. \quad (3.1.17)$$

3.2. Potencial efetivo

O objetivo principal é procurar a possibilidade na que efeitos não perturbativos possam ser vistos na teoria de perturbações, escolhendo uma ação efetiva para operadores compostos locais como a quantidade a expandir em termos da constante de acoplamento do operador em estudo [3].

Introduzindo o termo de acoplamento entre o operador composto $\bar{\psi} \psi$ e a fonte J , sem levar em conta o vértice de quatro férmions, a Lagrangiana livre do modelo de Gross-Neveu escreve-se como

$$\mathcal{L}_f(\bar{\psi}, \psi) = \bar{\psi} \not{\partial} \psi + J \bar{\psi} \psi. \quad (3.2.1)$$

Daqui, define-se o propagador livre na forma

$$S_f(q) = \frac{\delta^{ab}}{i\not{q} + J}. \quad (3.2.2)$$

O termo de fonte J vai ser considerado como a “massa” da partícula. O diagrama associado vai ser

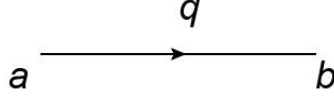


Figura 3.1: Diagrama de Feynman para um férmion livre.

O vértice de 4 férmions vai ter o seguinte diagrama associado:

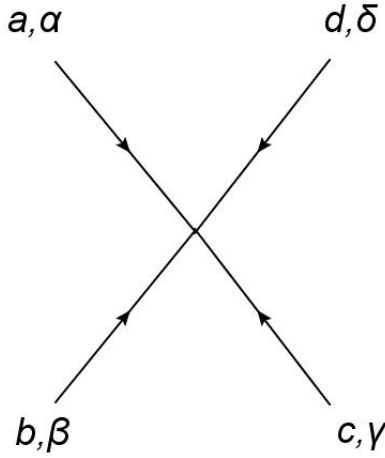


Figura 3.2: Vértice de interação de 4 férmions.

Todos os momentos dos férmions vão para o centro do vértice. A regra associada é [18]

$$ig(\delta^{ab}\delta^{cd}C_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta} + \delta^{ac}\delta^{bd}C_{\alpha\gamma}C_{\delta\beta} + \delta^{ad}\delta^{bc}C_{\alpha\delta}C_{\beta\gamma}) \quad (3.2.3)$$

As letras a, b, c, d indicam cada uma das pernas do vértice. É possível perceber que a forma na qual foi escrita a regra assemelha-se ao vértice de 4 bósons em uma teoria de Yang-Mills [19], trocando as constantes de estrutura pelo produto $\delta^{ab}\delta^{cd}C_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta}$ e suas possíveis permutações nos índices e subíndices. As matrizes C dadas acima são operadores de conjugação de carga com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} C^\dagger C &= 1, \\ C &= -C^\dagger = -C^T, \\ Tr C &= C_\alpha^\alpha = 0. \end{aligned}$$

Segundo o procedimento em [18], o diagrama associado à autoenergia do férmion é obtido fechando o vértice de interação em duas pernas, incluindo o propagador livre dado acima para poder fazer a integração no laço. As figuras seguintes mostram esse diagrama e o gráfico associado à correção ao vértice a primeira ordem em teoria de perturbações.

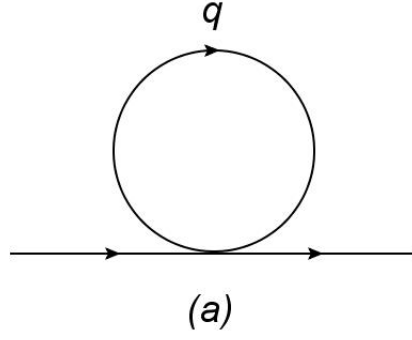


Figura 3.3: Autoenergia do férmion a um laço.

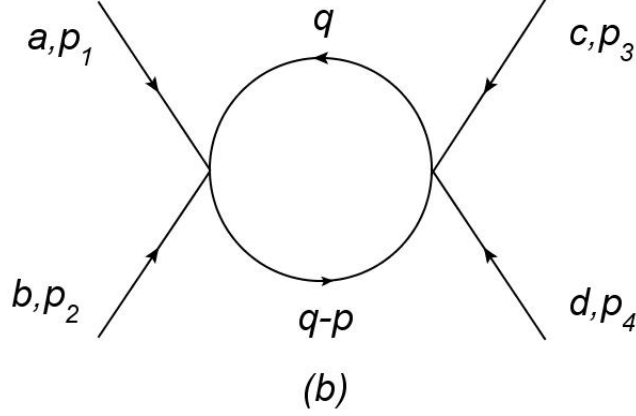


Figura 3.4: Correção ao vértice de 4 férmions a um laço.

O operador conjugação de carga C atua como um tensor métrico sobre as matrizes Gamma de Dirac dos propagadores ¹. No diagrama (a), a contração nos índices é feita levando em conta que o propagador fermiônico carrega à direita uma matriz δ e que no numerador (após multiplicar acima e embaixo por $-i\not{q} + J$) a fonte J tem um operador C à direita com os índices que vão ser reduzidos, i.e, $[-i\not{q} + J]^{\alpha\beta} = -i\not{q}^{\alpha\beta} + JC^{\alpha\beta}$. Então, o integrando vai ser

$$\frac{[-i\not{q} + J]^{\alpha\beta}}{q^2 + J^2} \delta^{ab} i g^2 \mu^\epsilon (\delta^{ab} \delta^{cd} C_{\alpha\beta} C_{\gamma\delta} + \delta^{ac} \delta^{db} C_{\alpha\gamma} C_{\delta\beta} + \delta^{ad} \delta^{bc} C_{\alpha\delta} C_{\beta\gamma}).$$

Ignorando um fator comum dado pelo produto das matrizes C e δ , o resultado correspondente é

$$(a) = 2iJg^2\mu^\epsilon \left(N - \frac{1}{2}\right) \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + J^2}. \quad (3.2.4)$$

Neste caso, estamos utilizando férmions de Dirac. Seguindo o esquema de regularização dimensional [8] em um espaço tempo euclídeo, considera-se a seguinte integral em d dimensões [20]:

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + m^2)^N} = \frac{\Gamma(N - D/2)}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(N)} \frac{1}{(m^2)^{N-D/2}}. \quad (3.2.5)$$

A contribuição divergente está dada pela igualdade

¹Como o espaço é euclídeo, a métrica utilizada é $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1)$

$$(a)_{div} = i \left(N - \frac{1}{2} \right) g^2 \frac{J}{\pi \epsilon}.$$

Portanto (e lembrando que $Z = 1$ até primeira ordem em teoria de perturbações) se a fonte nua é

$$J_0 = Z_2 J = (1 + \delta Z_2) J,$$

onde

$$\delta Z_2 = - \left(N - \frac{1}{2} \right) \frac{g^2}{\pi \epsilon},$$

a função Z_2 até um laço fica como

$$Z_2 = 1 - \left(N - \frac{1}{2} \right) \frac{g^2}{\pi \epsilon}. \quad (3.2.6)$$

A figura (5) é obtida do produto de dois vértices de quatro férmions, cuja integral associada é [18]

$$(b) = \frac{(ig^2 \mu^\epsilon)^2}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{[-i\not{q} + J]^{\nu\rho} [-i(\not{q} - \not{p}) + J]^{\sigma\mu}}{q^2 + J^2} \frac{[-i(\not{q} - \not{p}) + J]^{\sigma\mu}}{(q-p)^2 + J^2} [2\delta^{ac}\delta^{bd} C_{\alpha\mu} C_{\nu\beta} C_{\rho\delta} C_{\sigma\gamma} \quad (3.2.7)$$

$$+ \delta^{ab}\delta^{cd}(2N C_{\alpha\beta} C_{\mu\nu} C_{\gamma\delta} C_{\rho\sigma} + 2C_{\alpha\beta} C_{\mu\nu} C_{\rho\gamma} C_{\delta\sigma}$$

$$+ 2C_{\rho\sigma} C_{\gamma\delta} C_{\alpha\mu} C_{\nu\beta}) + 2\delta^{ad}\delta^{bc} C_{\alpha\mu} C_{\nu\beta} C_{\rho\gamma} C_{\delta\sigma}].$$

Usando o método mostrado em [18], a função Z_g até um laço é obtida da integral a 2 laços para a correção à função de dois pontos; esta integral é deduzida da igualdade acima fechando as pernas b e c e integrando no momento p , e o seu resultado é introduzido na definição dada para a função irreduzível de dois pontos a dois laços, quantidade que apresenta termos associados às funções Z . O resultado dado para Z_g é

$$Z_g = 1 - (N - 1) \frac{g^2}{\pi \epsilon}. \quad (3.2.8)$$

As funções Z_2 e Z_g obtidas anteriormente coincidem com aquelas dadas em [21]. Destas quantidades é possível obter as funções do grupo de renormalização $\beta(g^2)$ e $\gamma_2(g^2)$, segundo o dito em [18]. Então,

$$\gamma_2(g^2) = \left(N - \frac{1}{2} \right) \frac{g^2}{\pi}, \quad (3.2.9)$$

$$\beta(g^2) = \epsilon g^2 - (N - 1) \frac{g^4}{\pi}. \quad (3.2.10)$$

Da última igualdade, afirma-se que a teoria apresenta liberdade assintótica pelo fato de ter uma função $\beta(g^2)$ que se torna negativa para valores de g^2 muito grandes, como foi mostrado no capítulo 2.

No caso da função Z_ζ , devem considerar-se as correções do funcional gerador $W(J)$. Segundo o resultado em [3], o termo a um laço escreve-se como

$$W^{(1)}(J) = -\frac{1}{2}\mu^{-\epsilon}J^2\frac{N}{\pi\epsilon}.$$

O resultado vem do laço de férmions da figura 6. Até ordem zero, e em termos de potências de J (como foi obtido no capítulo 2),

$$W^{(0)}(J) = -\frac{1}{2}\mu^{-\epsilon}(\zeta(g^2) + \delta\zeta)J^2,$$

então,

$$W(J) = -\frac{1}{2}\mu^{-\epsilon}(\zeta(g^2) + \delta\zeta)J^2 - \frac{1}{2}\mu^{-\epsilon}J^2\frac{N}{\pi\epsilon}.$$

É deduzido que

$$\delta\zeta = -\frac{N}{\pi\epsilon}. \quad (3.2.11)$$

Lembrando a definição dada para a função Z_ζ , o resultado até um laço vai ser

$$Z_\zeta = 1 - \frac{N}{\pi\epsilon}g^2. \quad (3.2.12)$$

Agora, para calcular o potencial efetivo, são introduzidos uns termos de fonte na Lagrangiana equivalente (3.1.16) na forma $\psi \rightarrow \psi + \xi$, $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} + \bar{\xi}$, e fazendo um deslocamento no campo auxiliar σ como $\sigma \rightarrow \sigma + \sigma_c$, onde $\partial_\mu\sigma_c = 0$ e $\langle\sigma\rangle = \sigma_c$, é obtido o seguinte termo que depende somente dos valores dos campos σ_c , ξ e $\bar{\xi}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I(\sigma_c, \xi, \bar{\xi}) &= \frac{\sigma_c^2}{2g^2Z_\zeta\zeta(g^2)} + \mu^{\epsilon/2}g\sigma_c\bar{\xi}\xi\frac{Z_2}{g^2Z_\zeta\zeta(g^2)} \\ &\quad - \frac{1}{2}\mu^\epsilon g^2(\bar{\xi}\xi)^2 \left[Z_g - \frac{Z_2^2}{g^2Z_\zeta\zeta(g^2)} \right] - \frac{\sigma_c}{g}\mu^{-\epsilon/2}J. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

A Lagrangiana total pode escrever-se na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= Z\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \frac{Z_2}{g^2Z_\zeta\zeta}g\sigma\mu^{\epsilon/2}\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}g\mu^\epsilon(\bar{\xi}\xi)^2 \left[Z_g - \frac{Z_2^2}{Z_\zeta\zeta g^2} \right] + \frac{\sigma^2}{2Z_\zeta\zeta g^2} \\ &\quad - \frac{\sigma}{g}\mu^{-\epsilon/2}J + \mathcal{L}'(\sigma, \sigma_c, \psi, \bar{\psi}, \xi, \bar{\xi}) + \mathcal{L}_I(\sigma_c, \xi, \bar{\xi}). \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

A quantidade $\mathcal{L}'(\sigma, \sigma_c, \psi, \bar{\psi}, \xi, \bar{\xi})$ inclui termos onde são misturados os campos $(\psi, \bar{\psi}, \sigma)$ com os respectivos deslocamentos $(\xi, \bar{\xi}, \sigma_c)$.

Partindo da definição de ação efetiva [10], seja

$$\Gamma(\sigma_c) = W(J) - \int d^d x \frac{\sigma_c}{g}\mu^{-\epsilon/2}J. \quad (3.2.15)$$

A introdução da constante g foi feita pelo termo de acoplamento entre a fonte J e o campo clássico σ_c . Desta igualdade é deduzido um potencial efetivo até qualquer ordem da forma [10]

$$V_{eff}(\sigma_c) = -\frac{\Gamma(\sigma_c)}{\mathcal{V}_d}, \quad (3.2.16)$$

onde \mathcal{V}_d é o elemento de volume infinito em um espaço de duas dimensões.

O funcional $Z(J)$ escreve-se em termos de $W(J)$ como

$$\begin{aligned} Z(J) = \exp(-W(J)) = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\sigma \exp \left\{ - \int d^d x \left(Z\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \frac{Z_2}{g^2 Z_\zeta \zeta} g\sigma\mu^{\epsilon/2}\bar{\psi}\psi \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2}g\mu^\epsilon(\bar{\xi}\xi)^2 \left[Z_g - \frac{Z_2^2}{Z_\zeta \zeta g^2} \right] + \frac{\sigma^2}{2Z_\zeta \zeta g^2} - \frac{\sigma}{g}\mu^{-\epsilon/2}J \right. \right. \\ \left. \left. + \mathcal{L}'(\sigma, \sigma_c, \psi, \bar{\psi}, \xi, \bar{\xi}) + \mathcal{L}_I(\sigma_c, \xi, \bar{\xi}) \right\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{L}_I(\sigma_c, \xi, \bar{\xi})$ sai da integral pelo fato de ser uma quantidade independente das variáveis de integração σ , ψ e $\bar{\psi}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \ln Z(J) = - \int d^d x \mathcal{L}_I(\sigma_c, \xi, \bar{\xi}) + \ln \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\sigma \exp \left\{ - \int d^d x \left(Z\bar{\psi}\not{\partial}\psi \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{Z_2}{g^2 Z_\zeta \zeta} g\sigma\mu^{\epsilon/2}\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}g\mu^\epsilon(\bar{\xi}\xi)^2 \left[Z_g - \frac{Z_2^2}{Z_\zeta \zeta g^2} \right] + \frac{\sigma^2}{2Z_\zeta \zeta g^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\sigma}{g}\mu^{-\epsilon/2}J \right) + \mathcal{L}'(\sigma, \sigma_c, \psi, \bar{\psi}, \xi, \bar{\xi}) \right\}. \end{aligned}$$

O primeiro termo da equação acima cancelará à seguinte quantidade na definição da ação efetiva (equação (3.2.15)):

$$- \int d^d x \frac{\sigma_c}{g}\mu^{-\epsilon/2}J.$$

Deste modo, o acoplamento $J\sigma_c$ será eliminado.

Dos outros termos da quantidade $\mathcal{L}_I(\sigma_c, \xi, \bar{\xi})$ é definido o seguinte potencial clássico ²:

$$\begin{aligned} V_{cl}(\sigma_c, \xi, \bar{\xi}) = \frac{\sigma_c^2}{2g^2 Z_\zeta \zeta (g^2)} + \mu^{\epsilon/2} g \sigma_c \bar{\xi} \xi \frac{Z_2}{g^2 Z_\zeta \zeta (g^2)} \\ - \frac{1}{2} \mu^\epsilon g^2 (\bar{\xi} \xi)^2 \left[Z_g - \frac{Z_2^2}{g^2 Z_\zeta \zeta (g^2)} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Separando a integração nas variáveis $\psi, \bar{\psi}$ do campo escalar σ em $\ln Z(J)$, é obtido o seguinte termo após de ter considerado as funções Z a nível árvore e o limite $d = 2$ dimensões:

²Como no caso da teoria $\lambda\phi^4$, o potencial efetivo até um laço corresponde à soma dos termos do potencial clássico (3.2.17) e das contribuições dos diagramas dados na figura 6.

$$\ln Z(J)|_F = \ln \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left\{ - \int d^2x (\bar{\psi}\not{\partial}\psi + g\sigma_c\bar{\psi}\psi) \right\}.$$

O sub-índice F dá conta da integração nos campos fermiônicos em $\ln Z(J)$. O argumento do logaritmo é o já conhecido resultado do laço de férmions (ou diagrama de tadpole) [19, 23], de onde é possível definir uma contribuição a nível de um laço em teoria de perturbações ao potencial efetivo da forma

$$V_1^T(\sigma_c) = -\frac{N}{(2\pi)^2} \int d^2q \ln(q_4^2 + |\vec{q}|^2 + m^2). \quad (3.2.18)$$

Nota:

A quantidade dada acima foi encontrada levando em conta a Lagrangiana a nível árvore

$$\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, \sigma) = \bar{\psi}\not{\partial}\psi + g\sigma_c\bar{\psi}\psi + \frac{\sigma_c^2}{2}, \quad (3.2.19)$$

daqui, define-se a Lagrangiana livre para férmions

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}\not{\partial}\psi + g\sigma_c\bar{\psi}\psi. \quad (3.2.20)$$

Da última igualdade, é deduzido o seguinte propagador livre para o campo fermiônico ψ .

$$S'_F(q) = \frac{\delta^{ab}}{i\not{q} + m}, \quad (3.2.21)$$

onde a massa do férmion foi definida como $m \equiv g\sigma_c$.

Usando o resultado para a função $\zeta(g^2)$ mostrado em [3] até um laço, i.e.,

$$\zeta(g^2) = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{(N - \frac{1}{2})} \frac{1}{8\pi}, \quad (3.2.22)$$

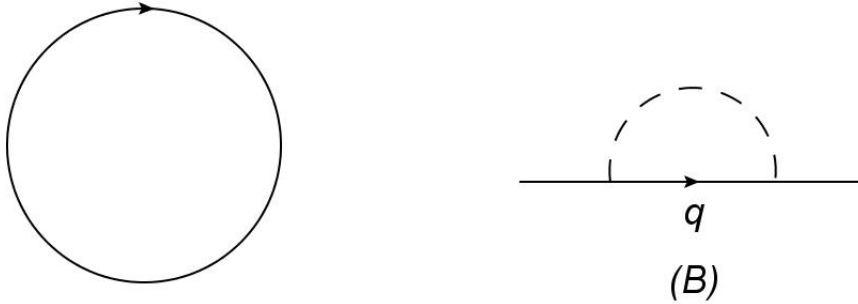


Figura 3.5: Diagrama de laço fermiônico e autoenergia do elétron devida ao vértice $g\sigma\bar{\psi}\psi$.

junto com as contribuições finitas dos diagramas da figura 6 para o funcional gerador $W(J)$ e os coeficientes a um laço das funções Z no potencial clássico (3.2.17), é possível encontrar o termo o potencial efetivo a primeira ordem em teoria de perturbações.

A integral associada ao primeiro diagrama é dada pela igualdade (3.2.18), enquanto que para o segundo diagrama (autoenergia do férmion) a regra é dada pela equação (3.2.23).

$$(B) = (ig\mu^{\epsilon/2})^2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{i\not{q} + m}. \quad (3.2.23)$$

As contribuições finitas da integral dada acima vão corrigir o vértice de interação $g\sigma_c \bar{\xi}\xi$, obtido após fazer a transformada de Hubbard-Stratonovich. Integra-se sobre o momento do elétron q porque o campo sigma não tem um termo cinético associado; aliás, q é o único momento linearmente independente no qual pode efetuar-se a integração.

Até primeira ordem em teoria de perturbações, define-se o potencial efetivo como

$$V_{eff}(\sigma_c, \xi, \bar{\xi}) = V_{cl}(\sigma_c, \xi, \bar{\xi})|_{0 \text{ laços}} + V_{cl}(\sigma_c, \xi, \bar{\xi})|_{1 \text{ laço}} + V_1^T(\sigma_c) + g\sigma_c \bar{\xi}\xi \frac{(B)}{m}. \quad (3.2.24)$$

Os dois últimos termos vêm de correções a um laço. A nível árvore, não vai aparecer o vértice de quatro férmions; ele é gerado como consequência das correções feitas à teoria. Então, da equação (3.2.17) é deduzido que neste regime, o termo correspondente do potencial efetivo escreve-se como

$$V_{eff}^{(0)} = V_{cl}(\sigma_c, \xi, \bar{\xi})|_{0 \text{ laços}} = \frac{\sigma_c^2}{2} + g\sigma_c \bar{\xi}\xi. \quad (3.2.25)$$

A seguir são apresentadas as correções a um laço.

O cálculo da integral (3.2.18) é feito de forma similar que no caso da teoria com campo escalar (capítulo 1), mas com uma dimensão $d = 2 - \epsilon$:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \ln(q_4^2 + |\vec{q}|^2 + m^2) &= \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \ln(q^2 + m^2) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \alpha} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{(q^2 + m^2)^\alpha} \\ &= -\frac{\Gamma(-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{(m^2)^{-d/2}} \\ &= -\frac{\Gamma(-1 + \frac{\epsilon}{2})}{(4\pi)^{1-\epsilon/2}} (m^2)^{1-\epsilon/2} \\ &= \frac{m^2}{4\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln m^2 + \ln \mu^2 + 1 \right) \\ &= \frac{m^2}{4\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} + \ln \left[\frac{4\pi \exp(-\gamma)\mu^2}{m^2} \right] + 1 \right). \end{aligned}$$

De novo, é introduzido um parâmetro de escala μ para ajustar as unidades na igualdade acima. Desta forma, a contribuição do laço de férmions vai ser (fazendo $m = g\sigma_c$ e $\bar{\mu}^2 = 4\pi \exp(-\gamma)\mu^2$)

$$V_1^T(\sigma_c) = \frac{N}{4\pi} g^2 \sigma_c^2 \left[\left(\frac{g^2 \sigma_c^2}{\bar{\mu}^2} \right) - 1 \right] - \frac{N g^2 \sigma_c^2}{2\pi} \frac{1}{\epsilon}. \quad (3.2.26)$$

Os termos proporcionais a g^2 no potencial clássico (3.2.17) vão ser [3]

$$\frac{Ng^2\sigma_c^2}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} + g\sigma_c\bar{\xi}\xi \frac{g^2}{2\pi\epsilon} - \frac{1}{(N-\frac{1}{2})} \frac{g^2\sigma_c^2}{8\pi} - \frac{g^2}{(N-\frac{1}{2})} \frac{g\sigma_c\bar{\xi}\xi}{8\pi} - \frac{g^2}{8\pi(N-\frac{1}{2})} \frac{g^2}{2} (\bar{\xi}\xi)^2, \quad (3.2.27)$$

enquanto que após usar regularização dimensional no diagrama (B), a sua contribuição é

$$(B) = m \frac{g^2}{4\pi} \ln \left(\frac{g^2\sigma_c^2}{\bar{\mu}^2} \right) - m \frac{g^2}{2\pi\epsilon}. \quad (3.2.28)$$

Finalmente, juntando as três últimas igualdades na forma

$$V_{eff}^{(1)}(\sigma_c, \xi, \bar{\xi}) = V_1^T(\sigma_c) + \frac{(B)}{m} g\sigma_c\bar{\xi}\xi + N \frac{g^2\sigma_c^2}{\pi} \frac{1}{\epsilon} + g\sigma_c\bar{\xi}\xi \frac{g^2}{2\pi\epsilon} - \frac{g^2}{(N-\frac{1}{2})} \frac{g\sigma_c\bar{\xi}\xi}{8\pi} \\ - \frac{1}{(N-\frac{1}{2})} \frac{g^2\sigma_c^2}{8\pi} - \frac{g^2}{8\pi(N-\frac{1}{2})} \frac{g^2}{2} (\bar{\xi}\xi)^2,$$

é obtido que

$$V_{eff}^{(1)}(\sigma_c, \xi, \bar{\xi}) = \frac{N}{4\pi} g^2\sigma_c^2 \left[\ln \left(\frac{g^2\sigma_c^2}{\bar{\mu}^2} \right) - 1 \right] - \frac{\sigma_c^2}{2} \frac{g^2}{8\pi(N-\frac{1}{2})} \\ + g\sigma_c\bar{\xi}\xi \frac{g^2}{4\pi} \ln \left(\frac{g^2\sigma_c^2}{\bar{\mu}^2} \right) - \frac{g^4}{2} (\bar{\xi}\xi)^2 \frac{1}{8\pi(N-\frac{1}{2})} \\ - g\sigma_c\bar{\xi}\xi \frac{g^2}{8\pi(N-\frac{1}{2})}, \quad (3.2.29)$$

de onde é deduzido que o potencial efetivo até um laço vai ser

$$V_{eff}(\sigma_c, \xi, \bar{\xi}) = \frac{\sigma_c^2}{2} \left[1 - \frac{g^2}{8\pi} \frac{1}{(N-\frac{1}{2})} \right] + \frac{N}{4\pi} g^2\sigma_c^2 \left[\ln \left(\frac{g^2\sigma_c^2}{\bar{\mu}^2} \right) - 1 \right] \\ + g\sigma_c\bar{\xi}\xi \left[1 - \frac{g^2}{8\pi} \frac{1}{(N-\frac{1}{2})} + \frac{g^2}{4\pi} \ln \left(\frac{g^2\sigma_c^2}{\bar{\mu}^2} \right) \right] \\ - \frac{g^4}{16\pi} (\bar{\xi}\xi)^2 \frac{1}{(N-\frac{1}{2})}. \quad (3.2.30)$$

A quantidade $\bar{\mu}^2 = g^2\sigma_0^2$ encontra-se definida no esquema $\overline{\text{MS}}$, onde é possível definir ao campo σ_c e à constante de acoplamento g fazendo uma renormalização a momento nulo, e pedindo que na ação efetiva sejam fornecidas as seguintes igualdades:

$$\left. \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\sigma_c^2} \right|_{\sigma_c=\sigma_0, \bar{\xi}=\xi=0} = 1, \quad (3.2.31) \\ \left. \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\sigma_c\delta\xi\delta\bar{\xi}} \right|_{\sigma_c=\sigma_0, \bar{\xi}=\xi=0} = g, \\ \left. \frac{\partial}{\partial p} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\xi\delta\bar{\xi}} \right|_{\sigma_c=\sigma_0, \bar{\xi}=\xi=0} = i.$$

Deste modo,

$$\left. \frac{\delta^2 V_{eff}}{\delta \sigma_c^2} \right|_{\bar{\xi}=\xi=0, \sigma_c=\sigma_0} = 1 - \frac{g^2}{8\pi} \frac{1}{(N - \frac{1}{2})} + \frac{Ng^2}{\pi}, \quad (3.2.32)$$

$$\left. \frac{\delta^3 V_{eff}}{\delta \sigma_c \delta \xi \delta \bar{\xi}} \right|_{\bar{\xi}=\xi=0, \sigma_c=\sigma_0} = g \left[1 - \frac{g^2}{8\pi} \frac{1}{(N - \frac{1}{2})} + \frac{g^2}{2\pi} \right]. \quad (3.2.33)$$

Portanto, as seguintes redefinições são feitas no campo σ_c e na constante de acoplamento g :

$$\sigma'_c = \sigma_c \left[1 + \frac{Ng^2}{2\pi} - \frac{g^4}{16\pi} \frac{1}{(N - \frac{1}{2})} \right], \quad (3.2.34)$$

$$g' = g \left[1 - \frac{g^2}{16\pi} \frac{1}{(N - \frac{1}{2})} - \frac{g^2}{2\pi} (N - 1) \right]. \quad (3.2.35)$$

Introduzindo as definições acima na equação (3.2.30) até ordem g^2 e fazendo $g' \rightarrow g$, $\sigma'_c \rightarrow \sigma_c$, o potencial efetivo até um laço vai ser

$$\begin{aligned} V_{eff}(\sigma_c, \xi, \bar{\xi}) &= \frac{\sigma_c^2}{2} + \frac{N}{4\pi} g^2 \sigma_c^2 \left[\ln \left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2} \right) - 3 \right] \\ &+ g \sigma_c \bar{\xi} \xi \left[1 - \frac{g^2}{2\pi} + \frac{g^2}{4\pi} \ln \left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2} \right) \right] \\ &- \frac{g^4}{16\pi} (\bar{\xi} \xi)^2 \frac{1}{(N - \frac{1}{2})}. \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

σ_0 é o valor do campo para o qual acontece a saturação do vácuo (de tipo não perturbativo com um condensado $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ não nulo) [3], tal que as interações residuais entre as excitações acima dele são muito pequenas, fazendo possível aplicar teoria de perturbações. Aliás, σ_0 tem que ser positivo; no caso contrário, o vácuo teria uma estabilidade maior, tornando impossível perturbá-lo.

Minimizando o potencial efetivo, é possível encontrar o gap de massa da teoria. Esta quantidade (interpretada como a energia entre o estado base e o primeiro estado excitado) encontra-se definida como

$$\left. \frac{\delta V_{eff}}{\delta \sigma_c} \right|_{\sigma_c=\sigma_0, \xi=\bar{\xi}=0} = \sigma_0 \left(1 - \frac{N}{\pi} g^2 \right). \quad (3.2.37)$$

Do potencial efetivo (3.2.35), o férmion obtém uma massa (chamada de efetiva) não perturbativa dada quando $\sigma_c = \sigma_0$, i.e.,

$$m_F = g \sigma_0 \left(1 - \frac{g^2}{2\pi} \right). \quad (3.2.38)$$

O valor mínimo do potencial corresponde a aquele valor do campo σ_c tal que a derivada é nula e a segunda derivada apresenta um sinal positivo (concavidade positiva). Neste caso, os mínimos do potencial são

$$\sigma'_c = \pm \sigma_0 \exp\left(1 - \frac{\pi}{g^2 N}\right). \quad (3.2.39)$$

Deste modo, define-se a massa perturbativa do férmion da forma

$$m' = g|\sigma'_c| = g\sigma_0 \exp\left(1 - \frac{\pi}{g^2 N}\right). \quad (3.2.40)$$

Diferencia-se da massa efetiva pelo fato de ser obtida usando o mecanismo de quebra espontânea da simetria (estabilização do vácuo inicial para aplicar teoria de perturbações).

Capítulo 4

Teoria de Campos a Temperatura Finita

Apresentam-se as características principais da QFT a temperatura finita na seção 4.1 seguindo o esquema de Matsubara como descrito em [5], redefinindo as regras de Feynman associadas aos vértices e propagadores de partículas, enquanto que na seção 4.2 é introduzido o conceito de temperatura crítica segundo a formulação dada em [6].

Já é um fato conhecido que o mecanismo de quebra da simetria de uma Lagrangiana gera um deslocamento no vácuo inicial da teoria, fazendo com que ele ganhe uma maior estabilidade. Isto, além de permitir a aplicação de métodos perturbativos, faz possível a obtenção de massas mensuráveis (reais) das partículas em estudo.

Este fenômeno acontece a temperatura zero. No caso de ter um sistema de partículas a temperatura não nula, apresenta-se uma restauração na simetria quebrada, mas isto acontece para um valor fixo de temperatura, chamado de temperatura crítica, que vai depender da massa da partícula gerada pelo mecanismo explicado acima.

Para estudar este problema, torna-se necessário novamente observar o comportamento do potencial efetivo e dos seus valores mínimos no regime de temperatura finita. A restauração da simetria ocorre se no momento de chegar à temperatura crítica, o vácuo da teoria retorna ao seu valor trivial.

4.1. Aspectos gerais

Quando um sistema de partículas é aquecido, as simetrias que foram quebradas espontânea ou dinamicamente a temperatura nula podem ser restauradas a um valor suficientemente alto desta variável termodinâmica.

Em uma teoria quântica de campos descrita por uma densidade Hamiltoniana $\mathcal{H}(\pi, \phi)$, onde $\phi(\vec{x}, t)$ é o operador de campo no marco de Heisenberg, $\pi(\vec{x}, t)$ é o seu momento canonicamente conjugado e $\phi(\vec{x}, 0)$ é o operador no marco de Schrödinger com um conjunto de estados próprios associados tais que

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}, 0) |\phi_0\rangle &= \phi_0(\vec{x}) |\phi_0\rangle, \\ \phi(\vec{x}, 0) |\phi_1\rangle &= \phi_1(\vec{x}) |\phi_1\rangle.\end{aligned}$$

A amplitude de probabilidade de transição partindo de $|\phi_0\rangle$ em um tempo $t = 0$ até $|\phi_1\rangle$ em $t = t_1$ encontra-se dada pela seguinte igualdade:

$$\langle \phi_1 | \exp(-iHt_1) | \phi_0 \rangle = N \int \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int_0^{t_1} dt \int d^3x \left[\pi \dot{\phi} - \mathcal{H}(\pi, \phi) \right] \right\}. \quad (4.1.1)$$

A integração nos campos clássicos ϕ é efetuada sobre todas as configurações que começam em $\phi_0(\vec{x})$ em um tempo $t = 0$, até $\phi_1(\vec{x})$ em $t = t_1$. Não há restrições na integral de momentos π .

Agora, seja $it = \beta$, onde β é o inverso da temperatura. Observe o seguinte: como o operador densidade $\exp(-\beta H)$ introduz as probabilidades de transição entre estados segundo uma temperatura dada, o operador evolução temporal possui uma informação similar (as amplitudes de probabilidade associadas), mas encontra-se dado em termos de um parâmetro temporal t .

Considere-se uma mudança de variável $it = \tau$ no integrando do expoente. Veja que anteriormente,

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

então, $\dot{\phi}$ muda para

$$\dot{\phi} = i \frac{\partial \phi}{\partial \tau}.$$

Portanto,

$$\langle \phi_1 | \exp(-\beta H) | \phi_0 \rangle = N \int \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[i\pi \dot{\phi} - \mathcal{H}(\pi, \phi) \right] \right\}, \quad (4.1.2)$$

onde $\dot{\phi}$ é agora dado como $\frac{\partial \phi}{\partial \tau}$.

O procedimento da troca do tempo real por um tempo imaginário é conhecido como rotação de Wick, e tem a propriedade de tornar a variável temporal imaginária. No caso de compactificar a dimensão temporal e trocá-la por um termo imaginário, ela torna-se periódica. Então, fazendo a integração nos campos ϕ sobre todas as trajetórias periódicas, i.e, aquelas que têm valores iguais em $t = 0$ e $t = \beta$ nos campos clássicos, é possível encontrar a função de partição $Z = Tr \exp(-\beta H)$ na forma

$$\begin{aligned}Tr \exp(-\beta H) &= \sum_{\phi} \langle \phi | \exp(-\beta H) | \phi \rangle \\ &= N \int \mathcal{D}\pi \int_{\text{periodic}} \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[i\pi \dot{\phi} - \mathcal{H}(\pi, \phi) \right] \right\}.\end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Como a Hamiltoniana é constante no tempo (caso onde é possível obter um sistema em equilíbrio), o propagador associado à transição $t_1, \vec{x}_1 \rightarrow t_2, \vec{x}_2$ coincide com a matriz densidade se o argumento da exponencial é trocado por um termo imaginário $-i\beta$ [22].

A restrição de periodicidade está dada para os campos somente. Lembrando que se a densidade Hamiltoniana depende até o quadrado dos momentos π 's, a integração nesta variável vai estar dada pelo valor do integrando no ponto estacionário, o qual fornece a seguinte equação de Hamilton:

$$i\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}(\pi, \phi)}{\partial \pi}. \quad (4.1.4)$$

Seguindo o desenvolvimento usual para integrais de trajetória [9], isto permite trocar o argumento na exponencial pela densidade Lagrangiana correspondente. Então,

$$Tr \exp(-\beta H) = N'(\beta) \int_{periodic} \mathcal{D}\phi \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_{eff}(\phi, i\dot{\phi}) \right], \quad (4.1.5)$$

onde $N'(\beta)$ é um fator de normalização infinito.

As diferenças básicas em comparação à teoria a temperatura nula são:

1. A presença do termo $i\dot{\phi}$ e a ausência do fator i multiplicando à densidade Lagrangeana, fornecendo uma rotação de Wick das regras no espaço Euclideano. Não é necessário escrever o fator $i\epsilon$ nos denominadores dos propagadores.
2. O requerimento de periodicidade no domínio finito da integração em τ muda todas as integrações na energia por somas. No caso de bósons, k_0 é trocado por $2\pi n/\beta$, onde n é um número inteiro. Se as partículas são férmions, a soma é feita sobre múltiplos ímpares de π/β .

Agora, seja a Lagrangiana do campo escalar

$$\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) = \mathcal{L}_{eff}(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \lambda \phi^4. \quad (4.1.6)$$

Portanto, da equação 4.1.5, e lembrando que $\partial_\mu \phi \partial^\mu = -(\partial_0 \phi)^2 - (\partial_i \phi)^2$,

$$Tr \exp(-\beta H) = N'(\beta) \int \mathcal{D}\phi \exp \left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2} [(\partial_0 \phi)^2 + (\partial_i \phi)^2 + m^2 \phi^2] - \lambda \phi^4 \right\} \right). \quad (4.1.7)$$

Defina-se a parte quadrática da ação como

$$S_0 \equiv -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x [(\partial_0 \phi)^2 + (\partial_i \phi)^2 + m^2 \phi^2]. \quad (4.1.8)$$

Dado que $\phi(\vec{x}, \tau)$ é periódico no intervalo $0 < \tau < \beta$, é possível expandi-lo em series de Fourier na forma

$$\phi(\vec{x}, \tau) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \exp(i\omega_n \tau) \phi_n(\vec{k}), \quad (4.1.9)$$

onde

$$\phi_n(\vec{k}) = \int d^3 k \int_0^\beta d\tau \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) \exp(-i\omega_n \tau) \phi(\vec{x}, \tau). \quad (4.1.10)$$

Fazendo uma parametrização nas somas e nas integrais dos momentos que aparecem nos produtos dos campos $\phi(\vec{x}, \tau)$ na ação S_0 (trocam-se n por m e \vec{k} por \vec{k}' em um dos fatores), e lembrando as seguintes formas integrais para as deltas de Krönecker e as funções delta de Dirac

$$\begin{aligned} \int_0^\beta d\tau \exp[i(\omega_n - \omega_m)\tau] &= \beta \delta_{nm}, \\ \int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} \exp[i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}] &= \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'), \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

é obtido que

$$S_0 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2) \phi_n(\vec{k}) \phi_n(-\vec{k}). \quad (4.1.12)$$

Novamente, usando o procedimento usual [9], escreve-se a ação livre na forma

$$S_0 = -\frac{1}{2} (\phi, D\phi),$$

onde $D = \omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2$. Portanto, e lembrando que no espaço de momentos o propagador é dado como o inverso do elemento matrizial D ,

$$\Delta_F(\omega_n, \vec{k}) = \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2}. \quad (4.1.13)$$

Transformando ao espaço das coordenadas,

$$\Delta_F(\vec{x} - \vec{x}', \tau - \tau') = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\exp\left\{i[\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') + \omega_n(\tau - \tau')]\right\}}{\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2}. \quad (4.1.14)$$

Das igualdades dadas pela equação 4.1.11, é deduzido que:

1. Há uma conservação da energia discretizada e do tri-momento.
2. Para cada vértice associa-se um fator β

Então, as regras de Feynman correspondentes vão ser

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{i}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (4.1.15)$$

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + \dots) \rightarrow \frac{1}{i} (2\pi)^3 \beta \delta_{\omega_{n_1} + \omega_{n_1} + \dots} \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \dots) \quad (4.1.16)$$

O fator i aparece pela rotação de Wick feita no espaço de Minkowski.

4.2. Definição da temperatura crítica

No formalismo de temperatura finita, definam-se os seguintes funcionais geradores:

$$\begin{aligned} Z^\beta(J) &= \frac{\text{Tr} \left\{ \exp(-\beta H) T \exp \left[i \int d^4x \phi(x) J(x) \right] \right\}}{\text{Tr} \exp(-\beta H)}, \\ W^\beta(J) &= -i \ln Z^\beta(J), \\ \bar{\phi}(x) &= \frac{\delta W^\beta(J)}{\delta J(x)}, \\ \Gamma^\beta(\bar{\phi}) &= W^\beta(J) - \int d^4x \bar{\phi}(x) J(x). \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

$W^\beta(J)$ é o funcional gerador das funções de Green conexas, enquanto que $\Gamma^\beta(\bar{\phi})$ é o funcional gerador das funções irreduzíveis de uma partícula (funções 1PI). No funcional $Z^\beta(J)$, T é o operador ordenamento temporal dos campos $\phi(x)$. A fonte J e o campo $\bar{\phi}(x)$ são variáveis canonicamente conjugadas, i.e.,

$$\frac{\delta \Gamma(\bar{\phi})}{\delta \bar{\phi}(x)} = -J(x). \quad (4.2.2)$$

$\bar{\phi}(x)$ é a média termodinâmica do campo $\phi(x)$ quando a fonte é desligada ($J = 0$):

$$\bar{\phi}(x)|_{J=0} = \frac{\text{Tr} [\exp(-\beta H) \phi(x)]}{\text{Tr} \exp(-\beta H)}. \quad (4.2.3)$$

A simetria na Hamiltoniana é dada quando $\bar{\phi} = 0$ para $J = 0$ (mínimo trivial), e ela é quebrada no caso que $\delta \Gamma^\beta(\bar{\phi}) / \delta \bar{\phi}(x) = 0$ para $\bar{\phi} \neq 0$. Por outro lado, a invariância perante translações é conservada. Então, a média térmica do campo deveria ser independente de x : $\bar{\phi}(x) = \hat{\phi}$, $\hat{\phi} = cte$.

Se \mathcal{V}_4 é um elemento de volume infinito no 4-espaço, defina-se o potencial efetivo na forma

$$V^\beta(\hat{\phi}) = - \mathcal{V}_4^{-1} \Gamma^\beta(\bar{\phi})|_{\bar{\phi}=\hat{\phi}}, \quad (4.2.4)$$

onde a quebra da simetria acontece quando

$$\frac{\partial V^\beta(\hat{\phi})}{\partial \hat{\phi}} = 0,$$

para $\hat{\phi} \neq 0$.

Nota:

1. A ação efetiva $\Gamma(\bar{\phi})$ gera diagramas que não têm pernas externas porque este funcional gerador encontra-se em função do campo clássico estacionário $\hat{\phi}$. Em outras palavras, $\partial_\mu \hat{\phi} = 0$,
2. As equações diferenciais fornecidas pelas funções de Green a temperatura finita são iguais às equações no caso de temperatura zero. A diferença principal encontra-se nas condições de fronteira: $t = \pm\infty$ a temperatura zero, enquanto que o tempo é compacto a temperatura finita.

3. Dado o fato que a integral de trajetória não contém uma especificação das condições de fronteira, esta formulação pode ser aplicada nestes casos de temperatura finita, trocando de forma conveniente a função de Green de dois pontos para partícula livre.
4. Seja uma Lagrangiana $\mathcal{L}\{\phi_a(x)\}$. Faça-se o seguinte deslocamento nos campos $\phi_a(x)$: $\phi_a(x) \rightarrow \phi_a(x) + \hat{\phi}_a$, onde $\hat{\phi}_a$ é constante. Descartando os termos lineares em $\hat{\phi}_a$, é possível decompor a Lagrangiana em dois termos, um dos quais é do tipo livre e quadrático nos $\hat{\phi}_a$, enquanto que o segundo termo dá conta da interação.

O anteriormente dito escreve-se como

$$\hat{\mathcal{L}}(\phi_a(x), \hat{\phi}_a) = \hat{\mathcal{L}}_0(\phi_a(x), \hat{\phi}_a) + \hat{\mathcal{L}}_I(\phi_a(x), \hat{\phi}_a). \quad (4.2.5)$$

O termo $\hat{\mathcal{L}}_0(\phi_a(x), \hat{\phi}_a)$ introduz as funções de Green livres de dois pontos, enquanto que do termo $\hat{\mathcal{L}}_I$ serão obtidos os vértices de interação.

Agora, considere-se uma teoria escalar com ϕ_a campos tal que o potencial efetivo a temperatura finita é uma função somente de $\hat{\phi}_a^2$. No limite de temperatura zero, $V^\beta(\hat{\phi}^2)$ coincide com $V^0(\hat{\phi}^2)$ e além disto, é suposta uma solução que quebra a simetria:

$$\frac{\partial V^0(\hat{\phi}^2)}{\partial \hat{\phi}_a} = 0,$$

para $\hat{\phi}_a \neq 0$.

Vamos procurar a contribuição de temperatura finita que pode eliminar a quebra da simetria de forma que a única solução à seguinte equação

$$\frac{\partial V^\beta(\hat{\phi}^2)}{\partial \hat{\phi}_a} = 2\hat{\phi}_a \frac{\partial V^\beta(\hat{\phi}^2)}{\partial \hat{\phi}_a^2}$$

seja $\hat{\phi}_a = 0$.

A ausência da quebra da simetria será dada se

$$\frac{\partial V^\beta(\hat{\phi}^2)}{\partial \hat{\phi}^2} \neq 0,$$

no caso que $\hat{\phi}^2 \neq 0$.

Suponha-se que $\partial V^\beta(\hat{\phi}^2)/\partial \hat{\phi}^2$ é positivo para valores de $\hat{\phi}^2$ muito grandes; portanto, a persistência da simetria exige que

$$\left. \frac{\partial V^\beta(\hat{\phi}^2)}{\partial \hat{\phi}^2} \right|_{\hat{\phi}^2=0} > 0. \quad (4.2.6)$$

Seja $V^\beta(\hat{\phi}) = V^0(\hat{\phi}^2) + \bar{V}^\beta(\hat{\phi}^2)$; uma condição necessária de persistência da simetria é

$$\frac{\partial V^0(\hat{\phi}^2)}{\partial \hat{\phi}^2} + \frac{\partial \bar{V}^\beta(\hat{\phi}^2)}{\partial \hat{\phi}^2} \geq 0. \quad (4.2.7)$$

Se

$$V^0(\hat{\phi}^2) = \frac{m^2}{2}\hat{\phi}^2 + V_{int}(\hat{\phi}^2),$$

onde $V_{int}(\hat{\phi}^2)$ tem potências maiores a $\hat{\phi}^2$,

$$\frac{\partial V^0(\hat{\phi}^2)}{\partial \hat{\phi}^2} = \frac{m^2}{2}.$$

Então, se $\hat{\phi}^2 = \delta_{ab}\hat{\phi}_a\hat{\phi}_b$,

$$m^2\delta_{ab} = \left. \frac{\partial^2 V^0(\hat{\phi}^2)}{\partial \hat{\phi}_a \partial \hat{\phi}_b} \right|_{\hat{\phi}=0} = 2\delta_{ab} \frac{\partial V^0(\hat{\phi}^2)}{\partial \hat{\phi}^2}. \quad (4.2.8)$$

m^2 é o parâmetro de massa renormalizado da teoria simétrica, e corresponde ao inverso do propagador (neste caso, a função 1PI de dois pontos a momento zero). Introduzindo este valor na desigualdade (4.2.8),

$$\left. \frac{\partial \bar{V}^\beta(\hat{\phi}^2)}{\partial \hat{\phi}^2} \right|_{\hat{\phi}=0} \geq -\frac{m^2}{2}. \quad (4.2.9)$$

A quebra da simetria a temperatura zero só é dada no caso em que m^2 for negativo. Agora, defina-se a temperatura crítica β_C^{-1} como a temperatura na qual a simetria é recuperada, ou de forma similar, o valor onde

$$\left. \frac{\partial \bar{V}^{\beta_C}(\hat{\phi}^2)}{\partial \hat{\phi}^2} \right|_{\hat{\phi}=0} = -\frac{m^2}{2}. \quad (4.2.10)$$

O termo que corrige a massa da teoria é igual a

$$2 \left. \frac{\partial \bar{V}^\beta}{\partial \hat{\phi}^2} \right|_{\hat{\phi}=0}.$$

Se este valor for maior que m^2 , o quadrado da massa efetiva torna-se positivo e a quebra da simetria desaparece.

4.3. Propagadores para partículas escalares e spinoriais

Seguindo a convenção dada em [6], define-se a função de dois pontos como

$$D_\beta(x-y) = \frac{Tr [\exp(-\beta H) T\phi(x)\phi(y)]}{Tr \exp(-\beta H)} = \langle T\phi(x)\phi(y) \rangle. \quad (4.3.1)$$

Para o caso de tempo imaginário onde $0 \leq ix_0, iy_0 \leq \beta$, a função $D_\beta(x)$ escreve-se como

$$D_\beta(x) = \int_k \exp(-ik \cdot x) D_\beta(k). \quad (4.3.2)$$

Na igualdade acima,

$$\int_k = \frac{1}{-i\beta} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

A função de dois pontos para partícula livre fornece a seguinte equação:

$$(\partial_{\mu,x}\partial_x^\mu + m^2)D_\beta(x-y) = -i\delta^{(4)}(x-y), \quad (4.3.3)$$

e o operador ordenamento temporal T (para tempo imaginário) define-se como

$$\langle T\phi(x)\phi(y) \rangle = \begin{cases} \langle \phi(x)\phi(y) \rangle = D_\beta^>(x-y), & ix_0 > iy_0 \\ \langle \phi(y)\phi(x) \rangle = D_\beta^<(x-y), & iy_0 > ix_0. \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Para tempos imaginários no intervalo $[0, -i\beta]$,

$$\begin{aligned} D_\beta(x-y)|_{x_0=0} &= D_\beta^<(x-y)|_{x_0=0}, \\ D_\beta(x-y)|_{x_0=-i\beta} &= D_\beta^>(x-y)|_{x_0=-i\beta}. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} D_\beta(x-y)|_{x_0=0} &= D_\beta^<(x-y)|_{x_0=0}, \\ D_\beta(x-y)|_{x_0=-i\beta} &= D_\beta^>(x-y)|_{x_0=-i\beta}. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Da igualdade anterior é possível obter as seguintes condições de fronteira:

$$\begin{aligned} Tr [\exp(-\beta H)D_\beta^<(x-y)]|_{x_0=0} &= Tr \exp(-\beta H)\phi(y_0, \vec{y})\phi(0, \vec{x}) \\ &= Tr \exp(-\beta H)D_\beta^>(x-y)|_{x_0=-i\beta}. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Chega-se ao resultado acima introduzindo a identidade $1 = \exp(\beta H)\exp(-\beta H)$ antes do primeiro campo $\phi(y_0, \vec{y})$ e considerando as relações de comutação entre ϕ e o seu momento canonicamente conjugado π no argumento das funções exponenciais.

Daqui conclui-se que a condição de fronteira é

$$D_\beta(x-y)|_{x_0=0} = D_\beta(x-y)|_{x_0=-i\beta}. \quad (4.3.8)$$

A representação integral do propagador escreve-se como

$$\begin{aligned} D_\beta(x-y) &= \frac{1}{-i\beta} \sum_n \exp(-i\omega_n x_0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{-i\beta} \sum_m \exp(i\omega_m y_0) \\ &\quad \times \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} D_\beta(\omega_n, \vec{p}; \omega_m, \vec{q}), \\ \omega_n &= \frac{2\pi n}{-i\beta}, \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

onde a inversa encontra-se dada por

$$D_\beta(\omega_n, \vec{p}; \omega_m, \vec{q}) = \int_0^{-i\beta} dx_0 \exp(i\omega_n x_0) \int d^3x \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{x}) \quad (4.3.10)$$

$$\times \int_0^{-i\beta} dy_0 \exp(-i\omega_m y_0) \int d^3y \exp(i\vec{q} \cdot \vec{y}) D_\beta(x - y).$$

$D_\beta(x - y)$ depende das coordenadas relativas, portanto, ele será diagonalizado pela transformação anterior.

$$D_\beta(\omega_n, \vec{p}; \omega_m, \vec{q}) = -i\beta \delta_{nm} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) D_\beta(\omega_n, \vec{p}). \quad (4.3.11)$$

$D_\beta(\omega_n, \vec{p})$ é uma quantidade dada no caso on-shell.

Em uma notação compacta,

$$D_\beta(x - y) = \int_p \exp(-ip \cdot (x - y)) D_\beta(p), \quad (4.3.12)$$

$$\int_p = \frac{1}{-i\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3},$$

$$D_\beta(p) = \int_x \exp(ip \cdot x) D_\beta(x), \quad (4.3.13)$$

$$\int_x = \int_0^{-i\beta} dx_0 \int d^3x,$$

onde p é o quadri-vetor (ω_n, \vec{p}) tal que $p^2 = -(4\pi^2 n^2 / \beta^2 + \vec{p}^2)$ (de espaço).

Veja que

$$\partial_\mu \partial^\mu D_\beta(x - y) = (-ip)^2 \int_p \exp(-ip \cdot (x - y)) D_\beta(p).$$

Lembrando a forma da equação (4.3.3) e da representação integral da delta de Dirac, é obtido que o propagador livre no espaço de momentos para uma partícula escalar é dado por

$$D_\beta(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}. \quad (4.3.14)$$

No caso de ter campos fermiônicos, o propagador vai ser

$$S_\beta(x - y) = \frac{\text{Tr} [\exp(-\beta H) T \psi(x) \bar{\psi}(y)]}{\text{Tr} \exp(-\beta H)}, \quad (4.3.15)$$

onde

$$(i\cancel{\partial}_x - m) S_\beta(x - y) = i\delta^{(4)}(x - y), \quad (4.3.16)$$

$$\langle T \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle = \begin{cases} \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle = S_\beta^>(x - y), & ix_0 > iy_0 \\ -\langle \psi(y) \bar{\psi}(x) \rangle = S_\beta^<(x - y), & iy_0 > ix_0, \end{cases} \quad (4.3.17)$$

$$\begin{aligned} S_\beta(x-y)|_{x_0=0} &= S_\beta^<(x-y)|_{x_0=0}, \\ S_\beta(x-y)|_{x_0=-i\beta} &= S_\beta^>(x-y)|_{x_0=-i\beta}. \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

A igualdade (4.3.17) impõe uma condição de antiperiodicidade no propagador, i.e,

$$S_\beta(x-y)|_{x_0=0} = -S_\beta(x-y)|_{x_0=-i\beta}. \quad (4.3.19)$$

O propagador pode escrever-se em forma integral como

$$S_\beta(x-y) = \int_p \exp(-ip \cdot (x-y)) S_\beta(p). \quad (4.3.20)$$

Mas neste caso, as frequências vão ser

$$\omega_n = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{-i\beta} \quad (4.3.21)$$

Fazendo uso da representação integral da função delta de Dirac e da equação (4.3.16), é possível obter o propagador fermiônico no espaço de momentos como

$$S_\beta(p) = \frac{i}{\not{p} - m} \quad (4.3.22)$$

4.4. Potenciais efetivos a temperatura finita

Voltando ao problema do campo escalar com uma Lagrangiana

$$\mathcal{L}\{\phi(x)\} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \quad (4.4.1)$$

será calculado o potencial efetivo até um laço. Fazendo o já conhecido deslocamento $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \hat{\phi}$ tal que $\partial_\mu\hat{\phi} = 0$, escreve-se o termo quadrático nestes campos como

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_0\{\phi(x), \hat{\phi}\} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\left(m^2 + \frac{\lambda}{2}\hat{\phi}^2\right)\phi^2 \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{M^2}{2}\phi^2 \\ &= \int d^4x d^4y \frac{1}{2}\mathcal{D}_{x,y}\phi(x)\phi(y), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} M^2 &= m^2 + \frac{\lambda}{2}\hat{\phi}^2, \\ \mathcal{D}_{x,y} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y_\mu} \delta^{(4)}(x-y) - M^2\delta^{(4)}(x-y), \end{aligned}$$

e o potencial efetivo a nível árvore é

$$V_0(\hat{\phi}^2) = \frac{m^2}{2}\hat{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4!}\hat{\phi}^4. \quad (4.4.2)$$

A transformada de Fourier da quantidade $\mathcal{D}_{x,y}$ [9] vai ser

$$\mathcal{D}_{p,q}(p) = (p^2 - M^2)\delta^{(4)}(p - q).$$

Portanto, considerando o caso on-shell,

$$\mathcal{D}(p) = p^2 - M^2.$$

A contribuição a um laço do potencial efetivo [10, 25] é dada pela seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} V_1^\beta(\hat{\phi}^2) &= -\frac{i}{2} \int_k \ln i\mathcal{D}_p \\ &= \frac{1}{2\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln \left(-\frac{4\pi n^2}{\beta^2} - E_M^2 \right), \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

onde

$$E_M^2 = \vec{p}^2 + M^2. \quad (4.4.4)$$

A soma em n na igualdade (4.4.3) é divergente, mas pode ser resolvida fazendo o seguinte: seja

$$v(E) = \sum_n \ln \left(\frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2} + E^2 \right). \quad (4.4.5)$$

Derivando em termos de E ,

$$\frac{\partial v(E)}{\partial E} = \sum_n \frac{2E}{4\pi^2 n^2 / \beta^2 + E^2},$$

e usando a seguinte propriedade,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y}{y^2 + n^2} = \frac{1}{2y} + \frac{1}{2}\pi \coth \pi y, \quad (4.4.6)$$

onde a função hiperbólica é tal que

$$\coth \left(\frac{ax}{2} \right) = 2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(ax) - 1} \right],$$

é obtido que

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(E)}{\partial E} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2E}{4\pi^2 n^2 / \beta^2 + E^2} \\ &= \frac{2\beta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta E / \pi}{4n^2 + \beta^2 E^2 / \pi^2} + \frac{2}{E} \\ &= 2\beta \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\beta E) - 1} \right]. \end{aligned}$$

Integrando o resultado anterior e ignorando termos independentes de E ,

$$v(E) = 2\beta \left(\frac{E}{2} \right) + \int \frac{dE}{\exp(\beta E) - 1}. \quad (4.4.7)$$

Seja $x = \beta E$. Então,

$$v(E) = 2\beta \left\{ \frac{E}{2} + \frac{1}{\beta} \ln [1 + \exp(-\beta E)] \right\}. \quad (4.4.8)$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} V_1^\beta(\hat{\phi}^2) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{E_M}{2} + \frac{1}{\beta} \ln [1 + \exp(-\beta E_M)] \right\} \\ &= V_1^0(\hat{\phi}^2) + \bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2), \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

onde

$$V_1^0(\hat{\phi}^2) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{E_M}{2}, \quad (4.4.10)$$

$$\bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2) = \frac{1}{2\pi^2 \beta} \int_0^\infty dp p^2 \ln [1 + \exp(-\beta E_M)]. \quad (4.4.11)$$

A expressão usual do termo a um laço para o potencial efetivo a temperatura zero (com $p^2 = -p_0^2 + \vec{p}^2$) é

$$V_1^0(\hat{\phi}^2) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln(-p_0^2 + \vec{p}^2 + M^2 - i\epsilon). \quad (4.4.12)$$

Separando o termo na coordenada temporal, defina-se a seguinte integral:

$$I_0 = -\frac{i}{2} \int \frac{dp_0}{2\pi} \ln(-p_0^2 + E_M^2 - i\epsilon). \quad (4.4.13)$$

Derivando uma vez em termos de E_M^2 ,

$$\frac{\partial I_0}{\partial E_M^2} = \frac{i}{4\pi} \int \frac{dp_0}{p_0^2 - E_M^2 + i\epsilon},$$

é possível observar a aparição de dois pólos de ordem 1 em $p'_{0(1)} = E_M - i\epsilon/2E_M$ e $p'_{0(2)} = -E_M + i\epsilon/2E_M$. Usando o teorema dos resíduos, encontra-se a seguinte contribuição.

$$\frac{\partial I_0}{\partial E_M^2} = \frac{1}{2E_M}. \quad (4.4.14)$$

O plano complexo inferior e superior contribuem com quantidades iguais à integral I_0 . Portanto, dividindo por 2, vai se obter que

$$\bar{I}_0 = \frac{1}{2} E_M. \quad (4.4.15)$$

Foi mostrado que as integrais (4.4.10) e (4.4.12) são equivalentes. Então, o valor do potencial efetivo a um laço a temperatura zero é dado pela seguinte expressão:

$$V_1^0(\hat{\phi}^2) = \frac{1}{64\pi^2} \left[M^4 \ln \left(\frac{M^2}{m^2} \right) - \frac{3}{2} \left(M^2 - \frac{2}{3} m^2 \right) \right]. \quad (4.4.16)$$

Na equação (4.4.11), $\ln [1 - \exp(-\beta E_M)] = \ln [1 - \exp(-\sqrt{\beta^2 \vec{p}^2 + \beta^2 M^2})]$.

Sejam $x = \beta |\vec{p}|$ e $a = \beta M$. Então, $d^3 p = x^2 dx / \beta^3$. Portanto,

$$\bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2) = \frac{1}{2\pi\beta^4} \int_0^\infty dx x^2 \ln [1 - \exp(-\sqrt{x^2 + a^2})]. \quad (4.4.17)$$

No limite de altas temperaturas ($\beta M = a \ll 1$), a integral dada acima pode ser expandida em torno de $a^2 = 0$ até segundo ordem na seguinte forma:

$$\bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2) = \bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2) \Big|_{a^2=0} + \frac{\partial \bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2)}{\partial a^2} \Big|_{a^2=0} a^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2)}{\partial^2 (a^2)^2} \Big|_{a^2=0} a^4.$$

O primeiro termo é calculado fazendo integração por partes:

$$\begin{aligned} \bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2) \Big|_{a^2=0} &= \frac{1}{2\pi^2\beta^4} \int_0^\infty dx x^2 \ln [1 - \exp(-x)] \\ &= \frac{1}{2\pi^2\beta^2} \left\{ \frac{x^3}{3} \ln [1 - \exp(-x)] \Big|_0^\infty - \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} \right\} \\ &= -\frac{1}{6\pi^2\beta^4} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1}. \end{aligned}$$

Define-se a função [24]

$$g_n(1) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{\exp(x) - 1} = \zeta(n).$$

$\zeta(n)$ corresponde à função zeta de Riemann. Neste caso, $n = 4$. Portanto, $\zeta(4) = \pi^4/90$ e o primeiro termo escreve-se como

$$\bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2) \Big|_{a^2=0} = -\frac{\pi^2}{90\beta^4}. \quad (4.4.18)$$

O segundo termo na expansão vai ser

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2)}{\partial a^2} \Big|_{a^2=0} &= \frac{1}{4\pi^2\beta^4} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a^2} [\exp(\sqrt{x^2 + a^2}) + 1]} \Big|_{a^2=0} \\ &= \frac{1}{4\pi^2\beta^4} \int_0^\infty \frac{x dx}{\exp(x) + 1}. \end{aligned}$$

A integral obtida assemelha-se à função $\zeta(2)$ cujo valor é $\pi^2/6$. Desta forma,

$$\frac{\partial \bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2)}{\partial a^2} \Big|_{a^2=0} = \frac{1}{24\beta^4}. \quad (4.4.19)$$

Para o termo de ordem a^4 , veja que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2)}{\partial(a^2)^2} &= \frac{1}{4\pi^2\beta^4} \int_0^\infty dx x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2} [\exp(\sqrt{x^2+a^2}) - 1]} \right\} \\
&= \frac{1}{8\pi^2\beta^4} \int_0^\infty dx x \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2} [\exp(\sqrt{x^2+a^2}) - 1]} \right\} \\
&= \frac{1}{8\pi^2\beta^4} \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2} [\exp(x) - 1]} \Big|_0^\infty \\
&\quad - \frac{1}{8\pi^2\beta^4} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2} [\exp(\sqrt{x^2+a^2}) - 1]} \\
&= -\frac{1}{8\pi^2\beta^4} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2} [\exp(\sqrt{x^2+a^2}) - 1]}.
\end{aligned}$$

Trocou-se a variável x por x^2 na derivação parcial tal que $\partial(x^2) = 2x\partial x$. Agora, para desenvolver a integral obtida, sejam

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2} [\exp(\sqrt{x^2+a^2}) - 1]}, \quad (4.4.20)$$

$$I_\epsilon(a) = \int_0^\infty \frac{x^{-\epsilon} dx}{\sqrt{x^2+a^2} [\exp(\sqrt{x^2+a^2}) - 1]}. \quad (4.4.21)$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 \bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2)}{\partial(a^2)^4} = -\frac{1}{8\pi^2\beta^4} I(a). \quad (4.4.22)$$

A parte do integrando que depende da função exponencial expande-se em termos da série para $\coth(\sqrt{x^2+a^2}/2)$ como

$$\frac{1}{\exp(\sqrt{x^2+a^2}) - 1} = \sum_0^\infty \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2+a^2+4\pi n^2} - \frac{1}{2}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
I_\epsilon(a) &= \int_0^\infty \sum_0^\infty \frac{x^{-\epsilon} dx}{x^2+a^2+4\pi n^2} - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^{-\epsilon} dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \\
&= I_\epsilon^{(1)}(a) + I_\epsilon^{(2)}(a).
\end{aligned}$$

Na igualdade anterior,

$$I_\epsilon^{(1)}(a) = \int_0^\infty dx x^{-\epsilon} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{x^2+a^2+4\pi^2 n^2}, \quad (4.4.23)$$

$$I_\epsilon^{(2)}(a) = -\frac{1}{2} \int_0^\infty dx x^{-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}. \quad (4.4.24)$$

Em $I_\epsilon^{(1)}(a)$, faça-se a seguinte troca de variável: $x \rightarrow (a^2 + 4\pi^2 n^2)^{1/2} x$. Deste modo,

$$I_\epsilon^{(1)}(a) = \int_0^\infty dx \frac{x^{-\epsilon}}{x^2 + 1} \sum_0^\infty \frac{1}{(a^2 + 4\pi^2 n^2)^{(1+\epsilon)/2}}.$$

A integral e o somatório vão ser desenvolvidas a seguir:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right)}, \\ \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(a^2 + 4\pi^2 n^2)^{(1+\epsilon)/2}} &= \frac{1}{a^{1+\epsilon}} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(a^2 + 4\pi^2 n^2)^{(1+\epsilon)/2}} \\ &= \frac{1}{a^{1+\epsilon}} + 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2\pi n)^{1+\epsilon}} + \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{1}{(a^2 + 4\pi^2 n^2)^{(1+\epsilon)/2}} - \frac{2}{(2\pi n)^{1+\epsilon}} \right]. \end{aligned}$$

Então,

$$I_\epsilon^{(1)}(a) = \left[\frac{\pi}{2a^{1+\epsilon}} + 2^{-1-\epsilon} \pi^{-\epsilon} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1+\epsilon}} \right] \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right)} + \tilde{I}(a) + \mathcal{O}(\epsilon).$$

No limite $\epsilon \rightarrow 0$ é obtido que

$$I_\epsilon^{(1)}(a) = \frac{\pi}{2a} + 2^{-1-\epsilon} \pi^{-\epsilon} \zeta(1 + \epsilon) + \tilde{I}(a^2) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (4.4.25)$$

$\zeta(1 + \epsilon)$ é a função zeta de Riemann expandida em torno de 1 (valor que apresenta uma divergência na série). Esta função, junto com $\tilde{I}(a^2)$, escrevem-se neste limite como

$$\zeta(1 + \epsilon) = 2^\epsilon \pi^\epsilon \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln 2\pi + \gamma + \epsilon \right],$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}(a^2) &= \frac{\pi}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right)} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2\pi n)^{1+\epsilon}} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{4\pi^2 n^2}\right)^{(1+\epsilon)/2}} - 2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a^2}{4\pi^2 n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

Portanto,

$$I_\epsilon^{(1)}(a) = \frac{1}{2\epsilon} + \frac{\pi}{2a} + \frac{1}{2}(\gamma - \ln 2\pi) + \tilde{I}(a^2) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (4.4.27)$$

No caso da integral $I_\epsilon^{(2)}(a)$, é feita a seguinte troca: $x \rightarrow ax$. Assim,

$$I_\epsilon^{(2)}(a) = -\frac{a^{-\epsilon}}{2} \int_0^\infty \frac{x^{-\epsilon} dx}{(1 + x^2)^{1/2}}.$$

Uma representação integral da função beta escreve-se da forma [25]

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt = 2 \int_0^\infty \frac{t^{2x-1}}{(1+t^2)^{x+y}} dt.$$

Neste caso,

$$x = \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}, \quad y = \frac{\epsilon}{2}.$$

Sabendo que $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ e que $\epsilon \rightarrow 0$, então,

$$\begin{aligned} I_\epsilon^{(2)}(a) &= -\frac{a^{-\epsilon}}{4} B\left(\frac{1}{2}(1-\epsilon), \frac{\epsilon}{2}\right) = -\frac{a^{-\epsilon}}{4} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{4}(1-\epsilon \ln a) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$I_\epsilon^{(2)}(a) = -\frac{1}{2\epsilon} + \frac{\gamma}{4} + \frac{1}{2} \ln a + \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon}{2}\right). \quad (4.4.28)$$

Daqui é possível observar que a divergência na integral $I_\epsilon^{(1)}(a)$ é removida pelo primeiro termo do resultado anterior. Portanto, até um fator constante,

$$I(a) = \frac{\pi}{2a} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{a}{4\pi}\right) + \frac{\gamma}{2} + \tilde{I}(a^2). \quad (4.4.29)$$

A função acima é tal que

$$\frac{\partial^2 \bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2)}{\partial(a^2)^2} = -\frac{1}{8\pi^2 \beta^4} I(a). \quad (4.4.30)$$

Integrando duas vezes, é obtido que

$$\begin{aligned} \bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2) &= -\frac{1}{8\pi^2 \beta^4} \left[\frac{2}{3} \pi a^3 + \frac{a^4}{8} \ln a^2 - \frac{3a^4}{16} + \frac{\gamma}{4} a^4 \right. \\ &\quad \left. - \ln 4\pi \frac{a^4}{4} + \tilde{I}(a^6) \right] + C_1 a^2 + C_2. \end{aligned} \quad (4.4.31)$$

Introduzindo as condições de fronteira (4.4.18) e (4.4.19), as constantes C_1 e C_2 vão ter os seguintes valores:

$$\begin{aligned} \bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2) \Big|_{a^2=0} &= -\frac{\pi^2}{90\beta^4} = C_2, \\ \frac{\partial \bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2)}{\partial a^2} \Big|_{a^2=0} &= \frac{1}{24\beta^4} = C_1. \end{aligned}$$

Trocando a por βM , fazendo

$$c \equiv \frac{3}{2} + 2 \ln 4\pi - 2\gamma,$$

e após somar termos semelhantes, a contribuição de temperatura finita ao potencial efetivo até nível de um laço vai ser

$$\begin{aligned} \bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2) = & -\frac{\pi^2}{90\beta^4} + \frac{M^2}{24\beta^2} - \frac{M^3}{12\pi\beta} - \frac{M^4}{64\pi^2} \ln M^2\beta^2 \\ & + \frac{c}{64\pi^2}M^4 + \mathcal{O}(M^6\beta^2). \end{aligned} \quad (4.4.32)$$

Os dois primeiros termos na equação anterior não se tornam imaginários para $M^2 < 0$. Por esta razão, somente vai se contar com eles para calcular a temperatura crítica associada. Desta forma,

$$\mathcal{R}e \left\{ \bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2) \right\} = -\frac{\pi^2}{90\beta^4} + \frac{M^2}{24\beta^2}.$$

Mas

$$M^2 = m^2 + \frac{\lambda}{2}\hat{\phi}^2.$$

Então,

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\phi}^2} \mathcal{R}e \left\{ \bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2) \right\} = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{24\beta^2} = \frac{\partial}{\partial \hat{\phi}^2} \Big|_{\hat{\phi}^2=0} \mathcal{R}e \left\{ \bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}^2) \right\}.$$

Introduzindo este valor na equação (4.2.10), será obtido o seguinte valor para a temperatura crítica:

$$\frac{1}{\beta_C^2} = -\frac{12m^2}{\frac{\lambda}{2}}. \quad (4.4.33)$$

Nota: No caso de acoplamento fraco, as contribuições de ordem maior que um não mudam o cálculo para obter β_C até a ordem mais baixa.

Agora, seja um campo fermiônico ψ que interage com um multipletto de bósons $\{\phi_a\}$ na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ \phi_a(x), \psi(x) \} = & i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}G^a\psi\phi_a \\ & + (\text{Lagrangeano bosônico}). \end{aligned} \quad (4.4.34)$$

Na quantidade anterior, os G^a 's são matrizes. Fazendo o conhecido deslocamento nos campos bosônicos somente (isto não é possível nos campos spinoriais porque eles apresentam antisimetria devida ao spin semi-inteiro, produzindo um “potencial efetivo” nulo) $\phi_a(x) \rightarrow \phi_a(x) + \hat{\phi}_a$, a seguinte matriz de massas efetivas será gerada:

$$M = m + G^a\phi_a. \quad (4.4.35)$$

Portanto, a Lagrangiana sem termo de interação férmion-bóson escreve-se como

$$\hat{\mathcal{L}}_0 \left\{ \hat{\phi}_a, \phi_a(x), \psi(x) \right\} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - \bar{\psi}M\psi + (\text{Termos bosônicos}). \quad (4.4.36)$$

Usando

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp(i\bar{\psi} M \psi) = \text{Det} M, \quad (4.4.37)$$

(ver p. ex. [22, 24]) é obtido que para o termo fermiônico livre em (4.4.36) até um laço,

$$\int \mathcal{D}\psi(x) \mathcal{D}\bar{\psi}(x) \exp[\bar{\psi}(i\rlap{/}\partial - M)\psi] = \text{Det}(\rlap{/}\partial - M) \quad (4.4.38)$$

Portanto, se $\text{Det} A = \exp \text{Tr} \ln A$, com o traço feito nos índices internos e nos índices de Dirac,

$$V_1^\beta(\hat{\phi}) = i \text{Tr} \ln(\rlap{/}\partial - M). \quad (4.4.39)$$

Seguindo o procedimento mostrado em [26],

$$\begin{aligned} \int d^4k \text{Tr} \ln(i\rlap{/}\partial - M) &= \frac{1}{2} \int d^4k \text{Tr} [\ln(i\rlap{/}\partial - M) + \ln(-i\rlap{/}\partial - M)] \\ &= 2 \int d^4k \text{Tr}(k^2 - M^2). \end{aligned}$$

O fator 2 é dado pelo traço sobre os índices de Dirac ($\text{Tr}_{\text{Índices de Dirac}} = 4$). Então, fazendo um traço total em (4.4.39) como

$$\text{Tr} = \sum_i \frac{1}{-i\beta} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

(no primeiro somatório, i dá conta dos índices da matriz de massas efetivas -enquanto que o $-i$ que acompanha a β é a raiz imaginária- e n é um valor da frequência de Matsubara) e uma energia E_{M_i} dada por

$$E_{M_i}^2 = \vec{k}^2 + M_i^2,$$

é obtido que

$$V_1^\beta(\hat{\phi}) = -\frac{2}{\beta} \sum_i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_n \ln \left[\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{\beta^2} + E_{M_i}^2 \right]. \quad (4.4.40)$$

Seguindo um procedimento igual ao caso do campo escalar, é obtido que

$$\sum_n \ln \left[\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{\beta^2} + E_{M_i}^2 \right] = 2\beta \left\{ \frac{1}{2} E_{M_i} + \frac{1}{\beta} \ln [1 + \exp(-\beta E_{M_i})] \right\}.$$

Se o somatório acima dado for derivado, seria obtida uma expressão similar à igualdade (4.4.6), mas em termos dos valores ímpares de n ; isto faz que ao calcular a série seja produzida uma função $\tanh(\pi y)$, cujo denominador está dado pela soma de dois funções exponenciais. Integrando este resultado, vai se obter a igualdade dada acima. Desta forma,

$$V_1^\beta(\hat{\phi}) = -4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_i \left\{ \frac{1}{2} E_{M_i} + \frac{1}{\beta} \ln [1 + \exp(-\beta E_{M_i})] \right\}. \quad (4.4.41)$$

Define-se o potencial efetivo a temperatura zero a nível de um laço como

$$V_1^0(\hat{\phi}) = -4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_i \frac{1}{2} E_{M_i}, \quad (4.4.42)$$

e o termo de temperatura finita (com $x = \beta|\vec{k}|$ e $a_i = \beta M_i$) vai ser

$$\bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}) = -\frac{2}{\pi^2\beta^4} \int_0^\infty dx x^2 \sum_i \ln \left[1 + \exp(-\sqrt{x^2 + a_i^2}) \right]. \quad (4.4.43)$$

O sinal negativo é consequência da estatística de Fermi-Dirac, e o fator 4 representa os graus de liberdade presentes: spin up, spin down, partícula, antipartícula.

Para calcular o termo dado por (4.4.42), estuda-se o seguinte termo inercial fermiônico [16]:

$$-\sum_{a,b} \bar{\psi}_a M_{ab} \psi_b.$$

Lembrando que as contribuições não nulas de partículas de spin semi-inteiro em laços são aquelas que têm um número par de matrizes gamma de Dirac e fechando a parte spinorial e tomando o traço em índices de Dirac e internos, é obtido que

$$V_1^0(\hat{\phi}) = -\frac{1}{64\pi^2} \text{Tr} [(MM^\dagger)^2 \ln(MM^\dagger)].$$

Somando sobre índices de Dirac,

$$V_1^0(\hat{\phi}) = -\frac{1}{16\pi^2} \sum_i M_i^4 \ln M_i^2. \quad (4.4.44)$$

Os M_i 's são os elementos da diagonal da matriz de massa M .

Na equação (4.4.43), para um valor de i somente tal que $\sum_i \bar{V}_{1i}^\beta(\hat{\phi}) = \bar{V}_1^\beta(\hat{\phi})$, seja

$$\bar{V}_{1i}^\beta(\hat{\phi}) = \frac{2}{\pi^2\beta^4} \int_0^\infty dx x^2 \ln \left[1 + \exp(-\sqrt{x^2 + a_i^2}) \right]. \quad (4.4.45)$$

Fazendo uma expansão em termos de a_i^2 em torno de $a_i^2 = 0$,

$$\begin{aligned} \bar{V}_{1i}^\beta(\hat{\phi}) \Big|_{a_i^2=0} &= -\frac{2}{\pi^2\beta^4} \int_0^\infty dx x^2 \ln [1 + \exp(-x)] \\ &= -\frac{2}{3\pi^2\beta^4} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{\exp(x) + 1}. \end{aligned}$$

Seja a seguinte integral [24]

$$f_n(1) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dx \frac{x^{n-1}}{\exp(x) + 1} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) \zeta(n).$$

Neste caso, $n = 4$. Então,

$$f_4(1) = \frac{7}{8} \frac{\pi^4}{90}.$$

O primeiro termo na expansão vai ser

$$\bar{V}_{1i}^\beta(\hat{\phi}) \Big|_{a_i^2=0} = -\frac{7\pi^2}{180\beta^4}. \quad (4.4.46)$$

O seguinte termo (primeira derivada calculada em $a_i^2 = 0$) escreve-se como

$$\frac{\partial \bar{V}_{1i}^\beta}{\partial a_i^2} \Big|_{a_i^2=0} = \frac{1}{\pi^2\beta^4} \int_0^\infty dx \frac{x}{\exp(x) + 1},$$

$$f_2(1) = \frac{\pi^2}{12}.$$

O segundo termo na expansão é

$$\frac{\partial \bar{V}_{1i}^\beta}{\partial a_i^2} \Big|_{a_i^2=0} = \frac{1}{12\beta^4}. \quad (4.4.47)$$

Usando o mesmo procedimento que no caso do campo escalar para o terceiro termo, i.e,

$$\frac{\partial^2 \bar{V}_{1i}^\beta}{\partial (a_i^2)^2} \Big|_{a_i^2=0} = -\frac{1}{2\pi^2\beta^4} \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{x^2 + a_i^2} [\exp(\sqrt{x^2 + a_i^2}) + 1]}.$$

Sejam

$$I(a_i) = \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{x^2 + a_i^2} [\exp(\sqrt{x^2 + a_i^2}) + 1]}, \quad (4.4.48)$$

$$I_\epsilon(a_i) = \int_0^\infty dx \frac{x^{-\epsilon}}{\sqrt{x^2 + a_i^2} [\exp(\sqrt{x^2 + a_i^2}) + 1]}. \quad (4.4.49)$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 \bar{V}_{1i}^\beta}{\partial (a_i^2)^2} \Big|_{a_i^2=0} = -\frac{1}{2\pi^2\beta^4} I(a_i). \quad (4.4.50)$$

Usando o seguinte resultado da expansão em series da função $1/[\exp(\sqrt{x^2 + a_i^2}) + 1]$

$$\frac{1}{\exp(\sqrt{x^2 + a_i^2}) + 1} = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + a_i^2}}{x^2 + a_i^2 + (2n+1)^2\pi^2},$$

é possível separar a integral $I_\epsilon(a_i)$ em dois termos tais que

$$I_\epsilon(a_i) = I_\epsilon^{(1)}(a_i) + I_\epsilon^{(2)}(a_i),$$

onde

$$I_\epsilon^{(1)}(a_i) = - \int_0^\infty dx x^{-\epsilon} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{x^2 + a_i^2 + (2n+1)^2 \pi^2}, \quad (4.4.51)$$

$$I_\epsilon^{(2)}(a_i) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dx \frac{x^{-\epsilon}}{x^2 + a_i^2}. \quad (4.4.52)$$

Na primeira integral, troque-se x por $[a_i^2 + (2n+1)^2 \pi^2]^{1/2} x$. Na segunda integral, faça-se a troca $x \rightarrow a_i x$. Desta forma, em $I_\epsilon^{(1)}(a_i)$ é obtida uma série

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{[a_i^2 + (2n+1)^2 \pi^2]^{(1+\epsilon)/2}}.$$

Soma-se e subtrai-se uma quantidade

$$2 \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{[(2n+1)]^{(1+\epsilon)/2}}$$

tal que possa se obter uma função zeta de Riemann $\zeta(1+\epsilon)$ e uma série da forma

$$\tilde{I}(a_i^2) \equiv \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{a_i^2}{(2n+1)^2 \pi^2} \right]^{-\frac{1}{2}} - 1 \right\}. \quad (4.4.53)$$

Então,

$$\begin{aligned} I_\epsilon^{(1)}(a_i) &= - \int_0^\infty dx \frac{x^{-\epsilon}}{x^2 + 1} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{[a_i^2 + (2n+1)^2 \pi^2]^{(1+\epsilon)/2}} \\ &= -\frac{1}{2\epsilon} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\pi}{2} - \gamma \right) + \tilde{I}(a_i^2). \end{aligned} \quad (4.4.54)$$

Na integral $I_\epsilon^{(2)}(a_i)$,

$$I_\epsilon^{(2)}(a_i) = \frac{1}{2} a_i^{-\epsilon} \int_0^\infty \frac{x^{-\epsilon} dx}{(1+x^2)^{1/2}} = \frac{a_i^{-\epsilon}}{4} B\left(\frac{1}{2}(1-\epsilon), \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Então,

$$I_\epsilon^{(2)}(a_i) = \frac{1}{2\epsilon} - \frac{\gamma}{4} - \frac{1}{2} \ln a_i + \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon}{2}\right). \quad (4.4.55)$$

Finalmente, o resultado para a integral $I(a_i)$ vai ser

$$I(a_i) = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{a_i}{\pi} \right) - \frac{\gamma}{2} + \tilde{I}(a_i^2). \quad (4.4.56)$$

Fazendo algumas operações com os logaritmos,

$$\frac{\partial^2 \bar{V}_{1i}^\beta}{\partial (a_i^2)} = \frac{1}{4\pi^2 \beta^4} \left(\frac{1}{2} \ln a_i^2 + \gamma - \ln \pi + \tilde{I}(a_i^2) \right),$$

e integrando duas vezes a igualdade acima, é obtido que

$$\bar{V}_{1i}^\beta(\hat{\phi}) = \frac{1}{4\pi^2\beta^4} \left[\frac{1}{4}a_i^4 \ln a_i^2 - \frac{3}{8}a_i^4 + \frac{\gamma}{2}a_i^4 - \frac{1}{2} \ln \pi a_i^4 + \tilde{I}(a_i^4) \right] + C_1 a_i^2 + C_2. \quad (4.4.57)$$

As constantes de integração são encontradas introduzindo as condições iniciais (4.4.46) e (4.4.47):

$$\bar{V}_{1i}^\beta(\hat{\phi}) \Big|_{a_i^2=0} = C_2 = -\frac{7\pi^1}{180\beta^4}, \quad \frac{\partial \bar{V}_{1i}^\beta(\hat{\phi})}{\partial a_i^2} \Big|_{a_i^2=0} = C_2 = \frac{1}{12\beta^4}.$$

Portanto, fazendo $a_i = \beta M_i$,

$$\bar{V}_{1i}^\beta(\hat{\phi}) = -\frac{7\pi^2}{180\beta^4} + \frac{M_i^2}{12\beta^2} + \frac{M_i^4}{16\pi^2} \ln M_i^2 \beta^2 \quad (4.4.58)$$

$$+ \frac{M_i^4}{16\pi^2} \left(2\gamma - 2 \ln \pi - \frac{3}{2} \right) + \tilde{I}(M_i^6 \beta^2). \quad (4.4.59)$$

Seja

$$c = 2\gamma - 2 \ln \pi - \frac{3}{2}.$$

Introduzindo o resultado dado para $\bar{V}_{1i}^\beta(\hat{\phi})$ no somatório, é obtido finalmente o potencial efetivo até um laço no caso fermiônico a temperatura finita.

$$\bar{V}_1^\beta(\hat{\phi}) = \sum_i \left[-\frac{7\pi^2}{180\beta^4} + \frac{M_i^2}{12\beta^2} + \frac{M_i^4}{16\pi^2} \ln M_i^2 \beta^2 + \frac{c}{16\pi^2} M_i^4 + \mathcal{O}(M_i^6 \beta^2) \right]. \quad (4.4.60)$$

Comparando com o caso do campo escalar, além da introdução da matriz de massas, está o fato de ter sinais opostos em algumas contribuições. Isto deve-se à estatística de Fermi-Dirac fornecida nos spinores, a qual impõe que cada traço feito em um laço seja multiplicado por um fator de -1 .

Capítulo 5

Modelo de Gross-Neveu a temperatura finita

Seguindo o procedimento desenvolvido em [27], estende-se o modelo de Gross-Neveu ao caso de temperatura finita, mudando a componente temporal contínua por uma componente que apresenta valores fixos na energia do sistema. Após ter feito isto, calculam-se as integrais associadas aos diagramas divergentes considerados (autoenergia do férmion e correção ao vértice de quatro pontos), levando em conta que a soma sobre as frequências de Matsubara permite isolar os termos divergentes que são produzidos na teoria no regime de temperatura nula.

O estudo da obtenção da Lagrangiana equivalente do modelo é feito com o formalismo de LCO, mas neste caso, quando for necessário introduzir o campo escalar auxiliar para remover os termos proporcionais às potências da fonte J , precisa-se mudar a integração no tempo no argumento da exponencial da transformada de Hubbard-Stratonovich usada; isto deve-se ao fato de se ter uma variável temporal compactificada.

A transformada mencionada acima permite introduzir um campo escalar auxiliar que será de grande ajuda no estudo do potencial efetivo associado. Ao estudar os termos em primeira ordem na teoria de perturbações, isolam-se as contribuições a temperatura zero do laço fermiônico (equação (3.2.18)) e da autoenergia do férmion (equação (3.2.23)). Como esse laço é formado com um propagador que tem termo cinético não nulo, estuda-se a sua contribuição a temperatura finita para encontrar um valor de temperatura crítica onde aconteça uma restauração da simetria quebrada (neste caso, a simetria quiral da Lagrangiana).

Para estudar a restauração da simetria da Lagrangiana, calcula-se o gap de massa da teoria levando em conta a contribuição de temperatura finita dita anteriormente. Após ter feito as aproximações devidas no novo termo, encontra-se o valor de temperatura crítica onde este gap tem um valor nulo.

5.1. Isolamento das divergências

Como foi dito antes, precisa-se encontrar as divergências da teoria a temperatura zero. Para fazer isto, torna-se necessário usar o formalismo de Matsubara ou de frequências discretas nas integrais associadas aos diagramas divergentes. Portanto, as trocas a fazer na equação (3.2.4)

vai ser

$$(a) = 2iJg^2 \left(N - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{-i\beta} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{q^2 + J^2}. \quad (5.1.1)$$

No denominador do integrando do diagrama modificado (a) aparecerá uma quantidade da forma $q^2 + J^2$, onde $q^2 = (2n + 1)^2\pi^2/\beta^2 + |\vec{q}|^2$ (a soma é feita sobre frequências ímpares devido à estatística de Fermi-Dirac). Fatorizando β para ficar com quantidades adimensionais, encontra-se um quociente dado por

$$\frac{2J}{(2n + 1)^2\pi^2 + \beta^2\omega^2}, \quad \omega^2 = |\vec{q}|^2 + J^2.$$

Essa soma pode ser estendida ao contínuo considerando que as frequências são os pólos da função $\tanh(\beta p_0/2)$, mas para fornecer aquela tarefa, é feita uma integração no plano complexo da forma

$$\beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(\beta p_0 = (2n + 1)\pi) = \frac{\beta}{2\pi i} \oint_C dp_0 g(\beta p_0) \frac{\beta}{2} \tanh\left(\frac{\beta p_0}{2}\right),$$

onde o contorno está formado por duas trajetórias paralelas ao eixo imaginário p_0 e $g(\beta p_0)$ é uma função introduzida por critério de convergência da integral.

Agora, separando a função hiperbólica como

$$\tanh\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) = 1 - \frac{2}{\exp(\beta p_0) + 1},$$

e fazendo

$$g(\beta p_0) = -\frac{1}{\beta^2 p_0^2 - \beta^2 \omega^2} = \frac{1}{\beta^2 (p_4^2 + \omega^2)},$$

(neste caso, $p_4 = ip_0$) é obtido que

$$\begin{aligned} \beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(\beta p_0 = (2n + 1)\pi) &= \frac{\beta^2}{2\pi i} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} dp_0 \frac{1}{2} [g(p_0) + g(-p_0)] \\ &\quad - \frac{\beta^2}{2\pi i} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} dp_0 [g(\beta p_0) + g(-\beta p_0)] \frac{1}{\exp(\beta p_0) + 1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_4}{p_4^2 + \omega^2} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_4}{(p_4^2 + \omega^2)[\exp(-i\beta p_4) + 1]}. \end{aligned}$$

O sinal negativo no argumento da função $g(\beta p_0)$ é devido à direção da trajetória considerada para a integração no plano complexo de p_0 . Agora, das integrais na variável p_4 é deduzido o seguinte: a primeira tem a já conhecida forma divergente da integral a temperatura nula, enquanto que a segunda apresenta dois pólos de ordem 1 em $p_4 = \pm i\omega$, e corresponde à contribuição no regime de temperatura finita (esta não produz novas divergências, as contribuições

estão associadas às propriedades termodinâmicas do sistema).

Resolvendo o problema dos pólos na segunda integral, é obtido que

$$(a) = -2 \left(N - \frac{1}{2} \right) g^2 J \left[\int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{q^2 + J^2} - \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{\omega [\exp(\beta\omega) + 1]} \right]. \quad (5.1.2)$$

A primeira integral é feita usando regularização dimensional, com uma contribuição divergente dada por

$$(a)_{div}(T=0) = - \left(N - \frac{1}{2} \right) g^2 \frac{J}{\pi\epsilon}.$$

Isto permite definir uma função Z_2 da forma

$$Z_2 = 1 - \left(N - \frac{1}{2} \right) \frac{g^2}{\pi\epsilon}. \quad (5.1.3)$$

No regime de temperatura finita, as divergências obtidas na teoria a temperatura zero não vão mudar. Portanto, no caso da correção à constante de acoplamento até um laço, é usado o resultado dado a temperatura zero no capítulo 3, i.e,

$$Z_g = 1 - (N - 1) \frac{g^2}{\pi\epsilon}. \quad (5.1.4)$$

Como a função Z_ζ foi obtida da correção no funcional gerador $W(J)$, a obtenção da divergência a um laço é igual que no caso de temperatura zero. Portanto, o resultado obtido para aquela quantidade será usado daqui para diante.

$$Z_\zeta = 1 - \frac{N}{\pi} \frac{g^2}{\epsilon}. \quad (5.1.5)$$

5.2. Transformada de Hubbard-Stratonovich a temperatura finita

Antes de continuar, é necessário esclarecer o método que será utilizado para introduzir o campo auxiliar σ na Lagrangiana de Gross-Neveu no regime de temperatura finita.

Levando em conta que o funcional gerador $Z^\beta(J)$ é interpretado como a função de partição do sistema (devido à imposição da condição de antiperiodicidade nas trajetórias dos campos), onde segundo [28] esta função pode ser escrita como

$$Z = Tr [\exp(-\beta K - \beta V - \nu N)] , \quad \beta = \frac{1}{kT} , \quad \nu = \frac{\mu}{kT}, \quad (5.2.1)$$

com os seguintes termos dados em função de somatórias dos operadores criação e destruição η_i e η_i^* ,

$$K = \sum_i \epsilon_i \eta_i^* \eta_i, \quad (5.2.2)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{ij;kl} v_{ij;kl} \eta_i^* \eta_j \eta_k^* \eta_l, \quad (5.2.3)$$

$$N = \sum_i \eta_i^* \eta_i, \quad (5.2.4)$$

é possível introduzir uma transformada de Hubbard-Stratonovich no funcional gerador

$$Z^\beta(J) = \exp(-W^\beta(J)) = \int_{\text{antiperiodico}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp\left(-\int_0^\beta dt \int d^{d-1}x \mathcal{L}(J)\right), \quad (5.2.5)$$

considerando que as integrações no argumento da exponencial são trocadas por somatórios, i.e,

$$\int_0^\beta dt \rightarrow \sum_{n=0}^{n_\beta} \Delta t_n, \quad n_\beta \Delta t_n = \beta = cte,$$

$$\int d^{d-1}x = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_{d-1} \rightarrow \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_{d-1}=-\infty}^{\infty} \Delta x_{n_1} \cdots \Delta x_{n_{d-1}}.$$

Desta forma, o funcional gerador vai ser

$$Z^\beta(J) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=0}^n d\bar{\psi}_j \prod_{j=1}^n d\psi_j \exp \left[- \lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \lim_{\Delta x_1, \dots, \Delta x_{d-1}} \sum_{n=0}^{n_\beta} \Delta t_n \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \Delta x_{n_1} \right. \\ \left. \cdots \sum_{n_{d-1}=-\infty}^{\text{infy}} \Delta x_{n_{d-1}} \mathcal{L}(J) \right],$$

onde

$$\mathcal{L}(J) = Z \bar{\psi}_j \not{\partial} \psi + J Z_2 \bar{\psi}_j \psi - \frac{1}{2} \mu^\epsilon Z_g g^2 (\bar{\psi}_j \psi_j)^2 - \frac{1}{2} \mu^{-\epsilon} Z_\zeta \zeta J^2,$$

enquanto que a transformada de Hubbard-Stratonovich escrita em forma discreta vai ser

$$1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N d\sigma_j \exp \left[- \frac{1}{2 Z_\zeta \zeta (g^2)} \lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \lim_{\Delta x_1, \dots, \Delta x_{d-1}} \sum_{n=0}^{n_\beta} \Delta t_n \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \Delta x_{n_1} \right. \\ \left. \cdots \sum_{n_{d-1}=-\infty}^{\infty} \Delta x_{n_{d-1}} \left(\frac{\sigma_j}{g} + \mu^{\epsilon/2} Z_2 \bar{\psi}_j \psi_j - \mu^{\epsilon/2} Z_\zeta \zeta J^2 \right)^2 \right]. \quad (5.2.6)$$

Todas as integrais sobre os campos fermiônicos encontram-se restringidas às trajetórias antiperiódicas, enquanto que as trajetórias do campo escalar auxiliar são periódicas. Em forma integral, a transformada de Hubbard-Stratonovich fica como

$$1 = \int_{\text{periodico}} \mathcal{D}\sigma \exp \left[-\frac{1}{2Z_\zeta \zeta (g^2)} \int_0^\beta dt \int d^{d-1}x \left(\frac{\sigma}{g} + \mu^{\epsilon/2} Z_2 \bar{\psi} \psi - \mu^{\epsilon/2} Z_\zeta \zeta J^2 \right)^2 \right]. \quad (5.2.7)$$

Introduzindo na equação (5.2.5), o funcional gerador resultante vai ser

$$Z^\beta(J) = \int_{\text{antiperiodico}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \int_{\text{periodico}} \mathcal{D}\sigma \exp \left[- \left(\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, \sigma) - \frac{\sigma \mu^{-\epsilon/2} J}{g} \right) \right], \quad (5.2.8)$$

e a Lagrangiana equivalente escreve-se como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\bar{\psi}, \psi, \sigma) = & Z \bar{\psi} \not{\partial} \psi + \frac{Z_2}{g^2 Z_\zeta \zeta} g \sigma \mu^{\epsilon/2} \bar{\psi} \psi - \frac{g^2}{2} \mu^\epsilon (\bar{\psi} \psi)^2 \left(Z_g - \frac{Z_2^2}{Z_\zeta \zeta g^2} \right) \\ & + \frac{\sigma^2}{2Z_\zeta \zeta g^2}. \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Desta forma, mostrou-se que a introdução dos termos de temperatura finita não mudam a estrutura das Lagrangianas obtidas, eles só vão adicionar contribuições associadas a esta variável termodinâmica nas integrais dos diagramas divergentes.

5.3. Potencial efetivo a temperatura finita

Na Lagrangiana (5.2.9), efetuamos os já conhecidos deslocamentos $\sigma \rightarrow \sigma + \sigma_c$, $\psi \rightarrow \psi + \xi$ e $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} + \bar{\xi}$. Desta forma, é obtido um termo independente dos campos ψ , $\bar{\psi}$ e σ dado pela seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I(\sigma_c, \xi, \bar{\xi}) = & \frac{\sigma_c^2}{2g^2 Z_\zeta \zeta (g^2)} + \mu^{\epsilon/2} g \sigma_c \bar{\xi} \xi \frac{Z_2}{g^2 Z_\zeta \zeta (g^2)} \\ & - \frac{1}{2} \mu^\epsilon g^2 (\bar{\xi} \xi)^2 \left[Z_g - \frac{Z_2^2}{g^2 Z_\zeta \zeta (g^2)} \right] - \frac{\sigma_c}{g} \mu^{-\epsilon/2} J. \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

O resultado obtido é igual àquele dado pela equação (3.2.13), e permite escrever a Lagrangiana equivalente da forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & Z \bar{\psi} \not{\partial} \psi + \frac{Z_2}{g^2 Z_\zeta \zeta} g \sigma \mu^{\epsilon/2} \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2} g \mu^\epsilon (\bar{\xi} \xi)^2 \left[Z_g - \frac{Z_2^2}{Z_\zeta \zeta g^2} \right] + \frac{\sigma^2}{2Z_\zeta \zeta g^2} \\ & - \frac{\sigma}{g} \mu^{-\epsilon/2} J + \mathcal{L}'(\sigma, \sigma_c, \psi, \bar{\psi}, \xi, \bar{\xi}) + \mathcal{L}_I(\sigma_c, \xi, \bar{\xi}), \end{aligned}$$

Onde $\mathcal{L}'(\sigma, \sigma_c, \psi, \bar{\psi}, \xi, \bar{\xi})$ é um termo que mistura os campos, σ , ψ e $\bar{\psi}$ com os campos σ_c , ξ e $\bar{\xi}$.

Como as definições para os funcionais geradores $Z(J)$, $W(J)$ e $\Gamma(\sigma_c)$ não mudam no esquema de temperatura finita, é possível encontrar as contribuições a um laço para a ação efetiva da definição

$$\Gamma^\beta(\sigma_c) = W^\beta(J) - \int_0^\beta dt \int d^{d-1}x \frac{\sigma_c}{g} \mu^{-\epsilon/2} J.$$

Se ¹

$$\begin{aligned} Z^\beta(J) = \exp(-W^\beta(J)) = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\sigma \exp \left\{ - \int_0^\beta dt \int d^{d-1}x \left(Z\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \frac{Z_2}{g^2 Z_\zeta \zeta} g\sigma \mu^{\epsilon/2} \bar{\psi}\psi \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} g\mu^\epsilon (\bar{\xi}\xi)^2 \left[Z_g - \frac{Z_2^2}{Z_\zeta \zeta g^2} \right] + \frac{\sigma^2}{2Z_\zeta \zeta g^2} - \frac{\sigma}{g} \mu^{-\epsilon/2} J \right. \right. \\ \left. \left. + \mathcal{L}'(\sigma, \sigma_c, \psi, \bar{\psi}, \xi, \bar{\xi}) + \mathcal{L}_I(\sigma_c, \xi, \bar{\xi}) \right\}, \end{aligned}$$

e

$$W^\beta(J) = -\ln Z(J),$$

o termo de acoplamento entre σ_c e J vai ser cancelado, obtindo um potencial clássico da forma

$$\begin{aligned} V_{cl}(\sigma_c, \xi, \bar{\xi}) = \frac{\sigma_c^2}{2g^2 Z_\zeta \zeta (g^2)} + \mu^{\epsilon/2} g\sigma_c \bar{\xi}\xi \frac{Z_2}{g^2 Z_\zeta \zeta (g^2)} \\ - \frac{1}{2} \mu^\epsilon g^2 (\bar{\xi}\xi)^2 \left[Z_g - \frac{Z_2^2}{g^2 Z_\zeta \zeta (g^2)} \right]. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Resultado igual ao obtido na equação (3.2.17). Por outro lado, da integração nos campos ψ e $\bar{\psi}$ é possível perceber que aparece o seguinte termo associado a um tadpole de férmions (separando a integração no campo σ):

$$\ln Z^\beta(J)|_F = \ln \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ - \int_0^\beta dt \int d^{d-1}x (\bar{\psi}\not{\partial}\psi + g\sigma_c \bar{\psi}\psi) \right\}.$$

Daqui é deduzido uma contribuição similar à equação (3.2.18), mas a integração na componente temporal do momento é trocada por uma somatória sobre frequências ímpares. A expressão será dada mais adiante.

Até nível árvore, todas as funções Z são iguais a 1 e o primeiro termo da função $\zeta(g^2)$ é $1/g^2$. Então, do potencial clássico (5.3.2), seja

$$V_{eff}^{(0)}(\sigma_c, \xi, \bar{\xi}) = V_{cl}(\sigma_c, \xi, \bar{\xi})|_{0 \text{ laços}} = \frac{\sigma_c^2}{2} + g\sigma_c \bar{\xi}\xi. \quad (5.3.3)$$

Novamente, o termo do vértice de 4 férmions é anulado até este nível. Antes de fazer a correção a um laço, lembre-se que o campo auxiliar σ não tem termo cinético na Lagrangiana

¹Nas integrações nos campos fermiônicos são levadas em conta as condições de contorno antiperiódicas, enquanto que nos campos bosônicos trocam-se por condições periódicas. Por isto não é usada uma notação de somatória de forma explícita.

equivalente (5.2.9) ($\partial_\mu \sigma = 0$). Portanto, a contribuição de temperatura finita será dada somente pelos diagrama de tadpole do férmion e de autocorreção à energia dada pela interação férmion-campo σ (integral (3.2.23) no capítulo 3), cuja forma muda para

$$(B) = (ig)^2 \left(\frac{1}{-i\beta} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{i\not{q} + m}. \quad (5.3.4)$$

Como no caso de temperatura nula, e após de introduzir o campo clássico σ , o propagador livre do férmion é dado como

$$\frac{\delta^{ab}}{i\not{q} + m}, \quad m = g\sigma_c.$$

Mas

$$\frac{\delta^{ab}}{i\not{q} + m} = \frac{\delta^{ab}(-i\not{q} + m)}{q^2 + m^2}.$$

Os termos proporcionais a potências ímpares de q não contribuem à integral. Portanto, o diagrama de autointeração terá uma regra associada da forma

$$(B) = m(ig)^2 \left(\frac{1}{-i\beta} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{q^2 + m^2}.$$

Fatorizando β do quadrado do quadrimomento $q^2 = (2n+1)^2 \pi^2 / \beta^2 + |\vec{q}|^2$, a função na qual é feita a soma sobre frequências para a integral (B) é

$$g(p_0) = -\frac{1}{\beta^2 q_0^2 - \beta^2 \omega^2} = \frac{1}{\beta^2 (q_4^2 + \omega^2)}, \quad \omega^2 = |\vec{q}|^2 + m^2.$$

Isolando de novo a parte a temperatura zero, é obtido que

$$(B) = -img^2 \left[\int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{q^2 + m^2} - \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{\omega [\exp(\beta\omega) + 1]} \right], \quad (5.3.5)$$

cuja parte a temperatura zero (usando o método de regularização dimensional) escreve-se como

$$(B)(T=0) = -\frac{img^2}{4\pi} \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) - \frac{img^2}{2\pi} \frac{1}{\epsilon}.$$

Além do diagrama de tadpole, as outras contribuições a um laço vão ser dadas pelos coeficientes das funções Z e da função $\zeta(g^2)$ (eq. (3.2.17)). Deste modo,

$$\begin{aligned} V_{eff}^{(1)}(\sigma_c, \xi, \bar{\xi}, \beta) = & iNTr \ln(-i\not{q} + g\sigma_c) - \frac{\sigma_c^2 g^2}{2} \frac{1}{8\pi (N - \frac{1}{2})} + \frac{Ng^2 \sigma_c^2}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} \\ & + g\sigma_c \bar{\xi} \xi \frac{g^2}{2\pi\epsilon} - \frac{1}{(N - \frac{1}{2})} \frac{g^2 \sigma_c^2}{8\pi} - \frac{g^2}{(N - \frac{1}{2})} \frac{g\sigma_c \bar{\xi} \xi}{8\pi} \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{g^2}{8\pi (N - \frac{1}{2})} \frac{g^2}{2} (\bar{\xi} \xi)^2 - i \frac{(B)(T=0)}{m} g\sigma_c \bar{\xi} \xi \\ & + g\sigma_c \bar{\xi} \xi g^2 \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{\omega [\exp(\beta\omega) + 1]} \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Como no caso dado no capítulo 3, definiu-se $\bar{\mu}^2 = g^2 \sigma_0^2$. A contribuição do tadpole é (seguindo o procedimento de [6])

$$V_1^\beta(\sigma_c) = iNT \text{Tr} \ln(-i\not{q} + g\sigma_c). \quad (5.3.8)$$

Fazendo o traço nos índices de Dirac, vai se obter que

$$V_1^\beta(\sigma_c) = 2iNT \text{Tr} \ln(q^2 + g^2 \sigma_c^2).$$

O traço nos índices internos só tem dois termos porque a matriz associada à massa $g\sigma_c$ é a matriz unidade em duas dimensões. Então,

$$V_1^\beta(\sigma_c) = -\frac{4N}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} \ln \left[\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{\beta^2} + E_\sigma^2 \right],$$

onde $E_\sigma^2 = |\vec{q}|^2 + g^2 \sigma_c^2$. Levando em conta que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{\beta^2} + E_\sigma^2 \right] = \beta \left\{ \frac{E_\sigma}{2} + \frac{1}{\beta} \ln [1 + \exp(-\beta E_\sigma)] \right\},$$

$V_1^\beta(\sigma_c)$ muda para

$$V_1^\beta(\sigma_c) = -2N \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} E_\sigma - \frac{4N}{\beta} \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} \ln [1 + \exp(-\beta E_\sigma)]. \quad (5.3.9)$$

Em duas dimensões, o potencial efetivo a um laço escreve-se como

$$V_1^0 = -\frac{1}{2} \bar{f} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \ln(q_4^2 + |\vec{q}|^2 + g^2 \sigma_c^2). \quad (5.3.10)$$

Na igualdade acima, $p_4 = ip_0$ e \bar{f} é considerado como um fator de degenerescência dos férmions. Na integral

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dq_4 \ln(q_4^2 + E_\sigma^2), \quad E_\sigma^2 = |\vec{q}|^2 + g^2 \sigma_c^2,$$

derive-se o integrando uma vez em função de E_σ^2 . Desta forma, são obtidos dois pólos em $\pm iE_\sigma$ (como pode ser visto na seguinte igualdade).

$$\frac{\partial I_0}{\partial E_\sigma^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_4}{q_4^2 + E_\sigma^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_4}{(q_4 - iE_\sigma)(q_4 + iE_\sigma)}.$$

Usando o teorema dos resíduos e integrando uma vez em E_σ^2 , é obtido que

$$I_0 = 4\pi E_\sigma.$$

Então,

$$V_1^0 = -\bar{f} \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} E_\sigma.$$

Comparando com a igualdade (5.3.8), é deduzido que $\bar{f} = 2N$. Desta forma,

$$V_1^0 = -N \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \ln(q_4^2 + |\vec{q}|^2 + g^2\sigma_c^2), \quad m = g\sigma_c.$$

$q_4^2 + |\vec{q}|^2 = q^2$. Fazendo regularização dimensional da integral acima (como no caso da equação (3.2.26)), é obtido o seguinte resultado:

$$V_1^0 = \frac{N}{4\pi} g^2 \sigma_c^2 \left[\left(\frac{g^2 \sigma_c^2}{\bar{\mu}^2} \right) - 1 \right] - \frac{N g^2 \sigma_c^2}{2\pi} \frac{1}{\epsilon}. \quad (5.3.11)$$

Incluindo o termo a temperatura finita, a correção escreve-se como

$$V_1^\beta(\sigma_c) = \frac{N}{4\pi} g^2 \sigma_c^2 \left[\ln \left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2} \right) - 1 \right] - \frac{N g^2 \sigma_c^2}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} - \frac{2N}{\pi\beta} \int_0^\infty dq \ln \left[1 + \exp(-\beta \sqrt{|\vec{q}|^2 + g^2 \sigma_c^2}) \right]. \quad (5.3.12)$$

Deste modo, e fazendo $\bar{\mu}^2 = g^2 \sigma_c^2$ na equação (5.3.6), o termo a um laço do potencial efetivo fica como

$$\begin{aligned} V_{eff}^{(1)}(\sigma_c, \xi, \bar{\xi}, \beta) &= \frac{N}{4\pi} g^2 \sigma_c^2 \left[\ln \left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2} \right) - 1 \right] - \frac{g^2 \sigma_c^2}{16\pi} \frac{1}{(N - \frac{1}{2})} \\ &\quad g\sigma_c \bar{\xi} \xi \frac{g^2}{4\pi} \ln \left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2} \right) - \frac{g^4}{16\pi} (\bar{\xi} \xi)^2 \frac{1}{(N - \frac{1}{2})} \\ &\quad - g\sigma_c \bar{\xi} \xi \frac{g^2}{8\pi} \frac{1}{(N - \frac{1}{2})} \\ &\quad - \frac{2N}{\pi\beta} \int_0^\infty dq \ln \left[1 + \exp(-\beta \sqrt{|\vec{q}|^2 + g^2 \sigma_c^2}) \right] \\ &\quad + g\sigma_c \bar{\xi} \xi g^2 \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{\omega [\exp(\beta\omega) + 1]}. \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

Até um laço,

$$\begin{aligned} V_{eff}(\sigma_c, \xi, \bar{\xi}, \beta) &= \frac{\sigma_c^2}{2} \left[1 - \frac{g^2}{8\pi} \frac{1}{(N - \frac{1}{2})} \right] + \frac{N}{4\pi} g^2 \sigma_c^2 \left[\ln \left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2} \right) - 1 \right] \\ &\quad + g\sigma_c \bar{\xi} \xi \left[1 - \frac{g^2}{8\pi} \frac{1}{(N - \frac{1}{2})} + \frac{g^2}{4\pi} \ln \left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2} \right) \right] \\ &\quad - \frac{g^4}{16\pi} (\bar{\xi} \xi)^2 \frac{1}{(N - \frac{1}{2})} \\ &\quad - \frac{2N}{\pi\beta} \int_0^\infty dq \ln \left[1 + \exp(-\beta \sqrt{|\vec{q}|^2 + g^2 \sigma_c^2}) \right] \\ &\quad + g\sigma_c \bar{\xi} \xi g^2 \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{\omega [\exp(\beta\omega) + 1]}. \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Para abreviar a igualdade obtida, são usadas as redefinições da constante de acoplamento g e do campo auxiliar clássico σ_c dadas no capítulo 3, as quais são dadas pelas equações (3.2.33) e (3.2.34). Elas não vão mudar no formalismo de temperatura finita porque o campo σ não apresenta termo cinético e portanto, não produzirá novas divergências no modelo. Deste modo, $V_{eff}(\sigma_c, \xi, \bar{\xi}, \beta)$ muda para

$$V_{eff}(\sigma_c, \xi, \bar{\xi}, \beta) = \frac{\sigma_c^2}{2} + \frac{N}{4\pi} g^2 \sigma_c^2 \left[\ln \left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2} \right) - 3 \right] \quad (5.3.15)$$

$$\begin{aligned} &+ g \sigma_c \bar{\xi} \xi \left[1 - \frac{g^2}{2\pi} + \frac{g^2}{4\pi} \ln \left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2} \right) \right] \\ &- \frac{g^4}{16\pi} (\bar{\xi} \xi)^2 \frac{1}{(N - \frac{1}{2})} \\ &- \frac{2N}{\pi \beta} \int_0^\infty dq \ln \left[1 + \exp(-\beta \sqrt{|\vec{q}|^2 + g^2 \sigma_c^2}) \right] \\ &+ g \sigma_c \bar{\xi} \xi g^2 \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{\omega [\exp(\beta \omega) + 1]}. \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

Sem levar em conta os termos das fontes de férmions, o resultado obtido coincide com aquele dado em [7]. Ignorando o termo a temperatura finita, o resultado coincidiria com aquele dado em [3].

5.4. Gap de massa e temperatura crítica do sistema

O gap de massa é obtido derivando o potencial efetivo em termos do campo σ , avaliando seu valor em σ_0 e desligando as fontes de férmions ξ e $\bar{\xi}$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \frac{\delta V_{eff}}{\delta \sigma_c} &= \sigma_c + \frac{N}{2\pi} g^2 \sigma_c \left[\ln \left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2} \right) - 2 \right] + g \bar{\xi} \xi \left[1 + \frac{g^2}{4\pi} \ln \left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2} \right) \right] \\ &+ \frac{2N g^2 \sigma_c}{\pi} \int_0^\infty dq \frac{\exp(-\beta \sqrt{|\vec{q}|^2 + g^2 \sigma_c^2})}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + g^2 \sigma_c^2} [1 + \exp(-\beta \sqrt{|\vec{q}|^2 + g^2 \sigma_c^2})]} \\ &+ g^3 \bar{\xi} \xi \frac{\partial}{\partial \sigma_c} \left(\sigma_c \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{\omega [\exp(\beta \omega) + 1]} \right). \end{aligned}$$

Fazendo $\sigma_c = \sigma_0$, $\xi = \bar{\xi} = 0$, definem-se $x \equiv \beta |\vec{q}|$ e $b_0 \equiv \beta g \sigma_0$. O gap de massa a temperatura finita escreve-se como

$$\left. \frac{\delta V_{eff}}{\delta \sigma_c} \right|_{\sigma_c = \sigma_0, \xi = \bar{\xi} = 0} = \sigma_0 \left(1 - \frac{N g^2}{\pi} \right) + \frac{2N g^2 b_0}{\pi \beta} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b_0^2} [\exp(\sqrt{x^2 + b_0^2}) + 1]}. \quad (5.4.1)$$

No limite $b_0 \ll 1$, a integral pode ser expandida na forma

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b_0^2} [\exp(\sqrt{x^2 + b_0^2}) + 1]} = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{b_0}{\pi} \right) - \frac{\gamma}{2} + \tilde{I}(b_0^2).$$

Sem levar em conta a series $\tilde{I}(b_0^2)$, é obtido que

$$\left. \frac{\delta V_{eff}}{\delta \sigma_c} \right|_{\sigma_c=\sigma_0, \xi=\bar{\xi}=0} = \sigma_0 \left(1 - \frac{Ng^2}{\pi} \right) - \frac{Ng^2\sigma_0}{\pi} \ln \left(\frac{g\sigma_0}{\pi} \beta \right) - \frac{Ng^2\gamma\sigma_0}{\pi}. \quad (5.4.2)$$

Na igualdade acima, foi introduzida a definição de b_0 em termos de β .

A transição de fase acontece quando o gap de massa dado acima é zero, i.e, se houver um valor de temperatura crítica $1/\beta_C$ tal que

$$\sigma_0 \left(1 - \frac{Ng^2}{\pi} \right) - \frac{Ng^2\sigma_0}{\pi} \ln \left(\frac{g\sigma_0}{\pi} \beta_C \right) - \frac{Ng^2\gamma\sigma_0}{\pi} = 0.$$

Então,

$$\beta_C = \frac{\pi}{g\sigma_0} \exp \left(\frac{\pi}{g^2N} - \gamma - 1 \right). \quad (5.4.3)$$

Como $T_C = 1/\beta_C$,

$$T_C = \frac{g\sigma_0}{\pi} \exp \left(1 + \gamma - \frac{\pi}{g^2N} \right). \quad (5.4.4)$$

Fazendo $\lambda \equiv g^2N$ (definição em [4]), o resultado coincide com aquele dado em [7], cuja forma em termos da massa gerada pela quebra espontânea da simetria do potencial efetivo é

$$T_C = \frac{m'}{\pi} \exp(\gamma), \quad (5.4.5)$$

onde segundo o resultado obtido no capítulo 3,

$$m' = g|\sigma'_c| = g\sigma_0 \exp \left(1 - \frac{\pi}{g^2N} \right).$$

A dependência inversa do número de férmions N na temperatura crítica e na massa m' faz que elas tenham valores máximos no limite de N grande dados pelas quantidades

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} m' &= m'_{N \rightarrow \infty} = eg\sigma_0, \quad e = \exp(1), \\ \lim_{N \rightarrow \infty} T_C &= \frac{\exp(\gamma)}{\pi} m'_{N \rightarrow \infty} \end{aligned}$$

Como no caso do alinhamento de spins ao longo da direção de um campo magnético externo em um ferromagneto a temperatura não nula [20], o valor da temperatura crítica não vai aumentar com o número de partículas no meio; portanto, não vai ser necessária uma energia térmica infinita para restaurar a simetria quiral do sistema.

O gráfico do potencial efetivo em função da temperatura do sistema dá conta de uma transição de fase de segundo ordem [7], mas para poder afirmar isto, precisa-se estudar o parâmetro de ordem do modelo, neste caso, o gap de massa.

É dito que a transição de fase acontece se a segunda derivada do parâmetro de ordem é maior que zero para valores de temperatura acima da temperatura crítica, i.e,

$$\left. \frac{\delta V_{eff}^2}{\delta(\sigma_c)^2} \right|_{\sigma_c=\sigma_0, \xi=\bar{\xi}=0} > 0, T > T_C.$$

Reorganizando termos na primeira derivada do potencial, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\delta V_{eff}}{\delta \sigma_c} = & \sigma_c + \frac{N}{2\pi} g^2 \sigma_c \left[\ln \left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2} \right) - 2 \right] + g \bar{\xi} \xi \left[1 + \frac{g^2}{4\pi} \ln \left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2} \right) \right] \\ & + \frac{2N g^2 \sigma_c}{\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + g^2 \sigma_c^2 [\exp(\beta \sqrt{|\vec{q}|^2 + g^2 \sigma_c^2}) + 1]}} \end{aligned}$$

e expandindo a integral no limite $\beta g \sigma_c \ll 1$, é obtido que

$$\begin{aligned} \frac{\delta V_{eff}}{\delta \sigma_c} = & \sigma_c + \frac{N}{2\pi} g^2 \sigma_c \left[\ln \left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2} \right) - 2 \right] + g \bar{\xi} \xi \left[1 + \frac{g^2}{4\pi} \ln \left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2} \right) \right] \\ & - \frac{N g^2}{\pi} \left[\sigma_c \ln \left(\frac{\beta g \sigma_c}{\pi} \right) + \gamma \sigma_c \right] \\ = & \sigma_c + \frac{N}{\pi} g^2 \left[\sigma_c \ln \left(\frac{\pi}{\beta g \sigma_0} \right) - (\gamma + 1) \sigma_c \right] \\ & + g \bar{\xi} \xi \left[1 + \frac{g^2}{4\pi} \ln \left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Deste modo, a segunda derivada do potencial efetivo vai ser

$$\frac{\delta^2 V_{eff}}{\delta \sigma_c^2} = 1 + \frac{N}{\pi} g^2 \left[\ln \left(\frac{\pi}{\beta g \sigma_0} \right) - \gamma - 1 \right] + \frac{g^2}{2\pi \sigma_c} \bar{\xi} \xi.$$

Desligando as fontes fermiônicas e fazendo $\sigma_c = \sigma_0$,

$$\left. \frac{\delta^2 V_{eff}}{\delta \sigma_c^2} \right|_{\sigma_c=\sigma_0, \xi=\bar{\xi}=0} = 1 + \frac{N}{\pi} g^2 \left[\ln \left(\frac{\pi}{\beta g \sigma_0} \right) - \gamma - 1 \right]. \quad (5.4.6)$$

Se $\beta = \beta_C$,

$$\left. \frac{\delta^2 V_{eff}}{\delta \sigma_c^2} \right|_{\sigma_c=\sigma_0, \xi=\bar{\xi}=0} = 0,$$

mas se $\beta < \beta_C$, por exemplo, $\beta = \beta_C/2$ ($T = 2T_C$),

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^2 V_{eff}}{\delta \sigma_c^2} \right|_{\sigma_c=\sigma_0, \xi=\bar{\xi}=0} = & 1 + \frac{N g^2}{\pi} \left\{ \ln \left[2 \exp \left(1 + \gamma - \frac{\pi}{g^2 N} \right) - \gamma - 1 \right] \right\} \\ = & \frac{N g^2}{\pi} \ln 2 > 0. \end{aligned}$$

Do resultado obtido, encontra-se que existe uma clara indicação de uma transição de fase de segundo ordem associada à quebra da simetria quiral do sistema, a qual é do tipo discreto [29].

Este fato, junto com o valor nulo adquirido pelo parâmetro de ordem (gap de massa) quando o valor da temperatura é igual a T_C e a obtenção de um estado ligado entre dois pares de elétrons com spins opostos, mostra uma grande similitude do modelo de Gross-Neveu com o fenômeno de supercondutividade explicado pela teoria BCS [30].

Capítulo 6

Conclusões e expectativas

Os resultados apresentados nos capítulos 1 e 3 dão conta da vantagem do uso do formalismo de Operadores Compostos Locais (LCO):

- A obtenção de um vácuo com maior estabilidade graças à geração de novos contra-termos na teoria estudada. Esse fato ficou explícito quando foram estudados os potenciais efetivos dos modelos apresentados aqui.
- Utilização do caráter renormalizável da teoria no formalismo. Mediante a análise das quantidades nuas, as equações do grupo de renormalização dos funcionais geradores $W(J)$ tornaram-se homogêneas, permitindo a renormalizabilidade multiplicativa.
- A transformada de Hubbard-Stratonovich introduziu um campo auxiliar de tal forma que foi possível reescrever a ação efetiva com operadores compostos de uma forma mais simples, onde temos um único operador acoplado à fonte, de forma que geramos diagramas do tipo 1PI.
- Usando métodos perturbativos, encontraram-se expressões para os potenciais efetivos dos modelos apresentados. Para tal (no caso do modelo de Gross-Neveu), foi considerado um valor de saturação do vácuo σ_0 não nulo que dava conta da presença de um gap entre o estado base e o primeiro estado excitado (conhecido como gap de massa); como as excitações acima do vácuo são muito pequenas, é possível aplicar teoria de perturbações.
- Produção dinâmica de massas. No modelo de Gross-Neveu, a introdução de um operador composto acoplado a uma fonte torna aparente que a simetria quiral do sistema é quebrada, um fato associado à aparição de uma quantidade inercial associada ao campo em estudo. Com ajuda do campo auxiliar σ e do valor da saturação do vácuo, foi possível encontrar um valor para a massa do sistema quebrando espontaneamente o potencial efetivo associado mediante o uso de correções radiativas devidas aos vértices de quatro férmions.

Agora, como a geração de massas foi testada usando o formalismo de LCO produzindo resultados compatíveis com os obtidos por outros métodos, procurou-se depois se neste marco era possível restaurar a simetria quiral do sistema aplicando teoria de campos a temperatura finita. Neste caso, era necessário estabelecer um parâmetro de ordem no sistema, e foi visto que a quantidade mais apropriada para fazer este estudo era o gap de massa porque dava conta da aplicabilidade de métodos perturbativos para encontrar as correções radiativas correspondentes

e das massas produzidas por quebra espontânea da simetria do potencial efetivo.

A restauração da simetria quiral dita acima é possível no caso de encontrar um valor de temperatura crítica no qual o gap de massa do sistema é nulo. Isso foi feito no capítulo 5, onde conseguimos obter uma expressão para a temperatura crítica que está de acordo com os outros resultados obtidos na literatura.

Em resumo, estudamos com detalhe uma aplicação do método LCO ao modelo de Gross-Neveu, inclusive no caso com temperatura. Como é sabido este modelo serve como uma espécie de laboratório para modelos mais realistas como a QCD. A aplicação do método LCO a teorias com dimensões superiores, caso da QCD, traz complicações pois surgiriam contratermos adicionais que não são tratados de modo tão simples via a transformação de Hubbard-Stratonovich. Esse é um problema interessante que talvez possa ser investigado, por exemplo, combinando a presente abordagem com aproximações variacionais. Pretendemos explorar essa possibilidade em trabalhos futuros.

Bibliografía

- [1] K. Knecht e H. Vershelde, Phys. Rev. D **64**, 085006;1 (2001) [arXiv: 0104007v1].
- [2] David Dudal, Karen Van Acoleyen e Henri Vershelde, “*Dynamical mass generation in quantum field theory: Some methods with application to the Gross-Neveu model and Yang-Mills theory*” em “*Confinement, Topology, and other non-perturbative aspects of QCD*”, NATO science series, Mathematics, Physics and Chemistry, volume 33 (2002) [arXiv: 0204216v1].
- [3] H. Vershelde, Phys. Lett. B **351**, 242-248 (1995); H. Vershelde, S. Schelstraete e M. Vanderkelen, Zeit. Phys. C **76**, 161-173 (1997)
- [4] D. Gross e A. Neveu, Phys. Rev. D **10**, 3235 (1974).
- [5] C. Bernard, Phys. Rev. D **9**, 3312 (1974).
- [6] L. Dolan e R. Jackiw, Phys. Rev. D **9**, 3320 (1974).
- [7] Jean-Paul Blaizot, Ramón Méndez Galain e Nicolás Wschebor, Ann. Phys. **307**, 209-271 (2003); L. Jacobs, Phys. Rev. D **10**, 3956 (1974); B. J. Harrington e A. Yildiz, Phys. Rev. D **11**, 779 (1975).
- [8] L. Ryder, “*Quantum Field Theory*”, 2da. edição. Cambridge University Press (1996).
- [9] S. Weinberg, “*The Quantum Theory of Fields. Volume 1: Foundations*”. Cambridge University Press (1995).
- [10] S. Weinberg, “*The Quantum Theory of Fields. Volume 2: Modern Applications*”. Cambridge University Press (1996).
- [11] S. Coleman, “*Aspects on Symmetry*”. Cambridge University Press (1985).
- [12] Michael E. Peskin e Daniel V. Schroeder, “*An Introduction to Quantum Field Theory* ”. Perseus Books Publishing, L. L. C. (1995).
- [13] J. Goldstone, Nuovo Cimento **19**, 154 (1961).
- [14] J. Goldstone, A. Salam e S. Weinberg, Phys. Rev **127**, 965 (1962).
- [15] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
- [16] S. Coleman e E. Weinberg, Phys. Rev. D **7**, 1888 (1973).
- [17] D. Gross e F. Wilczek, Phys. Rev. Lett **30**, 1343 (1973); H. D. Politzer, *ibid*, 1346 (1973).

- [18] J. A. Gracey, Nucl. Phys. B **341**, 403 (1990).
- [19] M. Kaku, “*Quantum Field Theory: A modern Introduction*”. Oxford University Press (1989).
- [20] M. LeBellac, “*Quantum and Statistical Field Theory*”. Oxford University Press (1991).
- [21] C. Luperini e P. Rossi, Ann. Phys. **212**, 371 (1991)
- [22] R. Feynman e A. Hibbs, “*Quantum Mechanics and Path Integrals*”. Mc-Graw Hill Book Company (1965).
- [23] R. Jackiw, Phys. Rev. D **9**, 1686 (1974).
- [24] W. Greiner, L. Neise e H. Stöcker, “*Thermodynamics and Statistical Mechanics*”, Springer Science+Business Media inc, 2004.
- [25] I. S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik, “*Table of integrals, series and products*”, 7ma edição. Elsevier inc, 2007.
- [26] S. Weinberg, Phys. Rev. D **7**, 2887 (1973)
- [27] J. I. Kapusta, “*Finite-temperature Field Theory*”. Cambridge University Press (1989).
- [28] J. Hubbard, Phys. Rev. Lett. **3**, 77 (1959).
- [29] L.D. Landau e E. M. Lifshitz, “*Statistical Physics. Course of Theoretical Physics, Vol 5*”. Pergamon Press (1959)
- [30] J. Bardeen, L. N. Cooper e J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).