

JOSÉ ADEMIR SALES DE LIMA

UMA GENERALIZAÇÃO DOS MODELOS COSMOLÓGICOS
INOMOGÊNEOS DE SZEKERES

Tese de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

-1982-

Aos meus pais e irmãos.

AGRADECIMENTOS

- à Nazira Tomimura pela sugestão do tema, pela sua orientação e ajuda em momentos difíceis no decorrer desse trabalho como também pelo exemplo permanente de simplicidade durante o nosso relacionamento científico;
- aos meus pais, Beatriz Sales de Lima e Antonio Rodrigues de Lima, cujo espírito de renúncia frente às mínimas necessidades permitiu a minha educação. Por todo carinho que me dedicaram, meu eterno agradecimento;
- a Josélia e Laura pela confiança e carinho que me transmitiram durante a realização desta tese;
- ao professor e amigo Marcelo José Rebouças, por me haver iniciado na pesquisa científica, por nossas estimulantes discussões e pela leitura crítica do manuscrito da tese, a quem toda palavra de agradecimento me parece insuficiente;
- aos professores do CBPF: Ívano D. Soares, Constantino Tsal-
lis e M. Novello, responsáveis por parte de minha formação científica;
- a Mário J.D. Assad, Yoav Waga e Luís Carlos S. do Nascimento, pela leitura de parte desta tese e algumas sugestões va-
liosas;
- aos mecanógrafos do CBPF: José Marcelino (Zé Gordo), Elias de Azevedo e Araci D. de Oliveira, pela paciência e boa von-
tade que sempre os distinguiram;
- à Helena de Souza Ferreira pelo belo trabalho de datilogra-
fia;
- aos amigos do CBPF por nossa fraternal convivência;
- ao Departamento de Física da UFRN, instituição à qual perten-
ço, pela oportunidade concedida;
- À CAPES pela concessão de bolsa.

RESUMO

Determinamos uma nova classe de modelos cosmológicos inhomogêneos, cuja fonte de curvatura é um fluido perfeito irrotacional e geodético, que generalizam as soluções de Szekeres.

O espaço-tempo dos modelos não tem vetores de Killing no caso geral, mas as hipersuperfícies ortogonais às linhas de universo da matéria são conformalmente planas. A evolução temporal de nossas soluções depende de duas funções arbitrárias e de um parâmetro c introduzido no termo de pressão. Os resultados particulares de Szekeres são exibidos, e para limites assintóticos do tempo os modelos tendem à homogeneidade espacial.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	viii
INTRODUÇÃO	1
<u>CAPÍTULO I</u> - MODELOS HOMOGÊNEOS	5
I.1 - Cosmologia Relativista	5
I.2 - Isometrias - Espaços Simétricos	11
I.3 - Classificação de Espaços Homogêneos	21
I.4 - Construção das Métricas de Bianchi	28
I.5 - Uma Nota na Isotropia de Espaços do Tipo Bianchi	34
I.6 - Nota Histórica Sobre Modelos Homogêneos	36
I.7 - O Universo é Homogêneo e Isotrópico ?	37
<u>CAPÍTULO II</u> - MODELOS INOMOGÊNEOS	42
II.1 - Introdução	42
II.2 - Definição e Exemplos de Modelos Inomogêneos	44
II.3 - Os Modelos Cosmológicos de Szekeres	47
II.4 - Evolução dos Modelos de Szekeres	54
<u>CAPÍTULO III</u> - UMA GENERALIZAÇÃO DOS MODELOS DE SZEKERES	61
III.1 - Introdução	61
III.2 - Os Modelos	62
III.3 - Densidade de Matéria e Quantidades Cinemáticas	71
III.4 - Campos de Killing	75
III.5 - Tensor de Weyl e o Tensor de Cotton	80

III.6 - Evolução Temporal dos Modelos	86
III.7 - Conclusão e Observações Finais	90
<u>APÊNDICE A</u> - DECOMPOSIÇÃO DO TENSOR DE ENERGIA-MOMENTUM.....	94
<u>APÊNDICE B</u> - EQUAÇÃO DE ESTADO	99
<u>APÊNDICE C</u> - ALGUMAS PROPRIEDADES DAS MÉTRICAS DO TIPO SZEKERES....	103
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	108

LISTA DE FIGURAS

<u>Fig.</u>	<u>Pág.</u>
1.2.1 - O campo vetorial $Z = Z^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ descreve a intensidade e a direção da transformação infinitesimal	12

LISTA DE TABELAS

<u>Tab.</u>	<u>Pág.</u>
1.3.1 - A classificação de Bianchi. Escolha original para o sinal dos parâmetros a, n_1, n_2, n_3 que determinam uma escolha independente para as constantes de estrutura G_{bc}^a . O parâmetro h que diferencia os tipos III e VI é definido por $h = a^2/4n_2n_3$	25
2.4.1 - Evolução dos modelos de Szekeres pertencentes à Classe II....	60
3.6.1 - Comportamento assintótico dos modelos	91

NOTAÇÃO e CONVENÇÕES

Assinatura da métrica : (+---) .

Índices repetidos são somados sobre todo o espectro de valores indicado no texto.

Diferenciação parcial : $\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \equiv \phi_{,\mu}$.

Simetrização de tensores: $A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$.

Antissimetrização de tensores: $A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})$.

*"Nunca se observa um lugar sem ser num determinado instante,
nem um instante sem ser num determinado lugar".*

Espaço e Tempo - H.Minkowsky (1908).

*Descifró el espiral hilo del humo.
Se construyó de fibras taciturnas.
Se aceitó como el alma de la oliva.
Se hizo cristal de transparencia dura.
Estudió para viento huracanado.
Se combatió hasta apagar la sangre.
Sólo entonces fué digno de su pueblo.*

(Canto General Pablo Neruda (1950)).

INTRODUÇÃO

A constante preocupação da humanidade, ao longo de sua história, com a origem e evolução do universo parece ser algo inrente à própria condição humana. Os registros históricos evidenciam que mesmo nas civilizações mais antigas existiam concepções cosmológicas, em geral de caráter mitológico, onde se tentavam explicar a formação do universo observado.

Atualmente a Cosmologia constitui a parte da Física onde se estuda a estrutura em larga escala do universo. Seu principal objetivo consiste em determinar um modelo cosmológico, que predigam o resultado das observações astronômicas. Tal modelo, deve ter suas propriedades analisadas pelas leis físicas, que descrevam o comportamento da matéria na escala dos super-aglomerados galáticos.

Algumas teorias cosmológicas exibem diferenças notáveis, mas todas parecem concordar, que as leis físicas devem ser as mesmas em qualquer ponto do espaço-tempo. Logo, a evolução global do universo poderá ser determinada a partir das leis físicas conhecidas localmente. Tal hipótese é denominada⁽⁷³⁾ de "Princípio Cosmológico". Uma versão mais estreita deste princípio é o conhecido "Princípio de Copérnico": *"A terra não ocupa uma posição privilegiada no espaço"*. A interpretação mais comum de tal princípio, estabelece que os observadores em diferentes posições, têm a mesma visão típica do universo e, conseqüentemente, exceto por irregularidades locais, o universo deve ser espacialmente homogêneo, isto é, os observáveis físicos em larga escala são inde

pendentes da posição do observador. Desta forma, sua adoção privilegia no conjunto de todos os modelos possíveis para o universo, a classe dos modelos espacialmente homogêneos. Outra hipótese usual em Cosmologia é da isotropia do universo em torno de nossa posição, isto é, as propriedades do universo em larga escala seriam independentes da direção. A combinação das hipóteses de homogeneidade e isotropia resulta que o espaço deve ser isotrópico em torno de qualquer ponto ou, de forma equivalente, com curvatura constante⁽²¹⁾. Existem apenas três modelos que satisfazem esta condição e se tornaram tão amplamente aceitos, que os astrônomos costumam chamá-los indistintamente de "Modelo Padrão". Tais modelos prevêem os resultados experimentais mais antigos e melhor estabelecidos em Cosmologia Observacional: o desvio para o vermelho das linhas espectrais dos objetos distantes e a existência da radiação cósmica de fundo correspondente à temperatura de um corpo negro de aproximadamente 3^oK. Tais medidas indicam que o universo não é estacionário nem estático e que expandiu-se a partir de uma fase extremamente densa e quente. A escolha entre os três modelos dependeria essencialmente de medidas mais precisas da constante de Hubble e do parâmetro de desaceleração⁽³¹⁾.

Modelos menos idealizados do universo onde as possíveis inhomogeneidades em grande escala são consideradas, vêm sendo ultimamente muito estudados^(35,50,51,55,64,67,85). Convenhamos, que a homogeneidade do universo decorrente da adoção do Princípio de Copérnico, parece ser altamente desestimulante para o progresso da Cosmologia, pois elimina a necessidade de experiências para determinar se o universo é homogêneo, desde que ele o é por princípio.

A decisão sobre qual estrutura se deve adotar para o espaço-tempo deve ser tomada com base em evidências observacionais. Não nos deteremos aqui para discutir tais evidências, isto será feito oportunamente no corpo desta tese. Adiantamos, porém, que recentes medidas da anisotropia de dipolo^(32,33,34) e quadrupolo^(34,36,38) da radiação cósmica de fundo, representam um forte indício de que a expectativa geral do universo em sua fase atual, ser descrito por um modelo do tipo Friedmann, pode estar errada. Segundo G.F.R.Ellis⁽³¹⁾ e P.S. Wesson⁽⁴³⁾, por exemplo, a questão relacionada à homogeneidade e isotropia ainda está completamente em aberto.

Neste contexto, discutiremos no presente trabalho uma nova classe de modelos cosmológicos, inhomogêneos e anisotrópicos, cuja fonte de curvatura é um fluido perfeito irrotacional e geodético, que generalizam as soluções de Szekeres.

Por simplicidade e para evitar notas matemáticas introdutórias, todos os nossos resultados, demonstrações, etc, serão apresentados na base natural de coordenadas $\{x^\alpha\}$. As linhas gerais de desenvolvimento do nosso trabalho são descritas a seguir:

Apresentamos, no Capítulo I, a Teoria da Relatividade Geral e alguns conceitos básicos em Cosmologia Relativista. Introduzimos os diversos tipos de homogeneidade, baseados no critério de grupos de isometrias para variedades riemannianas. Em seguida discutimos a classificação de Bianchi e construímos a forma geral para as métricas tridimensionais homogêneas, geradas por um grupo simplesmente transitivo de três parâmetros. Analisamos também, quais os elementos de linha do tipo Bianchi que são isotrópicos e examinamos a base teórica e observacional das hipóteses de homogeneidade e isotropia do universo.

No Capítulo II, apresentamos uma motivação teórica para o estudo de modelos inomogêneos e definimos um critério de inomogeneidade espacial em variedades riemannianas. Discutimos alguns exemplos de modelos inomogêneos e estudamos detalhadamente as soluções de Szekeres. Examinamos a evolução temporal de tais modelos e resumimos suas principais propriedades geométricas e/ou físicas.

Finalmente, introduzimos no Capítulo III, uma nova classe de modelos inomogêneos que constituem uma generalização das soluções de Szekeres. Determinamos os parâmetros cinemáticos dos modelos e mostramos que são expansionistas, irrotacionais, e o tensor de distorção ("shear") tem dois autovalores iguais. A evolução temporal é estudada, os modelos de Friedmann e os resultados de Szekeres são explicitamente obtidos em situações especiais. Além disso, algumas propriedades relacionadas à invariância conforme do elemento de linha de nossas soluções são analisadas.

CAPÍTULO I

MODELOS HOMOGÊNEOS

I.1 - Cosmologia Relativista

A física moderna descreve quatro interações fundamentais da natureza. As interações nucleares forte e fraca, a eletromagnética e a gravitacional. De todas elas, a gravitação é sem dúvida a mais fraca (a razão $\frac{Gm^2}{e^2}$ das forças gravitacionais e eletrostáticas entre dois elétrons é da ordem de 10^{-40}).

As interações nucleares são de curto alcance ($\leq 10^{-13}$ cm), e os grandes agregados estelares parecem ser eletricamente neutros, logo, é a força gravitacional quem deve desempenhar o papel dominante na evolução da estrutura em larga escala do universo. Sendo assim, qualquer teoria de gravitação razoável do ponto de vista físico, deve servir para descrever os fenômenos que dizem respeito ao universo como um todo.

Atualmente, tal descrição é baseada na teoria da gravidade de maior crédito entre os pesquisadores, a "conhecida" Teoria da Relatividade Geral. Suas principais características são:

- i) É expressa em linguagem geométrica, com propriedades métricas sujeitas a leis dinâmicas.
- ii) A teoria é não linear, uma consequência deste fato é que o campo gravitacional resultante de várias fontes, não é

a superposição dos campos produzidos por cada fonte individualmente.

iii) Todo conteúdo energético (matéria, radiação eletromagnética, etc), é fonte de gravitação.

iv) Todas as leis da física são invariantes por uma transformação geral de coordenadas.

A propriedade universal da matéria, pela qual todos os corpos se aceleram igualmente num campo de gravitação, decorrente da igualdade numérica entre as massas inercial e gravitacional, fez Einstein perceber a equivalência de efeitos gravitacionais e acelerativos. Esta identificação foi elevada por Einstein à categoria de princípio fundamental de sua teoria, chamado por ele de Princípio de Equivalência^(*), que pode ser enunciado da seguinte forma⁽¹⁾:

"Numa vizinhança suficientemente pequena de qualquer ponto do espaço-tempo, na presença de um campo gravitacional arbitrário, é possível escolher uma classe de referenciais, onde as leis da natureza, são idênticas às de um referencial inercial sem campo gravitacional".

Dizendo de outra forma, um ponto material sob a ação do campo gravitacional, tem localmente, em relação a tais referenciais, um movimento retilíneo e uniforme. Portanto, para esses referenciais (ditos localmente inerciais), valem as leis da Relatividade Especial, cujas propriedades métricas no sistema de coordenadas cartesianas são descritas pelo elemento de linha

(*)

A descoberta desse princípio, gerando uma nova forma de perceber o problema da gravidade, ocorreu na medida em que Einstein desistia de tratar a gravitação, no esquema da Relatividade Restrita⁽²⁾.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad , \quad (1.1.1)$$

ou, $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ onde $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ é o tensor métrico de Minkowski. Para qualquer outro conjunto de referenciais, o movimento do ponto material apresenta-se como não uniforme e em geral curvilíneo, cuja lei de movimento é independente da natureza da partícula. Tal fato levará os observadores ligados a esses referenciais, a interpretar o movimento como sujeito à influência da gravidade. Além disso, tais observadores percebem que não podem reduzir a métrica à forma de Minkowski, qualquer que seja o sistema de coordenadas utilizado. Diante disso, é fisicamente aceitável que os coeficientes métricos da geometria do espaço-tempo, representada pelo elemento de linha $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$, descrevam o campo de gravidade. A interação gravitacional desempenha na Teoria da Relatividade Geral, um papel excepcional em relação às outras forças, pois as dez funções $g_{\alpha\beta}$ que fazem a descrição do campo de gravidade, determinam ao mesmo tempo as propriedades métricas do contínuo espaço métrico quadrimensional.

As equações dinâmicas, obedecidas pelos "potenciais gravitacionais" $g_{\alpha\beta}$, constituem as equações de campo da teoria

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = - \kappa T_{\alpha\beta} \quad (1.1.2)$$

onde $R_{\alpha\beta}$ é o tensor de Ricci definido por $R_{\alpha\beta} \equiv R^\lambda_{\alpha\lambda\beta}$, $R \equiv R^\alpha_{\alpha} \equiv R^\alpha_{\alpha}$ é o escalar de curvatura, $T_{\alpha\beta}$ é o tensor momentum-energia dos campos materiais presentes onde (1.1.2) se aplica, e κ uma constante igual a $8\pi G/c^2$ que foi ajustada, de forma que a lei Newtoniana da gravitação é obtida como uma aproximação de cam-

po fraco^(*) (pequenas massas e densidades).

Como ambos os lados da eq. (1.1.2) são simétricos, temos um conjunto de dez equações diferenciais acoplados, que são não-lineares e de segunda ordem nos coeficientes métricos. Contudo, a divergência covariante de ambos os lados é identicamente nula, isto é,

$$(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R)_{||\alpha} = 0 \quad , \quad (1.1.3)$$

e

$$T^{\alpha\beta}_{||\alpha} = 0 \quad , \quad (1.1.4)$$

onde $||$ significa derivada covariante. As equações acima são válidas, independentemente das equações de campo. Dispomos então, de apenas seis equações diferenciais independentes para determinar a geometria do espaço-tempo, quatro componentes do tensor $g_{\alpha\beta}$ podem ser escolhidos arbitrariamente, usando os quatro graus de liberdade para fazer transformações de coordenadas^(**).

Qualitativamente, as equações de campo indicam a forma pela qual a presença da matéria afeta a geometria, ou seja, como o conteúdo energético do espaço-tempo deve satisfazer às leis de conservação, tendo em vista a sua relação com as quantidades geométricas, que são automaticamente conservadas.

De posse dessa teoria de gravidade, como é feita a descrição do universo ?

(*) Relembrando o que foi dito um pouco antes, é nessa aproximação que se percebe mais claramente a identificação dos coeficientes métricos com o potencial gravitacional.

(**) Isso não significa que temos mais equações do que incógnitas, por exemplo, se $T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu$ com $V^\mu V_\mu = 1$, temos mais quatro incógnitas, 3 componentes da velocidade e a densidade de matéria (72).

O problema cosmológico dentro do contexto da Relatividade Geral, consiste em encontrar uma estrutura geométrica para o espaço-tempo que seja compatível com uma dada configuração de campos de matéria, isto é, satisfaçam às equações de campo da teoria. Dizemos então, que o conteúdo material é a fonte de curvatura da geometria, com a solução constituindo um modelo do universo ou modelo cosmológico. Um modelo, pelas hipóteses que serão apresentadas adiante, pretende descrever apenas a estrutura global do universo, fenômenos tais como: evolução de estrelas, formação de galáxias, etc, são considerados de pequena escala e estão em princípio separados do problema cosmológico. Isso significa que na comprovação experimental de um particular modelo, é de fundamental importância os fatos observacionais de natureza global.

Na construção de modelos cosmológicos, algumas hipóteses simplificadoras que permitam tratar matematicamente o problema, se fazem necessárias.

Inicialmente supomos que a matéria do universo constitui um fluido, isto é, não levamos em conta as irregularidades locais, tais como, planetas, estrelas, etc. Pensamos de forma equivalente à da termodinâmica, que na descrição de um gás, não estuda o comportamento individual dos seus átomos e moléculas, mas sim define quantidades macroscópicas (pressão, densidade, temperatura, etc), e estuda as suas relações.

O fluido cósmico caracterizado pelo tensor de energia momentum tem a sua composição definida "a priori", por exemplo, para descrever a fase atual do universo é bastante utilizado um fluido perfeito, isentrópico, de partículas com massa, descritas por sua densidade, pressão isotrópica e equação de esta-

do (Apêndice B), do tipo $p = \lambda\rho$ onde λ é uma constante. Além disso, outras equações são adicionadas ao conjunto (1.1.2) quando existe algum outro tipo de campo de interação entre as partículas, tipo campo escalar, vetorial, espinorial, etc. Neste caso, contudo, as equações de tais campos modificadas pela presença da gravitação devem ser também satisfeitas ^(3,4).

Os observadores fundamentais em relação aos quais se medem as grandezas macroscópicas do fluido, são aqueles que se movem com um elemento infinitesimal de volume do fluido. Tais observadores são denominados observadores co-moventes e suas linhas de universo estão determinados pelo campo de 4-velocidades $V^\alpha(x^\mu)$ do fluido.

Quando um fluido é constituído apenas de partículas de massa nula (fótons, neutrinos, etc), admite-se a existência de um substrato material que serve de suporte para os observadores fundamentais, mas sem contribuir para a curvatura.

Uma hipótese relativa ao deslocamento do fluido, introduzida na cosmologia por Weyl ⁽⁵⁾, é a de que o movimento da matéria do universo se dá ao longo de curvas tipo-tempo que não se interceptam, significando que a matéria passando em qualquer ponto do espaço-tempo tem velocidade única. O sistema é, portanto hidrodinâmico; as linhas de fluxo não se cruzam, exceto em eventuais pontos singulares. Por tal hipótese, podemos sempre encontrar um sistema de coordenadas ⁽⁵⁾, no qual, em qualquer ponto a 4-velocidade do fluido é expressa por

$$V^\alpha(x^\mu) = \delta^\alpha_0 \quad . \quad (1.1.5)$$

Teremos então $V_\mu = g_{\mu\alpha} V^\alpha = g_{0\alpha}$, que juntamente com

a condição de normalização $V^\alpha V_\alpha = 1$, impõem que $g_{00} = 1$. Tal sistema de coordenadas é chamado co-movente, porque as componentes espaciais de 4-velocidade do fluido são nulas, isto é, os diversos elementos de volume do fluido estão em repouso relativamente a um observador ligado a essa rede de coordenadas.

I.2 - Isometrias - Espaços Simétricos

Como foi visto, as equações de campo da Relatividade Geral formam um complexo conjunto de equações diferenciais, parciais, que são não-lineares e acopladas. Por este motivo, é usual na cosmologia teórica, simplificar as suas soluções pela imposição "a priori" de simetrias no modelo.

Denomina-se homogêneo ou simétrico, o modelo que tem sua métrica invariante sob um dado conjunto de transformações. Essas transformações são chamadas isometrias (ou movimentos), porque elas preservam todas as medidas de comprimento^(*).

Mostra-se⁽⁶⁾ que o conjunto de todas as isometrias satisfazem os axiomas de grupo, constituindo em geral um grupo contínuo de Lie. A cada operação do grupo de isometrias, corresponde um movimento do espaço-tempo nele próprio, levando um ponto num outro infinitesimalmente próximo, mantendo invariante a métrica.

Precisamos então, de um mecanismo operacional, para determinar os campos vetoriais, geradores dessas transforma -

(*) no sentido que $\delta(ds^2) = 0$, como veremos adiante.

ções infinitesimais, sob as quais o tensor métrico, e em geral outros objetos geométricos, não são modificados.

Considere então uma curva Γ no espaço-tempo, com seu campo vetorial tangente escrito na base de coordenadas $\{x^\mu\}$ como,

$$Z = Z^\alpha(x^\beta) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} . \quad (1.2.1)$$

Sejam P e P' , dois pontos infinitesimalmente próximos, situados sobre Γ . No sistema de coordenadas considerado temos:

$$\begin{aligned} P: x^\alpha , \\ P': x'^\alpha = x^\alpha + \epsilon Z^\alpha(x^\beta) . \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

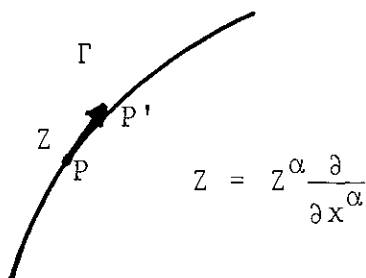


Fig. 1.2.1 - O campo vetorial $Z = Z^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ descreve a intensidade e a direção da transformação infinitesimal.

Considere também, o campo vetorial $Y = Y^\alpha(x^\lambda) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, definido em todos os pontos e em particular sobre a curva Γ , de componentes $Y^\alpha(P)$ e $Y^\alpha(P')$, nos pontos considerados. Podemos pensar que a eq. (1.1.2) representa não apenas uma mudança de ponto $P \rightarrow P'$, mas também uma transformação infinitesimal de coordenadas^(*),

(*) A partir de agora, dispensaremos o uso do índice para indicar a dependência de uma grandeza física/geométrica com a posição. Assim, por exemplo, escrevemos $Z^\alpha(x)$ no lugar de $Z^\alpha(x^\lambda)$.

$$x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha + \epsilon Z^\alpha(x) \quad ; \quad (1.2.3)$$

sob essa mudança de coordenadas, o campo vetorial Y transforma-se como

$$Y^\alpha(x) \rightarrow Y'^\alpha(x') = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}(x) Y^\beta(x) \quad , \quad (1.2.4)$$

ou equivalentemente,

$$Y^\alpha(P) \rightarrow Y'^\alpha(P') = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}(P) Y^\beta(P) \quad , \quad (1.2.5)$$

onde $Y'^\alpha(P')$ são as componentes em P' do vetor $Y^\alpha(P)$, no novo sistema de coordenadas.

Este tipo de transporte é geralmente chamado de "transporte de Lie" ou "transporte inalterado".

Podemos então utilizar como medida da deformação do campo, devido ao seu deslocamento, ao longo da direção determinada por $Z = Z^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, a diferença entre o campo definido originalmente em P' , e o trazido inalterado a P' , isto é,

$$\delta Y^\alpha = Y^\alpha(P') - Y'^\alpha(P') \quad , \quad (1.2.6)$$

que é conhecida como diferença de Lie, do campo vetorial Y , com relação à transformação de ponto (1.2.3).

A derivada de Lie do campo vetorial Y , com relação a Z , é um campo vetorial definido⁽⁶⁾ por:

$$\underset{Z}{L} Y = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Y(x') - Y'(x')}{\epsilon} \quad . \quad (1.2.7)$$

Em termos de componentes, calculando $Y^\alpha(P')$ e

$Y'^{\alpha}(P')$ de acordo com a eq. (1.2.3), e considerando na expansão apenas termos de primeira ordem, teremos^(*),

$$\left(\frac{L}{Z} Y\right)^{\alpha} = Z^{\beta} Y^{\alpha} |_{\beta} - Y^{\beta} Z^{\alpha} |_{\beta} , \quad (1.2.8)$$

que é por construção, a medida da deformação do campo vetorial Y ao longo da curva Γ determinada por Z .

O lado direito da eq. (1.2.8), é por definição⁽⁶⁾, a componente α do comutador dos campos vetoriais Z e Y . Numa notação independente de coordenadas a eq. (1.2.8) é expressa por:

$$\frac{L}{Z} Y = [Z, Y] \equiv ZY - YZ \quad . \quad (1.2.9)$$

A derivada de Lie goza das seguintes propriedades, facilmente demonstráveis usando a equação acima

$$i) \quad [Z, Y] = - [Y, Z] \quad (1.2.10)$$

$$ii) \quad [aZ + bY, X] = a[Z, X] + b[Y, X] \quad (1.2.10a)$$

$$iii) \quad [X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0 \quad (1.2.11)$$

$$iv) \quad [fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X \quad (1.2.11a)$$

onde X , Y e Z são campos vetoriais diferenciáveis, a e b são números reais, f e g são funções. A eq. (1.2.11) é usualmente referida como identidade de Jacobi.

(*) a barra simples denota derivada parcial.

A derivada de Lie de tensores arbitrários é obtida exigindo que L atue como uma operação de diferenciação com respeito ao produto tensorial.

Para um campo tensorial T de componentes $T^{\alpha\beta\dots\gamma\dots}$ numa base de coordenadas $\{x^\mu\}$, pode-se mostrar⁽⁷⁾ que:

$$\begin{aligned} (LT)^{\alpha\beta\dots\gamma\dots} = (T^{\alpha\beta\dots\gamma\dots})|_{\lambda} Z^{\lambda} - T^{\lambda\beta\dots\gamma\dots} Z^{\alpha}|_{\lambda} - T^{\alpha\lambda\dots\gamma\dots} Z^{\beta}|_{\lambda} - \dots + T^{\alpha\beta\dots\lambda\dots} Z^{\lambda}|_{\gamma} + \dots \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Em particular, para o tensor métrico de componentes $g_{\alpha\beta}$, pela expressão acima, obtemos:

$$\begin{aligned} (Lg)_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta}|_{\lambda} Z^{\lambda} + g_{\lambda\beta} Z^{\lambda}|_{\alpha} + g_{\alpha\lambda} Z^{\lambda}|_{\beta} \quad , \quad (1.2.13) \\ &= g_{\alpha\beta}|_{\lambda} Z^{\lambda} + Z_{\beta}|_{\alpha} + Z_{\alpha}|_{\beta} - g_{\alpha\lambda}|_{\beta} Z^{\lambda} - g_{\lambda\beta} Z^{\lambda}|_{\alpha} \quad , \\ &= Z_{\alpha}|_{\beta} + Z_{\beta}|_{\alpha} - (g_{\alpha\lambda}|_{\beta} + g_{\lambda\beta}|_{\alpha} - g_{\alpha\beta}|_{\lambda}) Z^{\lambda} \quad , \\ &= Z_{\alpha}|_{\beta} + Z_{\beta}|_{\alpha} - 2\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} Z_{\lambda} \quad , \end{aligned}$$

logo,

$$(Lg)_{\alpha\beta} = Z_{\alpha||\beta} + Z_{\beta||\alpha} \quad . \quad (1.2.14)$$

Calculemos agora a variação do elemento de linha $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$ ao longo da direção determinada por Z , isto é, $\delta(ds^2)$ onde δ é gerado pela transformação de ponto $x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \epsilon Z^{\alpha}(x)$

$$\delta(ds^2) = \delta(g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}) = \delta(g_{\alpha\beta}(x)) dx^{\alpha} dx^{\beta} + 2g_{\alpha\beta}(x) dx^{\alpha} \delta dx^{\beta} \quad .$$

Retendo apenas os termos de primeira ordem em ϵ é fácil mostrar que

$$\delta g_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta}(x') - g_{\alpha\beta}(x) = \epsilon g_{\alpha\beta|\lambda} Z^\lambda$$

e

$$\delta(dx^\beta) = d(\delta x^\beta) \equiv d(x'^\beta - x^\beta) = d(\epsilon Z^\beta) = \epsilon Z^\beta_{|\lambda} dx^\lambda, \quad ,$$

portanto,

$$\delta(ds^2) = \epsilon g_{\alpha\beta|\lambda} Z^\lambda dx^\alpha dx^\beta + 2\epsilon g_{\alpha\beta} Z^\beta_{|\lambda} dx^\alpha dx^\lambda$$

ou

$$\delta(ds^2) = (g_{\alpha\beta|\lambda} Z^\lambda + g_{\alpha\lambda} Z^\lambda_{|\beta} + g_{\lambda\beta} Z^\lambda_{|\alpha}) \epsilon dx^\alpha dx^\beta, \quad ,$$

logo, comparando com as eqs. (1.2.13) e (1.2.14), podemos escrever,

$$\delta(ds^2) = \epsilon (Z_{\alpha\|\beta} + Z_{\beta\|\alpha}) dx^\alpha dx^\beta \quad . \quad (1.2.15)$$

A equação acima pode ser reobtida em sentido inverso, conseqüentemente teremos

$$\delta(ds^2) = 0 \iff Z_{\alpha\|\beta} + Z_{\beta\|\alpha} = 0 \quad . \quad (1.2.16)$$

Comparando com a eq. (1.2.14), vemos que o resultado acima é idêntico a exigir que

$$\underset{K}{L} g = 0 \quad . \quad (1.2.17)$$

Portanto, um campo vetorial é dito gerar uma isometria se a de

formação de $g_{\alpha\beta}$ ao longo de Z (medida por L) é nula. Dizendo de outra forma, ao longo da congruência de curvas geradas por Z , ds^2 não muda de valor se:

$$(Lg)_{\alpha\beta} = Z_{\alpha\parallel\beta} + Z_{\beta\parallel\alpha} = 0 \quad , \quad (1.2.18)$$

que é conhecida como equação de Killing.

Um campo vetorial é dito de Killing se for solução dessa equação. Suas propriedades principais ^(9,10,14), são:

- (i) Uma combinação linear de soluções das equações de Killing é também uma solução, isto é, o conjunto de soluções tem a estrutura de um espaço vetorial linear.
- (ii) Os campos vetoriais de Killing, são geradores de transformações infinitesimais (isometrias), que possuem a estrutura de grupo contínuo de Lie, usualmente chamado grupo de isometria ou grupo de movimento.
- (iii) O comutador de dois campos de Killing é também um gerador de isometria, isto é:

$$\left[Z_1, Z_2 \right] = Z_3 \iff (Lg)_{Z_3} = 0 \quad . \quad (1.2.19)$$

Assim, o espaço vetorial das soluções das equações de Killing, tem a estrutura de álgebra sob a operação de comutação, que é expressa por:

$$\left[Z_{(i)}, Z_{(j)} \right] = C^m_{ij} Z_m \quad . \quad (1.2.20)$$

Os C^m_{ij} são denominados constantes de estrutura da álgebra, que para um grupo de Lie são constantes ⁽¹⁰⁾, e satisfazem por (1.2.10) e (1.2.12),

$$C^m_{ij} = -C^m_{ji} \quad , \quad (1.2.21)$$

$$C^m_{[ij} C^p_{k]m} = 0 \quad , \quad (1.2.22)$$

onde $[\]$, significa antissimetrização nos índices internos.

A teoria de grupos e álgebras de Lie estão discutidas em muitos textos ^(8,9,10,14,35); alguns de seus principais resultados são:

- (i) Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável na qual as operações de grupo são transformações diferenciáveis.
- (ii) A cada grupo de Lie, está associada uma única álgebra de Lie.
- (iii) Cada álgebra de Lie define um único grupo simplesmente conexo, chamado grupo de cobertura universal.
- (iv) As dimensões da variedade grupo e da álgebra de Lie são iguais.

Numa variedade riemanniana de dimensão d , a equação (1.2.18) é uma equação diferencial com $d(d+1)/2$ condições iniciais ⁽¹⁰⁾, sendo esse portanto o número máximo de vetores de Killing linearmente independentes. Assim, na variedade espaço-tempo a quatro dimensões não pode existir mais de dez vetores de Killing independentes, isto é, um G_{10} de movimento ^(*), se considerarmos apenas as seções tridimensionais ($d=3$), teremos no máximo um grupo G_6 .

^(*) Denotamos um grupo de isometria de dimensão d por G_d .

As seguintes definições de uso comum na teoria de grupo de movimento, são fundamentais para entender os diferentes tipos de homogeneidades utilizados em cosmologia e baseados no critério de grupo.

Denomina-se *órbita* do grupo de isometrias à parte da variedade coberta pelo grupo, isto é, o conjunto de pontos equivalentes pelas transformações do grupo.

Um grupo é dito *atuar transitivamente* na variedade se, dados dois quaisquer de seus pontos, existe uma transformação do grupo que relaciona os dois pontos, ou seja, quando a órbita do grupo é toda variedade. Sendo única a transformação que une quaisquer dois pontos o grupo é batizado de *simplesmente transitivo*, em caso contrário, é dito *multiplamente transitivo*.

A importância do conceito de isometria é facilmente percebida, porque a Relatividade Geral é essencialmente uma teoria geométrica. Existindo isometria, dois pontos relacionados por ela, serão completamente indistinguíveis por qualquer propriedade descrita em termos da Relatividade Geral, pois, serão feitas medidas idênticas do intervalo $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, ao longo da curva de isometria que une tais pontos.

O conceito físico de Homogeneidade, no espaço plano da Relatividade Especial, ou mesmo na Mecânica de Newton, é precisamente a igualdade de medidas ($\delta(ds^2) = 0$), para quaisquer pares de pontos infinitesimalmente próximos do espaço-tempo. Como veremos adiante, o formalismo de campos vetoriais de Killing, permite generalizar este conceito para um espaço-tempo riemanniano, como também lhe dar uma forma mais precisa do ponto de vista matemático.

Vamos então definir, separadamente, os dois tipos de homogeneidade de maior uso na construção de modelos cosmológicos.

I. Modelos Homogêneos no Espaço e no Tempo

Dizemos que um espaço-tempo é homogêneo ou simétrico, quando um grupo de isometrias atua transitivamente nele, isto é, todo "espaço" 4-dimensional é órbita do grupo de isometria. Neste caso mostra-se⁽¹¹⁾, que as equações de Einstein são puramente algébricas para uma escolha conveniente de coordenadas.

Os dados observacionais que dispomos acerca do universo em sua fase atual (radiação de fundo, recessão das galáxias, etc), são incompatíveis com modelos desta natureza^(11,14), pois eles são estacionários ou estáticos. Este fato exclui soluções de notável importância teórica e histórica, entre as quais ressaltamos as devidas a Einstein⁽²⁵⁾ e Gödel⁽¹²⁾.

Permanece porém, ainda ativo o interesse teórico por tais modelos^(3,13,75). O modelo de Gödel, por exemplo, levantou interessantes questões para a teoria da Relatividade Geral, associadas à possibilidade de violação da causalidade quando tratamos o universo em larga escala e também sobre a validade do princípio de Mach no contexto da teoria, tão defendida por Einstein ao elaborar a Relatividade Geral.

II. Modelos Espacialmente Homogêneos

Denomina-se espacialmente homogêneos os modelos que são homogêneos no espaço, mas não no tempo, isto é, as órbitas

do grupo são hipersuperfícies do tipo espaço tridimensionais . Por tal definição, um modelo que é homogêneo no espaço-tempo em geral não será espacialmente homogêneo, pois o grupo completo de movimento não necessita ter um subgrupo transitivo na seção espacial ⁽¹⁴⁾ .

A característica matemática principal de tais modelos, como será visto adiante, é que as equações de Einstein , escritas num sistema de coordenadas adequado, se reduzem ^(11,14), a equações diferenciais ordinárias na variável t .

São espacialmente homogêneos os modelos do tipo Friedmann, atualmente aceitos como os que melhor descrevem a fase atual do universo. Por esta razão, os modelos espacialmente homogêneos são considerados de maior importância no estudo da cosmologia do que os homogêneos no espaço-tempo.

Trataremos a seguir de discutir o método sistemático, usualmente utilizado na construção de modelos espacialmente homogêneos.

1.3 - Classificação de Espaços Homogêneos

Todas as variedades tridimensionais que admitem um grupo de isometrias *simplesmente transitivo* , isto é, todos os espaços tridimensionais nos quais existem apenas uma transformação isométrica ligando dois pontos quaisquer, foram classificados por L. Bianchi ⁽¹⁵⁾ . Esta classificação permitiu determinar as diferentes geometrias associadas a cada classe de grupo de movimento, e pode ser obtida através de um método proposto por C.G. Behr ⁽¹⁶⁾ .

Este método consiste na obtenção de todos os possíveis conjuntos de constantes de estrutura não equivalentes, ou seja, que não estão relacionados por transformações lineares, a coeficientes constantes, da base do espaço vetorial das soluções das equações de Killing.

Sejam $K_{(i)} = K_{(i)}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ ($i = 1, 2, 3$), os três vetores de Killing linearmente independentes de uma variedade tridimensional.

Da condição de álgebra temos:

$$\left[K_{(i)}, K_{(j)} \right] = C_{ij}^m K_{(m)} \quad , \quad i, j, m = 1, 2, 3 \quad (1.3.1)$$

com C_{ij}^m obedecendo às equações (1.2.21) e (1.2.22). A eq. (1.2.21)

$$C_{ij}^m = -C_{ji}^m \quad ,$$

indica que existem apenas nove componentes independentes para as constantes de estrutura.

Então a matriz

$$M^{ij} = \epsilon^{imk} C_{mk}^j \quad , \quad (1.3.2)$$

onde, $\epsilon_{imj} = \epsilon^{imj}$, é totalmente antissimétrico e $\epsilon_{123} = 1$, tem o mesmo número de componentes independentes.

Invertendo a equação (1.3.2) obtemos:

$$C_{rs}^j = \epsilon_{rsi} M^{ij} \quad , \quad (1.3.3)$$

onde usamos que $\epsilon_{rsi} \epsilon^{imk} = \frac{1}{2} (\delta_r^m \delta_s^k - \delta_r^k \delta_s^m)$.

Com o auxílio de ϵ^{ijk} , podemos reescrever a equação (1.2.22) da forma:

$$C^m_{[ij]} C^p_{k]m} = \epsilon^{ijk} C^m_{ij} C^p_{km} = 0 \quad , \quad (1.3.4)$$

o que implica que (1.3.3)

$$M^{km} C^p_{km} = 0 \quad . \quad (1.3.5)$$

Podemos sempre decompor um tensor de 2ª ordem em duas partes

$$M^{ij} = M^{[ij]} + M^{(ij)} \quad . \quad (1.3.6)$$

A matriz antissimétrica $M^{[ij]}$, tem três componentes independentes, que podem ser representadas pelo vetor

$$a_k = \epsilon_{ijk} M^{[ij]} \quad , \quad (1.3.7)$$

com

$$M^{[ij]} = \epsilon^{ijk} a_k \quad . \quad (1.3.8)$$

Substituindo (1.3.6) e (1.3.8) na eq. (1.3.3), obtemos

$$C^i_{rs} = \epsilon_{rsj} M^{(ij)} + \frac{1}{2} (\delta^i_r a_s - \delta^i_s a_r) \quad . \quad (1.3.9)$$

Assim, as nove componentes independentes das constantes de estrutura C^j_{rs} , são descritas em termos das seis componentes independentes da matriz simétrica $M^{(ij)}$, e das três

componentes do vetor a_k .

Da eq. (1.3.4), é fácil obter, usando as eqs. (1.3.2) e (1.3.9) que,

$$M^{(ij)} a_j = 0 \quad . \quad (1.3.10)$$

A matriz $M^{(ij)}$ pode ser reduzida através de transformações lineares dos vetores de base, a forma diagonal. Denotaremos então por n_1 , n_2 e n_3 os seus valores principais. A igualdade (1.3.10) nos diz que se o "vetor dual" a_j existe, ele necessariamente estará localizado ao longo de uma das direções principais da matriz $M^{(ij)}$, correspondente ao valor principal nulo.

Sem diminuir a generalidade, podemos então tomar $a_j = (a, 0, 0)$, o que reduz a eq. (1.3.10) para $an_1 = 0$.

Através da eq. (1.3.9), vemos que as relações de comutação (1.3.1) tomam a forma:

$$\begin{aligned} \left[\bar{K}_1, \bar{K}_2 \right] &= -\frac{a}{2} K_2 + n_3 K_3 \\ \left[\bar{K}_2, \bar{K}_3 \right] &= n_1 K_1 \\ \left[\bar{K}_1, \bar{K}_3 \right] &= n_2 K_2 + \frac{a}{2} K_3 \quad . \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

O que nos resta agora, é apenas a arbitrariedade das transformações de escala e da variação do sinal dos operadores $K_{(i)}$. Isto permite mudar simultaneamente o sinal de n_1 , n_2 e n_3 , e fazer positiva a grandeza a (se ela é diferente de zero). Chegamos, desse modo, à seguinte tabela para os possíveis tipos de espaços homogêneos.

Tabela 1.3.1 - A classificação de Bianchi. Escolha original para o sinal dos parâmetros a, n_1, n_2, n_3 que determinam uma escolha independente para as constantes de estrutura C_{bc}^a . O parâmetro h que diferencia os tipos III e VI é definido por $h=a^2/4n_2n_3$.

Tipo	a	n_1	n_2	n_3
I	0	0	0	0
II	0	+	0	0
III ($h=-1$)	+	0	+	-
IV	+	0	0	+
V	+	0	0	0
VI ($h \neq -1$)	+	0	+	-
VII	+	0	+	+
VIII	0	+	+	-
IX	0	+	+	+

É preciso aclarar ainda, a diferença entre os grupos III e VI. As eqs. (1.3.11) se reduzem para os tipos III ou VI, a:

$$\begin{aligned} [K_1, K_2] &= -\frac{a}{2} K_2 + n_3 K_3 \\ [K_1, K_3] &= -\frac{a}{2} K_3 - n_2 K_3 \\ [K_2, K_3] &= 0 \end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Para o operador $Y = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3$, onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são constantes arbitrárias, ser gerador de um subgrupo abeliano G_1 , do grupo G_3 gerado por K_1, K_2 e K_3 , é necessário e suficiente⁽¹⁰⁾ que:

$$\left[\overline{Y}, K_1 \right] = \left[\overline{Y}, K_2 \right] = \left[\overline{Y}, K_3 \right] = 0 \quad . \quad (1.3.13)$$

Substituindo a expressão de \overline{Y} e usando (1.3.12), obtemos o seguinte sistema de equações para α_1 , α_2 e α_3 ,

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} \alpha_2 + n_2 \alpha_3 &= 0 \quad , \\ -n_3 \alpha_2 + \frac{a}{2} \alpha_3 &= 0 \quad , \\ \alpha_1 &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

ou ainda

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & n_2 \\ -n_3 & \frac{a}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad (1.3.15)$$

que terá uma solução não trivial e portanto existirá um G_1 abeliano se:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & n_2 \\ -n_3 & \frac{a}{2} \end{pmatrix} = 0 \iff \frac{a^2}{4} + n_2 n_3 = 0 \quad , \quad (1.3.16)$$

ou ainda,

$$\frac{a^2}{4n_2 n_3} = -1 \quad . \quad (1.3.17)$$

Logo, se $h = a^2/4n_2 n_3 = -1$, existe um G_1 abeliano .

Bianchi⁽¹⁵⁾, convencionou que esse é o tipo III. Se $h \neq -1$ não existe o tal G_1 , e temos o tipo VI.

Um espaço tridimensional homogêneo pertencente à classificação de Bianchi, pode ser proveitosamente utilizado para constituir a seção espacial de um espaço-tempo, isto é, sua seção $t = \text{const.}$ Em tal caso, o modelo será usualmente citado como espacialmente homogêneo de um dado tipo de Bianchi. Para exemplificar, considere o tipo I de Bianchi. Vamos demonstrar que este é o espaço euclidiano, pois, as constantes de estrutura neste caso (veja Tab. 1.3.1), são todas nulas e pela equação (1.3.11) temos:

$$\left[\bar{K}_{(i)}, K_{(j)} \right] = 0 \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.3.18)$$

em um sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) , uma solução para esse sistema de equações é,

$$K_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad K_2 = \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad K_3 = \frac{\partial}{\partial z} \quad . \quad (1.3.19)$$

Obviamente, as transformações geradas por esses vetores deixam invariantes as três diferenciais independentes (dx, dy, dz) , as quais constituem precisamente o elemento de comprimento

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad , \quad (1.3.20)$$

do 3-espaço euclidiano.

Para dar uma idéia do método geral, usado em cosmologia, considere agora as coordenadas do espaço-tempo (t, x, y, z) .

Como os $K_{(i)}^S$, dados pela eq. (1.3.19) são atuam nas

coordenadas espaciais, o elemento de linha

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad , \quad (1.3.21)$$

é a geometria de uma variedade quadridimensional (espaço-tempo) cuja seção $t = \text{constante}$ é espacialmente homogênea.

Friedmann em 1922, mostrou que essa geometria é solução das equações de Einstein, com tensor de energia-momentum dado por $T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu$. A solução de Friedmann é atualmente bastante citada, como um modelo cosmológico do universo, que tem poeira como fonte de curvatura, dotado de uma seção de homogeneidade espacial do tipo Bianchi I.

O caminho que nos permite obter o elemento de linha a partir da álgebra dos campos de Killing, como foi visto, é facilmente percorrido apenas para o caso euclidiano (Bianchi tipo I). Discutiremos a seguir a construção do elemento de linha no caso geral.

I.4 - Construção das Métricas de Bianchi

Abordaremos agora a questão fundamental desse capítulo, já delineada no final da seção anterior. Conhecendo-se a álgebra dos geradores de isometria (vetores de Killing), como determinar o elemento de linha associado ?

Antes de responder a essa pergunta, observamos que, geralmente, as componentes dos campos tensoriais estão referidas a uma base natural de coordenadas $(\partial/\partial x^\alpha)$ e suas diferenciais lineares associadas dx^α $\alpha = 1,2,3$. Contudo, qualquer

conjunto de vetores linearmente independentes em cada ponto, pode ser utilizado como uma base local. Em particular, pode ser útil referir as equações de campo, a métrica, etc., a alguma base especial. Por este motivo, é costume introduzir campos vectoriais auxiliares, que em geral, não constituem uma base de coordenadas, sendo escolhidos por imposições geométricas e/ou físicas.

Para descrever um espaço homogêneo tridimensional que é órbita de um grupo de isometrias simplesmente transitivo, a tarefa é bastante simplificada quando utilizamos uma tal base, chamada de base invariante.

Considere então $K_{(i)} = K_{(i)}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ $i, \alpha = 1, 2, \text{ e } 3$, os três vetores de Killing do grupo de isometrias, com $\det |K_{(i)}^\alpha| \neq 0$ e $K_{(i)}^\alpha K_{(i)\beta}^{(i)} = \delta^\alpha_\beta$, escrito na base coordenadas $\{x^\alpha\}$, cuja métrica ainda não determinada é dada por

$$d\ell^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (1.4.1)$$

Toda informação que dispomos dos vetores de Killing é a sua álgebra associada a um dos nove tipos de Bianchi.

Uma base local $X_{(a)}$ $a = 1, 2 \text{ e } 3$, é dita invariante sob a ação do grupo G_3 se:

$$L_{K_{(i)}} X_{(a)} \equiv \left[K_{(i)}, X_{(a)} \right] = 0 \quad (1.4.2)$$

A definição acima já foi utilizada de forma não explícita no caso euclidiano. De fato, a homogeneidade do espaço plano é expressa pela invariância da métrica em relação às

translações paralelas do sistema de coordenadas cartesianas , ou seja, da tríada de vetores que define esse sistema. Ora, como as constantes de estrutura para esse tipo são nulas, isto é, $\left[\underline{K}_{(i)}, \underline{K}_{(j)} \right] = 0$, a eq. (1.4.2) tem uma solução trivial que é $X_{(a)} = K_{(a)}$. Portanto, os vetores de Killing para a geometria do tipo I, constituem a própria base invariante. Evidentemente, esta solução não será válida quando as constantes de estrutura forem diferentes de zero, isto é, se $\left[\underline{K}_{(i)}, \underline{K}_{(j)} \right] \neq 0$.

Em uma base de coordenadas, os vetores da base invariante podem ser escritos como:

$$X_{(a)} = A_{(a)}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \quad , \quad \alpha, a = 1, 2 \text{ e } 3$$
$$\det |A_{(a)}^{\alpha}| \neq 0 \quad (1.4.3)$$

e

$$A_{(a)}^{\alpha} A_{\beta}^{(a)} = \delta^{\alpha}_{\beta} \quad ,$$

onde $A_{(a)}^{\alpha}$ é a matriz de transformação entre as duas bases, ou como é geralmente dito, as tríadas associadas à base invariante. Nesta base, as componentes do tensor métrico são dadas por,

$$\gamma_{ab} = A_{(a)}^{\alpha} A_{(b)}^{\beta} g_{\alpha\beta} \quad . \quad (1.4.4)$$

Um fato notável é que das eqs. (1.4.2) definindo a base invariante, juntamente com a hipótese que $g_{\alpha\beta}$ são as componentes do tensor métrico que tem os $K_{(i)}^s$ como vetores de Killing, decorre que γ_{ab} é uma matriz constante, isto é, $\gamma_{ab|_{\lambda}} = 0$. A demonstração é muito simples e segue diretamente da eq.(1.4.4),

da qual obtemos

$$\begin{aligned} \gamma_{ab|\lambda} &= \left(A_{(a)}^\alpha A_{(b)}^\beta g_{\alpha\beta} \right)_{|\lambda} \\ &= A_{(a)}^\alpha |_\lambda A_{(b)}^\beta g_{\alpha\beta} + A_{(a)}^\alpha A_{(b)}^\beta |_\lambda g_{\alpha\beta} + A_{(a)}^\alpha A_{(b)}^\beta g_{\alpha\beta} |_\lambda \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

A equação $(L_{K(i)} g)_{\alpha\beta} = 0$ é escrita (veja eq. (1.2.13)) como,

$$g_{\alpha\beta|\rho} K_{(i)}^\rho + g_{\alpha\rho} K_{(i)|\beta}^\rho + g_{\rho\beta} K_{(i)|\alpha}^\rho = 0 \quad , \quad (1.4.6)$$

desde que $K_{(i)}^\rho$ é inversível, multiplicamos a equação acima por $K_{\lambda}^{(i)}$ obtendo,

$$g_{\alpha\beta|\lambda} + g_{\alpha\rho} K_{(i)|\beta}^\rho K_{\lambda}^{(i)} + g_{\rho\beta} K_{(i)|\alpha}^\rho K_{\lambda}^{(i)} = 0 \quad , \quad (1.4.7)$$

ou ainda,

$$g_{\alpha\beta|\lambda} = -g_{\alpha\rho} K_{(i)|\beta}^\rho K_{\lambda}^{(i)} - g_{\rho\beta} K_{(i)|\alpha}^\rho K_{\lambda}^{(i)} \quad . \quad (1.4.8)$$

Por outro lado, em termos de componentes, a eq. vetorial (1.4.2) se escreve (veja eq. (1.2.8)), como,

$$K_{(i)}^\alpha A_{(a)}^\beta |_\alpha - A_{(a)}^\alpha K_{(i)|\alpha}^\beta = 0 \quad , \quad (1.4.9)$$

e multiplicando por $K_{\lambda}^{(i)}$ teremos:

$$A_{(a)}^\beta |_\lambda = A_{(a)}^\alpha K_{(i)|\alpha}^\beta K_{\lambda}^{(i)} \quad . \quad (1.4.10)$$

Finalmente, substituindo as eqs. (1.4.8) e (1.4.10) em (1.4.5), efetivamente obteremos

$$\gamma_{ab|_{\lambda}} = 0 \quad , \quad a, b, \lambda = 1, 2 \text{ e } 3 \quad . \quad (1.4.11)$$

Por outro lado, invertendo a equação (1.4.4), obtemos,

$$g_{\alpha\beta} = A_{\alpha}^{(a)} A_{\beta}^{(b)} \gamma_{ab} \quad , \quad (1.4.12)$$

onde $A_{\alpha}^{(a)}$ é a matriz de transformação inversa, isto é, $A_{\alpha}^{(a)} A_{(a)}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$. Logo, para obtermos os coeficientes da métrica $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$, a menos da matriz simétrica constante γ_{ab} , é necessário apenas calcular as matrizes $A_{(a)}^{\alpha}$, invertê-las e usar a equação (1.4.12).

Taub, em memorável trabalho ⁽¹⁷⁾, determinou para cada um dos nove tipos de Bianchi, uma representação para a base da álgebra dos campos de Killing, em seguida, substituindo na eq. (1.4.2) das bases invariantes, calculou ^(*) as matrizes $A_{(a)}^{\alpha}$. Isto lhe permitiu obter as formas gerais, para as métricas das variedades homogêneas da classificação de Bianchi, isto é,

$$dl^2 = \gamma_{ab} A_{\alpha}^{(a)} A_{\beta}^{(b)} dx^{\alpha} dx^{\beta} \quad , \quad \text{com } a, b, \alpha, \beta = 1, 2 \text{ e } 3 \quad , \quad (1.4.13)$$

onde γ_{ab} é uma matriz simétrica de elementos independentes das coordenadas x^{α} .

(*) As matrizes $A_{(a)}^{\alpha}$ para todos os tipos de Bianchi estão explicitadas na referência (17).

Definindo $\omega^a = A^{(a)}_{\alpha} dx^{\alpha}$, que são as diferenciais lineares associadas às bases invariantes, isto é, $\omega^a(X_{(b)}) = \delta^a_b$, podemos reescrever a métrica (1.4.14), nessa base, da seguinte forma.

$$d\ell^2 = \gamma_{ab} \omega^a \omega^b, \quad a, b = 1, 2, 3. \quad (1.4.14)$$

Relembrando o que fizemos para o caso euclidiano (Bianchi I), podemos utilizar a métrica tridimensional (1.4.13), ou equivalentemente (1.4.14), para representar o elemento de linha da parte espacial de um espaço-tempo quadridimensional. Assim, usando coordenadas $\{t, x^{\alpha}, \alpha = 1, 2, 3\}$, onde t é a coordenada tempo fora da seção espacial, temos a liberdade de fazer $\gamma_{ab} = \gamma_{ab}(t)$, pois a base invariante só depende das coordenadas espaciais. Portanto, a forma mais geral para o elemento de linha das variedades quadridimensionais, as quais por construção, constituem geometrias adequadas para possíveis modelos cosmológicos espacialmente homogêneos são:

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ab}(t) A^{(a)}_{\alpha} A^{(b)}_{\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}, \quad (1.4.15)$$

ou equivalentemente,

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ab}(t) \omega^a \omega^b. \quad (1.4.16)$$

Claramente, pela última equação, vemos que as equações de campo quando expressas na base invariante, se reduzirão a equações diferenciais ordinárias na variável t .

É importante salientar que essa generalização do con

ceito de homogeneidade Newtoniano, apesar de considerada satisfatória pela maioria dos cosmólogos, não é única, outros critérios também foram desenvolvidos e quando utilizados, conduzem em geral a métricas^(18,19) que não são equivalentes a (1.4.15) ou (1.4.16).

I.5 - Uma Nota na Isotropia de Espaços do Tipo Bianchi

Um espaço métrico é isotrópico, quando a medida do intervalo de distância é independente da direção determinada por quaisquer dois pontos infinitesimalmente próximos. Pode-se mostrar^(20,21) que esta condição é equivalente a exigir a constância da curvatura Gaussiana. É o que ocorre, por exemplo, no espaço-tempo da Relatividade Especial, neste caso em particular, esta curvatura é nula em todos os pontos.

O conceito de isotropia também pode ser descrito pelo formalismo de grupo de isometrias.

Como vimos, um espaço Riemanniano de dimensão n , admite p vetores de Killing, onde $0 \leq p \leq n(n+1)/2$. O espaço é homogêneo se quaisquer dois pontos estão ligados por uma transformação do grupo de isometrias, neste caso, o número de vetores de Killing tem de ser necessariamente maior ou igual à dimensão do espaço, isto é, $n \leq p \leq n(n+1)/2$. Se n desses vetores já constituem os geradores do grupo simplesmente transitivo, e o número de soluções das equações de Killing é maior do que n , é porque existem simetrias adicionais no espaço.

Quando existem exatamente o número máximo de vetores de Killing linearmente independentes, ou seja, $p = n(n+1)/2$ o

espaço é homogêneo e isotrópico.

É fácil mostrar⁽²²⁾ que um espaço de dimensão n com a máxima simetria possível é conformalmente plano e tem seu tensor de curvatura dado por,

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu} = \frac{R}{n(n-1)} (g_{\lambda\sigma}g_{\rho\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\rho\sigma}) \quad , \quad (1.5.1)$$

onde $R = R^{\alpha\beta\lambda\rho} g_{\alpha\lambda}g_{\beta\rho}$ é o escalar de curvatura que é constante e está relacionado com a curvatura gaussiana K pela expressão

$$R = n(n-1)K \quad . \quad (1.5.2)$$

Para $n = 3$, a equação (1.5.1) fornece

$$R_{\mu\alpha\lambda\rho} = \frac{R}{6} (g_{\mu\lambda}g_{\alpha\rho} - g_{\mu\rho}g_{\alpha\lambda}) \quad , \quad (1.5.3)$$

e pode-se mostrar^(20,22) que existe um sistema de coordenadas no qual o elemento de linha é dado por:

$$d\sigma^2 = \frac{\alpha_1(dx^1)^2 + \alpha_2(dx^2)^2 + \alpha_3(dx^3)^2}{\Omega^2(x)} \quad , \quad (1.5.4)$$

onde

$$\alpha_i = \pm 1 \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{e} \quad \Omega = 1 + \frac{R_0}{24} \sum_{K=1}^3 \alpha_j (x^j)^2 \quad .$$

Da classificação de Bianchi, apenas os tipos I, V e IX podem ter suas métricas colocadas na forma acima, isto é, são maximalmente simétricas ou homogêneas e isotrópicas, cor -

pondo aos valores de R_0 igual a 0, 1 e -1. Isto significa que de todos os modelos cosmológicos espacialmente homogêneos, apenas aqueles cujas seções de homogeneidade são do tipo Bianchi I, V ou IX, devem também ser considerados isotrópicos.

I.6 - Nota Histórica Sobre Modelos Homogêneos

A primeira tentativa de classificação dos modelos cosmológicos, foi feita em termos de seus parâmetros cinemáticos suplementados por informações sobre o conteúdo material⁽⁵⁾. Nesta linha, os modelos de Friedmann eram caracterizados por terem rotação e distorção ("shear") nulos^(*) ($\omega_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} = 0$). Se além disso o escalar de expansão θ é nulo, o modelo obtido é o de Einstein. A hipótese $\sigma_{\mu\nu} = \theta = 0$ e $\omega_{\mu\nu} \neq 0$ conduz ao modelo de Gödel. Para este conjunto de soluções, a fonte de curvatura é um fluido perfeito sem pressão. Finalmente, se a densidade da matéria é feita igual a zero, se obtêm os modelos de De Sitter como caso particular dos modelos de Friedmann.

Esta classificação revelou-se, com o acúmulo gradual de soluções (principalmente a partir do trabalho de Taub), insuficiente para diferenciar as soluções, além disso, com o estudo sistemático dos tipos de Bianchi, viu-se que era mais natural usar o esquema de grupo de isometrias, para uma caracterização geométrica intrínseca do espaço-tempo.

Já foram encontradas soluções espacialmente homogêneas^(14,23) para todos os tipos de Bianchi. O primeiro mode-

(*) Ver Capítulo III para a definição de tais quantidades.

lo cosmológico, o universo de Einstein, tem seção $t = \text{cte.}$ do tipo Bianchi IX, os modelos de Friedmann são dos tipos I, V e IX. O universo de Gödel no lugar de uma seção espacial homogênea, tem uma seção temporal que é do tipo VIII. É muito grande a quantidade de exemplos, porque o conteúdo material e a existência de certos parâmetros cinemáticos, diferenciam as soluções cujas seções são de um mesmo tipo de Bianchi.

Ozsvath e Schücking⁽¹³⁾, encontraram toda uma classe de soluções com mesmo tensor de energia-momentum do modelo de Einstein, mesmo tipo de seção espacial (Bianchi IX), que se diferencia do modelo de Einstein pela existência de rotação. Mais recentemente, Rebouças e Sales de Lima⁽²⁴⁾ encontraram também uma classe de soluções cuja seção $t = \text{const.}$ é Bianchi IX e onde a rotação depende do tempo.

I.7 - O Universo é Homogêneo e Isotrópico ?

Os conceitos de Homogeneidade e Isotropia foram introduzidos na Cosmologia Relativista por Einstein, ao formular o problema Cosmológico⁽²⁵⁾... *"A estrutura métrica do contínuo espaço-tempo deve ser extremamente complexa, dada a irregularidade com que a matéria se distribui. Se essa estrutura, porém nos interessar a 'grosso modo', então nos será permitido imaginar, que a distribuição de matéria se faz uniformemente sobre espaços enormes, de tal modo que a sua densidade se apresenta como uma grandeza de variação extremamente lenta"*. Tais hipóteses, altamente restritivas, eram permitidas na época até pela inexistência de dados observacionais e tinham por finalidade última

(ou primeira ?), tornar o problema tratável do ponto de vista matemático.

Quando Hubble em 1929 descobriu a expansão do universo, prevista pelos modelos homogêneos e isotrópicos de Friedmann, estas hipóteses passaram imediatamente a ter um maior grau de confiabilidade.

Posteriormente, foi demonstrado rigorosamente por Walker⁽²⁶⁾ que um espaço que é isotrópico em torno de qualquer ponto também é homogêneo, sendo portanto maximalmente simétrico. Isso permitiu, juntamente com o conhecido Princípio de Copérnico (a terra não ocupa uma posição privilegiada no universo), deslocar aparentemente o problema da homogeneidade espacial para o da isotropia, pois, se o universo é isotrópico visto da terra, deverá ser via "Princípio de Copérnico" em torno de qualquer ponto, com o trabalho de Walker nos assegurando a sua homogeneidade espacial.

A descoberta da radiação cósmica de fundo (RCF), por Penzias e Wilson, em 1965, foi prevista no final da década de quarenta^(27,28) por Gamov e colaboradores, para um universo em expansão. A sua aparente isotropia^(29,30) foi, sem dúvida, um fator de maior aceitação da isotropia e homogeneidade do universo, apesar de não se ter claro⁽³¹⁾ como isotropia da RCF implica isotropia do espaço-tempo ou da distribuição de matéria.

Na verdade, existem modelos anisotrópicos do universo⁽³¹⁾ onde a observação de RCF e da distribuição de matéria podem ser isotrópicas ao longo de uma dada linha de universo, no entanto, sabemos que as nossas observações são sempre feitas aqui e agora, isto é, ao longo da linha de universo de nossa galáxia.

Atualmente parece ser um dado observacional largamente aceito, a existência de uma anisotropia de dipolo na RCF, medida por Smoot et al. ⁽³²⁾ e confirmado por Cheng et al. ⁽³³⁾ e Fabbri et al. ⁽³⁴⁾. Essa anisotropia tem sido geralmente atribuída ao efeito Döppler correspondendo a uma velocidade de nossa galáxia na direção ^(*) ^(32,35), $l = 261^\circ$ e $b = 33^\circ$, da ordem de $603 \pm 60 \text{ Km.s}^{-1}$. Mais recentemente, como tinha sido sugerido no trabalho de Fabbri e colaboradores, foi detectado ^(36,82), um termo de quadrupolo da mencionada radiação. Se isto for confirmado, teremos uma indicação da existência de uma anisotropia intrínseca na RCF de $2,7^\circ\text{K}$.

Um resumo da situação observacional relacionada com a isotropia pode ser encontrado nas refs. ^(31,35,48); ressaltamos apenas que a existência de um campo magnético cósmico pode ser outra indicação contra a isotropia, apesar dos dados observacionais não serem ainda conclusivos, pois os efeitos desse campo podem ser mascarados por campos locais ⁽³⁷⁾. Existem porém, indicações de uma orientação sistemática ^(38,39) do eixo das galáxias.

As evidências acima (até que se prove o contrário), contêm tentadoras sugestões de anisotropia. Em vista disso, mesmo com o uso de suposições extras que não são baseados em dados observacionais (como o Princípio de Copérnico), a comprovação experimental da isotropia do espaço-tempo parece ser uma questão ainda em aberto.

A verificação direta da homogeneidade é bastante pa-

^(*) l e b são coordenadas galáticas $l = 261^\circ$ e $b = 33^\circ$, dão um afastamento de $\sim 40^\circ$ da direção do super-aglomerado de Virgo, medido a partir da terra ⁽⁸³⁾.

recida com a da isotropia. Nos modelos cosmológicos expansionistas, em geral, existem horizontes de partículas, isto é, a maior distância que um observador pode ver numa dada direção para um certo instante do seu tempo próprio ^(1,22). Existe portanto em tais modelos, regiões do espaço-tempo das quais, devido à expansão, não temos recebido nenhuma informação e estamos supondo "a priori" que tais regiões são espacialmente homogêneas.

Segundo Ellis ^(31,41) parece não ser possível distinguir observacionalmente entre um universo espacialmente homogêneo e um universo espacialmente não-homogêneo, que é do tipo Friedmann nas vizinhanças do nosso grupo local de galáxias, e não-homogêneos para grandes distâncias.

Para finalizar, de acordo com P.S. Wesson ^(42,43), os dados experimentais relativos à questão da homogeneidade e da isotropia do universo, podem ser divididos em quatro categorias:

- (1) - Medições da RCF indicam homogeneidade em pequenas escalas angulares e inomogeneidades em grandes escalas. A anisotropia de quadrupolo não pode ser interpretada como um simples efeito de velocidade e indica anisotropia no presente ou no futuro.
- (2) - Fontes de Radio indicam homogeneidade e isotropia, mas o deslocamento das linhas espectrais para o vermelho não é conhecido para uma quantidade grande de tais fontes. Logo sua aparente isotropia pode ser compatível com inomogeneidades na escala do raio de Hubble.
- (3) - Galáxias óticas indicam inomogeneidades na escala dos superaglomerados ($\sim 50\text{Mpc}$), mas a situação é ainda bastan-

te indefinida.

- (4) - Medidas relacionadas aos quasars são referidas como indi
cando homogeneidade, mas existem algumas análises que in
dicam o oposto.

Esses dados mostram que a questão da homogeneidade ainda está em aberto⁽⁴³⁾, porém, a opinião ortodoxa, de que o universo é homogêneo e isotrópico está colocada em muitos livros-textos.

CAPÍTULO II

MODELOS INOMOGÊNEOS^(*)

II.1 - Introdução

No Capítulo anterior, consideramos algumas questões relacionadas com a observação da homogeneidade e da isotropia do universo. Como foi visto, os dados observacionais disponíveis parecem ser insuficientes para nos assegurar de forma definitiva, que o universo em larga escala é, foi e sempre será maximalmente simétrico, tal como é admitido pelos modelos cosmológicos de Friedmann.

Os modelos homogêneos do tipo Bianchi teoricamente, também apresentam sérias limitações. Suas geometrias evidentemente não são adequadas para estudar o fenômeno de formação de galáxias⁽¹¹⁾, nem parecem ser suficientemente gerais para descrever a singularidade inicial e o universo nos seus primeiros estágios. Próximo à singularidade, é razoável supor que condições menos restritivas sejam mais esclarecedoras⁽⁴⁴⁾. Outras questões foram levantadas pelo conhecido "Programa de Cosmologia Caótica" devido a Misner⁽⁴⁵⁾. Tal programa é baseado na idéia de que um universo homogêneo e isotrópico pode ser fruto da evolução de condições iniciais arbitrárias na singularida -

(*) Esta palavra está aportuguesada do inglês, "inhomogeneous", que ao contrário de inomogeneidade não está registrada no Aurélio.

de. O próprio Misner iniciou os trabalhos para provar a sua hipótese, examinando o evanescimento da anisotropia em modelos da classificação de Bianchi dos tipos I e IX⁽⁴⁶⁾; a isotropização dos modelos sendo provocada nos estágios iniciais por efeitos de viscosidade na radiação de neutrinos. Posteriormente as idéias de Misner foram severamente criticadas⁽⁴⁷⁾, por Collins e Hawking. Eles demonstraram que efetivamente existe uma classe de modelos espacialmente homogêneos e anisotrópicos, que tendem à isotropia durante o processo de expansão, contudo, o conjunto dos estados iniciais do universo para que isto ocorra é de medida nula, no conjunto de todas as possíveis condições iniciais. Sendo assim, o processo de isotropização seria possível somente a partir de condições especiais na singularidade, ao contrário do que afirmara Misner. Os resultados de Collins-Hawking não foram definitivos, porque eles trataram apenas os modelos cosmológicos espacialmente homogêneos e achavam que condições iniciais inomogêneas não precisavam ser consideradas, pois provavelmente, produziriam anisotropias no lugar de isotropia. W.B. Bonnor desconfiou que esta suposição poderia estar errada e investigou a evolução de modelos cosmológicos que são inicialmente inomogêneos. Como resultado ele obteve⁽⁴⁸⁾ que sob uma grande variedade de estados iniciais, modelos inomogêneos esfericamente simétricos em torno de um ponto, mais precisamente, as soluções inomogêneas de Tolman-Bondi evoluem para modelos homogêneos e isotrópicos. Apesar de constituir um passo adiante, a questão não estava ainda decidida, pois o modelo utilizado era também dotado de simetria, e portanto, o resultado ainda não poderia ser considerado geral.

A polêmica terminou quando Bonnor e Tomimura⁽⁴⁹⁾ pro

varam finalmente que uma classe das soluções inomogêneas de Szekeres⁽⁵⁰⁾, cujas geometrias não têm vetores de Killing, evoluem de uma grande variedade de estados iniciais para modelos do tipo Friedmann tal como especulara Misner. Os processos físicos que determinam tal evolução são ainda desconhecidos, talvez devido à simplicidade da fonte de curvatura (poeira!) dos modelos de Szekeres. Por isto, achamos necessário investigar e obter um número maior de soluções inomogêneas das equações de Einstein, apesar de toda sua complexidade matemática.

No presente capítulo, trataremos de definir um critério de inomogeneidade, apresentar as soluções inomogêneas de Szekeres, e fazer um resumo de suas principais características, que foram discutidas em vários artigos após a sua publicação. Tais soluções serão objeto de nosso estudo, tendo em vista a comparação de uma classe particular delas, com uma solução generalizada que foi por nós encontrada.

II.2 - Definição e Exemplos

A discussão precisa de modelos inomogêneos é uma tarefa difícil, pois existem diversas maneiras independentes de se introduzir inomogeneidades. O problema é agravado pelo fato de não ser conhecido, até o presente, um esquema geral de classificação tal como o de Bianchi para modelos homogêneos.

A forma mais "simples" de tratar inomogeneidades em modelos cosmológicos é também obtida através da técnica de grupo de isometrias. Em princípio, podemos exigir que o espaço-tempo admita um grupo de movimento, sem permitir que as órbi-

tas de tal grupo constituam hipersuperfícies do tipo espaço tri-dimensionalis. Dessa forma, teremos garantido que o modelo não será espacialmente homogêneo, mas é deixado um certo grau de simetria, o que em geral facilitará as soluções das equações de campo. Logo, dizemos que é espacialmente inomogêneo⁽⁵¹⁾ o modelo cuja dimensão da órbita do grupo de isometrias (caso exista!) é menor ou igual a dois. Isto significa, em particular, que as hipersuperfícies ortogonais às linhas de fluxo do fluido não são as órbitas do grupo como acontece nos modelos do tipo Bianchi. Obviamente, este é um bom critério pois é independente do uso de um particular sistema de coordenadas. Tal critério é a base da idéia original de Collins⁽⁵²⁻⁵⁵⁾, segundo a qual, não devemos pensar em termos de simetrias do espaço-tempo como um todo, e sim considerar as simetrias existentes nas subvariedades que ele chamou de "simetrias intrínscas".

O modelo de Taub⁽⁵⁶⁾ constitui um bom exemplo da existência de simetria intrínscica. Esta solução tem simetria plana numa seção bidimensional e sua métrica é dada por

$$ds^2 = dt^2 - t^{2/3} (t+A(x)) dx^2 + t^{4/3} (dy^2 + dz^2) \quad (2.2.1)$$

onde $A(x)$ é uma função arbitrária. A fonte de curvatura deste espaço-tempo é uma poeira que flui ortogonalmente às hipersuperfícies $t = \text{constante}$. Para $\partial A/\partial x$ diferente de zero, pode-se mostrar⁽⁵⁷⁾ que o modelo não é espacialmente homogêneo, mas admite três vetores de Killing, que atuam na órbita bidimensional t e x constantes.

Modelos inomogêneos que admitem um G_3 em superfícies bidimensionais do tipo-espaço, incluem vários tipos de soluções

não estacionárias dotadas de simetria esférica ou plana. Um outro exemplo, é a já citada solução esfericamente simétrica, cuja fonte de curvatura é poeira, estudada originalmente por Tolman⁽⁵⁸⁾. Esta é provavelmente a mais antiga solução inomogênea exata das equações de Einstein aplicadas a um fluido. Um resumo de tais modelos com poeira pode ser encontrado na referência (59).

As simetrias intrínsecas podem ser impostas sobre as subvariedades do espaço-tempo de várias formas, o importante é não violar o caráter inomogêneo do modelo. Podemos, por exemplo, exigir que o tensor de Ricci das subvariedades tenha certas propriedades, tal como a igualdade de seus autovalores.

Um esquema geral de classificação de modelos inomogêneos baseado no critério de grupo parece ser impossível porque devem existir várias soluções distintas que não têm vetores de Killing, como é o caso das soluções de Szekeres^(50,64). Consequentemente, novas informações oriundas da cinemática do fluido, em geral, são adicionadas quando se tenta caracterizar um conjunto particular de modelos. É o que acontece, por exemplo, no esquema proposto por Wainwright⁽⁶⁰⁾ para modelos sem rotação.

Observamos ainda que as inomogeneidades em modelos cosmológicos podem surgir quando substituímos o grupo de transformações que cobre as subvariedades. Podemos utilizar campos vetoriais que geram transformações conforme $(L_Y g = \lambda(x)g)$ e/ou homotéticos $(L_Y g = \alpha g, \alpha = \text{cte})$, no lugar de campos vetoriais de Killing, que geram transformações isométricas $(L_Y g = 0)$. As primeiras soluções que admitem movimentos homotéticos foram en-

contradas por Eardley⁽⁶¹⁾. Tais modelos têm sido pouco estudados, principalmente devido à complexidade das equações de campo⁽⁶²⁾.

II.3 - Os Modelos Cosmológicos de Szekeres

O mais geral conjunto de soluções conhecidas das equações de Einstein é constituído pelos modelos inomogêneos de Szekeres⁽⁵⁰⁾. Uma sub-classe dessas soluções foi descoberta independentemente, em trabalho não publicado, por W.B. Bonnor e N. Tomimura⁽⁶³⁾.

O conteúdo material de toda classe é composto de poeira com rotação nula. A métrica pode ser escrita na forma,

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\alpha} dx^2 - e^{2\beta} (dy^2 + dz^2) \quad , \quad (2.3.1)$$

onde $\alpha = \alpha(t, x, y, z)$ e $\beta = \beta(t, x, y, z)$ são funções determinadas pelas equações de Einstein^(*),

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = - T_{\mu\nu} \quad (2.3.2)$$

com $T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu$, onde $V^\mu = \delta^\mu_0$.

Duas das eqs. (2.3.2) depois de alguns cálculos⁽⁵⁰⁾, mostram que a função β obedece à seguinte relação^(**),

$$\beta_x \dot{\beta}_y = \beta_x \dot{\beta}_z = 0 \quad . \quad (2.3.3)$$

(*) Tomamos $K = 1$.

(**) Usaremos a notação $\beta_x \equiv \frac{\partial \beta}{\partial x}$, $\dot{\beta}_y \equiv \frac{\partial^2 \beta}{\partial t \partial y}$..., etc.

Szekeres dividiu as suas soluções em várias classes que dependem das hipóteses feitas sobre a função β , de tal forma que ela obedeça à equação acima. Temos então:

$$\text{Classe I.} \quad \beta_x \neq 0 \quad . \quad (2.3.4)$$

Nessa condição, a eq. (2.3.3) implica que $\dot{\beta}_y = \dot{\beta}_z = 0$, e temos a forma geral da função β ,

$$\beta = \psi(t, x) + \eta(x, y, z) \quad . \quad (2.3.5)$$

Esse resultado é levado às equações restantes que determinam $\alpha = \alpha(\psi, \eta)$ e às equações diferenciais obedecidas por ψ e η , ou seja,

$$\alpha = \ln(\psi_x + \eta_x) + \psi \quad , \quad (2.3.6)$$

$$e^{-2\eta}(\eta_{yy} + \eta_{zz}) + 1 = e^{2\psi}(2\ddot{\psi} + 3\dot{\psi}^2) = -K(x) \quad , \quad (2.3.7)$$

onde $K(x)$ é uma função arbitrária na variável x .

Fazendo agora $\psi = \ln R$, as eqs. (2.3.5), (2.3.6) e (2.3.7) podem ser reescritas respectivamente como:

$$\beta = \ln R + \eta \quad , \quad (2.3.8)$$

$$\alpha = \ln(R_x + R\eta_x) \quad , \quad (2.3.9)$$

$$4e^{-2\eta}(\eta_{yy} + \eta_{zz}) + 1 = 2R\ddot{R} + \dot{R}^2 = -K(x) \quad . \quad (2.3.10)$$

Em consequência da equação (2.3.8), podemos escrever a 2-métrica

ca $e^{2\beta}(dy^2+dz^2)$ na forma $R^2(t,x)e^{2\eta}(dy^2+dz^2)$, com a função $R(t,x)$ por (2.3.10) satisfazendo para cada valor de x a equação diferencial de Friedmann. Além disso, por esta mesma equação a métrica bidimensional $d\sigma^2 = e^{2\eta}(dy^2+dz^2)$ é uma superfície de curvatura gaussiana^(*) constante e igual a $1+K(x)$, para cada valor de x .

A equação (2.3.10) tem a seguinte integral primeira

$$\dot{R}^2 = -k(x) + \frac{\ell(x)}{R} \quad (2.3.11)$$

onde $\ell(x)$ é uma função arbitrária de x .

Suas soluções gerais são as funções de Friedmann $R(K(x), \ell(x), t-t_0(x))$ definidas⁽⁵⁰⁾ por:

$$(i) \quad K > 0 \quad , \quad \ell > 0; \quad R(K, \ell, t-t_0) = \ell K^{-1} \cos^2 \delta \quad ,$$

$$t-t_0(x) = \ell K^{-3/2} \left(\delta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\delta \right) \quad ;$$

$$(iia) \quad K < 0 \quad , \quad \ell < 0; \quad R(K, \ell, t-t_0) = \ell K^{-1} \cosh^2 \delta \quad ,$$

$$t-t_0(x) = -\ell (-K)^{3/2} \left(\delta + \frac{1}{2} \operatorname{senh} 2\delta \right) \quad ;$$

$$(iib) \quad K < 0 \quad , \quad \ell > 0; \quad R(K, \ell, t-t_0) = -\ell K^{-1} \operatorname{senh}^2 \delta \quad ,$$

$$t-t_0(x) = \ell (-K)^{3/2} \left(-\delta + \frac{1}{2} \operatorname{senh} 2\delta \right) \quad ,$$

(*) Para uma 2-métrica da forma $e^{2\eta}(dy^2 + dz^2)$ onde $\eta = \eta(y,z)$, a curvatura gaussiana é dada⁽⁵⁰⁾ por:

$$k = -4e^{-2\eta}(\eta_{yy} + \eta_{zz}) \quad .$$

$$(iic) \quad K < 0 \quad , \quad \ell = 0; \quad R(K, 0, t-t_0) = (-K)^{1/2} (t-t_0(x)) \quad ,$$

$$(iiia) \quad K = 0 \quad , \quad \ell > 0; \quad R(0, \ell, t-t_0) = \left(\frac{9\ell}{4}\right)^{1/3} (t-t_0(x))^{2/3} \quad ,$$

$$(iiib) \quad K = 0 \quad , \quad \ell = 0; \quad R(0, 0, t-t_0(x)) = f(x) \quad ,$$

onde δ é um parâmetro e $f(x)$ uma função arbitrária. Para $t_0(x)$ igual a zero, as soluções se anulam em $t = 0$, exceto no caso trivial (iiib).

A solução geral de (2.3.10) para a função η é dada por

$$e^{-\eta} = a(x)(y^2 + z^2) + b(x)y + c(x)z + d(x) \quad , \quad (2.3.12)$$

onde a , b , c e d são funções arbitrárias que em virtude da equação (2.3.10) obedecem à relação

$$4ad - b^2 - c^2 = \frac{1}{4} (1 + K(x)) \quad . \quad (2.3.13)$$

Uma solução desta classe é encontrada a partir da solução geral de $\eta(x, y, z)$ e da escolha de uma das funções de Friedmann, o que permite por substituição nas eqs. (2.3.8) e (2.3.9) determinar as funções α e β .

As funções $R(t, x)$ dependem no máximo de três funções arbitrárias enquanto $\eta(x, y, z)$ depende de quatro. Mas, por uma transformação de coordenadas, uma das funções arbitrárias pode ser eliminada⁽⁶⁴⁾ e devido à relação (2.3.13), teremos então no máximo cinco funções arbitrárias em cada solução. Para esta classe a expressão da densidade de matéria é:

$$\rho = \frac{\ell_x + 3\ell\eta_x}{R^2 (R_x + \eta_x R)} \quad . \quad (2.3.14)$$

Classe II. $\beta_x = \dot{\beta}_y = \dot{\beta}_z = 0$.

Sob tais condições temos a forma geral da função β , suprimindo a variável x na equação (2.3.5), isto é,

$$\beta = \bar{\psi}(t) + \bar{n}(y, z) \quad . \quad (2.3.15)$$

As equações de campo restantes determinam agora que

$$4e^{-2\bar{n}}(\bar{n}_{yy} + \bar{n}_{zz}) = e^{2\bar{\psi}}(2\ddot{\bar{\psi}} + 3\dot{\bar{\psi}}^2) = -K \quad , \quad K = \text{const.} \quad (2.3.16)$$

Observe que esta é a eq. (2.3.10) com a função $K(x) = K = \text{cte}$. Novamente $R(t) = e^{\bar{\psi}(t)}$ obedece à equação diferencial de Friedmann

$$2R\ddot{R} + \dot{R}^2 = -K \quad , \quad K = \text{cte} \quad (2.3.17)$$

com $\bar{n}(y, z)$ da forma

$$e^{-\bar{n}} = a(y^2 + z^2) + by + cz + d \quad (2.3.18)$$

onde a, b, c e d são constantes arbitrárias que obedecem à relação

$$4ad - b^2 - c^2 = \frac{K}{4} \quad . \quad (2.3.19)$$

Neste caso, as funções $\alpha = \alpha(t, x, y, z)$ e $\beta = \beta(t, y, z)$ são dadas por

$$\alpha = \ln(\lambda + R\sigma) \quad (2.3.20)$$

$$\beta = \ln \left(\frac{R}{\bar{n}} \right) \quad (2.3.21)$$

onde $\lambda = \lambda(t, x)$ e $\sigma = \sigma(x, y, z)$ estão relacionados com R e η pelas equações

$$\ddot{\lambda}R + \dot{\lambda}\dot{R} + \lambda\ddot{R} = \beta(x) \quad (2.3.22)$$

e

$$\sigma(x, y, z) = e^{-\bar{\eta}} \left[\bar{\gamma}(x)(y^2 + z^2) + \omega(x)y + \delta(x)z + \xi(x) \right] \quad (2.3.23)$$

onde, β , γ , ω , δ e $\xi(x)$ são funções arbitrárias.

Uma particular solução é novamente obtida pela escolha de uma função de Friedmann, que é levada à eq. (2.3.22) para determinar $\lambda(t, x)$. Substituindo $\lambda(t, x)$ e $\sigma(x, y, z)$ nas eqs. (2.3.20) e (2.3.21), teremos as funções α e β .

Todas as soluções particulares desta classe estão apresentadas no trabalho original de Szekeres mas pelo fato de algumas expressões da densidade de matéria terem sido corrigidas posteriormente⁽⁴⁹⁾, elas serão exibidas ao estudarmos na próxima seção, a evolução temporal de tais modelos.

Em geral, para as métricas pertencentes às duas classes não existem vetores de Killing⁽⁶⁴⁾, mas várias soluções conhecidas que admitem algumas simetrias, são obtidas como casos particulares.

A Classe I inclui os modelos esfericamente simétricos de Tolman-Bondi^(58,65), a classe de modelos com simetria plana discutidos por Eardley, Liang e Sachs⁽⁵⁹⁾ e a Classe II contém generalizações inhomogêneas dos modelos homogêneos e anisotrópicos de Kantowsky-Sachs⁽⁶⁶⁾.

O seguinte teorema foi provado por Alan Spero⁽⁶⁷⁾, para as duas classes:

Teorema II.1: Qualquer solução de Szekeres com $\rho = \rho(t)$ é espacialmente homogênea do tipo Friedmann ou Kantowsky-Sachs, ou então admite um grupo de Bianchi dos tipos I ou VI.

O espaço-tempo de Szekeres contém um fluido perfeito ($p=0$), que é irrotacional, geodético e normal às hipersuperfícies $\{t = \text{cte}\}$, tendo sido caracterizado covariantemente pela primeira vez por J. Wainwright⁽⁶⁸⁾, em termos do seu tensor de Weyl e também por Szafron e Collins⁽⁵⁴⁾, usando o esquema de simetrias intrínsecas. Enunciaremos essa última classificação como um teorema, cuja prova pode ser encontrada na última referência citada.

Teorema II.2: Um espaço-tempo que contém um fluido perfeito e satisfaz:

- (i) O fluido é geodético e ortogonal às hipersuperfícies $t = \text{cte}$.
- (ii) As hipersuperfícies que têm as linhas de universo do fluido como normais, são conformalmente planas.
- (iii) O 3-tensor de Ricci dessas hipersuperfícies e o tensor de expansão têm dois autovalores iguais.

É uma solução das equações de Einstein, se e somente se, tem o elemento de linha de Szekeres.

A ausência de vetores de Killing em tal geometria e o fato das linhas de matéria serem geodésicas, levou W.B. Bonnor⁽⁶⁹⁾ a investigar a existência de radiação gravitacional nesta solução, por dois motivos:

1. Uma grande parte dos movimentos astronômicos ocorrem em que

da livre, e se radiação gravitacional não é produzida por eles, deve existir muito menos radiação presente do que os investigadores acreditam.

2. As soluções exatas conhecidas para a matéria caindo livre - mente, até então, eram homogêneas ou dotadas de simetria es férica, plana ou cilíndrica, isto é, eram muito simétricas para serem modelos realísticos de sistemas radiantes.

Bonnor⁽⁷⁰⁾ mostrou que é possível fazer a junção^(*) da métrica de Szekeres válida para $0 \leq x \leq x_0$ com a de Schwarzschild válida para $x > x_0$. A métrica de Schwarzschild sendo estática, não existe radiação passando através dela, de modo que a matéria movendo-se na região $0 \leq x \leq x_0$ não deve ser fonte de radiação gravitacional.

Para completar a caracterização dos modelos cosmológicos de Szekeres, falta apenas investigar a sua evolução temporal, o que será feito em detalhes na próxima seção. Estudaremos apenas a evolução da Classe II, pois é esta classe que está diretamente relacionada ao nosso trabalho.

II.4 - Evolução dos Modelos de Szekeres

Inicialmente, vamos reescrever a métrica de Szekeres na forma utilizada por Bonnor e Tomimura⁽⁶³⁾ pois esta é mais conveniente para comparar com a generalização proposta mais adi ante.

(*) Na realidade a junção foi realizada apenas para a Classe I.

A métrica em todos os casos é dada por:

$$ds^2 = dt^2 - Q^2 dx^2 - R^2(dy^2 + h^2 dz^2) \quad , \quad (2.4.1)$$

onde, $Q = Q(x,y,z,t)$, $R = R(t)$ e $h = h(y)$.

As funções R e h satisfazem às equações

$$2R\ddot{R} + \dot{R}^2 = -K \quad , \quad (2.4.2)$$

e

$$\frac{d^2 h}{dy^2} = -Kh \quad , \quad K = 0, \pm 1 \quad (2.4.3)$$

As equações de campo (2.3.2) determinam que a função Q é separável da forma^(*)

$$Q = AR + T \quad , \quad (2.4.4)$$

onde $A = A(x,y,z)$ e $T = T(x,t)$.

Os modelos são classificados de acordo com o valor de K , e serão denotados pela letra P (parabólicos, $K=0$), H (hiperbólicos, $K = -1$), e E (elípticos, $K = 1$), correspondendo aos modelos de Friedmann com esses valores de K .

Modelos Parabólicos: $K = 0$, $h = 1$

$$A = \beta(y^2+z^2) + \sigma y + \nu z + \omega \quad (2.4.5)$$

onde β , σ , ν e ω são funções arbitrárias na variável x .

(*) Detalhes da integração de tais equações serão apresentados no próximo capítulo ao generalizarmos estes modelos.

$$P. I \quad R(t) = t^{2/3} \quad e \quad T = \frac{9}{5} \beta t^{4/3} + \mu t^{-1/3} \quad , \quad (2.4.6)$$

$$\rho = \frac{4A}{3QR^2} \quad . \quad (2.4.7)$$

$$P. II \quad R = 1 \quad e \quad T = \beta t^2 + \mu t \quad , \quad (2.4.8)$$

$$\rho = - \frac{4\beta}{Q} \quad . \quad (2.4.9)$$

Modelos Hiperbólicos: $K = -1$, $h = \text{coshy}$

$$A = (\sigma \text{coshy} + \nu \text{senhz}) \text{coshy} + \omega \text{senhy} \quad , \quad (2.4.10)$$

onde σ , ν e ω são funções arbitrárias na variável x .

$$H. I \quad R = 2K \text{senh}^2 \frac{\mu}{2} \quad , \quad t = K (\text{senh}\mu - \mu) \quad (K > 0, t > 0)$$

$$T = \beta \left(\frac{\mu}{2} \coth \frac{\mu}{2} - 1 \right) + (\mu \coth \frac{\mu}{2}) \quad , \quad (2.4.11)$$

$$\rho = \frac{6KA + \beta}{QR^2} \quad . \quad (2.4.12)$$

$$H. II \quad R = 2K \text{cosh}^2 \frac{v}{2} \quad , \quad t = K (v + \text{senh} v) \quad ,$$

$(K > 0, -\infty < t < \infty)$

$$T = \beta \left(\frac{v}{2} \text{tgh} \frac{v}{2} - 1 \right) + \mu \text{tgh} \frac{v}{2} \quad , \quad (2.4.13)$$

$$\rho = \frac{\beta - 6KA}{QR^2} \quad . \quad (2.4.14)$$

$$H. III \quad R = t \quad , \quad (t > 0)$$

$$T = \beta \log t + \mu \quad (2.4.15)$$

$$\rho = \frac{2\beta}{QR^2} \quad (2.4.16)$$

Modelos Elípticos: $K = 1 \quad h = \text{sen} y$

$$A = (\sigma \cos z + v \text{sen} z) \text{sen} y + \omega \cos y \quad . \quad (2.4.17)$$

$$E. I \quad R = 2K \text{sen}^2 \frac{\delta}{2} \quad , \quad t = K(\delta - \text{sen} \delta) \quad K > 0$$

$$T = \beta \left(\frac{\delta}{2} \cot \frac{\delta}{2} - 1 \right) + \mu \cot \frac{\delta}{2} \quad , \quad (2.4.18)$$

$$\rho = \frac{6KA - \beta}{QR^2} \quad . \quad (2.4.19)$$

Através de uma transformação na variável x , uma das cinco funções arbitrárias β , μ , σ , v e ω pode ser feita igual a ± 1 . Os modelos dependem então de quatro funções arbitrárias distintas, e no caso H.I, H.II e E.I, de uma constante arbitrária K .

A evolução de todos os modelos depende das duas funções arbitrárias $\beta(x)$ e $\mu(x)$. Em todos os casos, as superfícies bidimensionais $t = \text{cte}$, $x = \text{cte}$, seguem a história determinada pela função $R(t)$, mas a expansão na direção x é diferente. O comportamento assintótico dos modelos em $t = 0^+$ e $t \rightarrow \infty$ foi determinado considerando em tais limites de tempo, a potência temporal dominante, na densidade e na métrica.

Para os modelos parabólicos temos:

Modelo P.I: A função $R = t^{2/3}$ é aquela do modelo de Friedmann plano.

$$(i) \quad \mu \neq 0 \quad \beta \neq 0$$

Para obter densidade positiva é necessário fazer $\frac{A}{\mu} > 0$, supondo $A > 0$ e $\mu > 0$, podemos por uma transformação na variável x , tomar $\mu = +1$. A métrica (2.4.1) em $t \rightarrow 0^+$ é

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} ds^2 \sim dt^2 - t^{-2/3} dx^2 - t^{4/3} (dy^2 + dz^2) \quad . \quad (2.4.20)$$

Esta é a métrica de Kasner, a densidade em $t = 0^+$ é

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \rho = \frac{4A}{3t} \quad , \quad (2.4.21)$$

que não é homogênea. Isso mostra que no início a densidade e a expansão não estavam relacionadas.

Examinando a situação em $t \rightarrow +\infty$ e supondo $\beta > 0$ podemos fazer uma transformação em x tal que $\frac{9}{5} \beta = 1$, então:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} ds^2 \sim dt^2 - t^{8/3} dx^2 - t^{4/3} (dy^2 + dz^2) \quad , \quad (2.4.22)$$

que é a métrica de um universo anisotrópico e inhomogêneo.

A densidade assintótica é dada por

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho \sim \frac{4A}{3t^{8/3}} \quad . \quad (2.4.23)$$

Contudo, se $\beta = 0$ as seções espaciais $t = \text{cte}$ são planas e a densidade quando $t \rightarrow +\infty$ é a do modelo de Friedmann.

Este caso é interessante como um exemplo de uma cosmologia que começa num estado de extrema inomogeneidade e anisotropia, e evolui para um modelo homogêneo e isotrópico.

$$(ii) \quad \mu = 0 \quad , \quad \beta \neq 0$$

A métrica é dada por:

$$ds^2 = dt^2 - t^{4/3} \left[\left(A + \frac{9}{5} \beta t^{2/3} \right)^2 dx^2 + dy^2 + dz^2 \right] . \quad (2.4.24)$$

Quando $t \rightarrow 0^+$ temos:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} ds^2 \sim dt^2 - t^{4/3} (A^2 dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad , \quad (2.4.25)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \rho = \frac{4}{3t^2} \quad , \quad (2.4.26)$$

Iniciando então como um modelo homogêneo e anisotrópico. Quando $t \rightarrow +\infty$ temos os mesmos resultados do caso anterior, eqs. (2.4.22) e (2.4.23).

Modelo P.II: Nesse modelo não existe expansão nas direções y e z . Contudo, a eq. (2.4.9) mostra que independente da escolha das funções arbitrárias, em todo instante de tempo, existe densidade negativa em alguma região do espaço - tempo.

Apenas os modelos Parabólicos serão importantes para fins de comparação com o nosso trabalho, que será apresentado

no próximo Capítulo. A evolução dos modelos hiperbólicos e elípticos também está indicada na ref. (69) e um resumo dos resultados estão apresentados na Tabela 2.4.1.

Tabela 2.4.1 - Evolução dos modelos de Szekeres pertencentes à Classe II.

Modelo	Subcasos	Evolução	
		de:	para:
P.I	$\mu \neq 0, \beta \neq 0$	inomogêneo Kasner	inomogêneo e anisotrópico
	$\mu \neq 0, \beta = 0$	inomogêneo Kasner	Friedmann plano
	$\mu = 0, \beta \neq 0$	homogêneo anisotrópico	inomogêneo anisotrópico
P.II	—————	contém densidades negativas em todo instante de tempo	
H.I	$\mu \neq 0, \beta \neq 0$	inomogêneo K-S	Friedmann hiperbólico
	$\mu \neq 0, \beta = 0$	inomogêneo K-S	Friedmann hiperbólico
	$\mu = 0, \beta \neq 0$	homogêneo anisotrópico	Friedmann hiperbólico
H.II	—————	contém densidades negativas em todo instante de tempo	
H.III	—————	homogêneo anisotrópico	homogêneo e isotrópico
E.I	$\pi\beta + \mu < 0$	inomogêneo K-S	inomogêneo e anisotrópico
	$\pi\beta + \mu = 0$	inomogêneo K-S	homogêneo anisotrópico

CAPÍTULO III

UMA GENERALIZAÇÃO DOS MODELOS INOMOGÊNEOS DE SZEKERES

III.1 - Introdução

Quando conhecemos uma solução das equações de Einstein, é possível (em princípio) se obter uma solução mais geral, através de modificações na métrica e/ou no tensor de energia-momentum. Tal procedimento é independente do modelo ser homogêneo ou inhomogêneo. No caso homogêneo, por exemplo, Brill⁽⁷¹⁾ generalizou a solução de Taub⁽¹⁷⁾ para o vazio, colocando um campo eletromagnético como fonte de curvatura. Ozsvath e Schüking⁽¹³⁾, encontraram uma classe de soluções dependentes de um parâmetro K , de tal forma que, para K igual a zero é obtida a solução de Einstein. Neste caso, foi mantido o mesmo conteúdo material. Os modelos homogêneos foram exaustivamente estudados a partir da década de sessenta, por esta razão é muito grande o número de exemplos^(3,7,24). Para modelos inhomogêneos, as soluções de Szekeres, como foi visto, constituem generalizações dos modelos de Tolman-Bondi^(58,65), onde também foi conservado o mesmo tipo de fonte (poeira).

No capítulo anterior enfatizamos que os modelos cosmológicos de Szekeres estão naturalmente divididos em duas classes. Estudamos com detalhe os modelos da Classe II e em parti-

cular os batizados por Bonnor e Tomimura de parabólicos.

Apresentaremos agora uma solução mais geral para esta classe, obtida através de uma ligeira modificação no tensor de energia-momentum, de tal forma que se a "perturbação" for retirada, teremos as soluções de Szekeres. Nosso método é aplicável a qualquer modelo desta classe e para ilustrar, explicitaremos as soluções que tem o modelo P.I (veja Cap. II), como caso particular. Em seguida, faremos um estudo semelhante ao que foi realizado para as soluções de Szekeres. Assim, estudaremos as condições de existência de vetores de Killing, parâmetros cinemáticos, evolução temporal e outras propriedades geométricas.

III.2 - Os Modelos

Considere a métrica da Classe II de Szekeres

$$ds^2 = dt^2 - Q^2 dx^2 - R^2 (dy^2 + h^2 dz^2) , \quad (3.2.1)$$

onde $Q = Q(x,y,z,t)$, $R = R(t)$ e $h = h(y)$ são funções arbitrárias a serem determinadas pelas equações de campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -T_{\mu\nu} . \quad (3.2.2)$$

A mais simples alteração que pode ser feita na fonte de curvatura dos modelos de Szekeres é permitir a existência de uma pressão isotrópica ^(63,84,85), por este motivo os nossos modelos serão todas as soluções das eqs. (3.2.2), para o elemento de linha dado pela eq. (3.2.1), tendo como fonte de curvatura um fluido perfeito (Apêndice A),

$$T_{\mu\nu} = (\rho+p)V_{\mu}V_{\nu} - pg_{\mu\nu} \quad (3.2.3)$$

onde v^{μ} é a quadrivelocidade do observador que mede localmente a densidade ρ e a pressão p .

No sistema de coordenadas co-moventes, onde $V^{\mu} = \delta^{\mu}_0$, obtemos com a ajuda das fórmulas estabelecidas no Apêndice C ou na ref. (77), as seguintes equações de campo^(*)

$$- Q^{-2}R^2T_{11} = 2R\ddot{R} + \dot{R}^2 - h_{,22}h^{-1} \quad , \quad (3.2.4)$$

$$- QR^{-1}T_{22} = Q\ddot{R} + \dot{Q}\dot{R} + \ddot{Q}R - h^{-2}R^{-1}(Q_{,33} + hh_{,2}Q_{,2}) \quad , \quad (3.2.5)$$

$$- h^{-2}QR^{-1}T_{33} = Q\ddot{R} + \dot{Q}\dot{R} + \ddot{Q}R - R^{-1}Q_{,22} \quad , \quad (3.2.6)$$

$$- QR^2T_{00} = - Q\dot{R}^2 - 2\dot{Q}R\dot{R} + Q_{,22} + h^{-2}(Q_{,33} + hh_{,2}Q_{,2} + hh_{,22}Q) \quad (3.2.7)$$

$$0 = (Q_{,23} - h^{-1}h_{,2}Q_{,3}) = R_{23} \quad (3.2.8)$$

$$0 = (\dot{Q}_{,3} - Q_{,3}R^{-1}\dot{R}) = R_{03} \quad (3.2.9)$$

$$0 = (\dot{Q}_{,2} - Q_{,2}R^{-1}\dot{R}) = R_{02} \quad (3.2.10)$$

onde, de acordo com as eqs. (3.2.1) e (2.3) temos:

$$T_{00} = \rho \quad , \quad T_{11} = Q^2p \quad , \quad T_{22} = R^2p \quad \text{e} \quad T_{33} = h^2R^2p \quad .$$

Para resolver as equações de campo, vamos supor que a

(*) ponto e vírgula denotam derivadas parciais com relação ao tempo e às coordenadas espaciais.

pressão é dada pela relação,

$$p = c \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2, \quad c = \text{const} \geq 0 \quad (3.2.11)$$

onde $R(t)$ é o comprimento de escala da seção bidimensional t e x constantes. A razão pela qual escolhemos tal forma para a pressão são as seguintes:

- (i) No modelo parabólico P.I, a expressão da densidade dada pela eq. (2.4.7) nos mostra que se t tende a zero, a densidade de matéria diverge, conseqüentemente deve existir grandes pressões nos instantes iniciais, o que está de acordo com nossa escolha.
- (ii) Nos modelos de Friedmann com seção euclidiana e equação de estado do tipo $p = \lambda \rho$, $0 \leq \lambda \leq 1$, a pressão é dada por (72):

$$p = 3\lambda \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2. \quad (3.2.12)$$

Para se descrever os instantes iniciais do universo é usual tomar $\lambda = 1/3$ e na fase atual $\lambda = 0$, porém, não é conhecido o mecanismo de passagem de uma equação de estado para outra. A situação intermediária pode ter sido de extrema inhomogeneidade e anisotropia. A eq. (3.2.12), nos permitirá fazer comparações assintóticas, que talvez modifiquem as equações de estado em tais limites.

- (iii) Nos modelos espacialmente homogêneos, um fluido perfeito está termodinamicamente caracterizado por uma equação de estado do tipo $p = p(\rho)$, porque a entropia é constante no

espaço e no tempo (veja Apêndice B). Tal restrição parece não ser necessária nos modelos inomogêneos, apesar da entropia permanecer constante ao longo das linhas de universo da matéria.

- (iv) Nas soluções de Szekeres o movimento do fluido é geodético. É um fato conhecido (Apêndice B) que a 4-aceleração depende da existência de um gradiente espacial para a pressão. Logo, para manter o caráter geodético do fluido que é uma propriedade importante do espaço-tempo de Szekeres, a pressão deve depender apenas do tempo.
- (v) Finalmente, esta particular escolha da dependência funcional $\left(\frac{\dot{R}^2}{R^2}\right)$, além de "coincidência" (ii), representa uma simplificação do ponto de vista matemático, permitindo integrar exatamente o sistema de equações do modelo. Além disso, como veremos, para $c = 0$ reobtemos as soluções de Szekeres.

Substituindo $p = c\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2$ na eq. (3.2.4) obtemos

$$2R\ddot{R} + (1+c)\dot{R}^2 = h_{,22}h^{-1} \quad , \quad (3.2.13)$$

e como $R = R(t)$ e $h = h(y)$, podemos escrever

$$h_{,22}h^{-1} = -K \quad , \quad K = \text{const.} \quad (3.2.14)$$

logo,

$$2R\ddot{R} + (1+c)\dot{R}^2 = -K \quad . \quad (3.2.15)$$

As eqs. (3.2.8) a (3.2.10) determinam uma solução geral para $Q(x,y,z,t)$ da forma:

$$Q = R(t) \left[\overline{h}(y) p(x,z) + q(x,y) \right] + S(x,t) \equiv AR + S, \quad (3.2.16)$$

onde $p(x,z)$, $q(x,y)$ e $S(x,t)$ são funções arbitrárias.

Apenas as três equações de campo, (3.2.5) a (3.2.7) não foram ainda utilizadas. A eq. (3.2.7) determina simplesmente a densidade de matéria ρ . Por outro lado, subtraindo (3.2.5) de (3.2.6) obtemos:

$$Q_{,22} - h_{,2} h^{-1} Q_{,2} - h^{-2} Q_{,33} = 0. \quad (3.2.17)$$

A substituição da forma geral de Q , dada por (3.2.16) na equação acima, fornece:

$$p(hh_{,22} - h_{,2}^2) - p_{,33} + hq_{,22} - h_{,2}q_{,2} = 0. \quad (3.2.18)$$

Da eq. (3.2.14), para todos os valores de K obtemos:

$$hh_{,22} - h_{,2}^2 = \epsilon, \quad \epsilon = \text{const.} \quad (3.2.19)$$

logo, (3.2.18) implica que

$$\epsilon p - p_{,33} + h(q_{,22} - h_{,2}q_{,2}) = 0. \quad (3.2.20)$$

Porém, com $p = p(x,z)$ e $q(x,y)$, devemos ter

$$p_{,33} - \epsilon p = \alpha(x), \quad (3.2.21)$$

e

$$hq_{,22} - h_{,2}q_{,2} = \alpha(x), \quad (3.2.22)$$

onde $\alpha(x)$ é uma função arbitrária.

Derivando (3.2.22) com relação à variável y e usando (3.2.14) obtemos

$$h_{q,222} - h_{,22}q_{,2} = 0 \quad , \quad (3.2.23)$$

mas, $h_{,22} = -Kh$, então:

$$h(q_{,222} + Kq_{,2}) = 0 \quad , \quad (3.2.24)$$

ou ainda,

$$q_{,22} + Kq = 2\beta(x) \quad . \quad (3.2.25)$$

Temos então determinadas a densidade (eq. (3.2.7)) , as funções $R(t)$, $h(y)$, $p(x,z)$ e $q(x,y)$ pelas eqs. (3.2.15), (2.14), (2.21) e (2.25). Para definir a função Q é necessário, apenas, achar a equação diferencial de $S(x,t)$, o que pode ser feito com o auxílio da eq. (3.2.5) ou (3.2.6). Substituindo, (3.2.16), (2.17), (2.21) e (2.25) na equação (3.2.5), obtemos

$$R\ddot{S} + \dot{R}\dot{S} + (\ddot{R} + cR^{-1}\dot{R}^2)S = 2\beta(x) + KA \quad . \quad (3.2.26)$$

Portanto, estão definidas as equações diferenciais para todas as funções do modelo. Essas equações determinam generalizações das soluções da Classe II de Szekeres, para cada escolha de K . Trataremos aqui especificamente dos modelos parabólicos ($K=0$), em particular do modelo P.I.

Resumindo, temos que resolver o seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$2R\ddot{R} + (1+c)\dot{R}^2 = -K \quad (3.2.27)$$

$$h_{,22} h^{-1} = -K \quad , \quad (3.2.28)$$

$$p_{,33} - \epsilon p = \alpha(x) \quad , \quad \epsilon = h h_{,22} - h_{,2}^2 = \text{const} \quad , \quad (3.2.29)$$

$$q_{,22} + Kq = 2\beta(x) \quad , \quad (3.2.30)$$

$$R\ddot{S} + \dot{R}\dot{S} + (\ddot{R} + cR^{-1}\dot{R}^2)S = 2\beta(x) + KA \quad . \quad (3.2.31)$$

As equações (3.2.28), (2.29) e (2.30) definem a função $A(x,y,z)$. A eq. (2.27) a função $R(t)$ e conseqüentemente a pressão. Substituindo $R(t)$ na eq. (3.2.31) obtemos $S(x,t)$ e, finalmente Q , pela relação $Q = AR+S$. Para $K = 0$ a eq. (3.2.27) fica

$$2R\ddot{R} + (1+c)\dot{R}^2 = 0 \quad (3.2.32)$$

cuja solução geral é da forma:

$$R(t) = t^{2/3+c} \quad . \quad (3.2.33)$$

Para solução de (3.2.28) podemos tomar $h(y) = 1$, logo, $\epsilon = h h_{,22} - h_{,2}^2 = 0$. Levando esse resultado na equação (3.2.29) temos:

$$p_{,33} = \alpha(x) \quad (3.2.34)$$

então,

$$p(x,z) = \frac{1}{2} \alpha(x) z^2 + \sigma(x) z + \eta(x) \quad , \quad (3.2.35)$$

onde $\alpha(x)$, $\sigma(x)$ e $\eta(x)$ são funções arbitrárias.

Integrando (3.2.30) com $K = 0$ temos:

$$q(x,y) = \beta(x) y^2 + \delta(x) y + \omega(x) \quad , \quad (3.2.36)$$

e a equação (3.2.22) é um vínculo entre as funções $\alpha(x)$ e $\beta(x)$.
Temos então:

$$q_{,22} = \alpha(x) \implies \alpha(x) = 2\beta(x) \quad (3.2.37)$$

logo, a função $A(x,y,z) = hp+q$ é dada por

$$A = \beta(x)(y^2+z^2) + \delta(x)y + \sigma(x)z + \xi(x) \quad , \quad (3.2.38)$$

onde, $\beta(x)$, $\delta(x)$, $\sigma(x)$ e $\xi(x)$ são funções arbitrárias na variável x , com $\xi(x) = \omega(x) + \eta(x)$.

Para determinar a função $S(x,t)$, temos que calcular \dot{R} e \ddot{R} da eq. (3.2.33) e substituir em (3.2.31) com $K=0$. Obtemos então:

$$t^{2/3+c} \ddot{S} + \frac{2}{3+c} t^{-(1+c)/3+c} \dot{S} + \frac{2(c-1)}{(3+c)^2} t^{-2(2+c)/3+c} S = 2\beta(x) \quad . \quad (3.2.39)$$

Multiplicando o resultado acima por $t^{2(2+c)/3+c}$ temos a equação:

$$t^2 \ddot{S} + \frac{2}{3+c} t \dot{S} + \frac{2(c-1)}{(3+c)^2} S = 2\beta(x) t^{2(2+c)/3+c} \quad , \quad (3.2.40)$$

ou

$$t^2 \ddot{S} + at\dot{S} + bS = R(x,t) \quad , \quad (3.2.41)$$

onde $a = 2/3+c$ e $b = 2(c-1)/(3+c)^2$. Esta é uma equação do tipo Cauchy-Euler cujas soluções⁽⁷⁴⁾ são dadas por:

$$S(t,x,c) = \mu(x)t^{c-1/c+3} + \lambda(x)t^{2/c+3} + \frac{(c+3)^2}{(c+5)(c+1)} \beta(x)t^{2(2+c)/3+c},$$

para $c \neq 3$, (3.2.42)

e

$$S(t,x,3) = (\mu(x)\ell nt + \lambda(x))t^{1/3} + \frac{9}{8} \beta(x)t^{5/3} . \quad (3.2.43)$$

Para $c = 3$ a solução é especial porque, neste caso, a equação homogênea resultante de (3.2.41) tem raízes iguais.

Temos então a função $Q = AR+S$ nos dois casos:

$$Q(x,y,z,t,c) = (A+\lambda)t^{2/3+c} + \mu(x)t^{c-1/c+3} + \frac{(c+3)^2\beta(x)}{(c+5)(c+1)} t^{2(2+c)/3+c} , \quad c \neq 3,$$

(3.2.44)

e

$$Q(x,y,z,t) = (A+\lambda)t^{1/3} + \mu(x)t^{1/3} \ell nt + \frac{9}{8} \beta(x)t^{5/3} , \quad c = 3 . \quad (3.2.45)$$

Podemos ainda em todos os casos, incorporar a função $\lambda(x)$ em $A(x,y,z)$, pois temos a liberdade de definição da função $\xi(x)$ (veja eq. (3.2.38)). Dessa forma, podemos escrever

$$Q = AR + T \quad (3.2.46)$$

onde,

$$T(x,t,c) = \mu(x)t^{c-1/c+3} + \frac{(c+3)^2\beta(x)}{(c+5)(c+1)} t^{2(2+c)/3+c} , \quad \text{para } c \neq 3$$

(3.2.47)

e

$$T(x,t,3) = \mu(x)t^{1/3} \ell nt + \frac{9}{8} \beta(x)t^{5/3} , \quad \text{para } c = 3 . \quad (3.2.48)$$

Já vimos que a função A dada pela eq. (3.2.38) é a mesma dos modelos parabólicos de Szekeres eq. (2.4.5), fazendo

agora $c = 0$ em (3.2.47) e (3.2.33), temos:

$$T(x,t,0) = \mu(x)t^{-1/3} + \frac{9}{5} \beta(x)t^{4/3} \quad \text{e} \quad R(t) = t^{2/3}, \quad (3.2.49)$$

que são as expressões dadas por Nazira e Bonnor para o modelo P.I. (veja eq. (2.4.6)).

III.3 - Densidade de Matéria e Quantidades Cinemáticas

A equação (3.2.7) que define a densidade de matéria, de acordo com a eq. (3.2.17) e de $h(y) = 1$, pode ser escrita sob a forma:

$$QR^2_{,\rho} = Q\dot{R}^2 + 2R\dot{R}\dot{Q} - 2Q_{,22}, \quad (3.3.1)$$

mas, $Q = AR+T \implies Q_{,22} = A_{,22}R = 2\beta(x)R$, então a equação acima fica:

$$QR^2_{,\rho} = Q\dot{R}^2 + 2R\dot{R}\dot{Q} - 4\beta(x)R. \quad (3.3.2)$$

Substituindo $Q = AR+T$, $\dot{Q} = A\dot{R}+\dot{T}$ e usando a eq. (3.2.31), temos uma expressão geral para a densidade de matéria, para qualquer valor da constante c

$$\rho = \frac{3AR\dot{R}^2 + (2-c)T\dot{R}^2 - 2R^2\ddot{T}}{QR^2}. \quad (3.3.3)$$

Substituindo agora as expressões de R , \dot{R} , T , \ddot{T} , na expressão acima, com \dot{R} e \ddot{T} dados por

$$\dot{R} = \frac{2}{3+c} t^{-(1+c)/3+c}, \quad \forall c \quad (3.3.4)$$

$$\ddot{T} = \frac{4(1-c)}{(3+c)^2} \mu(x) t^{-7-c/3+c} + \frac{2(2+c)}{(c+5)} \beta(x) t^{-2/3+c} \quad , \quad c \neq 3 \quad (3.3.5)$$

e

$$\ddot{T} = - \left[\frac{4}{9} \mu(x) \ln t + \frac{1}{3} \mu(x) - \frac{5}{4} \beta(x) \right] t^{-5/3} \quad , \quad c = 3 \quad (3.3.6)$$

A densidade de matéria ρ , expressa pela eq. (3.3.3), nos dois casos, pode ser escrita como:

$$\rho = \frac{\frac{12A}{(3+c)^2} t^{-\frac{2c}{3+c}} + \frac{4c}{(3+c)^2} \mu(x) t^{-1} - \frac{4c(c+4)\beta(x)}{(c+1)(c+5)} t^{\frac{2}{3+c}}}{At^{\frac{6}{3+c}} + \mu(x)t + \frac{\beta(x)(3+c)^2}{(c+1)(c+5)} t^{\frac{2(4+c)}{3+c}}} \quad , \quad \forall c \neq 3 \quad (3.3.7)$$

e

$$\rho = \frac{\frac{1}{3} At^{-1} + \frac{1}{3} \mu(x) t^{-1} (\ln t) + \frac{2}{3} \mu(x) t^{-1} - \frac{21}{8} \beta(x) t^{1/3}}{At + \mu(x)t(\ln t) + \frac{9}{8} \beta(x) t^{7/3}} \quad , \quad c = 3 \quad (3.3.8)$$

Supondo $c = 0$ na expressão (3.3.7), obtemos:

$$\rho = \frac{\frac{4}{3} A}{A t^2 + \mu(x)t + \frac{9}{5} \beta(x) t^{8/3}} \quad , \quad (3.3.9)$$

para o modelo P_I , temos

$$Q = AR + T = At^{2/3} + \mu(x)t^{-1/3} + \frac{9}{5} \beta(x)t^{4/3} \quad , \quad (3.3.10)$$

e

$$QR^2 = At^2 + \mu(x)t + \frac{9}{5} \beta(x)t^{8/3} \quad . \quad (3.3.11)$$

Logo, a eq. (3.3.9) se reduz a:

$$\rho = \frac{4A}{3QR^2} \quad , \quad (3.3.12)$$

que é a expressão da densidade de matéria para o modelo P.I de Szekeres (veja eq. (2.4.7)). Portanto, todos os resultados de Szekeres são efetivamente obtidos como caso particular.

Como foi visto, os modelos de Szekeres são geodéticos e irrotacionais, isto é, $a^\mu = \omega^\mu = 0$, onde a^μ e ω^μ são os quadrivetores de aceleração e rotação respectivamente. Calcularemos agora todos os parâmetros cinemáticos associados a uma congruência de curvas tipo-tempo da solução generalizada. Usaremos as definições fornecidas pelas refs. (7,73,76) e os resultados do Apêndice C.

I. Escalar de Expansão:

$$\theta = V^\alpha_{||\alpha} = V^\alpha_{|\alpha} + \Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} V^\lambda \quad ; \quad \text{onde} \quad V^\lambda = \delta^\lambda_0 \quad (3.3.13)$$

logo,

$$\theta = \Gamma^\alpha_{0\alpha} = \frac{\dot{Q}}{Q} + 2 \frac{\dot{R}}{R} \quad . \quad (3.3.14)$$

II. Quadrivetor de Aceleração:

$$\dot{V}^\alpha = V^\alpha_{||\beta} V^\beta = (V^\alpha_{|\beta} + \Gamma^\alpha_{\lambda\beta} V^\lambda) V^\beta \quad , \quad (3.3.15)$$

substituindo $V^\beta = \delta^\beta_0$, obtemos

$$\dot{V}^\alpha = \Gamma^\alpha_{\lambda\beta} \delta^\lambda_0 \delta^\beta_0 = \Gamma^\alpha_{00} \implies \dot{V}^\alpha = 0 \quad . \quad (3.3.16)$$

III. Tensor de Distorção ("shear")

$$\sigma_{\alpha\beta} = V_{(\alpha||\beta)} - \frac{1}{3} (g_{\alpha\beta} - V_{\alpha} V_{\beta})^{\theta} - \dot{V}_{(\alpha} V_{\beta)} \quad , \quad (3.3.17)$$

como $\dot{V}^{\alpha} = 0$, temos

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (V_{\alpha||\beta} + V_{\beta||\alpha}) - \frac{1}{3} (g_{\alpha\beta} - V_{\alpha} V_{\beta})^{\theta}$$

mas,

$$V_{\alpha||\beta} = V_{\alpha|\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} V_{\lambda} \quad \text{e} \quad V_{\lambda} = \delta_{\lambda}^0 \quad .$$

Portanto,

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\Gamma_{\alpha\beta}^0 - \frac{1}{3} (g_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha}^0 \delta_{\beta}^0)^{\theta} \quad , \quad (3.3.18)$$

então,

$$\sigma_{11} = \frac{2}{3} \frac{Q}{R} (Q\dot{R} - R\dot{Q}) \quad (3.3.19)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = -\frac{1}{3} \frac{R}{Q} (Q\dot{R} - R\dot{Q}) \quad , \quad (3.3.20)$$

e

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} (\sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}) = \frac{(Q\dot{R} - R\dot{Q})^2}{3Q^2 R^2} \quad . \quad (3.3.21)$$

IV. Tensor de Rotação

$$\omega_{\alpha\beta} = V_{[\alpha||\beta]} - \dot{V}_{[\alpha} V_{\beta]} \quad (3.2.22)$$

$$\dot{V}_{\alpha} = 0 \quad \text{e} \quad V_{\lambda} = \delta_{\lambda}^0 \quad \implies$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (V_{\alpha|\beta} - V_{\beta|\alpha}) = 0 \quad , \quad (3.3.23)$$

logo,

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} = 0 \quad . \quad (3.3.24)$$

Como era previsto, devido a forma do elemento de linha e da pressão não ter gradiente espacial, nosso modelo conserva as características cinemáticas das soluções de Szekeres. Sua congruência de curvas tipo-tempo é irrotacional e geodética, além disso, o tensor de distorção ("shear") tem dois autovalores iguais.

III.4 - Campos de Killing

A importância dos campos de Killing num espaço-tempo, foi suficientemente discutida na Seção I.2. É precisamente a ausência de tais "vetores", ou seja, a inexistência de simetrias no tensor métrico, que tornam os modelos de Szekeres, o mais geral conjunto de soluções exatas das equações de Einstein conhecido até o presente ⁽³⁵⁾.

Investigaremos agora a existência de vetores de Killing em nossas soluções, cujo elemento de linha é dado ^(*) por:

$$ds^2 = dt^2 - Q^2 dx^2 - R^2 (dy^2 + dz^2) \quad , \quad (3.4.1)$$

onde

$$Q = At^{\frac{2}{3+c}} + \mu(x)t^{\frac{c-1}{c+3}} + \frac{(c+3)^2 \beta(x)}{(c+1)(c+5)} t^{\frac{2(2+c)}{3+c}} \quad c \neq 3 \quad (3.4.2)$$

$$Q = At^{\frac{1}{3}} + \mu(x)t^{\frac{1}{3}} \ln t + \frac{9}{8} \beta(x)t^{\frac{5}{3}} \quad , \quad \text{para } c = 3 \quad (3.4.3)$$

^(*) Em nossos modelos "parabólicos" $K=0$ e $h(y)=1$.

e

$$R(t) = t^{\frac{2}{3+c}} \quad . \quad (3.4.4)$$

As equações de Killing (1.2.18), podem ser escritas sob a forma,

$$g_{\mu\lambda} K^{\lambda}_{, \nu} + g_{\nu\lambda} K^{\lambda}_{, \mu} + g_{\mu\nu, \lambda} K^{\lambda} = 0 \quad , \quad (3.4.5)$$

onde, $K = K^{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}$, $\lambda = 0,1,2,3$ é um campo de Killing.

Substituindo os coeficientes métricos dados em (4.1), obtemos o seguinte sistema de dez equações diferenciais:

$$K^0_{,0} = 0 \quad (3.4.6)$$

$$K^0_{,1} - Q^2 K^1_{,0} = 0 \quad (3.4.7)$$

$$K^0_{,2} - R^2 K^2_{,0} = 0 \quad (3.4.8)$$

$$K^0_{,3} - R^2 K^3_{,0} = 0 \quad (3.4.9)$$

$$QK^1_{,1} + \dot{Q}K^0 + Q_{,1}K^1 + Q_{,2}K^2 + Q_{,3}K^3 = 0 \quad (3.4.10)$$

$$RK^2_{,2} + \dot{R}K^0 = 0 \quad (3.4.11)$$

$$RK^3_{,3} + \dot{R}K^0 = 0 \quad (3.4.12)$$

$$Q^2 K^1_{,2} + R^2 K^2_{,1} = 0 \quad (3.4.13)$$

$$Q^2 K^1_{,3} + R^2 K^3_{,1} = 0 \quad (3.4.14)$$

$$K^2_{,3} + K^3_{,2} = 0 \quad (3.4.15)$$

Integrando a eq. (3.4.6) temos:

$$K^0 = f(x^j) \quad , \quad j = 1, 2, 3 \quad . \quad (3.4.16)$$

Substituindo esse resultado nas eqs. (4.7), (4.8) e (4.9) obtemos:

$$\dot{K}^1 = \frac{f_{,1}}{Q^2}, \quad \dot{K}^2 = \frac{f_{,2}}{R^2}, \quad \dot{K}^3 = \frac{f_{,3}}{R^2}, \quad \text{onde } f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (3.4.17)$$

Derivando com relação ao tempo a eq. (3.4.11), e usando (4.16), podemos escrever

$$\dot{R}K^2_{,2} + RK^2_{,2} + \ddot{R}f = 0. \quad (3.4.18)$$

Derivando com relação a y a eq. (3.4.8) e reescrevendo a eq. (3.4.11) temos:

$$\dot{K}^2_{,2} = \frac{f_{,22}}{R^2} \quad \text{e} \quad K^2_{,2} = -\frac{\dot{R}}{R}f, \quad (3.4.19)$$

Substituindo este resultado em (4.18) chegamos a equação

$$f_{,22} + (R\ddot{R} - \dot{R}^2)f = 0. \quad (3.4.20)$$

Pela equação (3.4.4) para $R(t)$, obtemos que,

$$R\ddot{R} - \dot{R}^2 = \frac{2}{3+c} t^{-(1+c)/3+c}. \quad (3.4.20a)$$

Substituindo em (3.4.20) temos

$$f_{,22} + \frac{2}{3+c} t^{-(1+c)/3+c} f = 0. \quad (3.4.20)$$

Como a função $f = f(x^j)$, devemos ter $f = K^0 = 0 \quad \forall c$. Portanto se existe vetor de Killing ele deve ser da forma $K = K^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, 2, 3$. Além do mais, pelas eqs. (4.7), (4.8), (4.9), (4.11) e (4.12) devemos ter necessariamente

$$\dot{K}^1 = \dot{K}^2 = \dot{K}^3 = K^2_{,2} = K^3_{,3} = 0. \quad (3.4.22)$$

As funções $Q(t, x, y, z, c)$, nos dois casos, podem ser escritas sob a forma:

$$Q = AR(t) + \mu(x)a(t) + \alpha\beta(x)b(t) \quad , \quad (3.4.23)$$

onde $R(t)$, $a(t)$ e $b(t)$ são funções polinomiais linearmente independentes, $\alpha = \alpha(c)$ é uma constante numérica que depende do valor atribuído ao parâmetro c e $A(x,y,z)$ é a função definida pela eq. (3.2.38). Substituindo a forma geral acima na eq. (3.4.10), temos:

$$R(AK_{,1}^1 + A_{,1}K^1 + A_{,2}K^2 + A_{,3}K^3) + a(t)(\mu K_{,1}^1 + \mu_{,1}K^1) + b(t)(\beta K_{,1}^1 + \beta_{,1}K^1) = 0, \quad (3.4.24)$$

e pela independência linear das funções R , a e b temos

$$AK_{,1}^1 + A_{,1}K^1 + A_{,2}K^2 + A_{,3}K^3 = 0 \quad (3.4.25)$$

$$\mu K_{,1}^1 + \mu_{,1}K^1 = 0 \quad (3.4.26)$$

$$\beta K_{,1}^1 + \beta_{,1}K^1 = 0 \quad . \quad (3.4.27)$$

Como as funções $\mu(x)$ e $\beta(x)$ são arbitrárias, elas devem ser consideradas em princípio linearmente independentes. Neste caso, as equações acima implicam $K_1 = 0$. Substituindo este resultado nas eqs. (3.4.13) e (4.14), obtemos que

$$K_{,1}^2 = K_{,1}^3 = 0 \quad , \quad (3.4.28)$$

consequentemente os campos de Killing ficam reduzidos à forma geral

$$K = K^2 \frac{\partial}{\partial y} + K^3 \frac{\partial}{\partial z} \quad . \quad (3.4.29)$$

Em virtude das eqs. (3.4.22) e (4.28), as duas componentes são funções apenas das variáveis z e y respectivamente, e satisfa-

zem por (4.25) e (4.15) às seguintes equações:

$$A_{,2}K^2 + A_{,3}K^3 = 0 \quad (3.4.30)$$

e

$$K_{,3}^2 + K_{,2}^3 = 0 \quad (3.4.31)$$

Derivando a eq. (4.31) com relação às variáveis y e z obtemos

$$K_{,32}^2 + K_{,22}^3 = 0 \implies K_{,22}^3 = 0 \quad , \quad (3.4.32)$$

e

$$K_{,33}^2 + K_{,23}^3 = 0 \implies K_{,33}^2 = 0 \quad . \quad (3.4.33)$$

Portanto, as soluções gerais para as componentes K^2 e K^3 são da forma:

$$K^2 = mz + n \quad , \quad (3.4.34)$$

e

$$K^3 = \ell y + r \quad . \quad (3.4.35)$$

Substituindo estas soluções na eq. (3.4.31), obtemos a condição $\ell = -m$. Consequentemente as componentes K^2 e K^3 ficam restritas a

$$K^2 = mz + n \quad e \quad K^3 = -my + r \quad . \quad (3.4.36)$$

Tais componentes devem ainda satisfazer o vínculo representado pela eq. (3.4.30), que pode ser descrito pela relação

$$(2\beta y + \delta)K^2 + (2\beta z + \sigma)K^3 = 0 \quad , \quad (3.4.37)$$

onde $\beta(x)$, $\delta(x)$ e $\sigma(x)$ são funções arbitrárias na variável x oriundas da função $A(x,y,z)$. Substituindo o valor das componentes K^2 e K^3 dadas pela eq. (4.36) na equação acima, obtemos:

$$(2n\beta - m\sigma)y + (2r\beta + m\delta)z + n\delta + r\sigma = 0 \quad , \quad (3.4.38)$$

pela independência linear das coordenadas, necessariamente as funções $\beta(x)$, $\sigma(x)$ e $\delta(x)$ devem satisfazer às condições abaixo:

$$2n\beta - m\sigma = 0 \quad , \quad (3.4.39)$$

$$2r\beta + m\delta = 0 \quad , \quad (3.4.40)$$

$$n\delta + r\sigma = 0 \quad . \quad (3.4.41)$$

Como as funções β , σ e δ são arbitrárias, devemos em princípio, considerá-las linearmente independentes. Assim,

$$n = m = r = 0 \implies K^2 = K^3 = 0 \quad . \quad (3.4.42)$$

Demonstramos portanto, que as nossas soluções gerais, da mesma forma que a de Szekeres, não admitem nenhum campo vetorial de Killing. Observamos, no entanto, que se suprimirmos a condição de independência linear das funções arbitrárias, é fácil exibir um campo de Killing da geometria (3.4.1). Por exemplo, se fizermos $\sigma(x) = \delta(x)$ na eq. (3.4.41), teremos $r = -n$. Logo, o sistema de eqs. (3.4.39), (4.40) e (4.41), se reduz à seguinte equação:

$$2\beta n - m\sigma = 0 \quad , \quad (3.4.43)$$

que tem a solução $\beta(x) = \frac{m}{2n} \sigma(x)$. Nestas condições, um campo vetorial de Killing é dado por:

$$K = (mz+n) \frac{\partial}{\partial y} - (my+n) \frac{\partial}{\partial z} \quad . \quad (3.4.44)$$

III.5 - Tensor de Weyl e o Tensor de Cotton

Outro objeto geométrico bastante utilizado na caracterização de Espaços Riemannianos é o tensor que foi denominado por Weyl⁽²²⁾ de tensor conforme. Para um espaço riemanniano de

dimensão $N \geq 3$ este tensor ⁽¹⁾, é definido por:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{N-2} (g_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}R_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma}R_{\alpha\delta} + g_{\beta\delta}R_{\alpha\gamma}) \\ + \frac{R}{(N-1)(N-2)} (g_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}R_{\beta\gamma}) \quad . \quad (3.5.1)$$

Tal tensor tem as mesmas propriedades de simetria do tensor de Riemann, além disso, satisfaz à condição $C^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = 0$, o que reduz a dez o número máximo de suas componentes independentes, numa variedade quadridimensional.

Quando dois espaços riemannianos V_N e \bar{V}_N têm as suas componentes métricas obedecendo à relação

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \Omega^2(x^\mu)g_{\alpha\beta} \quad , \quad (3.5.2)$$

pode-se mostrar ⁽²²⁾ que a norma dos vetores de componentes dx^α , nos pontos de V_N e \bar{V}_N com as mesmas coordenadas são proporcionais e que os ângulos entre duas direções em pontos correspondentes são iguais. Esta correspondência entre V_N e \bar{V}_N é habitualmente chamada de conforme e, neste caso, o tensor de Weyl satisfaz ⁽²²⁾

$$\bar{C}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = C^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \quad , \quad (3.5.3)$$

ou seja, é invariante por transformação conforme.

Quando as métricas de V_N e \bar{V}_N estão relacionadas por

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \Omega^2(x)\eta_{\alpha\beta} \quad (3.5.4)$$

onde $\eta_{\alpha\beta}$ é uma matriz diagonal de componentes constantes, o espaço é dito conformalmente plano e mostra-se facilmente ⁽²²⁾ que:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad . \quad (3.5.5)$$

A condição acima é necessária e suficiente para um espaço rie-

manniano cuja dimensão é maior do que três, ser conformalmente plano. Para $N = 3$ com o sistema de coordenadas escolhido, de tal forma, que $g_{\alpha\beta}$ é diagonal, o tensor de Weyl é identicamente nulo, independente do comportamento das componentes métricas ⁽²²⁾. Sendo assim, não podemos dizer que o espaço é conformalmente plano. Existe porém, um tensor conformalmente invariante, que desempenha um papel análogo ao tensor de Weyl, para o caso tridimensional, denominado tensor de Cotton-York ^(22,60,75). Este tensor é definido por:

$$R_{ijk} = R_{ij||k}^* - R_{ik||j}^* - \frac{1}{4} h_{ij} R_{||k}^* + \frac{1}{4} h_{ik} R_{||j}^* \quad , \quad (3.5.6)$$

onde, $\overset{*}{R}_{ij}$ é o tensor de Ricci da geometria tridimensional h_{ij} e $\overset{*}{R}$ são respectivamente a métrica induzida nesta hipersuperfície e o escalar de curvatura ($\overset{*}{R} = h_{ij} \overset{*}{R}^{ij}$).

Uma geometria tridimensional é conformalmente plana se e somente se ⁽²²⁾

$$R_{ijk} = 0 \quad . \quad (3.5.7)$$

As identidades abaixo são demonstráveis a partir da equação (3.5.6), e reduzem a um máximo de cinco, o número de suas componentes independentes ^(60,75),

$$R^i_{ik} = h^{ij} R_{ijk} = 0 \quad , \quad (3.5.8)$$

$$R_{ijk} + R_{ikj} = 0 \quad , \quad (3.5.9)$$

$$R_{ijk} + R_{kij} + R_{jki} = 0 \quad . \quad (3.5.10)$$

Para um espaço riemanniano quadridimensional, fazendo $N = 4$, na eq. (3.5.1), obtemos:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2} (g_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}R_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma}R_{\alpha\delta} + g_{\beta\delta}R_{\alpha\gamma}) + \frac{1}{6} (g_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta}R_{\beta\gamma})R \quad , \quad (3.5.11)$$

e temos para a métrica (3.4.1), calculando com o auxílio das eqs. de Einstein e das fórmulas apresentadas no Apêndice C, as seguintes componentes independentes para o tensor de Weyl

$$C_{0101} = -Q\ddot{Q} - \frac{Q^2}{6} (\rho+3p) \quad , \quad (3.5.12)$$

$$C_{0202} = C_{0303} = -R\ddot{R} - \frac{Q^2}{6} (\rho+3p) \quad , \quad (3.5.13)$$

$$C_{1212} = -QQ_{,22} + R\dot{R}Q\dot{Q} - \frac{1}{3} Q^2 R^2_{,\rho} \quad , \quad (3.5.14)$$

$$C_{1313} = -QQ_{,33} + R\dot{R}Q\dot{Q} - \frac{1}{3} Q^2 R^2_{,\rho} \quad , \quad (3.5.15)$$

$$C_{2323} = R^2\dot{R}^2 - \frac{1}{3} R^4_{,\rho} \quad . \quad (3.5.16)$$

A existência de tais componentes garante que o espaço-tempo não é conformalmente plano.

Examinaremos agora utilizando o tensor de Weyl, sob que condições os modelos de Friedmann com seções euclidianas, são obtidos como casos particulares de nossas soluções. Sabemos que tal modelo é conformalmente plano, conseqüentemente devemos eliminar as componentes do tensor conforme. A eq. (3.5.16) determina que

$$R^2\dot{R}^2 - \frac{1}{3} R^4_{,\rho} = 0 \quad , \quad (3.5.17)$$

logo,

$$\rho = 3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \quad . \quad (3.5.18)$$

Neste caso, a eq. (3.3.3) implica que $\beta(x) = \mu(x) = 0$ e das eqs. (3.2.38), (2.46), (2.47) e (2.48) teremos:

$$A(x,y,z) = \delta(x)y + \sigma(x)z + \xi(x) \quad , \quad (3.5.19)$$

e

$$Q = AR \quad . \quad (3.5.20)$$

Substituindo as expressões de ρ e p , descritas pelas eqs. (3.5.18) e (3.2.11), nas outras componentes do tensor de Weyl, obtemos

$$C_{0101} = C_{0202} = C_{0303} = C_{1212} = C_{1313} = 0 \quad . \quad (3.5.21)$$

Portanto, com estas restrições o espaço-tempo se torna conformalmente plano. Além disso, usando a eq. (3.5.20), podemos escrever o elemento de linha (3.4.1), na forma

$$ds^2 = dt^2 - R^2 (A^2 dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad , \quad (3.5.22)$$

onde a função A obedece a equação (3.5.19).

As quantidades cinemáticas determinadas pelas eqs. (3.3.14), (3.16), (3.19), (3.20) e (3.24) se reduzem a:

$$\theta = 3 \frac{\dot{R}}{R} \quad , \quad \sigma_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} = \dot{V}_{\mu} = 0 \quad . \quad (3.5.23)$$

Substituindo a função $R(t)$, o elemento de linha (3.5.22) fica:

$$ds^2 = dt^2 - t^{\frac{4}{3+c}} (A^2 dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.5.24)$$

com $p = c \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2$ e $\rho = 3 \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2$, isto é

$$\frac{p}{\rho} = \frac{c}{3} \quad . \quad (3.5.25)$$

Logo, para $0 \leq c \leq 3$ temos $p = \lambda\rho$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Os únicos modelos cosmológicos com equação de estado e parâmetros cinemáticos dados respectivamente por (5.23) e (5.25),

e conformalmente planos, são os modelos de Friedmann com seções euclidianas ^(5,73). Tal resultado parece ser coerente com o teorema demonstrado por Alan Spero (veja Capítulo II), para os modelos de Szekeres.

Outra propriedade interessante da geometria (3.4.1) está relacionada com o tensor de Cotton de sua geometria tridimensional. Como o modelo é irrotacional e $V^\alpha = \delta^\alpha_0$, as hipersuperfícies $t = \text{cte}$, são ortogonais às linhas de universo do fluido. O tensor de Cotton determinado pela eq. (3.5.6) pode ser reescrito na forma

$$R_{ijk} = \overset{*}{R}_{ij|k} - \overset{*}{R}_{ik|j} + \Gamma_{ij}^r \overset{*}{R}_{rk} - \Gamma_{ik}^r \overset{*}{R}_{rj} - \frac{1}{4} h_{ij} \overset{*}{R}|_k + \frac{1}{4} h_{ik} \overset{*}{R}|_j \quad (3.5.26)$$

onde, para as hipersuperfícies ortogonais às linhas de universo do fluido temos

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu \quad (3.5.27)$$

ou seja,

$$h_{ij} = \text{diag}(g_{11}, g_{22}, g_{33}) \quad \text{e} \quad h_{00} = h_{0i} = 0 \quad \text{para } i=1,2,3.$$

As quantidades $\overset{*}{R}_{ij}$, Γ_{ij}^r e $\overset{*}{R}$, calculadas a partir da métrica h_{ij} , estão apresentadas no Apêndice C. Substituindo diretamente seus valores na eq. (3.5.26) obtemos facilmente

$$R_{ijk} = 0 \quad (3.5.28)$$

Este resultado garante que nosso espaço-tempo tem uma geometria tridimensional conformalmente plana. Como o modelo é irrotacional e geodético, vemos que o teorema demonstrado por Collins e Szafron para os modelos de Szekeres (Cap. II), é também satisfeito por nossas soluções.

III.6 - Evolução Temporal dos Modelos

As equações (3.4.2), (4.3) e (4.4) que definem os coeficientes métricos e as eqs. (3.3.7) e (3.8) da densidade de matéria, indicam que a evolução de nossos modelos dependem essencialmente das funções arbitrárias $\mu(x)$ e $\beta(x)$ e do parâmetro c . Porém, para qualquer valor de c , a evolução das superfícies bidimensionais $t = \text{constante}$, $x = \text{constante}$ é determinada pela função de escala dos modelos de Friedmann $R(t,c)$, mas a expansão na direção determinada pela coordenada x é diferente para vários valores de c . O estudo do comportamento assintótico nos limites $t \rightarrow 0^+$ e $t \rightarrow +\infty$, será feito considerando nas expressões dependentes do tempo, apenas a potência temporal dominante.

A pressão dos modelos em todos os casos é dada por:

$$p = c \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{4c}{(3+c)^2} t^{-2}, \quad c > 0 \quad (3.6.1)$$

para $c = 0$, são os modelos P.I de Szekeres, a evolução já tendo sido estudada. Em nosso caso, o parâmetro c divide os modelos em três classes distintas com relação às suas evoluções.

Classe I. $0 < c < 3$

1. $\mu(x) \neq 0$, $\beta(x) \neq 0$

Pelas eqs. (3.3.7), (6.1) e (4.2), obtemos:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \rho \cong \frac{12}{(3+c)^2} t^{-2}, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p}{\rho} \cong \frac{c}{3}$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} ds^2 \cong dt^2 - t^{\frac{2(c-1)}{c+3}} \mu^2(x) dx^2 - t^{\frac{4}{3+c}} (dy^2 + dz^2). \quad (3.6.2)$$

Logo, no início o modelo é homogêneo e anisotrópico, relembran-

do a forma da métrica de Kasner. Porém quando $t \rightarrow +\infty$ temos:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho \cong - \frac{4c(c+4)}{(3+c)^2} t^{-2} \quad , \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p}{\rho} \cong - \frac{1}{c+4} \quad , \quad (3.6.2a)$$

$$e \quad ds^2 \cong dt^2 - t^{\frac{4(2+c)}{3+c}} (\alpha^2(c)\beta^2(x)dx^2) - t^{\frac{4}{3+c}} (dy^2 + dz^2) \quad , \quad (3.6.3)$$

onde $\alpha(c) = (c+3)^2 / (c+1)(c+5)$.

Vemos então que no limite assintótico as condições de energia positiva definida não são obedecidas, o modelo constituindo um interessante exemplo, no qual, inicialmente as condições de energia são satisfeitas, mas no futuro isso deixa de ocorrer.

2. $\mu \neq 0 \quad , \quad \beta = 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \rho \cong - \frac{4c}{(3+c)^2} t^{-2} \quad , \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p}{\rho} \cong 1$$

$$e \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} ds^2 \cong dt^2 - t^{\frac{2(c-1)}{c+3}} \mu^2(x)dx^2 - t^{\frac{4}{3+c}} (dy^2 + dz^2) \quad . \quad (3.6.4)$$

Como no caso anterior, inicialmente o modelo é do "tipo Kasner", mas, com equação de estado independente do parâmetro c . Em $t \rightarrow +\infty$ obtemos:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho \cong \frac{12}{(3+c)^2} t^2 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p}{\rho} \cong \frac{c}{3} \quad (3.6.5)$$

$$e \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} ds^2 \cong dt^2 - t^{\frac{4}{3+c}} (A^2 dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad . \quad (3.6.6)$$

Além disso, calculando com o auxílio das eqs. (3.3.14) e (3.3.21), obtemos que o $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma^2 \cong 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta \cong 3 \frac{\dot{R}}{R}$. Por outro lado, a eq. (3.6.5) para o limite da densidade de matéria, em virtude da eq. (3.4.4) para $R(t)$, pode ser escrita como

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho \cong 3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \cong 0 \quad ,$$

de acordo com as eqs. (3.5.18) e (3.5.21). Logo, para t muito grande o modelo tende à homogeneidade e isotropia. Contudo, a equação de estado inicial não é reobtida, porque $c/3$ é menor que 1.

Classe II. $c = 3$

1. $\mu(x) \neq 0$, $\beta(x) \neq 0$

As eqs. (3.3.8), (6.1) e (4.3) determinam que:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \rho \cong \frac{1}{3} t^{-2} \quad , \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p}{\rho} \cong 1 \quad ,$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} ds^2 \cong dt^2 - t^{2/3} (A^2 dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad . \quad (3.6.7)$$

É fácil ver pelas eqs. (3.3.14) e (3.3.21) que novamente

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sigma^2 \cong 0 \quad e \quad \lim_{t \rightarrow 0} \theta \cong 3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) \quad .$$

Logo, pelos resultados da seção anterior, o modelo "nasce" também como Friedmann de equação de estado $p = \rho$. Mas, estudando o limite $t \rightarrow +\infty$, teremos para a densidade

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho \cong - \frac{7}{3} t^{-2} \quad (3.6.8)$$

que é uniforme e negativa, repetindo o caso 1 da Classe I.

2. $\mu \neq 0$, $\beta = 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \rho \cong \frac{1}{3} t^{-2} \quad , \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p}{\rho} \cong 1$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} ds^2 \cong dt^2 - t^{2/3} (\mu^2(x) \ln t dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad . \quad (3.6.9)$$

A mesma forma de métrica e equação de estado se conservando para $t \rightarrow +\infty$. Este modelo é inicialmente homogêneo e

extremamente anisotrópico, passando por uma fase intermediária inhomogênea e anisotrópica, e finalmente volta ao seu estado inicial.

Classe III. $c > 3$

1. $\mu(x) \neq 0$, $\beta(x) \neq 0$

Usando as eqs. (3.3.7), (6.1) e (4.2), teremos:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \rho \cong \frac{12}{(3+c)^2} t^{-2} \quad , \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p}{\rho} \cong \frac{c}{3} \quad ,$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} ds^2 \cong dt^2 - t^{\frac{4}{3+c}} (A^2 dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad . \quad (3.6.10)$$

Temos ainda pelas mesmas equações

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho \cong \frac{-4c(c+4)t^{-2}}{(3+c)^2} \quad , \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p}{\rho} \cong -(c+4)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} ds^2 \cong dt^2 - t^{\frac{4(2+c)}{3+c}} (\alpha^2(c)\beta(x)dx^2) - t^{\frac{4}{3+c}} (dy^2 + dz^2) \quad . \quad (3.6.11)$$

No início de sua evolução o modelo é homogêneo e isotrópico, terminando homogêneo e anisotrópico, mas sua densidade é negativa nos estágios finais.

2. $\mu(x) \neq 0$, $\beta(x) = 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \rho \cong \frac{12}{(3+c)^2} t^{-2} \quad , \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p}{\rho} \cong \frac{c}{3} \quad ,$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} ds^2 \cong dt^2 - t^{\frac{4}{3+c}} (A^2 dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad . \quad (4.6.12)$$

Para $t \rightarrow +\infty$ temos o seguinte comportamento

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho \cong \frac{4c}{(3+c)} t^{-2} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p}{\rho} \cong 1$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} ds^2 \cong dt^2 - t^{\frac{2(c-1)}{c+3}} \mu^2 dx^2 - t^{\frac{4}{3+c}} (dy^2 + dz^2) \quad . \quad (4.6.13)$$

O modelo é inicialmente homogêneo e isotrópico, evoluindo posteriormente para um modelo homogêneo e anisotrópico.

O caso $\mu = 0, \beta \neq 0$ para todas as classes, reproduz os resultados obtidos para $\mu \neq 0, \beta \neq 0$ e o caso $\mu = \beta = 0$ são as soluções exatas de Friedmann se $0 \leq c \leq 3$; se $c > 3$ temos uma solução exata com equação de estado não física da forma $p = \frac{c}{3} \rho$.

Todos os resultados acima mencionados, estão resumidos na Tabela 3.6.1. Vemos que existem diversas possibilidades para a evolução dos modelos. O caso mais interessante é o dois da Classe I, no qual ocorre uma variação da equação de estado nos limites assintóticos, através de um estado intermediário de extrema inhomogeneidade e anisotropia.

III.7 - Conclusão e Observações Finais

Vimos no Capítulo II, que Bonnor e Tomimura, demonstraram que a hipótese de Misner parece ser correta, isto é, um universo homogêneo e isotrópico pode evoluir de uma grande va-

Tabela 3.6.1 - Comportamento assintótico dos modelos.

Classe	Subcaso	Evolução	
		de	para
I.	1. $\mu \neq 0, \beta \neq 0$	homogêneo anisotrópico	homogêneo anisotrópico com densidade negativa
	2. $\mu \neq 0, \beta = 0$	homogêneo anisotrópico	homogêneo isotrópico
II.	1. $\mu \neq 0, \beta \neq 0$	homogêneo isotrópico	homogêneo anisotrópico com densidade negativa
	2. $\mu \neq 0, \beta = 0$	homogêneo anisotrópico	homogêneo anisotrópico
III.	1. $\mu \neq 0, \beta \neq 0$	homogêneo isotrópico	homogêneo anisotrópico de densidade negativa
	2. $\mu \neq 0, \beta = 0$	homogêneo isotrópico	homogêneo anisotrópico

riedade de estados iniciais. A generalização obtida neste trabalho para os modelos parabólicos de Szekeres, ratificam tais resultados para uma fonte de curvatura mais complexa. Além disso, três características importantes das métricas de Szekeres permanecem válidas em nossos modelos:

1. A inexistência de vetores de Killing na solução geral.
2. Quando a densidade é função somente do tempo, isto é, se $\mu(x) = \beta(x) = 0$, as soluções obtidas são os modelos de Friedmann, isto nos leva a pensar que o teorema de Collins e Szafron deve valer também para pressões que dependem apenas do tempo.
3. A geometria tridimensional é ainda conformalmente plana.

Por outro lado a evolução temporal tem aspectos bastante distintos dos apresentados pelos modelos de Szekeres. Se, por exemplo, tentarmos manter a função $\beta(x)$ diferente de zero para as três classes, o limite assintótico para $t \rightarrow \infty$, sempre terá uma densidade negativa, o que não ocorre para $c = 0$ (veja Tab.2.5.1). Outro fato interessante é que a existência da pressão permitiu, para o Caso I.2, uma variação da equação de estado considerando apenas os limites assintóticos. Tal situação obviamente não era permitida nas soluções de Szekeres. Este resultado é importante porque é muito conhecido e não devidamente explicado, que os modelos de Friedmann, de alguma forma, modificam a equação de estado ao longo de sua história. Para $t \rightarrow 0$ é habitualmente feito $p = \frac{1}{3} \rho$ e para $t \rightarrow +\infty$ é usual $p = 0$. Ora, esta variação parece não ser suficientemente aclarada no contexto das cosmologias homogêneas e a situação intermediária pode ser extremamente inhomogênea e anisotrópica como acontece em nossas soluções.

É importante salientar que o mesmo método de generalização poderia ter sido aplicado para os outros modelos da Classe II de Szekeres, bastaria utilizar o valor de K na eq.(3.2.14), adequado para cada caso. Esta é uma tentativa que pretendemos investigar no futuro próximo, até porque, os modelos de Friedmann aberto e fechado são obtidos como casos particulares. Além disso, outras fontes de curvatura ainda mais complexas podem ser utilizadas, tais como, campo eletromagnético, fluxo de calor ou mesmo processos viscosos. Tais tentativas são bastante promissoras, e seria muito interessante obter um modelo inhomogêneo que tende à homogeneidade e/ou isotropia à medida que o fluxo de calor evanesce. Tentativas desta natureza não são muito originais dentro da cosmologia teórica, mas observamos que ,

em geral, elas são levadas adiante, no contexto dos modelos que são inicialmente homogêneos e/ou isotrópicos (24,46,78,79,80) , talvez isto explique porque tais esforços não dão os resultados esperados.

APÊNDICE A

DECOMPOSIÇÃO DO TENSOR DE ENERGIA-MOMENTUM

Uma das questões mais fundamentais em Cosmologia consiste em procurar estabelecer as propriedades do fluido cósmico, que é responsável pela curvatura do espaço-tempo. Tais propriedades são generalizadas para um espaço-curvo a partir do seu conhecimento no contexto da Relatividade Especial ⁽¹⁾ e, em geral, são descritas por um tensor momentum-energia ($T_{\alpha\beta}$).

Demonstraremos aqui, entre outras, uma propriedade matemática que é satisfeita por um tensor momentum-energia arbitrário, que é a sua decomposição em partes irredutíveis.

Seja $V^\alpha(x)$ o campo de velocidades do fluido galáctico, ou a 4-velocidade dos observadores comoventes com os elementos de volume do fluido. Tais observadores, medem localmente a densidade ρ , a pressão p , o número bariônico n , a temperatura T , etc.

Se dx^α é um deslocamento arbitrário no espaço-tempo, a partir de um ponto p , podemos decompô-lo em uma componente paralela a V^α e outra ortogonal a V^α , da seguinte forma:

$$dx^\alpha = aV^\alpha + L^\alpha, \quad (\text{A.1})$$

onde $L^\alpha V_\alpha = 0$.

Contraíndo a equação acima com V_α e considerando que

V^α é normalizado, isto é, $V^\alpha V_\alpha = 1$, obtemos:

$$a = V_\alpha dx^\alpha \quad , \quad (A.2)$$

então,

$$L^\alpha = dx^\alpha - V_\lambda dx^\lambda V^\alpha \equiv (\delta^\alpha_\lambda - V^\alpha V_\lambda) dx^\lambda \quad , \quad (A.3)$$

ou

$$L^\alpha = h^\alpha_\lambda dx^\lambda \quad . \quad (A.4)$$

O tensor definido por

$$h_{\alpha\lambda} = g_{\alpha\lambda} - V_\alpha V_\lambda \quad , \quad (A.5)$$

é denominado *operador de projeção* sobre o hiperplano localmente ortogonal a V^α . Este tensor projeta objetos geométricos (tensores), no referencial localmente inercial do observador comovente.

É simples mostrar, usando (A.5), que $h_{\alpha\lambda}$ tem as seguintes propriedades que definem um projetor

$$(i) \quad h^\alpha_\lambda V^\lambda = 0 \quad , \quad (A.6)$$

$$(ii) \quad h_{\alpha\lambda} h^\lambda_\beta = h_{\alpha\beta} \quad . \quad (A.7)$$

Além disso, $h^\alpha_\alpha = 3$ e $h_{\alpha\lambda}$ é um tensor simétrico, isto é,

$$h_{\alpha\lambda} = g_{\alpha\lambda} - V_\alpha V_\lambda = h_{\lambda\alpha} \quad . \quad (A.8)$$

O elemento de comprimento $d\ell^2$, da projeção de um deslocamento dx^α no plano ortogonal a V^α é dado por:

$$d\ell^2 = g_{\alpha\beta} L^\alpha L^\beta = g_{\alpha\beta} h^\alpha_\mu h^\beta_\nu dx^\mu dx^\nu \equiv h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad , \quad (A.9)$$

portanto, $h_{\alpha\beta}$ pode ser identificado com a métrica do espaço de re pouso local do observador V^α (20,73,76).

Considere agora $T_{\alpha\beta}(x)$, um tensor de energia- momentum arbitrário, que pode ser do próprio fluido cujo campo de velocidades é $V^\alpha(x)$ ou de qualquer outro conteúdo material. Vamos separar $T_{\alpha\beta}$ em suas partes paralelas a V^α , e nas projetadas no hiperplano ortogonal a V^α , num dado ponto. A partir de $T_{\alpha\beta}$, por contração com V^β e $h_{\beta\lambda}$ podemos formar um 4-vetor e um tensor; $T_{\alpha\beta}V^\beta$ e $T_{\alpha\beta}h^\beta_\lambda$ respectivamente. Projetando o 4-vetor teremos

$$T_{\alpha\beta}V^\beta = AV_\alpha + Q_\alpha, \quad Q_\alpha V^\alpha = 0 \quad (\text{A.10})$$

ou ainda,

$$T_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta = AV_\alpha V^\alpha + Q_\alpha V^\alpha, \quad (\text{A.11})$$

logo,

$$A = T_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta. \quad (\text{A.12})$$

Contraindo a eq. (A.10) com h^α_ρ obtemos:

$$T_{\alpha\beta}V^\beta h^\alpha_\rho = AV_\alpha h^\alpha_\rho + Q_\alpha h^\alpha_\rho, \quad (\text{A.13})$$

portanto,

$$Q_\rho = T_{\alpha\beta}h^\alpha_\rho V^\beta. \quad (\text{A.14})$$

Para o tensor $T_{\alpha\beta}h^\alpha_\lambda$ as únicas projeções que não se anulam identicamente são:

$$T_{\alpha\beta}h^\alpha_\lambda V^\beta = Q_\lambda, \quad (\text{A.15})$$

e

$$T_{\alpha\beta}h^\alpha_\lambda h^\beta_\rho = S_{\lambda\rho} \text{ (tensor simétrico)}. \quad (\text{A.16})$$

O tensor $S_{\lambda\rho}$ pertencente ao subespaço ortogonal a V^α pode ser escrito da seguinte forma:

$$S_{\lambda\rho} = \pi_{\lambda\rho} + \frac{1}{3} S h_{\lambda\rho} \quad , \quad (\text{A.17})$$

onde

$$S = S_{\rho\lambda} h^{\rho\lambda} = T_{\alpha\beta} h^{\alpha}_{\rho} h^{\beta}_{\lambda} h^{\rho\lambda} = T_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} \quad . \quad (\text{A.18})$$

e

$$\pi_{\lambda\rho} = S_{\lambda\rho} - B h_{\lambda\rho} \quad , \quad (\text{A.19})$$

com $B = \frac{1}{3} S = \frac{1}{3} T_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta}$. Portanto, teremos

$$\pi_{\rho\lambda} = T_{\alpha\beta} h^{\alpha}_{\rho} h^{\beta}_{\lambda} - \frac{1}{3} T_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} h_{\rho\lambda} \quad . \quad (\text{A.20})$$

Qualquer outra projeção dos objetos (A.14) e (A.20), reproduz uma identidade ou são identicamente nulas. Assim, as partes projetadas (A, B, Q_{α} , $\pi_{\alpha\beta}$), são suficientes para decompor $T_{\alpha\beta}$ identicamente em suas partes paralelas e ortogonais a V^{α} , da seguinte forma:

$$T_{\alpha\beta} = A V_{\alpha} V_{\beta} + B h_{\alpha\beta} + Q_{\alpha} V_{\beta} + Q_{\beta} V_{\alpha} + \pi_{\alpha\beta} \quad (\text{A.21})$$

onde

$$A = T_{\lambda\rho} V^{\lambda} V^{\rho} \quad (\text{A.22})$$

$$B = \frac{1}{3} T_{\lambda\rho} h^{\lambda\rho} \quad (\text{A.23})$$

$$Q_{\alpha} = T_{\lambda\beta} h^{\beta}_{\alpha} V^{\lambda} \quad , \quad Q_{\alpha} V^{\alpha} = 0 \quad (\text{A.24})$$

$$\pi_{\alpha\beta} = h_{\alpha}^{\lambda} T_{\lambda\rho} h^{\rho}_{\beta} - \frac{1}{3} (T_{\rho\lambda} h^{\rho\lambda}) h_{\alpha\beta} \quad , \quad (\text{A.25})$$

$$\pi^{\alpha}_{\alpha} = 0 \quad , \quad \pi^{\alpha}_{\beta} V^{\beta} = 0 \quad . \quad (\text{A.26})$$

Considerando a expressão mais geral do tensor de energia-momento de um sistema material ou de campos na Relatividade Especial (1,20,73,76), podemos sempre interpretar as grandezas definidas nas eqs. (A.22) a (A.25), da seguinte forma:

A = densidade total de energia relativística da matéria, medida por V^α

$-B$ = é a pressão isotrópica

Q_α = é o fluxo de energia relativo a V^α (em geral representará fenômenos tipo difusão ou condução de calor)

$\pi_{\alpha\beta}$ = é a pressão anisotrópica da matéria (devido a processos viscosos).

Consequentemente, temos a forma geralmente utilizada

$$T_{\alpha\beta} = \rho V_\alpha V_\beta - p h_{\alpha\beta} + q_\alpha V_\beta + q_\beta V_\alpha + \pi_{\alpha\beta} \quad . \quad (A.27)$$

onde ρ é a densidade total de energia e p é a pressão escalar.

Tal decomposição de $T_{\alpha\beta}$ não se limita a um fluido especial mas pode ser realizada indistintamente para qualquer configuração, mesmo se estivermos tratando com energia associada a campos de radiação ⁽⁷⁶⁾.

Nos modelos cosmológicos tradicionais, o conteúdo material que gera curvatura foi escolhido para ser um fluido perfeito ⁽⁷³⁾, descrito por sua densidade ρ e pressão p , isto é, com $q_\alpha = \pi_{\alpha\beta} = 0$. A escolha de tal fonte provocou imediatamente a existência de singularidades nos modelos e a idéia de uma fase extraordinariamente densa do universo nos seus estágios iniciais. Para esta fase, a descrição por um fluido perfeito tem sido considerada irreal, e fluidos mais complexos com fluxo de calor ($q_\alpha \neq 0$) e pressão anisotrópica ($\pi_{\alpha\beta} \neq 0$), são bastante utilizados ^(46,78,79,80).

APÊNDICE B

EQUAÇÃO DE ESTADO

Na Teoria da Relatividade Geral o tensor momentum-energia da matéria (Apêndice A) é descrito por:

$$T_{\alpha\beta} = \rho V_{\alpha} V_{\beta} - p h_{\alpha\beta} + q_{\alpha} V_{\beta} + q_{\beta} V_{\alpha} + \pi_{\alpha\beta} , \quad (\text{B.1})$$

onde ρ é a densidade total de energia relativística medida por V^{α} , p é a pressão isotrópica, q_{α} o fluxo de calor e $\pi_{\alpha\beta}$ a pressão anisotrópica (para definição de tais quantidades veja Apêndice A).

As equações relativísticas para a conservação de energia e do momentum⁽¹⁾ são:

$$T^{\alpha\beta}{}_{||\beta} = 0 . \quad (\text{B.2})$$

Usando a decomposição (B.1) as equações acima podem ser escritas da forma ^(73,76),

$$\dot{\rho} + (\rho+p)\theta + \pi^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + q^{\alpha}{}_{||\alpha} + q^{\alpha}\dot{V}_{\alpha} = 0 , \quad (\text{B.3})$$

e

$$(\rho+p)\dot{V}_{\alpha} - p|_{\mu} h^{\mu}{}_{\alpha} + \dot{q}_{\mu} h^{\mu}{}_{\alpha} + \pi^{\mu\nu}{}_{||\nu} h^{\nu}{}_{\alpha} + (\omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{4}{3}\theta h_{\alpha\beta})V^{\beta} = 0 , \quad (\text{B.4})$$

onde o ponto significa derivada covariante ao longo das linhas de

universo das partículas^(*), $\sigma_{\alpha\beta}$, $\omega_{\alpha\beta}$, são tensores que definem os parâmetros cinemáticos de distorção e rotação^(7,73) respectivamente e $\theta = V^{\lambda}_{||\lambda}$ é o escalar de expansão.

Uma situação física é estabelecida quando algumas propriedades do tensor momentum-energia, ou equivalentemente, da fonte de curvatura são especificadas. Na aproximação de fluido isto reflete a existência de equações restringindo as quantidades⁽⁷³⁾ ρ , p , q_{α} ou $\pi_{\alpha\beta}$.

A densidade total de massa energia ρ é definida por

$$\rho = n(\mu_0 + \varepsilon) \quad , \quad (B.5)$$

onde n é a densidade de número de partículas, μ_0 a massa de repouso de cada partícula e ε a energia interna específica, que inclui a massa procedente da energia de movimento microscópico e a energia das interações no elemento de volume considerado^(11,72,73).

A energia interna específica ε está relacionada com a entropia específica e o número de partículas, através da primeira lei da Termodinâmica⁽⁷³⁾

$$Tds = d\varepsilon + pd \left(\frac{1}{n} \right) \quad . \quad (B.6)$$

Calculando a derivada covariante da equação acima, ao longo das linhas de matéria obtemos

$$T\dot{s} = \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{n}}{n^2} p \quad . \quad (B.7)$$

^(*) por exemplo, $\dot{\mu} \equiv \mu_{||\alpha} V^{\alpha}$ se $V^{\alpha} = \delta^{\alpha}_0 \implies \dot{\mu} = \mu|_0$.

Por outro lado, a densidade de número de partículas deve obedecer à equação de continuidade para a matéria,

$$(nV^\alpha)_{||\alpha} = 0 \quad , \quad (B.8)$$

ou ainda,

$$\dot{n} + n\theta = 0 \quad , \quad (B.9)$$

onde $\theta = V^\alpha_{||\alpha}$.

Logo, das eqs. (B.5), (B.7) e (B.9) temos

$$nT\dot{s} = \dot{\rho} + (\rho + p)\theta \quad . \quad (B.10)$$

Substituindo o resultado (B.10) na eq. (B.3), chegamos à relação

$$nT\dot{s} = -(\pi^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + q^\alpha_{||\alpha} + q^\alpha\dot{V}_\alpha) \quad , \quad (B.11)$$

que é a equação de conservação para a energia térmica ⁽⁷³⁾.

Para um fluido perfeito ($\pi_{\alpha\beta} = 0 = q_\alpha$), a eq. (B.11) garante que

$$\dot{s} = 0 \quad . \quad (B.12)$$

Assim, ao longo das linhas de universo do fluido, a entropia específica é constante. Portanto, se o fluido é fonte de curvatura de um modelo *espacialmente homogêneo* da *classificação* de *Bianchi*, s é constante sobre a órbita do grupo o que, juntamente com a eq. (B.12) implica

$$s = \text{constante} \quad ; \quad (B.13)$$

tais fluidos são denominados isentrópicos.

A eq. (B.6) também significa que para fluidos de uma componente (5,73)

$$\varepsilon = \varepsilon(n, s) \quad (\text{B.14})$$

e

$$p = p(n, s) . \quad (\text{B.15})$$

Logo, comparando as eqs. (B.14) e (B.5)

$$\rho = \rho(n, s) , \quad (\text{B.16})$$

e nas condições em que a eq. (B.13) é satisfeita, teremos

$$p = p(\rho) . \quad (\text{B.17})$$

A eq. (B.17) é denominada equação de estado para um fluido isentrópico e representa uma informação termodinâmica adicional que concretiza o sistema físico e torna as equações de campo passíveis de serem compatibilizadas (11,73).

De modo geral, em virtude da experiência com fluidos tradicionais, considera-se uma dependência linear de p com ρ

$$p = \lambda \rho , \quad 0 \leq \lambda \leq 1 . \quad (\text{B.18})$$

O valor $\lambda = 0$ corresponde à matéria incoerentemente distribuída ($p=0$), e o valor $\lambda = 1$ é dado pela condição de que a velocidade do som $V_s = (\partial p / \partial \rho)_s$ não pode exceder à velocidade da luz (refs. (76,81)).

Para um fluido perfeito a eq. (B.4) decorrente do princípio de conservação da energia, implica que

$$\dot{V}_\alpha = p|_\mu h^\mu_\alpha / \rho + p , \quad (\text{B.19})$$

isto é, o fluido será geodético se a pressão não tiver gradiente ortogonal às linhas de universo da matéria.

APÊNDICE C

ALGUMAS PROPRIEDADES DAS MÉTRICAS DO TIPO SZEKERES

Considere a forma geral para a Classe II do elemento de linha de Szekeres

$$ds^2 = dt^2 - Q^2 dx^2 - R^2(dy^2 + h^2 dz^2)$$

onde

$$Q = Q(x,y,z,t) \quad , \quad R = R(t) \quad \text{e} \quad h = h(y) \quad .$$

Na base de coordenadas (t,x,y,z) temos:

I. Tensor Métrico

$$g_{00} = 1 \quad , \quad g_{11} = -Q^2 \quad , \quad g_{22} = -R^2 \quad , \quad g_{33} = -R^2 h^2 \quad , \quad g_{0i} = 0$$
$$i = 1, 2, 3 \quad . \quad (C.1)$$

II. Símbolos de Cristoffel^(*)

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda\gamma|\beta} + g_{\lambda\beta|\gamma} - g_{\beta\gamma|\lambda})$$

$$\Gamma_{11}^0 = Q\dot{Q} \quad \Gamma_{22}^0 = R\dot{R} \quad \Gamma_{33}^0 = h^2 R\dot{R} \quad (C.2)$$

^(*) Ponto e vírgula significam derivada temporal e derivada espacial com relação à coordenada correspondente; $\dot{Q}_{,2} \equiv \partial^2 Q / \partial t \partial x$.

$$\Gamma_{01}^1 = Q^{-1}\dot{Q} \quad \Gamma_{11}^1 = Q^{-1}Q_{,1} \quad \Gamma_{12}^1 = Q^{-1}Q_{,2} \quad \Gamma_{13}^1 = Q^{-1}Q_{,3} \quad (C.3)$$

$$\Gamma_{02}^2 = R^{-1}\dot{R} \quad \Gamma_{11}^2 = -R^{-2}QQ_{,2} \quad \Gamma_{33}^2 = -hh_{,2} \quad (C.4)$$

$$\Gamma_{03}^3 = R^{-1}\dot{R} \quad \Gamma_{11}^3 = -R^{-2}h^{-2}QQ_{,3} \quad \Gamma_{23}^3 = h^{-1}h_{,2} \quad (C.5)$$

III. Componentes do Tensor de Riemann

$$R^\alpha_{\eta\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\eta|\gamma} - \Gamma^\alpha_{\eta\gamma|\beta} + \Gamma^\alpha_{\ell\gamma}\Gamma^\ell_{\beta\eta} - \Gamma^\alpha_{\ell\beta}\Gamma^\ell_{\gamma\eta}$$

$$R^0_{101} = -Q\ddot{Q} \quad R^1_{212} = Q^{-1}Q_{,22} - R\dot{R}Q^{-1}\dot{Q} \quad (C.6)$$

$$R^0_{112} = Q\dot{Q}_{,2} - R^{-1}\dot{R}QQ_{,2} \quad R^1_{213} = Q^{-1}Q_{,23} - Q^{-1}h^{-1}h_{,2}Q_{,3} \quad (C.7)$$

$$R^0_{113} = Q\dot{Q}_{,3} - R^{-1}\dot{R}QQ_{,3} \quad R^1_{313} = Q^{-1}Q_{,33} + hh_{,2}Q^{-1}Q_{,2} - h^2R\dot{R}Q^{-1}\dot{Q} \quad (C.8)$$

$$R^0_{202} = -R\ddot{R} \quad R^2_{323} = hh_{,22} - h^2\dot{R}^2 \quad (C.9)$$

$$R^0_{303} = -h^2R\ddot{R} \quad (C.10)$$

IV. Componentes do Tensor de Ricci

$$R_{\beta\delta} = g^{\alpha\gamma}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

ou ainda,

$$R_{\beta\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\alpha|\delta} - \Gamma^\alpha_{\beta\delta|\alpha} + \Gamma^\alpha_{\tau\delta}\Gamma^\tau_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha_{\tau\alpha}\Gamma^\tau_{\beta\delta} \quad (C.13)$$

$$R_{00} = Q^{-1}\ddot{Q} + 2R^{-1}\ddot{R} \quad (C.14)$$

$$R_{11} = -Q\ddot{Q} + R^{-2}QQ_{,22} - 2R^{-1}\dot{R}Q\dot{Q} + R^{-2}h^{-2}QQ_{,33} + h^{-1}h_{,2}R^{-2}QQ_{,2} \quad (C.15)$$

$$R_{22} = -R\ddot{R} + Q^{-1}Q_{,22} - R\dot{R}Q^{-1}\dot{Q} + h^{-1}h_{,22} - \dot{R}^2 \quad (C.16)$$

$$R_{33} = -h^2R\ddot{R} + Q^{-1}Q_{,33} - h^2R\dot{R}Q^{-1}\dot{Q} + hh_{,2}Q^{-1}Q_{,2} - h^2\dot{R}^2 + hh_{,22} \quad (C.17)$$

$$R_{01} = R_{12} = R_{13} = 0 \quad (C.18)$$

$$R_{02} = Q^{-1}\dot{Q}_{,2} - Q^{-1}Q_{,2}R^{-1}\dot{R} \quad (C.19)$$

$$R_{03} = Q^{-1}\dot{Q}_{,3} - Q^{-1}Q_{,3}R^{-1}\dot{R} \quad (C.20)$$

$$R_{23} = Q^{-1}Q_{,23} - Q^{-1}h^{-1}h_{,2}Q_{,3} \quad (C.21)$$

V. Escalar de Curvatura

$$\bar{R} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} .$$

$$\begin{aligned} \bar{R} = & 2Q^{-1}\ddot{Q} + 4R^{-1}\ddot{R} - 2R^{-2}Q^{-1}Q_{,22} + 4R^{-1}Q^{-1}\dot{R}\dot{Q} - 2R^{-2}h^{-2}Q^{-1}Q_{,33} \\ & - 2h^{-1}h_{,2}R^{-2}Q^{-1}Q_{,2} - 2h^{-1}h_{,22}R^{-2} + 2R^{-2}\dot{R}^2 \quad (C.22) \end{aligned}$$

No sistema de coordenadas considerado a métrica de Szekeres é diagonal, e como $V^\alpha = \delta^\alpha_0$, as hipersuperfícies ortogonais as linhas de universo do fluido são as seções $t = \text{cte}$, que determinam a geometria tridimensional. O elemento de linha da seção é dado por^(*)

(*)Vamos a partir de agora considerar $h(y)=1$, o que está coerente com nossas soluções.

$$ds^2 \Big|_{t=\text{const}} = -Q^2 dx^2 - R^2 (dy^2 + dz^2) \quad . \quad (\text{C.23})$$

Neste caso, $Q = Q(x,y,z)$ e $R = \text{constante}$, logo, para este elemento de linha temos:

VI. Tensor Métrico

$$h_{11} = -Q^2 \quad , \quad h_{22} = -R^2 \quad , \quad h_{33} = -R^2 \quad (\text{C.24})$$

Símbolos de Christoffel

$$\Gamma^1_{11} = Q^{-1}Q_{,1} \quad \Gamma^1_{12} = Q^{-1}Q_{,2} \quad \Gamma^1_{13} = Q^{-1}Q_{,3} \quad (\text{C.25})$$

$$\Gamma^2_{11} = -R^{-2}QQ_{,2} \quad \Gamma^3_{11} = -R^{-2}QQ_{,3} \quad . \quad (\text{C.26})$$

VII. Tensor de Ricci

$${}^*R_{11} = \frac{QQ_{,22} + QQ_{,33}}{R^2} \quad {}^*R_{22} = Q^{-1}Q_{,22} \quad {}^*R_{33} = Q^{-1}Q_{,33} \quad (\text{C.27})$$

$${}^*R_{12} = 0 \quad {}^*R_{13} = 0 \quad {}^*R_{23} = Q^{-1}Q_{,23} \quad (\text{C.28})$$

VIII. Escalar de Curvatura

$${}^*R = h^{ij} {}^*R_{ij} \quad , \quad (\text{C.29})$$

e

$${}^*R = - \frac{2(Q_{,22} + Q_{,33})}{QR^2} \quad . \quad (\text{C.30})$$

IX. Tensor de Cotton

$$R_{ijk} = \overset{*}{R}_{ij|k} - \overset{*}{R}_{ik|j} + \Gamma_{ij}^r \overset{*}{R}_{rk} - \Gamma_{ik}^r \overset{*}{R}_{rj} - \frac{1}{4} h_{ij} \overset{*}{R}|_k + \frac{1}{4} h_{ik} \overset{*}{R}|_j \quad . \quad (C.31)$$

Em nossas soluções, a função Q é da forma^(*)

$$Q = AR + T \quad ,$$

onde,

$$A(x,y,z) = \beta(x)(y^2 + z^2) + \sigma(x)y + \delta(x)z + \xi(x)$$

e

$$T = T(x,t) \quad .$$

Logo,

$$Q_{,22} = Q_{,33} = 2\beta R \quad ,$$

e pelas equações (C.27) e (C.28) temos

$$\overset{*}{R}_{11} = \frac{4\beta Q}{R} \quad \overset{*}{R}_{22} = \overset{*}{R}_{33} = \frac{2\beta R}{Q} \quad (C.32)$$

e

$$\overset{*}{R}_{12} = \overset{*}{R}_{13} = \overset{*}{R}_{23} = 0 \quad . \quad (C.33)$$

Substituindo os resultados das eqs. (C.32) e (C.33) juntamente com (C.24), na eq. (C.31) que define o tensor de Cotton, obtemos facilmente

$$R_{ijk} = 0 \quad . \quad (C.34)$$

Conseqüentemente, a geometria tridimensional é conformalmente plana!

(*)

Veja a equação (3.4.6).

BIBLIOGRAFIA

- (1) - Weinberg, S. - "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity", 1ª edição, John Wiley & Sons (1972).
- (2) - Einstein, A. - "Como Vejo o Mundo", 3ª edição (1981) Editora Nova Fronteira.
- (3) - Rebouças, M.J. - "Note on the Breakdown of Causality in the Gödel-Like Universe", CBPF-NF 006 (1982).
- (4) - Soares, I.D. - "Anisotropic Bianchi II Cosmological Models with Matter and Eletromagnetic Fields" - Rev. Bras. Fis, 8 (1978) 336.
- (5) - Anderson, J.L. - "Principles of Relativity Physics", 1ª edição, Academic Press (1967), Cap. 14.
- (6) - Yano, K. - "Theory of Lie Derivatives and its Applications", 1ª edição, North-Holland Publishing Co. (1955), Cap. 1.
- (7) - Assad, M.J.D. - "Modelos Cosmológicos Anisotrópicos Bianchi VIII/IX com Matéria e Campo Eletromagnético", Tese de Mestrado - CBPF - RJ (1980).
- (8) - Gilmore, R. - "Lie Groups, Lie Algebras and Some for their Applications", 1ª edição, John Wiley & Sons (1974).
- (9) - Cohn, P.M. - "Lie Groups", 1ª ed., Cambridge University Press (1957).
- (10) - Einsenhart, L.P. - "Continuous Group of Transformation" , 2ª edição, Dover Publications (1961).
- (11) - Ryan, M.P. e Shepley, L.C. - "Homogeneous Relativistic Cosmologies", Princeton University Press (1975).
- (12) - Gödel, K. - "An Example of a New Type of Cosmological Solution of Einstein's Field Equation of Gravitation", Rev. Mod. Phys., 21 (1949) 447.
- (13) - Ozvath, I., Schuking, E.L. - "The Finite Rotating Universes", Ann. Phys. 55 (1969) 166.

- (14) - MacCallum, M.A.H. - "Cosmological Models from a Geometrical Point of View", Cargèse Lectures in Physics, vol. 6, Gordon and Breach (1973).
- (15) - Bianchi, L. - "Sugli Spazi a Tre Dimensioni che Ammettono un Gruppo Continuo di Movimenti", Mem. Soc. It. della Sc. (dei XL), 3 (1897) 267.
- (16) - Estabrook, F.B., Wahliquist, H.D., Behr, C.G. - "Dyadic Analysis of Spatially Homogeneous World Models", J. Math. Phys., 9 (1968) 497.
- (17) - Taub, A.H. - "Empty Space-Times Admitting a Three Parameter Group of Motions", Ann.Mathem., 53 (1951) 473.
- (18) - Grishchuck, L. - "On the Criteria of Space Homogeneity in General Relativity Theory" - Bulletin de L'Académie Polonaise de Science, Ser. Sci. Math. Ast. - vol. XIX (1971) 12.
- (19) - MacCallum, M.A.H., Spero, A., Szafron, D.A. - "On the Geometry of the Zelmanov-Grishchuk Cosmological Homogeneity Criterion", Phys.Lett. 87A (1982) 157.
- (20) - Soares, I.D. - Notas de Aula do Curso de Cosmologia Relativista, CBPF (1980).
- (21) - Levelock, D., Rund, H. - "Tensors, Differential Forms and Variational Principles", 1ª ed., John Wiley & Sons, (1975).
- (22) - Eisenhart, L.P. - "Riemannian Geometry", 1ª ed., Princeton University Press (1925).
- (23) - Kramer, D., Stephani, H., MacCallum, M., Herlt, E. - "Exact Solutions of Einstein Equations", Veb Deustschen-Verlag der Wissenschaften 1ª edição (1980).
- (24) - Rebouças, M.J., Sales de Lima, J.A. - "Time-dependent Finite Rotating Universes", J.Math.Phys.11(1981) 2699.
- (25) - Einstein, A. - "Considerações Cosmológicas sobre a Teoria da Relatividade Geral", Coleção Textos Fundamentais da Física Moderna, Vol. I, Fundação Calouste Gulbenkian, pag. 234, 2ª ed. (1980).

- (26) - Walker, A.G. - "Completely Symmetric Spaces", J.Lond.Math. Soc. 19 (1944) 219.
- (27) - Gamow, G. - "The Evolution of the Universe", Nature 162, (1948) 680.
- (28) - Alpher, R.A., Herman, R.C. - "Remarks on the Evolution of the Expanding Universes", Phys.Rev. 75 (1949) 1089.
- (29) - Conklin, E.K., Bracewell, R.N. - "Isotropy of Cosmic Background Radiation at 1.0690 μ Hz", Phys. Rev. Lett., 18 (1967) 614.
- (30) - Peebles, P.J.E. - "Physical Cosmology", Princeton University Press, 1st ed. (1971).
- (31) - Ellis, G.F.R. - "Limits to Verification in Cosmology" , Ann. the New York Acad. Sci. 336 (1980) 130.
- (32) - Smoot, G.F. Gorstein, M.V. and Muller, R.A. - "Detection of Anisotropy in the Cosmic Blackbody Radiation" , Phys. Rev. Lett. 39 (1977) 898.
- (33) - Cheng, E.S., Saulson, P.R. et al. - "Large-Scale Anisotropy in the 2.7K Radiation", Astroph.J. 232 (1979)L139.
- (34) - Fabbri, R., Guidi, I. et al. - "Measurements of the Cosmic-Background Large-Scale Anisotropy in the Millimetric Region", Phys. Rev. Lett. 23 (1980) 1563.
- (35) - MacCallum, M.A.H. - "Anisotropics and Inhomogeneous Cosmologies", no livro "General Relativity: An Einstein Centenary Survey", ed. H.S. Hawking and W. Israel, 1st ed., Cambridge U.P. (1979).
- (36) - Boughn, S.P., Cheng, E.S. et al. - "Dipole and Quadrupole Anisotropy of the 2,7K Radiation", Astroph.J. 243, (1981) L113.
- (37) - Kobolov, V.M., Reinhardt, M. and Sazonov, V.N. - " A Test of the Isotropy of the Universe", Astroph. Space Sci. 10 (1971) 363.
- (38) - Reinhardt, M. - "Orientation of Galaxies and a Magnetic Urfield", Astroph. Space Sci., 10 (1971) 363.

- (39) - Fesenko, B.I. - "Organisation of the Position Angles of Galaxies Belonging to Systems", Soviet.Astron. 20(1976), 650.
- (40) - Ellis, G.F.R. - "The Homogeneity of the Universe", GRG 11 (1979) 281.
- (41) - Ellis, G.F.R., Maartens, R., Nel S. - "The Expansion of the Universe", Mon.Not.Ast. Soc. 184 (1978) 439.
- (42) - Wesson, P.S. - "Gravity, Particles and Astrophysics", D. Reidel, Dordrecht, Holland (1980).
- (43) - Wesson, P.S. - "How Homogeneous is the Universe ?", Astrop. Lett. 21 (1981) 97.
- (44) - Collins, C.B. - "Intrinsic Symmetries in General Relativity", Gen. Rel. and Gravit. 10 (1979) 925.
- (45) - Misner, C.W. - "The Isotropy of the Universe", Astrop.J. 151 (1968) 431.
- (46) - Misner, C.W. - "Mixmaster Universe", Phys.Rev. Lett. , 22 (1969) 1071.
- (47) - Collins, C.B., Hawking, S. - "Why is the Universe Isotropic", Astrop.J. 180 (1973) 317.
- (48) - Bonnor, W.B. - "Evolution of Inhomogeneous Cosmological Models", Mon.Not. R. Astr. Soc. 167 (1974) 1.
- (49) - Bonnor, W.B., Tomimura, N. - "Evolution of Szekeres's Cosmological Models", Mon. Not. R. Ast. Soc. 175 (1976) 85.
- (50) - Szekeres, P. - "A Class of Inhomogeneous Cosmological Models", Commun. Math. Phys. 41 (1975) 55.
- (51) - Wainwright, J., Goode, W.S. - "Some Exact Inhomogeneous Cosmologies with Equation of State $p=\gamma\mu$ ", Phys. Rev. D 22 (1980) 1096.
- (52) - Collins, C.B. - "Intrinsic Symmetries in General Relativity", GRG 10 (1979) 925.
- (53) - Collins, C.B., Szafron, D.A. - "A New Approach to Inhomogeneous Cosmologies: Intrinsic Symmetries.I". J. Mat.

- Phys. 20 (1979) 2347.
- (54) - Szafron, D.A., Collins, C.B. - "A New Approach to Inhomogeneous Cosmologies. Intrinsic Simmetries.II". J. Mat. Phys. 20 (1979) 2354.
- (55) - Collins, C.B., Szafron, D.A. - "A New Approach to Inhomogeneous Cosmologies: Intrinsic Simmetries. III", J. Mat. Phys. 20 (1979) 2362.
- (56) - Taub, A.H. - "Isentropic Hydrodynamics in Plane Symmetric Space-Times". Phys.Rev. 103 (1956) 454.
- (57) - Ellis, G.F.R. - "Dynamics of Pressure-Free Matter in General Relativity", J. Math.Phys. 8 (1967) 1171.
- (58) - Tolman, R.C. - "Effect of Inhomogeneity on Cosmological Models", Proc.Nac.Acad.Sci. USA 20 (1934) 169.
- (59) - Eardley, D., Liang, E., Sachs, R. - "Velocity-Dominated Singularities in Irrotational Dust Cosmologies", J. Math. Phys. 13 (1972) 99.
- (60) - Wainwright, J. - "A Classification Scheme for Non-Rotating Inhomogeneous Cosmologies", J. Phys. A: Math. Gen., 12 (1979) 2015.
- (61) - Eardley, D.M. - "Self-Similar Spacetimes: Geometries and Dynamics", Comm. Math. Phys. 37 (1974) 287.
- (62) - Carmeli, M., Charach, C., Malin, S. - "Survey of Cosmological Models with Gravitational Scalar and Electromagnetic Waves", Phys. Repp. 2 (1981) 76.
- (63) - Tomimura, N. - "Certain Inhomogeneous Cosmological Models", Tese de Doutoramento, Queen College, Londres(1976).
- (64) - Bonnor, W.B., Sulaiman, A.H., Tomimura, N. - "Szekeres's Space-Times Have no Killing Vectors", Gen. Rel. Grav. 8, (1977) 549.
- (65) - Bondi, H. - "Spherically Symmetrical Models in General Relativity", Mon.Not.Roy.Ast.Soc. 107 (1947) 410.
- (66) - Kantowski, R., Sachs, R.K. - "Some Spatially Homogeneous Anisotropic Relativistic Cosmological Models", J. Math.Phys. 7 (1966) 443.

- (67) - Spero, A. - "Spatial Conformal Flatness in Homogeneous and Inhomogeneous Cosmologies", J. Math.Phys. 19(1978)1536.
- (68) - Wainwright, J. - "Characterisation of the Szekeres Inhomogeneous Cosmologies as Algebraically Special Spacetimes", J. Math. Phys. 18 (1977) 672.
- (69) - Bonnor, W.B. - "Do Freely Falling Bodies Radiate ?" Nature 263 (1976) 301.
- (70) - Bonnor, W.B. - "Non-Radiative Solutions of Einstein Equations for Dust", Comm.Math.Phys. 51 (1976) 191.
- (71) - Brill, D.R. - "Electromagnetic Fields in Homogeneous, Non Isotropic Universe", Phys. Rev. B 133 (1964) 845.
- (72) - Landau, L., Lifschitz, E. - "Teoria do Campo" - Editora MIR-Moscow, 1ª edição (1980).
- (73) - Ellis, G.F.R. - "Relativistic Cosmology", Cargèse Lectures in Physics, vol. 6, Gordon and Breach (1973).
- (74) - Spiegel, M.R. - "Mathematical Handbook", Schaum Outline Series, McGraw-Hill, 1ª edição (1968).
- (75) - York, J.W. - "Gravitational Degrees of Freedom and the Initial Value Problem", Phys.Rev. Lett. 26(1971)1656.
- (76) - Novello, M. - "Cosmologia Relativista", II Escola de Cosmologia e Gravitação do CBPF, editado por Novello (1980).
- (77) - Dingle, H. - "Values of T_{μ}^{ν} and the Christoffel Symbols for a Line Element of Considerable Generality", Proc. Nac. Am. Soc. 9(1933) 559.
- (78) - Novello, M., Rebouças, M.J. - "The Stability of a Rotating Universe", Astroph. J. 225 (1978) 719.
- (79) - Rebouças, M.J. - "Modelos do Universo com Rotação Dependente do Tempo e Violação da Causalidade na Cosmologia", Tese de Doutorado, CBPF-RJ (1981).
- (80) - Bergmann, O. - "A Cosmological Solution of the Einstein Equations with Heat Flow", Phys.Lett. 82A (1981) 383.
- (81) - Zel'dovich, Ya. B. - "The Equation of State Ultrahigh Den

sities and its Relativistic Limitations", Sov. Phys.JETP 14 (1962) 1143.

- (82) - Fabbri, R., Guidi, I., Natale, V. - "Multiple Anisotropy of the Cosmic Background Radiation in Density Wave Models", Astroph.J. 257 (1982) 17.
- (83) - Roth, G.D. - "Astronomy a Handbook", Springer-Verlag (New York), 1ª edição (1975).
- (84) - Wainwright, J., "A Class of Inhomogeneous Perfect Fluid Cosmologies", J. Math. Phys. 18, 1668 (1977).
- (85) - Pollack, N.D. and Caderni, N., "On the Introduction of Isotropic Blackbody Radiation Into the Inhomogeneous Cosmological Models of Szekeres" - Mon.Not.Roy.Ast. Soc. 190, 509 (1980).