MONOPOLOS GRAVITACIONAIS

TESE DE MESTRADO

JOSÉ MARTINS SALIM

PROF. ORIENTADOR: MARIO NOVELLO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
RIO DE JANEIRO
1976

A meus pais

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Mario Novello, pela sua orientação.

Aos Professores Ivano Damião Soares e Carlos Augusto Pinto Galvão, a quem devo parte de minha formação científica.

A meus pais.

A Regina.

A Sonia, pelo trabalho de datilografia.

Ao CNPq pela bolsa de estudos concedida.

S U M Á R I O

CONVENÇÕES i
RESUMO ii
INTRODUÇÃO iii
EQUAÇÕES DE EINSTEIN QUASI-MAXWELLIANAS 1
O TENSOR DE WEYL 13
MOVIMENTO EM UM CAMPO GRAVITACIONAL 18
O GRUPO DUAL 31
EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA OS MONOPOLOS MAGNÉTICOS 37
TRANSFORMAÇÕES CONFORME 43
SOLUÇÃO APROXIMADA DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DOS M.M. .. 46
CONCLUSÃO 52
APÊNDICE 55
REFERÊNCIAS ....

CONVENÇÕES

Índices gregos variam de 0 a 3

Índices latinos variam de 1 a 3

Assinatura da métrica: (+ ---)

Operador de derivação covariante:

sendo $F^{\alpha}(x)$ um campo vetorial, a sua derivada covariada será indistintamente representada por

$$\nabla_{\mu} F^{\alpha}(x) \equiv F^{\alpha}{}_{||\mu}(x) = F^{\alpha}{}_{|\mu}(x) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} F^{\beta}(x)$$

onde

$$F^{\alpha}{}_{|\mu}(x) \equiv \frac{\partial F^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} .$$

Antissimetrização de tensores:

$$A_{[\mu\nu]} \equiv \frac{1}{2!} (A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})$$

Simetrização de tensores:

$$A_{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2!} (A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$$

Tensor de Riemann:

$$F_{\lambda||\mu||\mu||} - F_{\lambda||\nu||\mu||} = R_{\lambda\alpha\mu\nu} F^{\alpha}$$

Tensor de Ricci: $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$

RESUMO

Fazemos uma breve revisão do problema de Cauchy para as E.E. e mostramos que estas são equivalentes, sob condições iniciais apropriadas, a um outro conjunto de equações conhecidas por E.E. Quasi-Maxwellianas. Analisamos extensivamente movimento em uma variedade-espaço-tempo e propomos a existência de uma nova classe de partículas MONOPOLOS-H. A aceleração relativa de partículas vizinhas dessa nova classe é determinada pelo dual do Tensor de Riemann. Consequentemente, o princípio de equivalência não é satisfeito por essas partículas. Nesta teoria, a transformação conforme possui um significado físico bem determinado; por meio desta, os monopolos H são mapeados em partículas de movimento geodésico. Mostramos que as equações de Einstein no vazio admitem um grupo de simetria adicional e obtemos uma solução aproximada para as equações de movimento dos monopolos-H.

INTRODUÇÃO

A moderna Teoria da Gravitação, como é atualmente conhecida a Teoria Geral da Relatividade, não recebeu até agora uma confirmação experimental que permitisse uma formulação correta e unívoca de vários problemas ainda em aberto. Particularmente no caso das ondas gravitacionais, desenvolveram-se várias linhas de pesquisa baseadas em diferentes maneiras de definir o problema.

Na década de 50, Lichnerowicz (1) procurou tratar o problema baseado na analogia que este possui com a eletrodinâmica. O referido autor desenvolveu um formalismo que evidencia a semelhança entre as duas teorias. Posteriormente, Ehlers (28) obteve a decomposição das identidades de Bianchi em função da parte elétrica e magnética do tensor de Weyl. Esse resultado, juntamente com o obtido por Lichnerowicz, permitiu formular um conjunto de equações que, sob condições iniciais apropriadas, são equivalentes às E.E. Na literatura, essas equações são conhecidas por equações de Einstein Quasi- Maxwellianas, devido à semelhança formal que estas possuem com as equações da eletrodinâmica. Vários autores investigaram as propriedades dessas equações no estudo de ondas gravitacionais (8,9), análise de modêlos cosmológicos (27) e evolução de perturbação nesses modêlos (10).

Recentemente, esse formalismo foi utilizado para generalizar a Teoria de Einstein introduzindo estados de tensões no no espaço tempo (11); para estudar as propriedades de uma nova classe de partículas não minimalmente acopladas à gravitação (20); para analis-r movimento acelerado em uma variedade riemanniana (3) e a evolução dos auto-valores de Petrov (12)!

Neste trabalho obtemos obtemos as equações de Einstein Quasi-Maxwellianas e mostramos que estas, no caso do vazio, se reduzem, sob condições iniciais apropriadas, à divergência nula do tensor de Weyl. A seguir, analisamos uma congruência de curvas que pode ser associada a uma classe de observadores. Esta define naturalmente uma decomposição do tensor de Weyl em duas partes: a parte elétrica ($E_{\alpha\beta}$) e a parte magnética ($H_{\alpha\beta}$) (18). Utilizando essa definição, podemos projetar as equações de Einstein Quasi-Maxwellianas (21), obtendo equações análogas às de Maxwell para os tensores $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$. Essa formulação permite verificar, no vazio, a existência de um grupo de transformações, denominado grupo dual, que deixa invariante essas equações. Essa simetria adicional sugere fortemente a existência de uma nova classe de partículas (monopolos magnéticos gravitacionais), acopladas não minimalmente à gravitação e que não satisfazem ao princípio da equivalência.

Fazemos aqui uma análise do movimento em uma variedade espaço-tempo. As propriedades deste movimento, no caso da nova classe de partículas, são caracterizadas pela aceleração relativa destas e descritas por uma equação que é uma modificação da equação de Jacobi (29). Analisamos as propriedades da teoria sob uma transformação conforme e verificamos que esta pos sui um significado físico bem determinado. Finalmente, obtemos uma solução aproximada para as equações de movimento das novas partículas, que nos permite verificar a existência de propriedades qualitativas novas no movimento destas.

EQUAÇÕES DE EINSTEIN QUASI-MAXWELLIANAS

Vamos primeiramente estabelecer o problema de Cauchy para as equações de Einstein (E.E.); a seguir, mostraremos que sob condições iniciais apropriadas, as E.E. são equivalentes a um conjunto de equações envolvendo o tensor de curvatura, e conhecidas como equações de Einstein Quasi-Maxwellianas.

O problema de Cauchy para as E.E. pode ser enunciado da seguinte forma (1):

Dado o tensor métrico $G_{\mu\nu}(x)$ e sua derivada $G_{\mu\nu|0}(x)$ sobre uma hipersuperfície S, espacialmente orientada, determinar nas vizinhanças desta o tensor métrico $G_{\mu\nu}(x)$ que satisfaça às equações de Einstein.

Consideremos o caso do vazio. A hipersuperfície S pode ser representada em um sistema de coordenadas apropriadas pela equação:

$$1.1 \quad x^0(x) = 0$$

Segue dessa equação que, nesse particular sistema de coordenadas, vale a desigualdade $g^{00} > 0$. Com efeito, sendo a hipersuperfície espacialmente orientada, o campo de vetores $\Phi_{|\mu}$ normal a essa superfície deve satisfazer à desigualdade

$$1.2 \quad \phi_{|\mu} \ \phi_{|\nu} \ g^{\mu\nu} > 0$$

No sistema especial de coordenadas a que nos referimos anteriormente, o campo de vetores tem por componentes

$$\Phi_{|\mu} = \frac{\partial x^0}{\partial x^\mu} = \delta^0{}_\mu .$$

Logo, podemos escrever 1.2 como

$$g^{00} > 0$$

O tensor de Ricci, construido com o tensor métrico $g_{\mu\nu(x)}$ e suas derivadas de primeira e segunda ordem, pode ser escrito como:

$$1.3 \quad R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (g_{\alpha\sigma|\beta|\rho} + g_{\beta\rho|\alpha|\sigma} - g_{\alpha\beta|\rho|\sigma} - g_{\rho\sigma|\alpha|\beta}) + $$
$$+ K_{\alpha\beta},$$

onde $K_{\alpha\beta}$ depende apenas de $g_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu|\rho}$.

Os dados iniciais sobre S são $g_{\mu\nu}(x)$ e $g_{\mu\nu|0}(x)$, supondo que essas funções sejam pelo menos de classe C^2; poderemos determinar sobre S diretamente as funções $g_{\mu\nu|i}$, $g_{\mu\nu|i|j|}$ e $g_{\mu\nu|0|i}$. Na ausência de matéria e campo eletromagnético, as equações de Einstein se escrevem como:

$$1.4 \quad R_{\mu\nu} = 0 \quad ;$$

logo, no sistema de equações que temos a resolver, as incógnitas são $g_{\mu\nu|0|0}$.

Usando o tensor de Ricci na forma 1.3, obtemos para a eq. 1.4, as seguintes expressões:

$$1\text{-}5.1 \qquad R_{ij} \equiv -\frac{1}{2} g^{00} g_{ij|0|0} + F_{ij} = 0$$

$$1\text{-}5.2 \qquad R_{i0} \equiv \frac{1}{2} g^{0j} g_{ij|0|0} + \phi_{i0} = 0$$

$$1\text{-}5.3 \qquad R_{00} \equiv -\frac{1}{2} g^{ij} g_{ij|0|0} + \Psi_{00} = 0$$

Nas expressões acima, separamos as incógnitas $g_{\mu\nu|0|0}$. As funções F_{ij}, ϕ_{i0}, Ψ_{00} são conhecidas; dependem das derivadas espaciais de primeira e segunda ordem de $g_{\mu\nu}$ e das derivadas espaciais de primeira ordem de $g_{\mu\nu|0}$, todas elas calculadas sobre a hipersuperfície S e podendo, portanto, serem obtidas dos dados de Cauchy.

A hipótese inicial $g^{00} \neq 0$ garante que as derivadas $g_{ij|0|0}$ podem ser determinadas pelas equações 1.5.

Devemos salientar que as derivadas $g_{\mu 0|0}$ não são necessárias na integração das equações 1.5, existindo assim, uma indeterminação na solução $g_{\mu\nu}(x)$ a ser obtida. Esse fato é devido às equações de Einstein serem equações tensoriais: se $g^{(1)}_{\mu\nu}(x)$ é solução das E.E., $g^{(2)}_{\mu\nu}(x)$, obtido por uma transformação de coordenadas do tipo $\bar{x}^{\mu} = \bar{x}^{\mu}(x)$, também o é. Essa indeterminação pode ser eliminada da seguinte forma; primeiramente fazemos uma mudança de coordenadas:

$$1.6 \qquad \bar{x}^{\lambda} = x^{\lambda} + (x^{0})^{3}\, \phi^{\lambda}(x^{i}) ,$$

onde $\phi^{\lambda}(x^{i})$ é uma função arbitrária a ser determinada. Essa transformação não altera a equação para S e logo, a condição $\bar{g}^{00} > 0$ é mantida. Como podemos verificar por cálculo direto, sobre S as seguintes relações são satisfeitas:

$$\bar{g}_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu}$$

$$\bar{g}_{\lambda\mu|0} = g_{\lambda\mu|0}$$

$$1.7 \qquad \bar{g}_{\lambda\mu|0|0} = \frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial \bar{x}^{\beta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \bar{x}^{\rho}}{\partial x^{0}} \frac{\partial^{2} \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^{\rho} \partial \bar{x}^{0}} + \frac{\partial^{3} \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{0} \partial x^{0} \partial x^{\lambda}} \frac{\partial \bar{x}^{\beta}}{\partial x^{\mu}} \bar{g}_{\alpha\beta} + \\ + \frac{\partial^{3} \bar{x}^{\beta}}{\partial x^{0} \partial x^{0} \partial x^{\mu}} \frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \bar{g}_{\alpha\beta} + A_{\lambda\mu}$$

O termo $A_{\lambda\mu}$ possui apenas derivadas primeiras de $\frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$. Logo, sobre S

$$g_{ij|0|0} = \frac{\partial^{2} \bar{g}_{ij}}{\partial \bar{x}^{0} \partial x^{0}}$$

$$1.7 \qquad g_{\lambda 0|0|0} = \frac{\partial \bar{g}_{\lambda 0}}{\partial \bar{x}^0 \partial \bar{x}^0} + \phi_\lambda + \delta^0 \lambda \, \phi_0$$

As funções ϕ_λ, e portanto, a transformação de coordenadas, podem ser determinadas impondo-se que:

$$g_{\lambda 0|0|0} = 0$$

Desta maneira, fica eliminada a indeterminação introduzida na solução pelas funções $g_{\lambda 0}$. Notemos, entretanto, que não há mais liberdade na escolha do sistema de coordenadas. Essa liberdade é responsável, em certos casos, pelo aparecimento de singularidades na solução $g_{\mu\nu}(x)$. Estas são desprovidas de sentido físico e podem ser eliminadas por uma transformação de coordenadas. Existem outras maneiras de eliminarmos a indeterminação na solução $g_{\mu\nu}(x)$, introduzida pela arbitrariedade na escolha das funções $g_{\mu 0|0|0}$; nós, porém, não nos deteremos nesse ponto. (2)

Verifica-se, utilizando 1.5, que as expressões abaixo não dependem de $g_{ij|0|0}$ e são determinadas pelos dados iniciais sobre a hipersuperfície S.

$$1.9 \ — \ g^{0j} \, R_{ij} + g^{00} \, R_{i0}$$

$$1.10 \ — \ g^{ij} \, R_{ij} - g^{00} \, R_{00}$$

As expressões 1.9 e 1.10 podem ser colocados em uma forma mais conveniente com a ajuda do tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, definido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (R + \lambda) g_{\mu\nu} ,$$

onde λ é a constante cosmológica. Neste trabalho, faremos $\lambda = 0$. Utilizando o tensor $G_{\mu\nu}$, as expressões 1.9 e 1.10 podem ser escritas compactamente como G^0_μ.

Pela análise das equações 1.5 e das expressões 1.9, 1.10, 1.11, verifica-se que dados $R_{ij}(x)$ e G^0_μ como $g^{00} \neq 0$, podemos calcular diretamente $R_{0\alpha}$ e assim obtermos a solução das equações de Einstein.

Devido à equação 1.4, G^0_α deve satisfazer à equação

1.12 $\quad G^0_\alpha = 0$

Assim, o sistema de equações

1.13-1 $\quad R_{ij} = 0$

1.13-2 $\quad G^0_\alpha = 0$

é equivalente ao sistema 1.5.

Voltamos a salientar que G^0_α é determinado conhecendo-se os dados de Cauchy; por esta razão, esses dados não podem ser arbitrários e devem satisfazer às 4 equações de vínculo 1.12.

A seguir analisaremos como as equações de vínculo para os dados de Cauchy são propagadas na vizinhança da hipersuperfície S.

Primeiramente, obteremos uma identidade satisfeita pelo tensor de Einstein.

O tensor de curvatura de Riemann satisfaz a identidade de Bianchi:

$$1.14 \quad R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma||\lambda} + R^{\mu\nu}{}_{\lambda\rho||\sigma} + R^{\mu\nu}{}_{\sigma\lambda||\rho} = 0$$

Contraindo nessa identidade os índices μ e ρ obtemos:

$$1.15 \quad R^{\nu}{}_{\sigma||\lambda} - R^{\nu}{}_{\lambda||\sigma} + R^{\mu\nu}{}_{\sigma\lambda||\mu} = 0$$

Contraindo agora os índices ν e σ e usando a definição do tensor $G_{\mu\nu}$ teremos

$$1.16 \quad G^{\mu}{}_{\nu||\mu} = 0$$

Por hipótese, temos que $R_{ij} = 0$; logo, são válidas as seguintes expressões:

$$1.17 \quad \begin{aligned} G^{i}{}_{j} &= g^{i0} R_{0j} - \frac{1}{2} \delta^{i}{}_{j} (g^{00} R_{00} + 2g^{0i} R_{0i}) \\ G^{i}{}_{0} &= g^{i\rho} R_{\rho 0} \\ G^{0}{}_{i} &= g^{00} R_{0i} \\ G^{0}{}_{0} &= \frac{1}{2} g^{00} R_{00} \end{aligned}$$

A equação 1.16 pode ser reescrita como:

$$1.18 \quad G^{0}{}_{\lambda|0} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda 0} G^{0}{}_{\alpha} + \Gamma^{0}_{\alpha 0} G^{\alpha}_{\lambda} = G^{i}{}_{\lambda|i} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda i} G^{i}_{\alpha} + \Gamma^{i}_{i\alpha} G^{\alpha}_{\lambda}$$

Utilizando as expressões 1.17, podemos expressar $G^{i}{}_{j}$ e $G^{i}{}_{0}$ como:

$$1.19 \quad \begin{aligned} G^i_{\ j} &= \frac{g^{i0}}{g^{00}} G^0_{\ j} - \frac{1}{2}\delta^i_{\ j} \left(2\, G^0_{\ 0} + 2\, g^{0i} \frac{G^0_{\ 0}}{g^{00}}\right) \\ G^i_{\ 0} &= g^{ij} R_{j0} + g^{i0} R_{00} = \frac{g^{ij}}{g^{00}} G^0_{\ j} + 2\, g^{i0} \frac{G^0_{\ 0}}{g^{00}} \end{aligned}$$

Assim, 1.18 pode ser posta sob a forma:

$$1.20 \quad g^{00} \; G^0_{\ \lambda|0} = A^{i\ \rho}_{\ \lambda} \, G^0_{\ \rho|i} + B^{\rho}_{\ \lambda} \, G^0_{\ \rho} \; ,$$

onde $A^{i\ \rho}_{\ \lambda}$ e $B^{\rho}_{\ \lambda}$ são funções conhecidas e contínuas. Para $R_{ij} = 0$, $G^0_{\ \lambda} = 0$ será satisfeita em S e em suas vizinhanças, pois $G^0_{\ \lambda}$ é solução de um sistema de quatro equações diferenciais homogêneas, a derivadas parciais, que têm solução única.

O problema de integrar as equações de Einstein no vazio ficou dividido, então, em duas partes e pode ser enunciado como se segue:

1º) Problema das condições iniciais, que consiste em encontrar dados de Cauchy que satisfaçam sobre S as equações $G^0_{\ \lambda} = 0$;

2º) Problema da evolução, que consiste em integrar o sistema de equações $R_{ij}=0$, tendo como dados iniciais os dados de Cauchy que satisfaçam o primeiro problema.

O problema da evolução foi resolvido pela M. Fourès (3), que estabeleceu o seguinte: o problema tem solução única e não necessariamente analítica, a menos de uma transformação de coordenadas, que mantêm invariante a equação de S e os dados de Cauchy sobre essa hipersuperfície.

Na verdade, esse teorema é válido para equações hiperbólicas a derivadas parciais, não lineares, do tipo

$$A^{\mu\nu} \frac{\partial^2 W_A}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + f_A = 0,$$

onde W_A são funções desconhecidas e que dependem das quatro variáveis (x^α) ; f_A são funções dadas e que dependem de W_A e $W_{A|\alpha}$. $A^{\mu\nu}$ são funções dadas de W_A e (x^α). A forma quadrática $A^{\mu\nu}x_\mu x_\nu$, no nosso caso, é do tipo hiperbólica normal, ou seja: $A^{00} > 0$ e $A^{ij}\ X_i\ X_j < 0$.

As equações de Einstein são um caso particular dessas equações.

Assim, a Teoria da Relatividade de Einstein é uma teoria geométrico-dinâmica que determina as propriedades geométricas da variedade riemanniana V^4, denominada variedade espaço-tempo, a partir da distribuição de matéria-energia em uma hipersuperfície espacialmente orientada.

Demonstraremos agora que existe um conjunto de equações envolvendo o tensor de curvatura que, sob condições iniciais apropriadas, é equivalente às E.E. (4).

Consideremos inicialmente o caso do vazio.

Vamos postular as seguintes equações:

1.21 $$R_{\mu\nu\rho\sigma||\lambda} + R_{\mu\nu\lambda\rho||\sigma} + R_{\mu\nu\sigma\lambda||\rho} = 0$$

1.22 $R^{\mu\nu\alpha\beta}{}_{||\nu} = J^{\mu\alpha\beta}$,

onde

$$J^{\mu\alpha\beta} = K\{(T^{\mu[\alpha||\beta]} - \frac{1}{2} g^{\mu[\alpha} T^{||\beta]}\}.$$

A equação 1.22 é a responsável pela determinação das propriedades geométricas de M^4 , a partir da distribuição de matéria-energia.

No caso do vazio, $T^{\mu\nu} \equiv 0$; logo,

1.23 $R^{\mu\nu\alpha\beta}{}_{||\nu} = 0.$

Na identidade de Bianchi, contraindo-se μ e ρ e utilizando-se a equação 1.23, obtemos:

$$R^{\nu}{}_{\sigma||\lambda} - R^{\nu}{}_{\lambda||\sigma} = 0.$$

Explicitando nessa expressão a derivada $\frac{\partial}{\partial x^0}$, obtemos:

$$R^{\nu}{}_{i|0} = \Gamma^{\alpha}_{i0} R^{\nu}{}_{\alpha} - \Gamma^{\nu}_{\alpha 0} R^{\alpha}_{i} + R^{\nu}{}_{0|i} + \Gamma^{\nu}_{\alpha i} R^{\alpha}_{0} - \Gamma^{\alpha}_{0i} R^{\nu}_{\alpha}$$

ou

1.24 $R^{\nu}{}_{i|0} = R^{\nu}{}_{0|i} + f^{\nu}{}_{i0\alpha}{}^{\rho} R^{\alpha}{}_{\rho}$,

onde

$$f^{\nu}{}_{i0\alpha}{}^{\rho} \equiv (\Gamma^{\nu}_{\alpha i} \delta^{\rho}_{0} - \Gamma^{\nu}_{\alpha 0} \delta^{\rho}_{i}).$$

De 1.23, obtemos:

$$R^{\nu}{}_{\alpha|\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\nu} R^{\lambda}{}_{\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} R^{\nu}{}_{\lambda} = 0.$$

Tomando $\alpha = 0$ e explicitando a derivada temporal, obtemos:

1.26 $$R^{0}{}_{0|0} = - R^{i}{}_{0|i} + (\Gamma^{\lambda}_{0\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\rho}\, \delta^{\lambda}_{0})\, R^{\nu}{}_{\lambda}.$$

Assim, podemos afirmar que as equações 1.21 e 1.22 são equivalentes às equações de Einstein no vazio se, como condição inicial para as quações 1.21 e 1.22, tivermos sobre uma hipersuperfície S espacialmente orientada $R_{\mu\nu}|_S = 0$. Nesse caso, $R_{\mu\nu}$ satisfaz a uma equação diferencial parcial linear e homogênea $R^{\mu}{}_{\nu|0} = 0$, que tem como solução única $R_{\mu\nu} = 0$.

<u>Caso em que $T_{\mu\nu} \neq 0$</u>

Uma vez compreendido o caso do vazio, o problema para $T_{\mu\nu} \neq 0$ torna-se simples. Por ser uma generalização direta do caso $T_{\mu\nu} \equiv 0$; não iremos discutir o problema de Cauchy para as E.E., no caso em que $T_{\mu\nu} \neq 0$ (3). Trataremos apenas da equivalência das equações 1.21 e 1.22 com as equações de Einstein.

Contraindo-se os índices μ e λ em 1.21 e usando 1.22, obtemos:

1.27 $$\left[R_{\nu\rho} + K(T_{\nu\rho} - \tfrac{1}{2}\, g_{\nu\rho}) \right]_{||\sigma} - \left[R_{\nu\sigma} + K(T_{\nu\sigma} - \tfrac{1}{2}\, g_{\nu\sigma} T) \right]_{||\rho} = 0$$

Fazendo $\rho = i$ e $\sigma = 0$, e desenvolvendo a derivada covariante, obtemos:

$$1.28 \quad \left[R_{\nu i} + K \left(T_{\nu i} - \frac{1}{2} g_{\nu i} T \right) \right]_{|0} - \left(\Gamma^{\alpha}_{\nu 0} \delta^{\rho}{}_{i} + \Gamma^{\rho}_{i0} \delta^{\alpha}{}_{\nu} \right) \left[R_{\alpha\rho} + \right.$$

$$\left. + K \left(T_{\alpha\rho} - \frac{1}{2} g_{\alpha\rho} T \right) \right] + \left[R_{\nu_0} + K \left(T_{\nu_0} - \frac{1}{2} g_{\nu_0} \right) \right]_{|i} -$$

$$- \left(\Gamma^{\alpha}_{\nu i} \delta^{\rho}_{0} + \Gamma^{\rho}_{0i} \delta^{\alpha}{}_{\nu} \right) \left(R_{\alpha\rho} + K \left(T_{\alpha\rho} - \frac{1}{2} g_{\alpha\rho} T \right) \right] = 0$$

Podemos afirmar, baseados na eq, 1.28, que, se sobre uma hipersuperfície espacialmente orientada, as quações de Einstein

$$1.29 \quad R_{\mu\nu} = - K T_{\mu\nu} + \frac{k}{2} g_{\mu\nu} T$$

são satisfeitas, então $R_{\nu i} + K (T_{\nu i} - \frac{1}{2} g_{\nu i} T) = f_{\nu i} = 0$ é váli da em todo o espaço, pois $f_{\nu i}$ deve satisfazer um sistema de equa ções diferenciais parciais lineares e homogêneas, $\frac{\partial}{\partial x^0} f_{\nu i} = 0$, que têm solução única.

Ainda da equação 1.22, podemos obter:

$$1.30 \quad \left(R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{K}{2} \delta^{\mu}{}_{\nu} T - T^{\mu}{}_{\nu}\right)_{||\mu} = 0$$

Sobre a hipersuperfície S, onde impomos a validade das E.E., vale a seguinte expressão:

$$1.31 \quad T^{\mu}{}_{\nu||\mu} = 0$$

Usando a identidade de Bianchi contraida para substituir mos $R^{\mu}{}_{\nu||\mu}$ em 1.30, obteremos:

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} + K T_{\mu\nu} - \frac{K}{2} g_{\mu\nu} T \right)_{||\alpha} = - T^{\mu}{}_{\alpha||\mu}$$

Logo, sobre S, vale que:

$$g^{\mu\nu}\,(R_{\mu\nu} + K\,T_{\mu\nu} - \frac{K}{2}\,g_{\mu\nu}\,T)_{\|\,\alpha} = 0.$$

Usando a condição inicial de que sobre S as equações de Einstein são válidas, obtemos que:

$$g^{\mu\nu}\,(R_{\mu\nu} + K\,T_{\mu\nu} - \frac{K}{2}\,g_{\mu\nu}\,T)_{|\alpha} = 0$$

Desenvolvendo essa expressão, e fazendo $\alpha = 0$, tem-se:

$$g^{00}\,(R_{00} + K\,T_{00} - g_{00}\frac{K}{2}\,T)_{|0} + g^{ij}\,(R_{ij} + K\,T_{ij} - \frac{K}{2}\,g_{ij}\,T)_{|0} +$$

$$+\ 2\,g^{0i}\,(R_{0i} + K\,T_{0i} - \frac{K}{2}\,g_{0i}\,T)_{|0} = 0.$$

S é uma hipersuperfície espacialmente orientada, logo $g^{00} > 0$; demonstramos que sob condições iniciais apropriadas, $R_{\rho i} + K\,T_{\rho i} - \frac{K}{2}\,g_{\rho i}\,T = 0$ é válida nas vizinhanças de S; logo, se

$$R_{00} + K\,(T_{00} - \frac{1}{2}\,g_{00}\,T) = 0$$

é válida sobre S, também o será na vizinhança de S.

Obtivemos o seguinte resultado:

As equações 1.21 e 1.22 são equivalentes às equações de Einstein se impusermos como condição inicial que:

$$R_{\mu\nu} = -\,K\,T_{\mu\nu} + \frac{K}{2}\,g_{\mu\nu}\,T,$$

sobre uma hipersuperfície espacialmente orientada.

O Tensor de Weyl

Na moderna teoria da gravitação, o campo gravitacional é interpretado como a manifestação da curvatura do espaço-tempo. Essa curvatura é descrita pelo tensor de Riemann.

A seguir, veremos que o tensor de Riemann pode ser decomposto como a soma de outros dois tensores e daremos a interpretação dessa decomposição.

2.1 $$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} + E_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

onde

2.2 $$E_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \frac{1}{2} (g_{\alpha\gamma} R_{\beta\delta} + g_{\beta\delta} R_{\alpha\gamma} - g_{\beta\gamma} R_{\alpha\delta} - g_{\alpha\delta} R_{\beta\gamma} + - \frac{1}{6} (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}).R$$

As equações de Einstein relacionam algebricamente o tensor de Ricci e o seu traço com a distribuição de matéria-energia. Em uma região onde o tensor momentum energia é identicamente nulo, temos que:

$$R_{\mu\nu} = R = 0.$$

Como consequência, nessa região $E_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. Podemos afirmar, portanto, que em um dado ponto do espaço-tempo, a contribuição para a curvatura, devido à distribuição global de matéria-energia, é determinada pelo tensor de Weyl $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$; a contribuição devida à energia existente no ponto é determinada pelo tensor $E_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Em outras palavras, o tensor de Weyl determina em um dado ponto a parte da curvatura que depende da distribuição de matéria-energia em outros pontos.

O tensor de Weyl tem as seguintes propriedades: (5,6)

(a) $$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\gamma\delta\alpha\beta} = - C_{\beta\alpha\gamma\delta}$$

$$g^{\alpha\gamma} C_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$$

(b) Definindo os tensores duais à direita e à esquerda, respectivamente como

$$C^{*}{}_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\varepsilon\zeta}\, \eta_{\gamma\delta}{}^{\varepsilon\zeta}$$

$$^{*}C_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\varepsilon\zeta\gamma\delta}\, \eta_{\alpha\beta}{}^{\varepsilon\zeta}$$

onde $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ é definido por

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = 4!\, \sqrt{-g}\; \delta_{[\alpha}{}^{0}\, \delta_{\beta}{}^{1}\, \delta_{\gamma}{}^{2}\, \delta_{\zeta]}{}^{3} \qquad g \equiv \det(g_{\mu\nu}),$$

podemos mostrar que (usando as propriedades de simetria e traço nulo desse tensor):

$$- {}^{*}C^{*}{}_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

(c) Dadas duas variedades Riemannianas M_η e $\overline{M}_\eta$, cujos tensores métricos $g_{\mu\nu}$ e $\overline{g}_{\mu\nu}$ estão relacionados por:

$$\overline{g}_{\mu\nu} = e^{2\sigma} g_{\mu\nu}$$

e onde σ é uma função arbitrária das coordenadas (x^μ) de M_η, dizemos que M_η e $\overline{M}_\eta$ estão conformalmente relacionadas.

O tensor $C_{\alpha\beta\gamma\delta} \in V_n$ está relacionado ao tensor $\overline{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} \in \overline{V}_n$ da seguinte forma:

$$g^{\alpha\varepsilon} C_{\varepsilon\beta\gamma\delta} = \overline{g}^{\alpha\varepsilon} \overline{C}_{\varepsilon\beta\gamma\delta}$$

(d) Uma variedade riemanniana M_η ($\eta>3$) que possui $C_{\alpha\beta\delta\lambda} = 0$ em todos os pontos pode ser mapeada por uma transformação conforme (5,7), a um espaço plano de mesma dimensão e métrica de mesma assinatura.

O tensor de Weyl pode ser utilizado para escrever a identidade de Bianchi em uma forma compacta e que nos será útil no decorrer deste trabalho.

A identidade de Bianchi é escrita como:

$$2.3 \qquad \eta^{\zeta\gamma\delta\varepsilon} R_{\alpha\beta\gamma\delta||\varepsilon} = 0 \iff R^{\alpha\beta}{}_{[\gamma\delta||\varepsilon]} = 0$$

Substituindo em 2.3 o tensor de Riemann pela expressão 2.1 (válida para variedades riemannianas de dimensão quatro), obtemos:

$$2.4 \qquad \eta^{\zeta\gamma\delta\varepsilon} C_{\alpha\beta\gamma\delta||\varepsilon} + \eta^{\zeta\gamma\delta\varepsilon} E_{\alpha\beta\gamma\delta||\varepsilon} = 0.$$

Como $\eta^{\zeta\gamma\delta\varepsilon}{}_{||\mu} = 0$, segue de 2.4 que:

$$(\eta^{\zeta\varepsilon\gamma\delta} C^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta})_{||\varepsilon} = \eta^{\zeta\gamma\delta\varepsilon} E^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta||\varepsilon} .$$

Contraindo-se essa expressão com $\eta_{\alpha\beta\theta\lambda}$ e usando a propriedade (b), obtemos:

$$(-C_{\theta\lambda}{}^{\zeta\varepsilon})_{||\varepsilon} = -\eta_{\theta\lambda\alpha\beta}\,\eta^{\zeta\varepsilon\gamma\delta}\,E^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta||\varepsilon}$$

ou

2.5 $$C^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{||\delta} = R^{\gamma[\alpha||\beta]} + \frac{1}{6}\,g^{\gamma[\beta}R^{|\alpha]}.$$

Por outro lado, da definição do tensor de Weyl podemos afirmar que 2.5 só é válida se $g_{\mu\nu||\rho} = 0$; logo, segue que

$$\eta^{\xi\gamma\delta\varepsilon}\,R_{\alpha\beta\gamma\delta||\varepsilon} = 0 \iff C^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{||\delta} = R^{\gamma[\alpha||\beta]} + \frac{1}{6}\,g^{\gamma[\beta}R^{|\alpha]}$$

Usando essa forma da identidade de Bianchi, as equações 1.21 e 1.22 escrevem-se como:

2.6-1 $$C^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{||\delta} = R^{\gamma[\alpha||\beta]} + \frac{1}{6}\,g^{\gamma[\beta}R^{|\alpha]}$$

2.6-2 $$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta||\alpha} = J_{\beta\gamma\delta}$$

No vazio ($T_{\mu\nu} \equiv 0$), essas equações se resumem a:

2.7 $$C^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{||\delta} = 0\ ,$$

mais a condição inicial de que sobre uma hipersuperfície S tipo espaço $R_{\mu\nu} = 0$.

Nessa forma, as equações de Einstein, como mostraremos mais adiante neste trabalho, evidenciam uma grande semelhan ça com as equações de Maxwell. Essa formulação foi utilizada por diversos autores na análise de ondas gravitacionais (8,9,10), e ainda, recentemente, possibilitou generalizar a Teoria de Einstein introduzindo estados de tensão do espaço-tempo (11) analisar a evolução dos autovalores de Petrov (12) e introduzir uma nova classe de partículas não minimalmente acopladas com a gravitação (29,30).

Devemos ressaltar que a equação 2.6-1 determina a evolução, como uma equação de campo, do tensor de Weyl. Este descreve a parte da curvatura que não é localmente determinada pela distribuição de matéria.

MOVIMENTO EM UM CAMPO GRAVITACIONAL

A teoria geral da gravitação apresenta uma peculiaridade inexistente nas demais teorias de campo. Podemos notar isso claramente fazendo uma comparação dessa teoria com a eletrodinâmica. Nesta última, o campo eletromagnético é descrito pelo tensor $F_{\alpha\beta}$; este pode ser obtido experimentalmente, em um dado ponto do espaço-tempo,utilizando-se a equação de Lorentz (13):

$$\frac{DV^{\alpha}}{Ds} = \frac{e}{m} F^{\alpha}_{\ \beta} V^{\beta}$$

Essa determina a dinâmica de uma partícula em interação com o campo eletromagnético.

Na teoria geral da relatividade a equação de movimento para uma partícula em um campo gravitacional, aparentemente contida nas equações de campo (14), é a equação de uma geodésica.

Sendo Y^{α} as componentes de um campo vetorial definido ao longo de uma curva, que tem por coordenadas $x^{\alpha}(t)$, a derivada covariante desse vetor ao longo dessa curva é definida como:

$$\frac{DY^{\alpha}}{Dt} \equiv Y^{\alpha}{}_{||\beta} V^{\beta} \text{ onde } V^{\beta} \equiv \frac{dx^{\beta}}{dt}$$

O vetor Y^{α} é dito ser paralelamente transportado ao longo de $x^{\alpha}(t)$ se

$$\frac{DY^{\alpha}}{Dt} V^{\alpha} = 0$$

O campo vetorial definido ao longo da curva pode,particularmente, ser o próprio vetor $V^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{\alpha t}$ tangente à curva $x^{\alpha}(t)$.

Esta é uma geodésica se o vetor de componentes $\frac{DV^\alpha}{Dt}$ for paralelo a V^α, isto é:

$$\text{3.1} \qquad \frac{DV^\alpha}{Dt} = f\, V^\alpha ,$$

onde f é uma função escalar. É sempre possível encontrar um novo parâmetro s(t), tal que a equação 3.1 se resuma a:

$$\text{3.2} \qquad \frac{DV^\alpha}{Ds} \equiv \frac{dv^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\, V^\beta V^\gamma = 0$$

O parâmetro s(t) é denominado parâmetro afim.

A equação 3.2 é, portanto, a equação de movimento para uma partícula em um campo gravitacional. O objeto $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\, V^\beta$ não é um <u>objeto geométrico</u> e não é, portanto, um observável (15). Na verdade, por uma escolha conveniente de um sistema de coordenadas, é sempre possível anular $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ em um ponto ou mesmo ao longo de uma curva qualquer (16).

Dessa forma, verifica-se que não é possível obter informação sobre o campo gravitacional pela análise do movimento de uma partícula nesse campo.

Devemos notar que o campo gravitacional, na moderna teoria da gravitação, é interpretado como a manifestação da curvatura do espaço-tempo. A curvatura é caracterizada pelo tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ e, portanto, deve ser esse o objeto geométrico que, na gravitação, desempenha papel análogo ao do tensor F^α_β no eletromagnetismo.

É nesse ponto que nos deparamos com um fato totalmente novo e inesperado do ponto de vista das teorias de campo até então conhecidas, mas sugerido pela interpretação geométrica da teoria da gravitação: A variedade espaço-tempo localmente tem a topologia de um plano pseudo-euclideano de dimensão quatro, logo, localmente, as possíveis variedades espaço-tempo são equivalentes. Para determinarmos as propriedades geométricas de uma particular variedade espaço-tempo é necessário uma análise não local. Fisicamente essa determinação é possível medindo-se a aceleração relativa de partículas vizinhas.

Uma partícula que se desloca em um campo gravitacional tem associada a ela uma curva $\gamma(s)$, denominada linha de universo, e definida na variedade espaço-tempo M_4. Para determinarmos distância (no sentido físico) e intervalo de tempo a partir da distância (no sentido topológico) entre dois pontos P e Q ε M_4, será necessário, primeiramente, desenvolvermos um formalismo adequado. Com esses conceitos poderemos definir velocidade e aceleração de forma a terem o mesmo significado físico das grandezas correspondentes na mecânica Newtoniana. Posteriormente retomaremos a análise do movimento em um campo gravitacional.

Tensor de Projeção

Um campo vetoria V^{α}, definido em uma variedade riemanniana M_4, determina, em cada ponto p, um sub-espaço $H \subset T_p$, constituido pelos vetores ortogonais a V^{α} (17). No caso do campo vetorial satisfazer a certas propriedades, tere mos determinada uma hipersuperfície(*) $S \subset M_4$. O sub-espaço determinado poderá ser de tres tipos:

a) Tipo Tempo: no caso em que $g^{\alpha\beta}V_\alpha V_\beta < 0$. Nesse caso, a métrica do sub-espaço será Lorentiziana.

b) Nulo: no caso em que $g^{\alpha\beta}V_\alpha V_\beta = 0$. A métrica do sub-espaço será degenerada.

c) Tipo Espaço: no caso em que $g^{\alpha\beta}V_\alpha V_\beta > 0$. A métrica do espaço será positivo definida.

No caso em que o campo vetorial V^α for do tipo tempo (**) e tal que $g^{\alpha\beta}V_\alpha V_\beta = 1$, poderemos associar a ele uma classe de observadores com quadri-velocidade V^α. O sub-espaço H, determinado em cada ponto pelo campo V^α, será o referencial inercial do observador correspondente (18).

Com o vetor V^α podemos construir o tensor $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - V_\alpha V_\beta$. Esse tensor projeta os objetos geométricos de M_4 no referencial inercial do observador, que se move com velocidade V_α.

O tensor de projeção $h_{\alpha\beta}$ tem as seguintes propriedades:

a) É efetivamente um operador de projeção

$$h^\alpha{}_\beta \, h^\beta{}_\gamma = h^\alpha{}_\gamma$$

(*) Vide Apêndice deste trabalho.

(**) A partir deste ponto, trataremos apenas desse caso.

b) $h^{d}{}_{\beta}$ projeta ortogonalmente a V^{α}. Com efeito, para todo $X^{\alpha} \in M_4$, sendo $h^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta} \equiv \perp X^{\alpha}$ a sua projeção em H, teremos:

$$g_{\alpha\beta}V^{\alpha}h^{\beta}{}_{\gamma}X^{\gamma} = V_{\beta}(\delta^{\beta}{}_{\gamma} - V^{\beta}V_{\gamma})\, X^{\gamma} = 0$$

c) $h_{\alpha\beta}$ é a métrica do sub-espaço H.

Para um observador com velocidade V^{α} e localizado em um ponto $P \in M_4$ de coordenadas x^{α}, a distância (no sentido topológico) a um ponto vizinho $Q \in M_4$, de coordenadas $x + dx^{\alpha}$, será:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} = h_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} + (V_{\alpha}dx^{\alpha})^2$$

Assim, ds, a distância entre P e Q fica dividida em uma distância puramente espacial, $dl = (h_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta})^{\frac{1}{2}}$ e um intervalo de tempo $dt = (V_{\alpha}dx^{\alpha})$.

d) Os sub-espaços H T_p , sob certas condições (vide Apêndice), mesclam-se formando uma hipersuperfície S M_4. O tensor $h_{\alpha\beta}$ determina univocamente em S uma afinidade.

Sendo $\nabla_{\alpha}X_{\beta} \equiv X_{\beta||\alpha}$ a derivada covariante do vetor X_{β}, a derivada covariante de $\perp X_{\beta}$, com relação à afinidade induzida em S por $h_{\alpha\beta}$, será:

$$h_{\alpha}{}^{\beta}\, h_{\gamma}{}^{\delta}\, \nabla_{\beta} \perp X_{\delta} \equiv {}^{3}\nabla_{\alpha} \perp X_{\gamma}$$

Em uma variedade com torsão nula a afinidade é univocamente determinada por

$$\nabla_\gamma (g_{\alpha\beta}) = 0,$$

onde $g_{\alpha\beta}$ é o tensor métrico dessa variedade e ∇_γ a derivada covariante.

Por cálculo direto mostra-se que, efetivamente,

$$^3\nabla_\alpha h_{\beta\gamma} = h_\alpha{}^\delta h_\beta{}^\varepsilon h_\gamma{}^\zeta h_{\varepsilon\zeta||\delta} = 0$$

$$^3\nabla_\beta {}^3\nabla_\alpha f - {}^3\nabla_\alpha {}^3\nabla_f = h_\alpha{}^\gamma h^\delta{}_\beta (f_{||\gamma||\delta} - f_{||\delta||\gamma}) = 0,$$

onde f é uma função escalar C^2.

Usaremos o campo vetorial V^α e o tensor de projeção $h^\alpha{}_\beta$ para decompor os objetos geométricos em suas partes ortogonal e paralela a V^α e obter a interpretação física desses objetos. Em cosmologia, se escolhermos V^α como a velocidade média da matéria contida no universo, a decomposição a que nos referimos acima adquire um significado físico determinado. (18).

Tendo desenvolvido o formalismo necessário, vamos retomar o estudo da dinâmica de partículas em um campo gravitacional.

Seja uma congruência de curvas definida pela função $\gamma(s,t)$, onde s é um parâmetro afim ao longo de uma dada curva, e t, um parâmetro que serve de marca para identificar as diferentes curvas da congruência. A função $\gamma(s,t)$ é contínua e diferenciável, até segunda ordem, em relação aos parâmetros s e t. Em um sistema de coordenadas local $\{x^\alpha\}$, a congruência terá por coordenadas $x^\alpha(s,t)$. Tomaremos o parâmetro s como sendo o comprimento ao longo de uma particular curva da congruência; nesse caso, o vetor $V^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$, tangente a essa curva tem módulo unitário $(g_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta = 1)$.

O parâmetro t define uma nova congruência de curvas. Para o valor $s = s_0$ do parâmetro afim s de uma curva $\gamma(s,t_0) \varepsilon\ \gamma(s,t)$, teremos determinado um ponto $P(s_0, t_0)$. Deslocando-se esse ponto pela variação do parâmetro t, teremos definida uma nova curva $\lambda(s_0,t)$. As demais curvas da congruência $\lambda(s,t)$ são obtidas movendo-se cada ponto da curva $\lambda(s_0,t)$ ao longo das curvas $\gamma(s,t)$.

O campo vetorial constituido pelos vetores tangentes às curvas da nova congruência, terá por componentes $Y^\alpha_{(s,t)} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t}$.

Dois pontos vizinhos $P(s_0,t_0) \varepsilon\ \gamma(s,t_0)$ e $Q(s_0,t_0+\Delta t) \varepsilon\ \gamma(s,t_0+\Delta t)$ definem um vetor, que denominaremos vetor conexão. Este tem por componentes $Z^\alpha = \left.\frac{\partial x^\alpha}{\partial t}\right|_{\substack{s=s_0\\ t=t_0}} \Delta t$ e está associado à distância (no sentido topológico) entre os pontos P e Q. A distância, no sentido físico, entre os pontos P e Q, determinada localmente (através da emissão de um sinal luminoso (19)) por um observador em repouso em relação à partícula que tem por linha de universo a curva $\gamma(s,t_0)$ é a projeção do vetor conexão Z^α no referencial da referida partícula. Essa grandeza, $\perp Z^\alpha \equiv h^\alpha_\beta\ Z^\beta$, será denominada vetor posição relativa.

Em um sistema de coordenadas co-movente $\{y^\alpha\}$, definido localmente como sendo o sistema de coordenadas em relação ao qual a matéria está em repouso, os pontos P e Q terão por coordenadas, respectivamente, $\{y^\alpha\} = (0,y^i)$ e $\{y^\alpha + Sy^\alpha\} = \{0,y^i, \delta y^i\}$. Nesse sistema de coordenadas as componentes do vetor conexão são $\{Z^\alpha\} = \{0,\delta y^i\}$. Em um sistema de coordenadas arbitrário $\{x^\alpha\}$, o vetor Z^α tem por componentes $Z^\alpha = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial y^j}\,\delta y^j$.

Pela própria definição das duas famílias de curvas, podemos inferir que a derivada de Lie de Z^α em relação a V^α é nula. Com efeito, em um sistema de coordenadas x^α,

$$(L_{\vec{V}}\,\vec{Z})^\alpha \equiv [\,V^\alpha\,,\,Z^\alpha\,] = \frac{\partial Z^\alpha}{\partial x^\beta}\,V^\beta - \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}\,Z^\beta$$

$$\frac{\partial Z^\alpha}{\partial x^\beta}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial s} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial t}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial s}\,\Delta t = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial s \partial t}\,\Delta t = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial t \partial s}\,\Delta t =$$

$$= \frac{\partial x^\beta}{\partial t}\,\Delta t\,\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial s} = Z^\beta\,V^\alpha{}_{|\beta}$$

Logo,

$$(L_{\vec{V}}\,\vec{Z}) = 0.$$

Como a conexão é simétrica, segue-se que

$$Z^\alpha{}_{||\beta}\,V^\beta - V^\alpha{}_{||\beta}\,Z^\beta = 0. \tag{3.3}$$

Sendo $\perp Z^\alpha$ a distância física entre as partículas, a velocidade relativa, definida como $\perp \frac{D}{Ds} \perp Z^{\alpha}$, está relacionada à Z^{α} pela seguinte equação:

$$\perp \frac{D}{Ds} \perp Z^{\alpha} = h^{\alpha}_{\beta} \; h^{\beta}{}_{\gamma\|\delta} \; V^{\delta} \; Z^{\gamma} + h^{\alpha}_{\beta} \; Z^{\beta}{}_{\|\gamma} \; V^{\gamma}$$

Esta pode ser modificada utilizando-se as seguintes igualdades:

$$h^{\alpha}_{\beta} \, h^{\beta}{}_{\gamma\|\delta} \, V^{\delta} \; Z^{\gamma} = - \dot{V}^{\alpha} V_{\beta} Z^{\beta} \;;$$

$$h^{\alpha}_{\beta} \, Z^{\beta}{}_{\|\gamma} \; V^{\gamma} = h^{\alpha}_{\beta} \, V^{\beta}{}_{\|\gamma} \; Z^{\gamma}$$

Obtemos, então, que:

$$\perp \frac{D}{Ds} \perp Z^{\alpha} = (h^{\alpha}_{\beta} \, V^{\beta}{}_{\|\gamma} - V^{\alpha}{}_{\|\beta} V^{\beta} V_{\gamma}) \, Z^{\gamma} =$$

$$= + \left[h^{\alpha}_{\beta} \, V^{\beta}{}_{\|\gamma} - (\delta^{\alpha}_{\beta} - V^{\alpha} V_{\beta}) V^{\beta}{}_{\|\gamma} V^{\delta} V_{\gamma} \right] Z^{\gamma} =$$

$$= h^{\alpha}_{\beta} \, h^{\gamma}_{\delta} \, V^{\beta}_{\|\gamma} \, h^{\delta}_{\varepsilon} \, Z^{\varepsilon}.$$

Definindo

3.4 $$h^{\alpha}_{\beta} \, h^{\gamma}_{\delta} \, V^{\beta}_{\|\gamma} = V^{\alpha}_{\beta} \;,$$

obtemos finalmente que

3.5 $$\perp \frac{D}{Ds} \perp Z^{\alpha} = V^{\alpha}_{\beta} \perp Z^{\beta}.$$

Esse resultado demonstra que a velocidade de separação entre partículas vizinhas está relacionada ao vetor posição relativa por uma transformação linear; o tensor que determina essa transformação é a projeção, no referencial inercial do observador, do quadri-gradiente da velocidade do observador. Essa grandeza corresponde ao gradiente espacial da velocidade do observador.

A seguir, obteremos a equação para a aceleração relativa entre partículas vizinhas.

Aplicando-se o operador $\frac{D}{Ds}$ à equação (3.5),obtemos:

3.6 $$\frac{D}{Ds}\left(\perp \frac{D}{Ds} \perp Z^{\alpha}\right) = \frac{D}{Ds}\left(h^{\alpha\delta} h_{\beta}{}^{\zeta} V_{\delta||\zeta} h^{\beta}{}_{\gamma} Z^{\gamma}\right) =$$

$$= (h^{\alpha\delta})^{\cdot} h_{\beta}{}^{\zeta} V_{\delta||\zeta} h^{\beta}{}_{\gamma} Z^{\gamma} + h^{\alpha\delta} (h_{\beta}{}^{\zeta})^{\cdot} V_{\delta||\zeta} h^{\delta}{}_{\gamma} Z^{\gamma} +$$

$$+ h^{\alpha\delta} h_{\beta}{}^{\zeta} V_{\delta||\zeta||\eta} V^{\eta} h^{\beta}{}_{\gamma} Z^{\gamma} + h^{\alpha\delta} h_{\beta}{}^{\zeta} V_{\delta||\zeta} (h^{\beta}{}_{\gamma})^{\cdot} Z^{\gamma} +$$

$$+ h^{\alpha\delta} h_{\beta}{}^{\zeta} V_{\delta||\zeta} h^{\beta}{}_{\gamma} Z^{\gamma}{}_{||\eta} V^{\eta}$$

Os diversos termos que aparecem nessa equação podem ser simplificados como se segue:

$$(h^{\alpha\delta})^{\cdot} h_{\beta}{}^{\zeta} V_{\delta||\zeta} h^{\beta}{}_{\gamma} Z^{\gamma} = - V^{\alpha} h_{\beta}{}^{\zeta} V_{\delta||\zeta} \dot{V}^{\delta} \perp Z^{\beta}.$$

$$h^{\alpha\delta} (h_{\beta}{}^{\zeta})^{\cdot} V_{\delta||\zeta} \perp Z^{\beta} = - h^{\alpha}{}_{\delta} \dot{V}_{\beta} \dot{V}^{\delta} \perp Z^{\beta}.$$

$$h^{\alpha}{}_{\delta} h_{\beta}{}^{\zeta} V^{\delta}{}_{||\zeta} (h^{\beta}{}_{\gamma})^{\cdot} Z^{\gamma} = - h^{\alpha}{}_{\delta} V^{\delta}{}_{||\beta} \dot{V}^{\beta} V_{\gamma} Z^{\gamma} .$$

$$h^{\alpha}{}_{\delta}\, V^{\delta}{}_{||\zeta\,||\eta}\, V^{\eta} \perp Z^{\zeta} = h^{\alpha}{}_{\delta}\, (R^{\delta}{}_{\mu\zeta\eta}\, V^{\mu} + V^{\delta}{}_{||\eta\,||\zeta}) V^{\eta} \perp Z^{\zeta} \;.$$

$$h^{\alpha}{}_{\delta}\, V^{\delta}{}_{||\eta\,||\zeta}\, V^{\eta} \perp Z^{\zeta} = h^{\alpha}{}_{\delta}\, (\dot{V}^{\delta}{}_{||\zeta} \perp Z^{\zeta} - V^{\delta}_{||\eta}\, \dot{Z}^{\eta} + V^{\delta}_{||\eta}\, \dot{V}^{\eta}\, V_{\gamma}\, Z^{\gamma}) .$$

A partir desses resultados e projetando-se a equação 3.6 no referencial inercial do observador, obtemos:

$$3.7 \qquad \perp \frac{D}{Ds} (\perp \frac{D}{Ds} \perp Z^{\alpha}) = h^{\alpha}_{\beta}\, (R^{\beta}{}_{\eta\zeta\gamma}\, V^{\eta} \perp Z^{\zeta}\, V^{\gamma} + \dot{V}^{\beta}_{||\gamma} \perp Z^{\gamma} + - \dot{V}^{\beta}\, \dot{V}_{\gamma} \perp Z^{\gamma})$$

Conhecida na literatura como equação de Jacobi (3.7), dá a aceleração relativa entre duas partículas vizinhas. Essa aceleração é a obtida por um observador em repouso em relação ao referencial inercial da partícula que se desloca com velocidade V^{α}.

Se as partículas, situadas em um campo gravitacional, interagirem apenas gravitacionalmente, seguirão geodésicas. Nesse caso,

$$\frac{DV^{\alpha}}{Ds} \equiv \dot{V}^{\alpha} = 0$$

$$\frac{Dh^{\alpha}{}_{\beta}}{Ds} \equiv (h^{\alpha}_{\beta})^{\bullet} = 0 \;,$$

e a equação de Jacobi se reduz a:

$$3.8 \qquad \frac{D^2 Z^2}{Ds^2} = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\, V^{\beta}\, V^{\delta}\, Z^{\gamma}$$

Essa equação especifica as propriedades do movimento dessas partículas em função dos observáveis do campo gravitacional. Ela pode ser utilizada na determinação experimental desse campo. (20).

A igualdade entre a massa gravitacional e a massa inercial permitiu que o movimento e o campo gravitacional tivessem uma interpretação geométrica: o campo gravitacional tem sua ação no movimento das partículas manifestada pela curvatura do espaço-tempo, onde estas seguem geodésicas. As partículas que interagem gravitacionalmente dessa forma estão minimalmente acopladas ao campo gravitacional e serão denominadas monopolos gravitacionais elétricos. Na Teoria Geral da Relatividade, as partículas têm todas esse tipo de acoplamento; isso constitui uma generalização direta da teoria Newtoniana e na verdade, esta última pode ser obtida da primeira por um processo limite (18). É de se esperar que uma análise mais profunda do movimento em um campo gravitacional revele propriedades qualitativas novas, apresentadas por partículas que não têm análogas na teoria Newtoniana.

Introduziremos na teoria uma nova classe de partículas cujo movimento em uma variedade espaço-tempo é caracterizado como se segue: sendo $Y^{\alpha}(s,t)$ as coordenadas de uma congruência de curvas, determinada pela nova classe de partículas, o vetor conexão Z^{α} dessa congruência obedece à equação:

$$3.9 \qquad \frac{D^2 Z^{\alpha}}{Ds^2} = f\ {}^{*}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\, V^{\beta}\, V^{\delta}\, Z^{\gamma} \,,$$

que denominaremos equação de Jacobi generalizada (*). ${}^{*}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$, o

(*) Essa equação que caracteriza o movimento da nova classe de partículas foi introduzida pelo Dr. M.Novello (1975); confira (29) dual do tensor de curvatura, é definido como:

$$^{*}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\,\eta_{\alpha\beta\varepsilon\zeta}\,R^{\varepsilon\zeta}{}_{\gamma\delta}.$$

As partículas dessa nova classe denominadas monopolos gravitacionais magnéticos, não seguem geodésicas; em outras palavras, não estão minimalmente acopladas ao campo gravitacional e não satisfazem o princípio de equivalência. A origem da constante f, introduzida na equação 3.9, é devida à possível diferença existente entre a massa inercial e a massa gravitacional dos monopolos magnéticos.

O GRUPO DUAL

Demonstramos no capítulo I que para o caso do vazio ($T_{\mu\nu} = 0$), sob condições iniciais apropriadas, as equações de Einstein são equivalentes à divergência nula do tensor de Weyl.

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{||\delta} = 0 \tag{4.1}$$

As propriedades de simetria desse tensor nos permitem decompô-lo univocamente em dois tensores, $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$, ao longo de uma curva $x^{\alpha}(s)$ especificada pelo seu vetor tangente $V^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{ds}$ (18).

O tensor $E_{\alpha\beta}$, denominado parte elétrica do tensor de Weyl, é definido como:

$$E_{\alpha\beta} = - C_{\alpha\gamma\beta\delta} V^{\gamma} V^{\delta}. \tag{4.2}$$

Devido às propriedades do tensor de Weyl, podemos inferir que:

$$E_{\alpha\beta} = E_{\beta\alpha}$$

$$g^{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} = E^{\alpha}{}_{\alpha} = E_{\alpha\beta} V^{\beta} = 0$$

O tensor $H_{\alpha\beta}$, denominado parte magnética do tensor de Weyl, é definido como:

$$H_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\gamma}{}^{\delta\varepsilon} C_{\delta\varepsilon\beta\zeta} V^{\gamma} V^{\zeta} \tag{4.3}$$

Analogamente,

$$V^{\alpha}H_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}H_{\alpha\beta} = 0$$

$$H_{\alpha\beta} = H_{\beta\alpha}.$$

A propriedade de simetria é devida à nulidade dos traços do tensor de Weyl. Essa propriedade pode ser verificada facilmente no referencial inercial do observador.

Em termos dos tensores $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$, o tensor de Weyl é expresso como:

4.4 $$C_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = 8\, V_{[\alpha}E_{\beta]}{}^{[\gamma}V^{\delta]} + 4\,\delta_{[\alpha}^{[\alpha}E^{\delta]}_{\beta]} - 2$$

$$- 2\,\eta_{\alpha\beta\varepsilon\zeta}\, V^{\varepsilon}\, H^{\zeta\,[\gamma}V^{\delta]} + 2\,\eta^{\gamma\delta\varepsilon\zeta}V_{\varepsilon}H_{\zeta\,[\alpha}V_{\beta]}$$

Utilizando-se o campo vetorial V^{α} e o tensor $h^{\alpha}{}_{\beta}$, podemos projetar as equações de Einstein quasi-Maxwellianas para o vazio ao longo da curva $x^{\alpha}(s)$. Dessa forma, são determinadas quatro projeções distintas dessas equações:

$$C_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}{}_{||\delta}\; V^{\gamma}\, V^{\alpha}\, h^{\beta}_{\varepsilon} = 0$$

$$C_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}{}_{||\delta}\; V^{\gamma}\, h^{(\alpha}{}_{\varepsilon}\, h^{\beta)}{}_{\zeta} = 0$$

$$C_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}{}_{||\delta}\; \eta^{\varepsilon\zeta\beta\gamma}\, V_{\zeta}\, V^{\alpha} = 0$$

$$C_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}{}_{||\delta}\; V_{\eta}\, h^{\alpha\varepsilon}\, \eta^{\zeta\eta\beta\gamma} = 0$$

Substituindo a expressão 4.4 para o tensor de Weyl, obtemos (21):

$$(4.5)\qquad H^{\alpha\beta}{}_{||\gamma}\; h_{\beta\varepsilon}\; h^{\gamma}_{\alpha} - 3\, E_{\alpha\varepsilon}\, \omega^{\alpha} - E_{\alpha}{}^{\beta}\, \Theta_{\beta\gamma}\, V_{\delta}\, \eta_{\varepsilon}{}^{\delta\gamma\alpha} = 0$$

$$(4.6)\qquad E^{\alpha\beta}{}_{||\gamma}\; h_{\varepsilon\beta}\; h^{\gamma}_{\alpha} + H_{\alpha\varepsilon}\, \omega^{\alpha} + H_{\alpha}{}^{\beta}\, \Theta_{\beta\gamma}\, V_{\delta}\, \eta_{\varepsilon}{}^{\delta\gamma\alpha} = 0$$

$$(4.7)\qquad \dot{H}^{\gamma\delta}\, h^{\alpha}_{\delta}\, h^{\beta}_{\gamma} + E^{\gamma\delta||\varepsilon}\, h_{\delta}{}^{(\alpha}\eta^{\beta)}{}_{\zeta\varepsilon\gamma}\, V^{\zeta} + \Theta\, H^{\alpha\beta} - H_{\gamma}{}^{(\beta}\Theta^{\alpha)\gamma} -$$

$$- H_{\gamma}{}^{(\beta}\omega^{\alpha)\gamma} + - \eta^{\alpha\gamma\delta\varepsilon}\, \eta^{\beta\zeta\lambda\rho}\, V_{\delta}\, V_{\zeta}\, H_{\varepsilon\lambda}\, \Theta_{\rho\gamma} +$$

$$+ \dot{V}^{\gamma}\, E^{\delta(\alpha}\eta^{\beta)}{}_{\varepsilon\gamma\delta}\, V^{\varepsilon} = 0$$

$$(4.8)\qquad \dot{E}^{\gamma\delta}\, h^{\alpha}_{\delta}\, h^{\beta}_{\gamma} - H^{\gamma\delta||\varepsilon}\, h_{\delta}{}^{(\alpha}\eta^{\beta)}{}_{\zeta\varepsilon\gamma}\, V^{\zeta} + \Theta\, E^{\alpha\beta} - E_{\gamma}{}^{(\beta}\Theta^{\alpha)\gamma} -$$

$$- E_{\gamma}{}^{(\beta}\omega^{\alpha)\gamma} + - \eta^{\alpha\gamma\delta\varepsilon}\, \eta^{\beta\zeta\lambda\rho}\, V_{\delta}\, V_{\zeta}\, E_{\varepsilon\lambda}\, \Theta_{\rho\gamma} +$$

$$+ \dot{V}^{\gamma}\, H^{\delta(\alpha}\eta^{\beta)}{}_{\varepsilon\gamma\delta}\, V^{\varepsilon} = 0,$$

onde,

$$\Theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, h_{\alpha}{}^{\gamma}\, h_{\beta}{}^{\delta}\, (V_{\gamma||\delta} + V_{\delta||\gamma})$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, h_{\alpha}{}^{\gamma}\, h_{\beta}{}^{\delta}\, (V_{\gamma||\delta} - V_{\delta||\gamma}) \;, \qquad \text{(VEJA APÊNDICE)}$$

As equações de Einstein Quasi-Maxwellianas, escritas sob essa forma, têm uma interpretação que justifica claramente essa denominação. As equações 4.5 e e.6 determinam a divergên cia dos tensores $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$, em analogia direta com o par de equa ções de Maxwell na ausência de fontes.

$$\overset{(3)}{\text{div}}\ \vec{E} = 0 \qquad\qquad \overset{(3)}{\text{div}}\ \vec{H} = 0$$

As equações 4.7 e 4.8 relacionam a dependência tem poral dos tensores $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$ com o rotacional de $H_{\alpha\beta}$ e $E_{\alpha\beta}$ res pectivamente, novamente em analogia ao segundo par das equações de Maxwell, onde $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ e $\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ estão relacionados com $\text{rot}^{(3)}\,\vec{H}$ e $\text{rot}^{(3)}\,\vec{E}$, respectivamente.

A decomposição do tensor de Weyl em suas partes elé trica e magnética definem um espaço interno e um grupo de trans formações nesse espaço. Com efeito, se pensarmos $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$ como sendo, em cada ponto, base de um espaço vetorial $V^{(2)}$, teremos de finido o espaço interno ao qual nos referimos. Nesse espaço, e xiste um grupo de transformações denominadas duais, cujos elemen tos são determinados por um parâmetro arbitrário constante Θ. O espaço interno pode ser representado por um plano euclideano de duas dimensões, e as transformações como rotações de um ângulo Θ em torno de um eixo perpendicular a esse plano.

Sob uma transformação dual, o tensor de Weyl se trans forma como:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} \to \overline{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \text{Cos}\ \Theta\ C_{\alpha\beta\gamma\delta} + \text{sen}\ \Theta\ \overset{*}{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Assim, podemos afirmar que na ausência de matéria, as equações de Einstein são invariantes por transformações do grupo dual, que é um grupo de simetria adicional da teoria. Essa invariância é uma invariância de gauge de primeira espécie, inteiramente análoga à encontrada na eletrodinâmica (22).

Na ausência de matéria, duas partículas de prova (tipo monopolo elétrico), vizinhas, em movimento em um campo gravitacional têm a aceleração relativa determinada pela equação de Jacobi que, nesse caso particular, utilizando-se a definição 4.2, pode ser escrita como:

$$\frac{D^2 Z^2}{Ds^2} + E^{\alpha}{}_{\beta}\, Z^{\beta} = 0 \tag{4.9}$$

Analogamente, a equação de Jacobi generalizada na ausência de matéria, pode ser escrita como:

$$\frac{D^2 Z^2}{Ds^2} - fH^{\alpha}{}_{\beta}\, Z^{\beta} = 0 \tag{4.10}$$

Verifica-se assim, que a equação 3.9 é uma consequência necessária do novo grupo de simetria da teoria. As equações que caracterizam o movimento em uma variedade espaço-tempo das duas classes de partículas, escritas na forma 4.9 e 4.10, dão a justificativa para a denominação empregada.

Na presença de matéria, a nova invariância não é mantida; assumiremos, no entanto, que o grupo dual é efetivamente um grupo de simetria da nova teoria e que as equações de campo devem ser convenientemente alteradas. No presente trabalho, não nos ocuparemos desse problema e limitar-nos-emos a analisar as modificações no movimento em um campo gravitacional, que se fazem necessárias em consequência da invariância de gauge introduzida.

EQUAÇÃO DE MOVIMENTO PARA OS MONOPOLOS MAGNÉTICOS

Vamos supor uma congruência de curvas de coordenadas $x^\alpha(s,t)$. Vamos supor que as curvas dessa congruência sejam solução da equação:

$$5.1 \qquad \frac{D^2 x^\alpha}{Ds^2}(s,t) \equiv \frac{\partial^2 x^\alpha(s,t)}{\partial s^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial s} \frac{\partial x^\gamma}{\partial s} = F^\alpha(x) \quad ,$$

onde $F^\alpha(x)$ é um campo vetorial definido na variedade.

Uma curva da congruência, vizinha à curva $x^\alpha(s,t_0)$, terá por coordenadas $x^\alpha(s,t_0+\delta t)$.

Seja $\{X^\alpha\}$ um sistema de coordenadas particular, tal que no ponto x, a afinidade $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x)$ se anula. Se desenvolvermos $x^\alpha(s,t_0+\delta t)$ em uma série de potências de $\delta x^\alpha = \left.\frac{\partial x^\alpha}{\partial t}\right|_{t=t_0} \delta t$, tomarmos termos até primeira ordem em ∂x^α, as curvas $x^\alpha(s,t_0)$ e $x^\alpha(s,t_0+\delta t) \cong x^\alpha(s,t_0) + \delta t^\alpha$ serão solução das equações.

$$5.2 \qquad \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial s^2} = F^\alpha(x)$$

$$5.3 \qquad \frac{\partial^2}{\partial s^2}(x^\alpha + \delta x^\alpha) + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x+\delta x)\frac{\partial}{\partial s}(x^\beta + \delta x^\beta)\frac{\partial}{\partial s}(x^\gamma + \delta x^\gamma) =$$

$$= F^\alpha(x+\delta x)$$

Desenvolvendo-se a afinidade $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x+\delta x)$ e a força

$F^{\alpha}(x+\delta x)$ em uma série de potências em δx^{α} na vizinhança do ponto x e tomando-se termos até primeira ordem, obtemos para 5.3 a seguinte equação:

$$5.4 \quad \frac{\partial}{\partial s^2}(x^{\alpha}+\delta x^{\alpha}) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma|\delta} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial s} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial s} \delta x^{\delta} = F^{\alpha}_{(x)} + F^{\alpha}{}_{|\beta}(x)\, \delta x^{\beta}$$

Subtraindo 5.2 de 5.4, obtemos:

$$5.5 \quad \frac{\partial^2}{\partial s^2} \delta x^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma|\delta} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial s} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial s} \delta x^{\delta} = F^{\alpha}{}_{|\beta}\, \delta x^{\beta}$$

Para obtermos uma equação tensorial, válida em todos os sistemas de coordenadas, devemos somar a ambos os membros de 5.5 a expressão

$$- \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma|\delta} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial s} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial s} \delta x^{\gamma} \text{ , obtendo-se}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \delta x^{\alpha} + (\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma|\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta|\gamma})\, \delta x^{\delta} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial s} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial s} = F^{\alpha}_{|\beta}\, \delta x^{\beta} +$$

$$- \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma|\delta}\, \delta x^{\gamma} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial s} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial s} \text{ .}$$

No sistema de coordenadas que estamos utilizando, no ponto x onde $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x) = 0$, valem as seguintes igualdades:

$$\frac{D^2}{Ds^2} \delta x^{\alpha} = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \delta x^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma|\delta}(x)\, \delta x^{\gamma} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial s} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial s} \text{ ,}$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}(x) = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma|\delta}(x) - \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta|\gamma}(x) = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma||\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta||\gamma}$$

$$F^{\alpha}{}_{|\beta}(x) = F^{\alpha}{}_{||\beta}(x) \text{ .}$$

Logo, a equação para o vetor conexão de componentes $Z^\alpha = \left.\frac{\partial x^\alpha}{\partial t}\right|_{t=t_0} \cdot \delta t$ fica:

$$\frac{D^2 Z^2}{Ds^2} + R^\alpha{}_{\gamma\beta\delta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial s} \frac{\partial x^\delta}{\partial s} Z^\beta = F^\alpha{}_{||\beta} Z^\beta .$$

Supondo-se a congruência de curvas situada no vazio e utilizando-se a definição 4.2, obtemos:

5.6 $$\frac{D^2 Z^2}{Ds^2} - E^\alpha{}_\beta Z^\beta = F^\alpha{}_{||\beta} Z^\beta .$$

Comparando-se essa equação com a 3.9, verifica-se que os monopolos gravitacionais magnéticos seguem curvas aceleradas, determinadas pelas equações:

5.7 $$\frac{D^2 x^\alpha}{D^2 s} = F^\alpha (x) ,$$

onde $F^\alpha(x)$ é uma força tal que:

5.8 $$F^\alpha{}_{||\beta} = E^\alpha{}_\beta + f H^\alpha{}_\beta .$$

Em consequência da equação 5.8, F^α deve satisfazer as seguintes propriedades:

1º) Os tensores $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$ são simétricos; logo,

$F_{[\alpha||\beta]} = 0 \iff F_{[\alpha|\beta]} = 0 \iff$ uma função escalar ϕ tal que $F_\alpha = \phi_{|\alpha}$

2º) $E^{\alpha}{}_{\alpha} = H^{\alpha}{}_{\alpha} = 0$; logo,

$$g^{\alpha\beta} F_{\alpha||\beta} = g^{\alpha\beta} \phi_{|\alpha||\beta} = 0.$$

Portanto, a função escalar ϕ deve satisfazer a equação:

$$\Box \phi = 0$$

3º) Os tensores $H_{\alpha\beta}$ e $E_{\alpha\beta}$ são perpendiculares ao vetor V^{α}, segue-se daí que:

$$\frac{DF^{\alpha}}{Ds} = F^{\alpha}{}_{||\beta} V^{\beta} = (E^{\alpha}{}_{\beta} + f\, H^{\alpha}{}_{\beta}) = 0$$

logo, a força F^{α} é constante ao longo da linha de universo dos monopolos magnéticos.

As equações que devemos integrar para obter a curva descrita pelo movimento de um monopolo magnético são extremamente envolvidas. Devemos obter o campo escalar determinado pela equação 5.8 e posteriormente integrar a equação 5.7, obtendo-se $x^{\alpha}(s)$. No entanto, para integrarmos 5.8 é necessário conhecermos $\frac{dx^{\alpha}}{ds}$. Esse ciclo vicioso, próprio de equações integro-diferenciais, pode ser evitado se notarmos que o campo escalar é apenas um elemento auxiliar. O movimento dos monopolos é totalmente determinado pela geometria da variedade através da equação diferencial:

5.9 $$\ddot{x}^{\alpha}{}_{||\beta} = (C^{\alpha}{}_{\gamma\beta\delta} + f\, C^{\alpha}{}_{\gamma\beta\delta})\, \frac{dx^{\gamma}}{ds}$$

O campo escalar ϕ nos permite obter a equação de movimento para os monopolos magnéticos por um princípio variacional. Definindo a ação para os monopolos magnéticos como

$$\mathcal{S} = \int \bar{e}^{\Phi} \, ds \, ,$$

obtemos a equação de movimento para essas partículas utilizando-se o princípio de Hamilton. Com efeito:

$$\delta \mathcal{S} = \int \left[\delta \, \bar{e}^{\Phi} ds + \bar{e}^{\Phi} \delta \, ds \right] \quad \int \left[- \Phi_{|\beta} \, g^{\alpha\beta} + \frac{DV^{\alpha}}{Ds} \right] \bar{e}^{\Phi} \, \delta x_{\alpha} \, ds$$

logo

$$\delta \mathcal{S} = 0 \iff \frac{DV^{\alpha}}{Ds} = g^{\alpha\beta} \, \Phi_{|\beta}$$

A equação de Jacobi, que determina a aceleração relativa entre dois monopolos magnéticos vizinhos, é:

$$\perp \frac{D}{D} \left[\perp \frac{D}{Ds} (\perp Z^{\alpha}) \right] = \left(- \phi^{|\alpha} \, \phi_{|\beta} - E^{\alpha}_{\beta} - h^{\alpha\gamma} \, \phi_{|\gamma||\beta} \right) \perp Z^{\alpha}$$

Utilizando-se essa equação, podemos determinar (veja apêndice), a equação de evolução para o parâmetro Θ.

A equação obtida

$$\Theta^{\bullet} + \frac{1}{3} \Theta^{2} - \dot{V}^{\alpha}{}_{\|\alpha} + 2(\sigma^{2} - \omega^{2}) = R_{\alpha\beta} \, V^{\alpha} \, V^{\beta} \, ,$$

no caso dos monopolos magnéticos como $\dot{V}^{\alpha}{}_{\|\alpha} = F^{\alpha}{}_{\|\alpha} = 0$, se reduz a

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\,\Theta^2 + 2(\sigma^2 - \omega^2) = R_{\alpha\beta}\, V^\alpha\, V^\beta .$$

Esta, idêntica à obtida no apêndice para os monopolos elétricos, permite-nos demonstrar que os monopolos magnéticos também possuem ponto focal.

TRANSFORMAÇÕES CONFORME

Sejam M_4 e $\bar{M}_4$ duas variedades Rimanianas, $g_{\alpha\beta}$ e $\bar{g}_{\alpha\beta}$ os tensores métricos dessas variedades respectivamente; definiremos uma aplicação A tal que A: $M_4 \rightarrow \bar{M}_4$, e que os tensores métricos das duas variedades estejam relacionados por

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = e^{2\psi(x)} \; g_{\alpha\beta} \quad ,$$

onde $\psi(x)$ é uma função escalar arbitrária. A aplicação A, assim definida, forma um grupo denominado grupo conforme. Os elementos desse grupo são transformações, conforme especificados por uma particular função ψ.(23)

Sob uma transformação conforme, o elemento de distância ds transforma-se como:

$$ds^2 \rightarrow d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = e^{2\psi}\, g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Seja $x^\alpha(s)$ uma curva espacialmente orientada, definida em M_4 , $\frac{dx^\alpha}{ds}$ as componentes do vetor tangente a essa curva e θ parâmetro afim s o comprimento ao longo da curva; a lei de transformação do vetor tangente, sob uma transformação conforme, é definida pela relação

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 1$$

e expressa como

$$\bar{V}^\alpha = e^{-\psi}\, V^\alpha$$

No caso particular em que a curva x (s) é uma geodésica, a curva $\bar{x}$ ($\bar{s}$) EM_4 na qual a primeira é mapeada por uma transformação conforme, é determinada como se segue:

$$V^\alpha{}_{||\beta}\, V^\beta = 0 \;\rightarrow\; \bar{V}^\alpha{}_{||\bar{\beta}}\, \bar{V}^\beta \equiv (\bar{V}^\alpha{}_{|\beta} + \left\{ \begin{matrix} \bar{\alpha} \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} \bar{V}^\gamma) \bar{V}^\beta = e^{-2\psi}\, V^\alpha{}_{||\beta}\; V^\beta +$$
$$+ \; (V^\alpha \dot{\psi} - g^{\alpha\beta} \psi_{|\beta})\; e^{-2\psi} \qquad ;$$

logo,

$$6.1 \qquad \frac{D\overline{V}^{\alpha}}{D\overline{s}} = V^{\alpha}\dot{\psi}\, e^{-2\psi} + \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}(e^{-2\psi})_{|\beta} \quad .$$

Assim, a curva $x^{\alpha}(s)$ é mapeada, por uma transformação conforme , na curva acelerada $\overline{x}^{\alpha}(\overline{s})$ que é solução da equação 6.1, onde $\overline{V}^{\alpha} = \frac{d\overline{x}^{\alpha}}{d\overline{s}}$. Limitemos a classe de funções que determinam a transformação conforme às funções ψ tais que:

$$6.2 \qquad \psi = -\frac{1}{2}\ln 2\phi \ ,$$

onde ϕ é o campo escalar que determina a aceleração dos monopolos magnéticos. Teremos:

$$\frac{1}{2}(e^{-2\psi})_{|a}\, \overline{V}^{a} = 0 \iff \psi_{|a} V^{a} = 0 \quad ;$$

logo a equação 6.1 se reduz a

$$6.3 \qquad \frac{D\overline{V}^{\alpha}}{D\overline{s}} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}\, (e^{-2\psi})_{|\beta}$$

Esse resultado nos permite enunciar o seguinte teorema: a curva $x^{\alpha}(s)$ é mapeada por uma transformação conforme, especificada pela função 6.2, à curva $\overline{x}^{\alpha}(\overline{s})$. Essas curvas são as linhas de universo dos monopolos gravitacionais elétricos e magnéticos, respectivamente.

Obtivemos para a transformação conforme uma interpretação física bem definida: através dela, os monopolos elétricos são mapeados em monopolos magnéticos.

Gostaríamos de salientar que toda curva acelerada cuja força F^{α} seja tal que $F_{\alpha||\beta}$ possa ser escrita como uma série da forma:

$$F_{\alpha||\beta} = A_1\, E_{\alpha\beta} + A_2\, E_{\alpha\gamma}\, E^{\gamma}{}_{\beta} + \ldots + B_1 H_{\alpha\beta} + B_2 H_{\alpha\gamma} H^{\gamma}{}_{\beta} + \ \ldots .$$

pode ser mapeada por uma transformação conforme conveniente a uma geodésica (30).

As quantidades cinemáticas, θ, $\sigma_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ que determinam o comportamento de uma congruência de curvas, sob uma aplicação conforme transformam-se como:

a) $\theta \rightarrow \overline{\theta} = \theta\, e^{-\psi} - 3(e^{-\psi})$

b) $\sigma_{\alpha\beta} \rightarrow \overline{\sigma}_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}\, e^{\psi}$

c) $\omega_{\alpha\beta} \rightarrow \overline{\omega}_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}\, e^{\psi}$

Verificamos assim que a força gravitacional, causa do movimento acelerado dos monopolos magnéticos, não é capaz de criar "schear" ou vorticidade. Isso não é válido para a expansão devido ao termo

$$-3(e^{-\psi})^{\bullet}$$

Por um cálculo direto podemos verificar que o tensor elétrico ($E_{\alpha\beta}$) e o magnético ($H_{\alpha\beta}$) são invariantes por transformações conformes. O comportamento da teoria sob transformações desse tipo, possibilita uma significativa simplificação nas equações de movimento para os monopolos magnéticos. Com efeito, por uma transformação conforme temos que:

$$\frac{DV^{\alpha}}{Ds} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{D\overline{V}^{\alpha}}{D\overline{s}} = \frac{1}{2}(e^{-2\psi})_{|\beta}\, g^{\alpha\beta}$$

Vamos restringir a classe de funções às funções que satisfazem a equação

$$\frac{1}{2}(e^{-2\phi})_{|\alpha||\overline{\beta}} = E_{\alpha\beta} + fH_{\alpha\beta} \quad . \tag{6.4}$$

Nessa equação $\overline{\beta}$ significa que a afinidade deve ser construida com o tensor métrico $\bar{g}_{\alpha\beta} = e^{2\Phi} g_{\alpha\beta}$. Com essa particular escolha de funções garantimos que as curvas $x^{\alpha}(s)$ (monopolos elétricos) são mapeadas às curvas $\bar{x}^{\alpha}(\bar{s})$ (monopolos magnéticos) pertencentes a $\bar{M}_4$. Devemos notar que o segundo membro da equação 6.4 é calculado sem referência as curvas $\bar{x}^{\alpha}(\bar{s})$.

SOLUÇÃO APROXIMADA DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DOS M.M.

As equações que determinam o movimento dos monopolos magnéticos são extremamente envolvidas. Para resolvê-las temos de integrar um sistema de dez equações diferenciais não lineares. Queremos chamar a atenção que essas equações não são do tipo que estamos familiarizados; seus índices são livres (compare com a equação de onda, ou com as E.E) não nos permitindo tratá-las como equações hiperbólicas (24).

Não nos foi possível obter uma solução analítica exata para essas equações. Neste capítulo obteremos uma solução, pelo método de aproximação, que nos permitirá obter importantes conclusões sobre as propriedades qualitativas do movimento dos monopolos magnéticos.

Vamos supor que o campo gravitacional é fraco e desenvolver o tensor métrico em uma série de potências em ε. Utilizaremos termos de primeira ordem. Nesse caso

7.1 $$g_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta} + \varepsilon\gamma_{\alpha\beta}$$

onde $-N_{oo} = N_{11} = N_{22} = N_{33} = 1$ e $N_{\alpha\beta} = 0$ se $\alpha \neq \beta$. Em primeira ordem em ε o tensor de curvatura de Riemann e o símbolo de Christoffel de segunda espécie, são determinados pelas seguintes expressões:

7.2 $$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\varepsilon}{2}\left(\gamma_{\alpha\delta|\beta|\gamma} + \gamma_{\beta\gamma|\alpha|\delta} - \gamma_{\alpha\gamma|\beta|\alpha} - \gamma_{\beta\delta|\alpha|\gamma}\right)$$

$$7.3 \qquad \left\{\begin{matrix}\alpha \\ \beta\gamma\end{matrix}\right\} = \frac{\varepsilon}{2} N^{\alpha\varepsilon}(\gamma_{\beta\varepsilon|\gamma} + \gamma_{\beta\gamma|\alpha|\delta} - \gamma_{\alpha\gamma|\beta|\delta} - \gamma_{\beta\delta|\alpha|\gamma})$$

Utilizando essas expressões, as equações de Einstein linearizadas e com $T_{\mu\nu} = 0$ escrevem-se como (25).

$$7.4 \qquad \frac{\varepsilon}{2} N^{\alpha\beta} \gamma_{\mu\nu|\alpha|\beta} = 0$$

mais a condição

$$7.5 \qquad N^{\alpha\beta} \gamma_{\mu\alpha|\beta} = 0$$

No caso de uma partícula estacionária na origem do sistema de coordenadas, a solução externa para essas equações é (25).

$$g_{00} = 1 + \varepsilon\gamma_{00} = 1 - \frac{2GM}{C^2 r}$$

$$g_{0i} = 0$$

$$g_{ij} = \delta_{ij}(-1 + \varepsilon\gamma_{00}) = \delta_{ij}(-1 - \frac{2GM}{C^2 r})$$

onde

G constante gravitacional
M é a massa da partícula
$r \equiv |\vec{x}| = +(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$

Nessa aproximação, as componentes não nulas do tensor de Riemann são:

$$R_{0101} = \frac{A}{2r^3}\left(\frac{3x^2}{r^2} - 1\right)$$

$$R_{0202} = \frac{A}{2r^3}\left(\frac{3y^2}{r^2} - 1\right)$$

$$R_{0303} = \frac{A}{2r^3}\left(\frac{3z^2}{r^2} - 1\right)$$

$$R_{1212} = \frac{A}{2r^3}\left(3\,\frac{r^2+y^2}{r^2} - 2\right)$$

$$R_{1313} = \frac{A}{2r^3}\left(3\,\frac{x^2+z^2}{r^2} - 2\right)$$

$$R_{2323} = \frac{A}{2r^3}\left(3\,\frac{y^2+z^2}{r^2} - 2\right)$$

$$R_{0102} = \frac{A}{2r^5}\,3\,x\,y$$

$$R_{0103} = \frac{A}{2r^5}\,3\,x\,z$$

$$R_{0203} = \frac{A}{2r^5}\,3\,y\,z$$

$$R_{2113} = -\frac{A}{2r^5}\,3\,y\,z$$

$$R_{1223} = -\frac{A}{2r^5}\,3\,x\,z$$

$$R_{1332} = -\frac{A}{3r^5}\,3\,x\,y$$

onde

$$A \doteq \frac{2GM}{c^2}$$

Temos de integrar as seguintes equações

7.6 $$\frac{DV^{\alpha}}{Ds} = g^{\alpha\beta}\,\Phi_{|\beta}$$

7.7 $$\Phi_{|\alpha\|\beta} = E_{\alpha\beta} + fH_{\alpha\beta} \quad .$$

Suporemos $\Phi \equiv \Phi_o + \phi$, $(\phi \equiv \delta\Phi)$ e que ϕ ,ε $\gamma_{\alpha\beta}$, $\frac{\vec{v}}{c}$ são infinitésimos de mesma ordem. $\vec{v}$ é a parte espacial do quadrivetor $v^{\alpha} = (c,\vec{v})$.

Riemann podemos obter as componentes dos tensores elétrico e magnético em primeira ordem. O resultado é o seguinte

$$\delta H_{oo} = 0$$

$$\delta H_{io} = \frac{1}{2}\,\eta_{io}{}^{jk}R_{jkoo}\,c^2 = 0$$

$$\delta H_{ij} = \frac{1}{2}\,\eta_{io}{}^{kl}R_{kljo}\,c^2 = 0 \quad ,$$

e para o tensor elétrico,

$$\delta E_{oo} = 0$$

$$\delta E_{11} = -\frac{Ac^2}{2r^5}\,(3x^2 - r^2)$$

$$\delta E_{22} = -\frac{Ac^2}{2r^5}\,(3y^2 - r^2)$$

$$\delta E_{33} = -\frac{Ac^2}{2r^5}\,(3Z^2 - r^2)$$

$$\delta E_{12} = -\frac{Ac^2}{2r^5}\,3\,x\,Y$$

$$\delta E_{13} = -\frac{Ac^2}{2r^5}\,3\,x\,Z$$

$$\delta E_{23} = -\frac{Ac^2}{2r^5}\,3\,Y\,Z$$

$$\delta E_{io} = 0$$

Com esses resultados a equação 7.9 fica,

$$\phi_{|o|o} = 0$$

$$\phi_{|o|\alpha} = 0$$

$$\phi_{|i|j} = \delta E_{ji}$$

Integrando essas equações obtemos a seguinte solução:

7.12 $$\phi = -\frac{GM}{r}$$

Substituindo esse resultado na equação 7.8 esta se reduz a:

7.13 $$\frac{d^2x^o}{dt^2} = 0$$

7.14 $$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ 0\ 0 \end{matrix} \right\} c^2 = N^{i\alpha}\phi_{|\alpha} \Longrightarrow \frac{d^2x^i}{dt^2} = 0$$

Esse resultado nos mostra uma propriedade qualitativa nova dos monopolos magnéticos: em primeira ordem o movimento dessas partículas não é afetado pelo campo gravitacional. Para verificarmos a estabilidade da órbita dessas partículas será necessário analisarmos termos de ordem superior. O resultado obtido, no entanto, é suficiente para sugerir porque essas partículas não foram ainda observadas e uma possível maneira de fazê-lo.

CONCLUSÃO

Neste trabalho fizemos uma extensiva análise do movimento em uma variedade espaço-tempo (M_4). Verificamos que as propriedades deste, no caso de partículas que interagem gravitacionalmente, são determinadas pela aceleração relativa destas e descritas pela equação de Jacobi. Na tentativa de esgotar essa análise, introduzimos uma nova classe de partículas cujo movimento possui propriedades novas, descritas por uma equação que é uma modificação da equação de Jacobi. As propriedades de simetria do tensor de Riemann sugeriram a maneira de construir essa equação.

A razão principal de havermos introduzido essa nova classe de partículas (polos-H) é devida ao fato das equações de Einstein no vazio possuirem uma simetria de gauge de primeira espécie. A invariância das equações sob esse grupo permite que os tensores $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$ tenham suas funções trocadas entre si. Isso sugere introduzirmos uma classe de partículas cujo movimento seja caracterizado pela parte magnética ($H_{\alpha\beta}$). Obtivemos a equação de movimento para essas partículas e verificamos não estarem elas minimalmente acopladas ao campo gravitacional e não obedecerem ao princípio de equivalência.

A seguir, analisamos o comportamento da teoria sob transformação conforme e verificamos que para uma escolha conveniente da classe de funções que determinam essas transformações, a linha de universo dos polos-E é mapeada à linha de universo dos polos-H. Isso nos permitiu associar à transformação confor me um significado físico. Finalmente, mostramos que essas partículas possuem propriedades qualitativas novas e não têm análogas na teoria Newtonniana.

Existem alguns aspectos da teoria que gostaríamos de ressaltar. O grupo de gauge desta ($T_{\mu\nu}\equiv 0$) é de primeira espécie e, por consequência, a orientação da parte elétrica e magnética do tensor de Weyl no espaço interno não é arbitrária em cada ponto do espaço-tempo. A introdução de um campo de Yang-Mills, na tentativa de eliminar uma dificuldade, é extremamente envolvida e peculiar, pois o campo gravitacional está associado à métrica do espaço-tempo.

A invariância de gauge não é mantida na presença de matéria; por outro lado, não sabemos como os polos-H criam campo. É necessário generalizarmos as equações de Einstein a fim de que estas nos possam dar essa informação e manter a invariância de gauge. Para levarmos a efeito esse projeto, nos deparamos com sérias dificuldades. As equações de Einstein Quasi-Maxwellianas ($R^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{||\alpha} = J^{\beta\gamma\delta}$) determinam como ${}^*R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ está relacionado com $J^{\beta\gamma\delta}$, o que nos impede de imitar a eletrodinâmica, introduzindo a seguinte generalização

$$ {}^*R^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{||\alpha} = {}^*J^{\beta\gamma\delta} \ , $$

onde ${}^*J^{\beta\gamma\delta}$ seria construido com o $T_{\mu\nu}$ associado aos polos-H. Outro problema sério é que qualquer tentativa desse tipo nos levaria a introduzir uma estrutura adicional no espaço-tempo e es te não poderia mais ser representado por uma variedade riemanniana.

A transformação conforme, introduzida na teoria, nos permitiu não só mapear polos-E em polos-H, mas também mapear geodésicas em uma classe de curvas aceleradas (30). Isso possibilitará, talvez, descrever as forças associadas a essas curvas em funções da interação gravitacional, fazer algum progresso na compreensão do colapso gravitacional e obter uma teoria unificada para essas interações.

APÊNDICE

Neste Apêndice faremos um estudo extensivo e autoconsistente de uma congruência de curvas em M_4. Estas curvas podem caracterizar as linhas de fluxo de um fluido, e os resultados aqui obtidos são os utilizados na análise de modelos cosmológicos ou em astrofísica (nas situações onde é válida a aproximação de um fluido relativístico). Em cosmologia a aproximação de um fluido é feita no seguinte sentido: a matéria está distribuida continuamente no universo e o campo de velocidades do fluido é a velocidade média dos aglomerados de galáxias (considerados como partículas constituintes do fluido).

QUANTIDADES CINEMÁTICAS

No Capítulo III definimos uma congruência de curvas $x^\alpha(s,t)$ o vetor velocidade $V^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial s}$ e o vetor posição relativa $\perp Z^\alpha \equiv h^\alpha_\beta Z^\beta$. Obtivemos que a velocidade relativa entre duas partículas vizinhas (a parte espacial da variação do vetor posição relativa) está relacionada ao vetor $\perp Z^\alpha$ por uma transformação linear, ou seja:

(1) $$\perp \frac{D}{Ds} (\perp Z^\alpha) = V^\alpha{}_\beta \perp Z^\alpha$$

O tensor $V^\alpha{}_\beta$ é o gradiente espacial da velocidade do observador. Para podermos analisar essa relação vamos separar o tensor $V^\alpha{}_\beta$ em suas partes simétrica e anti-simétrica.

$$V_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \theta_{\alpha\beta} \quad ,$$

onde

$$\theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h_\alpha{}^\gamma h_\beta{}^\delta (V_{\gamma||\delta} + V_{\delta||\gamma})$$
$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h_\alpha{}^\gamma h_\beta{}^\delta (V_{\gamma||\delta} - V_{\delta||\gamma})$$

O tensor $\theta_{\alpha\beta}$ pode ainda ser decomposto em duas partes:

$$\theta_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta}\theta \quad ,$$

onde

$$\sigma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta}\theta$$

$$\theta = g^{\alpha\beta}\theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} h_\alpha{}^\gamma h_\beta{}^\delta (V_{\gamma||\delta} + V_{\delta||\gamma}) = V^\alpha{}_{||\alpha}$$

O tensor $\theta_{\alpha\beta}$ é a projeção de $V_{\alpha||\beta}$ em H; logo,

$$\sigma_{\alpha\beta}V^{\beta} = 0$$

$$V^{\beta}\omega_{\alpha\beta} = 0$$

Para podermos analisar a variação do vetor posição relativa em maiores detalhes será necessário introduzirmos uma base de vetores ortonormais $e^{\alpha}{}_A$ $(A = 0,1,2,3)$ em um ponto $P(s_o,t_o)$ de uma vurva $x(s,t_o)$ da congruência. Escolheremos $e^{\alpha}{}_a$ na direção do vetor tangente à curva nesse ponto, ou seja, $e^{\alpha}{}_o = \left.\frac{\partial x^{\alpha}(s,t)}{\partial s}\right|_{\substack{t=t_o\\ s=s_o}}$, onde o parâmetro afim s é escolhido como sendo o comprimento ao longo dessa curva. Os outros três vetores nesse ponto são escolhidos de forma que:

(2) $$g_{\alpha\beta}\ e^{\alpha}_{A}\ e^{\beta}_{B} = N_{AB} \ .$$

N_{AB} tem os seguintes valores $N_{oo} = -N_{11} = -N_{22} = -N_{33} = 1$, $N_{AB} = 0$ se $A \neq B$.

Essa base só nos será de utilidade se pudermos propagá-la ao longo da curva. Uma maneira de fazermos isso seria utilizarmos o transporte paralelo; no entanto, como a curva não é, no caso geral, uma geodésica, o vetor $e^{\alpha}{}_o$ não se manteria ortonormal aos demais vetores da base. Será necessário introduzirmos um novo operador de derivação ao longo da curva denominado derivada de Fermi. Esse é definido para um campo vetorial Y^{α} ao longo da curva $x^{\alpha}(s,t_o)$ como

(3) $$\frac{D_F Y^{\alpha}}{Ds} = Y^{\alpha}{}_{||\beta}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial s} + g_{\mu\nu}Y^{\mu}\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial s}\right)_{||\beta}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial s}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial s} + - g_{\mu\nu}\ Y^{\mu}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial s}\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial s}\right)_{||\beta}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial s}$$

Por simplicidade definiremos $\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial s} = V^{\alpha}$; então,

$$\frac{D_F Y^{\alpha}}{Ds} = \dot{Y}^{\alpha} + (V^{\alpha}\dot{V}^{\nu} - V^{\nu}\dot{V}^{\alpha})Y_{\nu} = \dot{Y}^{\alpha} + T^{\alpha\nu}\ Y_{\nu}$$

A derivada de Fermi possui as seguintes propriedades:

a) $\frac{D_F}{Ds} = \frac{D}{Ds}$ se a curva é uma geodésica

b) O campo vetorial V^α tangente à curva é Fermi-transportado, ou seja:

$$\frac{D_F V^\alpha}{Ds} = 0$$

Com efeito,

$$\frac{D_F V^\alpha}{Ds} = \dot{V}^\alpha + g_{\mu\nu} V^\mu \dot{V}^\nu V^\alpha - g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \dot{V}^\alpha = \dot{V}^\alpha - \dot{V}^\alpha = 0$$

c) Sendo X^α e Y^α dois campos vetoriais definidos ao longo da curva e tais que

$$\frac{D_F X^\alpha}{Ds} = \frac{D_F Y^\alpha}{Ds} = 0 \,, \tag{4}$$

o produto escalar desses vetores é mantido. Com efeito,

$$\frac{D_F}{Ds}(X^\alpha Y_\alpha) = \left(\frac{D_F X^\alpha}{Ds}\right) Y_\alpha + X_\alpha \frac{D_F Y^\alpha}{D_s} = \left(\frac{DX^\alpha}{Ds}\right) Y_\alpha + X^\alpha \frac{DY_\alpha}{Ds} +$$

$$+ (V^\alpha \dot{V}^\nu - V^\nu \dot{V}^\alpha) X_\nu Y_\alpha = \frac{DX^\alpha}{Ds} Y_\alpha + X^\alpha \frac{DY_\alpha}{Ds} = \frac{D}{Ds}(X^\alpha Y_\alpha),$$

logo, de (4) segue que

$$\frac{D}{Ds}(X^\alpha Y_\alpha) = 0$$

d) Sendo Y^α um campo vetorial qualquer definido sobre a curva, então:

$$\frac{D_F}{Ds}(\perp Y^\alpha) = \perp \frac{D}{Ds}(\perp Y^\alpha)$$

Com efeito,

$$\frac{D_F}{Ds}(\perp Y^\alpha) = (h^\alpha{}_\beta Y^\beta)^{\cdot} + (V^\alpha \dot{V}^\nu - V^\nu \dot{V}^\alpha)\, h_{\nu\beta} Y^\beta =$$

$$= (-\dot{V}^\alpha V_\beta - V^\alpha \dot{V}_\beta) Y^\beta + h^\alpha{}_\beta \dot{Y}^\beta + V^\alpha \dot{V}^\nu Y_\nu =$$

$$= h^\alpha{}_\beta \dot{Y}^\beta - \dot{V}^\alpha V_\beta Y^\beta$$

$$\perp \frac{D}{Ds}(\perp Y^\alpha) = h^\alpha{}_\beta (-\dot{V}^\beta V_\gamma - V^\beta \dot{V}_\gamma)\, Y^\gamma + h^\alpha{}_\beta \dot{Y}^\beta =$$

$$= h^\alpha{}_\beta \dot{Y}^\beta - \dot{V}^\alpha V_\beta Y^\beta$$

Utilizando a derivada de Fermi poderemos transportar a base $e^\alpha{}_A$ de tal forma que ao longo da curva tenhamos

$$(5) \qquad \frac{D_F}{Ds} e^\alpha_A = 0$$

Os vetores e^α_1 , e^α_2, e^α_3 podem ser interpretados como um conjunto de eixos ortogonais SEM ROTAÇÃO ao longo da curva. Fisicamente esse conjunto de eixos pode ser obtido utilizando-se giroscópios. Pela definição garantimos também que esses vetores são ortogonais a $e^\alpha_o = V^\alpha$ ao longo de toda curva.

Vamos decompor o vetor posição relativa $\perp Z^\alpha$ na distância relativa

$$(\delta l)^2 = h_{\alpha\beta} Z^\alpha Z^\beta \qquad ,$$

e na direção η^α $(n^\alpha n_\alpha = -1)$; então,

$$(6) \qquad \perp Z^\alpha = \delta l\, n^\alpha$$

A seguir vamos analisar separadamente essas duas grandezas. Substituindo (6) na eq. (1), obtemos:

$$(7) \quad \frac{D_F}{Ds}(\delta l n^\alpha) = h^\alpha{}_\beta (\delta l n^\beta)^{\cdot} = \delta l V^\alpha{}_\beta \eta^\beta \quad ;$$

contraindo essa expressão com n_α e dividindo por δl, resulta

$$(8) \qquad \frac{(\delta l)^{\cdot}}{(\delta l)} = - V_{\alpha\beta}\, n^\alpha n^\beta = \sigma_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta + \frac{1}{3}\,\theta$$

Essa equação descreve a razão da variação da distância entre duas partículas vizinhas em uma dada direção. Com ela podemos obter uma generalização da lei de Hubble para modelos ANISOTRÓPICOS.

Utilizando (8) para substituirmos (δl) na equação (7) obteremos

$$(9) \qquad \frac{N_F n^\alpha}{Ds} = h^\alpha{}_\beta (n^\beta) = \left[\omega^\alpha{}_\beta + \sigma^\alpha{}_\beta + (\sigma_{\mu\nu} n^\mu n^\nu) h^\alpha{}_\beta\right] n^\beta$$

Esta equação dá a razão da variação da direção entre duas partícu - las vizinhas com relação a base e_A. Nessa base, em equação se re - duz a:

$$\frac{dn^i}{ds} = \left[\omega^i{}_j + \sigma^i{}_j + (\sigma_{ab} n^a n^b)\delta^i{}_j\right] n^j \quad .$$

O traço do tensor $\theta_{\alpha\beta}$ está associado à variação do volume do triespaço que é, localmente, o hiperplano perpendicular à quadrivelocidade do observador. Para verificarmos isso devemos notar que o referido volume é dado por:

$$v = \int_S V^\alpha \, dS_\alpha$$

A variação do volume em um intervalo de tempo $\delta\tau = V_\alpha \delta x^\alpha$ é

$$\Delta v = \oint_S V^\alpha ds_\alpha$$

Utilizando o teorema de Gauss poderemos expressar essa integral como

$$\Delta v = \oint_S V^\alpha \, ds_\alpha = \int_\Omega V^\alpha{}_{||\alpha} \sqrt{-g}\, d^4x$$

Para Ω muito pequeno, em um referencial inercial e utilizando um sistema de coordenadas conveniente, teremos

$$\Delta v \simeq V^{\alpha}{}_{||\alpha}\, v\Delta\tau$$

Dessa expressão segue que

$$\frac{\frac{dv}{d\tau}}{v} = \lim_{\substack{\Delta\tau \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \frac{\frac{\Delta v}{\Delta\tau}}{v} = V^{d}{}_{||d} = \theta$$

Utilizando o escalar (expansão) podemos definir uma grandeza denominada comprimento representativo (1) como

$$\frac{\dot{l}}{l} = \frac{1}{3}\,\theta$$

Essa grandeza especifica completamente o comportamento de um elemento de volume do fluido. No caso do universo de Friedmann (18), ela corresponde à função radial R(t). Utilizando esse conceito poderemos definir a constante de Hubble (H) e o parâmetro de desaceleração (q) (27).

O tensor $\omega_{\alpha\beta}$, denominado vorticidade, está associado à rotação rígida sofrida pelas linhas de fluxo do fluido. Para verificarmos isso vamos introduzir o vetor ω^{α} que representa univocamente esse tensor e é definido como:

$$\omega^{\alpha} = -\frac{1}{2}\,\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\, V_{\beta}\, \omega_{\gamma\delta}$$

Esse vetor pertence ao sub-espaço H e a sua direção é a do eixo de rotação instantânea da matéria. Utilizando a equação (9) e supondo $\sigma_{\alpha\beta} = 0$, teremos

$$\frac{D_F n^{\alpha}}{Ds} = \eta^{\alpha}{}_{\beta\delta\gamma}\, \omega^{\delta}\, V^{\gamma} n^{\beta}$$

Em uma base de vetores Fermi-transportados essa equação se reduz a:

$$\frac{dn^i}{ds} = \eta^i{}_{ojk}\,\omega^j n^k$$

Dessa forma, comprovamos que ω^α determina a rotação rígida das linhas de fluxo do fluido em relação ao referencial inercial (H).

No caso de um fluido com rotação nula teremos

$$\omega^\alpha = 0 \Longleftrightarrow \eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\, V_\beta\, V_{\gamma\delta} = \eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\, V_\beta\, V_{\gamma||\delta} = 0 \Longleftrightarrow V_{[\beta}V_{\gamma||\delta]} = 0$$

De um teorema fundamental do cálculo tensorial, temos que (se a conexão for simétrica)

$$V_{[\beta}V_{\gamma||\delta]} = 0 \Longleftrightarrow V_{[\beta}V_{\gamma|\delta]} = 0 \Longleftrightarrow \exists \quad \text{funções } f(x) \text{ e } t(x), \text{ tais que } V_\alpha = f(x)\, t(x)_{|\alpha}$$

O vetor $\frac{\partial t}{\partial x^\alpha}$ é normal a hipersuperfície $t(x)$ =constante e portanto V_α é ortogonal a essa hipersuperfície. Neste caso particular, os referenciais de repouso, definidos em cada ponto pelo tensor $h_{\alpha\beta}$, mesclam-se formando uma hipersuperfície espacialmente orientada, ortogonal ao campo de vetores V^α. A função $t(x)$ pode ser interpretada como a coordenada tempo, definida pelo fluido. Devemos salientar que esse tempo não é sincronizado para todos os observadores de $t(x)$ = cte. Isso só é possível no caso em que $\dot{V}^\alpha = 0$. Nesse caso $V_{\alpha||\beta} = V_{\alpha\beta}$, $\omega^\alpha = 0 \Longleftrightarrow V_{[\alpha||\beta]} = 0 \Longleftrightarrow \exists$ $t(x)$ tal que $V_\alpha = t_{|\alpha}$ e $t(x)$ mede o tempo próprio de cada observador ao longo de sua linha de universo. O tempo próprio desses observadores é, evidentemente, sincronizado.

O tensor $\sigma_{\alpha\beta}$, que denominaremos cisalhamento, determina a distorção que ocorre durante o fluxo de fluido e deixa o volume invariante. As direções determinadas pelos autovetores do tensor $\sigma_{\alpha\beta}$ são inalterados por essa distorção, como podemos verificar diretamente da equação (9).

EVOLUÇÃO DAS QUANTIDADES CINEMÁTICAS

No Capítulo III obtivemos a equação de Jacobi, que determina a aceleração relativa entre duas partículas vizinhas. Vamos reescrever essa equação.

$$(10)\quad \frac{D_F}{Ds}\left(\frac{D_F}{Ds}\perp Z^\alpha\right) = h^\alpha{}_\delta\left(R^\delta{}_{\lambda\beta\gamma}V^\lambda V^\gamma + \dot{V}^\delta{}_{||\beta} - \dot{V}^\delta V_\beta\right)\perp Z^\beta$$

Derivando covariantemente e projetando em H a equação (1), obtemos

$$\frac{D_F{}^2}{Ds^2}(\perp Z^\alpha) = \perp (V^\alpha{}_\beta)^{\boldsymbol{\cdot}} \perp Z^\beta + V^\alpha{}_\beta\, V^\beta{}_\gamma \perp Z^\gamma$$

Substituindo esse resultado na eq. (10) e levando em consideração que o vetor $\perp Z^\alpha$ é arbitrário, obteremos:

$$(11)\quad h_\alpha{}^\gamma\, h_\beta{}^\delta (V_{\gamma\delta})^{\boldsymbol{\cdot}} + V_{\alpha\gamma}V^\gamma{}_\beta + \dot{V}_\alpha\dot{V}_\beta - R_{\alpha\gamma\beta\delta}\, V^\gamma V^\delta - h_\alpha{}^\gamma h_\beta{}^\delta \dot{V}_{\gamma||\delta} = 0$$

Essa equação diferencial determina a evolução do tensor $V_{\alpha\beta}$ e, consequentemente, a evolução das quantidades cinemáticas θ, $\sigma_{\alpha\beta}$ e $\omega_{\alpha\beta}$.

Para obtermos a equação de propagação para θ devemos primeiramente tomar o traço da equação (11).

$$(12)\quad h^{\alpha\beta}(V_{\alpha\beta})^{\boldsymbol{\cdot}} + V_{\alpha\beta}V^{\alpha\beta} + \dot{V}_\alpha\dot{V}^\alpha - R^\alpha{}_{\beta\alpha\gamma}\, V^\beta V^\gamma - h^{\alpha\beta}\dot{V}_{\alpha||\beta} = 0$$

Essa equação pode ser simplificada se notarmos que

$$h^{\alpha\beta}(V_{\alpha||\beta})^{\bullet} = (V^{\alpha}{}_{||\alpha})^{\bullet} + \dot{V}_{\alpha}\dot{V}^{\alpha}$$

$$h^{\alpha\beta}(V_{\alpha\beta})^{\bullet} = h^{\alpha\beta}(V_{\alpha||\beta})^{\bullet} - h^{\alpha\beta}\dot{V}_{\alpha}\dot{V}_{\beta}$$

logo,

$$h^{\alpha\beta}(V_{\alpha\beta})^{\bullet} = \dot{\theta}$$

$$h^{\alpha\beta}\ \dot{V}_{\alpha||\beta} = \dot{V}^{\alpha}{}_{||\alpha} + \dot{V}^{\alpha}\ \dot{V}_{\alpha}$$

Definindo

$$\sigma_{\alpha\beta}\ \sigma^{\alpha\beta} = 2\sigma^{2}$$

$$\omega_{\alpha\beta}\ \omega^{\alpha\beta} = 2\omega^{2} \quad ,$$

segue que

$$V_{\alpha\beta}V^{\alpha\beta} = 2(\sigma^{2}-\omega^{2}) + \frac{1}{3}\ \theta^{2}.$$

Substituindo esses resultados em (12), obtemos:

$$(13) \qquad \dot{\theta} + \frac{1}{3}\ \theta^{2} - \dot{V}^{\alpha}{}_{||\alpha} + 2\ (\sigma^{2}-\omega^{2}) = R_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta}$$

Essa equação, obtida independentemente por Landau e Rauchaudhuri, é de grande importância no estudo dos fluidos e desempenha papel fundamental nos teoremas de singularidade (31).

A seguir vamos demonstrar como a expanção determina a existência de pontos focais. Por simplicidade, restringiremos a nossa análise a uma congruência de geodésicas tipo-tempo de coordenadas $x^{\alpha}(s,t)$. O vetor posição relativa $\perp Z^{\alpha}$ satisfaz a equação de Jacobi que, nesse caso, se reduz a:

$$(14) \qquad \frac{D_F}{Ds}(\perp Z^\alpha) = R^\alpha{}_{\gamma\beta\delta}\, V^\gamma V^\delta \perp Z^\beta$$

Denominaremos campo de Jacobi a solução dessa equação ao longo da curva $x^\alpha(s,t_o)$. Esta é especificada pelos valores $\frac{dZ^\alpha}{ds}$ e $\perp Z^\alpha$ em um ponto qualquer da curva. Existem seis campos de Jacobi independentes (note que $\perp Z^\alpha g_{\alpha\beta}V^\beta = 0$). Haverá sempre três campos independentes que se anulam em um ponto $q \in x^\alpha(s,t_o)$. Diremos que um ponto $p \in x^\alpha(s,t_o)$ é conjugado ao ponto q se existe um campo de Jacobi ao longo de $x^\alpha(s,t_o)$, não identicamente nulo, que se anula em q e p. Podemos determinar na secção espacial um volume v(tridimensional) que tenha uma das dimensões determinada pelo campo de Jacobi $\perp Z^\alpha$, e as outras duas por campos semelhantes e linearmente independentes. A equação(14) garante, uma vez que $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ é finito em q, que $\frac{d}{ds}$ (v) é também finito nesse ponto. Podemos afirmar então que o ponto q será conjugado à p se a expansão θ se tornar infinita em q.

Vamos retomar a equação de Raychaudhuri e impor que a vorticidade da congruência seja nula. Nesse caso,

$$(15) \qquad \frac{d\theta}{ds} = R_{\alpha\beta}\, V^\alpha V^\beta - \frac{1}{3}\theta^2 - 2\sigma^2$$

Utilizando a condição que $R_{\alpha\beta}\, V^\alpha V^\beta \leq 0$ em todos os pontos podemos afirmar que: se em um ponto $x^\alpha(s_o,t_o)(s_o > 0)$ a expansão tiver o valor $\theta_o < 0$ então haverá um conjugado q ao longo da curva e entre os pontos $x^\alpha(s_o,t_o)$ e $x^\alpha(s_o - \frac{3}{\theta_o}, t_o)$. Para verificarmos isto basta notarmos que os termos da direita em (15) sendo todos negativos, se $s > s_o$, então

$$\theta \leq \frac{3}{s-(s_o - \frac{3}{\theta_o})} \qquad ;$$

logo, θ será infinita para algum valor de s entre s_o e (s_o-3/θ_o). É necessário tambem que o parâmetro possa ser estendido até esse valor (9).

A equação de Raychaudhuri pode também ser utilizada para determinar a evolução do comprimento característico "l". No caso particular de um fluido perfeito, e utilizando as equações de Einstein, obtemos:

$$3\,\frac{\ddot{l}}{l} = 2(\omega^2-\sigma^2) + \dot{V}^{\alpha}{}_{\|\alpha} - \frac{1}{2}(\mu+3p) + \Delta\ .$$

EQUAÇÃO DE EVOLUÇÃO PARA O VETOR VORTICIDADE OU ROTAÇÃO

Para obter essa equação devemos contrair a equação (11) com o tensor $\eta^{\gamma\delta\alpha\beta}\, V_\delta$. Notando que

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{||\rho} = 0\quad ,$$

obtemos o resultado

$$(16)\qquad (\eta^{\gamma\delta\alpha\beta}\, V_{\alpha\beta})\, V_\delta + \eta^{\gamma\delta\alpha\beta}\, V_\delta V_{\alpha\lambda} V^{\lambda}{}_{\beta} = \eta^{\gamma\delta\alpha\beta}\, V_\delta\, V_{\alpha||\beta}$$

Decompondo $V_{\alpha\lambda}$ em suas partes simétrica e antissimétrica, obtemos

$$\eta^{\gamma\delta\alpha\beta}\, V_\delta\, V_{\alpha\lambda}\, V^{\lambda}{}_{\beta} = 2\,\eta^{\gamma\delta\alpha\beta}\, V_\delta(\tfrac{1}{3}\,\theta\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\lambda}\,\sigma^{\lambda}{}_{\beta}\ )$$

Usando esse resultado e substituindo $\frac{1}{3}\,\theta$ em função do comprimento característico (l), a equação (16) pode ser reescrita como

$$(17)\qquad (l^2\,\omega^{\gamma})^{\cdot} + \frac{1}{2}\, l^2\,\eta^{\gamma\delta\alpha\beta}\,\dot{V}_\delta\,\omega_{\alpha\beta} - l^2\eta^{\gamma\delta\alpha\beta}\, V_\delta\,\omega_{\alpha\lambda}\,\sigma^{\lambda}{}_{\beta} =$$

$$= -\frac{1}{2}\, l^2\,\eta^{\gamma\delta\alpha\beta}\, V_\delta\,\dot{V}_{\alpha||\beta}$$

Da definição do tensor $\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}$ podemos verificar diretamente, que são válidas as seguintes expressões:

$$\eta^{\gamma\delta\beta\alpha}\ \eta_{\rho\lambda\nu\alpha} = -\ 3!\ \delta_{\rho}^{[\gamma}\ \delta_{\lambda}^{\delta}\ \delta_{\nu}^{\beta]}$$

$$\eta^{\gamma\delta\alpha\beta}\ \eta_{\rho\lambda\alpha\beta} = -4\ \delta_{\rho}^{[\gamma}\ \delta_{\lambda}^{\delta]}\ ;$$

logo,

$$\eta^{\gamma\delta\alpha\beta}\ V_{\delta}\ \omega_{\alpha\lambda}\sigma^{\lambda}_{\beta} = \sigma^{\gamma}{}_{\lambda}\omega^{\lambda}$$

$$\eta^{\gamma\delta\alpha\beta}\ \dot{V}_{\delta}\ \omega_{\alpha\beta} = V^{\gamma}\ \dot{V}_{\lambda}\ \omega^{\lambda}$$

Utilizando esses resultados e projetando a equação (17) no sub-espaço H, obtemos a equação de propagação procurada

$$(18)\qquad h^{\alpha}{}_{\beta}(l^{2}\omega^{\beta})^{\cdot} - l^{2}\ \sigma^{\alpha}{}_{\beta}\ \omega^{\beta} = -\ \frac{1}{2}\ l^{2}\ \eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\ V_{\beta}\ \dot{V}_{\gamma||\delta}$$

Equação de propagação para $\sigma_{\alpha\beta}$. A parte simétrica da equação (11) é:

$$(19)\qquad h_{\alpha}{}^{\gamma}\ h_{\beta}{}^{\delta}(\theta_{\gamma\delta})^{\cdot} + \theta_{\alpha\lambda}\theta^{\lambda}{}_{\beta} + \omega_{\alpha\lambda}\omega^{\lambda}{}_{\beta} + \dot{V}_{\alpha}\dot{V}_{\beta} - h_{\alpha}{}^{\gamma}h_{\beta}{}^{\delta}\dot{V}_{(\gamma||\delta\ )} +$$

$$-\ R_{\alpha\gamma\beta\delta}V^{\gamma}V^{\delta} = 0$$

Podemos mostrar que:

$$\theta_{\alpha\gamma}\theta^{\gamma}{}_{\beta} = \sigma_{\alpha\gamma}\ \sigma^{\gamma}{}_{\beta} + \frac{2}{3}\ \sigma_{\alpha\beta}\ \theta + \frac{1}{9}\ h_{\alpha\beta}\ \theta^{2}$$

$$\omega_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}{}_{\beta} = -\ h_{\alpha\beta}\ \omega^{2} - \omega_{\alpha}\omega_{\beta}$$

Utilizando a equação de Raychaudhuri para substituirmos $\dot{\theta}$ e os resultados acima, obtemos para (19) a seguinte expressão:

$$(20)\qquad h_{\alpha}{}^{\gamma}\ h_{\beta}{}^{\delta}\Big[(\sigma_{\gamma\delta})^{\cdot} - \dot{V}_{(\gamma||\delta)}\Big] + \frac{1}{3}\ h_{\alpha\beta}(\dot{V}^{2}_{||\lambda} - \omega^{2} - 2\sigma^{2} + R_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu}) +$$

$$+\ \sigma_{\alpha\lambda}\sigma^{\lambda}{}_{\beta} + \frac{2}{3}\ \sigma_{\alpha\beta}\theta - \omega_{\alpha}\omega_{\beta} + \dot{V}_{\alpha}\dot{V}_{\beta} - R_{\alpha\gamma\beta\delta}\ V^{\gamma}V^{\delta} = 0$$

Decompondo o tensor de Riemann em função do tensor de Weyl, to tensor de Ricci e da métrica e utilizando as equações de Einstein para relacionar $R_{\mu\nu}$ e o seu traço com a distribuição de matéria-energia dada pelo tensor $T_{\mu\nu}$ poderemos colocar a equação (20) em uma forma cuja interpretação física é mais imediata. A forma mais geral para o tensor momento-energia ($T_{\mu\nu}$) é a seguinte ( )

$$T_{\alpha\beta} = \rho\, V_\alpha V_\beta - p h_{\alpha\beta} + q_\alpha\, V_\beta + q_\beta V_\alpha + \pi_{\alpha\beta}$$

onde

$$q_\alpha V^\alpha = \pi_{\alpha\beta}\, V^\beta = \pi^\alpha{}_\alpha = 0$$

Feito isso, obtemos para a equação (20) a expressão

$$(21) \qquad h_\alpha{}^\gamma\, h_\beta{}^\delta \left[(\sigma_{\gamma\delta})^{\cdot} - \dot{V}_{(\gamma||\delta)} \right] + \frac{1}{3}\, h_{\alpha\beta}(\dot{V}^\mu{}_{||\mu} - 2\sigma^2 - \omega^2) +$$

$$+ \frac{2}{3}\,\sigma_{\alpha\beta}\theta - \omega_\alpha\omega_\beta +$$

$$+ E_{\alpha\beta} + \dot{V}_\alpha\dot{V}_\beta + \frac{1}{2}\,\pi_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\lambda}\sigma^\lambda{}_\beta = 0$$

Podemos verificar com esta equação que a parte elétrica do tensor de Weyl provoca cisalhamento nas linhas de fluxo do fluido. O tensor de Weyl, por ter traço nulo, não contribui diretamente na equação para a expanção; no entanto, o faz indiretamente, produzindo convergência através do termo $2\sigma^2$.

Obtivemos as três equações que determinam a evolução das quantidades cinemáticas, especificando o comportamento do fluxo do fluido. Devemos lembrar que, sendo o espaço curvo, o campo de vetores velocidade V^α deve satisfazer a identidade de Ricci.

$$(22) \qquad 2V_{\alpha||[\beta||\delta]} = R_{\alpha\delta\beta\gamma}\, V^\delta$$

Essa equação introduz algumas relações de vínculo que devem ser satisfeitas pelas quantidades cinemáticas.

Contraindo a identidade de Ricci (22) com

$$g^{\alpha\gamma}\ h^{\zeta\delta}\ ,$$

obtemos:

$$(23)\qquad h^{\zeta}{}_{\delta}(V^{\gamma||\delta})_{||\gamma} - h^{\zeta}{}_{\delta}\theta^{|\delta} = - h^{\zeta}{}_{\delta}R^{\delta}{}_{\beta}V^{\beta}$$

O primeiro termo dessa equação pode ser expresso em função das quantidades cinemáticas da seguinte forma:

$$h^{\alpha}{}_{\beta}(V^{\gamma||\beta})_{||\gamma} = h^{\alpha}{}_{\beta}(V^{(\beta||\gamma)} - V^{[\delta||\gamma]}\ )_{||\gamma}\quad ,$$

$$h^{\alpha}{}_{\beta}(\theta^{\beta\gamma}-\omega^{\beta\gamma})_{||\gamma} = h^{\alpha}{}_{\beta}(V^{(\beta||\gamma)} - V^{[\delta||\gamma]})_{||\gamma}-h^{\alpha}{}_{\beta}V^{\beta}{}_{||\gamma}\dot{V}^{\gamma}$$

O segundo termo à direita desta última, por sua vez, é igual a:

$$h^{\alpha}{}_{\beta}V^{\beta}{}_{||\gamma}\dot{V}^{\gamma} = V^{\alpha}{}_{\gamma}\ \dot{V}^{\gamma}\quad ;$$

logo,

$$(24)\quad h^{\alpha}{}_{\beta}(V^{\gamma||\beta})_{||\gamma} = h^{\alpha}{}_{\beta}(\sigma^{\beta\gamma}{}_{||\gamma}-\omega^{\beta\gamma}{}_{||\gamma}+ \tfrac{1}{3}\theta^{||\beta})-(\sigma^{\alpha}{}_{\beta}+\omega^{\alpha}{}_{\beta})\dot{V}^{\beta}$$

Utilizando-se as equações de Einstein, mostra-se que:

$$- h^{\alpha}{}_{\beta}R^{\beta}{}_{\gamma}V^{\gamma} = + q^{\alpha}$$

Substituindo todos esses resultados em (23), obtemos a equação de vínculo abaixo, que mostra como o fluxo de energia q^{α} influencia as quantidades cinemáticas

$$(25)\quad h^{\alpha}{}_{\beta}(\sigma^{\beta\gamma}{}_{||\gamma} - \omega^{\beta\gamma}{}_{||\gamma}- \tfrac{2}{3}\theta^{|\beta})-(\sigma^{\alpha}{}_{\beta}+\omega^{\alpha}{}_{\beta})\dot{V}^{\beta} = q^{\alpha}$$

As propriedades de simetria do tensor de Riemann como veremos a seguir, induzem a mais uma equação de vínculo.

$$R_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0 \Longrightarrow V_{[\alpha||\beta||\gamma]} = 0$$

Com o campo vetorial V^{α}, o tensor $\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}$ e o projetor $h_{\alpha\beta}$ podemos escrever a seguinte identidade:

$$(h_{\alpha}{}^{\gamma}h_{\beta}{}^{\delta}V_{\gamma||\delta}\,\eta^{\alpha\beta\mu\nu}V_{\nu})_{||\mu} \equiv h_{\alpha}{}^{\gamma}h_{\beta}{}^{\delta}\,V_{\gamma||\delta||\mu}\,\eta^{\alpha\beta\mu\delta}\,V_{\delta} +$$

$$- V_{\beta||\mu}\,\dot{V}_{\alpha}V_{\nu}\eta^{\alpha\beta\mu\nu} + h_{\alpha}{}^{\gamma}h_{\beta}{}^{\delta}\,V_{\gamma||\delta}\eta^{\alpha\beta\mu\nu}\,V_{\nu||\mu}$$

Devemos notar que

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\,h_{\alpha}{}^{\mu}h_{\beta}{}^{\nu}V_{\mu||\nu||\gamma} = \eta^{\alpha\beta\gamma\delta}h_{\alpha}{}^{\mu}h^{\nu}{}_{\beta}V_{[\mu||\nu||\gamma]} = 0$$

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\,V_{\alpha||\beta}\,\dot{V}_{\gamma}V_{\delta} = \eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\omega_{\alpha\beta}\,\dot{V}_{\gamma}\,V_{\delta}$$

$$h_{\alpha}{}^{\mu}h_{\beta}{}^{\nu}\,V_{\mu||\nu}\,\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\,V_{\delta||\gamma} = \eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\omega_{\alpha\beta}\,V_{\gamma}\,\dot{V}_{\delta}$$

logo,

$$(26) \qquad \omega^{c}{}_{//c} = -\,2\omega^{c}\dot{V}_{c}$$

Existe ainda mais uma equação de vínculo que pode ser obtida se contrairmos (22) com o tensor $\eta^{\gamma\beta\epsilon\rho}\,V_{\epsilon}$, simetrizarmos os índices α e ρ e utilizarmos a definição da parte magnética do tensor de Weyl. Dessa forma obteremos a seguinte equação:

$$(27) \quad \eta_{\alpha\beta} = 2\,\dot{V}_{(\alpha}\omega_{\beta)} - h_{\alpha}{}^{\gamma}h_{\beta}{}^{\delta}\left\{\omega^{\mu||\epsilon}_{(\gamma} + \sigma^{\mu||\epsilon}_{(\gamma}\right\}\,\eta_{\delta)\rho\mu\epsilon}\,V^{\rho}$$

As seis equações, envolvendo as quantidades cinemáticas que obtivemos, possuem toda a informação contida na identidade de Ricci. Devemos notar que a equação que determina a evolução de $\sigma_{\alpha\beta}$ e a equação (27) envolvem a parte elétrica e magnética do tensor de Weyl respectivamente. Só nos será possível determinar completamente a evolução das quantidades cinemáticas se soubermos como evoluem os tensores $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$. A identidade de Bianchi, escrita sob a forma

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{||\delta} = R^{\gamma[\alpha\|\beta]} + \frac{1}{6}\, g^{\gamma[\beta}R^{|\alpha]}$$

e projetada no referencial inercial (sub-espaço H), determinado pelo campo de vetores V^{α}, é as equações de campo para E e H e portanto, nos fornece essa informação.

No caso de um fluido perfeito, utilizando as equações de Einstein, obtemos (21):

$$(28)\quad H^{\alpha\beta}{}_{||\gamma}h_{\varepsilon\beta}h_{\alpha}{}^{\gamma} - 3E_{\alpha\varepsilon}\omega^{\alpha} - E_{\alpha}{}^{\beta}\theta_{\beta\gamma}V_{\delta}\eta_{\varepsilon}{}^{\delta\gamma\alpha} = (\rho+p)\omega_{\varepsilon}$$

$$(29)\quad E^{\alpha\beta}{}_{||\gamma}h_{\varepsilon\beta}h_{\alpha}{}^{\gamma} + 3H_{\alpha\varepsilon}\omega^{\alpha} + H_{\alpha}{}^{\beta}\theta_{\beta\gamma}V_{\delta}\eta_{\varepsilon}{}^{\delta\gamma\alpha} = \frac{1}{3}\rho_{|\alpha}\, h^{\alpha}_{\varepsilon}$$

$$(30)\quad \dot{H}^{\gamma\delta}h_{\delta}{}^{\alpha}h_{\gamma}{}^{\beta} + E^{\gamma\delta||\varepsilon}\, h_{\delta}{}^{(\alpha}\,\eta^{\beta)}{}_{\rho\varepsilon\gamma}\, V^{\rho} + \theta H^{\alpha\beta} - H_{\gamma}^{(\beta}\theta^{\alpha)\gamma} +$$

$$- H_{\gamma}{}^{(\beta}\omega^{\alpha)\gamma} - \eta^{\alpha\gamma\delta\varepsilon}\eta^{\beta\rho\mu\nu}\, V_{\delta}V_{\rho}H_{\varepsilon\mu}\,\theta_{\nu\gamma} + \dot{V}^{\gamma}\, E^{\delta(\alpha}\eta^{\beta)}{}_{\varepsilon\gamma\delta}V^{\varepsilon} = 0$$

$$(31)\quad \dot{E}^{\gamma\delta}h_{\delta}{}^{\alpha}h_{\gamma}{}^{\beta} - H^{\gamma\delta||\varepsilon}h_{\delta}{}^{(\alpha}\eta^{\beta)}{}_{\rho\varepsilon\gamma}\, V^{\rho} + \theta E^{\alpha\beta} - E_{\gamma}{}^{(\beta}\theta^{\alpha)\gamma} - E_{\gamma}^{(\beta}\omega^{\alpha)\gamma} +$$

$$-\eta^{\alpha\gamma\delta\varepsilon}\eta^{\beta\rho\mu\nu}\, V_{\delta}V_{\rho}\, E_{\varepsilon\mu}\,\theta_{\nu\gamma} - \dot{V}^{\gamma}H^{\delta(\alpha}\eta^{\beta)}{}_{\varepsilon\gamma\delta}\, V^{\varepsilon} = -\frac{1}{4}(\rho+p)\sigma^{\alpha\beta}$$

Essas equações, juntamente com as (13,18,21,25,26,27), nos dão um conjunto que pode ser utilizado em substituição as eqs. Einstein. A consistência desse conjunto de equações não está ainda definitivamente estabelecida, no entanto elas têm sido utilizadas por diversos autores na análise de modelos cosmológicos (27,12). Queríamos ressaltar que essas equações, sendo projeções no tri-espaço, exibem mais nitidamente as propriedades deste e podem mais facilmente ser associadas aos dados experimentais (27).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. LICHNEROWICZ, A. - (1955). Théories Relativistes de la Gravitation e de l'electromagnetisme. Masson, Paris.

2. FOURÈS-BRUHAT, Y. (1962). The Cauchy Problem. In: L. Witten, ed.: "Gravitation: An Introduction to Current Research", New York, p. 130-168.

3. FOURÈS-BRUHAT, Y. (1952). Théorème d'existence pour certains Systèmes de'équations aux derivées partielles non linéaires. Acta Math., 88, p. 141-225.

4. LICHNEROWICZ, A. - (1960). Ann. Math. Pura Appl. 50, p. 1

5. EISENHART, L.P. - (1949). Riemannian Geometry, 2d. ed., Princeton, N.J.

6. EHLERS, J. & KUNDT, W. - Exact Solutions of the Gravitational Field Equations. In: L.Witten, ed.: "Gravitation: An Introduction to Current Research", N.Y., p. 49.

7. OLIVEIRA, C.G. - Relativity and Gravitation. Monografia XXVI, CBPF.

8. NEWMAN, E.T. & PENROSE, R. - (1962). An Approach to Gravitation Radiation by a Method of Spin Coefficents. J. Math. Phys. 3, 566.

9. NEWMANN, E.T. & UNTI, T.W.J. - (1962). Behaviour of Asymptotically Flat Empty Spaces. J. Math.Phys. 3, 891-901.

10. HAWKING, S.W. (1966). Perturbations of an Expanding Universe. Ast.J. 145, 544-54.

11. NOVELLO, M. - (1975). Generalization of Einstein's Theory of Gravity in the Presence of Tensions in Space-Time. International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Itália.

12. NOVELLO, M. & SOARES, I.D. On the Evolution of Petrov Eingenvalues. (to be published).

13. WHEELER, J.A. (1964). Geometrodynamics and the Issue of the Final State. In: Relativity, Groups and Topology. Gordon and Breach, N.Y.

14. EINSTEIN, A., INFELD, L. & HOFFMAN, B. - (1958). The Gravitational Equations and the Problem of Motion. Ann.Math. 39, 65.

15. ANDERSON, J.L. - Principles of Relativity Physics. Academic Press, N.Y.

16. MANASSE, F.K. & MISNER, C.W. - Fermi Normal Coordinares and Some Basic Concepts in Differential Geometry. J.Math. Physics, Vol. 4, nº 6, 735.

17. HAWKING, S.W. & ELLIS, G.F.R. - The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge Monographs on Mathematical Physics.

18. NOVELLO, M. - Tópicos de Cosmologia Relativista. Monografia XXXIV, CBPF.

19. LANDAU & LIFSHITZ - Teoria Clasica de los Campos. Editorial Reverte S.A.

20. WEBER, J. - General Relativity and Gravitational Waves. Interscience, N.Y.

21. Trabalhos do Grupo de Cosmologia Relativista, CBPF-Rio, período 1974-1975.

22. LEITE LOPES, J. - Classical Symmetries: An Elementary Survey. Notas de Física, Vol. XIV, Nº 4. CBPF.

23. FULTON, T. & ROHRLICH, R. - Rev. Mod.Physics, 34, 442 (1962).

24. Idem, Ref. 1.

25. Idem, Ref. 7.

26. Idem, Ref. 10.

27. ELLIS, G.F.R. - Relativistic Cosmology. International School of Physics "Enrico Fermi". Course XLVII, Varena.

28. JORDAN, P., EHLERS J., & KUNDT, W. (1960). Abh. Math. Nat. Kl. Akord. Wiss. Mainz. Nº 2.

29. NOVELLO, M., GALVÃO, C.A.P., SOARES, I.D. & SALIM, J.M. - Electric and Magnetic Gravitational Monopoles I. J.Phys. Vol. 9, Nº 4, 1976, p. 547.

30. MOVELLO, M., SOARES, I.D. & SALIM, J.M. - On Jacobi Fields. (to be published).

31. RAYCAUDHURI. Phys. Rev. 98, 1123 (1955).