MÉTODOS HAMILTONIANOS PARA O CAMPO GRAVITACIONAL FRACO

Tese de Mestrado

IVANO DAMIÃO SOARES

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

1972

Agradecimentos.

Ao Professor Colber G. de Oliveira, por sua orientação. Ao Professor Carlos Márcio do Amaral, a quem devo parte de minha formação científica. A meu pai. A Morgana Tavares, pelo trabalho de datilografia.

RESUMO

Inicialmente fez-se uma revisão dos métodos Hamiltonianos de Dirac para as equações de Einstein. Considerou-se a aproximação linear. O grupo de covariância da teoria se divide em um grupo de Poincaré e um grupo de gauge infinitesimal. Os vínculos Hamiltonianos linearizados geram a parte de gauge do grupo canônico da teoria linearizada. Faz-se uma escolha conveniente de condições de coordenadas e constroi-se os observáveis canônicos segundo Bergmann e Komar. Mostra-se que os observáveis obtidos são idênticos às variáveis TT da teoria ADM [6]. Considerou-se a versão spinorial linearizada da teoria e mostra-se que vínculos primários de spin geram transformações de Lorentz locais infinitesimais. Condições de spin são impostas e observáveis canônicos spinoriais construidos. Mostra-se que a todo observável spinorial corresponde um único observável tensorial e que as parcelas associadas a vínculos de spin não contribuem na forma do observável tensorial. Os Parêntesis de Poisson dos observáveis, em ambos os casos, são calculados.

INTRODUÇÃO

A formulação Hamiltoniana clássica para o campo gravitacional (descrito pelas equações de Einstein) está ligada a uma parte do programa para a quantização dêste campo desde que, uma vez resolvido o problema de colocar uma teoria clássica geral na forma Hamiltoniana, estamos corretamente encaminhados para obter uma teoria quântica acurada ou, quando não, pelo menos, uma primeira aproximação [1]. Por outro lado, é desejável obter a teoria de Einstein para o campo gravitacional na forma Hamiltoniana devido ao grande poder de transformação associado a esta formulação e porque ela nos permite distinguir aquelas variáveis que são fisicamente importantes e aquelas que simplesmente descrevem o sistema de coordenadas.

A vantagem real do método Hamiltoniano para a quantização é devida ao fato de que ele nos dá um conjunto completo de relações de comutação - as relações de comutação canônicas - a partir do grupo de transformações canônicas que aplicam o espaço de fase da teoria clássica nele mesmo. O grupo infinitesimal de transformações canônicas pode ser representado pelos seus geradores, as variáveis canônicas de campo e seus funcionais, que são desta forma dotados de uma álgebra de comutação, os Parêntesis de Poisson (PP). A transição para a correspondente teoria quantizada é realizada identificando-se o grupo (infinitesimal) de transformações canônicas com um grupo de transformações unitárias num espaço de Hilbert que tem a mesma álgebra de comutação dos geradores e que aplica o espaço de Hilbert de possíveis estados quânticos em si mes mo *. Estas transformações unitárias infinitesimais são geradas por operadores (os observáveis da teoria quantizada) que se supõe corresponder às variáveis de campo canônicas clássicas.

A analogia transformação canônica clássica - transformação unitária não é mais válida, porém, se o grupo clássico de transformações canônicas contem um subgrupo que aplica um estado físico no mesmo estado físico definido em uma representação diferente [2] (subgrupo de invariância). Este é o caso de teorias relativistas gerais onde o grupo canônico de invariância forma um espaço funcional cujas funções são definidas sôbre a variedade espaço-tempo 4-dimensional e cujos geradores se anulam, i. e., são relações algébricas ou relações diferenciais entre as variáveis de campo (teorias gauge-invariantes gozam também desta propriedade e o melhor exemplo conhecido é o campo eletromagnético, onde o vínculo que aparece é a condição de que o momentum canônico conjugado ao potencial escalar se anula em todos os pontos). O sistema de vínculos resultantes, i.e., os geradores do grupo de invariância, inclui a hamiltoniana como vínculo e neste caso deve-se dar um tratamento especial à teoria, com vistas à quantização usual por correspondência, o que constitui uma parte do presente trabalho.

Inicialmente foi considerado o problema de Cauchy para as equações de Einstein, a partir de uma análise da estrutura matemática destas e-

---

* Este procedimento para a quantização é baseado na premissa de que a álgebra de Lie dos comutadores quânticos possui certas analogias com a álgebra de Lie dos PP, embora não haja um isomorfirmo, ou mesmo um homomorfismo, de uma na outra (quantização por correspondência).

quações, e se mostra diretamente que um problema de Cauchy não bem-definido é equivalente à existência de vínculos na versão Hamiltoniana da teoria. Mostra-se que, das 10 equações de Einstein $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R = 0$, seis são equações dinâmicas e quatro ($G_{0\mu} = 0$) são relações de vinculação (que aparecerão na versão hamiltoniana), associadas à existência das quatro identidades de Bianchi na Relatividade Geral. Das dez componentes da métrica $g_{\mu\nu}(x)$, seis são dinâmicas ($g_{ij}(x)$, $ij = 1,2,3$) e quatro estão associadas ao sistema de coordenadas. Na seção 2, descrevemos o método geral de Dirac [3] para tratar teorias Hamiltonianas com vínculos, introduzindo os conceitos de vínculos de primeira classe e segunda classe e analisamos as transformações geradas por êstes, via PP, sôbre as variáveis do espaço de fase; introduzimos os Parêntesis de Dirac (PD) guiados pela exigência de eliminação dos vínculos de segunda classe da teoria e analisamos as implicações matemáticas dêste novo parêntesis.

Na seção 3, tratamos o caso do campo gravitacional no vazio, mostramos que a Hamiltoniana é uma combinação linear de vínculos (vínculos Hamiltonianos), com coeficientes que são variáveis não dinâmicas e, em consequência, a propagação via Hamiltoniana não é ùnicamente determinada; os vínculos são os geradores do grupo canônico de invariância da teoria. Aplicamos o método de Dirac, tendo antes tornado a dinâmica única introduzindo condições de coordenadas (i.é, fixando $g_{0\mu}$) que também serão consideradas como vínculos e cuja escolha não é única. O número total de componentes independentes será dois para cada variável canônica fundamental, g_{ij} e p^{ij}, no total quatro graus de liberdade que descrevem corretamente um campo de spin 2 e massa nula [4]. Dai, segundo Bergmann e Komar [5], construimos, na seção 4, com o conjunto completo de vínculos, os observáveis da teoria. Um cálculo explícito dêstes observáveis é feito para a aproximação linear. Vínculos Hamiltonianos na aproximação linear geram a parte de gauge do grupo canônico de invariância da teoria.

Os observáveis canônicos determinados coincidem com as variáveis da teoria canônica linearizada de Arnowitt, Deser e Misner para a Relatividade Geral, módulo as mesmas condições de coordenadas.

No apêndice III damos o mesmo tratamento para o campo eletromagnético livre e utilizamos a condição de gauge de radiação $\nabla\cdot\vec{A} = 0$. Os observáveis canônicos (gauge-invariantes) (A_i^*, P^{*i}) são idênticamente as variáveis transversais (A_i^T, P^{Ti}) da formulação Hamiltoniana usual para o campo eletromagnético.

Na seção 5, considerou-se a versão spinorial da teoria Hamiltoniana para o campo gravitacional e a construção de observáveis canônicas spinoriais. Uma versão spinorial da teoria é de interesse por duas razões: a) qualquer teoria de campo de gravitação eventualmente envolverá a interação do campo gravitacional com outros campos. E é um fato bem conhecido que a interação com campos fermiônicos pode ser descrita somente quando usamos tetradas (ou matrizes de spin, equivalentemente) na descrição do campo gravitacional; b) uma formulação spinorial pode ser mais conveniente para a discussão de problemas de flutuação na métrica (q-número) que uma formulação tensorial. Na versão spinorial a assinatura da métrica é fixa - a métrica é dada inteiramente em termos de quatro matrizes hermitianas de spin 2 x 2. Embora se permitam flutuações nas matrizes hermitianas (agora consideradas como q-números), estas flutuações não alterarão a assinatura da métrica. Daí, a integração ao longo de trajetórias clássicas (variáveis de campo c-números), necessária por exemplo para o método de quantização de Feynman, é significativamente diferente nas formulações spinorial e tensorial da RG Esta diferença pode levar a teorias quânticas da gravitação não equivalente [7]. Uma breve revisão sôbre as propriedades básicas de spinores sôbre uma variedade Riemanniana é feita no apêndice I, e também a determinação de variáveis dinâmicas na formulação spinorial da teoria Hamiltoniana de Dirac, análogo ao caso tensorial, mas com um conjunto apropriado de vínculos. Vão aparecer seis vínculos primários de spin que geram as transformações de Lorentz locais associados ao $SL_2(x)$ (rotação dos eixos de tetradas). Considerou-se a aproximação de campo fraco para a versão spinorial da teoria. Vínculos Hamiltonianos linearizados são os geradores das transformações de gauge, via PP, sôbre as variáveis canônicas spinoriais. Observáveis canônicos spinoriais são construídos de forma análoga. Mostra-se que a fatoração dos observáveis canônicos tensoriais em termos de observáveis canônicos spinoriais é viável, pelo menos na aproximação linear, de modo que observáveis canônicos spinoriais determinam variáveis canônicas tensoriais que são observáveis no sentido Bergmann-Komar.

No apêndice II, tratamos do problema da fixação dos eixos de tetradas, i.ē, dos vínculos que deverão ser introduzidos para fixar o referencial de spin.

NOTAÇÃO E CONVENÇÕES

Estamos considerando uma variedade Riemanniana 4-dimensional, o espaço-tempo, em cada ponto da qual os objetos geométricos são construídos. As coordenadas do espaço-tempo são $\{x^\mu; \mu = 0,1,2,3\}$. Em geral, índices gregos minúsculos variam de 0 a 3; índices latinos minúsculos de 1 a 3; índices latinos maiúsculos, de 1 a 2. Para qualquer tipo de índice, usamos a convenção de soma de Einstein, salvo indicação em contrário.

O grupo de covariância da Relatividade Geral é o grupo de transformações gerais de coordenadas e, para elementos infinitesimais, toma a forma

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$$

onde $\xi^\mu(x)$ são quatro funções arbitrárias do espaço-tempo, contínuas, que caracterizam a transformação. Estes mapeamentos podem ser considerados (de fato, por isomorfismo) como mapeamento da variedade nela mesma e iremos nos referir a ēste grupo como o MMG (manifold mapping group) notação devida a J. L. Anderson [8].

A métrica do espaço-tempo é $g_{\mu\nu}(x)$, de assinatura -2; localmente po de sempre ser posta na forma da métrica de Lorentz $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$. A inversa de $g_{\mu\nu}(x)$ existe em todo ponto, $g^{\mu\nu}(x)$, tal que $g_{\mu\nu}\, g^{\nu\lambda} = \delta_{\mu}^{\lambda}$.

Derivadas em relação a variável x^{μ} será notada por ∂_{μ} ou pelo índice μ antecedido de uma vírgula. Assim $\partial_{\mu}\phi \equiv \phi_{,\mu}$. Os símbolos de Christoffell de segunda espécie são construidos com a métrica da forma

$$\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}(g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta})$$

A derivada covariante em relação a x^{μ}, construída com o símbolo de Christoffell acima, é notada por um (;) precedendo o índice μ.

Supomos que, pelo menos numa região finita do espaço-tempo, é sempre possível construir hipersuperfícies do tipo espaço 3-dimensionais, i.é, para quaisquer dois pontos infinitesimalmente próximos, x^{μ} e $x^{\mu} + dx^{\mu}$, pertencentes à hiper superfície

$$g_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu} < 0$$

De acordo com Dirac [9, 10], vamos abandonar a simetria 4-dimensional, escolhendo sistemas de coordenadas tais que as hipersuperfícies 3-dim $x^0 =$ cte são todas do tipo-espaço; e definimos a normal unitária à hipersuperfície por

$$\ell^{\mu} = \frac{g^{0\mu}}{\sqrt{g^{00}}}\ ; \qquad \ell_{\mu} = g_{\mu\alpha}\, \ell^{\alpha} = \frac{\delta_{\mu}^{0}}{\sqrt{g^{00}}}$$

$$\ell^{\mu}\, \ell_{\mu} = 1$$

Associada a esta hipersuperfície tipo-espaço, temos toda uma geometria 3-dimensional. Assim, a métrica da hipersuperfície é dada por

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

onde x^i e $x^i + dx^i$ são pontos sôbre a hipersuperfície. A inversa de g_{ij} é $e^{ij} = g^{ij} - \ell^i\ \ell^j$, no sistema de coordenadas onde a normal à hipersuperfície é dada por ℓ^μ e onde g^{ij} são as componentes espaciais de $g^{\mu\nu}$. e^{ij} é o tensor fundamental para ser usado levantando índices de tensores na geometria 3-dimensional x^0 = cte. Os símbolos de Christoffell associados a esta 3-geometria são construidos com g_{ij}, e^{ij} da forma:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\ e^{i\ell}\ (g_{k\ell,j} + g_{j\ell,k} - g_{jk,\ell})$$

análogo ao caso 4-dimensional. Os tensores de Riemann-Christoffell e Ricci 3-dimensionals serão notados por ${}^3R_{ijk}$ e ${}^3R_{ij}$, respectivamente. A derivada covariante 3-dimensional será notada por uma barra (|) precedendo o índice correspondente. Assim, por exemplo:

$$A^i_{|j} = A^i_{,j} + \Gamma^i_{\ell j}\ A^\ell \quad .$$

O determinante de $g_{\mu\nu}$ é negativo e será denotado por g; o determinante de g_{ij}, também negativo, será denotado por γ. Vale a relação $g \cdot g^{00} = \gamma$.

Finalmente, por simplicidade, usamos unidades tais que

$$\frac{16\pi k}{c^4} = 1, \qquad c = 1$$

onde k é a constante gravitacional de Newton.

1. O PROBLEMA DO VALOR INICIAL PARA AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN E A FORMULAÇÃO HAMILTONIANA

Consideremos inicialmente uma teoria de campo geral e não especificada, sôbre o espaço-tempo, derivada de um princípio de ação

$$I = \int \mathcal{L}\, d^4x \tag{1.1}$$

onde $\mathcal{L} = \mathcal{L}(y_A(x);\, y_{A,\mu}(x))$, $A = 1 \ldots N$.

As equações de campo são dadas por

$$\mathcal{L}^A \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_A} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{A,\mu}} = 0 \tag{1.2}$$

a partir do princípio variacional com $\delta I = 0$. Estas equações são responsáveis pela propagação das variáveis de campo no espaço-tempo $\{x^\mu\}$.

Usando a notação

$$\frac{\delta L}{\delta y_A} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_A} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{A,i}}$$

(1.2) se escreve

$$\frac{\delta L}{\delta y_A} - \partial_o \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{A,o}} = 0 \tag{1.2'}$$

ou, desenvolvendo-se para uma forma mais conveniente

$$\frac{\delta L}{\delta y_A} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y_B \, \partial y_{A,o}} y_{B,o} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y_{B,i} \, \partial y_{A,o}} y_{B,io} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y_{B,o} \, \partial y_{A,o}} y_{B,oo} = 0 \tag{1.3}$$

Vamos agora formular o problema do valor inicial para a teoria: Dada uma hipersuperfície 3-dimensional imersa no espaço-tempo e dados os valores sôbre a hipersuperfície dos objetos $y_A(x)$ e de um número suficiente de suas derivadas normais (à hipersuperfície), construir uma solução das equações de movimento da teoria, que se reduz a estes valores sobre a hipersuperfície. A natureza da hipersuperfície e dos dados iniciais depende, em geral, do caráter dos objetos $y_A(x)$ e das equações de campo para tais objetos.

Para uma grande classe de teorias, as componentes $y_A(x)$ dos objetos satisfazem equações de campo do tipo.

$$A^{\mu\nu} \, y_{A,\mu\nu} + B^{C}{}_{A}{}^{\mu} \, y_{C,\mu} + C_{A}^{N} \, y_{N} = f_{A}$$

onde os coeficientes e f_A são funções definidas sôbre a variedade. Quando a assinatura da matriz $A^{\mu\nu}$ for -2, tais equações são chamadas equações diferenciais hiperbólicas e uma hipersuperfície conveniente para se dar os valores iniciais é tal que suas normais η_μ satisfaçam $A^{\mu\nu} \, \eta_\mu \, \eta_\nu > 0$ [8]. Usualmente as componentes de $A^{\mu\nu}$ serão as componentes da métrica $g_{\mu\nu}$ (assinatura -2) e neste caso a hipersuperfície de valores iniciais será uma hipersuperfície do tipo-espaço. Para tal superfície, os valores iniciais consistirão dos valores de y_A e suas primeiras derivadas normais $y_{A,\nu}\, g^{\mu\nu}\, n_{\mu}$ sôbre esta hipersuperfície. Pode-se mostrar que, para uma hipersuperfície tipo-espaço, as derivadas normais à hipersuperfície, dos objetos $y_A(x)$ são proporcionais a $y_{A,o}(x)$ (pelo menos nos S. C. onde as hipersuperfícies x^o = cte são todas tipo espaço) [14]. Assim, para o caso de uma teoria cujas equações de campo são do tipo hiperbólico com $A^{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}$ (como é a Relatividade Geral), os valores iniciais são os campos $y_A(x)$ e suas derivadas temporais primeiras $y_{A,o}(x)$, dadas sôbre uma hipersuperfície tipo-espaço. As equações de campo (1.3) propagam estes valores no tempo; ou, equivalentemente: por um prolongamento analítico na variável x^o, pode-se ter (a partir da hipersuperfície de valores iniciais e utilizando (1.3)) os valores de $y_A(x)$ em qualquer outra hipersuperfície space-like, se e somente se a matriz

$$\Lambda^{AB} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y_{A,o}\, \partial y_{B,o}} \tag{1.4}$$

coeficiente de $y_{B,oo}$, for não singular, isto é,

$$\det\,(\Lambda^{AB}) \neq 0 \tag{1.5}$$

Se (1.5) não vale, a solução das equações (1.2), para os valores iniciais dados sôbre a hipersuperfície, não é única. Um exemplo disto é quando a Lagrangeana é linear em $y_{A,o}$, para algum A, - que é o caso da Lagrangeana para o campo de Einstein no vazio.

As equações de Einstein para o campo gravitacional no vazio são

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R = 0 \tag{1.6}$$

onde

$$R_{\mu\nu} = \left\{{\sigma \atop \mu\sigma}\right\}_{,\nu} - \left\{{\sigma \atop \mu\nu}\right\}_{,\sigma} + \left\{{\alpha \atop \mu\sigma}\right\} \left\{{\sigma \atop \alpha\nu}\right\} - \left\{{\alpha \atop \mu\nu}\right\}\left\{{\sigma \atop \alpha\sigma}\right\}$$

e

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

As equações (1.6) provem de (1.2) para o caso $y_A \to g_{\mu\nu}$ com a Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\; R \tag{1.7a}$$

ou

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\; g^{\mu\nu}\left[\left\{{\sigma \atop \mu\rho}\right\}\left\{{\rho \atop \nu\sigma}\right\} \quad \left\{{\rho \atop \mu\nu}\right\}\left\{{\sigma \atop \rho\sigma}\right\}\right] \tag{1.7b}$$

(1.7b) diferindo de (1.7a) por uma divergência total.

Uma expansão direta nos mostra que (1.7b) pode ser escrita [9]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(2) + \mathcal{L}(1) + \mathcal{L}(0) \tag{1.8}$$

onde $\mathcal{L}(2)$ é homogênea de segunda ordem em $g_{\mu\nu,o}$, $\mathcal{L}(1)$ é homogênea e linear em $g_{\mu\nu,o}$ e $\mathcal{L}(0)$ é independente destas quantidades. Tem-se

$$\mathcal{L}(2) = \frac{1}{4}\sqrt{-g}\; g^{oo}\, g_{rs,o}\, g_{ab,o}\, (e^{ra} e^{sb} - e^{rs} e^{ab})$$

onde as derivadas temporais $g_{\mu o,o}$ não ocorrem. Em 1958, Dirac (e, independentemente De Witt e Anderson) [9, 15] mostrou que podemos adicionar a (1:8) uma divergência total (portanto não se alteram as equações de Einstein)

$$\mathcal{D} = \left[(\sqrt{-g}\; g^{oo})_{,m} \frac{g^{mo}}{g^{oo}}\right]_{,o} - \left[(\sqrt{-g}\; g^{oo})_{,o} \frac{g^{mo}}{g^{oo}}\right]_{,m}$$

obtendo-se uma nova densidade Lagrangeana que não contem derivadas em relação a x^0 de $g_{o\mu}$:

$$\mathcal{L}_D = \mathcal{L}(2) + \mathcal{L}^*(1) + \mathcal{L}(0) \tag{1.9}$$

onde $\mathcal{L}^*(1) = \mathcal{L}(1) + \mathcal{D}$ e $\dfrac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial g_{o\mu,o}} = 0$. A partir de agora, a densidade de Lagrangeana usada será sempre (1.9).

Utilizando estes resultados, calculamos a matriz (1.4) para o campo $g_{\mu\nu}^{(x)}$:

$$\Lambda^{(\mu\nu)(\rho\sigma)} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_D}{\partial g_{\mu\nu,o}\, \partial g_{\rho\sigma,o}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} (ij) & (oj) & (oo) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c|c} \Lambda^{(ij)(\ell m)} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} (ij) \\ (oj) \\ (oo) \end{array} \end{array} \tag{1.10}$$

As equações (1.3) para o campo $g_{\mu\nu}(x)$ podem ser postas na forma

$$M^{\mu\nu}(g_{\mu\nu};\, g_{\mu\nu,o}) - \frac{\partial^2 \mathcal{L}_D}{\partial g_{\mu\nu,o}\, \partial g_{oo,o}}\, g_{oo,oo} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}_D}{\partial g_{\mu\nu,o}\, \partial g_{oi,o}}\, g_{oi,oo} -$$

$$- \frac{\partial^2 \mathcal{L}_D}{\partial g_{\mu\nu,o}\, \partial g_{ij,o}}\, g_{ij,oo} = 0$$

e, utilizando (1.10):

$$\Lambda^{(\mu\nu)(ij)}\, g_{ij,oo} - M^{\mu\nu}(g_{\mu\nu};\, g_{\mu\nu,o}) = 0 \tag{1.3'}$$

Tendo em vista que $\mathcal{L}_D$ não depende das derivadas $g_{o\mu,o}$, $M^{\mu\nu}$ conterá somente derivadas em relação a x^o de g_{ij} e as equações (1.3') se desdobrarão na forma

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_D}{\partial g_{ij,o}\,\partial g_{ab,o}}\, g_{ab,oo} - M^{ij}(g_{\mu\nu};\, g_{\ell m,o}) = 0 \qquad (1.11a)$$

$$M^{o\mu}(g_{\mu\nu};\, g_{ij,o}) = 0 \qquad (1.11b)$$

Da forma de $\mathcal{L}(2)$ e $\mathcal{L}^*(1)$, segue diretamente que a derivada temporal de mais alta ordem contida em $M^{o\mu}$ é $g_{ij,o}$.

As equações (1.11) são as equações de Einstein para o campo gravitacional no vazio e nesta forma fica evidente que as equações de campo propagam somente as componentes $g_{ij}(x)$, a partir da hipersuperfície de valores iniciais, e não determinam como as outras componentes $g_{o\mu}(x)$ se propagam, ficando arbitrário seu comportamento em relação à variável x^o. Assim, das dez equações de Einstein (1.11), seis são equações dinâmicas ($G_{ij} = 0$) e quatro são apenas relações de vinculação entre as variáveis de campo e suas derivadas primeiras temporais.* A existência dos vínculos (1.11b) era de se esperar: a ação (1.1), com $\mathcal{L}$ dada por (1.7), é MMG-invariante, o que acarreta as identidades de Bianchi para a teoria,

* Os dados iniciais $g_{\mu\nu}(x)$ e $g_{\mu\nu,o}(x)$ sôbre hipersuperfície de valores iniciais devem ser consistentes com $M^{o\mu} = 0$, além de, evidentemente, satisfazer condições de serem métrica de uma hipersuperfície space-like (cf. Anderson [8] seção 10-11).

como consequência do teorema de Noether [16]. A existência das relações de vinculação (1.11b) podem ser facilmente constatadas a partir destas identidades [10]. Temos então o esquema:

$$
\begin{tikzcd}
\text{Id. Bianchi} & & \text{Rel. Vinculação} \\
G^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv 0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & G_{o\mu} = 0 \\
& \Lambda^{(\mu\nu)(\rho\sigma)} \text{ singular} \arrow[ur, leftrightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

Resumindo: o fato de (1.8) ser singular (consequência direta da teoria ter como grupo de simetria o MMG) faz com que os valores iniciais sôbre a hipersúperfície inicial não determinem de modo único o campo $g_{\mu\nu}(x)$ fora desta hipersuperfície; a solução deverá sempre conter quatro funções arbitrárias (por exemplo $g_{o\mu,oo}$) e isto está associado a que sempre podemos escolher um sistema de coordenadas arbitrários para a descrição da variedade espaço-tempo. As dez equações de Einstein se separam em seis equações dinâmicas que propagam as variáveis $g_{ij}(x)$ (*variáveis dinâmicas* do sistema) e em quatro relações de vinculação entre os dados iniciais sôbre a hipersuperfície inicial.

Estes problemas se transportam inteiramente para a versão Hamiltoniana da teoria: de fato, o conceito básico na teoria hamiltoniana é a de um estado num dado instante de tempo. No caso de uma teoria relativista, isto deve ser compreendido como o estado sôbre uma hipersuperfície tipo-espaço 3-dimensional e as equações Hamiltonianas de movimento determinam como as variáveis dinâmicas que fixam este estado, variam quando esta hipersuperfície se propaga no tempo. Assim, a teoria Hamil toniana é, na verdade, a formulação de um problema de Cauchy: dadas as condições iniciais, propagá-las a partir da hipersuperfície de valores iniciais, via PP, pela Hamiltoniana da teoria. E, se o problema de Cauchy não está bem definido, a Hamiltoniana não propaga de modo único as condições iniciais, o que é equivalente à existência de vínculos na teoria. É o que iremos mostrar a seguir.

Consideremos a Lagrangeana da ação (1.1). O momentum canônicamente conjugado à variável $y_A(x)$ é definido por:

$$\pi^A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{A,o}} \tag{1.12}$$

A formulação Hamiltoniana envolve a passagem das variáveis Lagrangeanas $(y_A(x),\ y_{A,o}(x))$, para as variáveis do espaço de fase $(y_A(x),\ \pi^A(x))$ e o jacobiano da transformação

$$y_{A,o}(x) \quad \rightarrow \pi^A(x)$$

é exatamente o determinante da matriz (1.4), desde que, por (1.12)

$$\Lambda^{AB} = \frac{\partial \pi^A}{\partial y_{B,o}}$$

e quando esta matriz for singular (existem relações de vinculação do tipo $\pi^A = f^A(y_B)$; ou, o problema de Cauchy não está bem proposto), a forma Hamiltoniana da teoria não fica unicamente definida; contém coeficientes arbitrários (variáveis não dinâmicas). Neste caso, a teoria requer um tratamento especial, o que faremos na seção seguinte.

Nota: No caso do campo gravitacional, utilizando-se a Lagrangeana (1.9), $\mathcal{L}_D$, obtemos que $P^{o\mu} = \dfrac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial g_{o\mu,o}} = 0$. Assim, superamos o problema de a Hamiltoniana $\mathcal{H} = P^{\mu\nu} \cdot g_{\mu\nu,o} - \mathcal{L}_D$ conter termos dependentes de $g_{o\mu,o}$, que são funções arbitrárias na teoria. Porém, a imposição de que a condição $P^{o\mu} = 0$ seja mantida no tempo, i.e., $\dfrac{d}{dx^o} P^{o\mu} = 0$, acarreta novos vínculos na teoria, como iremos ver.

2. HAMILTONIANAS COM VÍNCULOS

Teorias Hamiltonianas com vínculos são tratadas de modo geral pelas técnicas de Dirac [3, 17], que iremos apresentar a seguir, de uma forma abreviada.

A partir de um princípio de ação (1.1), no formalismo Lagrangeano, vai-se ao formalismo Hamiltoniano inicialmente definindo-se as variáveis de momenta como em (1.12):

$$\pi^A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{A,o}} \qquad A = 1 \ldots N \tag{1.12}$$

Em muitos casos, podem existir relações de vinculação (chamados *vínculos primários* da teoria) na forma

$$\phi_i(y_A, \pi^A) = 0 \qquad i = 1 \ldots M, \qquad M < N \tag{2.1}$$

restringindo a independência de y_A e π^A. A parte do espaço de fase contida dentro da superfície definida por (2.1) é chamada *hipersuperfície de vínculo* e somente esta parte do espaço de fase é fisicamente significativa. (Em geral vínculos do tipo (2.1) aparecem em teorias cuja ação é invariante por grupos de gauge).

A Hamiltoniana não fica unicamente definida pelo procedimento usual

$$\mathcal{H} = \pi^A\, y_{A,o} - \mathcal{L}, \qquad H = \int_{x^o} \mathcal{H}(x)\, d^3x \tag{2.2}$$

desde que sôbre a hipersuperfície de vínculos, que é a região fisicamente significativa, o "valor" da Hamiltoniana é inalterado pela adição de qualquer combinação linear dos ϕ_i. Assim

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H} + \mu_i\, \phi_i \tag{2.3}$$

é também uma escolha possível para a Hamiltoniana, sendo μ_i funções arbitrárias, podendo inclusive depender das variáveis canônicas (y_A, π^A).

O movimento gerado pela Hamiltoniana (2.3) produz derivadas temporais dependendo de funções indeterminadas

$$\left.\begin{aligned} -\dot{\pi}^A &= \frac{\delta H}{\delta y_A} + \mu_i \frac{\delta \phi_i}{\delta y_A} + \frac{\delta \mu_i}{\delta y_A}\,\phi_i \\ +\dot{y}_A &= \frac{\delta H}{\delta \pi^A} + \mu_i \frac{\delta \phi_i}{\delta \pi^A} + \frac{\delta \mu_i}{\delta \pi^A}\,\phi_i \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

onde $\dot{\pi}^A = \partial\pi^A/\partial x^o$, $\dot{y}_A = \partial y_A/\partial x^o$; onde $\frac{\delta}{\delta y_A}$ e $\frac{\delta}{\delta \pi^A}$ são as derivadas funcionais [18] em relação a y_A e π^A, respectivamente; onde H é dada por (2.2) e considerando-se

$$\phi_i(\vec{x}, \vec{x}^0) = \int_{x^0} \delta_i^{\ j}\ \phi_j(\vec{x}', x^0)\ \delta(\vec{x}-\vec{x}')d^3x' \ .$$

Introduzindo o formalismo de PP sôbre uma hipersuperfície tipo-espaço x^0 = cte., definimos o PP de dois funcionais $g(x)$, $f(x)$ das variáveis canô nicas (y_A, π^A) como:

$$[g(x), f(y)]_{x^0=y^0} = \int_{x^0} d^3x' \left(\frac{\delta g(x)}{\delta y_A(x')} \frac{\delta f(y)}{\delta \pi^A(x')} - \frac{\delta f(y)}{\delta y_A(x')} \frac{\delta g(x)}{\delta \pi^A(x')} \right) \qquad (2.5)$$

Nota: Aqui cabe introduzir uma convenção: as equações de vínculos (2.1) somente devem ser usadas depois que todos os PP forem calculados numa dada expressão. Estas expressões terão sinal de igualdade denotado por $\approx$ e serão chamadas *equações fracas* no sentido de Dirac [17]. Assim, por exemplo, uma expressão $\Lambda(y_A, \pi^A) \approx 0$ significa que Λ é igual a zero *sôbre a hipersuperfície de vínculos*, depois de todos os PP terem sido calculados. Em particular, equações (2.1) serão escritas

$$\phi_i(y_A, \pi^A) \approx 0$$

e as equações (2.4) podem ser expressas como

$$\left.\begin{aligned} -\dot{\pi}^A &\approx \frac{\delta H}{\delta y_A} + \mu_i \frac{\delta \phi_i}{\delta y_A} \\ \dot{y}_A &\approx \frac{\delta H}{\delta \pi^A} + \mu_i \frac{\delta \phi_i}{\delta \pi^A} \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

Em termos de PP, as equações de movimento para a Hamiltoniana (2.3) se escrevem

$$\dot{g} \approx [g, H] + \mu_i [g, \phi_i]$$

e, em particular, as equações (2.4) ficam:

$$- \dot{\pi}^A \approx [\pi^A, H] + \mu_i [\pi^A, \phi_i]$$

$$\dot{y}_A \approx [y_A, H] + \mu_i [y_A, \phi_i]$$

Desde que o movimento gerado pela Hamiltoniana (2.3) deve ficar dentro da hipersuperfície de vínculos, i.e., os vínculos devem ser mantidos no tempo, seguem as equações de consistência

$$\dot{\phi}_j \approx [\phi_j, H] + \mu_i [\phi_j, \phi_i] = 0 \qquad (2.6)$$

$j = 1 \ldots M$ e, para cada j, temos as seguintes possibilidades:

$$\dot{\phi}_j \equiv 0 \qquad (2.7a)$$

$$\dot{\phi}_j = \Lambda_{ji} \phi_i \qquad (2.7b)$$

$$\dot{\phi}_j = \chi_j(\pi^A, y_A) \qquad (2.7c)$$

$$\dot{\phi}_j = f_j(\mu_i, \pi^A, y_A) \qquad (2.7d)$$

Sôbre a hipersuperfície de vínculos, (2.7a) e (2.7b) se anulam e o movimento se processa automaticamente sôbre a hipersuperfície de vínculos (2.1). Contudo, no caso de (2.7c), a região do espaço de fase fisicamente significativa deve ser uma subsuperfície da hipersuperfície de vínculos restrita pelas condições

$$\chi_j(\pi^A, y_A) = 0 \tag{2.8}$$

que são chamadas *vínculos secundários*. As condições (2.7d), se ocorrerem impõem condições sôbre os coeficientes dos vínculos que aparecem na Hamiltoniana

$$f_j(\mu_i, \pi^A, y_A) = 0 \tag{2.9}$$

É importante notar que se vínculos secundários não ocorrem a partir de (2.6), o formalismo é consistente. Se, no entanto, novos vínculos (2.8) são obtidos, estes devem também ser mantidas pela Hamiltoniana. Assim

$$\dot{\chi}_j(\pi^A, y_A) \approx 0$$

de tal forma que (2.8) não se altere à medida que a hipersuperfície tipo-espaço, sôbre a qual a Hamiltoniana está definida, seja propagada na variável x^0. Obtêm-se, desta forma, novos vínculos secundários se for o caso, e este processo é continuado até que nenhum novo vínculo seja obtido. Com uma hipersuperfície de vínculos satisfazendo os vínculos primários e secundários e com os coeficientes dos vínculos na Hamiltoniana (2.3) possivelmente satisfazendo relações da forma (2.9), nosso formalismo será consistente e fisicamente significativo.

Seja

$$\{C_j(\vec{x}, x^0) \quad 0;\ j = 1 \dots k\} \tag{2.10}$$

o conjunto de todos os vínculos primários e secundários da teoria. Podemos dividi-los em duas famílias distintas:

a) *Vínculos de primeira-classe* são aqueles que tem PP nulo com qualquer outro vínculo sôbre a hipersuperfície de vínculos, i.é, C_j é de primeira-classe se

$$\left[C_j(\vec{x},x^0),\ C_i(\vec{x}',x^0)\right] = \lambda_{jik}(\vec{x},x^0)\ C_k(\vec{x},x^0)\ \delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (2.11)$$

para qualquer i.

As transformações geradas pelos vínculos de primeira-classe sôbre as variáveis canônicas mapeiam a hipersuperfície de vínculos sôbre si mesma, ou melhor, os vínculos de primeira-classe geram transformações que não alteram o estado físico do sistema *. Prova: Consideremos um vínculo de primeira classe $C_j(\vec{x};\ x^0) \approx 0$, para algum j. Construimos o gerador $\mathcal{G}_j(x^0) = \int_{x^0} d^3x'\ C_j(\vec{x}',x^0)\ \varepsilon(\vec{x}',x^0)$, onde $\varepsilon(\vec{x}',x^0)$ é uma função infinitesimal arbitrária (notar que o gerador deve independer do ponto da hipersuperfície sôbre a qual está definido), da transformação $(y_A,\ \pi^A) \to (\tilde{y}_A, \tilde{\pi}^A)$

$$\tilde{y}_A = y_A + \delta_m\ y_A = y_A + \left[y_A, \mathcal{G}_m(x^0)\right]$$

$$\tilde{\pi}^A = \pi^A + \delta_m \pi^A = \pi^A + \left[\pi^A, \mathcal{G}_m(x^0)\right]$$

Desde que $(y_A,\ \pi^A)$ pertence à hipersuperfície de vínculos, $C_j(y_A,\ \pi^A) \approx 0$. Vamos verificar se $(\tilde{y}_A,\ \tilde{\pi}^A)$ pertence à mesma hipersuperfície.

---

* Entende-se aqui por estado físico do sistema o conjunto de todas as trajetórias sôbre o espaço de fase geradas pela Hamiltoniana do sistema a partir de todas condições iniciais consistentes com os vínculos. Para uma determinada condição inicial, o estado físico do sistema é uma única trajetória que não é alterada por transformações associadas a vínculos de primeira-classe.

$$C_j(\tilde{y}_A,\tilde{\pi}^A) = C_j(y_A + \delta_m y_A,\ \pi^A + \delta_m \pi^A) = C_j(y_A,\ \pi^A) +$$

$$+ \int d^3x' \ \frac{\partial C_j(x)}{\partial y_A(x')} \left[y_A(x'), \mathcal{C}_m(x^o)\right] + \int d^3x' \ \frac{\partial C_j(x)}{\partial y(x')_{A,k}} \partial'_k \left[y_A(x'), \mathcal{C}_m(x^o)\right]$$

$$+ \int d^3x' \ \frac{\partial C_j(x)}{\partial \pi^A(x')} \left[\pi^A(x'), \mathcal{C}_m(x^o)\right] + \int d^3x' \ \frac{\partial C_j(x)}{\partial \pi^A{}_{,k}(x')} \partial'_k \left[\pi^A(x'), \mathcal{C}_m(x^o)\right] +$$

$$+ \int d^3x' \ \frac{\partial C_j(x)}{\partial y^{(x')}_{A,k\ell}} \partial'_k \partial'_\ell \ \left[y_A(x'), \mathcal{C}_m(x^o)\right] + \dots$$

em primeira ordem na função $\varepsilon(\vec{x}, x^o)$. Sabendo-se que

$$\left[y_A(x), \mathcal{C}_m(x^o)\right] = \frac{\delta \mathcal{C}_m}{\delta \pi^A(x)} \qquad \text{e} \qquad \left[\pi^A(x), \mathcal{C}_m(x^o)\right] = -\frac{\delta \mathcal{C}_m}{\delta y_A}$$

integrando-se por partes e supondo que no infinito espacial as variáveis canônicas se anulam e usando teorema de Gauss:

$$C_j(\tilde{y}_A, \tilde{\pi}^A) = C_j(y_A,\ \pi^A) + \int d^3x' \left(\frac{\partial C_j(x)}{\partial y_A(x')} - \partial'_k \frac{\partial C_j(x)}{\partial y(x')_{A,k}} + \partial'_k \partial'_\ell \frac{\partial C_j(x)}{\partial y(x')_{A,k\ell}} - \dots \right) \frac{\delta \mathcal{C}_m}{\delta \pi^A(x')} +$$

$$+ \int d^3x' \left(\frac{\partial C_j(x)}{\partial \pi^A(x')} - \partial'_k \frac{\partial C_j(x)}{\partial \pi^A{}_{,k}(x')} + \partial'_k \partial'_\ell \frac{\partial C_j(x)}{\partial \pi^A{}_{,k\ell}(x')} - \dots \right) \left(- \frac{\delta \mathcal{C}_m}{\delta y_A(x')} \right)$$

e, usando a definição de derivada funcional e PP,

$$C_j(\tilde{y}_A, \tilde{\pi}^A) = C_j(y_A, \pi^A) + \left[C_j(x), \mathscr{C}_m(x^0)\right] = C_j(y_A, \pi^A) +$$

$$+ \int d^3x' \; \varepsilon(\vec{x}', x^0) \left[C_j(x), C_m(x')\right] \tag{2.12}$$

Usando o fato de que C_m é de primeira-classe, para algum m, substituindo (2.11) em (2.12) e obtemos:

$$C_j(\tilde{y}_A, \pi^A) = C_j(y_A, \pi^A) + \varepsilon(\vec{x}, x^0)\; \lambda_{jmk}(\vec{x}, x^0)\; C_k(\vec{x}, x^0) \tag{2.13}$$

e, sôbre a hipersuperfície de vínculos,

$$C_j(\tilde{y}_A, \tilde{\pi}^A) \approx 0$$

o que mostra que $(\tilde{y}_A, \tilde{\pi}^A)$ é um ponto da hipersuperfície de vínculos.

b) *Vínculos de segunda-classe* são aqueles que têm parêntesis não nulo, com pelo menos um vínculo sôbre a hipersuperfície de vínculos, i.é, para algum vínculo $C_m(\vec{x}, x^0)$, $C_j(\vec{x}, x^0)$ é de segunda-classe se o PP $\left[C_m(\vec{x},x^0), C_j(\vec{x}', x^0)\right]$ não é uma combinação linear de vínculos e, portanto, não nulo a hipersuperfície de vínculos. As transformações geradas por vínculos de segunda classe mapeiam pontos da hipersuperfície de vínculos em pontos da região não física do espaço de fase - os vínculos de segunda-classe geram transformações via PP que modificam o estado físico do sistema. A prova é análoga ao caso de vínculos de primeira-classe. Seja (y_A, π^A) ponto da região física do espaço de fase do sistema:

$$C_j(y_A, \pi^A) \approx 0 \qquad j = 1 \ldots M$$

Considere o gerador $\mathcal{G}_m(x^o) = \int_{x^o} d^3x' \, \varepsilon(\vec{x}, x^o) \, C_m(\vec{x}', x^o)$, onde C_m é um vínculo de segunda-classe para algum $1 \leqslant m \leqslant M$, associado à transformação $(y_A, \pi^A) \to (\tilde{y}_A, \tilde{\pi}^A)$ onde

$$\tilde{y}_A = y_A + \delta_m \, y_A = y_A(x) + \left[y_A(x), \mathcal{G}_m(x^o)\right]$$

$$\tilde{\pi}^A = \pi^A + \delta_m \, \pi^A = \pi^A(x) + \left[\pi^A(x), \mathcal{G}_m(x^o)\right]$$

e levando em conta as passagens da prova anterior

$$C_j(\tilde{y}_A, \tilde{\pi}^A) = C_j(y_A, \pi^A) + \left[C_j(\vec{x}, x^o), \mathcal{G}_m(x^o)\right] = C_j(y_A, \pi^A) +$$

$$+ \int_{x'} \varepsilon(\vec{x}', x^o) \left[C_j(\vec{x}, x^o), C_m(\vec{x}', x^o)\right] d^3x'$$

e desde que C_m é de segunda-classe

$$C_j(\tilde{y}_A, \tilde{\pi}^A) \not\approx 0$$

ao menos para algum j. Assim uma transformação gerada por vínculo de segunda classe, para condições iniciais fixadas, leva pontos da trajetória do sistema um ponto fora desta trajetória, no espaço de fase. Por isso, devemos modificar os PP de tal forma que estes vínculos sejam eliminados do conjunto de geradores da álgebra das transformações canônicas da teoria.

ELIMINAÇÃO DOS VÍNCULOS DE SEGUNDA-CLASSE DE UMA TEORIA

Desde que os vínculos de segunda-classe geram transformações que modificam o estado físico do sistema, eles devem ser eliminados da teoria. Além disso, numa quantização por correspondência do campo gravitacional, os vínculos secundários não teriam lugar [17, 10], porque introduziriam na teoria sempre novas condições de consistência sôbre a função de onda ψ, além das $C_j\,\psi \approx 0$ dadas a partir de (2.10). Para eliminar tais vínculos, vamos nos aproveitar do fato de que, numa teoria Hamiltoniana com vínculos de segunda-classe, os PP das variáveis são ambiguos no seguinte sentido: a adição de uma combinação linear de vínculos de segunda-classe a uma variável produzirá uma nova variável indistinguível da antiga, sôbre a hipersuperfície de vínculos, exceto pelas suas relações de PP que se alterarão devido à natureza de segunda-classe dos vínculos.

Em teorias envolvendo grupos de gauge canônicos, a existência de vínculos de segunda-classe está associada à imposição de condições de gauge (por exemplo, no caso eletromagnético, o vínculo $\nabla \cdot \vec{p} = 0$ torna-se de segunda classe com o vínculo $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ que fixa a gauge de radiação). O procedimento para a eliminação de vínculos de segunda-classe é o que se segue.

Consideremos $\{\Theta_a \approx 0;\ a = 1 \ldots M\}$ o conjunto de todos os vínculos de segunda-classe da teoria. Eles podem ser eliminados da álgebra dos PP de dois modos equivalentes. O primeiro, devido a Dirac [3] envolve a modificação do PP adicionando-se um termo que cancela a contribuição, para o PP, dos vínculos de segunda-classe. O novo parêntesis assim definido será chamado *Parêntesis de Dirac* (PD) e toma a forma

$$[f(x),\, g(y)]^*_{x^0=y^0} = [f(x),\, g(y)]_{x^0=y^0} - \int_{x^0}\int_{x^0} [f(x),\, \Theta_a(x')]_{x^0=x'^0}$$

$$C^{ab}(x',x'')\ [\Theta_b(x''),\, g(y)]_{x''^0=y^0}\ d^3x'\ d^3x'' \qquad (2.14)$$

onde f,g são funções ou funcionais arbitrários das variáveis canônicas; $C^{ab}(x, x")$ é a inversa da matriz dos PP dos vínculos de segunda-classe $\{\Theta_a \approx 0;\ a = 1 \ldots M\}$ e desde que estamos lidando com vínculos de segunda classe, assegura-se que esta inversa existe [17]:

$$\int_{x^o} \left[\Theta_a(\vec{x},x^o),\ \Theta_b(\vec{x}",\ x^o)\right]\ C^{bd}(\vec{x}",\ \vec{x}',\ x^o)\ d^3x" = \delta_a{}^d\ \delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (2.15)$$

Nota: A existência da inversa $C^{ab}(x,x')$ de $\left[\Theta_a(x),\ \Theta_b(x')\right]$ exige ainda outra condição. Tendo em vista que os PP $\left[\Theta_a,\ \Theta_b\right]$ formam uma matriz anti-simétrica com um número ímpar de linhas e colunas tem determinante nulo, necessàriamente o número de vínculos de segunda classe (M) deve ser par [17]. O PD (2.14) só se define neste caso. Este fato vai nos guiar na escolha de condições de coordenadas ou na formação de vínculos de primeira-classe por combinação linear de vínculos de segunda-classe (quando possível).

Com relação a este novo parêntesis (2.14), o conjunto $\{\Theta_a;a=1\ldots M\}$ se torna de primeira-classe

$$\left[\Theta_a,\ \Theta_b\right]^* = 0 \qquad\qquad a,\ b = 1\ \ldots\ M$$

e, muito mais, se anula fortemente para todos os pontos do espaço de fase. Em outras palavras o PD é construido de tal forma que todos os vínculos de segunda-classe se comportam como número em relação ao PD e por isso são automaticamente excluídos da álgebra de comutação do grupo canônico. Assim, nesta nova álgebra, os vínculos de segunda-classe são c-números e não geram qualquer variação nas variáveis canônicas. De fato, considere uma função dinâmica $f(y_A, \pi^A)$. A variação em f gerada por Θ_j via PD é

$$\overset{*}{\underset{j}{\delta}} f = [f, \Theta_j(x)]^* = [f, \Theta_j] - \iint [f, \Theta_m(x')]\, C^{mn}(x',x'')\, [\Theta_n(x''), \Theta_j(x)]\, d^3x'\, d^3x''$$

e usando (2.15)

$$\overset{*}{\underset{j}{\delta}} f = [f, \Theta_j] - \int \delta(\vec{x}-\vec{x}')\, \delta_j^m [f, \Theta_m(x')]\, d^3x' = 0$$

Por isso, a existência de transformações levando fora da região física do espaço de fase é eliminada.

O PD satisfaz a todas propriedades usuais do PP: $[\xi,\eta]^*$ é anti-simétrico entre ξ e η; linear em ξ e linear em η; satisfaz à lei do produto $[\xi_1\, \xi_2, \eta]^* = \xi_1 [\xi_2, \eta]^* + [\xi_1, \eta]\xi_2$; obedece à identidade de Jacobi $[[\xi, \eta]^*, \lambda]^* + [[\eta,\lambda]^*, \xi]^* + [[\lambda,\xi]^*, \eta]^* = 0$. Isto é consequência, como iremos mostrar, de o PD ser um caso particular de PP generalizados.

Alternativamente, temos a possibilidade de definir novas variáveis (*funcionais observáveis*) que seriam insensíveis a mudanças geradas pelos vínculos de segunda-classe na álgebra dos PP. De fato, sôbre a hipersuperfície de vínculos, o PD (2.14) pode ser expresso como

$$[f(x), g(y)]^*_{x^0=y^0} \approx \left[f(x),\, g(y) + \iint \Theta_a(\vec{x}',x^0)\, C^{ba}(\vec{x}',\vec{x}'',x^0)\, [\Theta_b(\vec{x}'',x^0), g(y)]\, d^3x'\, d^3x''\right] \tag{2.16}$$

porque

$$[f(x), g(y)]^*_{x^0=y^0} = [f,g] + \left[f, \iint \Theta_a(\vec{x}',x^0) C^{ba}(\vec{x}',\vec{x}'',x^0)\, [\Theta_b(\vec{x}'',x^0), g(y)]\, d^3x'\, d^3x''\right] +$$

$$+ \iint \Theta_a(\vec{x}',x^0)\, [f(x),\, C^{ab}(\vec{x}',\vec{x}'',x^0) [\Theta_b(x''), g(y)]]\, d^3x'\, d^3x''$$

e a última parcela se anula fracamente, i.e., sôbre a hipersuperfície de vínculos. Definindo-se *variável estrêla* (ou observável no sentido de Bergmann-Komar)[5] como

$$g^*(x) = g(x) + \iint d^3x' \, d^3x'' \, \Theta_a(\vec{x}',x^0) \, C^{ba}(\vec{x}',\vec{x}'',x^0)\left[\Theta_b(\vec{x}'',x^0), \, g(x)\right] \qquad (2.17)$$

temos as identidades sôbre a hipersuperfície de vínculos

$$[f,g]^* \approx [f,g^*] \approx [f^*,g] \approx [f^*, g^*] \approx [f, g^*]^* \qquad (2.18)$$

Assim os efeitos dos vínculos de segunda classe sôbre uma variável dinâmica também são eliminadas adicionando-se à variável uma combinação linear dos vínculos de segunda-classe. *Notar que* a variável estrela (2.17), proveniente do desenvolvimento do PD (2.14), sôbre hipersuperfície de vínculos, pode alternativamente ser obtida tomando-se a variável original + uma combinação linear dos vínculos de segunda-classe, onde os coeficientes dos vínculos são determinados[9] pela imposição de que a nova variável seja inalterada por uma transformação gerada pelos vínculos de segunda-classe:

$$\left[g^*, \Theta_a\right] = 0 \qquad\qquad a = 1 \ldots M$$

O fato de termos designado o funcional g^* como observável é significativo. Porque, no caso de Relatividade Geral, o conjunto de todos os vínculos de segunda-classe contêm os geradores das transformações arbitrárias de coordenadas mais as condições de coordenadas, ou, no caso do campo eletromagnético, o gerador das transformações de gauge mais condição de gauge. Desde que g^* é insensível às transformações geradas pelos víncululos de segunda-classe, isto acarreta que o funcional estrêla é invariante com relação a transformações de coordenadas ou transformações de gauge, conforme for o caso (ou, alternativamente, o problema de Cauchy para variáveis estrêla está bem determinado) - o que é consistente com o conceito atual de *observável*, nos casos acima. [19]

ESTRUTURA MATEMÁTICA ASSOCIADA AOS PARÊNTESIS DE DIRAC - PARÊNTESIS DE POISSON GENERALIZADOS.

Sejam (y_A, π^A), $A = 1 \ldots N$ as variáveis do espaço de fase da teoria. Vamos introduzir as novas variáveis

$$\omega^\mu = \delta_{\mu A}\, y_A + \delta_{\mu(A+N)}\, \pi^A \qquad \begin{array}{l} A = 1 \ldots N \\ \mu = 1 \ldots 2N \end{array} \tag{2.19}$$

e definimos a matriz

$$(\varepsilon^{\mu\nu}) = (-\delta_{\mu,\nu+N} + \delta_{\mu+N,\nu}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{NxN} \\ \hline -I_{NxN} & 0 \end{array}\right) \tag{2.20}$$

onde I_{NxN} é a identidade (NxN).

O PP definido em (2.5) pode ser escrito nas novas variáveis:

$$[f(x), g(y)]_{x^0=y^0} = \int_{x^0} \varepsilon^{\mu\nu} \frac{\delta f(x)}{\delta\omega^\mu(x')} \frac{\delta g(y)}{\delta\omega^\nu(x')}\, d^3x' \tag{2.21}$$

Mukunda e Sudarshan [20] mostram que esta definição pode ser generalizada substituindo-se a "métrica" $\varepsilon^{\mu\nu}$ por uma forma arbitrária $E^{\mu\nu}(\omega)$,

$$\left[f(x), g(y)\right]_{x^0=y^0} = \int_{x^0} E^{\mu\nu}(\omega') \frac{\delta f(x)}{\delta\omega^{\mu}(x')} \frac{\delta g(y)}{\delta\omega^{\nu}(x')} d^3x' \qquad (2.22)$$

exigindo-se apenas que $E^{\mu\nu}(\omega)$ seja anti-simétrica e obedeça a uma identidade padrão dos Parêntesis de Lagrange. (2.22) define o que chamaremos PP generalizados e obedecem as propriedades usuais dos PP, em particular a identidade de Jacobi. O PD é um caso particular quando, em (2.22), se toma

$$E^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\alpha} \frac{\partial\Theta_j}{\partial\omega^{\alpha}} C^{jm} \frac{\partial\Theta_m}{\partial\omega^{\rho}} \varepsilon^{\rho\nu}$$

onde $\varepsilon^{\mu\nu}$ dado por (2.20) e onde

$$\mu,\nu = 1 \ldots 2N$$

$j,m = 1 \ldots 2(N-k)$ onde k é um inteiro tal que o número de vínculos de segunda-classe é $2(N-k)$.

Mostra-se também que o grupo de transformações geradas via PD é isomorfo ao grupo de transformações canônicas sôbre $2k$ variáveis geradas via PP em $2k$ variáveis, onde k é tal que o número de vínculos de segunda-classe é $2(N-k)$*. Assim a eliminação de cada par de vínculos de segunda-classe resulta na eliminação de um par de variáveis canônicas no formalismo PP. Por exemplo, para um sistema discreto de N graus de liberdade, consideremos que os vínculos de segunda classe são $2(N-k)$ funções, subconjunto das variáveis canônicas (q, p):

---

* Notar que no formalismo Hamiltoniano usual vínculos de segunda-classe somente podem ocorrer em múltiplos de dois.

$$\{\Theta_a(\omega)\} = \{q_{k+1} \dots q_N ; p_{k+1} \dots p_N\}$$

Um cálculo direto mostra que o PD toma a forma

$$[f,g]^* = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p^i} - \frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

Voltando ao caso de funções $\Theta_a(\omega)$, pode-se também verificar facilmente que o PD fica inalterado se em lugar de Θ_a usa-se um conjunto de funções independentes $\Theta'_a(\omega)$. (independentes no sentido de que o jacobiano $\left|\frac{\partial \Theta'_a}{\partial \Theta_b}\right| \neq 0$). Assim, em alguns casos pode ser possível substituir Θ_a por Θ'_a de tal forma que as Θ'_a sejam, de fato, um subconjunto de 2(N-k) variáveis canônicas (y, π). As condições precisas em que isto pode ser feito são dadas pelo teorema seguinte: "A condição necessária e suficiente para que o PD determinado por 2(N-k) vínculos de segunda-classe $\Theta_a(\omega)$ O corresponda a congelar (N-k) pares de variáveis canônicas no PP é que as funções $\Theta_a(\omega)$ formem um grupo funcional de ordem 2(N-k)."

Nota: Um conjunto de funções $\Theta_a(\omega)$ forma um grupo funcional se os PP dos Θ_a uns com os outros podem ser expressos como funções dos Θ_a somente. A *ordem* de um grupo funcional é o número de funções independentes no grupo.

Finalizando, os PP Generalizados (2.22) de Mukunda e Sudarshan mostram que, na verdade, nós ainda temos uma grande generalidade na definição dos comutadores clássicos. Nossa escolha será guiada pelas exigências físicas da teoria. Por exemplo, na presença de vínculos de segunda-classe, usa-se (2.23) na definição do comutador (2.22) - o PD - que, de modo nenhum, é o comutador mais geral disponível.

3. FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DE DIRAC PARA O CAMPO GRAVITACIONAL

De acôrdo com o que foi discutido na seção 1, no caso de uma teoria relativista cujas equações de campo são do tipo hiperbólico, define-se o estado físico do sistema (estado inicial) sôbre uma hipersuperfície tipo-espaço imersa no espaço tempo. E assim, desde que para o campo gravitacional na RG os objetos dinâmicos da teoria são componentes da métrica do espaço-tempo (i.e.,a geometria), o estado físico do sistema será descrito por objetos que estejam intrinsecamente associados à hipersuperfície tipo espaço. Estes objetos descreverão a dinâmica do sistema quando a hipersuperfície evolui no tempo. A seguir vamos estabelecer um critério para determinação de objetos que dependem somente da hipersuperfície e de sua geometria.

Nota: De modo geral, tal hipersuperfície tipo-espaço pode ser facilmente construida sôbre uma variedade a partir do conhecimento da geometria desta variedade. Porém, no presente caso da RG, a geometria é, ela mesma uma componente dinâmica da teoria e que deve ser determinada a partir de valores iniciais. Pareceria então que teríamos de conhecer a solução das equações de Einstein de modo a estabelecer as condições que levam a esta solução, o que é uma *aparente* contradição. De fato esse problema não existe pois sôbre a variedade temos à disposição tal conjunto de hipersuperfícies tipo-espaço [14, 21]; isto devido à própria estrutura das equações de campo de Einstein: como já visto na seção 1, as equações (1.11) não nos dão nenhuma informação sôbre a dinâmica de $g_{o\mu}$ e que, por isso, não podem ser consideradas variáveis dinâmicas. Deste modo, estas quatro quantidades são livres para nossa escolha (a menos da relação de vínculo (1.11b)), como objetos não dinâmicos que são, e com elas podemos construir em todos os pontos do espaço-tempo quantidades não-dinâmicas antes da determinação da parte dinâmica da geometria. Daí, podemos definir uma família de hipersuperfície tipo-espaço a partir do campo local de vetores tipo-tempo normais às hipersuperfícies, dados por

$$\ell^{\mu} = \frac{g^{o\mu}}{\sqrt{g^{oo}}} \quad ; \qquad \ell_{\mu} = g_{\mu\alpha}\,\ell^{\alpha} = \frac{\delta^{o}_{\mu}}{\sqrt{g^{oo}}} \tag{3.1}$$

Que ℓ^{μ} é tipo-tempo decorre naturalmente da assinatura do tensor métrico, i.é; $g_{oo} > 0$ [21].

D - INVARIÂNCIA *

D-invariante, por definição, é qualquer função ou funcional definido sôbre uma dada hipersuperfície tipo-espaço 3-dimensional imersa no espaço-tempo, cuja lei de transformação sob uma transformação de coordenadas infinitesimal $x^{\mu} \to x^{\mu} + \delta x^{\mu}$ não envolve as derivadas parciais de δx^{μ} normais à hipersuperfície, i.é, não contém $\delta x^{\alpha}{}_{,\mu}\,\ell^{\mu}$, onde ℓ^{μ} normal unitária à hipersuperfície. Derivadas normais de ordem mais alta são também excluidas da lei de transformação de D-invariantes. Geometricamente, estes são objetos que permanecem invariantes por uma transformação de coordenadas que preserve o sistema de coordenadas sôbre a hipersuperfície enquanto que, possivelmente, alterando-o em todo o restante espaço-tempo [9,10];

* D - para Dirac (cf. refs. 9 e 10).

são objetos que independem da continuação do sistema de coordenadas imediatamente fora dos pontos da hipersuperfície. Com as normais à hipersuperfície x^o = cte. dadas por (3.1) e considerando-se δx^μ como um deslocamento infinitesimal, podemos escrever as derivadas normais como derivadas temporais desde que, num volume infinitesimal contendo um dado ponto x^μ, (3.1) assume os $\ell^\mu = \delta^\mu_o$ e $\ell_\mu = \delta^o_\mu$. Assim D-invariantes não podem depender de $\delta x^\mu{}_{,o}$. Por exemplo, as componentes espaciais de qualquer tensor covariante formam um D-invariante, desde que

$$\bar{\delta}\, T_{ij} = -\,\xi^\beta{}_{,j}\, T_{i\beta} - \xi^\beta{}_{,i}\, T_{\beta j} - T_{ij,\beta}\, \xi^\beta$$

onde

$$\bar{\delta}\, T_{ij} = T'_{ij}(x) - T_{ij}(x)$$

e

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$$

e $\bar{\delta}\, T_{ij}$ não depende de $\xi^\alpha{}_{,o}$. Obviamente o mesmo resultado vale para tensores covariantes de ordem mais alta, $T_{\alpha\beta\ldots}$. Contudo as componentes espaciais de qualquer quadritensor contravariante não formam um D-invariante; por exemplo

$$\bar{\delta}\, T^{ij} = \xi^j{}_{,\beta}\, T^{i\beta} + \xi^i{}_{,\alpha}\, T^{\alpha j} - T^{ij}{}_{,\alpha}\, \xi^\alpha$$

contém $\xi^i{}_{,o}$.

Para construir D-invariantes, vamos definir operadores de projeção para a geometria 3-dimensional tipo-espaço, com auxílio de ℓ^μ:

$$Q^{\rho}{}_{\mu} = \delta^{\rho}{}_{\mu} - \ell^{\rho}\, \ell_{\mu} \tag{3.2}$$

com $Q^{\rho}{}_{\sigma}\, Q^{\alpha}{}_{\lambda} = Q^{\rho}{}_{\lambda}$.

Usando (3.2) podemos construir, a partir das componentes $T^{\alpha\beta\ldots\mu}$ de um 4-tensor contravariante arbitrário, o D-invariante [7]

$$\tilde{T}^{\rho\mu\ldots\nu} = Q^{\rho}{}_{\alpha}\, Q^{\mu}{}_{\beta} \ldots\; Q^{\nu}{}_{\alpha}\; T^{\alpha\beta\ldots\sigma} \tag{3.3}$$

e desde que as componentes $Q^{o}{}_{\alpha}$ se anulam, nós podemos escrever esta relação simplesmente como .

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{T}^{ij\ldots k} = Q^{i}{}_{\alpha}\, Q^{j}{}_{\beta\ldots}\; Q^{k}{}_{\lambda}\; T^{\alpha\beta\ldots\lambda} \\ &\tilde{T}^{o\ldots\nu} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.3'}$$

Por exemplo, considere o caso de um quadri-vetor contravariante T^{α}:

$$\tilde{T}^{\alpha} = Q^{\alpha}{}_{\beta}\; T^{\beta}$$

ou

$$\tilde{T}^{o} = 0, \quad \tilde{T}^{i} = T^{i} - \frac{g^{oi}}{g^{oo}}\, T^{o}$$

e pode-se verificar diretamente que $\tilde{T}^{i}$ é D-invariante [7]. Deve-se notar que $\tilde{T}^{i}$ depende de T^{i} e também de T^{o}. As componentes espaciais do tensor métrico covariante $g_{\mu\nu}$ formam um D-invariante. Das componentes contra-variantes podemos formar o seguinte D-invariante:

$$\tilde{g}^{\rho\mu} = Q^{\rho}{}_{\alpha}\, Q^{\mu}{}_{\beta}\, g^{i\beta}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} \tilde{g}^{o\mu} &= 0 \\ \tilde{g}^{ik} &= g^{ik} - \frac{g^{oi}\, g^{ok}}{g^{oo}} \equiv e^{ik} \end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

e verifica-se que e^{ik} é a métrica 3-dimensional recíproca de g_{ik}.

Também com as componentes $T^{\mu\nu\ldots\lambda}$ podemos formar o seguinte D-invariante

$$T_L = \ell_\mu\, \ell_\nu \ldots \ell_\lambda\, T^{\mu\nu\ldots\lambda} \qquad (3.5)$$

Em particular

$$g_L = \ell_\mu\, \ell_\nu\, g^{\mu\nu} = 1$$

e, em consequência dos resultados acima, dado um escalar f(x) podemos construir os seguintes D-invariantes: $f_{,i}$ e $f_{,\alpha}\, \ell^\alpha$.

Resumindo, os dois pontos essenciais desta seção até agora são:

a) nós obtivemos uma forma de preencher o espaço-tempo com hipersuperfícies tipo-espaço, pela construção de normais unitárias tipo-tempo, utilizando-se componentes não dinâmicas da métrica e que não dependem de uma solução das equações de Einstein.

b) encontramos uma forma de preencher cada uma destas hipersuperfícies com variáveis que dependem somente de 3-geometria de cada hipersuperfície (D-invariantes). Notar que os D-invariantes são quantidades dinâmicas e o movimento do sistema consistirá em levar D-invariantes de uma hipersuperfície tipo-espaço em outra.

Prosseguindo, teremos que dar uma prescrição para a lei dinâmica que associe duas 3-geometrias sôbre duas hipersuperfícies tipo-espaço diferentes, na direção do tempo fixada por (3.1).

Dada a densidade de Lagrangeana de Dirac $\mathcal{L}_D$ (1.9) para o campo gravitacional, podemos construir os momenta canônicamente conjugado a $g_{\mu\nu}$ pela relação usual (1.12) *

$$P^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial g_{\mu\nu,o}} \tag{3.6}$$

Devido à covariância da teoria pelo MMG (conferir seção 1), que determina a forma da Lagrangeana, $\mathcal{L}_D$ independe de $g_{o\mu,o}$. Isto implica em quatro vínculos primários

$$P^{o\mu} = 0 \tag{3.7}$$

Assim as "velocidades" $g_{\mu o,o}$ associadas às variáveis não dinâmicas $g_{o\mu}$, são eliminadas da Hamiltoniana, e esta é escrita como

$$H = \int d^3x (P^{ij} g_{ij,o} - \mathcal{L}_D) \tag{3.8}$$

Os momenta gravitacionais não nulos são

$$P^{rs} = \sqrt{-\gamma}\ (e^{ra} e^{sb} - e^{rs} e^{ab})\ v_{ab} \tag{3.9}$$

onde

$$v_{ab} = \{^{o}_{ab}\}\ (g^{oo})^{-1/2}$$

---

* Notar que $P^{\mu\nu}$ é definido para x^o = cte e, em relação a $x'^i = x'^i(x^j, x^o)$, $x'^o = x^o$, $P^{\mu\nu}$ se comporta como densidade tensorial

são chamadas "velocidades D-invariantes" [10]. A expressão (3.9) pode ser invertida

$$\sqrt{-\gamma}\,\{{}^{0}_{ab}\} = \frac{1}{2}\,(g_{rs}\,g_{ab} - g_{ra}\,g_{sb})P^{rs} \tag{3.10}$$

e então podemos escrever as quantidades $g_{ij,o}$ como funções dos momenta. Que os momenta P^{rs} são D-invariantes pode ser mostrado a partir do fato que v_{ab} é D-invariante [9,10] (por um cálculo direto, usando-se a transformação infinitesimal $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$, em primeira ordem em ξ^{μ}) ou diretamente usando os projetores (3.2):

$$\tilde{P}^{\mu\nu} = Q^{\mu}{}_{\alpha}\,Q^{\nu}{}_{\beta}\,P^{\alpha\beta}$$

$$\tilde{P}^{o\mu} = 0$$

$$\tilde{P}^{ij} = Q^{i}{}_{\alpha}\quad Q^{j}{}_{\beta}\,P^{\alpha\beta} \qquad \text{e usando os vínculos (3.7)}$$

$$\tilde{P}^{ij} = Q^{i}{}_{\ell}\quad Q^{j}{}_{m}\quad P^{\ell m} = P^{ij}$$

Assim, as doze variáveis canônicas de campo $(g_{ij},\,P^{ij})$ são todas D-invariantes i.e., objetos independentes da escolha do S.C. fora da hipersuperfície x^{o} = cte, sôbre a qual $(g_{ij},\,P^{ij})$ estão definidos.

Agora vamos considerar um funcional dinâmico η sôbre a hipersuperfície x^{o} = cte, construido com os D-invariantes $(g_{ij},\,P^{ij})$. η pode ser localizado em um ponto x^{r} da hipersuperfície ou pode ser não localizado. Vamos fazer um pequeno deslocamento arbitrário da hipersuperfície, aplicando a cada ponto dela um deslocamento infinitesimal arbitrário, $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + a^{\mu}(x)$. A mudança em η será linear nas funções a^{μ} (em primeira ordem) e assim da forma [9]

$$\delta\eta = \int_{x^{o}} \xi_{\mu}\,a^{\mu}\,d^{3}x \tag{3.11}$$

para algum ξ_μ 4-vetor independente de a^μ. Então temos:

$$\dot{\eta} = \frac{d\eta}{dx^0} = \int_{x^0} \xi_0 \, d^3x \tag{3.12}$$

ξ_0 não é D-invariante mas pode ser expresso em termos de objetos D-invariantes: usando a normal (3.1), vamos definir a quantidade D-invariante

$$\xi_L = \ell^\mu \xi_\mu = \frac{g^{00}\,\xi_0}{\sqrt{g^{00}}} + \frac{g^{0m}\,\xi_m}{\sqrt{g^{00}}} \tag{3.13}$$

Resolvendo (3.13) para ξ_0:

$$\xi_0 = (g^{00})^{-1/2} \quad \xi_L - \frac{g^{0m}}{g^{00}} \, \xi_m$$

$$= (g^{00})^{-1/2} \quad \xi_L + g_{0m} \, e^{mn} \, \xi_n$$

e, substituindo-se em (3.12), obtemos:

$$\dot{\eta} = \int_{x^0} d^3x \left[(g^{00})^{-1/2} \, \xi_L + g_{n0} \, e^{mn} \, \xi_m\right] \tag{3.14}$$

Notar que ξ_L e ξ_m são determinados por δ_η em (3.11) e representam os deslocamentos de η normal e tangencial à hipersuperfície, respectivamente *. Obtem-se equações de movimento na forma (3.14) a partir de uma

---

* ξ_L é deslocamento normal trivialmente por (3.13).

ξ_m é deslocamento tangencial: desde que $g_{\mu r}$ é ortogonal a ℓ^μ ($\ell^\mu g_{\mu r} = 0$), $g_{\mu r}$ define direção tangencial e $\xi_m = g_{\mu m} \, \xi^\mu$ (m=1,2,3).

Hamiltoniana da forma

$$H = \int_{x^o} d^3x \left[(g^{oo})^{-1/2} \mathcal{H}_L + g_{ro}\, e^{rs} \mathcal{H}_s \right] \tag{3.15}$$

para qualquer η, onde $\mathcal{H}_L$ e $\mathcal{H}_s$ são independentes de $g_{\mu o}$, porque isto faz a equação de movimento

$$\dot{\eta} = [\eta\ ,\ H] \tag{3.16a}$$

se tornar (3.14), contando que

$$[\eta, \mathcal{H}_L] = \xi_L \quad , \qquad [\eta, e^{rs}\, \mathcal{H}_s] = e^{rs}\, \xi_s \tag{3.16b}$$

Aqui, o PP é definido como em (2.5), considerando-se que o espaço de fase é descrito pelas variáveis ($g_{\mu\nu}$, $P^{\mu\nu}$). Da imposição de que os vínculos (3.7) sejam mantidos no movimento gerado pela Hamiltoniana, vem

$$\dot{P}^{o\mu} = [P^{o\mu}, H] = 0$$

ou, calculando explicitamente,

$$[P^{ok}(\vec{x},x^o),\ H(x^o)] = e^{ks} \mathcal{H}_s(\vec{x},x^o) + \frac{1}{2} \frac{g^{ko}}{g^{oo^{\frac{1}{2}}}} \mathcal{H}_L(\vec{x},x^o)$$

$$[P^{oo}(\vec{x},x^o),\ H(x^o)] = \frac{1}{2} (g^{oo})^{\frac{1}{2}}\ \mathcal{H}_L(\vec{x},x^o)$$

Então

$$\mathcal{H}_L = 0 \tag{3.17}$$

$$\mathcal{H}_S = 0 \tag{3.18}$$

que são os vínculos secundários da teoria, em número de quatro como era de se esperar para uma teoria MMG - invariante. A forma explícita de $\mathcal{H}_L$ e $\mathcal{H}_S$ foi obtida por Dirac [9]:

$$\mathcal{H}^r = e^{rs}\,\mathcal{H}_s = -\,2\,P^{rs}{}_{|s} \quad . \tag{3.19}$$

$$\mathcal{H}_L = (-\gamma)^{-\frac{1}{2}}\,(P^{rs}\,P_{rs} - \frac{1}{2}\,P_r{}^r\,P_s{}^s) + (-\gamma)^{\frac{1}{2}}\;e^{rs}\;{}^3R_{rs} \quad . \tag{3.20}$$

onde ${}^3R_{rs}$ é o tensor de Ricci 3-dimensional construido com as afinidades Γ^i_{jk}.

Nota: Os quatro vínculos (3.17), (3.18) são equivalentes às quatro equações (1.11b), que, como já foi discutido, são relações de vinculação entre os dados iniciais sôbre a hipersuperfície tipo-espaço considerada. A partir de agora, todas as relações serão escritas na geometria 3-dimensional x^o = cte (g_{ik}, e^{ik}, Γ^i_{kj}). Os vínculos $P^{o\mu} = 0$ são mantidos no tempo e não contribuem na Hamiltoniana, $g_{o\mu}$ são consideradas funções arbitrárias associadas ao sistema de coordenadas e, então, reduzimos as variáveis do espaço de fase a (g_{ij}, P^{ij}) *.

Os vínculos $(\mathcal{H}_r, \mathcal{H}_L)$ formam um conjunto de primeira classe, a expressão para seus PP sendo

---

* Cf. discussão sôbre a redução do espaço de fase $(A_\mu, P^\mu) \to (\vec{A}, \vec{P})$ no caso do campo eletromagnético, apêndice III.

$$\left[\mathcal{H}_\alpha(\vec{x},x^0),\mathcal{H}_\beta(\vec{x}',x^0)\right] = \mathcal{H}_\lambda(\vec{x},x^0)(\delta^r_\beta\delta^\lambda_\alpha - \delta^r_\alpha\delta^\lambda_\beta)\delta_{,r}(\vec{x}-\vec{x}') \tag{3.21}$$

onde

$$\mathcal{H}_\alpha(\vec{x},x^0) = \ell_\alpha\, \mathcal{H}_L + Q^r{}_\alpha\; g_{rk}\mathcal{H}^k \tag{3.22}$$

e onde $Q^\alpha{}_\beta$ é dado por (3.2). Assim

$$\left[\mathcal{H}_\alpha(x')\;\; \mathcal{H}_\beta(x'')\right]_{x'^0 = x''^0} \approx 0$$

o que mostra que o número de vínculos secundários já está esgotado, que nenhuma propagação em x^0 introduzirá novos vínculos.

Vamos agora interpretar (3.22) ou (3.17) + (3.18) como geradores. Consideremos $\delta\eta$ dado por (3.11) onde ξ_μ é determinado por (3.16b) e (3.13). Já vimos que $\xi_L = \ell^\mu\, \xi_\mu$ é o deslocamento normal à hipersuperfície tipo-espaço sofrido por η, gerado por uma transformação de coordenadas arbitrária infinitesimal $x'^\mu = x^\mu + a^\mu(x)$. ξ_s é o deslocamento tangencial à hipersuperfície, i.é, uma variação de η por uma mudança de ponto sôbre a hipersuperfície. Por (3.16b) vemos que:

1) $\mathcal{H}_L$ é o gerador (densidade de), das transformações canônicas infinitesimais de coordenadas, normais à hipersuperfície.

2) $\mathcal{H}_r$ é o gerador das translações canônicas infinitesimais sôbre a hipersuperfície inicial (na direção x^r).

De fato, uma variação em η gerada por uma transformação de coordenadas infinitesimal $x'^\mu = x^\mu + a^\mu(x)$, poderá ser descrita, via PP, pelo gerador

$$\mathcal{G}(x^0) = \int_{x^0} d^3x \ \mathcal{H}_\mu(\vec{x},x^0) \ a^\mu(x) \tag{3.24}$$

onde $\mathcal{H}_\mu$ é dado por (3.22), de modo que

$$\delta\eta = [\eta, \mathcal{G}]$$

Verificando

$$\delta\eta(x^0)=\left[\eta(x^0),\mathcal{G}(x^0)\right]=\left[\eta, \int_{x^0} a^\mu(x) \ \mathcal{H}_\mu(x)d^3x\right]= \int_{x^0} d^3x \ a^\mu\left[\eta,\ell^\mu\mathcal{H}_L+Q^r_\mu \ g_{rk}\mathcal{H}^k\right]=$$

$$= \int_{x^0} a^\mu\ell_\mu \ \left[\eta,\mathcal{H}_L\right] \ d^3x \ + \int_{x^0} Q^r{}_\mu \ a^\mu\left[\eta, \ g_{rk} \ \mathcal{H}^k\right] \ d^3x$$

e usando (3.16b) e (3.13)

$$\delta\eta(x^0)=\int_{x^0} a^\mu \ \ell_\mu \ \xi_L \ d^3x + \int_{x^0} Q^r{}_\mu \ \xi_r \ a^\mu \ d^3x =$$

$$= \int_{x^0} |a^r \ \xi_r + a^0(g^{00^{-\frac{1}{2}}} \ \xi_L - \frac{\ell^r}{g^{00^{\frac{1}{2}}}} \xi_r) \ d^3x =$$

$$= \int_{x^0} (a^r \ \xi_r + a^0 \ \xi_0)d^3x \ = \int_{x^0} a^\mu \ \xi_\mu \ d^3x$$

Assim, os vínculos são, bàsicamente, os geradores via PP do grupo canônico de invariância da teoria.

As equações de Einstein na forma hamiltoniana ficam

$$\left.\begin{aligned} g^{(x)}_{mn,o} &= \int_{x^o} \left[g^{(x)}_{mn} \,,\quad (x')\right]_{x^o = x'^o} d^3x' \\ \\ P^{mn}_{(x)\,,o} &= \int_{x^o} \left[P^{mn}_{(x)} ,\quad (x')\right]_{x^o = x'^o} d^3x' \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

$$\mathcal{H}_r = 0 \tag{3.17}$$

$$\mathcal{H}_L = 0 \tag{3.18}$$

que são 12 equações dinâmicas e 4 relações de vinculação, equivalentes a (1.11). As variáveis ($g_{\mu o}$, $P^{o\mu}$) são eliminadas da teoria como variáveis canônicas; $g_{o\mu}$ são retidas na teoria como parâmetros arbitrários na Hamiltoniana, descrevendo a normal à hipersuperfície inicial. Assim o conjunto de variáveis canônicas fica reduzido àquelas que são definidas D-invariantes sôbre a hipersuperfície inicial x^o = cte. Dados (g_{ij}, P^{ij}) em alguma hipersuperfície inicial x^o = cte, é sempre possível, em princípio, obter o valor destas variáveis em algum tempo mais tarde, por meio das equações Hamiltonianas (3.25). Entretanto, mesmo se dermos $g_{o\mu}$ em algum tempo inicial, eles permanecerão arbitrários em qualquer outro instante posterior. Esta arbitrariedade em $g_{o\mu}$, por seu lado, impede a determinação unívoca de (g_{ij}, P^{ij}) naquele instante posterior desde que $g_{o\mu}$ está presente nas equações de movimento. Para eliminar esta arbitrariedade que aparece na Hamiltoniana - e, desta forma, tornando a dinâmica da teoria formalmente única - introduzimos condições de coordena das (i.e.,fixamos o sistema de coordenadas sôbre a variedade) que são equivalentes a uma escolha conveniente dos parâmetros, fixando: 1) direção do vetor normal que define a hipersuperfície tipo tempo; 2) sistema de coordenadas dentro da hipersuperfície [22].

Finalizando, vamos analizar o número total de graus de liberdade envolvidos no conjunto (g_{ij}, P^{ij}) *. Êste conjunto é completo mas redundante, no sentido que eles não representam um conjunto mínimo descrevendo um campo de spin 2 e massa zero [23]. Os quatro vínculos (3.17), (3.18) relacionando estas 12 variáveis, nos deixam sòmente oito independentes. A fixação do sistema de coordenadas elimina quatro graus de liberdade - esta escolha pode ser feita tomando-se quatro funções de (g_{ij}, P^{ij}) igual às coordenadas

$$x^{\mu} - f^{\mu}(g_{ij}, P^{ij}) = 0$$

que deverão ser consideradas como quatro vínculos adicionais [5, 10]. As variáveis arbitrárias $g_{o\mu}$ ficarão fixadas pela condição

$$\partial_t f^{\mu} = \delta^{\mu}_{o}$$

Uma vez fixadas as coordenadas, nós ficamos com apenas quatro componentes de campo independentes, um número apropriado para um campo sem massa e spin 2. Dentro do espírito do método de Dirac da seção 2, as quatro condições de coordenadas deverão ser escolhidas de tal forma a constituirem com $(\mathcal{H}_L, \mathcal{H}_r)$ um conjunto de oito vínculos de segunda-classe.

Resumindo, a descrição do problema do formalismo hamiltoniano da RG sôbre a hipersuperfície inicial consiste de:

---

* Cf. análise análoga para o campo eletromagnético, apêndice III.

1) seis variáveis de campo canônicas g_{mn}, que são a métrica desta hipersuperfície tipo-espaço inicial.

2) seis variáveis canônicas de momentum P^{mn} (associadas à segunda forma fundamental da hipersuperfície tipo-espaço)

3) quatro vínculos hamiltonianos $\mathcal{H}_L = 0$, $\mathcal{H}_r = 0$.

4) quatro condições de coordenadas $x^\mu - f^\mu(g_{ij}, P^{ij}) = 0$, que com os vínculos Hamiltonianos formam um conjunto de *oito vínculos de segunda-classe* (numa teoria com nossa escolha de coordenadas fixadas). *

Com estes dados, aplica-se o método descrito na seção 2, construindo-se álgebra de comutação de Dirac onde o conjunto de segunda-classe é constituído dos oito vínculos acima descritos. Assim todos os vínculos da teoria são c-números em relação à álgebra dos PD e portanto podemos, em princípio, passar à quantização. Equivalentemente, utilizando-se o mesmo conjunto de segunda-classe podemos construir os *observáveis canônicos* (variáveis estrêla) que serão os correspondentes operadores observáveis numa eventual quantização canônica. Nas seções seguintes, vamos construir as variáveis estrela para a formulação tensorial e spinorial da teoria Hamiltoniana da RG, explicitamente, em aproximação linear.

---

* Na seção seguinte, discutimos o problema de C. Coordenadas.

4. FORMULAÇÃO HAMILTONIANA PARA O CAMPO GRAVITACIONAL NA APROXIMAÇÃO LINEAR

As equações de campo (1.6) são obviamente não lineares, de modo que o princípio da superposição de soluções não vale. Fisicamente isto é devido ao fato de que o campo gravitacional contém energia e daí uma massa efetiva, e então o próprio campo pode passar a constituir parte de sua própria fonte. No caso de aproximação linear, o efeito de o campo gravitacional reagir sôbre sua própria fonte, constituindo parte dela, será desprezado e os efeitos gravitacionais serão considerados simplesmente aditivos como na teoria gravitacional clássica. Para ignorar o efeito de o campo gravitacional constituir parte de sua própria fonte, devemos supor que o campo é fraco. Isto significa que é possível achar um mapeamento tal que

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \tag{4.1}$$

onde $h_{\mu\nu}(x) = \varepsilon\ \lambda_{\mu\nu}(x)$, $\lambda_{\mu\nu}(x)$ funções arbitrárias limitadas e ε um parâmetro infinitesimal arbitrário; isto pelo menos em alguma região do espaço-tempo. Em todos os cálculos que se seguem vamos considerar como significantes somente termos de primeira ordem em ε.

Tendo mapeado $g_{\mu\nu}$ na forma (4.1), ainda temos a liberdade de realizar mapeamentos adicionais que preservem esta forma. De fato, o grupo de covariância da teoria linearizada (4.1) se separa em duas partes:

I. *TRANSFORMAÇÕES DE POINCARÉ ARBITRÁRIAS*

$$x^\mu \to x'^\mu = L^\mu{}_\nu\, x^\nu + b^\mu$$

tal que $\eta_{\mu\nu} L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ e sob estes mapeamentos $h_{\mu\nu}$ se transforma como co tensor.

II. *TRANSFORMAÇÕES INFINITESIMAIS*

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$$

contanto que $h_{\mu\nu}(x)$ se transforme como

$$h'_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) - \xi_{\mu,\nu}(x) - \xi_{\nu,\mu}(x) \qquad . \quad (4.2)$$

onde $\xi^{\mu}(x)$ é toda função infinitesimal de primeira ordem e que não é vetor de Killing da geometria chata ($\xi^{\mu}(x)$ vetor de Killing da geometria chata descreve as transformações de Poincaré infinitesimais, já incluidas em I). Tais transformações serão referidas como transformações de gauge (cf. forma (4.2)).

Agora, tendo em vista (4.1) e o critério de reter termos de primeira ordem * [8] somente:

$$\overset{(1)}{\left\{ {\alpha \atop \lambda\eta} \right\}} = \frac{1}{2} (h_{\beta\lambda,\eta} + h_{\beta\eta,\lambda} - h_{\lambda\eta,\beta})\, \eta^{\alpha\beta} \qquad (4.2')$$

e as equações de Einstein para o vazio são:

$$\overset{(1)}{G}_{\mu\nu} = \overset{(1)}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \overset{(1)}{R} = \frac{1}{2} \Big[h_{,\mu\nu} + \eta^{\rho\sigma}(h_{\mu\nu,\rho\sigma} - h_{\mu\rho,\nu\sigma} - h_{\nu\rho,\mu\sigma}) +$$

$$- \eta_{\mu\nu}\, \eta^{\rho\sigma}(h_{,\rho\sigma} - \eta^{\alpha\beta}\, h_{\rho\alpha,\sigma\beta})$$

onde $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$. Introduzindo-se novas variáveis

---

* Termos e expressões de primeira ordem serão notados pelo índice (1) em cima.

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h$$

ou

$$h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\gamma$$

obtemos:

$$\overset{(1)}{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\eta^{\rho\sigma}\gamma_{\mu\nu,\rho\sigma} - \tau_{\mu,\nu} - \tau_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\tau_{\rho,\sigma}) \doteq 0$$

onde

$$\tau_{\mu} = \eta^{\rho\sigma}\gamma_{\mu\rho,\sigma}$$

como já foi visto anteriormente, temos ainda liberdade de realizar transformações. Sob transformações de Poincaré, $\gamma_{\mu\nu}$ se comporta como cotensor, enquanto que sob transformações de gauge infinitesimais (II), usando (4.2),

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \xi_{\mu\ \nu} - \xi_{\nu\ \mu} + \eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\xi_{\rho,\sigma}$$

Assim, escolhemos um mapeamento tal que

$$\tau_{\mu} \to \tau'_{\mu} = \tau_{\mu} - \eta^{\rho\sigma}\xi_{\mu,\rho\sigma} = 0$$

de modo que um conjunto $\xi^{\mu}(x)$ pode sempre ser encontrado, correspondendo a um dado τ_{μ}, que fará $\tau'_{\mu} = 0$. Em consequência, neste novo sistema de coordenadas, as equações de Einstein linearizadas tomam a forma

$$\eta^{\rho\sigma}\gamma_{\mu\nu,\rho\sigma} = 0 \qquad (4.3)$$

as soluções de (4.3) satisfazendo a condição suplementar

$$\eta^{\rho\sigma}\gamma_{\mu\rho,\sigma} = 0 \qquad (4.4)$$

(4.4) é a condição de De Donder Linearizada ou condição assintótica de radiação [6].

Notas:

1) A equação (4.3) nos sugere que os efeitos gravitacionais se propagam como ondas com velocidades c. Pode-se, entretanto, fazer a objeção de que a perturbação $\gamma_{\mu\nu}$ é ligada a um sistema de coordenadas arbitrário e por isso a existência de uma perturbação não nula na métrica não é indicação invariante da existência de um campo gravitacional. Porém, considerando-se o tensor de Riemann em primeira ordem

$$\overset{(1)}{R}{}^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\left[h_{\beta\rho,\mu\nu} + h_{\nu\mu,\beta\rho} - h_{\beta\nu,\mu\rho} - h_{\mu\rho\,\beta\nu}\right]$$

o qual se prova, facilmente, ser gauge-invariante; e usando (4.3) obtemos:

$$\eta^{\rho\sigma}\,\overset{(1)}{R}{}^{\alpha}\,\eta_{\beta\lambda,\rho\sigma} = 0$$

Assim, o tensor de Riemann, que nos dá um critério absoluto para a existência de um campo gravitacional, obedece à equação de onda - o que nos permite concluir que, na teoria linearizada os efeitos gravitacionais se propagam com a velocidade c e, portanto, uma partícula de massa de repouso zero será eventualmente associada.

2) As quatro condições (4.4), que as soluções das equações (4.3) devem satisfazer estão associadas à fixação da gauge, eliminando-se assim arbitrariedades dos mapeamentos de gauge (II). Utilizamos esta pos

sibilidade de mapeamento e escolhemos então um sistema de coordenadas definido por (4.4) tal que as equações de Einstein linearizadas tomassem a forma simples (4.3). Vamos mostrar a seguir que (4.4) (em primeira ordem) de fato fixa a gauge a menos de uma solução da equação $\Box\xi^{\alpha}(x) = 0$ e a menos de uma transformação de Lorentz (desde que a teoria linearizada é Lorentz covariante).

Sob $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$, $\xi^{\mu}(x)$ função arbitrária infinitesimal, (4.4) se transforma como

$$\eta^{\nu\rho}\,\gamma'_{\mu\nu,\rho} = \eta^{\nu\rho}\,\gamma_{\mu\nu,\rho} - \eta^{\nu\rho}\,\xi_{\mu,\nu\rho} - \eta^{\nu\rho}\,\xi_{\nu,\mu\rho} + \delta_{\mu}^{\ \rho}\,\xi_{\alpha,\ \rho}^{\ \alpha}$$

As transformações permitidas serão aquelas que deixam invariante as condições (4.4)

$$\eta^{\nu\rho}\,\xi_{\mu,\nu\rho} + \eta^{\nu\rho}\,\xi_{\nu,\mu\rho} - \xi_{\alpha,\ \mu}^{\ \alpha} = 0$$

ou

$$\eta^{\nu\rho}\,\xi_{\mu,\nu\rho} = 0 \tag{4.5}$$

Tendo em vista (4.1), e em primeira ordem

$$h^{\mu\nu} = -\,\eta^{\mu\alpha}\,\eta^{\nu\beta}\,h_{\alpha\beta}$$

e, de (3.4),

$$e^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} - (\eta^{o\mu}\,\eta^{o\nu} + \eta^{o\nu}\,h^{o\mu} + \eta^{o\mu}\,h^{o\nu} - h^{oo}\,\eta^{o\mu}\,\eta^{o\nu})$$

A versão Hamiltoniana da teoria linearizada vai ser descrita em termos dos D-invariantes abaixo:

i) h_{ij} (cf. (4.2))

ii) $e^{ij} = \eta^{ij} + h^{ij}$

iii), $$\overset{(1)}{P}{}^{rs} = (\eta^{ra}\,\eta^{sb} - \eta^{rs}\,\eta^{ab}) \overset{(1)}{\{{}^{0}_{ab}\}} \tag{4.6}$$

que são objetos de primeira ordem. Sob o grupo de gauge $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$, os momenta se transformam

$$\overset{(1)}{P}{}'^{rs} = \overset{(1)}{P}{}^{rs} + \frac{1}{2}\,(\eta^{rs}\,\eta^{sb} - \eta^{rs}\,\eta^{ab}) \left[-\xi_{o,ab} - \xi_{o,ba}\right]$$

ou

$$\overset{(1)}{P}{}'^{rs} = \overset{(1)}{P}{}^{rs} - \xi_{o,}{}^{rs} + \eta^{rs}\,\xi_{o,}{}^{a}{}_{a} \tag{4.7}$$

iv) Vínculos secundários: de (3.19) e (3.20)

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{\mathcal{H}}{}^{r} &= -2\,\overset{(1)}{P}{}^{ru}{}_{,u} = 0 \\ \overset{(1)}{\mathcal{H}}_{L} &= \eta^{rs}\;{}^{3}\overset{(1)}{R}_{rs} = 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde ${}^{3}\overset{(1)}{R}_{rs} = \overset{(1)}{\Gamma}{}^{\ell}{}_{rs,\ell} - \overset{(1)}{\Gamma}{}^{\ell}{}_{r\ell,s}$

ou, usando que $\overset{(1)}{\Gamma}{}^{i}_{jk} \equiv \overset{(1)}{\{{}^{i}_{jk}\}}$ e tendo em vista (4.2'):

$$\overset{(1)}{\mathcal{H}}_{L} = \frac{1}{2}\,\eta^{rs}\,\eta^{\ell m}\left[h_{sm,r\ell} + h_{r\ell,ms} - h_{rs,m\ell} - h_{\ell m,rs}\right] \tag{4.9}$$

Para preservar a ordem de aproximação na teoria linearizada, os índices são levantados e abaixados com a "métrica" Lorentziana $\eta^{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu}$ respectivamente. O caráter espacial dos índices dos D-invariantes nos limita à parte espacial da métrica

$$\eta^{ij} = \eta_{ij} = - \delta_{ij}$$

Por isso, de agora em diante, a métrica 3-dimensional usada será δ_{ij} (a menos de um sinal) e não será feita distinção entre índices co - e contravariantes; a convenção de soma se mantém para índices repetidos e as quantidades serão escritas com o devido sinal. Assim, por exemplo (4.6) se escreverá:

$$\overset{(1)}{P}_{ab} = \overset{(1)}{\left\{ {0 \atop ab} \right\}} + \left\{ {0 \atop \ell\ell} \right\} \delta_{ab}$$

e a lei de transformação (4.10)

$$\overset{(1)}{P}_{rs} = \overset{(1)}{P}_{rs} - \xi_{o,rs} + \delta_{rs} \nabla^2 \xi_o \tag{4.10}$$

Também (4.8) e (4.9) ficarão, respectivamente,

$$\overset{(1)}{\mathcal{H}}_r = 2 \overset{(1)}{P}_{rs,s} = 0 \tag{4.11}$$

$$\overset{(1)}{\mathcal{H}}_L = h_{mn,mn} - h_{mm,nn} = 0 \tag{4.12}$$

Os PP entre funções ou funcionais de campo $\eta\left[g_{ij}, p^{ij}\right]$ sôbre a mesma hipersuperfície tipo espaço são obtidos a partir da definição (2.5) - considerando-se as variáveis do espaço de fase $g_{ij} \to \eta_{ij} + h_{ij}$ e

$p^{ij} \to \overset{(1)}{P}_{ij}$, na aproximação linear, e daí segue

$$\frac{\delta\eta}{\delta g_{rs}(x)} \to \frac{\delta\eta}{\delta h_{rs}(x)}$$

$$\frac{\delta\eta}{\delta P^{\ell m}(x)} \to \frac{\delta\eta}{\delta \overset{(1)}{P}{}^{\ell m}(x)}$$

em primeira ordem. As variáveis canônicas de campo, que agora descrevem o espaço de fase da teoria, serão $(h_{ij}, \overset{(1)}{P}_{ij})$, obviamente. Os PP fundamentais sôbre x^o = cte, entre as variáveis canônicas, dão:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[h_{ij}(x),\ h_{\ell k}(y)\right]_{x^o=y^o} = 0 \\
&\left[\overset{(1)}{P}_{ij}(x),\ \overset{(1)}{P}_{\ell k}(y)\right]_{x^o=y^o} = 0 \\
&\left[h_{ij}(x),\ \overset{(1)}{P}_{\ell k}(y)\right]_{x^o=y^o} = \frac{1}{2}\left(\delta_{i\ell}\,\delta_{jk} + \delta_{ik}\,\delta_{j\ell}\right)\,\delta(\vec{x}-\vec{y})
\end{aligned}\right\} \qquad (4.13)$$

onde $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ é a distribuição de Dirac 3-dimensional.

Relacionada à transformação de gauge (4.2) aparece, na versão hamiltoniana, uma estrutura análoga, só que agora dividida nas transformações de gauge das variáveis do espaço de fase $(h_{ij}, \overset{(1)}{P}_{ij})$. Os geradores destas transformações, via PP, são:

$$C(x^0) = \int \Lambda_r(\vec{x},x^0) \overset{(1)}{\mathscr{H}}_r \; d^3x \tag{4.14}$$

$$B(x^0) = \int \Lambda_L(\vec{x},x^0) \; \overset{(1)}{\mathscr{H}}_L \; d^3x \tag{4.15}$$

para h_{ij} e $\overset{(1)}{P}_{ij}$ respectivamente (Λ_r e Λ_L são funções infinitesimais de primeira ordem, como usualmente. Assim, (4.14) gera sob h_{ij} a transformação

$$\delta h_{ij} = \left[h_{ij}(x),\, C(x^0)\right] = \left[h_{ij}(x),\, \int \Lambda_\ell(\vec{x}',x^0)\, \overset{(1)}{P}{}^{(x')}_{\ell m,m} \; d^3x'\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,(\delta_{i\ell}\,\delta_{mj} + \delta_{im}\,\delta_{j\ell}) \int d^3x' \;\frac{\partial}{\partial x'^m}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\;\Lambda_\ell(\vec{x}',x^0) =$$

$$= -\,\frac{1}{2}\,(\delta_{i\ell}\,\delta_{jm} + \delta_{im}\,\delta_{j\ell})\;\Lambda_{\ell,m}(\vec{x},x^0)$$

ou

$$\delta h_{ij} = -\,\frac{1}{2}\,(\Lambda_{i,j} + \Lambda_{j,i}) \tag{4.16}$$

que é idêntico a (4.2) para $\mu,\nu = i,\, j$.

A parte restante das transformações de gauge, que atuam sôbre as variáveis $\overset{(1)}{P}_{ij}$ é gerada por (4.15) como:

$$\delta\overset{(1)}{P}_{ij} = \left[\overset{(1)}{P}_{ij}(x),\, B(x^0)\right] = \left[\overset{(1)}{P}_{ij}(x),\, \int d^3x'\;\Lambda_L(\vec{x}',x^0)\,(h^{(x')}_{r\ell,r\ell} - h^{(x')}_{rr,ss}\,)\right] =$$

$$= -\,\frac{1}{2}\,(\delta_{ri}\,\delta_{\ell j} + \delta_{rj}\,\delta_{\ell i}) \int d^3x'\;\Lambda_L(\vec{x}',x^0)\;\frac{\partial^2}{\partial x'^r\,\partial x'^\ell}\,\delta(\vec{x}'-\vec{x}) \;+$$

$$+\;\delta_{ij}\int d^3x'\;\Lambda_L(\vec{x}',x^0)\;\nabla'^2\delta(\vec{x}'-\vec{x}) = -\,\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\;\Lambda_L(\vec{x},x^0) + \delta_{ij}\;\nabla^2\Lambda_L(\vec{x},x^0)$$

ou

$$\overset{(1)}{\delta P}_{ij} = \delta_{ij}\, \nabla^2 \Lambda_L(\vec{x},x^o) - \Lambda_{L,ij}(\vec{x}, x^o) \tag{4.17}$$

que é análoga a (4.10). Λ_L está relacionado de forma trivial às componentes temporais do grupo de gauge (II) e corresponde aos deslocamentos normais à hipersuperfície inicial. Assim, no caso da aproximação linear, os vínculos são os geradores do grupo de gauge da teoria, excluido o grupo de Lorentz, como no caso da teoria completa onde (3.24) era o gerador do grupo de invariância da teoria.

Condições de Coordenadas

Como foi visto na seção 3, as equações de movimento (3.25) não determinam de modo único as variáveis canônicas de campo (g_{ij}, P^{ij}) sôbre uma qualquer hipersuperfície tipo espaço, a partir de hipersuperfície de valores iniciais. De modo a tornar única a propagação, temos que fixar o sistema de coordenadas sôbre a variedade, o que implica em fixar os coeficientes $g_{o\mu}$ sôbre a variedade. Isto é feito impondo-se quatro condições de coordenadas. Por exemplo, na aproximação linear impusemos as condições (4.4) (de fato, condições de gauge) e mostramos que elas *realmente fixam* o sistema de coordenadas a menos de uma solução de (4.5) e a menos de um grupo de Lorentz. As condições de coordenadas convenientes na versão Hamiltoniana deverão ser expressas em termos das variáveis canônicas de campo (g_{ij} P^{ij}) * - em particular, serão vínculos D-invariantes definidos

---

* e/ou suas derivadas espaciais.

sôbre a hipersuperfície de valores iniciais. Nossa escolha será guiada de tal forma que as condições de coordenadas sejam de segunda classe com relação ao conjunto total de vínculos da teoria [10, 24], de acôrdo com o método descrito na seção 2, portanto vínculos adicionais que serão incluidos na construção da álgebra de PP da teoria e/ou na construção dos observáveis (variáveis-estrêla).

Uma escolha possível, mas de forma nenhuma única, das condições de coordenadas para a versão linearizada é sugerida por (4.4) e tomaremos:**

$$\left.\begin{aligned} h_{rs,s} &= 0 \\ h_{rr} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.18)$$

Entretanto é fácil verificar que o conjunto total de vínculos, constituido de (4.11), (4.12) e (4.18) tem um elemento de primeira-classe, que é $\overset{(1)}{\mathcal{H}_L}$. Isto nos leva a um conjunto de segunda-classe com sete vínculos e a uma matriz $[\Theta_a, \Theta_b]$ (cf. 2.15)) singular. Desta forma o PD não fica definido, nem as equivalências (2.18) para os observáveis estrêla. Para contornar esta dificuldade reescrevemos as condições de radiação (4.18) numa forma diferente, porém matematicamente equivalente

$$\left.\begin{aligned} h_{ij,j} &= 0 \\ \nabla^2 \overset{(1)}{P}_{ss} - \overset{(1)}{P}_{rs,rs} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.19)$$

** Realmente, podemos mostrar [11] que existe um sistema de coordenadas consistente com (4.4) (i.é, associado a transformações da classe $\Box\xi^{\alpha} = 0$) onde $\gamma_{o\mu} = 0$, $\gamma_{ii} = 0$ e daí $\gamma_{ij,j} = 0$, que podem ser reescritas como $h_{ij,j} = 0$, $h_{ii} = 0$, $h_{o\mu} = 0$.

onde ∇^2 é o Laplaciano no espaço euclidiano 3-dimensional e a função de Green associada a ∇^2 se anula no infinito espacial. A equivalência pode ser verificada diretamente utilizando-se (4.6) na segunda relação (4.19) e considerando-se a primeira relação (4.19). As condições (4.19), assim, substituem (4.18) e demonstra-se [25] que (4.19) acarreta

$$g_{o\mu} = \delta_{o\mu}$$

O equivalente da condição de radiação (4.4) na versão Hamiltoniana será, portanto,

$$\left.\begin{array}{l} h_{ij,j} = 0 \\ \\ \nabla^2 \overset{(1)}{P}_{ss} = \overset{(1)}{P}_{rs,rs} = 0 \\ \\ h_{\mu o} = 0 \end{array}\right\} \qquad (4.20)$$

As condições (4.19) são as condições de coordenadas usadas na formulação canônica ADM [6, 26] da Relatividade Geral; são ambas D-invariantes e constituem, juntamente com (4.11) e (4.12), um conjunto de oito vínculos de segunda-classe, o que será mostrado logo adiante.

Vamos mostrar que (4.19) fixa realmente o sistema de coordenadas, a menos de transformações de Lorentz. As transformações possíveis são aquelas geradas por (4.14) e (4.15) e que deixam (4.19) invariante. Assim

$$\left[h_{ij,j}(x), C(x^o)\right] = \int_{x^o} \xi_r(x') \left[\overset{(x)}{h}_{ij,j}, \overset{(1)}{\mathcal{H}}_r(x')\right]_{x^o = x'^o} d^3x' = -\frac{1}{2}\,\delta_{ir}\nabla^2\,\xi_r - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^r}\xi_r = 0$$

$$\left[\nabla^2 \overset{(1)}{P}_{ss}(x) - \overset{(1)}{P}{}^{(x)}_{rs,rs}, B(x^o)\right] = \int_{x^o} \xi_L(x') \left[\nabla^2 \overset{(1)}{P}_{ss}(x) - \overset{(1)}{P}{}^{(x)}_{rs,rs}, \overset{(1)}{\mathcal{H}}_L(x')\right]_{x^o = x'^o} d^3x' = 2\nabla^2\nabla^2\xi_L(x) = 0$$

cujas soluções correspondentes a mapeamentos não singulares e que se anulam no infinito espacial são $\xi_r = 0$, $\xi_L = 0$. Outra verificação pode ser encontrada na referência (26).

As equações de movimento na forma linear, em primeira ordem, seriam formalmente

$$h_{ij,o} = \int \left[h_{ij}(x), \overset{(1)}{\mathcal{H}}_L(x') \right]_{x^0=x'^0} d^3x' = 0$$

$$\overset{(1)}{P}_{ij,o} = \int \left[\overset{(1)}{P}_{ij}(x), \overset{(1)}{\mathcal{H}}_L(x') \right]_{x^0=x'^0} d^3x' = 0$$

$$\overset{(1)}{\mathcal{H}}_r = 0$$

$$\overset{(1)}{\mathcal{H}}_L = 0$$

Na verdade não é possível tomá-las como descrevendo uma situação física. $\overset{(1)}{\mathcal{H}}_L$ não pode ser, de fato, considerada uma Hamiltoniana mas é simplesmente um vínculo nesta aproximação e que será utilizado na construção dos observáveis. Desde que êstes observáveis, segundo a seção 2, são por construção variáveis congeladas (no sentido de que tem dinâmica) estas equações não serão importantes (cf. notas no fim desta seção).

Construção dos Observáveis-Estrêla

Com a teoria descrita na forma acima podemos passar diretamente à construção dos observáveis. O conjunto de vínculos de segunda-classe é constituído de:

i) Quatro vínculos secundários

$$\overset{(1)}{\mathscr{H}}_r = + 2 \overset{(1)}{P}_{rs,s} = 0$$

$$\overset{(1)}{\mathscr{H}}_L \doteq h_{rs,rs} - h_{rr,ss} = 0$$

ii) Quatro condições de coordenadas

$$A_i = h_{ij,j} = 0$$

$$B = \nabla^2 \overset{(1)}{P}_{ss} - \overset{(1)}{P}_{rs,rs} = 0$$

Os PP entre eles são dados abaixo, somente um calculado explicitamente para exemplo *:

$$\left[\overset{(1)}{\mathscr{H}}_L(x), \overset{(1)}{\mathscr{H}}_\ell(x')\right]_{x^0=x'^0} = \left[h_{rs,rs}(x) - \nabla^2 h_{rr}(x), \overset{(1)}{P}_{\ell m,m}(x')\right]_{x^0=x'^0} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial x^r \, \partial x^s \, \partial x'^m} \delta(\vec{x}-\vec{x}')(\delta_{r\ell}\,\delta_{ms} + \delta_{rm}\,\delta_{\ell s}) +$$

$$- \frac{1}{2} (\delta_{r\ell}\,\delta_{rm} + \delta_{rm}\,\delta_{r\ell}) \frac{\partial^3}{\partial x^s \, \partial x^s \, \partial x'^m} \delta(\vec{x}-\vec{x}') =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial x^\ell} \nabla^2 \, \delta(\vec{x}-\vec{x}') - \frac{\partial}{\partial x'^\ell} \nabla^2 \, \delta(\vec{x}-\vec{x}') = 0$$

---

* Em todos os cálculos que se seguem, o vínculo $\overset{(1)}{\mathscr{H}}_r$ foi usado sem a constante 2.

Aqui, usamos os PP fundamentais (4.13) e o fato de que $\frac{\partial}{\partial x'^{\ell}} \delta(\vec{x}-\vec{x}') = -\frac{\partial}{\partial x^{\ell}} \delta(\vec{x}-\vec{x}')$ desde que $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ é simétrica na troca de $\vec{x}$ por $\vec{x}'$.

Analogamente, é direto e trivial o cálculo dos outros PP. Assim

$$\left[\overset{(1)}{\mathcal{H}}_L(x),\ \overset{(1)}{\mathcal{H}}_r(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[\overset{(1)}{\mathcal{H}}_r(x),\ B(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[\overset{(1)}{\mathcal{H}}_L(x),\ A_i(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[\overset{(1)}{\mathcal{H}}_r(x),\ A_i(x')\right]_{x^0=x'^0} = \frac{1}{2}\delta_{ri}\ \nabla^2\ \delta(\vec{x}-\vec{x}') + \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2}{\partial x^i\ \partial x^r}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$\left[\overset{(1)}{\mathcal{H}}_L(x),\ B(x')\right]_{x^0=x'^0} = -\ 2\ \nabla^2\ \nabla'^2\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$\left[A_i(x),\ B(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

Chamando

$$y_i = \left\{\overset{(1)}{\mathcal{H}}_L,\ \overset{(1)}{\mathcal{H}}_r,\ A_i,\ B\right\} \tag{4.21}$$

podemos escrever

$$[y_i, y_j] = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & -2\nabla^2\nabla'^2\delta \\ \hline 0 & 0 & -A_{r\ell} & 0 \\ \hline 0 & A_{r\ell} & 0 & 0 \\ \hline 2\nabla^2\nabla'^2\delta & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (4.22)$$

onde $A_{r\ell}(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{2}\ \delta_{r\ell}\ \nabla^2\ \delta(\vec{x}-\vec{x}') + \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2}{\partial x^r \partial x^\ell}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}')$

Notas: 1) Estes vínculos nos dão que o número total de componentes independentes será dois para cada variável canônica fundamental (k_{ij}, P_{ij}) por ponto da hipersuperfície x^0 = cte, que descrevem corretamente um campo de spin 2 e massa de repouso zero [4].

2) A matriz anti-simétrica (4.22) tem inversa desde que (4.21) é constituído de um número par de vínculos de segunda-classe [17]; e desde que os elementos de (4.22) são c-números, sua inversa e os coeficientes dos observáveis BK serão um conjunto de c-números (cf. seção 2) e portanto as equivalências (2.18) vão se verificar mesmo fora da hipersuperfície de vínculos.

A partir de (4.21) vamos construir o conjunto de observáveis BK ($\overset{*}{h}_{ij}$, $\overset{(1)*}{P}_{ij}$), adicionando a h_{ij} e $\overset{(1)}{P}_{ij}$ uma combinação linear de todos os vínculos do conjunto (4.24). Os coeficientes serão determinados impondo-se e a condição de

$$\left.\begin{aligned} \left[\overset{*}{h}_{ij}(x),\ y_\ell(x')\right]_{x^0=x'^0} &= 0 \\ \left[\overset{(1)*}{P}_{ij}(x),\ y_\ell(x')\right]_{x^0=x'^0} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.23)$$

para $\ell = 1...8$. Assim

$$h^{*}_{ij}(x)=h_{ij}(x) + \int_{x^0} \alpha_{ijk}(\vec{x},\vec{x}'') \overset{(1)}{\mathscr{E}}_k(x'')d^3x'' + \int_{x^0} \beta_{ij}(\vec{x},\vec{x}'')\overset{(1)}{\mathscr{H}}_L(x'')\, d^3x'' +$$

$$+ \int_{x^0} \gamma_{ij}\, (\vec{x},\vec{x}'')\, A_\ell(x'')d^3x'' + \int_{x^0} \varepsilon_{ij}(\vec{x},\vec{x}'')\, B(x'')\, d^3x' \qquad (4.24)$$

Os coeficientes deverão ter, por consistência, as simetrias:

$$\alpha_{ijk}(\vec{x},\vec{x}'') = \alpha_{jik}(\vec{x},\vec{x}'') = \alpha_{ijk}(\vec{x}'',\vec{x})$$

$$\beta_{ij}(\vec{x},\vec{x}'') = \beta_{ji}(\vec{x},\vec{x}'') = \beta_{ij}(\vec{x}'',\vec{x})$$

$$\gamma_{ij\ell}(\vec{x},\vec{x}'') = \gamma_{ji\ell}(\vec{x},\vec{x}'') = \gamma_{ij\ell}(\vec{x}'',\vec{x})$$

$$\varepsilon_{ij}(\vec{x},\vec{x}'') = \varepsilon_{ji}(\vec{x},\vec{x}'') = \varepsilon_{ij}(\vec{x}'',\vec{x})$$

A simetria em $(\vec{x}, \vec{x}'')$ decorre de que a matriz (4.22) dos PP depende somente de $\delta(\vec{x}-\vec{x}'')$ e/ou suas derivadas de ordem par.

Determinação dos coeficientes (usando (4.22) e (4.23) e os PP fundamentais (4.13)):

$$\left[h^{*}_{ij}(x),\ \overset{(1)}{\mathscr{H}}_L(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0 \Longrightarrow 2 \int \varepsilon_{ij}(\vec{x},\vec{x}'')\ \nabla''^2\ \nabla'^2\delta(\vec{x}'-\vec{x}'')d^3x''=0$$

ou

$$\nabla'^2\ \nabla'^2\ \varepsilon_{ij}(\vec{x},\vec{x}') = 0 \qquad (4.25)$$

$$\left[h^*_{ij}(x), \overset{(1)}{\mathscr{P}}_r(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(\delta_{ir}\delta_{js}+\delta_{is}\delta_{jr}) \frac{\partial}{\partial x'^s} \delta(\vec{x}-\vec{x}') + \int \gamma_{ij\ell}(\vec{x},\vec{x}'')$$

$$\left\{ - \frac{1}{2} \delta_{r\ell} \nabla'^2 \delta(\vec{x}'-\vec{x}'') - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x'^r \partial x'^\ell} \delta(\vec{x}'-\vec{x}'') \right\} = 0$$

ou

$$\frac{1}{2} (\delta_{ir}\delta_{js}+\delta_{is}\delta_{jr}) \frac{\partial}{\partial x'^s} \delta(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{2} \delta_{r\ell}\nabla'^2 \gamma_{ij\ell}(\vec{x},\vec{x}') +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x'^r \partial x'^\ell} \gamma_{ij\ell} (\vec{x},\vec{x}') \tag{4.26}$$

$$\left[h^*_{ij}(x), A_\ell(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0 \Rightarrow \int \alpha_{ijk}(\vec{x},\vec{x}') \left\{ \frac{1}{2} \delta_{k\ell} \nabla''^2 \delta(\vec{x}''-\vec{x}') + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x''^k \partial x''^\ell} \delta(\vec{x}''-\vec{x}') \right\} d^3x'' = 0$$

ou

$$\delta_{k\ell} \nabla'^2 \alpha_{ijk}(\vec{x},\vec{x}') + \frac{\partial^2}{\partial x'^k \partial x'^\ell} \alpha_{ijk}(\vec{x},\vec{x}') = 0 \tag{4.27}$$

$$\left[h^*_{ij}(x), B(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0 \Rightarrow \int_{x^0} \beta_{ij}(\vec{x},\vec{x}'') \left\{-2\nabla'^2\nabla''^2 \delta(\vec{x}'-\vec{x}'')\right\} d^3x' +$$

$$+ \nabla'^2 \delta(\vec{x}-\vec{x}') \delta_{ij} - \frac{\partial^2}{\partial x'^i \partial x'^j} \delta(\vec{x}-\vec{x}') = 0$$

ou

$$2\,\nabla'^2\,\nabla^2\,\beta_{ij}(\vec{x},\vec{x}') = \nabla'^2\delta(\vec{x}-\vec{x}')\,\delta_{ij} - \frac{\partial^2}{\partial x'^i\,\partial x'^j}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (4.28)$$

Solução das Equações Diferenciais dos Coeficientes

Estes coeficientes deverão ser c-números, como consequência das relações de PP (I) e um exame rápido de suas equações diferenciais nos mostra que eles devem ser funções de $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ e/ou suas derivadas $D(\vec{x},\vec{x}')$ e/ou suas derivadas.

Notas: 1) $D(\vec{x},\vec{x}')$ é a função de Green do operador ∇^2, tal que

$$\nabla^2\,D(\vec{x},\vec{x}') = \delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

com $D(x,x')$ se anulando no infinito espacial; obtemos

$$D(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

O operador inverso $\frac{1}{\nabla^2}$ é um operador integral com núcleo $D(\vec{x}-\vec{x}')$; assim, por exemplo

$$\frac{1}{\nabla'^2}f(\vec{x},\vec{x}') = \int D(\vec{x}'-\vec{x}'')\;f(\vec{x},\vec{x}'')d^3x''.$$

Da forma de $D(\vec{x}-\vec{x}')$ temos que $\frac{\partial}{\partial x^i}D(\vec{x}-\vec{x}') = -\frac{\partial}{\partial x'^i}D(\vec{x}-\vec{x}')$ e $\frac{\partial^2 D(\vec{x}-\vec{x}')}{\partial x^i\;\partial x^j} = \frac{\partial^2 D(\vec{x}-\vec{x}')}{\partial x'^i\partial x'^j} = -\frac{\partial^2}{\partial x^i\;\partial x'^j}\,D(\vec{x}-\vec{x}')$ estas propriedades valem igualmente para $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$.

2) As operações $\frac{1}{\nabla^2}$ e ∂_i comutam quando atuam sôbre as funções $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ e $D(\vec{x}-\vec{x}')$, por exemplo,

$$\frac{1}{\nabla^2}\,\partial_i\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \partial_i\,\frac{1}{\nabla^2}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

consequência das propriedades (1) acima e de que $\int f(x)\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,\delta(\vec{x})d^3x =$
$= -\int \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}\,\delta(\vec{x})\,d^3x$ para $f(x)$ contínua e diferenciável.

3) As soluções das equações diferenciais homogêneas associadas, que se anulam no infinito espacial e não têm singularidades são identicamente nulas e por isso não serão referidas no que se segue.

Desde que procuramos campos livres de singularidades e que se anulem no infinito espacial, a solução de (4.24) será:

$$\varepsilon_{ij}(\vec{x},\vec{x}') = 0 \tag{4.29}$$

Para obter uma solução de (4.26) vamos diferenciar em x'^r. Temos:

$$\frac{1}{2}\,(\delta_{ir}\delta_{js}+\delta_{is}\delta_{jr})\,\frac{\partial^2}{\partial x'^s\partial x'^r}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{2}\,\delta_{r\ell}\,\frac{\partial}{\partial x'^r}\,\nabla'^2\,\gamma_{ij\ell}(\vec{x},\vec{x}') +$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x'^\ell}\,\nabla'^2\,\gamma_{ij\ell}(\vec{x},\vec{x}')$$

ou

$$\nabla'^2\,\frac{\partial}{\partial x'^\ell}\,\gamma_{ij\ell}(\vec{x},\vec{x}') = \frac{\partial^2}{\partial x'^i\,\partial x'^j}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \tag{4.30}$$

e então

$$\frac{\partial}{\partial x'^\ell}\,\gamma_{ij\ell}\,(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{\nabla'^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x'^i\partial x'^j}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{\partial^2}{\partial x'^i\partial x'^j}\,\frac{1}{\nabla'^2}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x'^i\partial x'^j}\,D(\vec{x}-\vec{x}')$$

e integrando-se finalmente obtemos

$$\gamma_{ij\ell}(\vec{x},\vec{x}') = \frac{\partial}{\partial x'^{\ell}} \frac{1}{\nabla'^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^i \partial x'^j} D(\vec{x}-\vec{x}') + \theta_{ij\ell}(\vec{x},\vec{x}') \qquad (4.31)$$

tal que $\frac{\partial}{\partial x'^{\ell}} \Theta_{ij\ell}(\vec{x},\vec{x}') = 0$. Por consistência, substituindo (4.31) em (4.26) e usando a propriedade de divergência nula de $\Theta_{ij\ell}$, segue:

$$\frac{1}{2}(\delta_{ir}\delta_{js}+\delta_{is}\delta_{jr}) \frac{\partial}{\partial x'^s} \delta(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{\partial}{\partial x'^r} \frac{\partial^2}{\partial x'^i \partial x'^j} D(\vec{x}-\vec{x}') + \frac{1}{2} \nabla'^2 \Theta_{ijr}(\vec{x},\vec{x}')$$

ou

$$\Theta_{ijr}(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{\nabla'^2} \frac{\partial}{\partial x'^j} \delta(\vec{x}-\vec{x}')\delta_{ir} + \frac{1}{\nabla'^2} \frac{\partial}{\partial x'^i} \delta_{jr}\, \delta(\vec{x}-\vec{x}') -$$

$$-2 \frac{1}{\nabla'^2} \frac{\partial}{\partial x'^r} \frac{\partial^2}{\partial x'^r \partial x'^j} D(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (4.32)$$

Pode-se verificar facilmente que (4.32) satisfaz $\frac{\partial}{\partial x'^r} \Theta_{ijr}(\vec{x},\vec{x}') = 0$. Substituindo (4.32) em (4.31) tiramos:

$$\gamma_{ij\ell}(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{\nabla'^2} \frac{\partial}{\partial x'^{\ell}} \frac{\partial^2}{\partial x'^i \partial x'^j} D(\vec{x}-\vec{x}') + \delta_{i\ell} \frac{1}{\nabla'^2} \frac{\partial}{\partial x'^j} \delta(\vec{x}-\vec{x}') +$$

$$+ \delta_{j\ell} \frac{1}{\nabla'^2} \frac{\partial}{\partial x'^i} \delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (4.33)$$

Consideremos agora a equação diferencial (4.27). Diferenciando em x'^{ℓ}

$$\frac{\partial}{\partial x'^k} \nabla'^2 \alpha_{ijk}(\vec{x},\vec{x}') = 0$$

e daí segue

$$\alpha_{ijk}(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{\nabla'^2}\,\phi_{ijk}(\vec{x},\vec{x}') \qquad (4.34)$$

tal que $\frac{\partial}{\partial x'^k}\,\phi_{ijk}(\vec{x},\vec{x}') = 0$. Substituindo (4.34) em (4.27) $\nabla'^2 \frac{1}{\nabla'^2}\phi_{ij} + \frac{\partial^2}{\partial x'^k \partial x'^\ell}\frac{1}{\nabla'^2}\phi_{ijk} = 0 \Longrightarrow \phi_{ijk} = 0$. Substituindo em (4.34)

$$\alpha_{ijk}(\vec{x},\vec{x}') = 0 \qquad (4.35)$$

As soluções (4.29) e (4.35) eram de se esperar desde que $\overset{*}{h}_{ij}(x)$ não deve depender de $\overset{(1)}{P}_{ij}$ (usar teorema da divergência de Gauss).

Finalmente, considerando a equação (4.28), obtemos diretamente

$$\beta_{ij}(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\nabla'^2}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\delta_{ij} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\nabla'^2}\,\frac{1}{\nabla'^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x'^i \partial x'^j}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (4.36)$$

ou, usando a comutatividade

$$\beta_{ij}(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{2}\,\delta_{ij}\,D(\vec{x}-\vec{x}') - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\nabla'^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x'^i \partial x'^j}\,D(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (4.37)$$

Desta forma,

$$\overset{*}{h}_{ij}(x) = h_{ij}(x) + \int_{x^0} \beta_{ij}(\vec{x},\vec{x}')\overset{(1)}{\mathcal{H}}_L(x')d^3x' + \int_{x^0} \gamma_{ij}\,(\vec{x},\vec{x}')\,A_\ell(x')d^3x' \qquad (4.24')$$

onde β_{ij} e $\gamma_{ij\ell}$ são dados por (4.37) e (4.33) respectivamente.

Usando (4.33) e (4.37) vamos mostrar que $\overset{*}{h}_{ij}(x)$ é uma variável que tem traço nulo e divergência nula e portanto é uma variável do tipo TT da teoria ADM [6], $\overset{*}{h}_{ij}(x) \equiv h^{TT}_{ij}(x)$.

Traço Nulo:

$$h^*_{ij}(x) = h_{ij}(x) + \frac{1}{2}\int_{x^0}\delta_{ij}\, D(\vec{x}-\vec{x}')\overset{(1)}{\mathscr{H}}_L(x')d^3x' -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x^0}\frac{1}{\nabla'^2}\frac{\partial^2}{\partial x'^i\partial x'^j}D(\vec{x}-\vec{x}')\overset{(1)}{\mathscr{H}}_L(x')d^3x' + \int_{x^0}\gamma_{ij}\;(\vec{x},\vec{x}')\;A_\ell(x')d^3x'$$

Calculando o traço

$$h^*_{ii}(x)=h_{ii}(x)+\frac{3}{2}\int_{x^0}D(\vec{x}-\vec{x}')\overset{(1)}{\mathscr{H}}_L(x')d^3x'-\frac{1}{2}\int_{x^0}D(\vec{x}-\vec{x}')\overset{(1)}{\mathscr{H}}_L(x')d^3x' +$$

$$+\int_{x^0}\gamma_{ii\ell}(\vec{x},\vec{x}')\;A_\ell(x')d^3x'$$

$$h^*_{ii}(x) = h_{ii}(x) + \int_{x^0} D(\vec{x}-\vec{x}')\overset{(1)}{\mathscr{H}}_L(x')d^3x' + \int_{x^0}\gamma_{ii\ell}\;A_\ell(x')\;d^3x'$$

$$h^*_{ii}(x) = h_{ii}(x) + \int_{x^0}D(\vec{x}-\vec{x}')\left[h^{(x')}_{rs,rs} - h^{(x')}_{rr,ss}\right]d^3x' + \int_{x^0}\gamma_{ii\ell}(\vec{x},\vec{x}')\;A_\ell(x')d^3x'$$

Na segunda integral à direita, integramos por partes, usamos teorema da divergência mais a suposição que $D(\vec{x}-\vec{x}')$ e os campos se anulam no infinito espacial e obtemos

$$h^*_{ii}(x)=h_{ii}(x) + \int_{x^0}\left(\gamma_{ii\ell}(\vec{x},\vec{x}') - \frac{\partial}{\partial x'^\ell}D(\vec{x}-\vec{x}')\right)A_\ell(x')\;d^3x' -$$

$$-\int\nabla'^2\;D(\vec{x}-\vec{x}')\;h_{rr}(x')d^3x'$$

ou

$$h^*_{ii}(x) = h_{ii}(x) + \int_{x^0} (\gamma_{ii\ell}(\vec{x},\vec{x}') - \frac{\partial}{\partial x'^\ell} D(\vec{x}-\vec{x}'))\, A_\ell(x')\, d^3x' - h_{rr}(x)$$

e então basta mostrar que $(\gamma_{ii\ell} - \frac{\partial}{\partial x'^\ell} D(\vec{x}-\vec{x}')$ se anula identicamente; de fato, usando (4.33)

$$\gamma_{ii\ell} - \frac{\partial D}{\partial x'^\ell} = - \frac{\partial}{\partial x'^\ell} D(\vec{x}-\vec{x}') + \frac{\partial}{\partial x'^\ell} D(\vec{x}-\vec{x}') + \frac{\partial}{\partial x'^\ell} D(\vec{x}-\vec{x}') - \frac{\partial}{\partial x'^\ell} D(\vec{x}-\vec{x}') = 0$$

Divergência Nula:

Por (4.37) é trivial que $\frac{\partial}{\partial x'^i} \beta_{ij}(\vec{x},\vec{x}') = - \frac{\partial}{\partial x^i} \beta_{ij}(\vec{x},\vec{x}') = 0$. Resta então, mostrar que a divergência dos outros têrmos se anula. Assim

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \gamma_{ij\ell}(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{\nabla'^2} \cancel{\frac{\partial^2}{\partial x'^\ell \partial x'^i}} \nabla^2 D(\vec{x}-\vec{x}') - \delta_{i\ell} \frac{1}{\nabla'^2} \nabla'^2 \delta(\vec{x}-\vec{x}') -$$

$$- \frac{1}{\nabla'^2} \cancel{\frac{\partial^2}{\partial x'^i \partial x'^\ell}} \delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

e daí,

$$h^*_{ij,j}(x) = h_{ij,j}(x) - \int_{x^0} \delta_{ij}\, \delta(\vec{x}-\vec{x}')\, h_{\ell m,m}(x')\, d^3x' = h_{ij,j}(x) - h_{im,m}(x) = 0$$

O observável associado aos momenta $\overset{(1)}{P}_{ij}$ é dado por

$$\overset{(1)}{P}{}^*_{ij}(x) = \overset{(1)}{P}_{ij}(x) + \int_{x^0} \mu_{ijk}(\vec{x},\vec{x}'')\, \overset{(1)}{\mathcal{H}}_k(x'')\, d^3x'' + \int_{x^0} \eta_{ij}(\vec{x},\vec{x}'')\, \overset{(1)}{\mathcal{H}}_L(x'')\, d^3x'' +$$

$$+ \int_{x^0} \lambda_{ij}\, (\vec{x},\vec{x}'')\, A_\ell(x'')\, d^3x'' + \int_{x^0} \Theta_{ij}(\vec{x},\vec{x}'')\, B(x'')\, d^3x''$$

Por consistência os coeficientes deverão ter as simetrias

$$\mu_{ijk}(\vec{x},\vec{x}'') = \mu_{jik}(\vec{x},\vec{x}'') = \mu_{ijk}(\vec{x}'',\vec{x})$$

$$\eta_{ij}(\vec{x},\vec{x}'') = \eta_{ji}(\vec{x},\vec{x}'') = \eta_{ij}(\vec{x}'',\vec{x})$$

$$\lambda_{ij\ell}(\vec{x},\vec{x}'') = \lambda_{ji\ell}(\vec{x},\vec{x}'') = \lambda_{ij\ell}(\vec{x}'',\vec{x})$$

$$\Theta_{ij}(\vec{x},\vec{x}'') = \Theta_{ji}(\vec{x},\vec{x}'') = \Theta_{ij}(\vec{x}'',\vec{x})$$

A simetria em $(\vec{x},\vec{x}'')$ decorre da forma dos elementos de matriz (4.22) (cf. (2.17)). Determinação dos coeficientes em $\overset{(1)}{P}{}^{*}_{ij}(x)$, usando-se (4.22) (4.23) e (4.13):

$$\left[\overset{(1)}{P}{}^{*}_{ij}(x),\overset{(1)}{\mathcal{H}}_L(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0 \Rightarrow 2\int_{x^0}\Theta_{ij}(\vec{x},\vec{x}'')\nabla''^2\nabla'^2\,\delta(\vec{x}'-\vec{x}'')d^3x''+\delta_{ij}\,\nabla'^2\delta(\vec{x}-\vec{x}')-$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x'^i\partial x'^j}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') = 0$$

ou

$$2\,\nabla'^2\,\nabla'^2\,\Theta_{ij}(\vec{x},\vec{x}') = -\,\delta_{ij}\,\nabla'^2\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') + \frac{\partial^2}{\partial x'^i\partial x'^j}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \quad (4.38)$$

$$\left[\overset{(1)}{P}{}^{*}_{ij}(x),\overset{(1)}{\mathcal{H}}_r(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0 \Rightarrow \int_{x^0}\lambda_{ij\ell}(\vec{x},\vec{x}'')(-\,\frac{1}{2}\,\delta_{r\ell}\,\nabla'^2\,\delta(\vec{x}'-\vec{x}'')\,-$$

$$-\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x'^r\partial x'^\ell}\,\delta(\vec{x}'-\vec{x}''))\,d^3x'' = 0$$

ou

$$\delta_{r\ell}\,\nabla'^2\,\lambda_{ij\ell}(\vec{x},\vec{x}') + \frac{\partial^2}{\partial x'^r\partial x'^\ell}\,\lambda_{ij\ell}(\vec{x},\vec{x}') = 0 \qquad (4.39)$$

$$\left[\overset{(1)}{P}{}^{*}_{ij}(x),A_\ell(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0 \Rightarrow \left[\overset{(1)}{P}_{ij}(x),A_\ell(x')\right]_{x^0=x'^0} + \int_{x^0}\mu_{ijk}(\vec{x},\vec{x}'')(\frac{1}{2}\,\delta_{k\ell}\nabla''^2\delta(\vec{x}''-\vec{x}')+$$

$$+\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x''^k\partial x''^\ell}\,\delta(\vec{x}''-\vec{x}'))d^3x'' = 0$$

ou

$$(\delta_{i\ell}\delta_{jm}+\delta_{im}\delta_{j\ell})\frac{\partial}{\partial x'^m}\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \delta_{k\ell}\nabla'^2\mu_{ijk}(\vec{x},\vec{x}') + \frac{\partial^2}{\partial x'^k\partial x'^\ell}\mu_{ijk}(\vec{x},\vec{x}') \qquad (4.40)$$

$$\left[\overset{(1)}{P}{}^*_{ij}(x); B(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0 \Longrightarrow -2\int_{x^0} \eta_{ij}(\vec{x},\vec{x}'')\nabla'^2\nabla''^2\delta(\vec{x}'-\vec{x}'')d^3x'' = 0$$

ou

$$\nabla^2\nabla'^2\eta_{ij}(\vec{x},\vec{x}') = 0 \qquad (4.41)$$

Solução das Equações Diferenciais dos Coeficientes

Um exame destas equações nos mostra que estes coeficientes devem ser funções de $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ e/ou suas derivadas e $D(\vec{x}-\vec{x}')$ e/ou suas derivadas, e ainda mais, são equações diferenciais idênticas às equações para os coeficientes de $h^*_{ij}(x)$, a menos de um sinal.

Assim, comparando (4.38) com (4.28) obtemos:

$$\Theta_{ij}(\vec{x},\vec{x}') = -\beta_{ij}(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{2}\delta_{ij}D(\vec{x}-\vec{x}') + \frac{1}{2}\frac{1}{\nabla'^2}\frac{\partial^2}{\partial x'^i\partial x'^j}D(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (4.42)$$

Comparando (4.39) com (4.27) obtemos

$$\lambda_{ij\ell}(\vec{x},\vec{x}') = \alpha_{ij\ell}(\vec{x},\vec{x}') = 0 \qquad (4.43)$$

A equação (4.40) é idêntica a (4.26) e sua solução

$$\mu_{ijk}(\vec{x},\vec{x}')=\gamma_{ijk}(\vec{x},\vec{x}')=-\frac{1}{\nabla'^2}\frac{\partial}{\partial x'^k}\frac{\partial^2}{\partial x'^i\partial x'^j}D(\vec{x}-\vec{x}')+\delta_{ik}\frac{1}{\nabla'^2}\frac{\partial}{\partial x'^j}\delta(\vec{x}-\vec{x}') + \delta_{jk}\frac{1}{\nabla'^2}\frac{\partial}{\partial x'^i}\delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (4.44)$$

$$\overset{(1)}{P}{}^{*}_{ii}(x) = \overset{(1)}{P}_{ii}(x) - \frac{3}{2}\int_{X^o} D(\vec{x}-\vec{x}')\, B(x')d^3x' + \frac{1}{2}\int_{X^o} D(\vec{x}-\vec{x}')\, B(x')\, d^3x' +$$

$$+ \int_{X^o} \mu_{iik}(\vec{x},\vec{x}')\, \overset{(1)}{\mathscr{H}}_k(x')d^3x'$$

$$\overset{(1)}{P}{}^{*}_{ii}(x) = \overset{(1)}{P}_{ii}(x) - \int D(\vec{x}-\vec{x}')\, B(x')\, d^3x' + \int_{X^o} \mu_{iik}(\vec{x},\vec{x}')\overset{(1)}{\mathscr{H}}_k(x')\, d^3x'$$

ou

$$\overset{(1)}{P}{}^{*}_{ii}(x) = \overset{(1)}{P}_{ii}(x) - \int_{X^o} D(\vec{x}-\vec{x}')\left[\nabla'^2\, \overset{(1)}{P}_{ss}(x') - \overset{(1)}{P}_{rs,rs}(x')\right]d^3x' +$$

$$+ \int_{X^o} \mu_{iik}(\vec{x},\vec{x}')\, \overset{(1)}{\mathscr{H}}_k(x')\, d^3x'$$

Usando as propriedades assintóticas de $D(\vec{x}-\vec{x}')$ e $\overset{(1)}{P}_{ij}(x)$, juntamente com o teorema da divergência, podemos operar formalmente:

$$\int_{X^o} D(\vec{x}-\vec{x}')\, \nabla'^2\, \overset{(1)}{P}_{ss}(x')\, d^3x' = \frac{1}{\nabla^2}\int_{X^o} \delta(\vec{x}-\vec{x}')\, \nabla'^2\, \overset{(1)}{P}_{ss}(x')\, d^3x' =$$

$$= \frac{1}{\nabla^2}\, \nabla^2\, \overset{(1)}{P}_{ss}(x) = \overset{(1)}{P}_{ss}(x)$$

Também

$$\int_{X^o} D(\vec{x}-\vec{x}')\, \frac{\partial^2}{\partial x'^r \partial x'^s}\, \overset{(1)}{P}_{rs}(x')d^3x' = -\int \frac{\partial}{\partial x'^s}\, D(\vec{x}-\vec{x}')\, \overset{(1)}{P}_{sr,r}(x')d^3x'$$

Substituindo acima

$$\overset{(1)}{P}{}^{*}_{ii}(x) = \overset{(1)}{P}_{ii}(x) - \overset{(1)}{P}_{ss}(x) - \int_{X^o}\left(\mu_{iik}(\vec{x},\vec{x}') - \frac{\partial}{\partial x'^k}\, D(\vec{x}-\vec{x}')\right)\overset{(1)}{\mathscr{H}}_k(x')d^3x'$$

Resta mostrar que o coeficiente da integral é nulo identicamente. De fato, usando (4.44)

$$\mu_{iik}(\vec{x},\vec{x}') - \frac{\partial}{\partial x'^k} D(\vec{x},\vec{x}\ ) \equiv 0$$

Divergência Nula:

Por (4.42) é trivial que $\frac{\partial}{\partial x^j}\Theta_{ij}(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{\partial}{\partial x'^j}\Theta_{ij}(\vec{x},\vec{x}') = 0$. Resta então mostrar que a divergência dos dois outros termos se anula. Assim

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\mu_{ijk}(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{\nabla'^2}\frac{\partial^2}{\partial x'^i \partial x'^j}\nabla'^2 D(\vec{x}-\vec{x}') - \delta_{i\ell}\frac{1}{\nabla'^2}\nabla'^2\delta(\vec{x}-\vec{x}') -$$

$$-\frac{1}{\nabla'^2}\frac{\partial^2}{\partial x'^i \partial x'^j}\delta(\vec{x}-\vec{x}') = -\delta_{i\ell}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

e daí,

$$\overset{(1)*}{P}_{ij,j}(x) = \overset{(1)}{P}_{ij,j}(x) - \int_{x^0}\delta_{i\ell}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\overset{(1)}{P}\ell_{m,m}(x')\,d^3x' = \overset{(1)}{P}_{ij,j}(x) - \overset{(1)}{P}_{im,m}(x) = 0$$

Parêntesis de Poisson entre as variáveis estrela fundamentais sôbre hiper-superfície tipo-espaço.

Usando (4.22) e os PP (4.13) obtemos

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\overset{*}{h}_{ij}(x),\ \overset{*}{h}_{\ell m}(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0\\
&\left[\overset{(1)*}{P}_{ij}(x),\ \overset{(1)*}{P}_{\ell m}(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0\\
&\left[\overset{*}{h}_{ij}(x),\ \overset{(1)*}{P}_{\ell m}(x')\right]_{x^0=x'^0} = \overset{TT}{\Delta}{}^{\ell m}_{ij}(\vec{x}-\vec{x}')
\end{aligned}\right\}\qquad (4.46)$$

onde $\Delta^{TT}{}_{ij}{}^{\ell m}(\vec{x}-\vec{x}')$ é uma delta de Dirac modificada, com divergência nula em relação aos índices, simétrica e de traço nulo nos índices superiores e inferiores. Esta função é a delta (TT) da teoria ADM desde que esta última é definida por suas propriedades de simetria, traço e divergência. Para provar as propriedades de $\Delta^{TT}{}_{ij}{}^{\ell m}(\vec{x}-\vec{x}')$ basta notar que

$$\overset{*}{h}_{ij,j}(x) = 0, \qquad \overset{(1)}{P}_{\ell m,m}(x) = 0$$

e

$$\overset{*}{h}_{ii} = 0 \qquad , \qquad \overset{(1)*}{P}_{\ell\ell} = 0$$

são condições fortes no sentido de Dirac, i.é, valem para qualquer ponto do espaço de fase, quer sejam ou não pontos da hipersuperfície de vínculos. Assim

$$\Delta^{TT}{}_{ij,j}{}^{\ell m}(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\overset{*}{h}_{ij}(x), \overset{(1)*}{P}_{\ell m}(x')\right]_{x^0=x'^0} = \left[\overset{*}{h}_{ij,j}(x), \overset{(1)*}{P}_{\ell m}(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\Delta^{TT}_{ij}{}^{\ell\ell}(\vec{x}-\vec{x}') = \left[\overset{*}{h}_{ij}(x), \overset{(1)*}{P}_{\ell\ell}(x')\right]_{x^0=x'^0} = \left[\overset{*}{h}_{ij}(x), 0\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

etc.* Esta função pode ser calculada explicitamente

---

* Frisamos, mais uma vez, que para a aproximação linear as equivalências (2.18) são equivalências fortes no sentido de Dirac.

$$\Delta^{TT}{}^{\ell m}_{ij}(\vec{x}-\vec{x}') = \left[\overset{*}{h}_{ij}(x), \overset{(1)*}{P}_{\ell m}(x')\right]_{x^0=x'^0} = \frac{1}{2}\,(\delta_{i\ell}\delta_{jm}+\delta_{im}\delta_{j\ell})\;\delta(\vec{x},\vec{x}') +$$

$$+\,\delta_{ij}\;\nabla^2\;\Theta_{\ell m}(\vec{x},\vec{x}') - \frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\,\Theta_{\ell m}(\vec{x},\vec{x}') + \frac{\partial^2}{\partial x^\ell\partial x^m}\,\beta_{ij}(\vec{x},\vec{x}') - \delta_{\ell m}\;\nabla^2\;\beta_{ij}(\vec{x},\vec{x}')+$$

$$+\,\frac{1}{2}\;\frac{\partial}{\partial x^k}\,\gamma_{ij\ell}(\vec{x},\vec{x}')(\delta_{k\ell}\;\delta_{pm} + \delta_{km}\;\delta_{p\ell}) +$$

$$+\int_{x^0}(-2\;\nabla''^2\;\nabla''^2\;\beta_{ij}(\vec{x},\vec{x}''))\;\Theta_{\ell m}(\vec{x}',\vec{x}'')d^3x'' +$$

$$-\,\frac{1}{2}\int_{x^0}\delta_{kp}\;\nabla''^2\;\gamma_{ijk}(\vec{x},\vec{x}'')\;\mu_{\ell mp}(\vec{x}',\vec{x}'')d^3x'' +$$

$$-\,\frac{1}{2}\int_{x^0}\frac{\partial^2}{\partial x''^k\partial x''^p}\;\mu_{\ell mp}\;(\vec{x}',\vec{x}'')\;\gamma_{ijk}(\vec{x},\vec{x}'')\;d^3x''$$

e usando-se (4.33), (4.37), (4.42) e (4.44) podemos, também, por cálculo direto, mostrar suas propriedades.

Finalizando, os resultados importantes desta seção foram a construção e cálculo completo dos observáveis BK para o campo gravitacional na aproximação linear (campo de spin 2 e massa de repouso zero) e que são equivalentes às variáveis da formulação canônica ADM, módulo as mesmas condições de coordenadas.

Notas:

1. Do ponto de vista físico, as forças gravitacionais são medidas não pela aceleração de uma partícula, mas pela aceleração relativa de duas partículas (desvio geodésico) e a medida desta aceleração relativa é dada pelo tensor de curvatura [27, 28]. Sôbre a hipersuperfície de vínculos, componentes do tensor de curvatura linearizado podem ser expressas, em termos das variáveis estrela, por relação muito simples. Usando as equações de vínculos (4.20) e (4.6), temos:

$$ {}^{4}\overset{(1)}{R}_{i\ kk\ell} \approx 2\ \nabla^2\ \overset{*}{h}_{i\ell} \tag{4.47}$$

$$ {}^{4}\overset{(1)}{R}{}^{o}{}_{ik\ell} \approx -\overset{(1)*}{P}_{ik,\ell} + \overset{(1)\ *}{P}_{i\ell,k} \tag{4.48}$$

ou, integrando-se,

$$ \overset{*}{h}_{i\ell} \approx \frac{1}{2}\ \frac{1}{\nabla^2}\ {}^{4}\overset{(1)}{R}_{i\ kk\ell} $$

$$ \varepsilon_{k\ell m}\ \varepsilon_{mrs}\ \overset{(1)*}{P}_{ir} \approx \partial_s\ \frac{1}{\nabla^2}\ {}^{4}\overset{(1)}{R}{}^{o}{}_{ik\ell} $$

Fazendo uma transformação de Fourier em (4.47) e (4.48)

$$ {}^{4}\overset{(1)}{R}{}^{(k)}_{imm\ell} \approx 2\ |\vec{k}|^2\ \overset{*}{h}_{i\ell}(k) $$

$$ {}^{4}\overset{(1)}{R}{}^{o(k)}_{ik\ell} \approx -\overset{(1)*}{P}_{im}(k)k_\ell + \overset{(1)*}{P}_{i\ell}(k)k_m $$

onde k é o vetor propagação. A propriedade $\overset{(1)*}{P}_{ij,j} = 0$ transformada dá

$$ k_j\ \overset{(1)*}{P}_{ij}(k) = 0 $$

e então as duas relações anteriores se escrevem

$$h^{*}_{i\ell}(k) \approx \frac{2}{|\vec{k}|^2}\, {}^4\overset{(1)}{R}_{imm\ell}(k)$$

$$\overset{(1)}{P}{}^{*}_{i\ell}(k) \approx \frac{k_m}{|\vec{k}|^2}\, {}^4\overset{(1)}{R}{}^{\bar{0}}_{\ im\ell}\ (k)$$

Estas quantidades físicas podem ser obtidas então medindo-se o tensor de curvatura (desvio geodésico): embora estas medidas a Fourier sejam, em princípio, não locais no espaço, para uma certa precisão desejada a região de medida exigida é finita e sugestões recentes para medir ondas gravitacionais são usualmente deste tipo [29].

2) Os vínculos $\overset{(1)}{\mathcal{H}}_L \approx 0$ e $\overset{(1)}{\mathcal{H}}_r \approx 0$ não podem compor a hamiltoniana da teoria linearizada, devido a sua forma bastante simples e as equações hamiltonianas de movimento em primeira ordem, não têm nenhum significado físico. Entretanto sabemos que a aproximação linear para o campo no vazio pode descrever ondas gravitacionais na ausência de matéria e, desde que ondas gravitacionais transportam energia, isto deveria dar origem na Hamiltoniana a termos positivos definidos descrevendo tal energia. Tal contribuição na Hamiltoniana aparece quando retemos também termos de ordem ε^2, mantendo os vínculos em primeira ordem. Assim

$$\overset{(2)}{\mathcal{H}} = \Big(\overset{(1)}{P}_{rs}\overset{(1)}{P}_{rs} + \frac{1}{4} h_{rs,u}\, h_{rs,u} - \frac{1}{2}\overset{(1)}{P}_{rr}\overset{(1)}{P}_{ss} - \frac{1}{4} h_{rr,u}\, h_{ss,u} + \frac{1}{2} h_{rs,r}\, h_{uu,s} +$$

$$- \frac{1}{2} h_{rs,u}\, h_{ru,s}\Big) + (g^{00^{-1/2}} - 1)\, \overset{(1)}{\mathcal{H}}_L - g_{or}\, \overset{(1)}{\mathcal{H}}_r \qquad (4.49)$$

O primeiro termo da expansão é uma hamiltoniana usual, envolvendo somen variáveis dinâmicas e não contendo $g_{0\mu}$ arbitrárias. Os termos contendo os vínculos em primeira ordem trazem para as equações de movimento a arbitrariedade associada e mudanças de ordem ε (II) no sistema de coordenadas. Esta expressão também poderia ser obtida linearizando o pseudo-tensor momentum energia de Einstein para o campo gravitacional e tomando termos até segunda ordem. Sua componente (0,0) nesta aproximação é

$$ {}_E\overset{(2)}{\mathcal{T}}{}_0{}^0 = - \overset{(2)}{\mathcal{L}}_D + h_{ij,0} \overset{(1)}{P}{}^{ij} \equiv \overset{(2)}{\mathcal{H}} $$

O vetor de Poynting seria a componente ${}_E\overset{(2)}{\mathcal{T}}{}^{0i}$ do tensor simetrizado.

Usando a densidade de Hamiltoniana (4.49), as equações de movimento agora serão

$$ \partial_0 \overset{(1)}{P}_{ij}(x) = \left[\overset{(1)}{P}_{ij}(x), \overset{(2)}{H}(x^0) \right] = \int_{x^0} d^3x' \left[\overset{(1)}{P}_{ij}(x), \overset{(2)}{\mathcal{H}}(x') \right]_{x'^0 = x^0} $$

$$ \partial_0 h_{ij}(x) = \left[h_{ij}(x), \overset{(2)}{H}(x^0) \right] = \int_{x^0} d^3x' \left[h_{ij}(x), \overset{(2)}{\mathcal{H}}(x') \right]_{x^0 = x'^0} $$

e calculando-se explicitamente, usando (4.13), obtemos

$$ \partial_0 \overset{(1)}{P}_{ij} = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{ij} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \overset{(1)}{\mathcal{H}}_L - \frac{1}{4} (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) \frac{\partial}{\partial x^s} \overset{(1)}{\mathcal{H}}_r $$

$$ \partial_0 h_{ij} = 2 \overset{(1)}{P}_{ij} - \delta_{ij} \overset{(1)}{P}_{\ell\ell} $$

Sôbre a hipersuperfície de vínculos estas equações se reduzem a

$$\left.\begin{aligned} \partial_o \overset{(1)}{P}{}^{*}_{ij} &\approx \frac{1}{2} \nabla^2 h^{*}_{ij} \\ \partial_o h^{*}_{ij} &\approx 2 \overset{(1)}{P}{}^{*}_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{4.50}$$

equivalentes à equação de onda $\Box h^{*}_{ij} \approx 0$.

Analogamente, a densidade de Hamiltoniana (4.49), sôbre a hipersuperfície de vínculos deve se reduzir à forma definida positiva

$$\overset{(2)}{\mathcal{H}} \approx \overset{(1)}{P}{}^{*}_{rs} \overset{(1)}{P}{}^{*}_{rs} + \frac{1}{4} h^{*}_{rs,u} \; h^{*}_{rs,u} \tag{4.51}$$

De fato, os dois últimos termos contendo $\overset{(1)}{\mathcal{H}}_L$ e $\overset{(1)}{\mathcal{H}}_r$ se anulam fracamente. Outros termos se anulam ou por propriedade do traço das variáveis estrela ou fracamente pelas condições de coordenadas. O anulamento de $1/2 \; h_{rs,u} \; h_{ru,s}$ pode ser visto fazendo-se uma transformação de Fourier; obtém-se

$$TF(h_{rs,u}^{(x)} \; h_{ru,s}^{(x)}) \rightarrow k_u \; k_s \; h_{rs}(k) \; h_{ru}(k)$$

e a condição de coordenadas $h_{ij,j} \approx 0$ nos dá $k_j \; h_{ij}(k) \approx 0$ o que implica $k_u \; k_s \; h_{ru}(k) \; h_{rs}(k) \approx 0$.

As condições de coordenadas eliminam da Hamiltoniana os termos associados a "ondas de coordenadas", bem como eliminam estas componentes da descrição em termos de variáveis estrela. Isto pode ser visto mais detalhadamente na referência [30], na qual os autores definem uma zona de radiação na Relatividade Geral onde variáveis canônicas descrevendo a radiação obedecem equações da teoria linear.

Com relação às equações de movimento (4.50) e à hamiltoniana (4.51) devemos observar que, para efeito de cálculo, pode-se trabalhar formalmente com (4.51) como uma igualdade forte no sentido de Dirac (i.é, mesmo fora da hipersuperfície de vínculos) e obter as equações de movimento (4.50) pelo cálculo dos PP com (4.51).

3) As variáveis estrêla $(\overset{*}{h}_{ij}(x),\ \overset{(1)*}{P}_{ij}(x))$ são uma descrição, independente do sistema de coordenadas (em primeira ordem em ε *), do campo gravitacional na aproximação linear em um referencial de Lorentz fixo. Quando uma transformação de Lorentz é feita, nós devemos usar as novas variáveis estrela no novo sistema de Lorentz para descrever o campo, como em eletrodinâmica, nós devemos usar as partes transversais dos $\vec{A}^T$ e $\vec{E}^T$ transformados.

5. TEORIA HAMILTONIANA DE DIRAC NA FORMA SPINORIAL-APROXIMAÇÃO LINEAR

A formulação da Relatividade Geral em termos de spinores a duas componentes bem como a determinação das variáveis dinâmicas canônicas nesta formulação é feita no apêndice I. Todos os símbolos, convenções e resultados usados aqui foram obtidos ou mencionados neste apêndice, ao qual nos refe-

---

* Por independência com relação ao SC entendemos invariância com relação às transformações canônicas geradas por (4.17) e (4.18).

riremos ao longo de toda seção 5. Desde que a formulação hamiltoniana está sendo feita sôbre uma hipersuperfície tipo espaço, as variáveis fundamentais $\sigma_{\mu}{}^{A\dot{B}}(x)$ são referidas a eixos de tetradas com uma das quatro componentes (pernas) normal à hipersuperfície x^{0} = cte. (Cf. apêndice 2).

Na forma spinorial, a aproximação linear é feita supondo-se que em algum sistema de coordenadas as matrizes de spin $\sigma_{\mu}(x)$ e $\tau_{\mu}(x)$ podem ser escritas

$$\sigma_{\mu}^{A\dot{B}}(x) = \overset{\circ}{\sigma}_{\mu}{}^{A\dot{B}} + \Sigma_{\mu}^{A\dot{B}}(x) \tag{5.1}$$

$$\tau_{\mu}(x) = \overset{\circ}{\tau}_{\mu} + \varepsilon\, \overline{\Sigma}_{\mu}(x)\, \varepsilon \tag{5.2}$$

onde $\sigma_{i}{}^{A\dot{B}}$ são as matrizes de Pauli com sinal trocado e $\sigma_{0}{}^{A\dot{B}}$ é a identidade de 2 x 2. As matrizes $\overset{\circ}{\tau}_{\mu}$ estão relacionadas a $\overset{\circ}{\sigma}_{\mu}$ por $\overset{\circ}{\tau}_{\mu} = \varepsilon\, \overline{\overset{\circ}{\sigma}}_{\mu}\, \varepsilon$, onde a barra significa a operação de conjugação complexa e $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Os índices gregos são levantados e abaixados com a métrica de Lorentz $\eta_{\mu\nu}$, $\eta^{\mu\nu}$ (cf. apêndice I). $\Sigma_{\mu}^{A\dot{B}}(x)$ é uma matriz de spin hermitiana, infinitesimal de primeira ordem. Em todos os cálculos que se seguem vamos considerar como significantes somente termos de primeira ordem em $\Sigma_{\mu}(x)$.

Usando (5.1) em

$$g_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\sigma_{\mu}(x)\, \tau_{\nu}(x))$$

e tendo em vista (4.1) obtemos

$$\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\overset{\circ}{\sigma}_{\mu}\, \overset{\circ}{\tau}_{\nu}) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\Sigma_{\mu}\, \overset{\circ}{\tau}_{\nu} + \Sigma_{\nu}\, \overset{\circ}{\tau}_{\mu})$$

e então segue que

$$h_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{2}\,Tr(\Sigma_\mu(x)\mathring{\tau}_\nu + \Sigma_\nu(x)\,\mathring{\tau}_\mu) \qquad (5.3)$$

ou, em termos de componentes

$$h_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{2}\,(\Sigma_\mu^{A\dot{B}}(x)\mathring{\tau}_{\nu\,A\dot{B}} + \Sigma_\nu^{A\dot{B}}(x)\mathring{\tau}_{\mu\,A\dot{B}}) \qquad (5.3)$$

Analogamente podemos obter, a partir de (5.3)

$$h^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\alpha}\,\eta^{\nu\beta}\,h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,Tr(\Sigma^\mu\,\mathring{\tau}^\nu + \Sigma^\nu\,\mathring{\tau}^\mu)$$

onde $\Sigma^\mu = \eta^{\mu\alpha}\;\Sigma_\alpha$.

Tendo colocado $\sigma_\mu(x)$ na forma (5.1), temos ainda a liberdade de realizar mapeamento adicionais que não alteram a forma (5.1), o que implica em não alterar a forma (4.1). Sob uma transformação infinitesimal arbitrária

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$$

$\sigma_\mu(x)$ se transforma como

$$\sigma'_\mu(x') = \sigma'_\mu(x) + \xi^\alpha\,\sigma_{\mu,\alpha}(x) = \sigma_\mu(x) - \xi^\sigma_{\;,\mu}\,\sigma_\alpha(x)$$

que, em primeira ordem, se escreve:

$$\sigma'_\mu(x) = \sigma_\mu(x) - \xi^\alpha_{\;,\mu}\,\mathring{\sigma}_\alpha \qquad (5.4)$$

Para que (5.4) seja ainda da forma (5.1) basta que $\Sigma_\mu(x)$ se transforme como

$$\Sigma'_\mu(x) = \Sigma_\mu(x) - \xi^\alpha_{\;,\mu}\,\mathring{\sigma}_\alpha = \Sigma_\mu(x) - \Lambda_{,\mu}(x) \qquad (5.5)$$

onde $\Lambda(x) = \xi^\alpha(x)\,\mathring{\sigma}_\alpha$

Uma transformação de Poincaré é obtida quando tomamos

$$\xi^{\alpha}(x) = \varepsilon^{\alpha}_{\cdot\lambda}\, x^{\lambda} + b^{\alpha} \tag{I}$$

onde b^{α} e $\varepsilon^{\alpha}{}_{\lambda}$ são parâmetros infinitesimais arbitrários e tal que

$$\eta_{\mu\alpha}\, \varepsilon^{\alpha}{}_{\nu} = - \eta_{\nu\alpha}\, \varepsilon^{\alpha}{}_{\mu} \quad .$$

Uma transformação de gauge (II) é obtida quando $\xi^{\alpha}(x)$ é diferente de (I), por exemplo não linear em x^{μ}. A denominação transformação de gauge é devida à forma (5.5) que é uma transformação a ponto fixo dependente de uma ou mais funções, análoga ao caso (4.2). Notar que, em primeira ordem, os potenciais $h_{\mu\nu}(x)$ são invariantes em relação à transformação de Poincaré infinitesimais mas os potenciais $\Sigma_{\mu}(x)$ mudam sob (I) como

$$\Sigma'_{\mu}(x) = \Sigma_{\mu}(x) - \varepsilon^{\alpha}{}_{\mu}\, \mathring{\sigma}_{\mu} \tag{5.6}$$

Sob o grupo interno $SL_2(x)$, $\sigma_{\mu}(x)$ se transforme como

$$\sigma'_{\mu}(x) = M(x)\, \sigma_{\mu}(x)\, M^{+}(x)$$

com det $M(x) = + 1$. Sob um mapeamento infinitesimal de $SL_2(x)$

$$M(x) = 1 + V(x) \qquad\qquad Tr\, V(x) = 0 \;,$$

$\Sigma_{\mu}(x)$ se transforma como

$$\Sigma'_{\mu}(x) = \Sigma_{\mu}(x) + \mathring{\sigma}_{\mu}\, V^{+}(x) + V(x)\, \mathring{\sigma}_{\mu} \tag{5.7}$$

A matriz $\mathring{\sigma}_{\mu}\, V^{+}(x) + V(x)\, \mathring{\sigma}_{\mu}$ que aparece do lado direito é hermitiano e depende de seis fusões reais infinitesimais (V hermitiana, Tr V = 0). Usando a propriedade de que as $\mathring{\sigma}_{\alpha}$ formam uma base no espaço vetorial linear das matrizes complexas 2 x 2 podemos escrever

$$\overset{\circ}{\sigma}_\mu V^+ + V \overset{\circ}{\sigma}_\mu = - S^\alpha{}_\mu(x)\, \overset{\circ}{\sigma}_\alpha \qquad (5.8)$$

onde $S^\alpha{}_\mu(x)$ são funções reais e (5.7) se escreve

$$\Sigma'{}_\mu(x) = \Sigma_\mu(x) - S^\alpha{}_\mu\, \overset{\circ}{\sigma}_\alpha \qquad (5.9)$$

A relação (5.8) pode ser resolvida para $S^\alpha{}_\mu(x)$. Multiplicando-se por τ_λ e tomando o traço

$$S_{\lambda\mu}(x) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(V^+ \overset{\circ}{\tau}_\lambda \overset{\circ}{\sigma}_\mu + V \overset{\circ}{\sigma}_\mu \overset{\circ}{\tau}_\lambda) \qquad (5.10)$$

Usando esta relação vamos mostrar que $S_{\lambda\mu}(x)$ é anti-simétrica

$$\eta^{\lambda\mu} S_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(V + \overset{\circ}{\tau}{}^\mu \overset{\circ}{\sigma}_\mu + V \overset{\circ}{\sigma}_\mu \overset{\circ}{\tau}{}^\mu)$$

e usando que $\overset{\circ}{\tau}{}^\mu \overset{\circ}{\sigma}_\mu = - 4.\mathbb{1}$

$$\eta^{\lambda\mu} S_{\lambda\mu} = 0$$

desde que Tr V = 0. Assim estas seis quantidades infinitesimais $S^\alpha{}_\mu(x)$ podem sempre localmente serem reduzidas aos parâmetros de uma transformação de Lorentz infinitesimal e daí segue um resultado já conhecido, que as transformações internas podem ser assimiladas a transformações de Lorentz locais.

As equações Lagrangeanas de Einstein na forma spinorial para o campo gravitacional no vazio são devidas a Sachs [31] e dadas por *

$$\mathcal{L}_\mu \equiv \tau^\alpha P^+_{\mu\alpha} + P_{\mu\alpha}\, \tau^\alpha = 0 \qquad (5.11)$$

onde $\mathbb{P}_{\mu\alpha}$ é a curvatura spinorial e definida em termos das afinidades spino

* Na verdade, temos um par de equações de Sachs, mas a segunda difere de (5.11) por uma inversão espacial das tetradas e é redundante para a presente análise.

riais $\Gamma_{\mu}{}^{A}{}_{B}$ como

$$P_{\mu\alpha} = \Gamma_{\mu,\alpha} - \Gamma_{\alpha,\mu} - \Gamma_{\mu}\,\Gamma_{\alpha} + \Gamma_{\alpha}\,\Gamma_{\mu}$$

de acôrdo com o apêndice I.

Linearizando (5.11), i.ē, usando (5.1) e retendo somente termos de primeira ordem em $\Sigma_{\mu}(x)$, obtemos

$$\overset{(1)}{\Gamma}_{\mu} = \frac{1}{4}\,\overset{\circ}{\tau}_{\rho}\Big[\Sigma^{\rho}{}_{,\mu} - \frac{\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha}}{4}\,\mathrm{Tr}\,(\Sigma_{\alpha,\mu}\,\overset{\circ}{\tau}{}^{\rho} + \Sigma_{\mu,\alpha}\,\overset{\circ}{\tau}{}^{\rho} + \Sigma^{\rho}{}_{,\mu}\,\overset{\circ}{\tau}_{\alpha} + \Sigma^{\rho}{}_{,\alpha}\,\overset{\circ}{\tau}_{\mu} +$$

$$- \Sigma_{\alpha,}{}^{\rho}\,\overset{\circ}{\tau}_{\mu} - \Sigma_{\mu,}{}^{\rho}\,\overset{\circ}{\tau}_{\alpha})\Big]$$

e usando

$$\overset{(1)}{\mathbb{P}}_{\mu\nu} = \overset{(1)}{\Gamma}_{\mu,\nu} - \overset{(1)}{\Gamma}_{\nu,\mu}$$

em (5.11) obtemos

$$\overset{(1)}{\mathscr{L}}_{\mu} = \frac{1}{4}(\overset{\circ}{\tau}{}^{\alpha}\delta^{\beta}_{\mu} + \overset{\circ}{\tau}{}^{\beta}\delta^{\alpha}_{\mu} + \overset{\circ}{\tau}_{\mu}\eta^{\alpha\beta})\eta^{\rho\lambda}\Big[-\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\Sigma_{\alpha}\overset{\circ}{\tau}_{\beta} + \Sigma_{\beta}\overset{\circ}{\tau}_{\alpha} - \eta_{\alpha\beta}\Sigma_{\mu}\overset{\circ}{\tau}{}^{\mu})\Big]_{,\rho\lambda} +$$

$$- \frac{1}{2}\,\overset{\circ}{\tau}{}^{\alpha}\Big[-\frac{1}{2}\,\eta^{\lambda\gamma}\,\mathrm{Tr}(\Sigma_{\alpha}\overset{\circ}{\tau}_{\gamma} + \Sigma_{\gamma}\overset{\circ}{\tau}_{\alpha} - \eta_{\alpha\gamma}\Sigma_{\nu}\overset{\circ}{\tau}{}^{\nu})_{,\lambda\mu} - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\Sigma_{\mu}\overset{\circ}{\tau}_{\gamma} + \Sigma_{\gamma}\overset{\circ}{\tau}_{\mu} - \eta_{\mu\gamma}\Sigma_{\nu}\overset{\circ}{\tau}{}^{\nu})_{,\lambda\alpha}\Big] = 0 \tag{5.12}$$

Isto pode ser escrito, usando-se (5.3) e $\gamma_{\mu\nu}(x)$ definido na seção 4, como:

$$\overset{(1)}{\mathscr{L}}_{\mu} = \frac{1}{4}\,(\overset{\circ}{\tau}{}^{\alpha}\delta^{\beta}_{\mu} + \overset{\circ}{\tau}{}^{\beta}\delta^{\alpha}_{\mu} + \overset{\circ}{\tau}_{\mu}\eta^{\alpha\beta})\,\Box\,\gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\overset{\circ}{\tau}{}^{\alpha}\Big[\eta^{\lambda\nu}\gamma_{\alpha\nu,\lambda\mu} + \eta^{\lambda\nu}\,\gamma_{\mu\nu,\lambda\alpha}\Big] = 0 \quad (5.12)$$

Agora, desde que hā uma arbitrariedade na escolha de sistema de coordenadas, podemos fazer um mapeamento do tipo (II) tal que no novo sistema de coordenadas $\eta^{\lambda\nu}\,\gamma_{\alpha\nu,\lambda} = 0$, ou,

$$\eta^{\lambda\mu}\,\mathrm{Tr}(\Sigma_\alpha\,\overset{\circ}{\tau}_\mu + \Sigma_\mu\,\overset{\circ}{\tau}_\alpha - \eta_{\alpha\mu}\,\Sigma_\nu\,\overset{\circ}{\tau}{}^\nu)_{,\lambda} = 0 \qquad (5.13)$$

e a equação de movimento neste sistema de coordenadas se escreve

$$\Box(\Sigma_\alpha\,\overset{\circ}{\tau}_\beta + \Sigma_\beta\,\overset{\circ}{\tau}_\alpha - \eta_{\alpha\beta}\,\Sigma_\mu\,\overset{\circ}{\tau}{}^\mu) = 0 \qquad (5.14)$$

A condição de coordenadas (5.13) realmente fixa as transformações de coordenadas a menos de uma transformação $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$ com $\Box\xi^\mu = 0$. De fato, para uma transformação infinitesimal arbitrária, usando (5.5) em (5.14):

$$\eta^{\rho\mu}\left[\Sigma_\alpha\,\overset{\circ}{\tau}_\mu + \Sigma_\mu\,\overset{\circ}{\tau}_\alpha - \eta_{\alpha\mu}\,\Sigma_\nu\,\overset{\circ}{\tau}{}^\nu\right]_{,\rho} - \xi^\lambda{}_{,\alpha\rho}\,\overset{\circ}{\sigma}_\lambda\,\overset{\circ}{\tau}{}^\rho - \xi^\lambda{}_{,\mu\rho}\,\eta^{\mu\rho}\,\overset{\circ}{\sigma}_\lambda\,\overset{\circ}{\tau}_\alpha + $$
$$+ \xi^\lambda{}_{,\nu\alpha}\,\overset{\circ}{\sigma}_\lambda\,\overset{\circ}{\tau}{}^\nu = 0$$

As transformações que preservam (5.13) são tais que

$$\xi_{\lambda,\alpha\rho}\,\overset{\circ}{\sigma}{}^\lambda\,\overset{\circ}{\tau}{}^\rho - \Box\xi_\lambda\,\overset{\circ}{\sigma}{}^\lambda\,\overset{\circ}{\tau}_\alpha + \xi_{\lambda,\nu\alpha}\,\overset{\circ}{\sigma}{}^\lambda\,\overset{\circ}{\tau}{}^\nu = 0 \qquad (5.15)$$

Contraindo com $\eta^{\alpha\beta}\,\partial_\beta$

$$\Box\xi_{\lambda,\nu}\,\overset{\circ}{\sigma}{}^\lambda\,\overset{\circ}{\tau}{}^\nu = 0 \qquad (5.16)$$

A solução de (5.16) é

$$\Box\,\xi_\lambda\,\overset{\circ}{\sigma}{}^\lambda\,\overset{\circ}{\tau}{}^\nu = \phi^\nu \qquad (5.17)$$

tal que $\phi^\nu{}_{,\nu} = 0$. Uma solução particular de (5.17) é

$$\xi_\lambda\,\overset{\circ}{\sigma}{}^\lambda\,\overset{\circ}{\tau}{}^\nu = \frac{1}{\Box}\,\phi^\nu$$

onde $\frac{1}{\Box}$ é o operador integral de Green associado a $\Box$. Por consistência, substituindo em (5.15) obtemos

$$\phi^{\nu} = 0$$

e (5.17) nos dá

$$\Box\xi^{\lambda}(x) = 0 \tag{5.18}$$

solução de (5.15).

Na teoria Hamiltoniana linearizada, vamos usar os D-invariantes abaixo, que serão os objetos dinâmicos da teoria. A partir de agora vamos fazer uso do mesmo critério de seção 4. O caráter espacial dos índices dos D-invariantes nos limita à parte espacial da métrica Lorentziana

$$\eta^{ij} = \eta_{ij} = - \delta_{ij}$$

e portanto não será feita distinção entre índices co- e contra variantes; a convenção de soma se mantém para índices repetidos, a métrica será δ_{ij} e as quantidades serão escritas com o devido sinal.

i) $\sigma_i(x) = \overset{o}{\sigma}_i + \Sigma_i(x)$

$$\text{ii)} \quad \overset{(1)}{\pi}_{iR\dot{S}} = \overset{(1)}{P}_{ij}\, \overset{o}{\tau}_{jR\dot{S}} \tag{5.19}$$

e a inversa de (5.19) é dada por

$$\overset{(1)}{P}_{ij} = \frac{1}{2}\, Tr(\overset{(1)}{\pi}_i\, \overset{o}{\sigma}_j) \tag{5.20}$$

com a condição $Tr(\overset{(1)}{\pi}_i\, \overset{o}{\sigma}_j) = Tr(\overset{(1)}{\pi}_j\, \overset{o}{\sigma}_i)$.

Usando-se (5.3) e (4.6), podemos escrever

$$\overset{(1)}{P}_{ij} = \frac{1}{4}\,(\delta_{i\ell}\,\delta_{jm} - \delta_{ij}\,\delta_{\ell m})\,\mathrm{Tr}\Big[\Sigma_{\ell,m}\,\overset{\circ}{\tau}_o + \Sigma_{o,m}\,\overset{\circ}{\tau}_\ell + \Sigma_{m,\ell}\,\overset{\circ}{\tau}_o + \Sigma_{o,\ell}\,\overset{\circ}{\tau}_m +$$

$$- \Sigma_{\ell,o}\,\overset{\circ}{\tau}_m - \Sigma_{m,o}\,\overset{\circ}{\tau}_\ell\Big]$$

iv) Vínculos Hamiltonianos

$$\overset{(1)}{\mathscr{H}}_r = 2\,\overset{(1)}{P}_{ru,u} = \mathrm{Tr}(\overset{(1)}{\pi}_{r,u}\ \overset{\circ}{\sigma}_\mu) = 0$$

$$\overset{(1)}{\mathscr{H}}_L = \eta^{rs}\ {}_3\overset{(1)}{R}_{rs} = -\frac{1}{2}\,\delta_{rs}\,\delta_{\ell i}\,\mathrm{Tr}\Big[\Sigma_{r,\ell s}\,\overset{\circ}{\tau}_i - \Sigma_{r,\ell i}\,\overset{\circ}{\tau}_s - \Sigma_{s,\ell i}\,\overset{\circ}{\tau}_r +$$

$$+ \Sigma_{i,\ell s}\,\overset{\circ}{\tau}_r\Big] = \mathrm{Tr}(\Sigma_{r,\ell\ell}\,\overset{\circ}{\tau}_r - \Sigma_{r,r\ell}\,\overset{\circ}{\tau}_\ell) = 0 \qquad (5.22)$$

v) Vínculos primários de spin

$$\overset{(1)}{\alpha}_{[rs]} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(\overset{\circ}{\sigma}_r\ \overset{(1)}{\pi}_s - \overset{\circ}{\sigma}_s\ \overset{(1)}{\pi}_r) = 0 \qquad (5.23)$$

que algebricamente é a condição de (5.20) ser simétrico

$$\overset{(1)}{\beta}_i = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\overset{\circ}{\sigma}^o\ \overset{(1)}{\pi}_i) = 0 \qquad (5.24)$$

Os PP entre funções ou funcionais de campo $\eta[\sigma_i(x), \pi^i(x)]$ sôbre a mesma hipersuperfície tipo-espaço são obtidos a partir da definição (2.5) - considerando-se as variáveis do espaço de fase $\sigma_i{}^{\dot{A}B}(x) \to \overset{\circ}{\sigma}_i{}^{\dot{A}B} + \Sigma_i{}^{\dot{A}B}(x)$ e $\pi^i_{R\dot{S}}(x) \to \overset{(1)}{\pi}_{i\,R\dot{S}}(x)$ na aproximação linear, decorrendo daí que

$$\frac{\delta\eta}{\delta\sigma_{i(x)}^{\;\;A\dot{B}}} \to \frac{\delta\eta}{\delta\,\Sigma_{i(x)}^{\;\;A\dot{B}}} \qquad \text{e} \qquad \frac{\delta\eta}{\delta\pi^{i}{}_{R\dot{S}}(x)} \to \frac{\delta\eta}{\delta\overset{(1)}{\pi}{}_{iR\dot{S}}(x)}$$

em primeira ordem. As variáveis canônicas de campo, que agora descrevem o espaço de fase da teoria, serão $(\Sigma_i^{\;A\dot{B}}(x),\ \overset{(1)}{\pi}{}_{i\,R\dot{S}}(x))$, óbviamente. Notar que

$$\delta\Sigma_i^{\;A\dot{B}}(x) = \int_{x^0} d^3x'\ \delta_i^j\ \delta_R^A\ \delta_{\dot{S}}^{\dot{B}}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}')\ \delta\ \Sigma_j^{\;R\dot{S}}(x')$$

e daí

$$\left.\frac{\delta\Sigma_i^{\;A\dot{B}}(x)}{\delta\Sigma_j^{\;R\dot{S}}(x')}\right|_{x^0=x'^0} = \delta_i^j\ \delta_R^A\ \delta_{\dot{S}}^{\dot{B}}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

Os PP fundamentais sôbre x^0 = cte. entre as variáveis canônicas dão:

$$\left.\begin{aligned} &\left[\Sigma_i^{\;A\dot{B}}(x),\ \Sigma_j^{\;R\dot{S}}(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0 \\ &\left[\overset{(1)}{\pi}{}^{i}{}_{A\dot{B}}(x),\ \overset{(1)}{\pi}{}^{j}{}_{R\dot{S}}(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0 \\ &\left[\Sigma_i^{\;A\dot{B}}(x),\ \overset{(1)}{\pi}{}_{jR\dot{S}}(x')\right]_{x^0=x'^0} = \delta_i^j\ \delta_R^A\ \delta_{\dot{S}}^{\dot{B}}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}') \end{aligned}\right\} \tag{5.25}$$

Análogas à transformação de gauge (5.5), aparecem na versão Hamiltoniana transformações sôbre o par $(\Sigma_i,\ \overset{(1)}{\pi}{}_i)$ geradas via PP. Os geradores são dados, a partir de (5.21) e (5.22), por

$$A(x^0) = -\int_{x^0} d^3x'\ \xi_i(x)\ \mathrm{Tr}(\overset{(1)}{\pi}{}_{i,j}(x)\ \mathring{\tau}_j) \tag{5.26}$$

$$B(x^0) = -\int_{x^0} d^3x\ \xi_L(x)\ \mathrm{Tr}(\Sigma_{r,\ell\ell}(x)\ \overset{\circ}{\tau}_r - \Sigma^{(x)}_{r,r\ell}\ \overset{\circ}{\tau}_\ell) \qquad (5.27)$$

como no caso tensorial e correspondem a transformações sôbre a hipersuperfície x^0 = cte. e normal a ela, respectivamente (5.26) e (5.27). Por exemplo

$$\delta\Sigma_i^{A\dot{B}}(x) = \left[\Sigma_i^{A\dot{B}}(x),\ A(x^0)\right] = -\int_{x^0} d^3x' \left[\Sigma_i^{A\dot{B}}(x),\ \overset{(1)}{\pi}_{\ell,m\,R\dot{S}}(x')\ \overset{\circ}{\sigma}_m^{R\dot{S}}\right]_{x^0=x'^0} \xi_\ell(x') =$$

$$= -\int_{x^0} d^3x'\ \delta_{i\ell}\ \delta^A_R\ \delta^{\dot{B}}_{\dot{S}}\ \frac{\partial}{\partial x'^m}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}')\ \xi_\ell(x')\ \overset{\circ}{\sigma}_m^{R\dot{S}}$$

ou

$$\delta\Sigma_i^{A\dot{B}} = -\ \xi_{i,m}\ \overset{\circ}{\sigma}_m^{A\dot{B}}$$

idêntico às componentes espaciais de (5.5). A parte restante das transformações (5.5) são dadas sôbre $\overset{(1)}{\pi}_i$, geradas por (5.27) ($\delta\overset{(1)}{\pi}_i = -\ \overset{\circ}{\tau}_i\ \nabla^2\ \xi_L + \overset{\circ}{\tau}_\ell\ \xi_{L,\ell i}$).

Os vínculos primários de spin geram, como se mostra no apêndice I, as transformações de Lorentz locais. Vamos verificar que os geradores das transformações sôbre $(\Sigma_i\ ,\ \overset{(1)}{\pi}_i)$, equivalentes a (5.9), são

$$\mathcal{A}(x^0) = -\int_{x^0} d^3x\ \overset{(1)}{\alpha}_{[rs]}\,\varepsilon_{rs}(x) \qquad (5.28)$$

$$\mathcal{B}(x^0) = \int_{x^0} d^3x\ \varepsilon_{or}(x)\ \overset{(1)}{\beta}_r(x) \qquad (5.29)$$

onde $\varepsilon_{rs}(x)$ deve ser uma função anti-simétrica em (r,s), infinitesimal e arbitrária. A notação $\varepsilon_{or}(x)$ foi por conveniência. Assim

$$\delta\Sigma_i{}^{A\dot{B}}(x) = \left[\Sigma_i{}^{A\dot{B}}(x), \mathcal{Q}(x^o)\right] = -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{(x)}_{[i,r]}\overset{o}{\sigma}_r{}^{A\dot{B}}$$

e

$$\delta\Sigma_i{}^{A\dot{B}}(x) = \left[\Sigma_i{}^{A\dot{B}}(x), \mathcal{B}(x^o)\right] = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{oi}\,\overset{o}{\sigma}{}^{oAB}$$

esta última uma transformação de Lorentz infinitesimal, local, na direção da tetrada tipo-tempo.

Condições de Coordenadas e Condições de Spin

Aqui cabe a mesma discussão feita na seção 4 para condições de coordenadas. Além da arbitrariedade no sistema de coordenadas, associada aos vínculos primários Hamiltonianos, aparecem na formulação spinorial vínculos primários de spin que descrevem a arbitrariedade na escolha da orientação dos eixos de tetradas [32].

Uma escolha conveniente das condições de coordenadas, para a teoria linearizada, é (4.19) quando descritos em termos das variáveis canônicas spinoriais:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}(\Sigma_{m,n}\,\overset{o}{\tau}_n + \Sigma_{n,n}\,\overset{o}{\tau}_m) = 0 \\ &\mathrm{Tr}(\nabla^2\,\overset{(1)}{\pi}_s\,\overset{o}{\sigma}_s - \overset{(1)}{\pi}_{r,rs}\,\overset{o}{\sigma}_s) = 0 \end{aligned} \tag{5.30}$$

(5.30) forma com (5.21) e (5.22) um conjunto de oito vínculos de segunda classe, como veremos adiante.

A fixação do eixo de spin foi discutida e determinada no apêndice 3. As condições de spin usadas foram

$$\mathrm{Tr}(\Sigma_i \overset{\circ}{\tau}_o) = 0 \qquad (5.31)$$

que é a expressão $h_{i(o)} = 0$, decorrente de (4.19), e

$$\mathcal{Y}_i(\Sigma) = \alpha_{i\,[mk]} \; \overset{\circ}{\tau}_{k\,A\dot{B}} \, \Sigma_m^{\;A\dot{B}}(x) \qquad (5.32)$$

onde $\alpha_{i\,[mk]}$ são constantes reais arbitrários, anti-simétricos em (m,k). (5.31) e (5.32) constituem seis condições para fixar os seis parâmetros $\varepsilon^{(x)}_{[\alpha\beta]}$ de uma rotação de Lorentz infinitesimal local e juntamente com (5.24) e (5.25) constituem um conjunto de doze vínculos de segunda classe. Os vínculos Hamiltonianos e as condições de coordenadas mais os vínculos primários de spin e as condições de spin formam um conjunto de vinte vínculos de segunda classe, que serão eliminados da álgebra das variáveis canônicas construindo-se o PD com êstes vínculos, que são em número conveniente, de acôrdo com o método descrito na seção 2.

Finalizando, vamos examinar o número de componentes independentes, por ponto do espaço-tempo, envolvidos. $(\Sigma_i^{\;A\dot{B}}(x), \overset{(1)}{\pi}_{i\,A\dot{B}}(x))$ são seis matrizes hermitianas. Cada uma tem quatro componentes reais independentes, num total de vinte e quatro componentes por ponto do espaço tempo. As vinte relações de vinculação que aparecem na teoria reduzem o número de componentes canônicas independentes para quatro, o que é apropriado para descrever um campo de spin 2 e massa de repouso zero.

Construção dos Observáveis Bergmann-Komar Spinoriais

Com a teoria na forma acima, passamos direto à construção dos observáveis. O conjunto de vínculos de segunda classe $\{Y_i;\ i = 1...20\}$ é dado por:

i) Quatro vínculos Hamiltonianos

$$\overset{(1)}{\mathcal{H}}_r = \mathrm{Tr}(\overset{(1)}{\pi}_{\ell,\ell}\ \overset{\circ}{\sigma}_r) = 0$$

$$\overset{(1)}{\mathcal{H}}_L = \mathrm{Tr}(\Sigma_{r,\ell\ell}\ \overset{\circ}{\tau}_r - \Sigma_{r,r\ell}\ \overset{\circ}{\tau}_\ell) = 0$$

ii) Quatro condições de coordenadas

$$\Delta_m = \mathrm{Tr}(\Sigma_{m,n}\ \overset{\circ}{\tau}_n + \Sigma_{n,n}\ \overset{\circ}{\tau}_m) = 0$$

$$\Theta = \mathrm{Tr}(\nabla^2\ \overset{(1)}{\pi}_s\ \overset{\circ}{\sigma}_s - \overset{(1)}{\pi}_{r,rs}\ \overset{\circ}{\sigma}_s) = 0$$

iii) Quatro vínculos primários de spin

$$\overset{(1)}{\alpha}_{[ik]} = \mathrm{Tr}(\overset{\circ}{\sigma}_i\ \overset{(1)}{\pi}_k - \overset{\circ}{\sigma}_k\ \overset{(1)}{\pi}_i) = 0$$

$$\overset{(1)}{\beta}_i = \mathrm{Tr}(\overset{\circ}{\sigma}^0\ \overset{(1)}{\pi}_i) = 0$$

iv) Quatro condições de spin

$$h_{i(o)} = \mathrm{Tr}(\Sigma_i\ \overset{\circ}{\tau}^0) = 0$$

$$\mathcal{J}_i = \alpha_{i[mk]}\ \overset{\circ}{\tau}_{k\ A\dot{B}}\ \Sigma_m^{\ A\dot{B}} = 0$$

Os PP entre os vínculos podem ser calculados usando-se (5.25) diretamente e são dados abaixo:

$$\left[\overset{(1)}{\beta}_i(x),\ \overset{(1)}{\alpha}_{[jk]}(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[\overset{(1)}{\alpha}_{[ik]}(x),\ \overset{(1)}{\mathcal{H}}_r(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[\overset{(1)}{\beta}_i(x),\overset{(1)}{\mathcal{H}}_r(x')\right]_{x^0x'^0} = 0$$

$$\left[\overset{(1)}{\alpha}_{[ik]}(x),\overset{(1)}{\mathcal{H}}_L(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[\overset{(1)}{\beta}_i(x),\overset{(1)}{\mathcal{H}}_L(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[\overset{(1)}{\alpha}_{[ik]}(x),\ \Delta_m(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[\overset{(1)}{\beta}_i(x),\ \Delta_m(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[\overset{(1)}{\alpha}_{[ik]}(x),\ \Theta(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[\overset{(1)}{\beta}_i(x),\ \Theta(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[\overset{(1)}{\alpha}_{[ik]}(x),\ h^{(x')}_{r(o)}\right] = 0$$

$$\left[\overset{(1)}{\beta}_i(x),\ h^{(x')}_{r(o)}\right]_{x^0=x'^0} = -\ \delta_{ri}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$\left[\overset{(1)}{\alpha}_{[ik]}(x),\ h^{(x')}_{r(o)}\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[\mathcal{F}_i(x),\ \overset{(1)}{\beta}_j(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[\overset{(1)}{\alpha}_{|ik|}(x),\mathcal{F}_j(\Sigma(x'))\right]_{x^0=x'^0} =$$

$$= -\ \alpha_{j[\ell n]}\ \overset{\circ}{\tau}_{n\ A\dot{B}}(\overset{\circ}{\sigma}_i{}^{A\dot{B}}\delta_{\ell k} +$$

$$-\ \overset{\circ}{\sigma}_k{}^{A\dot{B}}\ \delta_{\ell i})\ \delta(\vec{x}-\vec{x}') =$$

$$+\ 4\ \alpha_{j[ik]}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$\left[\overset{(1)}{\mathcal{H}}_r(x),\ \overset{(1)}{\mathcal{H}}_L(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[\overset{(1)}{\mathcal{H}}_r(x),\ \Delta_m(x')\right]_{x^0=x'^0} = 2\,\frac{\partial^2}{\partial x^n \partial x^k}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')(\delta_{mk}\,\delta_{nr} + \delta_{nk}\,\delta_{mr})$$

$$\left[\overset{(1)}{\mathcal{H}}_r(x),\ \Theta(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[\overset{(1)}{\mathcal{H}}_r(x),\ \mathcal{J}_i(\Sigma(x'))\right]_{x^0=x'^0} = -\,2\,\alpha_{i\,[kr]}\ \frac{\partial}{\partial x^k}\,\delta(\vec{x}'-\vec{x})$$

$$\left[\overset{(1)}{\mathcal{H}}_L(x),\ \Delta_m(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0 \qquad \left[\Delta_m(x),\ \Theta(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[\overset{(1)}{\mathcal{H}}_L(x),\ \Theta(x')\right]_{x^0=x'^0} = 4\,\nabla^2\,\nabla'^2\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad \left[\Delta_m(x),\ h^{(x')}_{r(o)}\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[\overset{(1)}{\mathcal{H}}_L(x),\ h^{(x')}_{r(o)}\right]_{x^0=x'^0} = 0 \qquad \left[\Delta_m(x),\ \mathcal{J}_i(\Sigma(x'))\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[\overset{(1)}{\mathcal{H}}_L(x),\ \mathcal{J}_i(\Sigma(x'))\right]_{x^0=x'^0} = 0 \qquad \left[\Theta(x),\ h^{(x')}_{r(o)}\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[\mathcal{J}_i(\Sigma(x)),\ \Theta(x')\right]_{x^0=x'^0} = 2(\delta_{ns}\delta_{s\ell}\,\nabla'^2\delta(\vec{x}-\vec{x}') - \delta_{ns}\delta_{r\ell}\,\frac{\partial^2}{\partial x'^r \partial x'^s}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'))$$

$$\cdot\ \alpha_{i\,[\ell n]} \equiv 0$$

$$\left[\mathcal{F}_i(\Sigma(x)),\, h_{j\binom{x'}{(o)}}\right]_{x^o=x'^o} = 0$$

Vamos construir o conjunto de observáveis BK $(\Sigma^{*A\dot{B}}_i, \overset{(1)}{\pi}{}^{*}_{i\,A\dot{B}})$, adicionando-se a Σ_i e $\overset{(1)}{\pi}{}_i$ uma combinação linear de todos os vínculos do conjunto $\{Y_i\}$ acima descrito. Os coeficientes serão determinados impondo-se as condições

$$\left.\begin{aligned} &\left[\overset{*}{\Sigma}{}^{A\dot{B}}_i(x),\, Y_\ell(x')\right]_{x^o=x'^o} = 0 \\ &\left[\overset{(1)}{\pi}{}^{*}_{i\,A\dot{B}}(x),\, Y_\ell(x')\right]_{x^o=x'^o} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.33}$$

para $\ell = 1 \ldots 20$. Observando-se que os elementos da matriz PP são c-números, também sua inversa vai ser assim, e portanto as equivalências (2.18) vão valer mesmo fora da hipersuperfície de vínculos. Assim

$$\begin{aligned} \overset{*}{\Sigma}{}^{A\dot{B}}_i(x) = \Sigma_i^{A\dot{B}}(x) &+ \int_{x^o} a^{A\dot{B}}_{i\ell}(\vec{x},\vec{x}')\,\overset{(1)}{\beta}_\ell(x')d^3x' + \int_{x^o} b^{A\dot{B}}_{imn}(\vec{x},\vec{x}')\,\overset{(1)}{\alpha}_{[mn]}(x')d^3x' + \\ &+ \int_{x^o} c^{A\dot{B}}_{ik}(\vec{x},\vec{x}')\,\overset{(1)}{\mathcal{H}}_k(x')\, d^3x' + \int_{x^o} d^{A\dot{B}}_{i}(\vec{x},\vec{x}')\,\overset{(1)}{\mathcal{H}}_L(x')d^3x' + \\ &+ \int_{x^o} f^{A\dot{B}}_{ik}(\vec{x},\vec{x}')\,\Delta_k(x')d^3x' + \int_{x^o} g^{A\dot{B}}_{i}(\vec{x},\vec{x}')\Theta(x')d^3x' + \\ &+ \int_{x^o} k^{A\dot{B}}_{im}(\vec{x},\vec{x}')\, h^{AB}_{m(o)}d^3x' + \int_{x^o} q^{A\dot{B}}_{im}(\vec{x},\vec{x}')\,\mathcal{Y}_m(x')d^3x' \end{aligned} \tag{5.34}$$

Os coeficientes deverão ter, por consistência, simetria em $(\vec{x}, \vec{x}')$ desde que a matriz dos PP depende somente de $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ e/ou suas derivadas de ordem par. E desde que $\overset{*}{\Sigma}_i{}^{A\dot{B}}$ deve ser hermitiana, os coeficientes deverão também ser spinores hermitianos.

Determinação dos coeficientes

$$\left[\overset{*}{\Sigma}{}_i^{A\dot{B}}(x), \overset{(1)}{\beta}_\ell(x'')\right]_{x^o=x''} = 0 \Longrightarrow \delta_{i\ell}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}'')\overset{o}{\sigma}{}^{oA\dot{B}} + \int_{x^o} k_{im}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\delta_{m\ell}\delta(\vec{x}'-\vec{x}'')d^3x' = 0$$

ou

$$k_{i\ell}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'') = -\ \delta_{i\ell}\delta(\vec{x}-\vec{x}'')\overset{o}{\sigma}{}^{oA\dot{B}} \tag{5.35}$$

$$\left[\overset{*}{\Sigma}{}_i^{A\dot{B}}(x), \overset{(1)}{\alpha}_{[rs]}(x'')\right]_{x^o=x''^o} = 0 \Longrightarrow (\overset{o}{\sigma}_r{}^{A\dot{B}}\ \delta_{is} - \overset{o}{\sigma}_s{}^{A\dot{B}}\ \delta_{ir})\ \delta(\vec{x}-\vec{x}'')\ -$$

$$-\ 4\int_{x^o} q_{im}^{A\dot{B}}\ (\vec{x},\vec{x}'')\ \alpha_{m[rs]}\ \delta(\vec{x}'-\vec{x}'')d^3x' = 0$$

ou

$$q_{im}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'')\ \alpha_{m[rs]} = \frac{1}{4}\ (\overset{o}{\sigma}_r{}^{A\dot{B}}\ \delta_{is} - \overset{o}{\sigma}_s{}^{A\dot{B}}\ \delta_{ir})\ \delta(\vec{x}-\vec{x}'') \tag{5.36}$$

$$\left[\overset{*}{\Sigma}_i{}^{A\dot{B}}(x),\ \overset{(1)}{\mathcal{H}}_r(x'')\right]_{x^o=x''^o} = 0 \Longrightarrow \delta_{ik}\ \overset{o}{\sigma}{}_r^{A\dot{B}}\ \frac{\partial}{\partial x''^k}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}'')\ +$$

$$+\int_{x^o} f_{ik}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\left[-2\ \frac{\partial^2}{\partial x''^n \partial x''^\ell}\ \delta(\vec{x}'-\vec{x}'')(\delta_{k\ell}\ \delta_{nr} + \delta_{n\ell}\ \delta_{kr})\right]d^3x'\ +$$

$$+\ 2\int_{x^o} q_{im}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\ \alpha_{m[kr]}\ \frac{\partial}{\partial x''^k}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}'')d^3x' = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x''^{i}} \delta(\vec{x}-\vec{x}'')\overset{\circ}{\sigma}_{r}{}^{A\dot{B}} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x''^{n}\partial x''^{\ell}} f_{ik}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'')(\delta_{k\ell}\delta_{nr} + \delta_{n\ell}\,\delta_{kr}) +$$

$$+ 2 \,(q_{im}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'')\,\alpha_{m[kr]}) = 0 \tag{5.37}$$

$$\left[\overset{*}{\Sigma}{}_{i}^{AB}(x),\ \overset{(1)}{\mathcal{H}}_{L}(x'')\right]_{x^{0}=x''^{0}} = 0 \Longrightarrow \int_{x^{0}} g_{i}{}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\ \nabla''^{2}\nabla'^{2}\delta(\vec{x}'-\vec{x}'')d^{3}x' = 0$$

ou

$$\nabla''^{2}\ \nabla^{2}\ g_{i}{}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'') = 0 \tag{5-38}$$

$$\left[\overset{*}{\Sigma}{}_{i}^{A\dot{B}}(x),\ \Delta_{m}(x'')\right]_{x^{0}=x''^{0}} = 0 \Longrightarrow \int_{x^{0}} c_{ik}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\ \frac{\partial^2}{\partial x''^{n}\partial x''^{r}}\ \delta(\vec{x}'-\vec{x}'')(\delta_{mr}\delta_{nk}+\delta_{nr}\delta_{mk})d^{3}x'=0$$

ou

$$(\delta_{mr}\ \delta_{nk} + \delta_{nr}\ \delta_{mk})\ \frac{\partial^2}{\partial x''^{n}\partial x''^{r}}\ c_{ik}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'') = 0 \tag{5.39}$$

$$\left[\overset{*}{\Sigma}{}_{i}^{A\dot{B}}(x),\Theta(x'')\right]_{x^{0}=x''^{0}} = 0 \Longrightarrow \overset{\circ}{\sigma}_{i}{}^{A\dot{B}}\ \nabla^{2}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}'') - \overset{\circ}{\sigma}_{s}{}^{A\dot{B}}\ \frac{\partial^2}{\partial x''^{i}\partial x''^{s}}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}'') +$$

$$+ 4 \int_{x^{0}} d_{i}{}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\ \nabla'^{2}\ \nabla''^{2}\ \delta(\vec{x}'-\vec{x}'')d^{3}x' = 0$$

ou

$$4\ \nabla''^{2}\ \nabla''^{2}\ d_{i}{}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'') = -\ \overset{\circ}{\sigma}_{i}{}^{A\dot{B}}\ \nabla^{2}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}'') + \overset{\circ}{\sigma}_{s}{}^{A\dot{B}}\ \frac{\partial^2}{\partial x''^{i}\partial x''^{s}}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}'') \tag{5.40}$$

$$\left[\overset{*}{\Sigma}{}_{i}^{A\dot{B}}(x),\ h_{r(o)}^{(x'')}\right]_{x^{0}=x''^{0}} = 0 \Longrightarrow \int_{x^{0}} a_{i\ell}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\ \delta_{r\ell}\ \delta(\vec{x}'-\vec{x}'')\ d^{3}x' = 0$$

ou

$$a_{i\ell}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}') \equiv 0$$

$$\left[\overset{*}{\Sigma}_i^{A\dot{B}}(x),\, \mathcal{G}_r(x'')\right]_{x^0=x''^0} = 0 \Longrightarrow 4 \int_{x^0} b_{imn}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\ \alpha_{r[mn]}\delta(\vec{x}'-\vec{x}'')d^3x' +$$

$$- 2 \int_{x^0} c_{ik}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\ \alpha_{r[\ell k]} \frac{\partial}{\partial x'^{\ell}}\ \delta(\vec{x}''-\vec{x}')d^3x' = 0$$

ou

$$2\, b_{imn}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'')\ \alpha_{r[mn]} = - \frac{\partial}{\partial x''^{\ell}}\ c_{ik}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'')\ \alpha_{r[\ell k]} \qquad (5.42)$$

Solução das Equações Diferenciais dos Coeficientes

Um exame rápido destas equações nos mostra que suas soluções devem ser funções de $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ e/ou suas derivadas e $D(\vec{x}-\vec{x}')$ e/ou suas derivadas. Desde que procuramos campos que se anulem no infinito espacial e sejam não singulares, as soluções das equações homogêneas associadas e das homogêneas tipo $\nabla^2\ \psi = 0$ não serão consideradas no que se segue.

As equações (5.35), (5.36) e (5.41) já expressam os coeficientes de modo direto. Da homogênea (5.38), tomamos a solução

$$g_i^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'') = 0 \qquad (5.43)$$

Consideremos a equação (5.37). Como as matrizes $\overset{\circ}{\sigma}_{\mu}^{A\dot{B}}$ constituem uma base no espaço vetorial linear das matrizes complexas 2 x 2, o spinor hermitiano $f_{km}^{A\dot{B}}$ pode ser escrito

$$f_{km}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{2} f_{km\mu}(\vec{x},\vec{x}') \overset{o}{\sigma}^{\mu\ A\dot{B}} \tag{5.44}$$

onde $f_{km\mu}(\vec{x},\vec{x}')$ são funções reais. Invertendo (5.44) obtemos

$$f_{km\mu}(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{2} f_{km}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}') \overset{o}{\tau}_{\mu\ A\dot{B}} \tag{5.45}$$

Usando (5.45) em (5.37) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x''^{i}} \delta(\vec{x}-\vec{x}'')\delta_{r\mu} + 2\left[\frac{\partial^2}{\partial x''^{r}\partial x''^{k}} f_{ik\mu}(\vec{x},\vec{x}'') + \nabla''^2 f_{ir\mu}(\vec{x},\vec{x}'')\right] +$$

$$+\frac{1}{2}(\delta_{\mu k}\,\delta_{ir} - \delta_{\mu r}\,\delta_{ik})\frac{\partial}{\partial x''^{k}}\delta(\vec{x}-\vec{x}'') = 0 \tag{5.46}$$

Vamos resolver (5.46) por partes. Para $\mu = 0$, ela se reduz a

$$\frac{\partial^2}{\partial x''^{r}\partial x''^{k}} f_{iko} + \nabla''^2 f_{iko} = 0 \tag{5.47}$$

Diferenciando em x''^{r} obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x''^{r}} \nabla''^2 f_{iko} = 0$$

cuja solução se anulando no infinito espacial é $f_{iko} \equiv 0$. Resta-nos então

$$\frac{\partial}{\partial x''^{i}} \delta(\vec{x}-\vec{x}'')\delta_{rm} + 2\left[\frac{\partial^2}{\partial x''^{r}\partial x''^{k}} f_{ikm} + \nabla''^2 f_{irm}\right] + \frac{1}{2}(\delta_{mk}\,\delta_{ir} - \delta_{mr}\,\delta_{ik})$$

$$\frac{\partial}{\partial x''^{k}} \delta(\vec{x}-\vec{x}'') = 0 \tag{5.48}$$

Derivando em x''^r

$$\frac{\partial^2}{\partial x''^m \partial x''^i} \delta(\vec{x}-\vec{x}'') + 4 \frac{\partial}{\partial x''^k} \nabla''^2 f_{ikm} = 0$$

cuja solução é

$$f_{ikm}(\vec{x},\vec{x}'') = - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x''^k} \frac{1}{\nabla''^2} \frac{1}{\nabla''^2} \frac{\partial^2}{\partial x''^m \partial x''^i} \delta(\vec{x}-\vec{x}'') + \psi_{ikm}(\vec{x},\vec{x}'') \tag{5.49}$$

tal que $\frac{\partial}{\partial x''^k} \psi_{ikm}(\vec{x},\vec{x}'') = 0.$

Vamos determinar ψ_{ikm} substituindo (5.49) em (5.48) por consistência. Obtemos após grupar os termos e usando $\psi_{ikm,k} = 0$:

$$-2\nabla''^2 \psi_{irm}(\vec{x},\vec{x}'') = - \frac{\partial}{\partial x''^r} \frac{1}{\nabla''^2} \frac{\partial^2}{\partial x''^m \partial x''^i} \delta(\vec{x}-\vec{x}'') + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x''^i} \delta(\vec{x}-\vec{x}'') \delta_{rm} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x''^m} \delta(\vec{x}-\vec{x}'') \delta_{ir}$$

cuja solução é

$$\psi_{irm}(\vec{x},\vec{x}'') = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\nabla''^2} \frac{\partial}{\partial x''^r} \frac{1}{\nabla''^2} \frac{\partial^2}{\partial x''^m \partial x''^i} \delta(\vec{x}-\vec{x}'') - \frac{1}{2} \frac{1}{\nabla''^2} \frac{\partial}{\partial x''^i} \delta(\vec{x}-\vec{x}'') \delta_{rm} - \frac{1}{2} \frac{1}{\nabla''^2} \frac{\partial}{\partial x''^m} \delta(\vec{x}-\vec{x}'') \delta_{ir} \right) \tag{5.50}$$

Pode-se verificar diretamente que $\frac{\partial}{\partial x''^r} \psi_{irm} = 0$. Substituindo-se (5.50) em (5.49) temos finalmente

$$f_{irm}(\vec{x},\vec{x}'') = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x''^r}\frac{1}{\nabla''^2}\frac{1}{\nabla''^2}\frac{\partial^2}{\partial x''^m \partial x''^i}\delta(\vec{x}-\vec{x}'') - \frac{1}{4}\frac{1}{\nabla''^2}\frac{\partial}{\partial x''^m}\delta(\vec{x}-\vec{x}'')\delta_{ir} +$$

$$- \frac{1}{4}\frac{1}{\nabla''^2}\frac{\partial}{\partial x''^i}\delta(\vec{x}-\vec{x}'')\,\delta_{rm} \tag{5.51}$$

A equação (5.39) é análoga a (5.47) cuja solução já discutimos. Assim

$$C_{ik}^{\;A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'') = 0 \tag{5.52}$$

Consideremos agora a equação (5.40). O spinor hermitiano $d_i^{\;A\dot{B}}$ pode ser escrito.

$$d_i^{\;A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}') = d_{i\mu}(\vec{x},\vec{x}')\mathring{\sigma}^{\mu\;A\dot{B}}$$

e invertendo-se

$$d_{i\mu}(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{2}\,d_i^{\;A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\mathring{\tau}_{\mu\;A\dot{B}} \tag{5.53}$$

Usando (5.53) em (5.40) obtemos

$$4\,\nabla''^2\,\nabla''^2\,d_{i\mu}(\vec{x},\vec{x}'') = \delta_{i\mu}\,\nabla^2\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'') - \delta_{s\mu}\frac{\partial^2}{\partial x''^i \partial x''^s}\delta(\vec{x}-\vec{x}'') \tag{5.54}$$

Vamos resolver (5.54) por partes. Para $\mu = 0$ ela se reduz a

$$\nabla''^2\,\nabla''^2\,d_{io}(\vec{x},\vec{x}'') = 0$$

cuja solução tomaremos $d_{io}(\vec{x},\vec{x}'') = 0$ por razões já discutidas. Resta

$$4\,\nabla''^2\,\nabla''^2\,d_{im}(\vec{x},\vec{x}'') = \delta_{im}\,\nabla^2\delta(\vec{x}-\vec{x}'') - \delta_{sm}\frac{\partial^2}{\partial x''^i \partial x''^s}\delta(\vec{x}-\vec{x}'') \tag{5.55}$$

cuja solução é

$$d_{im}(\vec{x},\vec{x}'') = \frac{1}{4}\left(\delta_{im}\ \frac{1}{\nabla''^2}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}'') - \frac{1}{\nabla''^2}\ \frac{1}{\nabla''^2}\ \frac{\partial^2}{\partial x''^i \partial x''^m}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}'')\right) \qquad (5.56)$$

Usando (5.52) em (5.42) obtemos

$$b_{imn}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'')\ \alpha_{r[mn]} = 0$$

que se verifica para qualquer $b_{imn}^{A\dot{B}}$ simétrico em (mn). Porém tal propriedade implica que $b_{im}^{A\dot{B}}\ \overset{(1)}{\alpha}_{[mn]}(x) \equiv 0$ em (5.34), não contribuindo para $\overset{*}{\Sigma}_i(x)$. Como resultado final obtemos:

$$\overset{*}{\Sigma}_i^{A\dot{B}}(x) = \Sigma_i^{A\dot{B}}(x) + \int_{x^o} d_i^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\ \overset{(1)}{\mathcal{P}}_L(x')d^3x' + \int_{x^o} f_{ik}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\ \Delta_k(x')d^3x' +$$
$$- h_{i(o)}^{(x)}\ \overset{o}{\sigma}^{o\ A\dot{B}} + \frac{1}{4}\left(\overset{o}{\sigma}_r^{A\dot{B}}\ \delta_{is} - \overset{o}{\sigma}_s^{A\dot{B}}\ \delta_{ir}\right)\overset{o}{\tau}_{sK\dot{M}}\ \Sigma_r^{K\dot{M}}(x) \qquad (5.58)$$

onde

$$d_i^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'') = d_{im}(\vec{x},\vec{x}'')\overset{o}{\sigma}^{m\ A\dot{B}} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\nabla''^2}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}'')\overset{o}{\sigma}_i^{A\dot{B}} + \right.$$
$$\left. + \overset{o}{\sigma}_s^{A\dot{B}}\ \frac{1}{\nabla''^2}\ \frac{1}{\nabla''^2}\ \frac{\partial^2}{\partial x''^i \partial x''^s}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}'')\right)$$

$$f_{ik}^{A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}') = f_{ikm}(\vec{x},\vec{x}')\overset{o}{\sigma}^{m\ A\dot{B}} = -\frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial x'^k}\ \frac{1}{\nabla'^2}\ \frac{1}{\nabla'^2}\ \frac{\partial^2}{\partial x'^m \partial x'^i}\ \overset{o}{\sigma}_m^{A\dot{B}} +$$
$$+ \frac{1}{4}\ \frac{1}{\nabla'^2}\ \frac{\partial}{\partial x'^m}\ \delta(\vec{x},\vec{x}')\delta_{ik}\ \overset{o}{\sigma}_m^{A\dot{B}} + \frac{1}{4}\ \frac{1}{\nabla'^2}\ \frac{\partial}{\partial x'^i}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}')\overset{o}{\sigma}_k^{A\dot{B}}$$

Utilizando (5.58) vamos mostrar que a fatoração

$$h^*_{ij}(x) = -\frac{1}{2}\,(\Sigma_i^{*A\dot{B}}(x)\,\overset{\circ}{\tau}_{j\,A\dot{B}} + \overset{*}{\Sigma}_j{}^{A\dot{B}}(x)\,\overset{\circ}{\tau}_{i\,A\dot{B}}) \qquad (5.59)$$

se verifica para os observáveis BK, mesmo fora de hipersuperfície de vínculos. Para isto basta mostrar que, para cada vínculo, os coeficientes (c-números) da direita de (5.59) são idênticos aos obtidos na forma (4.24). O termo $h_{i(o)}(x)\ \overset{\circ}{\sigma}{}^{o\,A\dot{B}}$ não contribui em (5.59) por causa da presença de $\overset{\circ}{\sigma}{}^{o\,A\dot{B}}$ - na operação de traço vai aparecer $\delta_i{}^o$ ou $\delta^o{}_j$, que são identicamente nulos. A última parcela de (5.58) é antisimétrica em (ri); quando tomarmos os traços em (5.59) teremos um termo anti-simétrico em (ij) que, simetrizado, não vai contribuir. Assim os vínculos spinoriais não contribuem para a forma tensorial, numa fatoração (5.59). Vamos examinar os termos restantes: $\Sigma_i{}^{A\dot{B}}(x) \to h_{ij}(x)$; o coeficiente de $\overset{(1)}{\mathscr{H}}_L\, d\bar{a}$, em (5.59),

$$-\frac{1}{2}\,(d_i{}^{A\dot{B}}\,\overset{\circ}{\tau}_{j\,A\dot{B}} + d_j{}^{A\dot{B}}\,\overset{\circ}{\tau}_{i\,A\dot{B}}) = (d_{ij} + d_{ji}) = \frac{1}{2}\,(\delta_{ij}\,\frac{1}{\nabla'^2}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') +$$

$$-\frac{1}{\nabla'^2}\,\frac{1}{\nabla'^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x'^i\partial x'^m}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \equiv \beta_{ij}$$

(cf. (4.37)). O coeficiente do vínculo A_k contribui com

$$-\frac{1}{2}\,(f_{ik}{}^{A\dot{B}}\,\overset{\circ}{\tau}_{j\,A\dot{B}} + f_{jk}{}^{A\dot{B}}\,\overset{\circ}{\tau}_{i\,A\dot{B}}) = (f_{ikj} + f_{jki}) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x'^k}\,\frac{1}{\nabla'^2}\,\frac{1}{\nabla'^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x'^i\partial x'^j}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') +$$

$$-\frac{1}{2}\,\delta_{ki}\,\frac{1}{\nabla'^2}\,\frac{\partial}{\partial x'^j}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') - \frac{1}{2}\,\delta_{kj}\,\frac{1}{\nabla'^2}\,\frac{\partial}{\partial x'^i}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

que é idêntico a $-\frac{1}{2}\,(\gamma_{ij\ell})$ coeficiente de A_i(cf. 4.21) e (4.33)). O fator

$(-\frac{1}{2})$ vai compor o vínculo tensorial, desde que Δ_k é idêntico a $h_{kj,j}$ a menos desta constante. Mais explicitamente

$$h^*_{ij}(x) = -\frac{1}{2}\,Tr(\Sigma_i\,\overset{\circ}{\tau}_j + \Sigma_j\,\overset{\circ}{\tau}_i) + \int_{X^0} \left(-\frac{1}{2}\left(d_i^{\;A\dot{B}}\,\overset{\circ}{\tau}_{j\,A\dot{B}} + d_j^{\;A\dot{B}}\,\overset{\circ}{\tau}_{i\,A\dot{B}}\right)\right)\overset{(1)}{\mathscr{H}}_L(x')d^3x' +$$

$$+ \int_{X^0}\left(-\frac{1}{2}\left(f_{ik}^{\;A\dot{B}}\,\overset{\circ}{\tau}_{jA\dot{B}} + f_{jk}^{\;A\dot{B}}\,\overset{\circ}{\tau}_{iA\dot{B}}\right)\right)\Delta_k(x')d^3x' = h_{ij}(x) + \int_{X^0}\beta_{ij}\,\overset{(1)}{\mathscr{H}}_L(x')d^3x' +$$

$$+ \int_{X^0}\left(-\frac{1}{2}\,\Delta_k\right)\gamma_{ijk}\,d^3x'$$

onde

$$-\frac{1}{2}\,\Delta_k \equiv A_i$$

A partir dos momenta $\overset{(1)}{\pi}_{i\,A\dot{B}}(x)$ construimos a variável estrela

$$\overset{(1)}{\pi}{}^*_{iA\dot{B}}(x) = \overset{(1)}{\pi}_{i\,A\dot{B}}(x) + \int_{X^0} B_{imn\,A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\,\overset{(1)}{\alpha}_{[mn]}(x')\,d^3x' +$$

$$+ \int_{X^0} C_{ik\,A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\,\overset{(1)}{\mathscr{H}}_k(x')d^3x' + \int_{X^0} D_{i\,A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\,\overset{(1)}{\mathscr{H}}_L(x')d^3x' +$$

$$+ \int_{X^0} F_{ik\,A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\Delta_k(x')d^3x' + \int_{X^0} G_{iA\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\Theta(x')d^3x' +$$

$$+ \int_{X^0} H_{inA\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\,h_{n(o)}(x')\,d^3x' + \int_{X^0} K_{inA\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\,\overset{(1)}{\beta}_n(x')d^3x' +$$

$$+ \int_{X^0} Q_{im\,A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\,\mathscr{J}_m(x')\,d^3x' \qquad (5.60)$$

Como já foi discutido, os coeficientes da combinação (5.60) deverão ter simetria em $(\vec{x},\vec{x}')$ por causa da forma da matriz PP dos vínculos. Deverão também ser spinores hermitianos, desde que $\overset{(1)}{\pi}{}_{i\,A\dot{B}}$ é hermitiano e $\overset{(1)}{\pi}{}^{*}_{i\,A\dot{B}}$ deve ser hermitiano.

Determinação dos Coeficientes

$$\left[\overset{(1)}{\pi}{}^{*}_{i\,A\dot{B}}(x),\ \overset{(1)}{\alpha}{}_{[jk]}(x'')\right]_{x^0=x''^0} \doteq 0 \Longrightarrow \int_{x^0} Q_{im\,A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\ \alpha_{m[jk]}\,\delta(\vec{x}'-\vec{x}'')d^3x' = 0$$

ou
$$Q_{im\,A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}') = 0 \qquad (5.61)$$

$$\left[\overset{(1)}{\pi}{}^{*}_{i\,A\dot{B}}(x),\ \overset{(1)}{\mathcal{H}}_{\ell}\,(x'')\right]_{x^0=x''^0} = 0 \Longrightarrow -\,2\int_{x^0} F_{ik\,A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\ \frac{\partial^2}{\partial x''^n\partial x''^r}\,\delta(\vec{x}''-\vec{x}')\,(\delta_{kr}\,\delta_{n\ell} + \delta_{nr}\,\delta_{k\ell})d^3x' \,+$$

$$+\,2\int_{x^0} Q_{im\,A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\alpha_{m[k\ell]}\ \frac{\partial}{\partial x''^k}\,\delta(\vec{x}'-\vec{x}'')d^3x' = 0$$

ou, fazendo uso de (5.61):

$$\frac{\partial^2}{\partial x''^n\partial x''^r}\,F_{ik\,A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'')(\delta_{kr}\,\delta_{n\ell} + \delta_{nr}\,\delta_{k\ell}) = 0 \qquad (5.62)$$

$$\left[\overset{(1)}{\pi}{}_{iA\dot{B}}(x),\overset{(1)}{\mathcal{H}}{}_{L}(x'')\right]_{x^0=x''^0} = 0 \Longrightarrow -\,4\int_{x^0} G_{iA\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\nabla'^2\nabla''^2\delta(\vec{x}'-\vec{x}'')d^3x' \,-$$

$$-\ \nabla''^2\ \delta(\vec{x}-\vec{x}'')\overset{\circ}{\tau}_{iA\dot{B}} + \frac{\partial^2}{\partial x''^i\partial x''^\ell}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}'')\overset{\circ}{\tau}_{\ell\,A\dot{B}} = 0$$

ou

$$4\,\nabla''^2\,\nabla''^2\,G_{i\;A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'') = -\,\nabla''^2\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'')\mathring{\tau}_{i\;A\dot{B}} + \frac{\partial^2}{\partial x''^i\,\partial x''^\ell}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'')\mathring{\tau}_{\ell\;A\dot{B}} \quad (5.63)$$

$$\left[\overset{(1)*}{\pi}_{i A\dot{B}}(x),\,\Delta_k(x'')\right]_{x^0=x''^0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x''^\ell}\,\delta(\vec{x}''-\vec{x})(\delta_{ik}\,\mathring{\tau}_{\ell A\dot{B}} + \delta_{i\ell}\,\mathring{\tau}_{k\;A\dot{B}}) =$$

$$= 2\int_{x^0} C_{i\ell A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\,\frac{\partial^2}{\partial x'^n\,\partial x'^p}\,\delta(\vec{x}'-\vec{x}'')(\delta_{kp}\delta_{n\ell} + \delta_{np}\delta_{k\ell})d^3x'$$

ou

$$2\,\frac{\partial^2}{\partial x''^n\,\partial x''^p}\,C_{i\ell\;A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'')(\delta_{kp}\delta_{n\ell} + \delta_{np}\,\delta_{k\ell}) = \frac{\partial}{\partial x''^\ell}\,\delta(\vec{x}''-\vec{x})(\delta_{ik}\,\mathring{\tau}_{\ell A\dot{B}}+\delta_{i\ell}\mathring{\tau}_{kA\dot{B}}) \quad (5.64)$$

$$\left[\overset{(1)*}{\pi}_{i\;A\dot{B}}(x),\,\Theta(x'')\right]_{x^0=x''^0} = 0 \Longrightarrow 4\int_{x^0} D_{i\;A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\,\nabla'^2\,\nabla''^2\,\delta(\vec{x}'-\vec{x}'')d^3x' = 0$$

ou

$$\nabla''^2\,\nabla''^2\,D_{iA\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'') = 0 \quad (5.65)$$

$$\left[\overset{(1)*}{\pi}_{i\;A\dot{B}}(x),\,\mathcal{J}_j(x'')\right]_{x^0=x''^0} = 0 \Longrightarrow -\,\alpha_{j[pq]}\,\tau_{q\;A\dot{B}}\,\delta_{ip}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'') +$$

$$-\,2\int_{x^0} B_{imn\;A\dot{B}}\,(\vec{x},\vec{x}')\,\alpha_{j[\ell p]}\,(\delta_{n\ell}\,\delta_{mp} - \delta_{np}\,\delta_{m\ell})\,\delta(\vec{x}'-\vec{x}'')\,d^3x' = 0$$

ou

$$\alpha_{i[pq]}\,\mathring{\tau}_{q\;A\dot{B}}\,\delta_{ip}\;\;\delta(\vec{x}-\vec{x}'') = 4\;\;B_{imn\;A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'')\,\alpha_{j[mn]} \quad (5.66)$$

$$\left[\overset{(1)}{\pi}{}^{*}_{iA\dot{B}}(x),\ h_{n(o)}^{(x'')} \right]_{x^o=x''^o} = 0 \Longrightarrow -\ \delta_{in}\ \tau^{o}{}_{A\dot{B}}\delta(\vec{x}-\vec{x}'') -$$

$$-\int_{x^o} K_{i\ell_{A\dot{B}}}(\vec{x},\vec{x}')\ \delta_{\ell n}\ \delta(\vec{x}'-\vec{x}'')d^3x' = 0$$

ou

$$K_{i\ell_{A\dot{B}}}(\vec{x},\vec{x}'') = -\ \delta_{i\ell}\ \overset{o}{\tau}{}^{o}{}_{A\dot{B}}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}'') \tag{5.67}$$

$$\left[\overset{(1)}{\pi}{}^{*}_{iA\dot{B}}(x),\ \overset{(1)}{\beta}_{\ell}\ (x'') \right]_{x^o=x''^o} = 0 \Longrightarrow \int_{x^o} H_{in\ A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x})\ \delta_{n\ell}\ \ \delta(\vec{x}''-\vec{x}')d^3x' = 0$$

ou

$$H_{in\ A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'') = 0 \tag{5.68}$$

Solução das Equações Diferenciais dos Coeficientes

Um exame rápido das equações (5.61) e (5.68) nos mostra que suas soluções devem ser funções de $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ e/ou suas derivadas. Soluções das homogêneas associadas e das homogêneas tipo $\nabla^2\phi = 0$ que se anulam no infinito espacial são identicamente nulas.

As equações (5.61), (5.67) e (5.68) são diretamente a solução procurada. Da homogênea (5.65), tomamos a solução

$$D_{i\ A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'') = 0 \tag{5.69}$$

A equação (5.62) é idêntica a (5.39), cuja solução já discutimos, e portanto temos

$$F_{ikA\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'') = 0 \tag{5.70}$$

de acôrdo com (5.52).

A equação (5.63) é idêntica a (5.40), cuja solução já discutimos e é dada em (5.56). Assim a solução de (5.63) será

$$G_{iA\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'') = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\nabla''^2}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'')\,\overset{\circ}{\tau}_{iA\dot{B}} + \frac{\partial^2}{\partial x''^i \partial x''^\ell}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'')\,\overset{\circ}{\tau}_{\ell A\dot{B}}\right) \tag{5.71}$$

Consideremos a equação (5.64). Diferenciando em x''^k obtemos

$$2\,\frac{\partial}{\partial x''^\ell}\,\nabla''^2\,C_{i\ell A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'') = \frac{\partial^2}{\partial x''^k \partial x''^i}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'')\,\overset{\circ}{\tau}_{k\,A\dot{B}} \tag{5.72}$$

cuja solução será

$$C_{i\ell A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'') = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x''^\ell}\,\frac{1}{\nabla''^2}\,\frac{1}{\nabla''^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x''^k \partial x''^i}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'')\overset{\circ}{\tau}_{kAB} + \phi_{i\ell A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'') \tag{5.73}$$

tal que $\frac{\partial}{\partial x''^\ell}\phi_{i\ell A\dot{B}} = 0$. Substituindo, por consistência, (5.73) em (5.64) e usando o fato que $\phi_{i\ell}$ tem divergência nula no índice ℓ, obtemos:

$$2\,\nabla''^2\,\phi_{ikA\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'') = \frac{\partial}{\partial x''^\ell}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'')(\delta_{ik}\,\overset{\circ}{\tau}_{\ell A\dot{B}} + \delta_{i\ell}\,\overset{\circ}{\tau}_{kA\dot{B}}) +$$

$$-\,2\,\frac{\partial}{\partial x''^k}\,\frac{1}{\nabla''^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x''^n \partial x''^i}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'')\,\overset{\circ}{\tau}_{nA\dot{B}}$$

que nos dá

$$\phi_{ikA\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'') = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\nabla''^2}\,\frac{\partial}{\partial x''^\ell}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'')(\delta_{ik}\,\overset{\circ}{\tau}_{\ell A\dot{B}} + \delta_{i\ell}\,\overset{\circ}{\tau}_{kA\dot{B}}) +$$

$$-\,\frac{1}{\nabla''^2}\,\frac{\partial}{\partial x''^k}\,\frac{1}{\nabla''^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x''^n \partial x''^i}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'')\,\overset{\circ}{\tau}_{n\,A\dot{B}} \tag{5.74}$$

Substituindo (5.74) em (5.73) obtemos finalmente

$$C_{ikA\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'') = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\nabla''^2}\,\frac{\partial}{\partial x''^\ell}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'')(\delta_{ik}\,\overset{\circ}{\tau}_{\ell A\dot{B}} + \delta_{i\ell}\,\overset{\circ}{\tau}_{k A\dot{B}}) +$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x''^k}\,\frac{1}{\nabla''^2}\,\frac{1}{\nabla''^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x''^n \partial x''^i}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'')\,\overset{\circ}{\tau}_{n A\dot{B}} \tag{5.75}$$

Da equação (5.66), desde que $\alpha_{j[pq]}$ são constantes não nulas, tiramos

$$B_{ipq\,A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}'') = \frac{1}{4}\,(\overset{\circ}{\tau}_{q\,A\dot{B}}\,\delta_{ip} - \overset{\circ}{\tau}_{p\,A\dot{B}}\,\delta_{iq})\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'') \tag{5.76}$$

a menos de uma quantidade $\psi_{ipq}(\vec{x},\vec{x}'')$ simétrica em (pq).

Assim, o observável $\overset{(1)*}{\pi}_{iA\dot{B}}$ pode-se escrever

$$\overset{(1)*}{\pi}_{iA\dot{B}}(x) = \overset{(1)}{\pi}_{iA\dot{B}}(x) + \frac{1}{4}\,(\overset{\circ}{\tau}_{q\,A\dot{B}}\,\delta_{ip} - \overset{\circ}{\tau}_{p\,A\dot{B}}\,\delta_{iq})\,\overset{(1)}{\alpha}_{[pq]}(x) +$$

$$+\int_{x^0} C_{i\ell A\dot{B}}\,(\vec{x},\vec{x}')\,\overset{(1)}{\mathcal{H}}_{\ell}(x')\,d^3x' + \int_{x^0} G_{iA\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}')\Theta(x')d^3x' +$$

$$-\,\delta_{in}\,\overset{\circ\circ}{\tau}_{A\dot{B}}\,\overset{(1)}{\beta}_{n}(x) \tag{5.77}$$

onde

$$C_{i\ell A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\nabla'^2}\,\frac{\partial}{\partial x'^k}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')(\overset{\circ}{\tau}_{kA\dot{B}}\,\delta_{i\ell} + \overset{\circ}{\tau}_{\ell A\dot{B}}\,\delta_{ik}) +$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x'^\ell}\,\frac{1}{\nabla'^2}\,\frac{1}{\nabla'^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x'^n \partial x'^i}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\,\overset{\circ}{\tau}_{n\,A\dot{B}}$$

e

$$G_{iA\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{4}\,(-\frac{1}{\nabla'^2}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\,\overset{\circ}{\tau}_{iA\dot{B}} + \frac{\partial^2}{\partial x'^i \partial x'^\ell}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\,\overset{\circ}{\tau}_{\ell\,A\dot{B}})$$

Vamos mostrar que $\overset{(1)}{\pi}{}^{*}_{i\,A\dot{B}}$ dado por (5.77) resulta da fatoração de $\overset{(1)}{P}{}^{*}_{ij}$, mesmo fora da hipersuperfície de vínculos, i.é,

$$\overset{(1)}{P}{}^{*}_{ij} = \frac{1}{2}\ \overset{(1)}{\pi}{}^{*}_{i\,A\dot{B}}\ \overset{\circ}{\sigma}_{j}{}^{A\dot{B}} \tag{5.78}$$

A parcela $-\delta_{in}\ \overset{\circ\circ}{\tau}_{A\dot{B}}\ \overset{(1)}{\beta}_{n}(x)$ não contribuirá para (5.78), desde que teremos $-\frac{1}{2}\delta_{in}\ \overset{(1)}{\beta}_{n}(x)\ \delta^{o}_{j} \equiv 0$. As outras parcelas de (5.77) darão, em (5.78):

$$\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\,(\delta_{ip}\ \delta_{jq} - \delta_{jp}\ \delta_{iq})\ \overset{(1)}{\alpha}_{[pq]}(x) = \frac{1}{2}\ \overset{(1)}{\alpha}_{[ij]}(x);$$

$$\frac{1}{2}\ \overset{(1)}{\pi}_{i\,A\dot{B}}(x)\ \overset{\circ}{\sigma}_{j}{}^{A\dot{B}} \equiv \overset{(1)}{P}_{ij}(x)$$

$$\frac{1}{2}\,G_{iA\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}\,')\overset{\circ}{\sigma}_{j}{}^{A\dot{B}} = \frac{1}{4}\,\left(-\frac{1}{\nabla'^{2}}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}\,')\delta_{ij} + \frac{\partial^{2}}{\partial x'^{i}\partial x'^{j}}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}\,')\right) \equiv \frac{1}{2}\,\Theta_{ij}(\vec{x},\vec{x}\,') \tag{4.42}$$

$$\frac{1}{2}\,C_{i\ell A\dot{B}}(\vec{x},\vec{x}\,')\overset{\circ}{\sigma}_{j}{}^{A\dot{B}} = -\frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial x'^{\ell}}\ \frac{1}{\nabla'^{2}}\ \frac{1}{\nabla'^{2}}\ \frac{\partial^{2}}{\partial x'^{i}\partial x'^{j}}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}\,') +$$

$$+\frac{1}{2}\ \frac{1}{\nabla'^{2}}\ \frac{\partial}{\partial x'^{m}}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}\,')(\delta_{i\ell}\delta_{mj} + \delta_{im}\ \delta_{\ell j}) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}\,\mu_{ijk}(\vec{x},\vec{x}\,') \tag{4.44}$$

Assim, o lado direito de (5.78) nos dá

$$\frac{1}{2}\ \overset{(1)}{\pi}{}^{*}_{iA\dot{B}}\ \overset{\circ}{\sigma}_{j}{}^{A\dot{B}} = \overset{(1)}{P}_{ij}(x) + \int_{x^{o}} \mu_{ijk}(\vec{x},\vec{x}\,')(\tfrac{1}{2}\ \overset{(1)}{\mathscr{B}}_{\ell}(x')d^{3}x' +$$

$$+\int_{x^{o}} \Theta_{ij}(\vec{x},\vec{x}\,')(\tfrac{1}{2}\ \Theta(x'))d^{3}x' + \frac{1}{2}\ \overset{(1)}{\alpha}_{[ij]}(x)$$

Notando a expressão dos vínculos spinoriais $\overset{(1)}{\mathcal{H}}_\ell$ e Θ e a forma de fatoração (5.20), temos:

$$\frac{1}{2}\overset{(1)*}{\pi}{}_{iA\dot{B}}\,\overset{\circ}{\sigma}{}_j{}^{A\dot{B}} = \overset{(1)}{P}{}_{ij}(x) + \int_{x^0}\mu_{ijk}(\vec{x},\vec{x}'')(\overset{(1)}{P}{}_{k\ell,\ell}(x''))d^3x'' +$$

$$+\int_{x^0}\Theta_{ij}(\vec{x},\vec{x}'')\,B(x'')d^3x'' + \frac{1}{2}\overset{(1)}{\alpha}{}_{[ij]}(x)$$

ou

$$\frac{1}{2}\overset{(1)*}{\pi}{}_{i\,A\dot{B}}\,\overset{\circ}{\sigma}{}_j{}^{A\dot{B}} = \overset{(1)*}{P}{}_{ij}(x) + \frac{1}{2}\overset{(1)}{\alpha}{}_{[ij]}(x) \qquad (5.79)$$

$\overset{(1)}{\alpha}{}_{[ij]}(x)$ é um vínculo que aparece na formulação spinorial e dá conta da simetria em (ij) de $\overset{(1)}{P}{}_{ij}$ na forma (5.20). Na formulação tensorial ele se reduz a uma relação algébrica idênticamente nula desde que, por construção P_{ij} é simétrico.

Resumindo: utilizando condições de coordenadas equivalentes às condições de coordenadas ADM no caso tensorial, obtivemos as variáveis estrela $(\overset{*}{\Sigma}_i,\ \overset{(1)*}{\pi}{}_i)$ para a forma spinorial linearizada da teoria Hamiltoniana de Dirac. Estas variáveis contem, na sua expressão, vínculos adicionais que não têm equivalente no caso tensorial e estão associados ao fato de que $(\overset{*}{\Sigma}_i,\ \overset{(1)*}{\pi}{}_i)$ são invariantes com relação a transformação de Lorentz locais infinitesimais sôbre os eixos de tetradas. Mostramos que a fatoração (módulo condições de coordenadas equivalentes).

$$\overset{*}{h}{}_{ij} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\overset{*}{\Sigma}_i\,\overset{\circ}{\tau}_j + \overset{*}{\Sigma}_j\,\overset{\circ}{\tau}_i) \qquad (5.59)$$

$$\overset{(1)*}{P}{}_{ij} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\overset{(1)*}{\pi}_i\,\overset{\circ}{\sigma}_j) \qquad (5.78)$$

vale mesmo fora da hipersuperfície de vínculos e daí decorre que na aproximação linear a todo observável BK tensorial está associado um observável BK spinorial e vice-versa, e ainda, qualquer quantidade tensorial de primeira ordem construída com os observáveis $(\overset{*}{\Sigma}_i, \overset{(1)*}{\pi}_i)$ será um observável tensorial BK. Fica, entretanto, em aberto se a equivalência se mantém para a teoria completa. Os vínculos adicionais nas variáveis estrela spinoriais não contribuem na composição do observável tensorial, embora estes termos adicionais devam aparecer nas relações de comutação entre observáveis spinoriais, o que já sugere uma inequivalência entre a quantização canônica via PD na forma tensorial e spinorial.

Também, na aproximação linear, devido a (5.59) e (5.78) $(\overset{*}{\Sigma}_i, \overset{(1)*}{\pi}_i)$ são a representação spinorial das variáveis TT da teoria ADM. Os PP entre estas variáveis podem ser calculados, usando-se (5.58), (5.77) e os PP (5.25):

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\overset{*}{\Sigma}{}_i^{A\dot{B}}(x), \overset{*}{\Sigma}{}_j^{R\dot{S}}(x'')\right]_{x^0=x''^0} = 0 \\
&\left[\overset{(1)*}{\pi}{}_{iA\dot{B}}(x), \overset{(1)*}{\pi}{}_{j\,R\dot{S}}(x'')\right]_{x^0=x''^0} = 0 \\
&\left[\overset{*}{\Sigma}{}_i^{A\dot{B}}(x), \overset{(1)*}{\pi}{}_{j\,R\dot{S}}(x'')\right]_{x^0=x''^0} = \overset{*}{\delta}{}_{ij}{}^{A\dot{B}}_{R\dot{S}}(\vec{x}-\vec{x}'')
\end{aligned}\right\} \qquad (5.80)$$

onde $\overset{*}{\delta}{}_{ij}{}^{A\dot{B}}_{R\dot{S}}(\vec{x}-\vec{x}'')$ é uma delta de Dirac 3-dimensional modificada. Usando-se (5.58) e (5.77) em (5.80) podemos obter sua forma explícita. A relação entre $\overset{*}{\delta}{}_{ij}{}^{A\dot{B}}_{R\dot{S}}(\vec{x}-\vec{x}')$ e $\Delta^{TT}{}_{ij}^{\ell m}(\vec{x}-\vec{x}')$ pode ser obtida usando-se (5.59), (5.78) e (5.80) em

$$\left[\overset{*}{h}_{ij}(x),\ \overset{(1)}{P}{}^{*}_{\ell m}(x'')\right]_{x^0=x''^0} = \Delta^{TT}{}^{\ell m}_{ij}(\vec{x}-\vec{x}'')$$

Um cálculo direto mostra que

$$\Delta^{TT}{}^{\ell m}_{ij}(\vec{x}-\vec{x}'') = -\frac{1}{4}\left[\overset{\circ}{\sigma}{}_m^{R\dot{S}}\ \overset{\circ}{\tau}{}_{j\,k\dot{M}}\ \overset{*}{\delta}{}_{i\ell}{}^{k\dot{M}}_{R\dot{S}}(\vec{x}-\vec{x}'') + \overset{\circ}{\sigma}{}_m^{R\dot{S}}\ \overset{\circ}{\tau}{}_{i\,k\dot{M}}\ \overset{*}{\delta}{}^{k\dot{M}}_{j\ell R\dot{S}}(\vec{x}-\vec{x}'')\right] \quad (5.81)$$

6. COMENTÁRIOS FINAIS

Na região do espaço de fase, restrita pelos vínculos Hamiltonianos de primeira classe $\mathcal{H}_r = 0$ e $\mathcal{H}_L = 0$, duas trajetórias distintas podem representar a mesma situação física desde que as condições iniciais associadas a cada trajetória possam ser transformadas uma na outra por uma transformação canônica de coordenadas gerada pelos vínculos Hamiltonianos. Também a propagação das variáveis dinâmicas a partir da hipersuperfície de valores iniciais não é unicamente determinada pelas equações Hamiltonianas de movimento devido à arbitrariedade na escolha do sistema de coordenadas, consistente com os dados iniciais. Assim, para construir observáveis temos necessidade de bem definir o problema de Cauchy para a teoria. Isso pode ser feito, como foi mostrado nas seções 3 e 4, impondo-se condições de coordenadas, o que é um procedimento não de todo satisfatório. De fato, o ponto crucial deste tratamento é que, em geral, a escolha das condições de coordenadas não é única, daí resultando, em princípio, a não viabilidade da determinação *explícita* de resultados físicos, desde que não existem possibilidades de experiências para indicar qual a melhor escolha de condições. No caso da aproximação linear, porém, a escolha (4.19) (condição de radiação) é natural para se obter uma teoria de massa nula e spin adequado. Tendo a condição de massa nula e spin 2 como guia, poderíamos dizer que, no caso geral, qualquer condição de coordenadas deve ter um limite, na região de campo fraco, do tipo da condição de radiação. Entretanto isto não fixa univocamente uma condição geral de coordenadas, apesar de excluir um certo número de possibilidades (cf. abaixo sôbre coordenadas intrínsecas).

Além disso, uma formulação Hamiltoniana com escolha de coordenadas fixadas implica em dois problemas: 1) para cada conjunto de condições de coordenadas escolhido teremos um conjunto conveniente de observáveis canônicas (por exemplo, na gauge de radiação para a eletrodinâmica, os observáveis canônicos são as variáveis transversais) e é um fato em aberto se diferentes conjuntos de observáveis estrela estão relacionados por transformações canônicas (transformações de gauge tipo-q) e, portanto, se diferentes possibilidades corresponderiam a versões quânticas equivalentes [12]. Duas escolhas possíveis, por exemplo: as condições de coordenadas ADM que são de caráter assintótico e fixam $g_{o\mu} = \delta_{o\mu}$; ou as coordenadas intrínsecas de Bergmann-Komar em que as coordenadas de cada ponto são caracterizadas pelos quatro escalares de exi-curvatura neste ponto; os $g_{o\mu}$ são fixados univocamente como funções de (g_{ij}, p^{ij}). O sistema de coordenadas intrínsecas sofre de diversas dificuldades: complexidade matemática, exclusão de simetrias na geometria, puramente local e sem estrutura assintótica.

2) Condições de coordenadas também nos impedem de dividir o espaço de fase físico naturalmente em classes de equivalência, fundamental na formulação HJ [35] da teoria de Einstein. Realmente a teoria de HJ pretende ser uma formulação independente de coordenadas superando os problemas anteriores. No entanto ela apresenta dificuldades semelhantes: embora se mostre existência de um conjunto de quatro observáveis canônicamente conjugados $(\alpha_A(g_{mn}, p^{mn}), \beta^A(g_{mn}, p^{mn}))$, não se tem nenhuma indicação de como construir tais observáveis. Outra dificuldade aparece quando tentamos obter o campo g_{mn} como funcional dos observáveis (α_A, β^A) - temos duas relações entre os observáveis determinando seis quantidades independentes g_{mn} e dessa forma somos novamente obrigados a utilizar a possibilidade de transformações de coordenadas e impor quatro condições sôbre g_{mn}. A formulação HJ se desdobra naturalmente na teoria do Super-Espaço que é, atualmente uma linha de pesquisa fértil com vistas à quantização da geometria [27].

APÊNDICE I

VERSÃO SPINORIAL DA TEORIA HAMILTONIANA DE DIRAC

O tratamento abaixo é uma breve revisão do material encontrado nas referências 32, 13 e 33, e, de forma nenhuma, é completa; no entanto, todas as relações necessárias para uso na seção 5 aqui são obtidas ou mencionadas.

1. Formulação da Relatividade Geral em termos de spinores a duas componentes. Definimos, em cada ponto da variedade espaço-tempo, um espaço vetorial linear de duas dimensões. Os elementos deste espaço são funções complexas ordenadas

$$u(x) = \begin{pmatrix} u^1(x) \\ u^2(x) \end{pmatrix}$$

Chamaremos este espaço vetorial linear de espaço spinorial e seus elementos spinores. Os spinores são caracterizados por suas propriedades de transformação com relação a mudanças de base do espaço spinorial, num mesmo ponto do espaço-tempo. Os componentes da matriz de transformação são funções complexas arbitrárias mas restritas pela exigência que a matriz tenha determinante +1. Estas matrizes constituem um grupo que será referido por $SL_2(x)$. Com relação a este grupo de transformações, os spinores podem ser divididos em quatro tipos:

$$\left.\begin{array}{ll} u'^{A} = M^{A}{}_{k}\, u^{k} \,, & u^{k} = M^{-1}\,{}^{k}{}_{A}\, u'^{A} \\ u'^{\dot{A}} = M^{\dot{A}}{}_{\dot{k}}\, u^{\dot{k}} \,, & u^{\dot{k}} = M^{-1}\,{}^{\dot{k}}{}_{\dot{A}}\, u'^{\dot{A}} \end{array}\right\} \qquad (I.1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} u_{A} = u'_{k}\, M^{k}{}_{A} \,, & u'_{k} = u_{A}\, M^{-1}\,{}^{A}{}_{k} \\ u_{\dot{A}} = u'_{\dot{k}}\, M^{\dot{k}}{}_{\dot{A}} \,, & u'_{\dot{k}} = u_{\dot{A}}\, M^{-1}\,{}^{\dot{A}}{}_{\dot{k}} \end{array}\right\} \qquad (I.2)$$

onde $M^{A}{}_{k}$ é a matriz de transformação

$$(M^{A}{}_{k}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \,, \qquad (M^{\dot{A}}{}_{\dot{k}}) = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ \overline{\gamma} & \overline{\delta} \end{pmatrix}$$

que satisfaz a condição $\alpha\delta - \gamma\beta = 1$. $\overline{\alpha}$ significa o complexo-conjugado de α e um ponto sôbre todos os índices é equivalente a tomar o complexo conjugado. (I.1) e (I.2) podem ser escritos em notação matricial como

$$\begin{array}{ll} u' = M\, u \,, & u = M^{-1}\, u' \\ \overline{u}' = \overline{M}\, \overline{u} \,, & \overline{u} = M^{-1}\, \overline{u}' \\ v = v'\, M \,, & v' = v\, M^{-1} \\ \overline{v} = \overline{v}'\, \overline{M} \,, & \overline{v}' = \overline{v}\, \overline{M}^{-1} \end{array}$$

onde v é o vetor linha associado a u.

Índices spinoriais são abaixados e levantados por meio de matrizes spinoriais ε_{AB}, ε^{AB} e suas complexas conjugadas:

$$\varepsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon^{\dot{A}\dot{B}} \qquad (I.3)$$

$$\varepsilon^{AB}\, \varepsilon_{BC} = -\, \delta^{A}{}_{C} \qquad (I.4)$$

Assim

$$u^A = \varepsilon^{AB}\, u_B \tag{I.5}$$

e

$$u_A = u^B\, \varepsilon_{BA} = -\, \varepsilon_{AB}\, u^B \tag{I.6}$$

De (I.5) e (I.6) segue que $u^A\, u_A = -\, u_B\, u^B = 0$.

Usando (I.1), (I.2), (I.5) e (I.6) segue

$$\varepsilon'^{AL} = M^A{}_k\, M^L{}_B\, \varepsilon^{kB}$$

ou

$$\varepsilon' = M\, \varepsilon\, M^T \tag{I.7}$$

Usando (I.3) e a condição unimodular det M = +1 nós podemos provar que as matrizes têm a mesma expressão em todos os sistemas de base

$$\varepsilon'^{AB} = \varepsilon^{AB}$$

O mesmo resultado vale para ε_{AB} e para as complexo conjugadas.

Spinores de ordem mais alta se transformam como produto direto de vetores de spin, por exemplo, $\omega^{AB}{}_{\dot{C}}$ se transforma como $u^A\, \omega^B\, v_{\dot{C}}$, sob a ação do grupo $SL_2(x)$.

Um spinor hermitiano de segunda ordem é definido por

$$\omega_{\dot{A}C} = \omega_{C\dot{A}}$$

A hermiticidade é preservada sob transformações do $SL_2(x)$ e qualquer spinor hermitiano de segunda ordem pode ser descrito por um conjunto de quatro funções reais.

Associado a cada ponto do espaço tempo, definimos um conjunto de quatro matrizes de spin, hermitianas e linearmente independentes $\sigma_\mu{}^{K\dot{M}}(x)$. Sob o grupo $SL_2(x)$ elas se transformam como

$$\sigma'_\mu{}^{K\dot{M}}(x) = M^k{}_s(x)\ M^{\dot{M}}{}_{\dot{p}}(x)\quad \sigma_\mu^{S\dot{P}}(x) \tag{I.8}$$

ou, em notação matricial

$$\sigma'_\mu(x) = M(x)\ \sigma_\mu(x)\ M^+(x) \tag{I.9}$$

Com relação ao índice μ, elas se transformam como um quadrivetor covariante sob o MMG

$$\sigma'_\rho(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho}\ \sigma_\mu(x)$$

$$x'^\mu = x'^\mu(x)$$

As matrizes de spin $\sigma_\mu{}^{A\dot{B}}(x)$ permitem-nos associar a qualquer tensor $T^{\mu\nu\cdots}$ um spinor $T^{k\dot{M},R\dot{S},\cdots}$ tal que para cada índice tensorial corresponde um par de índices spinoriais, um pontuado e outro não pontuado:

$$\left.\begin{aligned} T^{k\dot{M},R\dot{S}\cdots} &= \sigma_\mu{}^{K\dot{M}}\ \sigma_\nu^{R\dot{S}}\ \cdots\ T^{\mu\nu\cdots} \\ T^{\mu\nu\cdots} &= \left(\frac{1}{2}\right)^n\ \sigma^\mu_{K\dot{M}}\ \sigma^\nu_{R\dot{S}}\ \cdots\ T^{k\dot{M},R\dot{S}\cdots} \end{aligned}\right\} \tag{I.10}$$

e

As matrizes σ contravariantes serão definidas mais tarde; n é a ordem do tensor; por exemplo, para um vetor n=1.

Da condição de hermiticidade dos $\sigma_\mu(x)$, segue que:

$$T^{k\dot{M}\ R\dot{S}\ \cdots} = T^{\dot{M}k\ \dot{S}R\ \cdots}$$

Esta relação tem o efeito de manter o mesmo número de componentes em ambos os lados de (I.9). A realidade de tensores leva à hermiticidade de seus spinores correspondentes.

Vamos definir o conjunto de matrizes $\tau_\mu(x)$ como

$$\tau_\mu = \varepsilon \bar{\sigma}_\mu \varepsilon \tag{I.11}$$

$$\tau_\mu^+ = \tau_\mu$$

Sob o $SL_2(x)$ elas se transformam como

$$\tau'_\mu(x) = M^{+-1}(x)\ \tau_\mu(x)\ M^{-1}(x) \tag{I.12}$$

(I.11) é consequência de (I.11) com (I.7) e (I.8). De (I.9) e (I.12) segue que $\sigma_\mu\ \tau_\nu$ se transforma como

$$\sigma'_\mu\ \tau'_\nu = M(\sigma_\mu\ \ \tau_\nu)M^{-1} \tag{I.13}$$

Vamos agora introduzir as matrizes hermitianas de spin $\overset{\circ}{\sigma}_\mu$ que são as matrizes de spin de Pauli e a identidade 2 x 2.

$$\overset{\circ}{\sigma}{}^{1K\dot{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{2K\dot{M}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{3K\dot{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{0K\dot{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{I.14}$$

Estas matrizes são linearmente independentes e podemos escrever $\sigma_\mu(x)$ como

$$\sigma_\mu(x) = h_{\mu(\alpha)}^{(x)}\ \overset{\circ}{\sigma}{}^\alpha \tag{I.15}$$

Da hermiticidade de $\sigma_\mu(x)$ e $\overset{\circ}{\sigma}_\mu$ segue que $h_{\mu(\alpha)}^{(x)}$ são um conjunto de 16 funções reais cujo significado será definido adiante. Analogamente podemos escrever

$$\tau_\mu(x) = h_\mu{}^{(x)}_{(\alpha)}\ \overset{\circ}{\tau}{}^\alpha \tag{I.16}$$

onde

$$\overset{\circ}{\tau}{}^\alpha = \varepsilon\ \overline{\overset{\circ}{\sigma}{}^\alpha}\ \varepsilon \tag{I.17}$$

Usando (I.14), as matrizes $\overset{\circ}{\tau}{}^\alpha$ podem ser escritas

$$\overset{\circ}{\tau}{}^{i} = \overset{\circ}{\sigma}{}^{i} \qquad , \qquad \overset{\circ}{\tau}{}^{0} = -\overset{\circ}{\sigma}{}^{0} \tag{I.18}$$

Um cálculo direto dá

$$\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha} \overset{\circ}{\tau}{}^{\beta} + \overset{\circ}{\sigma}{}^{\beta} \overset{\circ}{\tau}{}^{\alpha} = -2\,\eta^{\alpha\beta} \cdot \mathbb{1} \tag{I.19}$$

ou, tomando hermitiano conjugado de (I.19)

$$\overset{\circ}{\tau}{}^{\alpha} \overset{\circ}{\sigma}{}^{\beta} + \overset{\circ}{\tau}{}^{\beta} \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha} = -2\,\eta^{\alpha\beta} \cdot \mathbb{1}$$

e onde $\mathbb{1}$ é a identidade 2 x 2. Notar que os índices vetoriais de (I.14) são abaixados com $\eta_{\alpha\beta}$, por exemplo, $\overset{\circ}{\sigma}{}_{\alpha}^{A\dot{B}} = \eta_{\alpha\beta}\, \overset{\circ}{\sigma}{}^{\beta A\dot{B}}$.

Formando o produto simetrizado de $\sigma_\mu(x)$ com $\tau_\mu(x)$, usando (I.15), (I.16) e (I.19), obtemos:

$$\sigma_\mu(x)\ \tau_\nu(x) + \sigma_\nu(x)\ \tau_\mu(x) = -2\ h_{\mu(\alpha)}\ h_{\nu(\beta)}\eta^{\alpha\beta} \cdot \mathbb{1} \tag{I.20}$$

Interpretando $h_{\mu(\alpha)}(x)$ como um conjunto de tetradas, o produto simetrizado (I.20) tem todas as propriedades de um tensor métrico [34] e será interpretado desta maneira. Daí

$$\sigma_\mu(x)\ \tau_\nu(x) + \sigma_\nu(x)\ \tau_\mu(x) = -2\ g_{\mu\nu}(x) \cdot \mathbb{1} \tag{I.21}$$

$$g_{\mu\nu}(x) = h_{\mu(\alpha)}^{(x)}\ h_{\nu(\beta)}^{(x)}\ \eta^{\alpha\beta} \tag{I.22}$$

Usando (I.13) em (I.21) vemos que o campo métrico em um ponto fixo x^μ é o mesmo para todas as escolhas possíveis de referencial de spin. Os índices de tetradas (índices locais) são levantados e abaixados com $\eta^{\mu\nu}, \eta_{\mu\nu}$. Assim, por exemplo,

$$h_\mu{}^{(\alpha)}(x) = \eta^{\alpha\beta}\ h_{\mu(\beta)}(x); \qquad \overset{\circ}{\sigma}{}_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta}\ \overset{\circ}{\sigma}{}^{\beta}$$

As tetradas contravariantes $h^{\mu(\alpha)}(x)$ são definidas pelas relações

$$h^{\mu(\alpha)}\ h_{\nu(\alpha)} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$$

$$h^{\mu(\alpha)}\ h_{\mu(\beta)} = \delta^{(\alpha)}{}_{(\beta)}$$

o que é equivalente a definir as componentes do tensor métrico contravariante, desde que

$$\left.\begin{aligned} \sigma^{\mu}(x) &= h^{\mu(\alpha)}(x)\ \overset{\circ}{\sigma}_{\alpha} \\ \tau^{\mu}(x) &= h^{\mu(\alpha)}(x)\ \overset{\circ}{\tau}_{\alpha} \end{aligned}\right\} \qquad (I.23)$$

e

$$\sigma^{\mu}(x)\ \tau^{\nu}(x) + \sigma^{\nu}(x)\tau^{\mu}(x) = -\ 2\ g^{\mu\nu}(x) \cdot \mathbb{1} \qquad (I.24)$$

e pode-se mostrar daí que

$$g_{\mu\lambda}\ g^{\lambda\nu} = \delta_{\mu}{}^{\nu}$$

Notas: 1) A transformação (I.9) pode ser gerada dando-se aos eixos de tetradas uma rotação de Lorentz local conveniente- o que é claro pela relação (I.15). 2) Um dado campo de matrizes hermitianas de spin define de modo único o campo métrico por meio de (I.21). Usando (I.19), (I.21), (I.24) qualquer elemento da geometria métrica do espaço-tempo pode ser construido como função de $\sigma_{\mu}(x)$.

Devido ao fato de que as matrizes do grupo $SL_2(x)$ são funções das coordenadas, a derivada de um spinor não se transforma como um spinor. Então definimos um novo tipo de derivada

$$u^k_{\ ;\rho}(x) = u^k_{\ ,\rho}(x) + \Gamma_\rho(x)^k_{\ B}\, u^B(x)$$

que, sob o $SL_2(x)$ se transforma como um spinor

$$u'^k_{\ ;\rho}(x) = M^k_{\ L}(x)\, u^L_{\ ;\rho}(x)$$

Da lei de transformação acima, segue que $\Gamma_\rho(x)$ se transforma como

$$\Gamma'^{\ k}_{\rho\ L}(x) = M^{-1p}_{\ \ L}(M^k_{\ v}\, \Gamma_{\rho\ p}^{\ v} - M^{\ k}_{,\rho\ p})$$

Sob o MMG, $u_{;\rho}(x)$ se transforma como um covetor, o mesmo se verificando para $\Gamma_\rho(x)$. Denominamos $u_{;\rho}(x)$ derivada covariante do spinor $u(x)$ e $\Gamma_\rho(x)$ afinidade spinorial.

Impondo [34]

$$\sigma^{\mu\dot{}}_{Rk;\rho} = \sigma^{\mu\dot{}}_{Rk,\rho} + \{^{\ \mu}_{\alpha\rho}\}\, \sigma^{\alpha\dot{}}_{Rk} - \sigma^{\mu\dot{}}_{Lk}\Gamma_{\rho\ R}^{\ L} - \sigma^{\mu\dot{}}_{RL}\Gamma_{\rho\ \dot{k}}^{\ \dot{L}} = 0$$

(condição suficiente para $g_{\mu\nu;\rho} = 0$) e

$$\varepsilon^{kR}_{;\rho} = \Gamma_{\rho\ S}^{\ k}\, \varepsilon^{SR} + \Gamma_{\rho\ S}^{\ R}\, \varepsilon^{kS} = 0$$

achamos a seguinte expressão para Γ_ρ:

$$\Gamma_{\rho\ L}^{\ k} = -\frac{1}{4}\, \sigma_{\mu\ L\dot{R}} \left[\sigma^{\mu\ k\dot{R}}_{\ ,\rho} + \{^{\ \mu}_{\alpha\rho}\}\, \sigma^{\alpha\ k\dot{R}}\right]$$

A curvatura spinorial é definida por

$$u^A_{;\rho\sigma} - u^A_{;\sigma\rho} = P^A_{\rho\sigma\ B}\, u^B$$

$$P_{\rho\sigma\ B}^{\ \ A} = \Gamma^{A}_{\rho,\sigma\ B} - \Gamma^{\ A}_{\sigma,\rho\ B} - \Gamma_{\rho\ C}^{\ A}\, \Gamma_{\sigma\ B}^{\ C} + \Gamma_{\sigma\ C}^{\ A}\, \Gamma_{\rho\ B}^{\ C}$$

A relação entre curvatura spinorial e curvatura Riemanniana é obtida das relações

$$\sigma_{\mu;\alpha\beta} - \sigma_{\mu;\beta\alpha} = \sigma^{\lambda} R_{\lambda\mu\alpha\beta} - \sigma_{\mu} P_{\alpha\beta} - P^{+}_{\alpha\beta} \sigma_{\mu}$$

$$\tau_{\mu;\alpha\beta} - \tau_{\mu;\beta\alpha} = \tau^{\lambda} R_{\lambda\mu\alpha\beta} + P_{\alpha\beta} \tau_{\mu} + \tau_{\mu} P^{+}_{\alpha\beta}$$

e, usando que as derivadas covariantes das matrizes σ e τ são nulas, tiramos:

$$R_{\lambda\mu\alpha\beta} = \frac{1}{4} \mathrm{Tr}(P^{+}_{\lambda\mu}(\sigma_{\alpha} \tau_{\beta} - \sigma_{\beta} \tau_{\alpha}) + (\tau_{\beta} \sigma_{\alpha} - \tau_{\alpha} \sigma_{\beta}) P_{\lambda\mu})$$

$$P_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \tau^{\lambda} \sigma^{\mu} R_{\alpha\beta\lambda\mu}$$

2. *VARIÁVEIS DINÂMICAS CANÔNICAS NA FORMULAÇÃO SPINORIAL*

Analogamente ao tratamento da seção 3, vamos inicialmente obter o conjunto completo de D-invariantes que podemos formar a partir de $\sigma_{\mu}(x)$. Notar que o conceito de D-invariância está relacionado somente a propriedades de transformação com relação a transformações de coordenadas infinitesimais mas não a transformações de spin (rotação tetradas) que são transformações em um ponto fixo de espaço-tempo. Assim, a procura de D-invariantes associados a $\sigma_{\mu}(x)$ reduz-se à procura de D-invariantes associados a um co vetor V_{μ}. Aqui não faremos verificação explícita que as quantidades mencionadas são D-invariantes. (Ver referência 13 para maiores detalhes).

Assim, de σ_{μ} podemos formar os D-invariantes σ_{i}, σ_{L}

$$\sigma_{L} = \ell_{\mu} \sigma^{\mu} = \sigma_{L}{}^{+} \tag{I.25}$$

A variável σ_{0} não é D-invariante, exatamente como $g_{0\mu}$ não é D-invariante.

O papel destas variáveis são análogos em cada formalismo e mesmo o número total de componentes de cada uma é o mesmo (quatro funções reais). Também podemos definir os D-invariantes

$$\tau_i , \; \tau_L = \tau_\mu \, \ell^\mu$$

que são algebricamente dependentes de σ_i, σ_L. Aqui estamos usando as relações úteis

$$\sigma_L \; \tau_L = - 1$$

$$g^{oo} = | \; \sigma^o |$$

$$\sigma_L = \frac{\sigma^o}{|\sigma^o|}$$

onde $|\sigma^o|$ é o determinante da matriz σ^o. Notar que a equação (I.21) para $g_{\mu\nu}$ pode ser escrita

$$\sigma_\mu^{\;k\dot{M}} \; \tau_{\nu\dot{M}R} + \sigma_\nu^{\;k\dot{M}} \; \tau_{\mu\dot{M}R} = - 2 \; g_{\mu\nu} \; \delta^k_{\;R}$$

onde $\tau_{\nu\dot{M}R} = \varepsilon_{RP} \;\; \bar{\sigma}_\nu^{\;P\dot{k}} \; \varepsilon_{\dot{k}\dot{M}}$; então

$$g_{\mu\nu} = - \frac{1}{4} \, Tr(\sigma_\mu \tau_\nu + \sigma_\nu \; \tau_\mu) \tag{I.26}$$

ou

$$g_{\mu\nu} = - \frac{1}{4} \, (\sigma_\mu^{\;K\dot{M}} \; \tau_{\nu \; K\dot{M}} + \sigma_\nu^{\;K\dot{M}} \; \delta_{\mu\dot{M}K}) \tag{I.26}$$

e desde que as matrizes σ,τ são hermitianas

$$Tr(\sigma_\mu \; \tau_\nu \;) = Tr(\sigma_\nu \; \tau_\mu) \tag{I.27}$$

e, então, (I.26) toma a forma

$$g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} Tr(\sigma_\mu \quad \tau_\nu) \qquad (I.28)$$

Com as matrizes $\sigma^\mu(x)$ podemos construir D-invariantes tomando certas combi nações de suas componentes. Isto é feito utilizando-se os projetores

$$Q^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta - \ell^\alpha \ell_\beta$$

e obtemos

$$\tilde{\sigma}^\mu = Q^\mu{}_\alpha \sigma^\alpha = \begin{cases} \tilde{\sigma}^o = 0 \\ \sigma^i = \sigma^i - \ell^i \sigma_L \end{cases} \qquad (I.29)$$

Analogamente podemos definir expressões como

$$\Lambda^{\mu\nu} = Q^\mu{}_\alpha \quad Q^\nu{}_\beta \sigma^\alpha \tau^\beta = \tilde{\sigma}^\alpha \tilde{\tau}^\beta \qquad (I.30)$$

em qualquer ordem em σ^μ. Em particular (I.29) nos dá

$$\Lambda^{o\mu} = 0$$

$$\Lambda^{ij} = \sigma^i \tau^j - \ell^j \sigma^i \tau_L - \ell^i \sigma_L \tau^j - \ell^i \ell^j$$

Simetrizando em (ij) e usando que

$$\sigma_L \tau^j + \sigma^j \tau_L = -2 \ell^j \mathbb{1} \qquad (I.31)$$

$$\tau^j \sigma_L + \tau_L \sigma^j = -2 \ell^j \cdot \mathbb{1} \qquad (I.32)$$

obtemos

$$\Lambda^{(ij)} = \tilde{\sigma}^{(i} \tilde{\tau}^{j)} = -2 (g^{ij} - \ell^i \ell^j) \cdot \mathbb{1} = -2 e^{ij} \cdot \mathbb{1} \quad (I.32)$$

Agora vamos tratar o problema da determinação das variáveis canônicas para o campo gravitacional na formulação spinorial.

Usando (I.26), escrevemos os $g_{\mu\nu}(x)$ em $\mathcal{L}_D$ como função das matrizes de spin. Com esta substituição, $\mathcal{L}_D$ se torna uma função de $\sigma_\mu(x)$, $\sigma_{\mu,i}(x)$ e das *velocidades* de spin $\dot{\sigma}_\mu(x) \equiv \sigma_{\mu,o}(x)$. Por isso, podemos calcular os momenta conjugados a $\sigma_\mu(x)$

$$\pi^\mu_{K\dot{M}}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \sigma^{K\dot{M}}_{\mu,o}(x)} \tag{I.33}$$

ou

$$\pi^\mu_{K\dot{M}} = \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial g_{\rho\sigma,o}} \frac{\partial g_{\rho\sigma,o}}{\partial \sigma^{K\dot{M}}_{\mu,o}} = P^{\rho\sigma} \frac{\partial g_{\rho\sigma,o}}{\partial \sigma^{K\dot{M}}_{\mu,o}}$$

Um cálculo direto, usando (I.26) ou (I.28) dá

$$\frac{\partial g_{\rho\sigma,o}}{\partial \sigma^{K\dot{M}}_{\mu,o}} = -\frac{1}{2}\left(\delta^\mu_\rho \tau_{\sigma\dot{M}K} + \delta^\mu{}_\sigma \tau_{\rho\dot{M}K}\right) \tag{I.34}$$

e, usando a simetria de P^{ij} obtemos

$$\pi^\mu_{K\dot{M}} = -P^{\mu\alpha} \tau_{\alpha K\dot{M}} \tag{I.35}$$

ou

$$\pi^\mu = -P^{\mu\nu} \tau_\nu \tag{I.35}$$

o vínculo primário $P^{o\mu} = 0$ implica

$$\pi^o_{K\dot{M}} = 0$$

que é também um vínculo primário. Por isso, a equação (I.35) se reduz a

$$\left.\begin{aligned} \pi^i &= - P^{ij}\,\tau_j \\ \pi^{i+} &= \pi^i \end{aligned}\right\} \qquad (I.36)$$

Os momenta π^i são D-invariantes, desde que P^{ij} e τ_j são D-invariantes. Temos doze variáveis σ_i e doze variáveis π^i; mais tarde iremos mostrar que nós temos seis vínculos primários relacionando estas vinte e quatro variáveis canônicas, em cada ponto do espaço-tempo. Ou em termos de variáveis reais

$$\sigma_i = h_i{}^{(\alpha)}\,\overset{\circ}{\sigma}_\alpha$$

$$\pi^i = - P^{ij}\,h_j{}^{(\alpha)}\,\overset{\circ}{\sigma}_\alpha = \chi^{i(\alpha)}\,\overset{\circ}{\sigma}_\alpha$$

e $(h_i{}^{(\alpha)}, \chi^{i(\alpha)})$ representam vinte e quatro funções reais das coordenadas.

Podemos também definir a variável

$$\lambda^i = \frac{\partial \mathscr{L}_D}{\partial \tau_{i,o}} = - P^{ij}\,\sigma_j = \varepsilon\,\bar{\pi}^i\,\varepsilon \qquad (I.37)$$

que é algebricamente dependente do conjunto $\pi^i{}_{K\dot{M}}$.

Já sabemos que as σ_i são suficientes para determinar as componentes espaciais da métrica, que representam metade das variáveis dinâmicas da teoria de Dirac. Vamos agora verificar se o conhecimento de π^i é suficiente para a determinação dos momenta de Dirac P^{ij}. Invertendo (I.36) obtemos:

$$P^{i\ell} = \frac{1}{2}\,e^{k\ell}\,Tr(\pi^i\,\sigma_k) \qquad (I.38)$$

$$e^{k\ell}\,Tr(\pi^i\,\sigma_k) - e^{ki}\,Tr(\pi^\ell\,\sigma_k) = 0 \qquad (I.39)$$

a relação (I.39) sendo imposta de modo que $P^{i\ell}$ em (I.38) seja simétrico. e^{ki} é dado em termos das variáveis de spin por (I.32). Assim vemos que o conhecimento de (σ_i, π^i) é suficiente para a determinação de (g_{ij}, P^{ij}) por meio de (I.26) e (I.38). Mais tarde aparecerão seis vínculos primários de spin e também seis condições para fixar o referencial de spin. Isto nos deixa doze componentes independentes no conjunto (σ_i, π^i) que nos permite interpretar o conjunto de D-invariantes (σ_i, π^i) como as variáveis dinâmicas para o campo gravitacional na teoria spinorial.

3. *A HAMILTONIANA E OS VÍNCULOS PRIMÁRIOS DE SPIN*

Um exame da relação (I.36) mostra que π^i contém somente seis componentes independentes, i.é, dadas $\sigma_i(x)$, os momenta $\pi^i(x)$ contém adicionalmente só os P^{ij} que representam apenas seis funções reais. Por isso, seis componentes de π^i são eliminadas pela definição (I. 33). A razão é a seguinte: $\mathcal{L}_D$ é invariante sob o $SL_2(x)$ porque todas as matrizes de spin aparecem em $\mathcal{L}_D$ somente através das combinações g_{ij}, $g_{ij,o}$ e $g_{ij,r}$ [33] que são invariantes sób o $SL_2(x)$ - o que implica que algumas componentes de π^i se anulam (conferir apêndice III onde a Lagrangeana gauge-invariante do campo eletromagnético implica que $\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = 0$). O número seis está relacionado ao fato que as transformações de spin contem seis parâmetros locais reais (funções) e então teremos tantos vínculos primários quantos parâmetros na transformação associada. Realmente vamos provar mais tarde que os vínculos primários de spin são os geradores via PP das transformações do $SL_2(x)$.

Vamos apresentar uma decomposição de π^i que mostra explicitamente suas doze componentes reais..

$$\pi^i = -P^{ik}\,\tau_k + \alpha^{[ik]}\,\tau_k + \beta^i\,\tau_L \qquad \text{(I.40)}$$

A hermiticidade de π^i e de τ_k e τ_L garante que as variáveis P^{ik}, $\alpha^{[ik]}$ e β^i são todas reais. Resolvendo para os coeficientes

$$\beta^i = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\sigma_L\,\pi^i) \qquad \text{(I.41)}$$

$$\alpha^{[ik]} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(\sigma^i\,\pi^k - \sigma^k\,\pi^i) \qquad \text{(I.42)}$$

onde $\sigma^i = e^{ik}\,\sigma_k$. Comparando (I.40) com (I.36) obtemos que os seis vínculos primários de spin devem ser equivalentes às condições

$$\beta^i = 0 \qquad \text{(I.42)}$$

$$\alpha^{[ik]} = 0 \qquad \text{(I.43)}$$

e estes vínculos são inteiramente dados em termos do conjunto de variáveis canônicas (σ_i, π^i) e são D-invariantes, como era de se esperar.

Nota: Os vínculos primários de spin eliminam seis das doze componentes de π^i. Entretanto nós temos ainda doze componentes reais em σ_i. Esta assimetria tem um paralelo na teoria de Dirac (seção 3) onde nós vimos que a invariância da densidade de Lagrangeana sob o MMG tem o efeito de eliminar quatro componentes $P^{o\mu}$ das dez componentes iniciais $P^{\mu\nu}$; ficamos então com seis momenta P^{ij} e dez variáveis $g_{\mu\nu}$. Escolhendo um sistema de coordenadas, eliminamos as componentes $g_{o\mu}$ que não são D-invariantes e is to reduz o número de variáveis de campo para seis P^{ij} e seis g_{ij}. Um procedimento análogo deve eliminar seis componentes de σ_i, fixando-se um certo referencial de spin ou, pelo menos, uma classe restrita de referenciais de spin. A situação é um pouco diferente nos dois casos desde que as doze componentes de σ_i são D-invariantes e portanto variáveis físicas. Em resumo, ficamos com uma situação equivalente à teoria tensorial de Dirac, com as variáveis canônicas de campo (σ_i, π^i) reduzidas a doze componentes independentes a menos dos vínculos hamitonianos.

Vamos agora passar à determinação da forma spinorial da hamiltoniana. Para isto, vamos derivar algumas relações entre as variáveis canônicas de Dirac e as variáveis spinoriais. Estas relações podem ser obtidas usando-se os resultados anteriores e são, sôbre a hipersuperfície de vínculos de spin (I.42), (I.43):

$$\left.\begin{aligned}
&P_{ij}\, P^{ij} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\lambda^i\, \pi_i) \\
&P_{ij} = g_{i\ell}\, g_{jm}\, P^{\ell m}; \qquad \pi_i = g_{ij}\, \pi^j \\
&P^{ij}\, g_{i\ell} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\pi^i\, \sigma_\ell) \\
&P^{ij}\, g_{ij,r} = \mathrm{Tr}(\pi^i\, \sigma_{i,r}) \\
&g_{\ell i,r} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\tau_i\, \sigma_{\ell,r} + \tau_\ell\, \sigma_{i,r})
\end{aligned}\right\} \qquad (I.44)$$

Isto nos dá

$$\mathscr{H}_r = Tr(\pi^i \, f_{ir} - \pi^i{}_{,i} \, \sigma_r) \tag{I.45}$$

onde

$$f_{ir} = \sigma_{i,r} - \sigma_{r,i} \tag{I.46}$$

Notar que $\mathscr{H}_r = g_{rs} \mathscr{H}^s$ é o vínculo Hamiltoniano transversal dado por (3.19). Analogamente usando (I.44) em (3.20) obtemos

$$\mathscr{H}_L = - \frac{1}{2\sqrt{-\gamma}} \left\{ Tr(\lambda^i \, \pi_i) + \frac{1}{4} Tr(\pi^i \sigma_i) \, Tr(\pi^j \sigma_j) \right\} +$$

$$+ \sqrt{-\gamma} \;\; e^{rs} \;\; {}^3R_{rs} \tag{I.47}$$

onde

$$\gamma = - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \varepsilon^{mnr} \varepsilon^{ijk} \tau_{iK\dot{M}} \, \tau_{jS\dot{P}} \, \tau_{kV\dot{R}} \, \sigma_m{}^{\dot{M}K} \, \sigma_n{}^{\dot{P}S} \, \sigma_r{}^{\dot{R}V}$$

e onde ε^{ijk} é o símbolo de permutação definido +1 para a ordem 123. Para escrever ${}^3R_{rs}$ em termos das variáveis de spin, usamos a expressão do símbolo de Christoffel 3-dimensional

$$\Gamma^{\ell}_{ij} = - \frac{1}{4} e^{\ell k} \, Tr(\tau_i \, f_{kj} + \tau_k \, S_{ij} + \tau_j \, f_{ki})$$

onde $S_{ij} = \sigma_{i,j} + \sigma_{j,i}$ e f_{ir} dado por (I.46) e substituímos em

$${}^3R_{rs} = (\Gamma^{\ell}_{rs})_{,\ell} - (\Gamma^{\ell}_{r\ell})_{,s} + \Gamma^{\ell}_{rs} \, \Gamma^{v}_{\ell v} - \Gamma^{v}_{r\ell} \, \Gamma^{\ell}_{sv}$$

Usando que

$$g_{or} \, e^{rs} = - (g^{oo})^{-1} \, g^{os}$$

podemos escrever a densidade hamiltoniana de Dirac como

$$\mathcal{H} = \ell_0(\mathcal{H}_L - \ell^s\ \mathcal{H}_s) \qquad (I.48)$$

onde ℓ_0 e ℓ^s são convenientemente escrito em termos das variáveis de spin σ_μ.

Cálculos análogos poderiam ser feitos para pontos fora da hipersuperfície de vínculos de spin. Escrevemos

$$\tilde{\pi}^i = \pi^i + \alpha^{[ik]}\ \tau_k + \beta^i\ \tau_L$$

onde $\pi^i = - P^{ij}\ \tau_j$ é o valor de $\tilde{\pi}^i$ sôbre a hipersuperfície. Usando em (I.44) a expressão

$$\pi^i = \tilde{\pi}^i - \alpha^{[ik]}\ \tau_k = \beta^i\ \ \tau_L \qquad (I.49)$$

poderíamos reescrever todas as relações para qualquer ponto do espaço de fase e que para

$$\alpha^{[ik]} = 0$$

$$\beta^i = 0$$

coincidem com as relações anteriores sôbre a hipersuperfície de vínculos de spin.

Substituindo (I.49) em (I.45) e (I.47) vemos facilmente que

$$\mathcal{H}_\ell = Tr(\tilde{\pi}^i\ f_{i\ell} - \tilde{\pi}^i{}_{,i}\ \sigma_\ell) \quad + \text{combinação linear dos vínculos primários de spin} \qquad (I.50)$$

$$\mathcal{H}_L = - \frac{}{2\sqrt{-\gamma}}\{\ Tr(\tilde{\lambda}^i\ \tilde{\pi}_i) + \frac{1}{4}\ Tr(\tilde{\pi}^i\sigma_i)Tr(\tilde{\pi}^j\sigma_j)\} + \sqrt{-\gamma}\ \ e^{rs}\ {}^3R_{rs} \quad + \text{combinação linear de termos quadráticos nos vínculos primários de spin} \qquad (I.51)$$

onde os coeficientes da combinação linear são funções das variáveis canônicas σ_i. Denotando os momenta, mesmo fora da hipersuperfície de vínculos de spin por π^i, temos

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \qquad + \text{ combinação linear do termos contendo vínculos de spin} \tag{I.52}$$

onde $\mathcal{H}$ é dado formalmente por (I.48). $\tilde{\mathcal{H}}$ se anula fracamente, no sentido de Dirac, e será então usada como hamiltoniana. *Nota:* $\mathcal{H}$ contem coeficientes arbitrários que serão fixados pelas condições de coordenadas. Os coeficientes da restante combinação linear serão fixados por condições de spin.

Com o espaço de fase da teoria descrito por $(\sigma_i^{A\dot{B}}(x), \pi^i_{A\dot{B}}(x))$ definimos os PP entre dois funcionais das variáveis dinâmicas sôbre a mesma hipersuperfície tipo espaço $x^0 = $ cte. como

$$[A\{\sigma,\pi\}, B\{\sigma,\pi\}] \equiv \int_{x^0} d^3x \left(\frac{\delta A}{\delta\sigma_i^{K\dot{M}}(x)} \frac{\delta B}{\delta\pi^i_{K\dot{M}}(x)} - \frac{\delta B}{\delta\sigma_i^{K\dot{M}}(x)} \frac{\delta A}{\delta\pi^i_{K\dot{M}}(x)} \right) \tag{I.53}$$

onde $\frac{\delta A}{\delta\sigma_i^{K\dot{M}}(x)}$ é a derivada funcional de A em relação a $\sigma_i^{K\dot{M}}(x)$ e onde A sempre pode ser posto na forma $A = \int_{x^0} d^3x \, a(\sigma(x), \pi(x))$. Em particular, notar que

$$\delta\sigma_i^{K\dot{M}}(x') = \int_{x^0} d^3x \; \delta_i^{\,j} \, \delta^k_{\,A} \, \delta^{\dot{M}}_{\,\dot{B}} \, \delta(\vec{x}'-\vec{x}) \, \delta\sigma_j^{A\dot{B}}(x) \tag{I.53}$$

e daí tiramos que

$$\left. \frac{\delta\sigma_i^{K\dot{M}}(x')}{\delta\sigma_j^{A\dot{B}}(x)} \right|_{x^0 = x'^0} = \delta(\vec{x}'-\vec{x}) \, \delta_i^{\,j} \, \delta^k_{\,A} \, \delta^{\dot{M}}_{\,\dot{B}} \tag{I.54}$$

Os parêntesis de Poisson entre as variáveis fundamentais podem ser calculados diretamente, a partir de (I.53) e usando (I.54)

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\sigma_i^{\;K\dot{M}}(x),\ \sigma_j^{\;R\dot{S}}(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0\\
&\left[\pi^i_{\;R\dot{S}}(x),\ \pi^j_{\;k\dot{M}}(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0\\
&\left[\sigma_i^{\;K\dot{M}}(x),\ \pi^j_{\;R\dot{S}}(x')\right]_{x^0=x'^0} = \delta_i^{\;j}\ \delta^k_{\;R}\ \delta^{\dot{M}}_{\;S}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}')
\end{aligned}\right\} \qquad (I.55)$$

A última relação (I.55) pode ser escrita

$$\left[\sigma_i^{\;K\dot{M}}(x),\ \pi^{j\;L\dot{N}}(x')\right]_{x^0=x'^0} = \delta_i^{\;j}\ \varepsilon^{kL}\ \varepsilon^{\dot{M}\dot{N}}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

multiplicando-se ambos os lados de (I.55) pelas matrizes constantes ε^{RL}, $\varepsilon^{\dot{S}\dot{N}}$. As equações de movimento são

$$\frac{dA}{dx^0}\{\sigma,\pi\} = [A\{\sigma,\pi\},\ \tilde{H}] \qquad (I.56)$$

onde

$$\tilde{H}(x^0) = \int_{x^0} \tilde{\mathcal{H}}(x)\ d^3x$$

e $\tilde{\mathcal{H}}$ dado por (I.52).

Análogo ao caso tensorial, $\mathcal{H}_L$ e $\mathcal{H}_r$ geram sôbre as variáveis σ_i, π^i transformações infinitesimais de coordenadas, normal e tangencial à hipersuperfície, respectivamente. Por exemplo,

$$A(x^0) = \int_{x^0} \xi^r(x) \mathcal{H}_r(x) d^3x = \int_{x^0} \xi^r(x) \left[\pi^i{}_{R\dot{S}} (\sigma_{i;r}{}^{R\dot{S}} - \sigma_{r,i}{}^{R\dot{S}}) - \pi^i{}_{,i}{}_{R\dot{S}} \cdot \sigma_r{}^{R\dot{S}} \right] d^3x$$

onde $\xi^r(x)$ função infinitesimal arbitrária, gera sôbre σ_i as variações

$$\delta\sigma_j{}^{A\dot{B}}(x) = \left[\sigma_j{}^{A\dot{B}}(x), A(x^0) \right] = - \xi^r{}_{,j}\, \sigma_r + \xi^r\, \sigma_{j,r}$$

que é a variação de σ_j sob uma transformação infinitesimal $x'^r = x^r + \xi^r(x)$.

Vamos agora examinar o significado dos vínculos primários de spin como geradores. Para isso, inicialmente, consideremos as matrizes

$$M_{ij} = \pi^\ell (\sigma_i\, \tau_j - \sigma_j\, \tau_i) \sigma_\ell + \sigma_\ell (\tau_j\, \sigma_i - \tau_i\, \sigma_j) \pi^\ell \tag{I.57}$$

e

$$N_i = \pi^\ell\, \sigma_L\, \tau_i\, \sigma_\ell + \sigma_\ell\, \tau_i\, \sigma_L\, \pi^\ell \tag{I.58}$$

Um cálculo direto mostra que

$$\mathrm{Tr}\, N_i = 4\, g_{i\ell}\, \beta^\ell \tag{I.59}$$

$$\mathrm{Tr}\, M_{ij} = 4\, g_{im}\, g_{jn}\, \alpha^{[mn]} \tag{I.60}$$

onde β^ℓ e $\alpha^{[mn]}$ são os vínculos primários de spin. Assim estes vínculos podem ser apresentados na forma

$$B_i = \mathrm{Tr}\, N_i = 0 \tag{I.61}$$

$$A_{ij} = \mathrm{Tr}\, M_{ij} = 0 \tag{I.62}$$

Seja um funcional de σ_i, π^i, notado por $G\,\{\sigma,\pi\}$, que gera as transformações de spin consideradas, i.e.,

$$\delta\, \sigma_k{}^{k\dot{M}}(x) = \left[\sigma_k{}^{k\dot{M}}(x),\ G\{\sigma,\pi\}\right] \tag{I.63}$$

Dos PP (I.55) segue G $\{\sigma,\pi\}$ deve conter um termo da forma

$$G\ \{\sigma,\pi\} = \int_{x^0} d^3x'\ \pi^k{}_{k\dot{M}}(x')\ \delta\ \sigma_k{}^{k\dot{M}}(x') \tag{I.64}$$

A transformação infinitesimal de spin é dada por (I.9) tomando

$$M = 1 + V$$

onde V é uma matriz infinitesimal tal que Tr V = 0 de modo a determinante de M ser igual a +1. Uma matriz satisfazendo esta propriedade é dada por

$$V = \varepsilon^{ijk}\ \lambda_k(\sigma_i\ \tau_j - \sigma_j\ \tau_i) + \omega^i\ \sigma_L\ \tau_i \tag{I.65}$$

onde λ_k e ω^i são seis parâmetros locais reais, infinitesimais, funções arbitrárias das coordenadas. V não é hermitiano, o que é óbvio, e sua hermitiana conjugada é

$$V^+ = \varepsilon^{ijk}\ \lambda_k(\tau_j\ \sigma_i - \tau_i\ \sigma_j) + \omega^i\ \tau_i\ \sigma_L \tag{I.66}$$

Usando (I.27), notar que

$$\mathrm{Tr}(\sigma_L\ \tau_i) = 0$$

$$\mathrm{Tr}(\tau_j\ \sigma_i - \tau_i\ \sigma_j) = 0$$

que garantem o anulamento do traço de V, são relações covariantes com relação a transformações de coordenadas arbitrárias e a transformações do $SL_2(x)$. Covariante em relação ao $SL_2(x)$ pode ser visto trivialmente usando (I.13) e a propriedade do traço ser comutativo. Covariante com relação a transformações de coordenadas: consideremos uma transformação de coordenadas infinitesimal arbitrária $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$; retendo somente termos até primeira ordem em ξ^{μ} .

$$\begin{pmatrix} \sigma'_i \\ \tau'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_i \\ \tau_i \end{pmatrix} - \xi^{\alpha}_{\ ,i} \begin{pmatrix} \sigma_\alpha \\ \tau_\alpha \end{pmatrix}$$

e

$$\sigma'_L(x') = \sigma_L(x) + \frac{1}{\sqrt{g^{00}}} e^{\mu\nu} \sigma_\mu \xi^{0}_{\ ,\nu}$$

e então

$$Tr(\sigma'_L \tau'_L) = Tr(\sigma_L \tau_i) - \xi^{j}_{\ ,i} Tr(\sigma_L \tau_j)$$

$$Tr(\sigma'_i \tau'_j - \sigma'_j \tau'_i) = Tr(\sigma_i \tau_j - \sigma_j \tau_i) - \xi^{k}_{\ ,i} Tr(\sigma_k \tau_j - \sigma_j \tau_k) +$$

$$+ \xi^{k}_{\ ,j} Tr(\sigma_k \tau_i - \sigma_i \tau_k)$$

Então $M = 1 + V$, com V dado por (I.65), pertence a $SL_2(x)$ para qualquer sistema de coordenadas e/ou sistema de spin e então V define M consistentemente.

Voltando ao problema de construir o gerador G $\{\sigma,\pi\}$ notamos que sob a ação de $M = 1 + V$, as componentes de σ_i se transformam

$$\sigma'_i = (1+V)\ \sigma_i (1+V^{+}) = \sigma_i + V\ \sigma_i + \sigma_i\ V^{+}$$

ou

$$\delta\ \sigma_i^{\ k\dot{M}} = (V^{k}_{\ S}\ \sigma_i^{\ S\dot{M}} + \sigma_i^{\ k\dot{P}}\ V^{\dot{M}}_{\ \dot{P}}) = (V^{k}_{\ S}\ \delta^{\dot{M}}_{\ \dot{P}} + V^{\dot{M}}_{\ \dot{P}}\ \delta^{k}_{\ s})\sigma_i^{\ S\dot{P}}$$

Usando V dado por (I.65) obtemos:

$$\delta\ \sigma_\ell^{\ k\dot{M}} = \varepsilon^{ijk} \lambda_k \left[\delta^{\dot{M}}_{\ \dot{P}}(\sigma_i\tau_j - \sigma_j\tau_i)^{k}_{\ S}\ \sigma_\ell^{\ S\dot{P}} + \delta^{k}_{\ S}(\tau_j\sigma_i - \tau_i\sigma_j)^{\dot{M}}_{\ \dot{P}}\ \sigma_\ell^{\ S\dot{P}}\right] +$$

$$+ \omega^{i} \left[\delta^{\dot{M}}_{\ \dot{P}}\ (\sigma_L\ \tau_i)^{k}_{\ S} + \delta^{k}_{\ S}(\tau_i\ \sigma_L)^{\dot{M}}_{\ \dot{P}}\right] \sigma_\ell^{\ S\dot{P}} \qquad (I.67)$$

Substituindo (I.67) em (I.64) teremos

$$G = \int_{x^0} d^3x \, \varepsilon^{ijk} \lambda_k A_{ij} + \int_{x^0} d^3x \, \omega^i B_i \qquad , \qquad (I.68)$$

onde A_{ij} e B_i são as expressões dos vínculos primários de spin, dados por (I.61) e (I.62).

As dez densidades de geradores $\mathcal{H}_L$, $\mathcal{H}_r$, B_i, A_{ij} são todas de primeira classe entre si e a Hamiltoniana $\tilde{\mathcal{H}}$ é uma combinação linear de todos os dez geradores do grupo de invariância da teoria, o que era de se esperar.

APÊNDICE II

FIXAÇÃO DO SISTEMA DE REFERÊNCIA DE SPIN

Seja um campo de tetradas $h_{\mu(\alpha)}(x)$ dado sôbre o espaço tempo, tal que a componente $h_{\mu(o)}(x)$ seja do tipo tempo e as outras $h_{\mu(i)}(x)$ sejam do tipo espaço. Com elas podemos construir a métrica do espaço-tempo de acôrdo com

$$g_{\mu\nu}(x) = h_{\mu(\alpha)}(x)\, h_{\nu}^{(\alpha)}(x) \tag{II.1}$$

onde

$$h_{\mu}^{(\alpha)}(x) = \eta^{\alpha\beta}\, h_{\mu(\beta)}(x) \tag{II.2}$$

Agora, sabemos que numa variedade sôbre uma família de hipersuperfície tipo espaço, podemos construir um sistema de coordenadas normais de Gauss, caracterizado por

$$g_{oo} = h_{o(\alpha)}\, h_{o}^{(\alpha)} = 1 \tag{II.3}$$

$$g_{oi} = h_{o(\alpha)}\, h_{i}^{(\alpha)} = h_{i(\alpha)}\, h_{o}^{(\alpha)} = 0 \tag{II.4}$$

O uso do sistema de coordenadas normais de Gauss é mera conveniência desde que ele é consistente com as condições de coordenadas (4.19) na aproximação linear (de fato, decorre de (4.19)). É importante notar que, no caso tensorial, $h_{o\mu} = 0$ (ou $g_{o\mu} = \delta_{o\mu}$) são condições (redundantes) do tipo -c enquanto que, no caso da versão spinorial, elas são condições do tipo -q (relativas a graus internos) e portanto incluídas na álgebra dos PD (cf. (5.31) e as definições de PP para ambos os casos).

Da condição (II.13)

$$-(h_{o(1)})^2 - (h_{o(2)})^2 - (h_{o(3)})^2 + (h_{o(o)})^2 = 1$$

tiramos

$$h_{o(o)} = 1; \qquad h_{o(i)} = 0 \qquad \text{(II.5)}^{*}$$

e, usando (II.5) em (II.4) obtemos

$$h_{i(o)} = 0 \qquad \text{(II.6)}$$

que é equivalente a (II.5).

Assim o campo de tetradas com uma componente tipo-tempo e as outras do tipo-espaço assume a forma:

$$h_{\mu(\alpha)}(x) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & h_{i(j)} \end{array}\right) \qquad \text{(II.7)}$$

com nove componentes independentes, as outras estando fixadas por (II.6) e pelo sistema de coordenadas usado.

Dadas estas componentes, ainda existem arbitrariedades devidas à possibilidade de transformações de Lorentz locais

$$h'_{\mu(\alpha)}(x) = L^{(\beta)}{}_{(\alpha)}(x)\, h_{\mu(\beta)}(x)$$

que não alteram a métrica no ponto, desde que $L^{(\beta)}{}_{(\alpha)}(x)$ obedece

---

* De fato, (II.15) é mais forte que (II.13) e inclui a condição que $h_{\mu(o)}$ tenha a direção da normal à hipersuperfície tipo-espaço x^o= cte. naquele ponto (cf. (3.1)).

$$L^{(\alpha)}{}_{(\beta)}\, \eta_{\alpha\lambda}\, L^{(\lambda)}{}_{(\gamma)} = \eta_{\beta\gamma} \tag{II.8}$$

Para impedir estas arbitrariedades de rotações vamos fixar os eixos das tetradas. Fixar os eixos significa impor condições sôbre $h_{\mu(\alpha)}$ tal que os parâmetros das transformações de Lorentz que deixam invariantes estas condições são identicamente nulos. Consideremos uma transformação de Lorentz local infinitesimal

$$L^{(\alpha)}{}_{(\beta)}(x) = \delta^{(\alpha)}{}_{(\beta)} + \varepsilon^{(\alpha)}{}_{(\beta)}(x) \tag{II.9}$$

tal que $\eta_{\alpha\lambda}\ \varepsilon^{(\lambda)}{}_{(\beta)}(x) = -\ \eta_{\beta\lambda}\ \varepsilon^{(\lambda)}{}_{(\alpha)}(x)$ por (II.8), portanto seis parâmetros infinitesimais locais. Sob (II.9) $h_{\mu(\alpha)}(x)$ se transforma como

$$h'_{\mu(\alpha)}(x) = h_{\mu(\alpha)}(x) + \varepsilon^{(\beta)}{}_{(\alpha)}\ h_{\mu(\beta)} \tag{II.10}$$

Para $\mu = \alpha = 0$, usando (II.5),

$$h'_{o(o)} = h_{o(o)} + \varepsilon^{(\beta)}{}_{(o)}\ h_{o(\beta)} = 1 + \varepsilon^{(o)}{}_{(o)}\ h_{o(o)}$$

Desde que $h'_{o(o)} = 1$ para manter o SC usado, temos

$$\varepsilon^{(o)}{}_{(o)} = 0 \tag{II.11}$$

o que não traz nenhuma condição nova, desde que $\varepsilon_{(\alpha)(\beta)}$ é anti-simétrico. Para $\mu = i$, $\alpha = 0$ temos

$$h'_{i(o)} = h_{i(o)} + \varepsilon^{(\beta)}{}_{(o)}\ h_{i(\beta)} = \varepsilon^{j}{}_{(o)}\ h_{i(j)} = 0$$

para manter (II.16). Daí temos

$$\varepsilon^{(j)}{}_{(o)} = -\ \varepsilon^{(o)}{}_{(j)} = 0 \tag{II.12}$$

Desta forma, (II.16) elimina três graus de liberdade, associados a rotações em relação a x^o.

Restam três graus de liberdade a fixar (as rotações espaciais) associados às componentes puramente espaciais das tetradas: para $\mu = i$, $\alpha = j$

$$h'_{i(j)} = h_{i(j)} + \varepsilon^{(k)}{}_{(j)}\, h_{i(k)} \qquad \text{(II.13)}$$

Temos que impor três condições. Algumas escolhas possíveis são:

$$\left.\begin{array}{l|l|l} h_{1(1)} = -1 & h_{2(1)} = 0 & h_{1(2)} = 0 \\ h_{2(2)} = -1 & h_{3(1)} = 0 & h_{1(3)} = 0 \\ h_{3(3)} = -1 & h_{3(2)} = 0 & h_{2(3)} = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(II.14)}$$

Todas implicam, por (II.13), $\varepsilon_{(i)(j)} = 0$, sem nenhuma restrição sôbre $g_{ij}(x)$. De modo geral, as condições de spin são lineares nas tetradas.

Vamos agora introduzir spinores e usar a aproximação linear. Assim

$$\sigma_\mu^{A\dot{B}}(x) = h_{\mu(\alpha)}(x)\, \overset{o}{\sigma}{}^{\alpha A\dot{B}} = \overset{o}{\sigma}{}^{\mu\, A\dot{B}} + \Sigma_\mu^{A\dot{B}}(x) \qquad \text{(II.15)}$$

Usando

$$h_{\mu(\alpha)}(x) = \eta_{\mu\alpha} + \overset{(1)}{\Theta}_{\mu\,(\alpha)}(x) \qquad \text{(II.16)}$$

e substituindo em (II.15) obtemos

$$\overset{(1)}{\Theta}_{\mu(\alpha)}(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\Sigma_\mu(x)\ \tau_\alpha) \qquad \text{(II.17)}$$

Desde que as condições de spin (II.14) para a aproximação linear são lineares em $\overset{(1)}{\Theta}_{\mu(\alpha)}(x)$, escolhemos três condições $\mathcal{F}_i(\Sigma)$, lineares em $\Sigma_i{}^{A\dot{B}}(x)$, independentes de $\Sigma_o{}^{A\dot{B}}(x)$ e reais (pq. campo de tetradas é real). Assim tomamos

$$\mathcal{F}_i(\Sigma) = \alpha_{imn} \overset{\circ}{\tau}_{n\,A\dot{B}} \Sigma_m^{A\dot{B}}(x) = -2\alpha_{imn} \overset{(1)}{\Theta}{}_{m(n)}^{(x)} \qquad \text{(II.18)}$$

onde α_{imn} são constantes reais arbitrárias. As condições de spin podem ser escritas, então,

$$\mathcal{F}_i(\Sigma) = \alpha_{imn} \overset{\circ}{\tau}_{n\,A\dot{B}} \Sigma_m^{A\dot{B}}(x) = 0 \qquad \text{(II.19)}$$

Vamos determinar agora algumas simetrias das constantes α_{imn}. Isto é obtido exigindo-se que (II.19) fixe realmente o sistema de referência de spin.

Usando (II.13), (II.15) (II.16) obtemos, em primeira ordem,

$$\overset{(1)}{\Theta}{}'_{i(j)} = \overset{(1)}{\Theta}{}_{i(j)} + \varepsilon_{(i)(j)} \qquad \text{(II.20)}$$

ou

$$\alpha_{\ell mn} \overset{(1)}{\Theta}{}'_{m(n)} = \alpha_{\ell mn} \overset{(1)}{\Theta}{}_{m(n)} + \alpha_{\ell mn}\, \varepsilon_{(m)(n)} \qquad \text{(II.21)}$$

As condições de spin $\mathcal{F}'_i(\Sigma'(x)) = \mathcal{F}_i(\Sigma(x)) = 0$ nos dão

$$\alpha_{\ell mn}\, \varepsilon_{(m)(n)} = 0 \qquad \text{(II.22)}$$

e então fica evidente que $\mathcal{F}_i(\Sigma)$ somente fixam os eixos de tetradas se, pelo menos, $\alpha_{\ell mn}$ for anti-simétrico em (m,n), o que nos dá

$$\varepsilon_{(m)(n)} = 0$$

Assim

$$\mathcal{F}_i(\Sigma) = \alpha_{i[mn]} \overset{\circ}{\tau}_{n\,A\dot{B}} \Sigma_m^{A\dot{B}}(x) = 0 \qquad \text{(II.23)}$$

são condições de spins satisfatórias. Abaixo fazemos outra verificação de que (II.23) é uma condição de spin conveniente e não permite nenhuma outra liberdade de rotação.

Sabemos que o $SL_2(x)$ é uma representação das rotações locais de Lorentz e atua sôbre $\sigma_\mu^{A\dot{B}}(x)$ da forma

$$\sigma'_\mu(x) = M\,\sigma_\mu(x)\,M^\dagger \qquad \text{(II.24)}$$

Como estamos nos restringindo às rotações espaciais ($\mathcal{J}_i = 0$ deve fixar as componentes puramente espaciais dos parâmetros) vamos considerar $SU_2(x)$, subgrupo de $SL_2(x)$, e representação das rotações espaciais (3-dimensionais) locais. Uma transformação infinitesimal $M \in SU_2(x)$ é definida por

$$M = 1 + V$$

V infinitesimal e tal que M é unitária e unimodular, i.e.,

$$\mathrm{Tr}\, V = 0 \qquad \text{(II.25)}$$

$$V^+ = -V \qquad \text{(II.26)}$$

Considerando $\sigma_\mu = \overset{\circ}{\sigma}_\mu + \Sigma_\mu$ em (II.24) e retendo somente termos em primeira ordem

$$\Sigma'_\mu(x) = \Sigma_\mu(x) + V\,\overset{\circ}{\sigma}_\mu + \overset{\circ}{\sigma}_\mu\,V^+$$

e, usando (II.26)

$$\Sigma'_\mu(x) = \Sigma_\mu(x) + V\,\overset{\circ}{\sigma}_\mu - \overset{\circ}{\sigma}_\mu\,V \qquad \text{(II.27)}$$

Substituindo em (II.23)

$$\mathcal{J}'(\Sigma') = \alpha_{j[kr]}\,\overset{\circ}{\sigma}_{r\,R\dot{S}}\,(\Sigma_k^{R\dot{S}} + V^{Rk}\,\overset{\circ}{\sigma}_{k\,K}{}^{\dot{S}} - \overset{\circ}{\sigma}_k{}^{R\dot{K}}\,V_{\dot{K}}{}^{\dot{S}}) = 0$$

$$= \mathcal{J}_j(\Sigma) + \alpha_{j[kr]}\,\mathrm{Tr}(\overset{\circ}{\tau}_r\,V\,\overset{\circ}{\sigma}_k - \overset{\circ}{\tau}_r\,\overset{\circ}{\sigma}_k\,V) = 0$$

obtemos

$$\alpha_{j[kr]}\,\mathrm{Tr}(\overset{\circ}{\tau}_r\,V\,\overset{\circ}{\sigma}_k - \overset{\circ}{\tau}_r\,\overset{\circ}{\sigma}_k\,V) = 0$$

Desde que $V^{+} = -V$, podemos escrever

$$V = i\,\lambda_k\,\overset{\circ}{\sigma}_k$$

onde λ_k são constantes reais. Assim

$$i\,\sigma_{j[kr]}\lambda_m\ \mathrm{Tr}(\overset{\circ}{\tau}_r\,\overset{\circ}{\sigma}_m\,\overset{\circ}{\sigma}_k - \overset{\circ}{\tau}_r\,\overset{\circ}{\sigma}_k\,\overset{\circ}{\sigma}_m) = 0$$

$$2\,i\ \alpha_{j[kr]}\ \lambda_m\ \mathrm{Tr}(\overset{\circ}{\sigma}_k\,\overset{\circ}{\tau}_r\,\overset{\circ}{\sigma}_m) = 0$$

$$2\,i\ \alpha_{j[kr]}\ \lambda_m\left[\mathrm{Tr}(\delta_{kr}\,\overset{\circ}{\sigma}_m) + \mathrm{Tr}(i\ \varepsilon_{krm}\,\overset{\circ}{\sigma}_n\,\overset{\circ}{\sigma}_m)\right] = 0$$

nos dá finalmente a condição

$$2\,\alpha_{j[kr]}\ \lambda_n\ \varepsilon_{krn} = 0 \qquad \text{(II.28)}$$

que se anula somente se

$$\lambda_n = 0 \qquad \text{(II.6)}$$

Assim (II.23) fixa realmente as componentes espaciais das tetradas e (II.6) fixa as componentes exteriores às hipersuperfícies tipo-espaço consideradas.

APÊNDICE III

FORMULAÇÃO HAMILTONIANA PARA O CAMPO ELETROMAGNÉTICO - CONSTRUÇÃO DOS OBSERVÁVEIS BK - PARALELO COM O CAMPO GRAVITACIONAL

O propósito deste apêndice é utilizar o método da seção 2 para o campo eletromagnético. A analogia entre a teoria para o campo gravitacional e a correspondente para o campo eletromagnético está no fato de que ambas são invariantes com relação a grupos funcionais bem definidos. A Lagrangeana do campo eletromagnético é invariante com relação ao grupo de transformações de gauge enquanto que a Lagrangeana do campo gravitacional de Einstein é invariante em relação ao MMG. Isto vai implicar na existência de vínculos na versão Hamiltoniana de ambas as teorias. A diferença entre os dois grupos é, no sentido da analogia dos métodos que iremos fazer, apenas uma diferença do número de funções arbitrárias envolvidas nas transformações correspondentes. Assim, todos os resultados relacionados com o aparecimento de vínculos são análogos nas duas teorias.

A densidade de Lagrangeana para o campo eletromagnético é *

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu = L_f + L_i \qquad \text{(III.1)}$$

Os índices são abaixados e levantados com $\eta_{\mu\nu}$, $\eta^{\mu\nu}$ desde que temos uma teoria Poincaré-invariante e onde

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\nu\alpha} \partial_\alpha A^\mu - \eta^{\mu\alpha} \partial_\alpha A^\nu$$
$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} F^{\alpha\beta}$$

---

* No sistema de unidades de Heaviside.

$$L_f = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

e

$$j^\mu = (\rho, \vec{j})$$

A parte livre da Lagrangeana, L_f, é invariante sob transformações de gauge do potencial

$$A'^\mu = A^\mu + \eta^{\mu\alpha} \partial_\alpha \Lambda \qquad \text{(III.2)}$$

onde $\Lambda(x)$ é uma função arbitrária das coordenadas do espaço-tempo.

A parte de interação da Lagrangeana, L_i, não é gauge invariante mas a integral de ação

$$I = \int L \, d^4x$$

é gauge invariante, desde que j_μ obedeça à equação de continuidade [35]

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

As equações de Maxwell obtidas da variação de L com relação a A^μ são

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = j^\mu$$

e são equivalentes a quatro equações nos potenciais mais a condição de Lorentz

$$\Box A^\mu = j^\mu \, , \qquad \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

Escrevendo (III.1) em termos de $A^\mu = (\phi, \vec{A})$, obtemos:

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\vec{A}} + \nabla\phi)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{A})^2 - \rho\phi + \vec{j}\cdot\vec{A}$$

onde $\dot{A}^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial t}$. Definindo o momentum canonicamente conjugado por

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial A^\mu{}_{,o}} \tag{III.4}$$

e desdobrando, obtemos

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{A}}} \tag{III.5}$$

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \tag{III.6}$$

Usando (III.3) tiramos que

$$\vec{P} = \dot{\vec{A}} + \nabla\phi = - \vec{E} \tag{III.5a}$$

$$\pi = 0 \tag{III.6a}$$

Nota: A relação (III.6a) é o vínculo primário da teoria: Decorre do fato que L_f deve ser gauge-invariante e portanto não deve conter $\dot{\phi}$. De fato, a única expressão gauge-invariante que podemos formar com $\dot{\phi}$ é $\dot{\phi} + \nabla\cdot\vec{A}$ que é o lado esquerdo da condição de Lorentz sôbre os potenciais. Sob uma transformação de gauge, ela se transforma como

$$\dot{\phi}' + \nabla\cdot\vec{A}' = \dot{\phi} + \nabla\cdot\vec{A} + \Box\Lambda$$

Esta expressão é gauge invariante (se não fosse, nada tinhamos a provar) se nos restringirmos a transformações de gauge que satisfazem $\Box\Lambda = 0$ mas esta condição caracteriza também transformações de gauge que preservam a condição de Lorentz. Daí não podermos formar nenhuma expressão não nula gauge-invariante e contendo $\dot{\phi}$ e L_f deve ser então independente de $\dot{\phi}$.

A densidade de Hamiltoniana para o campo de Maxwell é

$$\mathcal{H} = P_\mu \dot{A}^\mu - L, \qquad H = \int \mathcal{H}\, d^3x$$

e usando (III.3) e (III.4) podemos escrever

$$\mathcal{H} = \vec{P}\cdot\dot{\vec{A}} - L = \frac{1}{2}\vec{P}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\times\vec{A})^2 - \vec{j}\cdot\vec{A} + \phi(\nabla\cdot\vec{P} + \rho) \quad \text{(III.7)}$$

Os PP entre dois funcionais dinâmicos A $\{A^\mu, P_\mu\}$ e B $\{A^\mu, P_\mu\}$, no mesmo tempo é, da forma usual

$$[A, B] = \int_{x^0} d^3x \left(\frac{\delta A}{\delta A^\mu(x)} \frac{\delta B}{\delta p_\mu(x)} - \frac{\delta B}{\delta A^\mu(x)} \frac{\delta A}{\delta p_\mu(x)} \right) \quad \text{(III.8)}$$

e usando que

$$A'^\mu(x') = \int_{x^0} \delta^\mu{}_\alpha \, \delta(\vec{x}'-\vec{x}) \, A^\alpha(x) \, d^3x$$

obtemos os PP fundamentais

$$\left.\begin{aligned} [A^\mu(x), A^\nu(x')]_{x^0=x'^0} &= 0 \\ [P_\mu(x), P_\nu(x')]_{x^0=x'^0} &= 0 \\ [A^\mu(x), P_\nu(x')]_{x^0=x'^0} &= \delta^\mu{}_\nu \delta(\vec{x}-\vec{x}') \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.9)}$$

A condição que o vínculo primário da teoria seja mantido no tempo é

$$\dot{\pi} = [\pi(x), H] = \int_{x^0} d^3x' \, [\pi(x), \mathcal{H}(x')]_{x^0=x'^0} = 0$$

ou

$$\dot{\pi} = \nabla\cdot\vec{p} + \rho = 0 \quad \text{(III.10)}$$

que é o vínculo secundário da teoria ((III.10) é a equação de Maxwell $\nabla\cdot\vec{E} = \rho$). É trivial verificar que não há mais vínculos adicionais na teoria, provenientes das equações de movimento - o vínculo secundário (III.10) é automaticamente mantido no tempo. De fato, tomando a derivada temporal de (III.10)

$$\frac{d}{dt}\ (\nabla\cdot\vec{p} + \rho) = \nabla \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

e usando

$$\nabla \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \nabla\cdot[\vec{p},H] = \nabla\cdot\vec{j}$$

obtemos que o vínculo secundário será mantido no tempo se a equação de continuidade para j^μ valer, i.é,

$$\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

Notar que o último termo da Hamiltoniana (III.7) é o produto do vínculo secundário (III.10) pelo potencial escalar ϕ. Desde que ϕ não é gauge invariante, a Hamiltoniana não é identicamente gauge invariante, mas se reduz à densidade de energia gauge-invariante sôbre a hipersuperfície de vínculos (III.10).

A partir de agora vamos considerar o caso do campo eletromagnético livre (para comparação de métodos com o campo gravitacional livre), i.é, consideramos $j^\mu = 0$ e então o vínculo secundário e a Hamiltoniana se reduzem respectivamente a

$$\nabla\cdot\vec{p} = -\ \nabla\cdot\vec{E} = 0 \tag{III.11}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\ \vec{p}^2 + \frac{1}{2}\ (\nabla\times\vec{A})^2 + \phi\ \nabla\cdot\vec{p} \tag{III.12}$$

Analogamente ao campo gravitacional, o vínculo $\pi = 0$ faz com que a *velocidade* $\dot{\phi}$ não possa ser expressa como uma função das variáveis canôni cas (p_μ, A^μ). O termo $\pi\dot{\phi}$ da Hamiltoniana desaparece devido à (III.6a). A variável ϕ não será uma variável dinâmica, no sentido de que ϕ não é propagada no tempo pelas equações de movimento. Aqui cabe uma observação importante que também se aplica para o campo gravitacional. De acôrdo com o tratamento que estamos dando aos vínculos (considerados como equações fracas no sentido de Dirac), a Hamiltoniana (III.12) deveria ser rigorosamente te

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} + \frac{1}{2}\vec{p}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\times\vec{A})^2 + \phi\,\nabla\cdot\vec{p} \qquad \text{(III.13)}$$

contendo um termo dependente da *velocidade* $\dot{\phi}$ como foi discutido acima. Desta forma, ficará claro que H não determina a propagação de ϕ no tempo, i.é,

$$\dot{\phi} = [\phi, H] = \int d^3x' \, [\phi(x), \pi\dot{\phi}(x')] = \dot{\phi}(x) \; .$$

A ϕ sendo não dinâmica, e desde que seu momentum canonicamente conjugado é um vínculo ($\pi = 0$) que se mantem no tempo, o par (ϕ,π) pode ser eliminado da descrição do espaço de fase e da definição de PP, ficando-se então sôbre o espaço de fase reduzido ($\vec{A}$, $\vec{p}$) *, mais a condição (III.11). Desde que a dinâmica e o espaço de fase da teoria são construidos com componentes espaciais de (A^μ, p_μ) tomaremos como métrica δ_{ij}, não faremos mais distinção entre índices contra e covariantes e quantidades serão escritas com o sinal conveniente. Notar que a Hamiltoniana (III.12) está escrita no espaço de fase reduzido ($\vec{A}$,$\vec{p}$) e contendo uma função arbitrária como coeficiente num dos termos. (III.12) não deve ser utilizado para mostrar que é não dinâmica e arbitrária, desde que $\dot{\phi} = [\phi, H(III.12)] = 0$ o que não é correto. Notar ainda que o vínculo secundário $\dot{\pi} = 0$ foi corretamen

* ($\vec{A}$,$\vec{p}$) são os análogos aos D-invariantes da teoria de Dirac (cf. seção 3).

te calculado no espaço de fase completo (A^{μ}, p_{μ}).

Para fixar a função arbitrária ϕ na Hamiltoniana (III.12), tornando, desta forma, única a propagação das variáveis dinâmicas $(\vec{A}, \vec{p})$, a partir dos dados iniciais sôbre uma hipersuperfície do tipo-espaço, temos que impor uma condição de gauge, o análogo às condições de coordenadas para o campo gravitacional.

O gerador das transformações canônicas de gauge sôbre as variáveis dinâmicas será construído com (III.11) e dado por

$$C(x^0) = \int \Lambda(\vec{x},x^0)\ \nabla\cdot\vec{p}(x)\ d^3x \qquad \text{(III.14)}$$

onde $\Lambda(x)$ é uma função infinitesimal arbitrária. Assim

$$\overline{\delta}A_i(x) = \left[A_i(x), C(x^0)\right] = \int_{x^0} \Lambda(\vec{x}',x^0) \left[A_i(x), P_{\ell,\ell}(x')\right] d^3x' =$$

$$= \int \Lambda(\vec{x}',x^0)\ \delta_{i\ell}\ \frac{\partial}{\partial x'^{\ell}}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}')d^3x' = -\Lambda_{,i}(x)$$

o que nos dá

$$\vec{A}' = \vec{A} - \nabla\Lambda$$

que são as componentes espaciais da transformação (III.2). O momentum $\vec{p}$ comuta com $C(x^0)$ e é, portanto, gauge-invariante, o que é fato conhecido.

Para fixar esta arbitrariedade nos potenciais, vamos impor uma condição de gauge, uma relação envolvendo as variáveis dinâmicas. Nossa escolha, de modo nenhum única, será feita impondo-se a condição sôbre os potenciais $\vec{A}$:

$$\nabla\cdot\vec{A} = 0 \qquad \text{(III.15)}$$

Esta condição é a gauge de radiação e elimina a componente longitudinal

A_L gauge-variante e, juntamente com (III.11) nos leva à representação do campo eletromagnético livre em termos dos potenciais transversais $(\vec{A}_T, \vec{p}_T)$, ambos gauge-invariantes. De fato, vamos fazer a decomposição

$$\left.\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{P}_T + \vec{P}_L \\ \vec{A} &= \vec{A}_T + \vec{A}_L \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.16)}$$

onde

$$\nabla\cdot\vec{P}_T = 0 \qquad \nabla\cdot\vec{A}_T = 0$$
$$\nabla\times\vec{P}_L = 0 \qquad \nabla\times\vec{A}_L = 0$$

O vínculo (III.11) é reescrito

$$\nabla\cdot\vec{P}_L = 0$$

e juntamente com

$$\nabla\times\vec{P}_L = 0$$

nos dá*

$$\vec{P}_L \equiv 0$$

Sob (III.2) a condição de gauge (III.13) se transforma como

$$\nabla\cdot A' = \nabla\cdot\vec{A} + \nabla^2\Lambda$$

e, então, (III.15) fixa a gauge a menos de uma transformação que satisfaça

$$\nabla^2 \Lambda = 0$$

Como estamos supondo campos se anulando no infinito espacial e não singulares, ficamos restritos a $\Lambda = 0$.

---

* Todo vetor que tem divergência e rotacional nulos é identicamente nulo.

Sob o ponto de vista do método utilizado numa teoria com vínculos, (III.11) e (III.15) constituem um conjunto de vínculos de segunda classe, desde que

$$\left[\nabla\cdot\vec{A}(x),\ \nabla'\cdot\vec{p}(x')\right]_{x^0=x'^0} = -\nabla^2\ \delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad \text{(III.17)}$$

Nota: 1) usando (III.5a) em (III.11) obtemos

$$\nabla^2\ \phi + \frac{\partial}{\partial t}\,(\nabla\cdot\vec{A}) = 0$$

e da condição de gauge $\nabla\cdot\vec{A} = 0$

$$\nabla^2\ \phi = 0$$

cuja solução tomamos $\phi = 0$. Assim, a gauge de radiação (III.15) fixa diretamente o valor pótencial escalar ϕ.

2) Componentes longitudinais estão associados às fontes e são utilizadas para descrever a interação de campos com as fontes. Por exemplo, usando (III.10)

$$\vec{p}_L = \nabla\,\frac{1}{\nabla^2}\ \rho$$

Assim a gauge de radiação deve ser usada somente na ausência de fontes, porque ela elimina componentes longitudinais importantes no estudo da interação fonte-campos.

PARALELO COM O CAMPO GRAVITACIONAL:

Campo Eletromagnético Livre	*Campo Gravitacional Livre*
Lagrangeana do campo livre L_f invariante por transformações de gauge (1 função arbitrária definido a transformação) $\Downarrow$	Lagrangeana do campo (1.7a) invariante por transformações arbitrárias de coordenadas (4 funções definindo a transformação) $\Downarrow$
1 vínculo primário $\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0$	4 vínculos primários $p^{o\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial g_{o\mu,o}} = 0$
1 identidade de Bianchi (teorema de Noether) $F^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} = 0$ $\Downarrow$	4 identidades de Bianchi (do teorema de Noether) $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv 0$ $\Downarrow$
1 vínculo secundário obtido da condição de consistência $\dot{\pi} = 0$: $\nabla\cdot\vec{p} = -\nabla\cdot\vec{E} = 0$	4 vínculos secundários obtidos de $\dot{p}^{o\mu} = 0$: $\mathcal{H}_r = 0$ $\mathcal{H}_L = 0$
1 função arbitrária (não dinâmica) como coeficiente na Hamiltoniana ϕ	4 funções arbitrárias (não dinâmicas) como coeficientes na Hamiltoniana $g_{o\mu}$ ou $\ell^{\mu} = \frac{g^{o\mu}}{\sqrt{g^{oo}}}$
Espaço de fase descrito pelas variáveis dinâmicas $(\vec{A}, \vec{p})$	Espaço de fase descrito pelas variáveis (g_{ij}, p^{ij})
1 condição de gauge para tornar única a propagação a partir dos dados iniciais, fixando a dinâmica da teoria $\nabla\cdot\vec{A} =$	4 condições de coordenadas para tornar única a dinâmica da teoria $x^{\mu} = f^{\mu}(g_{ij}, p^{ij})$ tal que $\frac{\partial x^{\mu}}{\partial t} = \delta^{\mu}_{o}$
$\{\nabla\cdot\vec{A} = 0,\ \nabla\cdot\vec{p} = 0\}$ conjunto de 2 vínculos de segunda classe da teoria que devem ser eliminados da álgebra dos PP dos observáveis.	$\{\mathcal{H}_L = 0,\ \mathcal{H}_r = 0,\ f^{\mu} - x^{\mu} = 0\}$ conjunto de 8 vínculos de segunda classe que serão eliminados da álgebra dos PP dos observáveis.

Construção dos Observáveis BK

O conjunto de segunda classe $\{\nabla\cdot\vec{A},\ \nabla\cdot\vec{p}\}$ contém um número conveniente de vínculos para fixar a dinâmica da teoria e que deverão ser eliminados da álgebra dos observáveis, ou diretamente pelo uso do PD ou pela modificação das variáveis adicionando-se a elas uma combinação linear dos vínculos (cf. seção 2) o que iremos fazer a seguir. Assim

$$A^*_i(\vec{x},x^0) = A_i(\vec{x},x^0) + \int_{x^0} \alpha_i(\vec{x},\vec{x}')\, P_{j,j}(x')d^3x' + \int_{x^0} \beta_i(\vec{x},\vec{x}')\, A_{\ell,\ell}(x')d^3x' \qquad \text{(III.18)}$$

onde os coeficientes α_i e β_i são determinados pelas condições

$$\left.\begin{array}{l} \left[A^*_i(x),\ P_{j,j}(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0 \\[2ex] \left[A^*_i(x),\ A_{\ell,\ell}(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(III.19)}$$

Examinando (III.17) vemos que os coeficientes devem ser c-números e funções de $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ e/ou suas derivadas. Substituindo (III.18) em (III.19) e usando (III.9), obtemos:

$$-\frac{\partial}{\partial x'^i}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \int_{x^0} \frac{\partial}{\partial x''^\ell}\,\frac{\partial}{\partial x'^j}\,\delta(\vec{x}''-\vec{x}')\,\delta_{\ell j}\,\beta_i(\vec{x},\vec{x}'')d^3x''$$

e

$$\int_{x^0} \alpha_i(\vec{x},\vec{x}'')\,\nabla''^2\,\delta(\vec{x}''-\vec{x}')d^3x'' = 0$$

ou

$$\nabla''^2\,\alpha_i(\vec{x},\vec{x}'') = 0 \qquad \text{(III.20)}$$

$$\nabla''^2\,\beta_i(\vec{x},\vec{x}'') = \frac{\partial}{\partial x''^i}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'') \qquad \text{(III.21)}$$

Também

$$p_i^*(\vec{x},x_o^0) = p_i(\vec{x},x_o^\cdot) + \int_{x^0} \mu_i(\vec{x},\vec{x}')\, p_{j,j}(x')d^3x' + \int_{x^0} \eta_i(\vec{x},\vec{x}')A_{\ell,\ell}(x')d^3x' \qquad \text{(III.22)}$$

Por (III.17), μ_i e η_i são c-números e são determinados pelas condições

$$\left.\begin{aligned} \left[p_i^*(x),\, p_{j,j}(x')\right]_{x^0=x'^0} &= 0 \\ \left[p_i^*(x),\, A_{j,j}(x')\right]_{x^0=x'^0} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.23)}$$

Substituindo (III.22) em (III.23) obtemos

$$\nabla'^2\, \eta_i(\vec{x},\vec{x}') = 0 \qquad \text{(III.24)}$$

$$\nabla'^2\, \mu_i(\vec{x},\vec{x}') = \frac{\partial}{\partial x'^i}\, \delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad \text{(III.25)}$$

(III.21) e (III.25) têm solução análoga. Tomando (III.21) e diferenciando em x''^i

$$\nabla''^2 \frac{\partial}{\partial x''^i}\, \beta_i(\vec{x},\vec{x}'') = \nabla''^2\, \delta(\vec{x}-\vec{x}'')$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x''^i}\, \beta_i(\vec{x},\vec{x}'') = \delta(\vec{x}-\vec{x}'') + \psi$$

onde $\nabla^2 \psi = 0$. Como estamos interessados em campos livres de singularidades e se anulando no infinito espacial, tomamos $\psi = 0$. Assim

$$\beta_i(\vec{x},\vec{x}') = \frac{\partial}{\partial x'^i}\, \frac{1}{\nabla^2}\, \delta(\vec{x}-\vec{x}') + \phi_i(\vec{x},\vec{x}')$$

tal que $\phi_{i,i} = 0$. Substituindo em (III.21) por consistência, obtemos

$\nabla'^2\,\phi_i = 0$ e tomamos $\phi_i = 0$. Finalmente

$$\beta_i(\vec{x},\vec{x}') = \frac{\partial}{\partial x'^i}\,\frac{1}{\nabla^2}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{\partial}{\partial x'^i}\,D(\vec{x}-\vec{x}') \qquad \text{(III.26)}$$

$$\mu_i(\vec{x},\vec{x}') = \frac{\partial}{\partial x'^i}\,D(\vec{x}-\vec{x}') \qquad \text{(III.27)}$$

Pelas mesmas considerações anteriores tomamos *

$$\alpha_i(\vec{x},\vec{x}') = \eta_i(\vec{x},\vec{x}') = 0 \qquad \text{(III.28)}$$

Desta forma, podemos escrever (III.18) e (III.22) como

$$A_i^*(x) = A_i(x) + \int_{x^0} \frac{\partial}{\partial x'^i}\,D(\vec{x}-\vec{x}')\,A_{j,j}(x')\,d^3x' \qquad \text{(III.29)}$$

$$P_i^*(x) = P_i(x) + \int_{x^0} \frac{\partial}{\partial x'^i}\,D(\vec{x}-\vec{x}')\,P_{\ell,\ell}(x')\,d^3x' \qquad \text{(III.30)}$$

ou, formalmente,

$$A_i^* = A_i - \partial_i\,\frac{1}{\nabla^2}\,\partial_j\,A_j \qquad \text{(III.29a)}$$

$$P_i^* = P_i - \partial_i\,\frac{1}{\nabla^2}\,\partial_\ell\,P_\ell \qquad \text{(III.30a)}$$

Os PP entre as variáveis estrela podem ser calculados diretamente, usando-se (III.29) e (III.30)

---

* Todos os resultados posteriores são independentes do fato de tomarmos (III.28) ou deixarmos α_i, η_i como soluções das equações de Laplace, sem especificar.

$$\left[A_i^*(x),\ A_j^*(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[P_i^*(x),\ P_j^*(x')\right]_{x^0=x'^0} = 0$$

$$\left[A_i^*(x),\ P_j^*(x'')\right]_{x^0=x''^0} = \left[A_i(x),\ P_j(x'')\right]_{x^0=x''^0} + \int_{x^0} \frac{\partial}{\partial x'^j} D(\vec{x}''-\vec{x}') \left[A_i(x),\ P_{\ell,\ell}(x')\right]_{x^0=x'^0} d^3x' +$$

$$+ \int_{x^0} \frac{\partial}{\partial x'^i} D(\vec{x}-\vec{x}') \left[A_{\ell,\ell}(x'),\ P_j(x'')\right]_{x'^0=x''^0} d^3x' +$$

$$+ \int_{x^0} \int_{x^0} \frac{\partial}{\partial x'^i} D(\vec{x}-\vec{x}') \frac{\partial}{\partial x'''^j} D(\vec{x}''-\vec{x}''') \cdot$$

$$\cdot \left[A_{m,m}(x'),\ P_{\ell,\ell}(x''')\right]_{x'^0=x'''^0} d^3x'\ d^3x''' =$$

$$= \delta_{ij}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}'') + \int_{x^0} d^3x' \frac{\partial}{\partial x'^i} \delta(\vec{x}-\vec{x}') \frac{\partial}{\partial x'^j} D(\vec{x}''-\vec{x}') +$$

$$+ \int_{x^0} d^3x' \frac{\partial}{\partial x'^i} D(\vec{x}-\vec{x}') \frac{\partial}{\partial x'^j} \delta(\vec{x}'-\vec{x}'') +$$

$$+ \int_{x^0} \int_{x^0} d^3x'\ d^3x''' \frac{\partial}{\partial x'^i} D(\vec{x}-\vec{x}') \frac{\partial}{\partial x'''^j} D(\vec{x}''-\vec{x}''') \frac{\partial}{\partial x'^\ell} \frac{\partial}{\partial x'''^\ell} \delta(\vec{x}'-\vec{x}''')$$

e obtemos finalmente

$$\left[A_i^*(x),\ P_j^*(x'')\right]_{x^0=x''^0} = \delta_{ij}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}'') - \frac{\partial^2}{\partial x^i\ \partial x^j}\ D(\vec{x}-\vec{x}'') \equiv \delta_{ij}^{TT}(\vec{x}-\vec{x}'')$$

onde $\delta_{ij}^{TT}(\vec{x}-\vec{x}'')$ é a função delta transversal, isto é,

$$\delta_{ij}^{TT}(\vec{x}-\vec{x}'') = \delta_{ji}^{TT}(\vec{x}-\vec{x}'') = \delta_{ij}^{TT}(\vec{x}''-\vec{x}),$$

e

$$\delta_{ij,j}^{TT}(\vec{x}-\vec{x}'') = 0$$

As variáveis (III.29) e (III.30) são variáveis transversais desde que

$$A_{i,i}^* = 0$$

$$P_{i,i}^* = 0$$

e, de fato, observando-se (III.29a) e (III.30a) vemos que $(A_i^*,\ P_i^*)$ são a representação transversal de $(A_i,\ P^i)$ [34]. Desta forma, para spin 1 e massa nula, a álgebra de comutação das variáveis transversais é idêntica à álgebra dos PD, ou usar a representação de variáveis transversais é idêntico a construir observáveis BK para o campo eletromagnético livre, associados ao conjunto de segunda classe (III.11) e (III.15), na gauge de radiação de spin 1.

REFERÊNCIAS

1. Bergmann e Dirac iniciaram com seus trabalhos tal programa.
A. Komar - The Quantization Program for General Relativity, em Relativity, ed. M. Carmelli, New York, 1970.

2. P. G. Bergmann e I. Goldberg - Phys. Rev. 98, 531 (1955).

3. P. A. M. Dirac - Proc. Roy. Soc. A246, 326 (1958).

4. W. Pauli e M. Fierz - Helv. Phys. Acta 12, 297 (1939), citado em John Boardman - J. Math. Phys. 6, 1696 (1965).

5. P. G. Bergmann e A. Komar - Phys. Rev. Letters 4, 432 (1960).

6. R. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner - The Dynamics of General Relativity, em Gravitation: an Introduction to Current Research, ed. L. Witten, New York, (1962).

7. Colber G. Oliveira - Tese de Doutorado, Syracuse University, junho (1965).

8. J. L. Anderson - Principles of Relativity Physics - New York, (1967).

9. P. A. M. Dirac - Proc. Roy. Soc. A246, 333 (1958).

10. P. A. M. Dirac - Phys. Rev. 114, 924 (1959).

11. R. Adler, M. Bazin, M. Schaeffer - Introduction to General Relativity - New York (1965).

12. M. J. Russo e R. Arnowitt, Phys. Rev. D3, 1283 (1971).

13. C. G. Oliveira - Notas de Física, suplemento ao volume XI - CBPF (1965).

14. C. G. Oliveira - Lectures Notes on Canonical Formalism - Monografias de Física, CBPF (1972) a ser publicado.

15. J. L Anderson - Phys. Rev. 111, 965 (1958).

16. J. L. Anderson - Principles of Relativity Physics, pág. 97, pág. 362 (1967).

17. P. A. M. Dirac - Lectures in Quantum Mechanics - Belfer Graduate School of Science Monographs, New York (1964).

18. H. Goldstein - Classical Mechanics - New York (1950).

19. A. Komar - Phys. Rev. 111, 1182 (1958).

20. N. Mukunda e E. C. G. Sudarshan - J. Math. Phys. 9, 411 (1968).

21. J. L. Anderson - Principles of Relativity Physics - seção 10-11.

22. A. Komar e P. G. Bergmann - Status Report on the Quantization of the Gravitational Field em Recent Developments in General Relativity, Pergamon Press, New York (1962).

23. Referências citadas em R. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner: The Dynamics of General Relativity - em Gravitation: an Introduction to Current Research, ed. L. Witten (1962).

24. L. E. Eimers - Tese de Doutorado, Syracuse University, janeiro (1970).

25. R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner em Gravitation: an Introduction to Current Research, pág. 424.

26. R. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner - Phys. Rev. 117, 1595 (1960).

27. J. A. Wheeler - Geometrodynamics and the Issue of the Final State em Relativity, Groups and Topology, Ed. Dewitt, New York (1964).

28. J. L. Synge - The General Theory - Amsterdam (1960).

29. J. Weber - Phys. Rev. 117, 306 (1960).

30. R. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner - Phys. Rev. 121, 1556 (1961).

31. M. Sachs - Nuovo Cimento XLVII A; 759 (1967).

32. P. A. M. Dirac - Interacting Gravitational and Spinor Fields em Recent Developments in General Relativity, Pergamon Press, New York (1962).

33. W. C. Parke e H. Jehle - Covariant Spinor Formulation of Relativistic Wave Equations under the Homogeneous Lorentz Group - Lectures in Theoretical Physics (University of Colorado) Boulder (1964).

34. Colber G. Oliveira - Lectures Notes in Special Relativity - CBPF (1970).

35. P. G. Bergmann - Phys. Rev. 144, 1078 (1966); A. Komar - Phys. Rev. 170, 1195 (1968).

ÍNDICE

E R R A T A

Página	Linha	onde se lê	leia-se
2	6	aplica um estado físico definido.	aplica um estado físico no mesmo estado físico definido
12	8	$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \left[\{^{\sigma}_{\mu\rho}\}\{^{\rho}_{\nu\sigma}\} \; \{^{\rho}_{\mu\nu}\}\{^{\sigma}_{\rho\sigma}\} \right]$	$\mathcal{L} = \sqrt{-g}.\, g^{\mu\nu} \left[\{^{\sigma}_{\mu\rho}\}\{^{\rho}_{\nu\sigma}\} - \{^{\rho}_{\mu\nu}\}\{^{\sigma}_{\rho\sigma}\} \right]$
15	4	(1.8)	(1.3)
21	19	$\{C_j(\vec{x}, x^o) \quad 0;\ j = 1\ldots k\}$	$\{C_j(\vec{x}, x^o) = 0;\ j = 1\ldots k\}$
24	6	$C_j(\tilde{y}_A, \pi^A) = \ldots$	$C_j(\tilde{y}_A, \tilde{\pi}^A) = \ldots$
25	13	sistema um ponto fora	sistema em pontos fora
27	8	métrica com um número ímpar	métrica e que toda matriz anti-simétrica com um número ímpar
32	6	$\left\| \frac{\partial\Theta_a}{\partial\Theta_b} \right\| \neq 0$	$\left\| \frac{\partial\Theta'_a}{\partial\Theta_b} \right\| \neq 0$
35	6	assume os	assume os valores

Página	Linha	onde se lê	leia-se
56	4	gera sob	gera sôbre
59	10	$\nabla^2 \overset{(1)}{P}_{ss} =$	$\nabla^2 \overset{(1)}{P}_{ss} -$
60	14	de que tem dinâmica	de que não têm dinâmica
63	4	(k_{ij}, P_{ij})	$(h_{ij}, \overset{(1)}{P}_{ij})$
64	5	$\ldots \alpha_{jik}(\vec{x},\vec{x}'') = \alpha_{ijk}(\vec{x}'', \vec{x})$	$\ldots \alpha_{jik}(\vec{x},\vec{x}'')$
64	6.	$\ldots \beta_{ji}(\vec{x},\vec{x}'') = \beta_{ij}(\vec{x}'',\vec{x})$	$\ldots \beta_{ji}(\vec{x},\vec{x}'')$
64	7	$\ldots \gamma_{ji\ell}(\vec{x},\vec{x}'') = \gamma_{ij\ell}(\vec{x}'', \vec{x})$	$\ldots \gamma_{ji\ell}(\vec{x},\vec{x}'')$
64	8	$\ldots \varepsilon_{ji}(\vec{x}, \vec{x}'') = \varepsilon_{ij}(\vec{x}'', \vec{x})$	$\ldots \varepsilon_{ji}(\vec{x}, \vec{x}'')$

Página	Linha	onde se lê	leia-se
64	9 e 10	A simetria em $(\vec{x},\vec{x}'')$ decorre de que a matriz (4.22) dos PP depende sòmente de e/ou suas derivadas de ordem par	Risque-se
66	4	(I)	(4.22)
72	1	$\ldots\ \mu_{jik}(\vec{x},\vec{x}'') =$ $= \mu_{ijk}(\vec{x}'', \vec{x})$	$\ldots\ \mu_{jik}(\vec{x},\vec{x}'')$
72	2	$\ldots\ \eta_{ji}(\vec{x},\vec{x}'') =$ $= \eta_{ij}(\vec{x}'',\vec{x})$	$\ldots\ \eta_{ji}(\vec{x},\vec{x}'')$
72	3	$\ldots\ \lambda_{ji\ell}(\vec{x},\vec{x}'') =$ $= \lambda_{ji\ell}(\vec{x}'',\vec{x})$	$\ldots\ \lambda_{ji\ell}(\vec{x},\vec{x}'')$
72	4	$\ldots\ \Theta_{ji}(\vec{x},\vec{x}'') =$ $= \ {}_{ij}(x'', x)$	$\ldots\ \Theta_{ji}(\vec{x},\vec{x}'')$
72	5 e 6	a simetria em $(\vec{x},\vec{x}'')$ decorre da forma dos elementos de matriz (4.22) (cf. (2.17)).	risque-se

Página	Linha		
84	10	$\sigma_i^{A\dot{B}}$	$\overset{o}{\sigma}_i^{A\dot{B}}$
84	10	$\sigma_o^{A\dot{B}}$	$\overset{o}{\sigma}_o^{A\dot{B}}$
99	15	Os coeficientes deverão ter, por consistência, simetria em $(\vec{x},\vec{x}')$ desde	risque-se
100	1 e 2	que a matriz dos PP depende somente de $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ e/ou suas derivadas de ordem par.	risque-se
109	1 e 2	Como já foi discutido, os coeficientes da combinação (5.60) deverão ter simetria em $(\vec{x},\vec{x}'')$ por causa da forma da matriz PP dos vínculos. Deverão	Os coeficientes da combinação (5.60) deverão
156	22	é não	ϕ é não
89	6	(5.14)	(5.13)