"ESPINORES COMO OBJETOS INTERNOS A UMA ÁLGEBRA DE CLIFFORD"

*Tese de Mestrado**

FRANCISCO ANTONIO DE MORAES DORIA

* Trabalho parcialmente financiado pelo CNPq. (proc. 14.476/70) e pelo M.E.C.

Der Dichter schaut und kuendet Seele als Welt, Welt als Seele.
Die Einheit beider ist sein Geheimnis.

Kurt Riezler, in <u>Das Homerische Gleichnis und der Anfang der Philosophie</u> (1936).

Nah ist
Und schwer zu fassen der Gott.
Wo aber der Gefahr ist, waechst
das Rettende auch.

Friedrich Hoelderlin, <u>Patmos</u>, 1-4.

PREFÁCIO

Esta é uma tese em métodos matemáticos da Física. Suas aplicações podem levá-la a questões de Geometria Diferencial com interesse à Relatividade, ao menos; nela desenvolvemos um formalismo e uma notação para as álgebras de Clifford que - em muitos casos (como, p.e., no teorema 10.5), - já é bastante maleável para se prestar ao cálculo fácil.

A tese se divide em quinze seções. As quatorze primeiras encontram uma aplicação na última. Nos §§ 1º - 8º fazemos a introdução ao assunto e desenvolvemos sobretudo os aspectos de grupo dos elementos geradores e demais elementos da base de uma álgebra de Clifford. No § 9º preparamos, com alguns conceitos que se estendem à álgebra de Clifford enquanto álgebra, o estudo das transformações lineares e automorfismos desta estrutura, que é feito nos §§ 10º e 11º e em algumas seções dos §§ seguintes. A partir do § 12º estudamos os espinores como objetos pertencentes a uma álgebra de Clifford - e não como de hábito, como vetores do espaço das representações da álgebra. No § 15º aplicamos nosso formalismo às equações de Bargmann-Wigner (5).

Notemos, em especial, os seguintes resultados. Primeiro, a indefinição de sinal associada às transformações espinoriais. Aqui ela resulta do fato de que, dadas duas bases de uma álgebra de Clifford, uma transformação de similaridade unimodular - ambígua quanto ao sinal - as conecta (teoremas 10.8 e 12.1). No entanto, o problema inverso - dada uma base da álgebra, construir a base a ela associada por similaridade através de um vetor de Clifford inversível - é perfeitamente definido, já que a multiplicação na álgebra é unívoca. O segundo resultado de interesse é a enumeração, por meio das transformações L estudadas no § 10º, das classes espinoriais de Teitler (56). Nosso resultado é geral, enquanto que Teitler só o obteve para C^4, a álgebra de Dirac, e à bruta força de cálculo, enquanto nós nos servimos de um subgrupo dos automorfismos de C^n para resolver o problema. Vale a pena, ainda, ressaltar que no estudo das equações de onda no § 15º, pudemos dispensar com o operador conjugação de carga, sempre usado por diversos autores (26, 49).

Sou extremamente grato a meu orientador, Professor Adel da Silveira, pelo constante auxílio - medido num constante encorajamento à liberdade de pesquisa, e num também constante apoio às muitas dificuldades que eu ia eventualmente enfrentando - durante o preparo desta tese. Também agradeço a Carlos Márcio do Amaral, que me apresentou às álgebras de Clifford. A Jarbas da Motta Ramos, Luiz Carlos Bandeira Ryff e Mario Novello, bons críticos, melhores amigos. Como a também Roberto Moreira Xavier de Araújo e Antonio F. da F. Teixeira, e a Lais de Carvalho Ventura, que datilografou com muita paciência esta tese.

E também ao apoio "pesado" que tive: Jefferson Siqueira e José "Pepe" Barjiela Pellon na xerox, e Romeu Vieira de Souza, na encadernação.

E finalmente, ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. A quem devo minha formação científica.

No mais, devo concluir que ao longo dos muitos meses de trabalho nesta tese tive sempre presente as palavras do Apóstolo,

> " *Onde está o sábio? Onde o escriba? Onde o que investiga este tempo? Pois não tornou Deus louca a ciência do mundo? Já que na sabedoria de Deus o mundo não conheceu a Deus pela sabedoria, bem pareceu a Deus salvar os que confiam, pela loucura da pregação (1 Cor 1, 20-21).*

Rio, de outubro de 1971 a julho de 1973.

CONVENÇÕES

As convenções aqui apresentadas são usadas consistentemente ao longo dos §§ 1º - 14º; as poucas exceções são sempre destacadas, e representam de modo geral uma opção pelas notações mais correntes. Os índices gregos μ ... variam de 1 a n; os índices latinos maiúsculos A, B, ..., definidos em (2.4), variam de 0 a 2^n-1 - como lá se esclarece. Índices latinos minúsculos i, j, ... têm diversas variâncias, elucidadas a cada ocorrência. Os índices cursivos espinoriais $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ... são definidos em (11.2) e após o teorema 13.1. Os anéis de escalares são notados de um modo geral $\underline{K}$; os reais, $\underline{R}$; os complexos, $\underline{C}$. Escalares genéricos são escritos com letras gregas α, β, λ, μ ... e sempre indicada sua pertinência a um anel escalar.

Reservamos as letras x, y, z, para a descrição de objetos $x = x^\mu e_\mu$ pertencentes ao espaço g^n dos geradores $\{e_\mu\}$ de uma álgebra de Clifford C^n. Os outros objetos de C^n são descritos pelas demais letras, em especial h, p, q, r, s, t, u, v, w, , a saber, $u = u^A e_A$. Quando nã há dúvidas (e no § 15º), utilizamos a convenção somatória de Einstein. Nos objetos pertencentes a uma álgebra de Clifford, no entanto, nem sempre foi possível o uso desta convenção, que foi convenientemente - - em todos os casos - substituída ou elucidada. A função f que leva do objeto x ao objeto y foi escrita à maneira algébrica (vide (27) na Bibliografia), ou seja, $(x)f = y$, o que significa, $f : x \mapsto y$. As aplicações indicam-se com a seta simples. Assim, sendo A e B dois conjuntos, a aplicação f de A sobre B se escreve, $f : A \to B$.

O produto cartesiano foi sempre indicado por X; o produto ten sorial ou produto direto, por $\otimes$; o produto tensorial simetrizado, por $\odot$, o produto exterior, $\wedge$. Aos produtos diretos com vários fatores, escrevemos $\overset{k}{\underset{i=1}{\otimes}} U$; às somas diretas, $\oplus \sum_{i=1} A_i$. O produto de dois objetos "complexificados" de uma álgebra de Clifford simples (6.1) - (6.5) foi estendido às álgebras respectivas.

As noções de álgebra necessárias ao presente trabalho se encontram basicamente em quatro obras, (12), (27), (31) e (7), sendo que a última foi obra amplamente consultada para as diversas seções dos §§ 11º - 14º.

Referências à bibliografia, obviamente, são dadas por números entre parênteses (11), (32), ou por números entre parênteses seguidos de vírgula, (11,32). Números entre parênteses separados por um ponto referem-se a equações. Assim (2.4) é a 4a. equação numerada do § 2º. Teoremas, definições, lemas, corolários são numerados consecutivamente. Números fora de parênteses, 11.12, a eles se referem: no caso, definição 12 do § 11º.

I - INTRODUÇÃO

As álgebras de Clifford foram estudadas pela primeira vez por W.K. Clifford em 1878, num pequeno trabalho onde se generalizavam certas noções presentes no cálculo dos quatérnions, de Hamilton, e nas álgebras de Grassmann (15). Neste trabalho, Clifford obtém álgebras geradas por um conjunto de n elementos e_μ ($\mu = 1, 2, 3, \ldots, n$), que obedecem à regra associativa de multiplicação:

$$e_\mu \; e_\nu + e_\nu \; e_\mu \equiv \left[e_\mu ; e_\nu \right]_+ = 2\,\delta_{\mu\nu}\, e_o \tag{1.1}$$

(e_o é a identidade multiplicativa do anel gerado pelos e_μ). Clifford,em seu trabalho, não partiu da relação (1.1); obteve-a, ao contrário, como uma conseqüência de sua definição para o produto de dois vetores como sendo a soma de um "produto interno" e de um "produto externo" (32). No momento, no entanto, seria interessante motivar-se (1.1) com um exemplo famoso na Física: é bem sabido como Dirac (20,21), procurando fatorar a equação relativística de 2a. ordem que estendia a equação de Schrödinger, foi levado ao problema de exprimir uma forma quadrática através do produto de duas formas lineares:

$$\begin{aligned}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) &\equiv (\sum_\mu x_\mu^2) = (\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)^2 \equiv \\ &\equiv (\sum_\mu \alpha_\mu x_\mu)^2\end{aligned} \tag{1.2}$$

Não obrigando os coeficientes α_μ a comutarem entre si, Dirac obteve para eles a condição multiplicativa

$$[\alpha_\mu, \alpha_\nu]_+ = 2\,\delta_{\mu\nu}\, I \tag{1.3}$$

(onde I é, novamente, uma identidade). (1.3) é a mesma condição (1.1) de Clifford. Um tratamento matemático (45) pode obter (1.1) (e (1.3)) através das seguintes condições: seja V um espaço vetorial dotado de um produto interno simétrico (x, y). Construamos entre seus vetores x, y, z, ..., um produto tal que

$$\begin{aligned} x(y + z) &= xy + xz \\ (x + y)z &= xz + yz \\ (xy)z &= x(yz) \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$xy + yx = 2(x,y) \tag{1.5}$$

A multiplicação pelos escalares $\lambda \in \underline{K}$, conjunto dos escalares de V, comuta com os vetores e seus produtos, e é também associativa a eles. (1.5) implica

$$[\, e_\mu, e_\nu\,]_+ = 2\eta_{\mu\nu} \tag{1.6}$$

$$\eta_{\mu\nu} = (e_\mu, e_\nu)$$

para os e_μ, base ortogonalizada de V (com os $\eta_{\mu\mu} = \pm 1$). (1.6) é uma versão ligeiramente mais geral que (1.1) ou (1.3). Dados vetores $\bar{e}_\mu$ que descrevam V linearmente, e tais que $(\bar{e}_\mu, \bar{e}_\nu) = g_{\mu\nu}$, obtemos

$$(1.7) \qquad [\, \bar{e}_\mu , \bar{e}_\nu \,]_+ = g_{\mu\nu}$$

que vai um passo além de (1.6). Mas é sabido que podemos achar números $h_{\mu}^{\;\;\alpha}$, obedecendo a

$$(1.8) \qquad \bar{e}_\mu = h_{\bar{\mu}}^{\;\;\alpha}\, e_\alpha$$

$$(1.9) \qquad h_{\bar{\mu}}^{\;\;\alpha}\, h_{\bar{\nu}}^{\;\;\beta}\, \eta_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}$$

de tal forma que, para os e_{μ} : Obedecendo a (1.6),

$$[\, \bar{e}_\alpha , \bar{e}_\beta \,]_+ = 2\, g_{\alpha\beta}$$

Os $h_{\bar{\mu}}^{\;\;\alpha}$ nos possibilitam diagonalizar o $g_{\mu\nu}$; podemos interpretá-los (como é bem sabido), como sendo os valores locais dos campos de n-adas, se V for visto como hiperplano tangente à multiplicidade (manifold). Entidades que obedecem a (1.1) ou (1.6) constituirão, para nós, os geradores de uma álgebra de Clifford; a passagem de (1.6) a (1.1), ainda, é trivial, de modo que nosso estudo ficará centralizado nos objetos cuja anticomutação é ortogonal (1.1).

II - PROPRIEDADES GERAIS

Partimos da seguinte definição:

2.1. Definição. O anel de Clifford é o anel dos objetos $e = \{e_\mu\}$, que obedecem a (1.1) ou a (1.6). A álgebra de Clifford é a extensão linear do anel de Clifford. Escreveremos, para ambos, C^n, onde n é o número dos geradores e. §§

2.1 é a definição mais espontânea; outras definições serão vistas no decorrer de nossa exposição. Talvez a que se sugira de imediato seja aquela que conecta o anel e a álgebra ao grupo livre F sobre os objetos e. Os elementos do anel C^n demarcam classes de equivalência nas palavras de F; quer dizer, C^n é isomorfo a F mod certas equações de restrição. De fato, as equações (1.1) e (1.6) nos permitem reduzir as palavras de F além das simplificações que se admitem num grupo livre. Cada classe de equivalência demarcada em F, depois de feitas as simplificações dadas em (1.1) ou (1.6), terá a forma

(2.1) $$e_{\alpha'} e_{\beta'} \dots e_{\lambda'} , \quad \alpha' \neq \beta' \neq \lambda' \quad , \{\alpha', \beta' \dots \lambda'\} \subseteq \{1,2,\dots n\}$$

Podemos ordená-las todas, de modo a que obtenhamos $\alpha' > \beta' > \dots > \lambda'$; assim,

(2.2) $$e_{\alpha'} e_{\beta'} \dots e_{\lambda'} = \varepsilon\, e_{\alpha} \cdot e_{\beta} \dots e_{\lambda}$$

$\alpha \beta \dots \lambda$ constituindo uma permutação de $\alpha' \beta' \dots \lambda'$ e $\varepsilon = +1$ ou -1, conforme tal permutação seja par ou ímpar; $\alpha > \beta > \dots > \lambda$. Qualquer palavra pode então ser escrita.

(2.3) $$e_n^{\varepsilon_{A(n)}} \cdot e_{n-1}^{\varepsilon_{A(n-1)}} \dots e_2^{\varepsilon_{A(2)}} \; e_1^{\varepsilon_{A(1)}} = e_A$$

$\varepsilon_{A\mu} = 1$ ou 0. O índice A é um vetor pertencente a um módulo cujos escalares são inteiros mod 2. Isto é,

$$A = \varepsilon_{A\mu}\, u^{\mu}\,, \qquad \varepsilon_{A\mu} \in \underline{Z}_2 \tag{2.4}$$

Tomaremos os u^{μ} como a própria base dos números binários, quer dizer, $u^{\mu} = 2^{\mu-1}$. De modo que A será tanto visto como um índice quanto como um vetor e um número. De imediato, $A + A = 0$. Utilizaremos, com freqüência, as notações

$$\begin{cases} 0 = \sum\limits_{\mu} 0.\ u^{\mu} & (\text{ou } \varepsilon_{A\mu} = 0,\ \forall\mu\,) \\ N = \sum\limits_{\mu} 1.\ u^{\mu} & (\text{ou } \varepsilon_{A\mu} = 1,\ \forall\mu\,) \end{cases} \tag{2.5}$$

Também muito empregaremos:

<u>*2.2 Definição.*</u> $|A| = \sum\limits_{\mu} \varepsilon_{A\mu}$ (não mod 2), será chamado ordem de e_A;

$(A) = \{\, \mu \mid \varepsilon_{A\mu} = 1 \,\}$, é o <u>conjunto gerador</u> de e_A. §§

Entre outras operações entre os índices, incluimos

$$A \cap B = \sum_{\mu} \varepsilon_{A\mu}\, u^{\mu} \qquad \mu \in (A) \cap (B) \tag{2.6}$$

$$A \cup B = A + B + A \cap B \tag{2.7}$$

Podemos agora enunciar:

$\varepsilon_{A\mu} = 1$ ou 0. O índice A é um vetor pertencente a um módulo cujos escalares são inteiros mod 2. Isto é,

$$(2.4) \qquad A = \varepsilon_{A\mu}\, u^{\mu} , \qquad \varepsilon_{A\mu} \in \underline{Z}_2$$

Tomaremos os u^{μ} como a própria base dos números binários, quer dizer, $u^{\mu} = 2^{\mu-1}$. De modo que A será tanto visto como um índice quanto como um vetor e um número. De imediato, $A + A = 0$. Utilizaremos, com freqüência, as notações

$$(2.5) \qquad \begin{cases} 0 = \sum\limits_{\mu} 0.\ u^{\mu} & (\text{ou } \varepsilon_{A\mu} = 0,\ \forall \mu) \\ N = \sum\limits_{\mu} 1.\ u^{\mu} & (\text{ou } \varepsilon_{A\mu} = 1,\ \forall \mu) \end{cases}$$

Também muito empregaremos:

<u>*2.2 Definição.*</u> $|A| = \sum\limits_{\mu} \varepsilon_{A\mu}$ (não mod 2), será chamado ordem de e_A; $(A) = \{ \mu \mid \varepsilon_{A\mu} = 1 \}$, é o <u>conjunto gerador</u> de e_A. §§

Entre outras operações entre os índices, incluimos

$$(2.6) \qquad A \cap B = \sum_{\mu} \varepsilon_{A\mu}\, u^{\mu} \qquad \mu \in (A) \cap (B)$$

$$(2.7) \qquad A \cup B = A + B + A \cap B$$

Podemos agora enunciar:

2.3. Teorema. C^n tem dimensão 2^n. §§

O índice A, segundo (2.3) e (2.4), pode assumir 2^n valores diferentes. É fácil ver que, dados e_A e e_B, $e_A = e_B$ se e somente se $A = B$, o que implica na independência linear dos objetos e_A

2.4. Teorema. $e_A\, e_B = \xi_{AB}\, e_{A+B}$, $\xi_{AB} = \pm 1$. §§

O índice ξ_{AB} será calculado explicitamente em 3.5. 2.1 implica a associatividade do produto, o que também se confirmará em 3.5.

Consideremos agora objetos $\{ e'_\mu \}$ que se sujeitam ao produto (1.6). 2.4 torna-se, para os e'_A gerados pelos e',

2.5. Teorema. $e'_A\, e'_B = \lambda_{AB}\, e'_{A+B}$, $\lambda_{AB} = \eta_{A \cap B}\ \xi_{AB}$.§§

Definimos $\eta_A = (\eta_{An})^{\varepsilon_{An}} \ldots (\eta_{22})^{\varepsilon_{A2}} (\eta_{11})^{\varepsilon_{A1}}$.

2.6. Teorema. Se o conjunto $\{ e_A \}$ tem $\underline{n}$ elementos, tais que nenhum deles seja o produto de alguns dos demais, então $\{ e_A \}$ gera a base de C^n.§§

O próximo teorema nos permitirá a redução das estruturas geradas por (1.6) àquelas geradas por (1.1).

2.7. Teorema. $C'^n \cong C''^n$, onde os objetos $e'_A \in C'^n$ obedecem a $e'_A\, e'_B = \lambda'_{AB}\, e'_{A+B}$ e os e''_A obedecem a relação similar. $\lambda' \neq \lambda''$, mas $\xi'_{AB} = \xi''_{AB}$.§

Defina-se um mapeamento h: $\lambda' \times C'^n \longrightarrow \lambda'' \times C''^n$, onde λ' é o conjunto dos λ'_{AB}. Este mapeamento é dado por

$$(\lambda' e'_A)h = (\lambda')h\ (e'_A)h$$

$$(e'_A)h = e''_A$$

$$(\lambda'_{AB})h = \lambda''_{AB}$$

Já que $(e'_A\, e'_B)h = (\lambda'_{AB}\, e'_{A+B})h = \lambda''_{AB}\, e''_{A+B} = e''_A\, e''_B$, h é um homomorfismo. E como $(e''_o)h^{-1} = (\lambda''_{AA})h^{-1}(e''_A\, e''_A)h^{-1} = \lambda'_{AA}\, e'_A\, e'_A = e'_o$, h é um isomorfismo, porque Ker $h = e_o$. §§

<u>*2.8. Corolário.*</u> $C^n \cong C'^n$. §§

Estabelecemos assim um isomorfismo entre todas as álgebras de Clifford cujos geradores sejam de mesmo número, e cujo produto escalar(,) seja não-singular. Desta forma, grande parte da teoria das álgebras Clifford recai sobre a teoria das álgebras "ortogonais", ou seja, as álgebras onde $\lambda_{AB} = \xi_{AB}$ (àquelas onde tal igualdade não se verifica, chamaremos álgebras <u>pseudo-ortogonais</u>). Para as álgebras ortogonais é fácil demonstrar uma série de propriedades de comutação e anticomutação entre os elementos de sua base que muito sugerem a respeito da sua estrutura qualquer álgebra da C^n. É o que consideraremos em seguida.

III - COMUTAÇÃO E ANTICOMUTAÇÃO EM C^n

As propriedades estudadas na presente seção valem para $n \geq 2$

(C^1 = $\underline{C}$, o corpo dos complexos, onde estas propriedades tornam-se triviais). No primeiro lema, é feita a importante distinção entre as álgebras "pares" ($\underline{n} \equiv 0 \bmod 2$) e as "ímpares" ($\underline{n} \equiv 1 \bmod 2$). Tal distinção separa-as em álgebras simples e semi-simples, respectivamente, conforme se verá em 3.1 . Outro objetivo aqui, ao qual chegamos num dos colorários do mesmo 3.1, é calcular o valor de ξ_{AB} na fórmula

$$e_A\, e_B = \xi_{AB}\, e_{A+B} \tag{3.1}$$

que dá o produto entre dois elementos quaisquer da base de uma álgebra ortogonal. Tal fórmula, citada em (12, 45 e 47) não é demonstrada nestes textos usuais de referência (e(12) chega mesmo a postulá-la).

3.1. Lema. Se no produto $e_A\, e_B = \xi_{AB}\, e_{A+B}$, $\xi_{AB} = \xi_{BA}$ para todo $e_B \in C^n$, então:

$$\begin{cases} e_A = e_o \ (n \equiv 0 \bmod 2) \\[2ex] e_A = e_o \ \text{ ou } \ e_A = e_N \ (n \equiv 1 \bmod 2)\,. \ \S\S \end{cases}$$

O lema dá as condições para que um elemento comute com todos os elementos de C^n. Para as álgebras "pares", há apenas um elemento em tais condições, a identidade e_o . Para as álgebras "ímpares", dois são os elementos com esta propriedade, a identidade e_o e o pseudo-escalar e_N. Este lema repete, algebricamente, o corolário do lema de Schur na teoria das representações lineares dos grupos (7); em sua demonstração consideraremos o elemento genérico e_B decomposto em seus geradores, ou seja, conforme (2.3),

$$e_B = e_n^{\varepsilon_{Bn}} e_{n-1}^{\varepsilon_{Bn-1}} \ldots e_2^{\varepsilon_{B2}} e_1^{\varepsilon_{B1}}$$

É trivial que e_o comuta com qualquer e_B, tanto nas álgebras pares quanto nas ímpares. Suponhamos agora que $e_A = e_\alpha$, ou seja, e_A é um dos geradores de C^n. Ao estudar seu produto com e_B, suponhamos que $\varepsilon_{B\alpha} = 0$ - - isto é, e_α não é um dos geradores de e_B. Formemos seu produto, e suponha-se a comutatividade:

$$e_\alpha e_B = e_B e_\alpha$$

$$e_\alpha e_n^{\varepsilon_{Bn}} e_{n-1}^{\varepsilon_{B-1}} \ldots e_2^{\varepsilon_{B2}} e_1^{\varepsilon_{B1}} = e_n^{\varepsilon_{Bn-}} e_{n-1}^{\varepsilon_{Bn-1}} \ldots e_2^{\varepsilon_{B2}} e_1^{\varepsilon_{B1}} e_\alpha$$

Para obter-se o produto $\xi_{\alpha B} e_{\alpha+B} = \xi_{B\alpha} e_{\alpha+B}$, é preciso que coloquemos e_α "dentro" de e_B de tal maneira que $\lambda' > \alpha > \lambda$, λ e $\lambda' \varepsilon (B)$. e_α "pula" sobre $m_\alpha = \sum_{\lambda > \alpha}^{n} \varepsilon_{\beta\lambda}$ geradores; pela direita, pula sobre $n_\alpha = \sum_{1}^{\lambda < \alpha} \varepsilon_{\beta\lambda}$ geradores em e_B. Suposto por hipótese que comutem e_α e e_B, então $n_\alpha \equiv m_\alpha \bmod 2$. Assim sendo, se e_α comuta com e_B, e_β, $\beta \varepsilon (B)$, $\beta > \alpha$ sendo o primeiro índice para o qual $\varepsilon_{B\beta} = 1$, não comuta com e_B. Quer dizer, se escolhermos um $e_{B'}$, onde $\varepsilon_{B\alpha} = 1$, então, e_α não comutará com $e_{B'}$.

Deste modo, o objeto e_A que comuta com todos os e_B , e que é diferente da identidade, não é um dos geradores. Porque então, suponha-se, agora, que e_α seja tal que $\alpha \varepsilon (B)$. Imponha-se a comutatividade $e_\alpha e_B = e_B e_\alpha$. Neste caso, $n_\alpha \equiv (m_\alpha + 1) \bmod 2$. E, em conseqüência, e_α não comuta com $e_{B'}$, onde $\varepsilon_{B'\alpha} = 0$.

Escolhamos agora $e_A = e_N$. Para os grupos pares $|N| \equiv 0 \bmod 2$ e e_α sendo um dos geradores, é fácil ver que $\xi_{\alpha N} = - \xi_{N\alpha}, \forall_\alpha, \alpha \varepsilon (N)$ - o que muito se utiliza nos cálculos com a álgebra de Clifford-Dirac, onde $e_N = \gamma_5$, e $\gamma_5 \gamma_\mu = - \gamma_\mu \gamma_5$. Quando $|N| \equiv 1 \bmod 2$, o mesmo raciocínio empregado anteriormente mostra que $\xi_{\alpha N} = \xi_{N\alpha}, \forall\alpha \ \alpha \varepsilon (N)$.

Quer dizer, quando a álgebra é "ímpar", todos os geradores comutam com o pseudo-escalar e_N.

Para elementos e_A onde $|A| > 1$ - elementos com mais de um gerador - vale o raciocínio exposto, desde que mantidos os geradores que constituem e_A na ordem determinada em (2.3), com o que os geradores não se "cruzam" ao efetuarmos o produto $e_A e_B$. Donde o lema. §§

<u>3.2. *Corolário*.</u> Seja $e_A \varepsilon C^n$, $|A| \equiv 0 \bmod 2$. Então $\xi_{A\mu} = - \xi_{\mu A}$, $\mu \varepsilon (A)$, e $\xi_{A\mu} = \xi_{\mu A}$, $\mu \not\varepsilon (A)$. Se $|A| \equiv 1 \bmod 2$, $\xi_{A\mu} = \xi_{\mu A}$, $\mu \varepsilon (A)$, e $\xi_{A\mu} = - \xi_{\mu A}$, $\mu \not\varepsilon (A)$.§§

<u>3.3. *Corolário*.</u> Seja $e_A \varepsilon C^n$, $|A| \equiv 0 \bmod 2$. Então $\xi_{AB} = \xi_{BA}$, se e somente se $(B) \subseteq (N + A)$. Se $|A| \equiv 1 \bmod 2$, $\xi_{AB} = \xi_{BA}$ se e somente se $(B) \subseteq (A)$. §

Se o elemento tem ordem par, ele comutará com todos os objetos formados pelos geradores que não os seus; se o elemento é de ordem ímpar, ele comutará com todos aqueles formados pelos seus próprios geradores. 3.3, cuja demonstração é a mesma de 3.2, enumera todos os objetos que comutam com e_A e cujo índice está entre 0 e $|A + N|$ (para os pares) e entre 0 e $|A|$ (para os ímpares). §§

<u>*3.4. Corolário.*</u> No produto $e_A\, e_\mu = \xi_{A\mu}\, e_{A+\mu}$ $\xi_{A\mu} = (-1)^{\zeta_{A\mu}}$, $\zeta_{A\mu} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda<\mu} \varepsilon_{A\lambda}$. §

O lema 3.1 faz o cálculo explícito de $\zeta_{A\mu}$. §§

<u>*3.5. Corolário.*</u> Na fórmula do produto $e_A\ e_B = \xi_{AB}\, e_{A+B}$,

$$
(3.2) \qquad \begin{cases} \xi_{A,B} = (-1)^{\xi_{AB}} \\[2ex] \zeta_{AB} = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \varepsilon_{A\mu} \sum_{\lambda=1}^{\lambda<\mu} \varepsilon_{A\lambda} \end{cases}
$$

$$
(3.3) \qquad \begin{cases} \xi_{A,B+C} \equiv \xi_{A(B+C)} = \xi_{AB}\, \xi_{AC} \\[2ex] \xi_{A+B,C} \equiv \xi_{(A+B)C} = \xi_{AC}\, \xi_{BC} \ . \ §§ \end{cases}
$$

No indicador $\xi_{A,B} \equiv \xi_{AB}$ os índices são distribuídos em relação à soma. Utilizaremos a notação $\xi_{AA} = \xi_{A^2}$, devido a (3.3).

3.6. Corolário. $(e_A\, e_B)e_C = e_A(e_B\, e_C)$. §

$$(e_A\, e_B)e_C = \xi_{AB}\, e_{A+B}\, e_C = \xi_{AB}\, \xi_{(A+B)C}\, e_{A+B+C} =$$

$$= \xi_{AB}\, \xi_{AC}\, \xi_{BC}\, e_{A+B+C}\,.$$

$$e_A\,(e_B\, e_C) = e_A\, \xi_{BC}\, e_{B+C} = \xi_{BC}\, \xi_{A(B+C)}\, e_{A+B+C} =$$

$$= \xi_{AB}\, \xi_{AC}\, \xi_{BC}\, e_{A+B+C}\,. \text{ §§}$$

O produto, assim, se confirma associativo, e ao mesmo tempo temos um bom exemplo da maleabilidade da notação empregada.

IV - COMUTAÇÃO E ANTICOMUTAÇÃO EM C^n: REGRAS DE CONTAGEM

Nosso objetivo agora é contar os produtos que comutam e os que anticomutam em C^n. Os resultados do § 3º podem ser sumarizados em:

4.1. Teorema. Seja $e_A \varepsilon C^n$, seja A o conjuntodos μ tais que $\xi_{\mu A} = \xi_{A\mu}$. Seja $\tilde{A}$ o conjunto dos ν tais que $\xi_{\nu A} = - \xi_{A\nu}$. Então $\xi_{BA} = \xi_{AB}$ para todo e_B tal que:

i) $(B) \subseteq A$, ou

ii) Se $\mu \varepsilon (B)$ e $\mu \varepsilon \tilde{A}$, então $\sum_{\mu} \varepsilon_{B\mu} \equiv 0 \bmod 2$. §§

e_A comuta com todo e_B cujos geradores estão em A ou que possui um número par de geradores em $\tilde{A}$. Este teorema enumera todos os casos de comutatividade para e_A. Considere-se o conjunto $(A) \cap (B)$. Será vazio ou não. Se vazio, $(B) \subseteq (N + A)$; se não vazio, ou $(A) \cap (B) = (A)$ (o que implica $(A) \subseteq (B)$), ou $(A) \cap (B) = (B) = (B)$ (o que implica $(B) \subseteq (A)$), ou $(A) \cap (B) \neq (A)$ ou (B), o que é visto no item ii) do teorema.

O que se segue é a prova de uma bela simetria interna a C^n: dado um elemento genérico e_B, $B \neq 0$ e $\neq N$ (para as álgebras ímpares), este objeto e_B comutará com exatamente 2^{n-1} outros elementos na base de C^n. Um cálculo direto verifica esta propriedade para C^2 (os quaternions) e para C^4 (a álgebra de Dirac); a prova geral baseia-se no teorema 4.1. Como consequência, o número de objetos que comutam ou anticomutam com um objeto genérico da base da álgebra não depende da ordem deste objeto. Esta propriedade sugere que a base de C^n é formada por objetos mais homogêneos do que se esperaria à primeira vista - e como tal homogeneidade se refletirá ainda no fato de C^n ser apenas uma semi-gradada(29), sugere-se um problema que trataremos no § 9º: quais as permutações possíveis entre os elementos da base de C^n que conservam a regra do produto (3.1)? Veremos que tais permutações existem, e que seu número não é trivial - o que quer dizer, há bastantes propriedades algébricas associadas à base de C^n, e que independem da ordem dos elementos considerados.

4.2. Teorema. Seja $e_A \varepsilon C^n$, $n \equiv 0 \bmod 2$, $A \neq 0$. Então há 2^{n-1} valores para B tais que $\xi_{AB} = \xi_{BA}$. §

Consideremos primeiro $|A| \equiv 1 \bmod 2$. Então, nem (A) nem $(N+A)$ são o conjunto vazio. Suponhamos que $|A| = a$. Então $|N+A| = n-a$. Segundo 4.1, sendo $(A+N) = \tilde{A}$ e $(A) = A$, a análise combinatória nos permite obter o número total de objetos com os quais e_A comuta: nº de elementos que comutam $= C^{o}_{n-a}(C^{o}{}_{a} + C'{}_{a} + \ldots C^{a}_{a}) + C^{2}_{n-a}(C^{o}{}_{a} + \ldots + C^{a}_{a}) + \ldots +$

$$+ C^{n-a-1}_{n-a}(C^{o}{}_{a} + \ldots + C^{a}_{a}) = \{ \sum_{j\ p^{ar}, j=0}^{(n-a)-1} C^{j}_{n-a} \}\ 2^{a} = 2^{n-a-1}2^{a} = 2^{n-1}$$

Seja agora $|A| \equiv 0 \bmod 2$. Para $(A) = \phi$ $(e_A = e_o)$, trivialmente

$$C^{o}_{o}\ (C^{o}_{A} + C^{1}_{1} + \ldots + C^{n}_{A}) = 2^{n}$$

Para $(A) \neq \phi$, como acima,

$$= C\ {}_{a}(C_{n-a} + \ldots + C^{n-a}_{n-a}) + C_{a}(C_{n-a} + \ldots + C^{n-a}_{n-a}) + \ldots +$$

$$\ldots + C^{a}_{a}(C_{A-a} + \ldots + C^{n-a}_{n-a}) = (\sum_{j\ p^{ar},\ j=0}^{a} C^{j}{}_{a})2^{n-a} = 2^{n-1}. \ \S\S$$

4.3. Teorema. Seja $e_A \in C^n$, $n \equiv 1 \bmod 2$, $A \neq 0$ e $\neq N$. Então há 2^{n-1} objetos da base de C^n - ou seja, há 2^{n-1} valores para B tais que e_B comuta com e_A, ou $\xi_{AB} = \xi_{BA}$. §

Para $|A| = 1 \bmod 2$, $(N+A) \neq$ ou $(N+A) = \phi$. Neste último caso, $e_A = e_N$ e

$$C_o^o \, (C_A^o + \ldots + C_n^n) \equiv 2^n$$

$(N+A) \neq \phi$ implica, do mesmo modo que antes,

$$\left\{ \sum_{j \text{ par}, \, j=0}^{n-a} C_{n-a}^{a} \right\} 2^a = 2^{n-1}$$

Para $A \equiv 0 \bmod 2$, ou $A = 0$ ou $A \neq 0$. Na situação não trivial, como em 4.2, obtemos:

$$\left\{ \sum_{j \text{ par}, \, j=0}^{a} C_a^j \right\} 2^{n-a} = 2^{n-1}. \; \S\S$$

4.4. Corolário. Entre os 2^{2n} produtos $e_A \, e_B$, se $n \equiv 0 \bmod 2$ há $2^{n-1}(N+2)$ produtos que comutam.§§

4.5. Corolário. Da mesma forma, se $n \equiv 1 \bmod 2$, há $2^{n-1}(n+3)$ produtos que comutam. §§

V - SUBÁLGEBRAS QUATERNIÔNICAS EM C^n

Uma outra simetria da base de C^n refere-se aos produtos $e_A \, e_B$ que anticomutam. Conforme veremos na presente seção, tais elementos são elementos isomòrfos ao grupo dos quatérnions, quaisquer que sejam A e B.

Em nossa prova empregaremos a forma normalizada para os elementos de Clifford. O elemento normalizado r_A é definido:

(5.1)
$$r_A = \sqrt{\xi_{A^2}}\; e_A$$
$$(r_A)^2 = \xi^2_{A^2}\, e_o = e_o$$

Provamos em seguida:

5.1. Teorema. Dados $e_A, e_B \in C^n$ tais que $\xi_{AB} = -\xi_{BA}$, r_A, r_B, r_{A+B} acrescidos da identidade $e_o = r_o$ são isomorfos aos quatérnions. §

Trivialmente, $r_A^2 = r_B^2 = r_{A+B}^2 = r_o$. E também

$$r_A\, r_B = \sqrt{\xi_{A^2}\;\xi_{B^2}}\;\xi_{AB}\; e_{A+B} = \sqrt{\xi_{A^2}\;\xi_{B^2}}\;\xi_{AB}\;\xi_{(A+B)^2}\sqrt{\xi_{(A+B)^2}}\; r_{A+B}$$

E já que $\xi_{(A+B)^2} = -\,\xi_{A^2}\,\xi_{B^2}$, pois $\xi_{AB} = -\,\xi_{BA}$,

$$r_A\, r_B = \sqrt{-(\xi_{A^2}\;\xi_{B^2})}\;\xi_{AB}\;(-\xi_{A^2}\;\xi_{B^2})\; r_{A+B} \qquad \text{donde}$$

(5.2)
$$r_A\, r_B = -\,i\,\xi_{AB}\;\xi_{A^2}\;\xi_{B^2}\; r_{A+B}$$

O mesmo cálculo leva a

(5.3) $$r_{A+B}\, r_A = -\, i\xi_{AB}\, \xi_{A^2}\, \xi_{B^2}\, r_B$$

(5.4) $$r_B\, r_{A+B} = -\, i\xi_{AB}\, \xi_{A^2}\, \xi_{B^2}\, r_A$$

Assim sendo, r, r_A, r_B e r_{A+B} constituem os elementos da base de uma álgebra de quatérnions. §§

Podemos concluir com

5.2. Corolário. Qualquer estrutura quaterniônica pode ser considerada como uma subálgebra não-trivial de C^n, $n \geq 2$. §§

Isto é, as costumeiras bases quaterniônicas para tetradas (1, 6, 46) podem ser encaradas como subálgebras de uma álgebra de Clifford com ordem mais ampla. Esta propriedade muito simples introduz uma complicação nos formalismos quaterniônicos, desde que através dela estendemos indefinidamente e de modo natural o número de graus de liberdade internos que se obtêm ao definirem-se bases de tetradas para uma multiplicidade espaço-tempo (uma outra extensão natural, vale dizer, é considerar estas mesmas bases quaterniônicas como sendo subálgebras de uma álgebra de Cayley (13)). A conexão entre os quatérnions e estruturas mais gerais foi o ponto de partida que levou W.K. Clifford a seu trabalho de 1878. Neste trabalho Clifford demonstra um resultado muito mais amplo do que a simples continência de quatérnions em C^n; ele mostra como as álgebras de quatérnions se arranjam para dar origem a C^n. Explanar tal arranjo é nosso objetivo seguinte.

VI - CONEXÃO ENTRE AS ÁLGEBRAS PARES E AS ÁLGEBRAS ÍMPARES

No que se segue, o índice p varia sobre os naturais, 1, 2, ... A conexão entre as álgebras pares e ímpares é muito próxima à conexão entre os números reais e os complexos: pois um objeto pertencente a uma álgebra ímpar é como que a extensão complexa da álgebra par imediatamente anterior. Com esta propriedade, que demonstraremos logo em seguida, reduz-se o estudo das álgebras C^n àquelas onde $n \equiv 0 \bmod 2$. Necessitamos da seguinte convenção: o par ordenado de álgebras (C, C) é o conjunto dos objetos (u, v) que obedecem às seguintes regras de operação:

(6.1) $$(u+u', v+v') = (u,v) + (u,v') + (u',v) + (u',v')$$

(6.2) $$\alpha(u,v) = (\alpha u, \alpha v), \ \alpha \in \underline{k}$$

(6.3) $$[\alpha(u,v)]\,(u',v') = (u,v)\,[\alpha(u',v')]$$

(6.4) $$\alpha[(u,v) + (u',v')] = \alpha(u,v) + \alpha(u',v')$$

(6.5) $$(\alpha+\beta)(u,v) = \alpha(u,v) + \beta(u,v)$$

(6.5) $$(u,v)(u',v') = (uu' + \xi vv', vu'+uv')$$

$u, v \in C$. Se $C = C^{2p}$, $\xi = \xi_{NN}$, onde $e_N \in C^{2p+1}$. Podemos agora provar:

6.1. Teorema. $C^{2p+1} \cong (C^{2p}, C^{2p})$ §

Como as propriedades de linearidade e associatividade resultam de (6.1) -

(6.6), descreveremos apenas a base de (C^{2p}, C^{2p}). Dado um objeto $e_A \varepsilon$ C este objeto estará associado a dois elementos da base de (C^{2p}, C^{2p}):

$$e_A \longrightarrow (e_A, 0) \quad e \quad (0, \xi_{AN}\, e_A)$$

Definindo-se $(e_A, 0) = e_A \ \varepsilon \ C^{2p+1}$, e $(0, \xi_{AN}\, e_A) = e_{N+A} \ \varepsilon \ C^{2p+1}$ e considerando-se os indicadores ξ_{NA} onde aparece o índice N como definidos em C^{2p+1}, (6.6) implica no isomorfismo, desde que os objetos assim definidos comportam-se como os objetos correspondentes em C^{2p+1}. §§

Propriedades associadas a 6.1 são:

6.2. Teorema. Se $n = 2p$, o centro de C^n é $\{\alpha e_o\}$; se $n = 2p + 1$, o centro de C^n é $\{\alpha e_o + \beta e_N\}$. §§

6.3. Teorema. Se A^n é o centro de C^n, $C^{2p}/A^{2p} \cong C^{2p}$, e $C^{2p+1}/A^{2p+1} \cong C^{2p}$. §

A primeira parte é trivial. A segunda pode ser vista nas seguintes etapas: (i) e_R e e_{N+R} pertencem ao mesmo coset. Pois $e_R A = \{ \pm e_R, \pm \pm \xi_{NR}\, e_{N+R} \} = \{ \pm e_R, \pm e_{N+R} \}$, e do mesmo modo, $e_{N+R} A = \{ \pm e_{N+R} \pm \pm \xi_{NN}\, \xi_{NR}\, e_R \} = \{ \pm e_{N+R}, \pm e_R \}$. (ii) Da mesma forma se verificam as identidades $e_R\, e_S \equiv e_R\, e_{N+S} \equiv e_{N+R}\, e_S \equiv e_{N+R}\, e_{N+S}$ mod A. §§

Podemos reunir tais resultados em:

6.4. Teorema. C^{2p} é simples; C^{2p+1} é semi-simples. §§

Ainda podemos incluir:

6.5. Definição. C^{n+} é a álgebra gerada por todos os e_A, $|A| \equiv 0 \bmod 2$; C^{n-} é o espaço vetorial cuja base são os e_A, $|A| \equiv 1 \bmod 2$. §§

6.6. Teorema. $C^{n+}\, C^{n+} = C^{n+} = C^{n-}\, C^{n-}$; $C^{n-}\, C^{n+} = C^{n+}\, C^{n-} = C^{n-}$.§

Dados e_A e e_B, e_{A+B} possui ordem $|A + B| \leq |A| + |B|$. Com maior detalhe, $|A + B| = |A| + |B| - 2k$, onde k é o número de geradores em comum entre e_A e e_B (ou seja, $k = |A \cap B|$). §§

6.7. Teorema. $C^{n+} \simeq C^{n-1}$.§

Suponha-se $n \equiv 0 \bmod 2$. Então os $e_n e_\mu$, $\mu = 1, 2, 3, \ldots n-1$ anticomutam e são isomorfos aos geradores de C^{n-1}. Suponha-se agora $n \equiv 1 \bmod 2$. Então os $e_{N+\mu}$, $\mu = 1, 2, \ldots, n-1$, também são isomorfos aos geradores de C^{n-1}, além de anticomutarem. Além do mais, seus produtos são sempre de ordem par e independentes linearmente. §§

Já que $C^{n-}\, C^{n-} = C^{n+}$, C^{n-} nunca será uma subálgebra do C^n. Os teoremas da presente seção implicam na sequência de isomorfismos:

6.8. Teorema. $C^{2p+1}/A^{2p+1} \simeq C^{2p+1+} \simeq C^{2p}$. §§

VII - PRODUTOS DIRETOS DE ÁLGEBRAS DE CLIFFORD.

Para que possamos chegar à conexão entre as álgebras de quatérnions e as de Clifford, conforme o próprio Clifford expôs em seu trabalho de 1878, é preciso ainda abordarmos os produtos diretos de duas quaisquer C^n e $C^{n'}$. Usaremos aqui amplamente 6.1.

7.1. Teorema. $C^{2(p+p')} \approx C^{2p} \otimes C^{2p'}$. Geradores de $C^{2(p+p')}$ são todos os $e_\mu \otimes e'_o$ e $i^p e_N \otimes e'_\mu$, onde $e_A \in C^{2p}$, $e'_A \in C^{2p'}$ e i é a unidade imaginária. §

O teorema resulta do cálculo direto. §§

7.2. Teorema. $C^{2(p+p')+1} \approx (C^{2(p+p')}, C^{2(p+p')}) \approx C^{2p} \otimes (C^{2p'}, C^{2p'}) \approx$

$\approx (C^{2p}, C^{2p}) \otimes C^{2p'} \approx C^{2p} \otimes C^{2p'+1} \approx C^{2p+1} \otimes C^{2p}$. §§

7.3. Teorema. $C^{2p+1} \otimes C^{2p'+1} \approx C^{2(p+p'+1)}$. Geradores de $C^{2(p+p'+1)}$ são os $(e_\mu \otimes e'_o, 0)$; $(0, e_\mu \otimes e'_o)$, $(i^p e_N \otimes e'_\mu, 0)$, $(0, i^p e_N \otimes e'_\mu)$.§§

Podemos agora formar as subálgebras usuais de $A \otimes B$:

7.4 Teorema. São subálgebras de $C^n \otimes C^{n'}$, $C^n \odot C^{n'}$ e $C^n \wedge C^{n'}$. §§

Com os resultados da presente seção definimos objetos de tipo tensorial dentro de C^n. Estes objetos ganham importância no estudo das equações para partículas com spin arbitrário, conforme se exemplificará no § 159.

VIII - ÁLGEBRAS DE CLIFFORD COMO PRODUTOS DIRETOS DE ÁLGEBRAS DE QUATÉRNIONS

O primeiro teorema é devido a Weyl. Aqui ele resulta diretamente de 7.1. Para a prova original, veja-se (7, 8, 10, 42).

8.1. Teorema. $C^{2p} = \otimes (H)^p$, onde $H = C^2$. §§

Com maiores detalhes, aplicaremos este teorema no § 12º. Aqui será expresso apenas o produto direto de quatérnions em termos das álgebras quaterniônicas incluídas em C^{2p}. Para tanto, façamos as seguintes convenções:

(8.1) $\quad e_M = e_\mu \, e_{\mu-1} \, e_{\mu-2} \dots e_2 \, e_1 \; , \qquad M \leq N$

(8.2) $\quad e_{\underline{M}} = e_{N+M}$

(8.3) Dado o gerador e_μ, $e_{\mu'} = e_{(\mu-1)}$ (o gerador imediatamente anterior).

No que se segue, $|M| \equiv |N| \equiv 0 \bmod 2$.

8.2. Teorema. Os objetos $e_o, ie_{\mu+\mu'}, e_{\underline{M}+\mu}, e_{\underline{M}+\mu'}$, geram uma álgebra de quatérnions. §

Como M tem ordem par, a prova é uma consequência direta de 4.1.§§

Chamando-se H^μ a álgebra definida em 8.2, concluiremos:

8.3. Teorema. $C^{2p} \approx \prod_{\mu=1}^{p} H^\mu \approx \otimes (H)^p$ §§

Os objetos que pertencem a diferentes H^{μ} comutam entre si. Para as álgebras ímpares,

<u>8.4. *Teorema*</u>. $C^{2p+1} \approx (\otimes(H)^{p}, \otimes(H)^{p}) \approx (\prod_{\mu=1}^{p} H^{\mu}, \prod_{\mu=1}^{p} H^{\mu})$. §§

Com o que concluimos o estudo e <u>review</u> das propriedades de C^{n} quando vista em função do grupo que podemos construir com os elementos de sua base. Nossa próxima etapa será o estudo das transformações lineares internas a C^{n}.

IX - PROPRIEDADES ALGÉBRICAS E OPERAÇÕES SOBRE VETORES DE CLIFFORD

<u>9.1. *Definição*</u>. $u = u^{A}\, e_{A}$ (onde usamos a convenção somatória de Einstein) é um vetor de Clifford. §§

Da mesma forma que os elementos da base de C^{n} são classes de equivalência de palavras de um grupo livre módulo certas equações de restrição (conforme foi visto em seguida a 2.1), também podemos caracterizar os vetores de Clifford como sendo classes de equivalência de combinações lineares de palavras pertencentes a um semigrupo livre sobre o alfabeto $\{ e_{\mu} \}$, módulo um certo ideal definível entre tais combinações lineares. Partindo desta idéia, Chevalley (13) construiu as álgebras de Clifford sobre a álgebra tensorial associada ao módulo vetorial. Se u e v forem vetores de Clifford, seu produto uv tem expressão, na base e_{A},

(9.1) $uv = \sum \xi_{AB}\, u^{A} v^{B} e_{A+B}$, o somatório sendo tomado primeiro sobre todos os valores de A e B que igualam A+B, e depois so bre todos os valores de $A+B$. Quer dizer, agrupamos primeiramente os coeficientes do elemento e_{A+B}, e depois somamos sobre todos os e_{A+B}. Os coeficientes dos vetores da base são $\sum_{A+B \text{ fixo}} \xi_{AB}\, u^A v^B$. A partir daqui assim abreviaremos, quando não houver dúvidas, estas somas. Exceções à regra serão sempre elucidadas.

9.2. Teorema. C^n admite como gradação não trivial apenas a gradação sobre $\underline{Z}_2$. §

Suponha-se C^n gradada. Então, já que $e_A\, e_o = e_A$,

$$\deg\,(A + 0) = \deg\,(A) + \deg\,(0) = \deg\,(A)$$

onde a primeira igualdade decorre da hipótese de gradação. Logo, $\deg(0)=0$. Seja agora e_A; como $e_A^2 = \pm\, e_o$,

$$\deg\,(A + B) = \deg\,(A) + \deg\,(A) = \deg\,(0) = 0$$

Esta equação apresenta, além da solução trivial $\deg\,(A) = 0$, a solução $\deg\,(A) \equiv 0,\ 1 \bmod 2$. De modo que C^n é $\underline{Z}_2$ - gradada. §§

C^n é considerada, de um modo geral no presente trabalho, como uma álgebra sobre um anel $\underline{K}$ com unidade e sem divisores de zero, e incluindo o corpo dos complexos como uma subestrutura. Para casos particulares, no entanto, os escalares deverão ser convenientemente ajustados.

9.3. Definição. O automorfismo principal de C^n é dado pelo mapeamento: $\sim : u = u^A e_A \longmapsto \tilde{u} = u^A \tilde{e}_A$, onde $\tilde{e}_A = (-1)^{|A|} e_A$. O antiautomorfismo principal de C^n é dado por $\dagger : u = u^A e_A \longmapsto u^\dagger = (u^A)^* e_A$, onde $*$ indica a conjugação complexa (ou operação equivalente) na componente u^A, e $e_A^\dagger = \xi_{A^2} e_A$. A conjugação complexa é dada por $* : u = u^A e_A \longmapsto u^* = (u^A)^* e_A$. A transposição é dada por $T: u = u^A e_A \longmapsto u^T = u^A e_A^T$, onde $e_A^T = (-1)^k e_A^\dagger$, sendo $k = |A| - \sum_{\alpha \in (A)} \alpha$. §§

9.4. Teorema. (i) $u^{**} = \tilde{\tilde{u}} = u^{\dagger\dagger} = u^{TT} = u$.

(ii) $(\tilde{u})^T = \widetilde{(u^T)}$; $(\tilde{u})^\dagger = \widetilde{(u^\dagger)}$.

(iii) $(u\, v)^\dagger = v^\dagger u^\dagger$.

(iv) $(u\, v)^T = v^T u^T$.

(v) $\widetilde{(u\, v)} = \tilde{u}\, \tilde{v}$. §

(i) e (ii) são triviais. (iii) decorre da sequência de igualdades

$$(u\, v)^\dagger = (u^R)^* (r^S)^* (e_R\, e_S)^\dagger = u^{R^*} v^{S^*} \xi_{RS}\, e_{R+S}^\dagger = u^{R^*} v^{S^*} \xi_{RS}\, \xi_{(R+S)^2}\, e_{R+S} =$$

$$= u^{R^*} v^{S^*} \xi_{RS}\, \xi_{RR}\, \xi_{RS}\, \xi_{SR}\, e_{R+S} = u^{R^*} v^{S^*} \xi_{RR}\, \xi_{SS}\, \xi_{SR}\, e_{R+S} =$$

$$= u^{R^*} v^{S^*} \xi_{RR}\, \xi_{SS}\, (e_R\, e_S) = u^{R^*} v^{S^*} (\xi_{RR}\, e_R\, \xi_{SS}\, e_S) = v^\dagger u^\dagger$$

(iv) decorre de (iii) e da definição de T. Observemos que † e T são construidos de tal modo que, ao se construirem as representações para a álgebra, a tais operações corresponderão, respectivamente, a conjugação hermitiana e a transposição de matrizes. Para uma álgebra de Clifford, como decorre de 9.3, a conjugação hermitiana é mais fundamental que a transposição. Importante decorrência destas definições será a ambiguidade de sinal dos espinores (conforme se verá em 10.8 e 12.1). §§

9.5. Definição. u é um vetor de Clifford regular se e somente se existir um $u^{-1} \in C^n$ tal que $uu^{-1} = u^{-1}u = e_o$. §§

Elementos regulares de C^n são todos aqueles invertíveis. Um exemplo, os vetores $x = x^\mu\, e_\mu$ e seus produtos, desde que tais vetores não sejam isotrópicos (i. e., não tenham norma nula). Para sugerir-se, no entanto, que a classe dos elementos regulares de C^n não é tão trivial, o próximo teorema é bastante elucidativo:

9.6. Teorema. Se os escalares de C^n são tomados sobre $\underline{R}$ (o corpo dos reais), então existem elementos regulares em C^n. §

Se $u = u^R\, e_R$, suponhamos que haja um $u^{-1} = (u^{-1})^R\, e_R$. Então, $uu^{-1} = e_o$,

$$uu^{-1} = u^R (u^{-1})^S \xi_{RS}\, e_{R+S} = e_o \tag{9.2}$$

$$\begin{cases} u^R\, (u^{-1})^S\, \xi_{RS} = 0 & R \neq S \\ u^R\, (u^{-1})^S\, \eta_{RS} = 1 & \eta_{RR} = \xi_R{}^2,\ \eta_{RS} = 0,\ R \neq S \end{cases} \tag{9.3}$$

Primeiro, note-se que, de fato, $uu^{-1} = u^{-1}u$. Depois, consideremos o sistema (9.3), nas incógnitas $(u^{-1})^R$. É um sistema inomogêneo, e possui 2^n equações. No caso geral, sua solução é não trivial. As equações homogêneas podem ser consideradas hiperplanos pela origem num espaço euclideano a 2^n dimensões, e (no caso geral), dois a dois destes hiperplanos podem ser escolhidos diferentes ou sem que qualquer um deles seja combinação linear de alguns dos outros. A equação inomogênea é um hiperplano que não contem a origem; em geral, sua normal pode ser escolhida de modo a que não seja paralela à normal de nenhum dos outros hiperplanos. De modo que sempre poderemos construir sistemas do tipo de (9.3) para que o sistema tenha solução; isto é, sempre poderemos construir vetores de Clifford regulares, quando os escalares forem tomados em $\underline{R}$. Definindo-se

$$\Delta = \det (a_{S,\ R+S})$$

(9.4)

$$a_{S,\ R+S} = u^R\ \xi_{RS} \qquad \text{(sem soma)}$$

e Δ^R = menor associado ao elemento $u^R\ \eta_{RR}$ (sem soma), em Δ

$$(u^{-1})^R = (-1)^R\ \frac{\Delta^R}{\Delta} \tag{9.5}$$

onde o índice R se toma como sendo o correspondente número binário (conforme (2.4)). §§

A generalização seguinte de 9.6 é espontânea:

9.7. Teorema. Se os escalares de C^n são tomados no anel com unidade $\underline{K}$, onde seus elementos podem ser escritos $u^A = \lambda^{Ai}\alpha_i$, e onde o produtos dos α_i é dado pela regra $\alpha_i\ \alpha_j = C_{ij}{}^k\ \alpha_k$, então C^n possui elementos regulares, desde que os λ^{Ai} e os $C_{ij}{}^k$ sejam reais. §

Pois notemos que a primeira equação de (9.3) pode ser escrita

$$u^R(u^{-1})^S\ \xi_{RS} = \lambda^{Ri}\ (\lambda^{-1})^{Sj}\ \alpha_i\ \alpha_j\ \xi_{RS} = \xi_{RS}\ \lambda^{Ri}\ (\lambda^{-1})^{Sj}\ C_{ij}{}^k\ \alpha_k = 0$$

Donde, $\xi_{RS}\ \lambda^{Ri}\ (\lambda^{-1})^{Sj}\ C_{ij}{}^k = 0$

Da mesma forma, a segunda equação se torna em

$$\eta_{RS}\ \lambda^{Ri}\ (\lambda^{-1})^{Sj}\ C_{ij}{}^o = 1$$

$$\eta_{RS}\ \lambda^{Ri}\ (\lambda^{-1})^{Sj}\ C_{ij}{}^m = 0, \qquad m \neq 0$$

onde $C_{ij}{}^o$ é o coeficiente da unidade α_o de $\underline{K}$ no produto $\alpha_i\ \alpha_j$. Chegamos à mesma situação que em 9.6; o que difere, no entanto, é a dimensão do espaço onde construiremos nossos hiperplanos. §§

9.8. Definição. O módulo da unidade $||u||$ é uma função $f\colon C^n \longrightarrow \underline{R}^+ \cup \{0\}$ tal que

$$\text{(i)} \quad ||u|| = 0\ , \qquad u \neq \alpha\, e_o\ , \qquad \alpha \in \underline{K}$$

(ii) $||e_o|| = 1.$

(iii) $||\alpha\, e_o|| = (\alpha)f\; ||e_o|| = (\alpha)f.$ §

Para $\alpha \in \underline{R}$ podemos escolher $(\alpha)f = |\alpha|$; para $\alpha \in \underline{C}$, $(\alpha)f = +(\alpha^*\alpha)^{1/2}$, como de hábito.

9.9. *Definição*. O produto escalar (u, v) é definido por:

(i) $(u, v) = ||u^\dagger\, v||$

(ii) $(\alpha + \beta)f = (\alpha)f + (\beta)$. §§

9.10. *Teorema*. (i) Se $\alpha \in \underline{C}$ e, $(\alpha)f = \alpha$ então

$$(u, v) = (u^A)^*(v^B)\,\delta_{AB}$$

(ii) $(e_A, e_B) = \delta_{AB}$, qualquer que seja f.

(iii) $(e_\mu\; e_\nu, e_\rho\; e_\sigma) = (e_\mu, e_\rho)(e_\nu, e_\sigma)$. §§

9.10 mostra como é natural a definição proposta para o produto escalar em C^n. Em especial, note-se como (ii) e (iii) possuem regras correspondentes na álgebra dos polivetores.

9.11. *Definição*. A norma $|u|$ de u é dada por $|u| = (u, u)^{1/2}$. §§

9.12. Teorema. O conjunto c^n dos elementos u não singulares de C^n é um grupo multiplicativo. §

Para tanto, os u não singulares devem satisfazer aos axiomas de grupo: (i) associatividade - que decorre da associatividade do produto em C^n; (ii) existência da unidade - que é e_o; e (iii) existência do inverso - que para $uv \in c^n$ é $v^{-1} u^{-1}$

Observe-se que embora u e v possam pertencer a c^n, sua combinação linear $\alpha u + \beta v$ não pertence, necessariamente, a c^n; isto é, c^n não é uma álgebra.

Para $n \equiv 1 \bmod 2$ definamos $\varepsilon = \xi_{N^2}\, e_N$ (sem soma em N). Então $E_+ = \frac{1}{2}(e_o + \varepsilon)$ e $E_- = \frac{1}{2}(e_o - \varepsilon)$ são idempotentes que se anulam mutuamente. $(E_\pm)^2 = E_\pm$; $E_\pm\ E_\mp = 0$.

9.13. Teorema. Para $n \equiv 1 \bmod 2$, $u = u_+ + u_-$, onde $u_\pm$ pertence ao ideal gerado por $E_\pm$. §

Trivialmente, $u = u\, e_o = u(E_+ + E_-) = u_+ + u_-$. §§

9.14. Teorema. Se $I_\pm$ são os ideais gerados por $E_\pm$, $\dim I_\pm = 2^{n-1}$, e $C^n = I_+ \oplus I_-$. §§

X - AUTOMORFISMOS LINEARES EM C^n

Estudaremos aqui os automorfismos lineares internos a C^n, e que mapeiam a base e_A numa outra base $\overline{e}_A$ obedecendo à regra do produto 2.4. Nosso objetivo na presente seção é chegarmos à representação matricial de tais automorfismos e à demonstração de um teorema que generaliza o chamado "teorema fundamental de Pauli" (28, 48) para as matrizes de Dirac.

10.1. Definição. Para todo $u \in C^n$ (o que implica na existência de u^{-1}), definimos $\overline{v} = (v)L_u = uvu^{-1}$. §§

10.2. Teorema. (i) $(\alpha v + \beta w)L_u = \alpha\overline{v} + \beta\overline{w}, \qquad \alpha, \beta \in \underline{K}$.

(ii) $(v\ w)L_u = \overline{v}\,\overline{w}$

(iii) $L_u^{-1} : u \longmapsto u^{-1}vu$. §§

10.3. Teorema. A matriz $(L_{uA}{}^B)$ descreve L_u. §

Como C^n é fechada em relação à multiplicação, $(v)L_u \in C^n$, para todo v. Tomemos então $(e_A)L_u = \overline{e}_A = e_R\, L^R{}_A$ (pelo motivo anterior). Desenvolvendo $\overline{e}_A = ue_Au^{-1}$, concluimos que $L_{uA}^{R+A+S} = \sum_{R+S\ \text{fixo}} u^R (u^{-1})^S\ \xi_{RA}\ \xi_{RS}\ \xi_{AS}$ §§

10.4. Teorema. (i) $(v,w) = (\overline{v},\overline{w})$; (ii) L_u mapeia $\eta = (\eta_{AB})$, $\eta_{AA} = \xi_A{}^2$

e $\eta_{AR} = 0$, $A \neq B$ sobre si mesma. §

$$\bar{v} = (v)L_u = v^A(e_A)L_u = v^A\,\bar{e}_A\,.$$

Então $(\bar{v},\bar{w}) = v^A\,w^R(\bar{e}_A,\,\bar{e}_B) = v^A\,w^B\,\delta_{AB}$, já que o produto $\bar{e}_A\,\bar{e}_B$ é preservado pelo automorfismo L_u. Da mesma forma, $\eta_{AB} = \|\bar{e}_A\,\bar{e}_B\| =$
$= \|e_R\,e_S\,L^R_{uA}\,L^S_{uB}\| = \eta_{RS}\,L^R_{uA}\,L^S_{uB} = \eta_{AB}$. Quer dizer, $L_u \in L \subseteq \underline{O}\,(n)$, onde $\underline{O}\,(n)$ é o grupo que mantem invariante a forma $\eta_{AB}\,u^A\,u^B$. §§

Mostramos em seguida que não vale a igualdade.

<u>*10.5. Teorema.*</u> $L \subset \underline{O}\,(n)$.§

A prova se faz por cálculo direto. $\bar{e}_A\,\bar{e}_B = \xi_{AB}\,\bar{e}_{A+B}$. Então

$$\sum_{R,S} e_R\,L^R{}_A\,e_S\,L^S{}_B = \sum_{R+S} \xi_{AB}\,L^{R+S}_{A+B}\,e_{R+S}$$ (onde escremos $L^R{}_A$ por $L^R{}_{uA}$, e colocamos o índice de soma $R + S$ por conveniência). Então,

$$\sum_{R+S}\ \sum_{\substack{R,S \\ R+S\ \text{fixo}}} \xi_{RS}\,L^R{}_A\,L^S{}_B\,e_{R+S} = \sum_{R+S} \xi_{AB}\,L^{R+S}_{A+B}\,e_{R+S}$$

(10.1) $$\sum_{\substack{R,S \\ R+S\ \text{fixo}}} \xi_{RS}\,L^R{}_A\,L^S{}_B = \xi_{AB}\,L^{R+S}_{A+B}$$

Vamos estudar esta equação.

i) Caso $R = S$, $A = B$. (10.1) se torna:

$$\sum_{R,S} \eta_{RS} L^R{}_A L^S{}_A = \eta_{AA} L^o{}_o = \eta_{AA} \tag{10.2}$$

Da unicidade do elemento neutro multiplicativo num anel, concluimos que $L^o{}_o = 1$. Do mesmo modo, $L^r{}_o = 0$, $r \neq 0$.

ii) Caso $R = S$, $A \neq B$. (10.1) dá:

$$\sum_{R,S} \eta_{RS} L^R{}_A L^S{}_B = \xi_{AB} L^o{}_{A+B}$$

Escolha-se A, B tais que $\xi_{AB} = - \xi_{BA}$. ($A + B$ então percorre todos os índices, menos 0). Então,

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{R,S} \eta_{RS} L^R{}_A L^S{}_B &= \xi_{AB} L^o{}_{A+B} \\ \sum_{R,S} \eta_{RS} L^R{}_B L^S{}_A &= \xi_{BA} L^o{}_{A+B} \end{aligned} \right. \tag{10.3}$$

A segunda equação pode ser transformada:

$$\sum_{R,S} \eta_{RS} L^S{}_A L^R{}_B = - \xi_{AB} L^o{}_{A+B} , \qquad \text{ou}$$

$$\sum_{R,S} \eta_{RS} L^R{}_A L^S{}_B = - \xi_{AB} L^o{}_{A+B}$$

o que, junto com a primeira equação de (10.3), implica $L^o{}_{A+B} = 0$, $A \neq 0$. Reunindo numa só expressão este resultado com (10.2),

$$\sum_{R,S} \eta_{R,S} L^R{}_A L^S{}_R = \eta_{AB} . \tag{10.4}$$

o que confirma, por cálculo explícito, o teorema 10.4.

iii) Resta a condição:

$$\sum_{\substack{r,s \\ r+s \text{ fixo}}} \xi_{rs} L^r{}_a L^s{}_b = \xi_{ab} L^{r+s}{}_{a+b} , \qquad r, s \neq 0; \; r \neq s. \tag{10.5}$$

que também pode ser escrita

$$\sum_{\substack{r,s \\ r+s \text{ fixo}}} \xi_{sr} L^s{}_b L^r{}_a = \xi_{ba} L^{r+s}{}_{a+b} \tag{10.6}$$

Simetrizando-se e antissimetrizando-se, obtemos:

$$
(10.7)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{r,s \\ r+s \text{ fixo}}} \xi_{\underline{rs}}\, L^{r}{}_{a}\, L^{s}{}_{b} = \xi_{\underline{ab}}\, L^{r+s}{}_{a+b} \\[2em] \displaystyle\sum_{\substack{r,s \\ r+s \text{ fixo}}} \xi_{\underset{\vee}{rs}}\, L^{r}{}_{a}\, L^{s}{}_{b} = \xi_{ab}\, L^{r+s}{}_{a+b} \qquad r,\ s \neq 0,\ \ r \neq s. \end{cases}
$$

onde $\xi_{\underline{rs}} = \frac{1}{2}(\xi_{rs} + \xi_{sr})$, $\xi_{\underset{\vee}{rs}} = \frac{1}{2}(\xi_{rs} - \xi_{sr})$. Casos particulares de (10.7) são:

$$
(10.8)\quad \begin{aligned} &\sum_{\substack{r,s \\ r+s \text{ fixo}}} \xi_{\underset{\vee}{rs}}\, L^{r}{}_{a}\, L^{s}{}_{a} = 0 \\[1em] &\sum_{\substack{r,s \\ r+s \text{ fixo}}} \xi_{\underline{rs}}\, L^{r}{}_{a}\, L^{s}{}_{a} = 0, \qquad \text{já que } L^{r+s}{}_{o} = 0\ . \end{aligned}
$$

Dependendo da álgebra, temos ainda:

$$
(10.9)\qquad n \equiv 0 \bmod 2 \quad \begin{cases} \xi_{\underset{\vee}{Nr}}\, L^{N}{}_{a}\, L^{r}{}_{a} = 0 \\[1em] \xi_{\underline{Nr}}\, L^{N}{}_{a}\, L^{r}{}_{a} = 0 \end{cases}
$$

$$(10.10) \qquad n \equiv 1 \bmod 2 \quad \begin{cases} \xi_{\underset{\vee}{Nr}} \, L^N{}_a \, L^r{}_a \equiv 0 \\ \xi_{\underset{\vee}{Nr}} \, L^N{}_a \, L^r{}_b \equiv 0 \, , \qquad \text{trivialmente, já que } \xi_{\underset{\vee}{Nr}} \equiv 0. \end{cases}$$

$$(10.11) \qquad n \equiv 1 \bmod 2 \quad \begin{cases} \xi_{\underline{Nr}} \, L^N{}_a \, L^r{}_a = 0 \\ \xi_{\underset{\vee}{rs}} \, L^r{}_N \, L^s{}_b = 0 \, , \qquad \text{não trivialmente.} \end{cases}$$

Esta última condição significa que no mapeamento $e_b \longmapsto e_{N+b}$

$$\xi_{Nb} \, \overline{e}_{N+b} = \sum_{r+s} \; \sum_{r,s \; r+s \text{ fixo}} \xi_{rs} \, L^r{}_N \, L^s{}_b \, e_{r+s} = \sum_{r+s} \xi_{Nb} \, L^{r+s}{}_{N+b} \, e_{r+s}$$

os termos assimétricos não contribuem, o que se compreende, desde que $\xi_{Nb} \, \overline{e}_{N+b}$ mapeia $\overline{e}_b$ sobre a outra metade da álgebra ímpar. As condições (10.5) são as restrições impostas ao grupo $\underline{O}(\eta)$ para que seja mantida a gradação da álgebra. Desta forma, a igualdade $L = \underline{O}(\eta)$ não se verifica, restando apenas a inclusão $L \subset \underline{O}(\eta)$. §§

O que resta é saber a posição de L em $\underline{O}(\eta)$. $\underline{O}(\eta)$, como sabemos do estudo do grupo de Lorentz (7, 16), possui quatro partes. O seguinte teorema, no entanto, nos diz que

10.6. Teorema. $L \subset \overset{\uparrow}{\underline{O}}+(\eta)$, isto é, L_u é uma transformação própria e ortócrona. §§

Pelos teoremas 10.8 e 12.1 poderemos, no entanto, estudar L de modo a incluir reflexões. Concluimos a presente seção com a forma geral do "teorema fundamental de Pauli" (28,48) para as matrizes de Dirac. Este teorema inclui a recíproca de 10.2 (ii), e dá a condição necessária a que duas bases $\{e_A\}$ e $\{\bar{e}_A\}$ devem obedecer para que os produtos $e_A e_B = \xi_{AB} e_{A+B}$ e $\bar{e}_A \bar{e}_B = \xi_{AB} \bar{e}_{A+B}$ sejam mantidos. Para tanto, faz-se necessário:

10.7. Lema. Dados $u \in C^n$, $v \in c^n$, então $u = vw$, $w \in C^n$. Da mesma forma, $u = w'v$, $w' \in C^n$. §.

Pois $u = vw$ implica em $u^R e_R = v^S w^P \xi_{SP} e_{S+P}$. Donde $u^{S+P} = \sum_{S,P} v^S w^P \xi_{SP}$, $S + P$ fixo. Para resolvermos este sistema para w^P, é preciso que $\det (v^S \xi_{SP})$, sem soma, não seja nulo, isto é, que v seja regular. §§

10.8. Teorema. (Forma geral do Teorema de Pauli). As bases $\{e_A\}$ e $\{\bar{e}_A\}$ são conectadas por uma transformação de similaridade. §

A prova é feita, primeiro, para n par; a extensão para n impar é trivial. Escrevamos $\bar{e}_A = u_{(A)} e_A v_{(A)}$, o que nos é permitido para lema 10.9. Então

$$\xi_{A^2} e_o = u_{(A)} e_A v_{(A)} u_{(A)} e_A v_{(A)}, \text{ ou}$$

$$e_o = u_{(A)}\, e_A\, v_{(A)}\, \xi_{A^2}\, u_{(A)}\, e_A\, v_{(A)}\ ,\quad \text{donde}$$

$$u_{(A)}\, e_A\, v_{(A)} = (u_{(A)}\, e_A\, \xi_{A^2}\, v_{(A)})^{-1}\ ,\ \text{ou}$$

$$u_{(A)}\, e_A\, v_{(A)} = v^{-1}_{(A)}\, e_A\, u^{-1}_{(A)}\ ,\qquad \text{ou}$$

$$v_{(A)}\, u_{(A)}\, e_A\, v_{(A)}\, u_{(A)} = e_A$$

Valendo para qualquer e_A esta última relação, então $v_{(A)}\, u_{(A)} = \lambda\, e_o$, pelo lema 3.1. Ou seja, $\lambda^2\, e_A = e_A$, donde $\lambda = \pm 1$. Logo, $u_{(A)} = \pm\, v^{-1}_{(A)}$. Agora, de $\overline{e}_A\, \overline{e}_B\, \xi_{AB}\, \overline{e}_{A+B} = e_o$,

$$\lambda_{A+B}\, \lambda_B\, \lambda_A\, u_{(A)}\, e_A\, u^{-1}_{(A)}\, u_{(B)}\, e_B\, u^{-1}_{(B)}\, u_{(A+B)}\, e_{A+B}\, \xi_{AB}\, u^{-1}_{(A+B)} = e_o$$

Pelo mesmo raciocínio anterior, concluimos que $u^{-1}_{(A)}\, u_{(B)} = \mu' e_o$, e $u^{-1}_{(B)}\, u_{(A+B)} = \mu' e_o$. Donde,

$$\mu\mu'\, \lambda_{A+B}\, \lambda_A\, \lambda_B\ \ u\, e_A\, e_B\, \xi_{AB}\, e_{A+B}\, u^{-1} = e_o$$

$$\mu\mu'\, \lambda_{A+B}\, \lambda_A\, \lambda_B = 1,$$

para todo A, B. Logo, como $\lambda_{A+B}\, \lambda_A\, \lambda_B = \pm 1$, $\mu\mu' = \pm 1$. Ou seja, a transformação mais geral que conecta duas bases em C^n é definida a menos de um sinal (cf. § 129). §§

XI - IDEAIS E IDEMPOTENTES EM C^n

A estrutura do grupo L é dada pelos teoremas 10.4, 10.5 e 10.6, e pelo 11.29, abaixo. Dois exemplos particulares de subgrupos de L, a serem apresentados na presente seção, possuem especial importância para a teoria dos espinores associados a uma álgebra de Clifford. Estando um deles associado a transformações hermitianas positivo-definidas, e o outro associado a transformações unitárias, para bem localizá-los desenvolvemos a teoria destes objetos em C^n, com o que se obtem, como resultado colateral, e de modo "natural", a teoria das representações de C^n como uma estrutura interna a C^n (e não como um isomorfismo, conforme (13, 17, 18)).

<u>*11.1. Definição*</u>. Para $u \in C^n$, (i) se $u = u^\dagger$, então u é <u>hermitiano</u>; (ii) se $uu^\dagger = u^\dagger u = e_o$, então u é <u>unitário</u>; se (iii) $u = u^T$, u é <u>simétrico</u>; (iv) se $uu^T = u^T u = e_o$, u é <u>ortogonal</u>. §§

<u>*11.2. Teorema*</u>. Para $\underline{K} = \underline{C}$, $u = u^A e_A$ é hermitiano se e somente se $u^A \in \underline{R}$, $|A| \equiv 0,1 \mod 4$, e $u^A \in i\underline{R}$, $|A| \equiv 2,3 \mod 4$. §

A prova é por cálculo direto. §§

Desenvolvemos agora a teoria dos idempotentes em C^n. A partir dela caracterizaremos as classes espinoriais em uma álgebra de Clifford. 11.3 e 11.4 são resultados válidos para anéis associativos e com unidade multiplicativa; em 11.5 particularizamos para as álgebras pares (e em 11.6, para as ímpares) os resultados anteriores, a fim de obtermos a decomposição da unidade de C^n em termos de idempotentes primitivos.

11.3. Definição. $e \in A$, A uma álgebra, é um idempotente se e somente se $e^2 = e$. Um idempotente é primitivo se não há nenhuma decomposição $e = e' + e''$, $e' e'' = e'' e' = 0$, $e'^2 = e'$, $e''^2 = e''$, $e' \neq e'' \neq 0$. §§

Com idempotentes primitivos geramos ideais minimais à esquerda e à direita; a álgebra se decompõe numa soma direta destes ideais. Em especial note-se a propriedade (cuja demonstração se acha em (7)):

11.4. Teorema. Para todo $u \in A$, A uma álgebra associativa e com unidade multiplicativa sobre $\underline{C}$, e é um idempotente primitivo se e somente se $eue = \lambda e$, $\lambda \in \underline{C}$. §§

De 11.4 obtemos:

11.5. Teorema. Sejam em C^{2p} os objetos $(e_o \pm if_k)$, $f_k = e_{2k} e_{2k-1}$, $k = 1, 2, \ldots p$. Então os $(1/2^k) \prod_{k=1}^{p} (e_o \pm if_k)$ são idempotentes primitivos em C^{2p}. §

Que são idempotentes resulta de cálculo direto; também se anulam mutuamente. Usando 11.4, provamos por indução em p que são idempotentes primitivos. Para $p = 1$, $C^{2p} = C^2$, a álgebra dos quatérnions.

Os $e_{\pm} = (1/2)(e_o \pm ie_2\, e_1)$ são facilmente vistos como idempotentes primitivos, desde que o cálculo direto nos mostra,

$$e_{\pm}\, q\, e_{\pm} = (q_{oo} \pm q_{11})e_{\pm}\ ,\ q = q_{oo}\, e_o + q_{01}\, e_{01} + q_{10} e_{10} + iq_{11}\, e_{11}\ ,$$

$$e_{11} = e_{10}\, e_{01}$$

Suponhamos agora que em $C^{2(p-1)}$ os $f_1, f_2, \ldots, f_{p-1}$ gerem idempotentes primitivos. Seja e um deles, e seja $e = (1/2)(e_o \pm if_p)$; vetores pertencentes à álgebra C^{2p} podem ser escritos $r = u + v\, e_{2p-1} + w\, e_{2p} + t\, f_p$, $u, v, w, t \in C^{2(p-1)}$. Então calculemos $ee_{p\pm}\, ree_{p\pm}$. Note-se que $ee_{p\pm} = e_{p\pm}\, e$, pela construção de ambos. De modo que

$$ee_{p\pm} ree_{p\pm} = ee_{p\pm}\, uee_{p\pm} + ee_{p\pm}\, ve_{2p-1}\, ee_{p\pm} + ee_{p\pm}\, we_{2p}\, ee_{p\pm} +$$

$$ee_{p\pm}\, tf_p\, ee_{p\pm}$$

O 1º termo dá: $ee_{p\pm}\, u\, ee_{p\pm} = e_{p\pm}\, eue_p\, e_{p\pm} = \lambda\, e\, e_{p\pm}$, $\lambda \in \underline{C}$, pela hipótese de indução. E já que $e_{2p-1}\, e_{p\pm} = e_{p\mp}\, e_{2p-1}$, assim como $e_{2p}\, e_{p\pm} = e_{p\mp}\, e_{2p}$, $ee_{p\pm}\, ve_{2p-1}\, ee_{p\pm} = e_{p\pm}\, eve\, e_{2p-1}\, e_{p\pm} = e_{p\pm}\, (\lambda' e) e_{p\mp}\, e_{2p-1} = 0$

já que $e_{p\pm}\, e_{p\mp} = 0$ e já que $e_{2p-1}\, e = ee_{2p-1}$. Do mesmo modo para os outros termos. De forma que verificamos ser $ee_{p\pm} r\, ee_{p\pm} = \mu\, ee_{p\pm}$, $\mu \in \underline{C}$. §§

<u>*11.6. Corolário.*</u> Para C^{2p+1}, os $(1/2)(1/2^p \prod_{k=1}^{p} (e_o \pm if_k)$, $\pm\, 1/2^p \prod_{k=1}^{p} (e_o \pm if_k))$ são bases de idempotentes primitivos para os dois ideais bilaterais da álgebra, gerados respectivamente por $(1/2)(e_o, e_o)$

e $(1/2)(e_o, -e_o)$. §§

Formemos agora os objetos ($\lambda \equiv |\underline{L}| \equiv 0 \bmod 2$, pela notação de (8.1) - (8.3)).

$$
(11.1) \qquad \begin{cases} e^{o}_{o(\ell)} = \frac{1}{2}(e_o + ie_{\lambda+\lambda'}) \\ e^{1}_{1(\ell)} = \frac{1}{2}(e_o - ie_{\lambda+\lambda'}) \\ e^{o}_{1(\ell)} = (-i)^{\ell+1}\, e_{\lambda+\underline{L}}\, e^{1}_{1(\ell)} \\ e^{1}_{o(\ell)} = (-i)^{\ell+1}\, e_{\lambda+\underline{L}}\, e^{o}_{o(\ell)} \end{cases}
$$

Na álgebra C^{2p}, definamos agora as entidades:

$$
(11.2) \qquad e^{A}_{B} = e^{a}_{a'(1)}\, e^{b}_{b'(2)} \cdots e^{\ell}_{\ell'(p)}
$$

onde os $e^{i}_{i'(k)}$ são os (11.1), e os índices A, B representam tanto as seqüências superiores quanto as inferiores.

Resulta o teorema:

11.7. Teorema. Para C^{2p}, e^{A}_{B}, para todos os valores de A, e B fixo, forma uma base do ideal à esquerda I_B. §

Já que todos os $e_{\lambda+\underline{L}}$ comutam com os objetos que os antecedem em(11.2), é fácil ver que cada e^{A}_{B} pertence ao ideal I . O idempotente gerador do ideal I_B tem a forma e_B^B ; para um produto $e_A\, e_B^B$, consideremos as seguintes hipóteses:

i) $e_A = \prod_\lambda e_{\lambda+\lambda'}$. Então é fácil ver que

$$e_A\, e_B^B = k\, e_B^B \ , \quad k = \pm 1, \pm i, \text{ já que } ie_{\lambda+\lambda'} \left| \frac{1}{2}(e_o \pm ie_{\lambda+\lambda'}) \right| =$$

$$= \frac{1}{2}(e_o \pm ie_{\lambda+\lambda'}).$$

ii) $e_A = e_{\lambda'}$. Então, como $e_\lambda = \pm e_{\lambda+\underline{L}}\; e_{\underline{L}}$, e_λ se mapeia no elemento $\pm\; e_{\lambda+\underline{L}}\; e_{\underline{L}}\; e_B^B = \pm\, e_{\lambda+\underline{L}}\; e_B^B$, que é um dos (11.2).

iii) $e_A = e_{\lambda'}$. Então como $e_{\lambda'} = \pm\, e_{\lambda+\lambda'}\; e_{\lambda+\underline{L}}\; e_{\underline{L}}$, $e_{\lambda'}\; e_B^B =$

$$= \pm\, e_{\lambda+\lambda'}\; e_{\lambda+\underline{L}}\; e_{\underline{L}}\; e_B^B = \pm\, e_{\lambda+\underline{L}}\; e_B^B$$

Com isto, e devido ao fato das bases e_B^A "absorverem" no mesmo elemento objetos e_A, $e_{A'}$ diferentes, vemos que as bases e_B^A são em número 2^p, e que a dim $I_B = 2^p$. §§

11.8. Corolário. Para C^{2p+1}, $I_{A\pm} = (I_B, \pm I_B), I_B \subset C^{2p}$, são os ideais gerados pelos idempotentes da álgebra ímpar. §§

11.9. Corolário. Os ideais à direita I^B em C^{2p} são gerados também pelos e^A_B, e possuem base e^B_A, para todo A ; em C^{2p+1}, são seus geradores os $(e^B_B, \pm e^B_B)$, com a base $(e^B_A, \pm e^B_A)$. §§

11.10. Corolário. $I^A = (I_B)^\dagger$, para $n = 2p$ e $n = 2p + 1$. §§

Com os resultados precedentes podemos construir, de modo natural, a teoria das representações para as álgebras de Clifford. Costuma-se definir "representação" de uma álgebra A através de um homeomorfismo (que se torna em isomorfismo no caso das álgebras simples) dado por $\rho : A \to M_n$, onde M_n são as matrizes de ordem n (matrizes quadradas $n \times n$). No entanto, um resultado de Wedderburn (59, 7) permite-nos incluir dentro da estrutura de uma álgebra simples a sua representação. Para as álgebras simples de Clifford, este resultado se particulariza em:

11.11. Definição. Chamamos representação de um elemento $u \in C^{2p}$ à matriz $\nu = (u^A_B)$, onde $u^A_B = e^A_A\ u\ e^B_B$, são as componentes de u em relação à base e^A_B dos ideais I_B e I^A da álgebra. §§

11.12. Definição. Chamamos representação de $u = (p, q) \in C^{2j+1}$, ao objeto $\nu = ((p^A_B), (q^A_B))$, onde as matrizes (p^A_B), (q^A_B) representam p e q. §§

Desta forma obtivemos um isomorfismo natural entre C^{2p} e $M_p(\underline{K})$ (o anel das matrizes com termos pertencentes a $\underline{K}$), e um outro entre C^{2p+1} e $(M_p(\underline{K}), M_p(\underline{K}))$.

Podemos comprovar este isomorfismo verificando-o para os conceitos de hermiticidade, transposição e outros, definidos exclusivamente dentro de C^n. Ou seja,

11.13. Teorema. Para C^{2p}, $u = u^\dagger$ se e somente se $\nu = \nu^\dagger$; $uu^\dagger = e_o$ se e somente se $\nu\nu^\dagger = I$ (onde I é a matriz identidade $p \times p$); $u = u^T$ se e somente se $\nu = \nu^T$; $uu^T = e_o$ se e somente se $\nu\nu^T = I$; $u \in c^{2p}$ se e somente se ν for regular. §§

11.14. Teorema. Para C^{2j+1}, dados p, q hermitianos $\in C^{2j}$, $(p, q)^\dagger = (p, (-1)^k q)$, $k \equiv j \bmod 2$. §§

Com 11.14 precisamos o sentido do duplo sinal ($\pm$) em 11.9. e em 11.10. É claro que a multiplicação por i poderia, convenientemente, uniformizar os resultados de 11.14, deixando (p,q) sempre hermitiano, para qualquer valor do índice j.

11.15. Teorema. Para $u \in C^{2p}$, $e^u \in c^{2p}$. §

Pois a matriz e^ν, $\nu = (u^A_B)$, é uma matriz regular. §§

11.16. Teorema. Para $u = (v, w)$, $v,w \in C^{2p}$, $e^u \in c^{2p+1}$. §

É fácil ver que (v, w) pode ser representado por uma "extensão complexa" das matrizes de $M_p(\underline{K})$, ou seja, por uma matriz $(v_B^A + ew_B^A)$, onde $e^2 = \xi .1$, $\xi = 1$ quando $p \equiv 0 \mod 2$ e $\xi = -1$ quando $p \equiv 1 \mod 2$. No anel $\underline{K}$ suposto comutativo, desde que $(v_B^A)^2 + (w_B^A)^2 \neq 0$, $v_B^A + i^k e\, w_B^A$ é o inverso de $(v_B^A - i^k ew_B^A) / ((v_B^A)^2 + (w_B^A)^2)$, onde o expoente $k \equiv p-1 \mod 2$. De modo que podemos calcular o inverso da matriz assim associada a u, e definir e^u. §§

Com esta sucessão de teoremas pode-se agora dizer algo sobre a estrutura do grupo L das transformações que em C^n preservam o produto dos elementos da álgebra. Notemos que, como ocorre a toda transformação de similaridade, q e q' induzem o mesmo L_q se e somente se $q = \lambda q'$, $\lambda \in \underline{K}$ e não nulo. Isto nos exige a fixação de um parâmetro associado a q; seu módulo ou, mais convenientemente, $\det(q_B^A)$. Colocando-se unitário este determinante, obtemos de imediato:

11.17. Teorema. Para C^{2k}, a menos do sinal de 10.8, $L \approx SL(\underline{K}, 2^k)$ -ou seja, L é isomorfo ao grupo das matrizes sobre $\underline{K}$ de ordem 2^k e com determinante unitário. §§

Para estendermos este resultado às álgebras ímpares, exige-se que elucidemos a relação entre os elementos inversíveis $p, q \in C^{2k}$ e $(p, q) \in C^{2k+1}$ e inversível. O que nos é dado pelo

11.18. Teorema. $u = (p, q) \in C^{2k+1}$ é inversível se e somente se ao menos um dos dois, p ou q, o for. Supomos $\underline{K}$ um anel com a estrutura do teorema 9.7. §

Suponhamos que $u = (p, q)$ seja inversível. Então há $u^{-1} =$ $= (r, s)$ em C^{2k+1} tal que $uu^{-1} = (p, q)\ (r, s) = (e_o\ , 0)$. Expandindo esta multiplicação e igualando os termos correspondentes no primeiro e no segundo membro, obtemos as seguintes equações:

$$
(11.3)\quad
\begin{aligned}
&\sum_{A,B} p^A \eta_{AB} r^B + \xi \sum_{A,B} q^A \eta_{AB} s^B = 1 && (A = B)\\
&\sum_{A,B} p^A \xi_{AB} r^B + \xi \sum_{A,B} q^A \xi_{AB} s^B = 0 && (A \neq B,\ \ A+B \text{ fixo})\\
&\sum_{A,B} q^A \eta_{AB} r^B + \sum_{A,B} p^A \eta_{AB} s^B = 0 && (A = B)\\
&\sum_{A,B} q^A \xi_{AB} r^B + \sum_{A,B} p^A \xi_{AB} r^B = 0 && (A \neq B,\ A+B \text{ fixo})
\end{aligned}
$$

Trata-se de um sistema linear como o de 9.6 e 9.7, e também inomogêneo, nas variáveis r^A, s^A, com índices A que vão de 0 a 2^{2k}. Consideremos primeiro o caso em que os números p^A, q^A são reais. O determinante do sistema é:

$$
\Delta = \begin{vmatrix} \Delta_p & \xi\,\Delta_q \\ \Delta_q & \Delta_p \end{vmatrix} = (\Delta_p)^2 + \xi^{2k}(\Delta_q)^2 \geq 0
$$

Δ_p e Δ_q determinantes que permitem a inversão de p e q.

O determinante, por força dos quadrados, é positivo semi-definido. Será nulo apenas quando suas duas parcelas forem simultâneamente nulas. Quando ao menos uma parcela for diferente de zero, este determinante é não nulo. A extensão para $\underline{K}$ um anel com a estrutura de 9.7 é a mesma que lá se faz. §§

Para estendermos 11.17 ainda se faz necessário:

11.19. Definição. Dois objetos p, q pertencentes a uma álgebra são colineares se $p = \lambda q$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \underline{K}$. A colinearidade é uma relação de equivalência na álgebra. §§

11.20. Teorema. Para C^{2p+1}, a menos do sinal de 10.8, $L \approx (SL(\underline{K}, 2^p), m(\underline{K}, 2^p)) \oplus (m(\underline{K}, 2^p), SL(\underline{K}, 2^p))$, onde $m(\underline{K}, 2^p)$ é o quociente do anel das matrizes de ordem 2^p sobre $\underline{K}$ pela relação de colinearidade.§§

Note-se, obviamente, que $SL(\underline{K}, 2^p) \subset m(\underline{K}, 2^p)$. Com os resultados que se seguem, e que concluem a presente seção, estendemos para as álgebras de Clifford (e também para quaisquer álgebras que satisfaçam ao teorema de Wedderburn), os conceitos de "auto-vetores" e "auto-valores". Consideraremos $\underline{K}$ um anel que inclua o corpo dos complexos, e construído de tal forma que as noções de "conugação complexa" nele tenha sentido. Começamos com a "diagonalização" de um vetor u hermitiano:

11.21. Teorema. Para C^{2p}, se $u = u^\dagger$, então há um $v \in C^{2p}$, unitário, tal que $vuv^\dagger = \sum_A u^{(A)} e^A_A$, $u^{(A)}$ reais. §

Pois a matriz ν possui uma forma diagonal com elementos reais. §§

Com a ajuda de um raciocínio idêntico ao de 11.16, concluimos tambem que

11.22. Teorema. Para C^{2p+1}, se $u = (v, w)$ é hermitiano, então há um $r \varepsilon C^{2p+1}$, unitário, tal que $rur^{\dagger} = \sum_A u^{(A_\pm)}(e^A_A, \pm e^A_A)$. §§

11.23. Corolário. Para C^n, se u é hermitiano, então $u = \sum_A u^{(A)} f^A_A$, f^A_A um idempotente primitivo. §

Pois $f^A_A = v^{\dagger} e^A_A v$. É fácil ver que a unidade neles se decompõe de maneira isomorfa à decomposição nos e^A_A. §§

11.24. Corolário. Para C^n, ν, representação de u possui auto-vetores ϕ^A_A, representação de f^A_A. §§

Como conseqüência, definimos:

11.25. Definição. Se $u \varepsilon C^n$ é diagonalizável, então os f^A_A são auto-vetores de u. §§

E provamos:

11.26. Teorema. (i) $(uf^A_A, f^A_A) = (u^{(A)} f^A_A, f^A_A) = u^{(A)}$.

(ii) $(uf^A_A, f^A_A) = (f^A_A, u^{\dagger} f^A_A)$. §

(i) sai de $uf_A^A = u^{(A)} f_A^A$, e de $\| f_A^{A\dagger} f_A^A \| = 1$. (ii) resulta de

$(uf_A^A, f_A^A) = \| (uf_A^A)^\dagger f_A^A \| = \| f_A^A (u^\dagger f_A^A) \| = (f_A^A, u^\dagger f_A^A)$. §§

11.27. Definição. u, hermitiano ε C^n, é estritamente positivo, se e somente se todos os $u^{(A)}$ em 11.21 forem > 0. §§

11.28. Teorema. Todo objeto hermitiano estritamente positivo em C^n pode ser escrito na forma e^u, onde $u \varepsilon C^n$ é hermitiano. §

Para ν, representação de u, tal acontece (12). De modo que conclui-se o teorema. §§

11.29. Teorema. Se $t \varepsilon C^n$ é inversível, então $t = sp$, s unitário e p hermitiano e estritamente positivo. Esta decomposição é única. §

t é regular. Então $t^\dagger t$ é positivo-definido e hermitiano. Pois, para um idempotente f_A^A $(t^\dagger t\; f_A^A, f_A^A) = (t f_A^A, t f_A^A) \geq 0$. Se f_A^A for auto-vetor de $t^\dagger t$, em consequência de 11.26 e da regularidade de t, $(t^\dagger t f_A^A, f_A^A) = t^{(A)} > 0$. Há então um $p = \sum_A p^{(A)} f_A^A$, tal que $p^2 = t^\dagger t$ (basta escolhermos $p^{(A)} = +\sqrt{t^{(A)}}$). p possui um inverso p^{-1}. Façamos $s = tp^{-1}$. Então $s^\dagger = (p^{-1})^\dagger t^\dagger$. $s^\dagger s = (p^{-1})^\dagger t^\dagger t p^{-1} =$ $= (p^{-1})^\dagger p^2 p^{-1} = e_0$. Logo, s é unitário, e $t = sp$. Suponhamos agora que $t = s_1 p_1 = s_2 p_2$. Coloquemos $s_3 = s_2^{-1} s_1$; s_3 é unitário.

$s_3 \, p_1 = s_2^{-1} \, s_1 \, p_1 = s_2^{-1} \, s_2 \, p_2 = p_2$. Logo $p_2 = p_2' = p_1 \, s_3^{\dagger} = p_1 \, s_3^{-1}$.

Logo, $p_2^2 = p_1^2$. Mas como $p_1 = e^{u_1}$, e $p_2 = e^{u_2}$, da igualdade dos quadrados decorre a igualdade de u_1 e u_2 , e a igualdade de p_1 e p_2 . Donde $s_3 = e_o$, e donde a unicidade. §§

<u>*11.30. Corolário.*</u> Se $t \in C^n$ é inversível, então $t = ps$, p hermitiano estritamente positivo e s unitário. §§

Com 11.30 concluimos o estudo das estruturas algébricas internas a uma álgebra de Clifford, associadas aos idempotentes da álgebra. Podemos agora passar à teoria dos espinores associados à álgebra.

XII - ESPINORES

Para a conceituação clássica, espinores são vetores pertencentes ao espaço da representação da álgebra de Clifford correspondente . Assim, como a álgebra de Pauli é representada num espaço vetorial de duas dimensões, os espinores de Pauli serão vetores a duas componentes ; como a álgebra de Dirac possui representação num espaço quadridimensional, os espinores de Dirac serão objetos a quatro componentes. Este conceito clássico de espinores, largamente explorado (4, 6, 12, 13, 16, 18, 19, 28, 42, 45), possui algumas desvantagens. Primeiro, os espinores - - por pertencerem a um espaço vetorial - surgem como objetos - "exteriores" à álgebra, que neles age "exteriormente", já que a álgebra são os operadores do espaço dos espinores. Depois, ao se recorrer a uma representação da álgebra, surge a dúvida sobre algumas operações que se forem eventualmente definindo, independem realmente da representação (as provas de independência podem mesmo ser muito enfadonhas). O projeto que se apresenta, em conseqüência, é a inclusão dos espinores à álgebra de Clifford correspondente.

A idéia mais antiga é de Sauter (50, 51). Riesz retomou-a (47), e Teitler (54, 55, 56, 57). Aparentemente sem conhecimento do trabalho de Teitler, Cercignani - quase ao mesmo tempo - propõe (11) que se representem "espinores por tensores", e obtém, por uma calculeira bruta, os mesmos resultados que aquele autor havia obtido num elegante formalismo compacto. E ainda ao mesmo tempo, Hestenes, num livro (32) e em artigos, utiliza a definição que Riesz oferece para os espinores (33, 34, 35, 36, 37), algumas vezes modificando-a um pouco (Hestenes trabalha com a álgebra de Dirac sobre os reais; como um espinor de Dirac, pertencendo a um espaço com escalares complexos, precisa de oito números reais para a sua definição, Hestenes utiliza (33) um espinor que é a soma de dois espinores de Riesz). A idéia nuclear a todos esses autores é muito simples; nós a encontramos, explícita, em Sauter e em Cercignani: os vetores do espaço das representações são isomorfos a matrizes que operam neste espaço e que possuem uma coluna preenchida e todas as outras nulas. Ora, o produto de uma matriz qualquer pela matriz que é toda nula a não ser por uma unidade em qualquer posição na diagonal resultará (conforme o produto seja um <u>ante</u>produto ou um <u>pós</u>produto) numa matriz com apenas uma coluna ou apenas uma linha preenchida. A matriz nula a não ser pelo 1 na diagonal é um projetor e também um idempotente. Para qualquer álgebra matrial, é fácil ver como tais idempotentes são primitivos. Os espinores nesta álgebra, em conseqüência, definir-se-ão como elementos de um ideal minimal, à esquerda ou à direita, gerado pelo idempotente em causa. Há tantos ideais minimais quanto forem os idempotentes, ou seja, há n ideais se a matriz for de ordem n. Como transformações de similaridade não destroem a idempotência do objeto, o número total de classes espinoriais (no sentido de Riesz e Teitler) associadas a uma dada álgebra de Clifford é, potencialmente, infinito, e com a cardinalidade do continuum, se definirmos "espinor" como sendo um objeto pertencente a qualquer ideal minimal da álgebra.

Com esta definição haverá espinores que não mais se mapeiam em colunas ou linhas das matrizes, mas uma transformação de similaridade sempre poderá levá-los a tal forma. O approach de Riesz, Sauter e Teitler (que abreviamos para approach RST) oferece uma infinita diversidade de tipos de espinores à nossa escolha, e mesmo, para cada idempotente da álgebra, todos os outros idempotentes que, àquele primeiro somados, constituirão a identidade da álgebra. Cada um dos ideais minimais é invariante em relação às transformações lineares que, nos espinores obtidos via uma representação, mapeiam uns espinores nos outros; a transformação que leva de uma classe espinorial à outra, contudo, atira-os num ideal inteiramente diferente - ou num dos ideais da mesma decomposição da unidade, ou num ideal que não pertence a esta decomposição. Assim, integramos na estrutura da álgebra os espinores; não mais objetos "externos" à álgebra, e não mais "dependentes" de uma particular representação -de fato ou ficticiamente. Ganha-se, em conseqüência, uma variedade problemática - mas como as equações de ondas são invariantes frente a transformações de similaridade nos operadores de Dirac, sugere-se de pronto que a solução de tal dificuldade é definir-se um espaço espinorial quociente, cujos objetos podem ser precisados a menos de uma transformação de similaridade.

No tratamento clássico dos espinores, desenvolvido por Cartan, Weyl e Chevalley (e que abreviaremos CWC), surge uma ambiguidade de sinal na definição dos objetos, que são precisados a menos ambiguidade. Será que tal ambiguidade de sinal se reproduz também nos espinores RST? Para respondermos a tal pergunta, torna-se necessário o abaixo

12.1. Teorema Dadas duas bases geradoras para uma álgebra de Clifford C^n, $\{e_\mu\}$ e $\{\bar{e}_\mu\}$ ambas obedecendo à condição de anticomutação $e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = \bar{e}_\mu \bar{e}_\nu + \bar{e}_\nu \bar{e}_\mu = 2\delta_{\mu\nu}\, e_o$, há uma transformação de similaridade, definida a menos de um sinal, que conecta uma base geradora à outra. §

A prova é feita para n par, estendendo-se depois o resultado para álgebras ímpares. De acordo com o lema 10.7, podemos definir $\bar{e} = p_{(\mu)} e_\mu q_{(\mu)}$. Assim, a relação de anticomutação para os objetos transformados é:

$$p_{(\mu)} e_\mu\, q_{(\mu)}\, p_{(\nu)}\, e_\nu\, q_{(\nu)} + p_{(\nu)}\, e_\nu\, q_{(\nu)}\, p_{(\mu)}\, e_\mu\, q_{(\mu)} = 2\delta_{\mu\nu}\, e_o$$

Suponhamos $e_\mu = e_\nu$. Obtemos, após uma simplificação,

$$p_{(\mu)}\, e_\mu\, q_{(\mu)}\, p_{(\mu)}\, e_\mu\, q_{(\mu)} = e_o$$

de onde se conclui

$$p_{(\mu)}\, e_\mu\, q_{(\mu)} = (p_{(\mu)}\, e_\mu\, q_{(\mu)})^{-1} = q^{-1}_{(\mu)}\, e_\mu\, p^{-1}_{(\mu)}, \qquad \text{ou}$$

$$q_{(\mu)}\, p_{(\mu)}\, e_\mu\, q_{(\mu)}\, p_{(\mu)} = e$$

Pelo lema 3.1, já que e_μ deve comutar com $q_{(\mu)}\, p_{(\mu)}$

$$q_{(\mu)}\, p_{(\mu)} = \lambda\, e_o\,, \qquad \lambda \in \underline{K}, \quad \text{ou} \quad q_{(\mu)} = \lambda\, p^{-1}_{(\mu)}$$

ou seja, $\lambda = \pm 1$. Repetindo-se o mesmo raciocínio para $\mu \neq \nu$,

$$\lambda_\mu \lambda_\nu\, p_{(\mu)}\, e_\mu\, p^{-1}_{(\mu)}\, p_{(\nu)}\, e_\nu\, p^{-1}_{(\nu)} + \lambda_\mu \lambda_\nu\, p_{(\nu)}\, e_\nu\, p^{-1}_{(\nu)}\, p_{(\mu)}\, e_\mu\, p^{-1}_{(\mu)} = 0$$

Donde, simplificando-se $\lambda_\mu \lambda_\nu$,

$$p_{(\mu)}\, e_\mu\, p^{-1}_{(\mu)}\, p_{(\nu)}\, e_\nu\, p^{-1}_{(\nu)} = -\, p_{(\nu)}\, e_\nu\, p^{-1}_{(\nu)}\, p_{(\mu)}\, e_\mu\, p^{-1}_{(\mu)}$$

ou

$$i\, p^{-1}_{(\nu)}\, p_{(\mu)}\, e_\mu\, p^{-1}_{(\mu)}\, p_{(\nu)}\, e_\nu\, (i)\, p^{-1}_{(\nu)}\, p_{(\mu)} = e_\nu\, p^{-1}_{(\nu)}\, p_{(\mu)} e_\mu$$

Aqui deve-se concluir que e_μ comuta com $p^{-1}_{(\nu)}\, p_{(\mu)}$. Com isto obtemos $p^{-1}_{(\mu)}\, p_{(\nu)} = \lambda_{(\mu,\nu)} e_o$. Notemos agora que, levando-se acima este resultado, o escalar λ desaparece, por simplificação, da expressão.

A duplicidade do sinal de λ não se deixa eliminar assim pela condição de anticomutação. De modo que a transformação de similaridade é dada a menos de sinal. Com o que concluímos o teorema. §§

Qual o motivo desta ambiguidade de sinal? A prova original de Brauer e Weyl, conforme repetida por Boerner (7, 8), obtém o duplo sinal como uma conseqüência do fato de as matrizes da representação, transpostas, ainda obedecerem à anticomutação. Ora, tanto a transposição quanto a conjugação hermitiana são antiautomorfismos, conforme 9.3 e 9.4. E um antiautomorfismo destes não preserva o produto dado em 2.4 e estudado nas seções 10 e 11. Pois

12.2. Teorema. A conjugação hermitiana não preserva o produto 2.4. §

Calculemos $e_A^\dagger \; e_B^\dagger$. Por um lado temos $e_A^\dagger e_B^\dagger = (e_B e_A)^\dagger = (\xi_{AB}\, e_{A+B})^\dagger$. Por outro lado; $e_A^\dagger e_B^\dagger = \xi_{A^2}\, \xi_{B^2}\, \xi_{AB}\, e_{A+B} = \xi_{BA}\, \xi_{A^2}\, \xi_{AB}\, \xi_{BA}\, \xi_{B^2}\, e_{A+B} = \xi_{BA}\, e^\dagger_{A+B}$. Assim sendo; podemos concluir que $(\xi_{BA})^\dagger = \xi_{BA}$, de modo que $e_A^\dagger e_B^\dagger = \xi_{BA}\, e_{A+B}^\dagger$, com o que não se vê preservado o produto 2.4. §§

12.3. Corolário. A transposição não preserva o produto 2.4. §§

Mas tanto a transposição quanto a conjugação hermitiana preservam as relações de anticomutação. De modo que assim se explica a aparente contradição entre o teorema 10.8 (onde o sinal da transformação é também ambíguo, podendo no entanto ser relacionado ao índice do objeto que se transforma), e o teorema 12.1, onde a ambiguidade do sinal não se deixa determinar por nenhuma das condições impostas. O teorema 10.8 in cluirá antiautomorfismos se renunciarmos à condição de preservação de 2.4. E com tanto, podemos chegar a:

12.4. Definição. O espinor RST ψ é definido pela equação $\psi = \psi \cdot f_A^A$, onde f_A^A é um idempotente primitivo da álgebra C^n. Dois espinores ψ e ϕ são equivalentes módulo L se e somente se houver um q tal que $\psi = q\,\phi\,q^{-1}$ escrevemos: $\psi \equiv \phi$ mod L. §§

12.5. Teorema. A equivalência módulo L é uma relação de equivalência. §§

Podemos agora eliminar a multiplicidade de classes espinoriais em C^n, e definir:

12.5. Definição. Chamamos Ψ à classe de equivalência mod L à qual pertence ψ. Ψ é um espinor CWC. §§

Pois agora há um isomorfismo entre os espinores como elementos do espaço das representações e os espinores definidos dentro da álgebra de Clifford.

Concluiremos a presente seção com o estudo de duas das transformações que nos permitirão, logo em seguida, o tratamento geral de um problema apresentado por Teitler em seus trabalhos (56, 57) sobre os espinores de Dirac. Teitler enumera uma série de classes espinoriais geradas por idempotentes vários dentro da álgebra C^4; a pergunta que se faz é - que transformações de equivalência levam estas classes de Teitler umas nas outras? Para respondê-las deveremos considerar em detalhe duas das transformações de similaridade analisadas nas seções 10 e 11. O teorema 11.29 nos garante que o produto destas duas classes de transformações não geram a totalidade do grupo L, mas elas são suficientemente notáveis para que as consideremos em detalhe.

A primeira delas é bastante conhecida, e com ela podemos descrever rotações num espaço vetorial cuja base são os geradores da álgebra (12, 13, 47, 45, 17). Ela é dada pelo mapeamento L_b:

<u>*12.6. Teorema.*</u> O mapeamento $L_b : e_\mu \longmapsto \bar{e}_\mu$ que leva uma base $\{e_\mu\}$ em outra $\{\bar{e}_\mu\}$ obedecendo-se ao produto 2.4, é uma transformação unitária quando a rotação L_b for uma rotação própria, e o gerador desta rotação é um objeto combinação linear de elementos de ordem 2 (ou seja, o gerador é um bivetor).§

O mapeamento infinitesimal de L_b é dado por $(e_o + \varepsilon h)e_\mu\,(e_o - \varepsilon h) = \bar{e}_\mu$, $0 < \varepsilon << 1$. Temos que $\bar{e}_\mu = e_\mu + \varepsilon\,[h, e_\mu]$, abandonando-se termos de ordem superior. Imponha-se que $\bar{e}_\mu = e_\rho\ L^\rho{}_\mu$. Então $h = h^A\,e_A$, onde $|A| = 2$. Desta forma, para rotações que levam de objetos reais em objetos reais, h é anti-hermitiano, e a rotação finita e^h (ou seja, a rotação associada a h) é unitária. Num objeto $\bar{e}_{\mu+\nu}$, a transformação induzida é $\bar{e}_{\mu+\nu} = \frac{1}{2}\,e_{\rho+\sigma}\ L^\rho_\mu\ L^\sigma_\nu$, $\mu \neq \nu$ e $\rho \neq \sigma$, de modo que as (10.5) são respeitadas. §§

A transformação dada por 12.6 é unitária; a que agora consideraremos é hermitiana e unitária. O teorema 11.29 nos garante que nem mesmo o produto das duas esgota a totalidade das transformações L. Para tratarmos esta segunda classe de transformações utilizaremos a expressão dada em 8.3 e 8.4 para uma álgebra de Clifford como um produto direto de álgebras de quatérnions, mas com algumas mudanças de notação.

Escreveremos:

$$\rho_\mu = \overbrace{\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \ldots \otimes \varepsilon \otimes \rho}^{\mu \text{ fatores}} \otimes \varepsilon \otimes \ldots \otimes \varepsilon$$

$$\sigma_\mu = \varepsilon \otimes \ldots\ldots \otimes \varepsilon \otimes \sigma \otimes \varepsilon \otimes \ldots \otimes \varepsilon \qquad \rho_\mu \, \sigma_\mu = i \, \tau_\mu \text{ (sem soma)}$$

$$\tau_\mu = \varepsilon \otimes \ldots\ldots \otimes \varepsilon \otimes \tau \otimes \varepsilon \otimes \ldots \otimes \varepsilon$$

para os objetos que pertencem à álgebra H, dada por 8.2. É claro que $\varepsilon \otimes \ldots \otimes \varepsilon$ é a identidade da álgebra, se ε for a identidade de uma álgebra de quatérnions. Assim sendo, e empregando-se a propriedade:

12.7. Teorema. Se identificarmos aos quatérnions ρ, σ e τ, ligados por $\rho\sigma = i\tau$, os vetores unitários $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ do $\underline{R}^3$, então qrq^{-1} onde $r = a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z}$, é um vetor do $\underline{R}^3$), é uma rotação no $\underline{R}^3$. §

A prova é facilmente obtida quando associamos os quatérnions às matrizes de Pauli, e representamos r por uma matriz unitária de traço nulo (60). §§

12.8. Teorema. A permutação $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \longmapsto \hat{x}' = \hat{y}, \hat{y}' = \hat{z}, \hat{z}' = \hat{x}$ é uma rotação do $\underline{R}^3$. §§

Conseqüentemente, há um quatérnion, q (sobre os escalares reais) que induz essa permutação.

Chegamos à nossa transformação:

12.9. Teorema. O produto direto $\bigotimes_{\mu=1}^{\mu=p} q_\mu$ induz uma transformação hermitiana (se os quatérnions q_μ forem reais) e unitária na álgebra C^{2p}.§

Em termos da matriz L, tal transformação tem uma bela expressão:

$L = \bigotimes_{\mu=1}^{p} (E_1 \oplus R_\mu)$, onde R_μ é a rotação induzida por q_μ. A hermiticidade e unitariedade do objeto são imediatas. §§

12.10. Corolário. As permutações $L_{\mu 1}$ e $L_{\mu 2}$, dadas por $L_{\mu 1}$: $(\widehat{xyz}) \longrightarrow (\widehat{yzx})$, e $L_{\mu 2}$: $(\widehat{xyz}) \longmapsto (\widehat{zxy})$, associando-se cada um $(\rho_\mu\ \sigma_\mu\ \tau_\mu)$ a $(\widehat{xyz})$ são transformações pertencentes a L e formando um grupo. §§

Definamos $L_{\mu o}$ como sendo a identidade. Assim, em consequência,

12.11. Corolário. As transformações $P = \bigotimes_{\mu=1}^{p} L_{ip}$. i = 0,1 ou 2 são as permutações da base de C^{2p}. Os resultados de § 11º nos permitem definir também uma permutação P para C^{2p+1}. §§

Para dar um exemplo concreto, calculemos a transformação $L_1 \otimes L_2$

agindo sobre os geradores da álgebra de Dirac. Estes são (7, 42):

$$e_1 = \rho \otimes \varepsilon \quad , \quad e_2 = \sigma \otimes \varepsilon$$

$$e_3 = \tau \otimes \rho \quad , \quad e_4 = \tau \otimes \sigma$$

Pela ação de $L_1 \ominus L_2$, obtemos:

$$\bar{e}_1 = \sigma \otimes \varepsilon = e_2 \quad , \quad \bar{e}_2 = \tau \otimes \varepsilon = ie_2 e_1$$

$$\bar{e}_3 = \rho \otimes \tau = ie_4 e_3 e_1 \quad , \quad \bar{e}_4 = \rho \otimes \rho = i e_3 e_2$$

Com as transformações P classificaremos os idempotentes de Teitler, geradores das classes espinoriais dentro de uma álgebra de Clifford. Antes, porém, esclarecemos:

12.12. Teorema. As transformações dadas por 12.6, 12.9 e 12.11, e seus produtos, constituem subgrupos de L. §§

Como se vê, a estrutura das transformações lineares dentro de uma álgebra de Clifford é muito rica. Devemos notar que ainda há uma infinidade de transformações internas a L que não se enquadram nas três que foram acima consideradas.

XIII - AS CLASSES ESPINORIAIS DE TEITLER

Principiaremos na álgebra dos bivetores que comutam dentro de uma álgebra de Clifford par C^{2p}. Nesta seção trataremos apenas de álgebras pares. Dados dois bivetores (ou seja, vetores sobre objetos e_A com $|A|=$ $= 2$), eles comutarão se e somente se os e_A comutarem. Uma base de bivetores que comutam é a coleção dos objetos f_k dados em 11.5 (o fator i normaliza tais objetos). Podemos obter outras bases f_k de bivetores que comutam através de uma permutação dos geradores da álgebra C^{2p}, ou seja, através de um mapeamento Q: $e_\mu \longmapsto \bar{e}_\mu = e_\rho$ (onde, de um modo geral, $\rho \neq \mu$). Este mapeamento é uma rotação dos e_μ ou uma rotação seguida de uma reflexão; assim sendo, é uma das transformações dadas em 12.6. Em resumo:

13.1. Teorema. A classe B^p dos bivetores de C^{2p} que comutam entre si é o conjunto dos objetos $b = b^k f_k (k = 1, 2, \ldots, p)$; o conjunto das classes de bivetores mutuamente comutantes é dado pelas transformações $Q : B \longrightarrow \bar{B} = (B)Q$; $Q \subset L_p \subset L$; as transformações Q formam um subgrupo de L. §§

Com ajuda das classes B^p formaremos uma subálgebra comutativa de C^{2p}. Para tanto, definiremos os objetos $f_A = f_i f_j f_k \ldots f_p$, $A = i +$ $+ j + k + \ldots + p$, definido o índice A de modo análogo ao índice dado de (2.1) a (2.4). Consideraremos os objetos f_k normalizados, isto é, $f_k = ie_{2k}\, e_{2k-1}$ e $f_k^2 = e_o$. Definiremos também os objetos $g_k = (f_k)L_1$ e $h_k = (f_k)L_2$, onde L_1 e L_2 são as permutações dadas em 12.11. Escrevendo-se $|A|$ para a ordem de f_A, ou seja, o número de fatores f_k distintos que constituem tal objeto, poderemos enunciar:

13.2. Teorema. A álgebra dos bivetores comutativos é a álgebra dos f_A, subálgebra de C^{2p}. Ela é dada por:

(i) $A + A = 0 \Rightarrow f_o = g_o = h_o = e_o$

(ii) $f_A f_B = f_B f_A = f_{(A+B)}$

(iii) $f_A g_A = i^{|A|} h_A$

(iv) $f_A g_B = g_B f_A$ se e somente $|A + B| = |A| + |B|$

$f_A g_B = (-1)^{\zeta_{AB}} g_B f_A$, $\zeta_{AB} = |A + B| - |A| - |B|$.

(v) Para todo e_A existem A, B e C únicos tais que $e_A = f_A g_B h_C$, os três comutando. §§

Com estes objetos podemos representar de modo muito compacto os espinores. É só notar que um idempotente primitivo será dado por $e = (1/2)^p \varepsilon^A f_A$ onde $\varepsilon^o = 1$, $\varepsilon^A = \pm 1$, $A \neq 0$. E se ψ é um espinor pertencente ao ideal gerado por este idempotente,

$$\psi = 2^{-p} \sum_B \psi^B g_B \sum_A \varepsilon^A f_A \tag{13.1}$$

Um vetor de Clifford qualquer é dado por $u = u^A e_A = u^{AB} f_A g_B$, sendo os u^{AB} proporcionais aos u^A.

O que é curioso neste formalismo é que ele mostra como os espinores possuem uma estrutura algébrica tão diversa e tão peculiar frente aos demais objetos da álgebra. Em especial aqueles objetos definidos so bre os geradores da álgebra; um deles, o operador gradiente, $\partial = e_\mu \partial^\mu$, onde $\partial^\mu = \partial/\partial x_\mu$, de expressão tão simples, transforma-se num objeto bem menos maleável na álgebra dos f_k. Da mesma forma, quando escrevemos os espinores no formalismo dos produtos dos geradores, obtemos um objeto igualmente complicado. Mas ainda assim podemos obter vários resultados relativos à estrutura das classes espinoriais da álgebra, jogando-se com um ou outro formalismo.

Teitler, em (56, 57), enumera as classes de idempotentes de uma álgebra de Dirac, obtendo assim uma classificação dos espinores RST para C^4. Estamos já em condições de obter as quinze classes de Teitler a partir de uma classe fundamental, graças às transformações do grupo $P \otimes Q$, onde P são as permutações dadas em 12.11 e Q são aquelas dadas em 13.1. O que se resume na seguinte definição e teorema:

13.3. Definição. Dada uma transformação $QP \varepsilon P \otimes Q$, as classes de Teitler são geradas pelos idempotentes primitivos $(e_A^A)QP$,os e_A^A dados em 11.5. §§

Os e_A^A constituem a classe fundamental de espinores em C^{2p}. Em especial,

13.4. Teorema. As classes de Teitler para C^4 resultam de uma transformação QP. §

A prova é explícita, e seu cálculo se apresenta nas tabelas anexas, onde inclusive indicamos a classificação feita por Teitler (56);

pequenas diferenças resultam do fato da métrica utilizada por aquele autor ser minkowskiana, enquanto empregamos uma métrica euclidiana. As tabelas esclarecem:

CLASSES ESPINORIAIS EM C^4, SEGUNDO TEITLER

PERMUTAÇÃO DA BASE		IDEMPOTENTE PRIMITIVO ASSOCIADO
Q_o	$(e_1\ e_2\ e_3\ e_4)$	$e_o,\ ie_2\ e_1,\ ie_4\ e_3,\ -\ e_4\ e_3\ e_2\ e_1$
Q_1	$(e_1\ e_3\ e_2\ e_4)$	$e_o,\ ie_3\ e_1,\ ie_4\ e_2,\ -\ e_4\ e_3\ e_2\ e_1$
Q_2	$(e_1\ e_4\ e_2\ e_3)$	$e_o,\ ie_4\ e_1,\ ie_3\ e_2,\ -\ e_4\ e_3\ e_2\ e_1$

Quadro 13 - 1. Permutações da base e idempotentes primitivos associados.

O idempotente fundamental (dado em 11.5) é o que corresponde à permutação identidade, Q_o. As permutações Q_1 e Q_2 são as únicas outras que geram idempotentes diversos (as demais geram-nos iguais aos de uma ou outra classe). A estes objetos aplicamos agora as permutações de seus geradores quaterniônicos (ver quadros seguintes).

CLASSE		IDEMPOTENTE - PRODUTO TENS.	IDEMPOTENTE - EXPLÍCITO
E	$L_0 \otimes L_0$	$\frac{1}{4}(\varepsilon \otimes \varepsilon + \tau \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \tau + \tau \otimes \tau)$	$\frac{1}{4}(e_0 + ie_{21} + ie_{43} - e_{4321})$
C	$L_0 \otimes L_1$	$\frac{1}{4}(\varepsilon \otimes \varepsilon + \tau \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \rho + \tau \otimes \rho)$	$\frac{1}{4}(e_0 + ie_{21} + ie_{321} + e_3)$
D	$L_0 \otimes L_2$	$\frac{1}{4}(\varepsilon \otimes \varepsilon + \tau \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \sigma + \tau \otimes \sigma)$	$\frac{1}{4}(e_0 + ie_{21} + ie_{421} + e_4)$
A	$L_1 \otimes L_0$	$\frac{1}{4}(\varepsilon \otimes \varepsilon + \rho \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \tau + \rho \otimes \tau)$	$\frac{1}{4}(e_0 + e_1 + ie_{43} + ie_{431})$
A	$L_1 \otimes L_1$	$\frac{1}{4}(\varepsilon \otimes \varepsilon + \rho \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \rho + \rho \otimes \rho)$	$\frac{1}{4}(e_0 + e_1 + ie_{321} + ie_{32})$
A	$L_1 \otimes L_2$	$\frac{1}{4}(\varepsilon \otimes \varepsilon + \rho \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \sigma + \rho \otimes \sigma)$	$\frac{1}{4}(e_0 + e_1 + ie_{421} + ie_{42})$
B	$L_2 \otimes L_0$	$\frac{1}{4}(\varepsilon \otimes \varepsilon + \sigma \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \tau + \sigma \otimes \tau)$	$\frac{1}{4}(e_0 + e_2 + ie_{43} + ie_{432}$
B	$L_2 \otimes L_1$	$\frac{1}{4}(\varepsilon \otimes \varepsilon + \sigma \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \rho + \sigma \otimes \rho)$	$\frac{1}{4}(e_0 + e_2 + ie_{321} - ie_{31})$
B	$L_2 \otimes L_2$	$\frac{1}{4}(\varepsilon \otimes \varepsilon + \sigma \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \sigma + \sigma \otimes \sigma)$	$\frac{1}{4}(e_0 + e_2 + ie_{421} - ie_{41})$

Quadro 13 - 2. Permutações do idempotente fundamental.

Enumeramos as permutações do objeto $(e_A^A)Q$. Na primeira coluna está a classificação de Teitler, na segunda a permutação P associada (ver exemplo após 12.11). Na terceira, o idempotente como um produto de quatérnions; na quarta, o idempotente escrito explicitamente - onde abreviamos $e_4 e_2 e_1 = e_{421}$, etc.

E	$L_0 \otimes L_0$	$\frac{1}{4}(\varepsilon \otimes \varepsilon + \rho \otimes \sigma - \sigma \otimes \rho + \tau \otimes \tau)$	$\frac{1}{4}(e_0 + ie_{42} + ie_{31} - e_{4321})$
C	$L_0 \otimes L_1$	$\frac{1}{4}(\varepsilon \otimes \varepsilon + \rho \otimes \tau - \sigma \otimes \sigma + \tau \otimes \rho)$	$\frac{1}{4}(e_0 + ie_{431} + ie_{41} + e_3)$
D	$L_0 \otimes L_2$	$\frac{1}{4}(\varepsilon \otimes \varepsilon + \rho \otimes \rho - \sigma \otimes \tau + \tau \otimes \sigma)$	$\frac{1}{4}(e_0 + ie_{32} - ie_{432} + e_4)$
C	$L_1 \otimes L_0$	$= L_0 \otimes L_1$	
D	$L_1 \otimes L_1$	$= L_0 \otimes L_2$	
E	$L_1 \otimes L_2$	$= L_0 \otimes L_0$	
D	$L_2 \otimes L_0$	$= L_0 \otimes L_2$	
E	$L_2 \otimes L_1$	$= L_0 \otimes L_0$	
C	$L_2 \otimes L_2$	$= L_0 \otimes L_1$	

<u>Quadro 13 - 3.</u> Permutações de segundo idempotente fundamental.

Neste objeto e no seguinte as permutações são redundantes, gerando três delas o mesmo idempotente na classificação de Teitler.

E	$L_0 \otimes L_0$	$\frac{1}{4}(\varepsilon \otimes \varepsilon - \sigma \otimes \sigma + \rho \otimes \rho + \tau \otimes \tau)$	$\frac{1}{4}(e_0 + ie_{41} + ie_{32} - e_{4321})$
C	$L_0 \otimes L_1$	$\frac{1}{4}(\varepsilon \otimes \varepsilon - \sigma \otimes \tau + \rho \otimes \sigma + \tau \otimes \rho)$	$\frac{1}{4}(e_0 - ie_{432} + ie_{42} + e_3)$
D	$L_0 \otimes L_2$	$\frac{1}{4}(\varepsilon \otimes \varepsilon - \sigma \otimes \rho + \rho \otimes \tau + \tau \otimes \sigma)$	$\frac{1}{4}(e_0 - ie_{31} + ie_{431} + e_4)$
D	$L_1 \otimes L_0$	$= L_0 \otimes L_2$	
E	$L_1 \otimes L_1$	$= L_0 \otimes L_0$	
C	$L_1 \otimes L_2$	$= L_0 \otimes L_1$	
C	$L_2 \otimes L_0$	$= L_0 \otimes L_1$	
D	$L_2 \otimes L_1$	$= L_0 \otimes L_2$	
E	$L_2 \otimes L_2$	$= L_0 \otimes L_0$	

Quadro 13 - 4. Permutações do terceiro idempotente fundamental.

São novamente redundantes as permutações. Para mais detalhes, veja-se o texto do trabalho.

* * *

As diferenças para o trabalho de Teitler são de notação e de um fator i, devido à métrica utilizada por aquele autor. Nestas tabelas encontramos os quinze idempotentes que podem ser gerados através de permutações convenientes do idempotentes fundamental (correspondente a Q_o na tabela 13-1). Cada um destes objetos pertence a uma dada decomposiçãoda unidade em idempotentes - e os demais idempotentes se obtêm permutando-se os sinais das parcelas diferentes da identidade nas somas entre parênteses (colunas 3 e 4 nas tabelas 13 - 2, 3 e 4). Na realidade, conforme resulta da seção 11 do presente trabalho, o número de idempotentes numa álgebra de Clifford é infinito; as classes de Teitler, no entanto, possuem a conveniência de nos resumir de modo muito prático as principais representações empregadas em Física para o cálculo da equação de ondas: a classe $Q_o(L_1 \otimes L_1)$ corresponde à chamada "representação standard"; a classe $Q_2(L_o \otimes L_o)$, à representação de Weyl, por exemplo (54).

Nosso último problema será esclarecer o número, em geral, das classes de Teitler associadas a uma dada álgebra de Clifford C^{2p}. Conforme vimos em nosso exemplo, tanto as permutações Q quanto as P são redundantes. As primeiras o são porque os idempotentes se formam através da obtenção de partições disjuntas do objeto pseudo escalar da álgebra, e_N. O cálculo das classes Q é, assim, muito simples:

13.5. Teorema. Em C^{2p}, o número das classes Q de idempotentes "fundamentais" é dado por $N_p = (p!)^{-1} \prod_{i=1}^{p} C^2_{2(p-i)}$. §

Trata-se de um simples problema combinatório: dados 2p objetos, quantas classes disjuntas podemos formar com eles, contendo cada classe apenas 2 objetos? Dados os 2p, seleciono 2 e me sobram 2p - 2. Há C_{2p} maneiras diversas de fazer a primeira escolha; continuando, há C^2_{2p-2} formas de se realizar a 2a. escolha, e assim em diante. A divisão por p! se justifica porque cada seqüência de pares escolhidos repete-se p! vezes. §§

A multiplicidade das classes P é bem mais complicada. Pelas tabelas anexas vemos que enquanto os idempotentes associados à primeira classe Q são todos diferentes, os associados às outras duas classes se repetem. Um exame cuidadoso mostra que tal fato ocorre porque os próprios idempotentes fundamentais são constituidos por fatores que podem, uns e outros, resultarem de permutações P agindo sobre si. Por exemplo, $\rho \otimes \sigma$, $\sigma \otimes \rho$ e $\tau \otimes \tau$ ou $\rho \otimes \rho$, $\sigma \otimes \sigma$ e $\tau \otimes \tau$. Indicaremos de modo informal como se pode calcular seu número, desde que a expressão do próprio é muito complexa em sua forma explícita.

Os idempotentes (cf. 11.5) podem ser expressos como produtos de binômios. Operando-se os produtos verifica-se que há permutações P que "projetam" uma parcela na outra (ou seja, um fator binomial no outro). Nos fatores binomiais, para uma álgebra de ordem par, $\sigma \otimes \tau \otimes \ldots \otimes \tau \otimes \rho$ e $\rho \otimes \tau \otimes \ldots \otimes \tau \otimes \sigma$, com k fatores τ os dois, são produtos de dois geradores. Da mesma forma $\rho \otimes \tau \otimes \ldots \otimes \tau \otimes \rho$ e $\sigma \otimes \tau \otimes \ldots \otimes \tau \otimes \sigma$. Para o primeiro caso, as permutações $L_2 \otimes L_0 \otimes \ldots \otimes L_0 \otimes L_1$ e as $L_1 \otimes L_0 \otimes \ldots \otimes L_0 \otimes L_1$ para o segundo projetam um fator sobre o outro. A redundância aumenta porque - em relação a elementos com esta forma - há permutações P que se equivalem: $L_1 \otimes L_0 \otimes \ldots \otimes L_0 \otimes L_2$ para o primeiro exemplo, e $L_2 \otimes L_0 \otimes \ldots \otimes L_0 \otimes L_2$ para o segundo. Desta maneira torna-se possível enumerar as classes de Teitler para uma álgebra de Clifford qualquer de ordem par.

A extensão dos resultados da seção presente para as álgebras ímpares se faz de modo espontâneo.

XIV - TRANSFORMAÇÕES ESPINORIAIS

Com o presente parágrafo preparamos a aplicação que será feita em seguida do presente formalismo às equações para partículas com spin qualquer e sem interação. Aqui resumiremos na linguagem dos espinores RST algumas propriedades bem conhecidas para os espinores CWC. Nosso instrumento central será uma equação de ondas do tipo Dirac,

$$(14.1) \qquad (e_\mu \partial_\mu + m) \psi = 0$$

(não distinguiremos, aqui e no parágrafo seguinte, índices contravariantes de índices covariantes). A soma pode ser tomada nos μ sobre quaisquer índices 1, 2, ... n, mas é óbvio que o caso com interesse físico é aquele com $n = 4$. Façamos a transformação L sobre (14.1). Obtemos

$$(14.2) \qquad (q\, e_\mu\, q^{-1}\, \partial_\mu + m)\, q\, \psi\, q^{-1} = 0$$

onde $q\, e_\mu\, q^{-1} = e_A\, \bar{L}^A_{\ \mu}$. Para o caso em que $L^A_{\ \mu} = L^\alpha_{\ \mu}$, temos uma rotação de Lorentz sobre os vetores e_μ ; o caso geral L^A_B pode ser visto como uma mudança de representação. Notemos, em especial, para o espinor ψ, (14.3) $q\,\psi q^{-1} = q\,p\,e\,q^{-1} = (q\,p\,q^{-1})(q\,e\,q^{-1}) = p'\,e'$, $\quad p\,e = \psi$

A equação (14.1), no entanto, é ela mesma um espinor RST. Uma transformação do tipo $\psi' = q\,\psi$, $q \in C^n$; $\psi = \psi\,e$, onde e é um idempotente primitivo, é uma transformação que não altera o ideal ao qual se associa o espinor ψ. A transformação conjugada $\dot\psi' = \dot\psi\,q$ não altera os espinores conjugados $\dot\psi = e\,\dot\psi$. Em termos da equação (14.1),

(14.4) $q(e_\mu\,\partial_\mu + m)\psi = (q\,e_\mu\,q^{-1}\,\partial_\mu + m)q\psi = 0$

que nada mais é do que a transformação usual da equação de Dirac quando realiza uma rotação no espaço de quatro dimensões. Para este caso, $q = e^b$, onde b é um bivetor associado à rotação L. Notemos, no entanto, que no presente caso os e_μ são vetores de base, e não apenas as componentes de um único quadrivetor.

O produto de um espinor e de um espinor conjugado é um vetor pertencente a C^n. É fácil ver que ele pode sofrer a transformação $\psi'\dot\phi' = q\,\psi\dot\phi\,q^\dagger$, para q escolhido unitário, ou $\psi'\dot\phi' = q\,\psi\dot\phi\,q^{-1}$, no caso geral.

Mas é fácil ver que o produto direto $\psi \otimes \psi'$ de dois espinores à direita (ou à esquerda) de C^n, embora seja um espinor RST de C^{2n}, <u>não é</u> um vetor de C^n. A prova é simples. A totalidade dos produtos $\psi \otimes \psi'$ formam uma estrutura que não é um grupo- nela sequer existe uma identidade, embora hajam identidades à esquerda ou à direita (os idempotentes). Isto sugere então que consideremos os <u>bispinores</u> do tipo abaixo, definidos:

$$(14.5) \qquad \psi \otimes \psi' = (\psi \otimes e')(e \otimes e')(e \otimes \psi')$$

onde é fácil ver que há uma identidade bilateral. É tentador identificarmos o espaço destes objetos com ao menos um subespaço de C^n, desde que o número de componentes de $\psi \otimes \psi'$ é o mesmo número das componentes de um vetor em C^n. Por meio da teoria das representações vemos que a identificação do espaço dos bispinores $\psi \otimes \psi' = (\psi \otimes e')(e \otimes e')(e \otimes \psi')$ à totalidade de C^n é válida, de modo que um bispinor pode ser considerado um "vetor" em C^n, e desta maneira podemos associar a dois espinores - - ou a um espinor e seu adjunto - um vetor em C^n. Se impusermos a um espinor $\psi \varepsilon C^n$ uma condição subsidiária, podemos reduzir à metade o número de suas componentes. De modo que que o bispinor $\psi \otimes \psi'$ terá assim reduzidas as componentes. Para o espaço de quatro dimensões, convenientemente escolhidos os espinores, então, poderemos construir um bispinor que represente um vetor $x = x^\mu e_\mu$ sobre os geradores de C^4 - o que é propriedade bastante conhecida de tais objetos (16, 40).

XV - EQUAÇÕES PARA UMA PARTÍCULA LIVRE COM SPIN QUALQUER

A aplicação a que nos propomos é bastante espontânea. Teitler (54, 55) mostrou que dentro do presente formalismo podemos escrever as equações para o campo escalar e para o campo vetorial - massivo ou sem massa - desde que se escolha convenientemente o vetor Φ sobre o qual aplicaremos o operador de Dirac $D = (e_\mu \partial_\mu + m)$. A equação que Teitler usa é $D\Phi = 0$. Para $\Phi = \phi e_o + \phi_\mu e_\mu$, obtemos as equações (onde $\mu = 1, 2, 3, 4$).

(15.1) $$\partial_\mu \phi_\mu + m\phi = 0 \quad e \quad \partial_\mu \phi + m\phi_\mu = 0$$

que se reduzem à equação de Klein-Gordon $(\square^2 - m^2)\phi = 0$. Para o campo vetorial massivo, $D\Phi = 0$, com $\Phi = -mA_\mu e_\mu + \frac{1}{2} F_{[\mu\nu]} e_{\mu\nu}$, onde $e_{\mu\nu} = e_{\mu+\nu}$, $\mu \neq \nu$, e $F_{[\mu\nu]} = -F_{[\nu\mu]}$,

(15.2) $$\partial_\mu F_{[\mu\nu]} = m^2 A_\nu$$

(15.3) $$\partial_{[\rho} F_{[\mu\nu]]} = 0$$

(15.4) $$\partial_\rho A_\rho = 0$$

(15.5) $$\partial_\rho A_\mu - \partial_\mu A_\rho = F_{[\mu\nu]}$$

que é o sistema de Proca-Maxwell. Recentemente mostramos (24) que com um operador de Dirac generalizado, $D = ((e_\mu \odot e_o)\partial_\mu + m)$, e com $\Phi = -m h_{\mu\nu} e_\mu \odot e_\nu + \frac{1}{2} B_{[\mu\nu]} e_{\mu\nu} \odot e_\rho$, onde $\odot$ indica o produto tensorial simetrizado, obtemos

(15.6) $$B_{[\mu\alpha]\nu} = k \quad \partial_\mu h_{\alpha\nu} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}$$

(15.7) $$\partial_\alpha B_{[\alpha\nu]\rho} = m^2 h_{\rho\mu}$$

(15.8) $$\partial_\alpha h_{\alpha\nu} = 0$$

(15.9) $\qquad \partial_{[\alpha} B_{[\mu\nu]\,]\rho} = 0$

(15.10) $\qquad \partial_\alpha B_{[\mu\nu]\rho} - \partial_\rho B_{[\mu\nu]\alpha} = 0$

(15.11) $\qquad \partial_\alpha B_{[\mu\nu]\alpha} = 0$

que nada mais são do que as equações para uma partícula livre e com spin 2, a menos de (15.12) $\quad h_{\alpha\alpha} = 0$

por elas implicada (o sistema é redundante, já que (15.8) implica(15.11)). Em (24) mostramos que, ao se definir convenientemente um campo fraco $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}h)$, com $h = \delta_{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ e $|\varepsilon(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}h)| \ll 1$, obtemos

(15.13) $\quad R_{\sigma\nu} \cong -\frac{1}{2}\varepsilon\,\delta_{\alpha\beta}(\partial_\sigma\partial_\nu h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\delta_{\sigma\nu}\delta_{\rho\mu}\partial_\rho\partial_\mu h_{\alpha\beta}) = 0$

(onde $R_{\alpha\nu}$ é o tensor de Ricci associado ao campo fraco $g_{\mu\nu}$), desde que passemos ao limite de massa nula. Quer dizer, neste caso, as equações (15.6) - (15.12) são aquelas de um campo gravitacional fraco e na ausência de matéria.

Mais ainda. Para o campo de spin 3/2 modificamos um pouco nossa função Φ. O operador D ainda é o definido para o caso de spin 2, mas a função Φ se torna $\Phi = -m\chi_{\mu\nu}\, e_\mu \odot f_\nu + \frac{1}{2}\chi_{[\mu\nu]\rho}\, e_{\mu\nu} \odot f_\rho$, onde f_ρ é um dos elementos de uma base espinorial qualquer. Ao operarmos e anularmos $D\,\Phi = 0$, tomamos cuidado em deixarem evidência alguns fatores $e_\mu \odot e_o$; como a equação $D\,\Phi = 0$ deve valer para qualquer base espinorial, podemos obter:

(15.14) $$\partial_\mu \chi_{\mu\sigma} = 0$$

(15.15) $$\psi_{[\mu\rho]\sigma} = \partial_\mu \chi_{\rho\sigma} - \partial_\rho \chi_{\mu\sigma}$$

(15.16) $$\partial_{[\mu} \psi_{[\alpha\beta]]\sigma} = 0$$

(15.17) $$\partial_\mu \psi_{[\mu\alpha]\sigma} = m \chi_{\alpha\sigma}$$

(15.18) $$(e_\mu \odot e_o)\partial_\mu \chi_{\rho\sigma} + m \chi_{\rho\sigma} = 0$$

(15.19) $$(e_\mu \odot e_o)\partial_\mu \psi_{[\alpha\beta]\sigma} + m \psi_{[\alpha\beta]\sigma} = 0$$

O sistema é, novamente, redundante, e (15.14) e (15.18) são equivalen - tes às equações de Rarita-Schwinger (40, 44, 49); a equação que falta,

(15.20) $$e_\mu \chi_{\mu\rho} = 0$$

é conseqüência das anteriores. Obtemos estas equações sem ser necessária a matriz conjugação de carga utilizada habitualmente(44, 49).

O caso geral para spin inteiro s parte do operador $D = \left[\phi\ (e_\mu \odot e_o \odot \ldots \odot e_o)\partial_\mu + m\right]$, onde s-1 e_o multiplicam e_μ. Operando sobre $\phi = - m A_{\mu\nu\ldots\lambda}\ e_\mu \odot \ldots \odot e_\lambda + \frac{1}{2} B_{[\mu\nu]\lambda\ldots\rho}\ e_{\mu\nu} \odot \ldots \odot e_\rho$), obtemos

(15.21) $$B_{[\sigma\mu]\nu\ldots\lambda} = \partial_\sigma A_{\mu\nu\ldots\lambda} - \partial_\mu A_{\sigma\nu\ldots\lambda}$$

(15.22) $$\partial_\mu A_{\mu\nu \cdots \lambda} = 0$$

(15.23) $$\partial_\mu B_{[\alpha\beta]\mu\nu \ldots \lambda} = 0$$

(15.24) $$\partial_\alpha B_{[\alpha\beta]\mu \ldots \lambda} = m^2 A_{\beta\mu \ldots \lambda}$$

(15.25) $$\partial_\sigma B_{[\alpha\beta] \mu \ldots \lambda} - \partial_\mu B_{[\alpha\beta]\sigma \ldots \lambda} = 0$$

(15.26) $$\partial_\lambda B_{[\alpha\beta] \mu \ldots \lambda} = 0$$

ou seja, a menos de

(15.27) $$A_{\alpha \alpha \nu \ldots \lambda} = 0$$

que é implicada pelo sistema, estas são as equações de Fierz (25) para a partícula livre com spin inteiro s. O caso geral para spin semi-inteiro s + (1/2), onde s é um número inteiro, usa as equações acima (sendo que s e_o multiplicam e_μ e o objeto χ possui $\nu + 1$ índices), e com a função de onda $\Phi = - \chi_{\mu\nu \ldots \lambda} e_\mu \odot e_\nu \odot \ldots \odot f_\lambda + \frac{1}{2} \psi_{[\mu\nu]\rho \ldots \lambda}$ $e_{\mu\nu} \odot e_\rho \odot \ldots \odot f_\lambda$. Obtemos:

(15.28) $$\partial_\mu \chi_{\mu\beta \ldots \sigma} = 0$$

(15.29) $$\psi_{[\mu\alpha]\beta \ldots \lambda\sigma} = \partial_\mu \chi_{\alpha\beta \ldots \lambda\sigma} - \partial_\alpha \chi_{\mu\beta \ldots \lambda\sigma}$$

(15.30) $$\partial_\mu \psi_{[\mu\alpha]\beta \ldots \sigma} = m^2 \chi_{\alpha\beta \ldots \lambda\sigma}$$

(15.31) $$[\partial_\mu \psi_{[\rho\alpha]]\beta \dots \gamma} = 0$$

(15.32) $$\partial_\mu \psi_{[\rho\alpha]\mu \dots \gamma} = 0$$

(15.33) $$\left[(e_\mu \otimes e_o \otimes \dots \otimes e_o)\partial_\mu + m \right] \chi_{\alpha\beta \dots \lambda\sigma} = 0$$

(15.34) $$\left[(e_\mu \otimes \dots \otimes e_o)\partial_\mu + m \right] \psi_{[\rho\alpha]\beta \dots \sigma} = 0$$

que se reduzem às equações de Bargmann-Wigner (5) ou Rarita-Schwinger(44).

Os sistemas (15.21) - (15.25) e (15.28) - (15.34) são muito redundantes. Em especial deduzem-se, também as formas simetrizadas das equações (15.33). Podemos abreviar as equações acima se construirmos o anel infinitesimal de rotações associado a C^4, que é d^5, e cujos objetos são os 4 e_μ, redefinidos como $e_{o\mu} = e_\mu$; $e_{o\mu} = - e_{\mu o}$, junto com $e_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[e_\mu, e_\nu]_- = \frac{1}{2}(e_\mu e_\nu - e_\nu e_\mu)$. Seja d^5 o espaço vetorial descrito por estes objetos; seja g^4 o espaço vetorial dos 4 e_μ; para uma partícula com spin inteiro s, $\phi \in d^5 \odot g^4 \odot \dots \odot g^4$, onde o número de fatores é igual a s. Para uma partícula com spin semi-inteiro s (1/2), $\phi \in d^5 \odot g^4 \odot \cdot \dots \odot g^4 \odot I$, onde representamos por I a classe de equivalência mod L dos ideais à esquerda de C^4, e onde há S + 1 fatores.

Sendo estas equações bem mais compactas, e prestando-se elas muito espontaneamente às generalizações indicadas, cremos que através delas, outras generalizações se permitirão. Nós a apresentamos aqui apenas como uma breve aplicação do formalismo apresentado aos §§ 1º - 14º - já que as álgebras de Clifford são estruturas naturalmente associadas aos espaços tangentes a uma variedade (3), cremos que pelo presente caminho alguns problemas relativos à construção de equações de ondas em espaços curvos possam ser elucidados.

o o o

BIBLIOGRAFIAS E REFERÊNCIAS.

(1) Amaral, C.M., Quatérnions e Espaço-Tempo Riemanniano e não Riemanniano, tese, CBPF (1971).

(2) Atiyah, M. F.; Vector Fields on Manifolds, Westdeutscher Verlag(1970).

(3) Atiyah, M. F.; Bott, R.; Shapiro, A.; Topology, 3, Supp. 1 (1964).

(4) Bade, W. L.; Jehle, H.; Rev. Mod. Phys., 25, 3 (1953).

(5) Bargmann, V.; Wigner, E.P.; Proc. Nat. Acad. Sci., 34, 211 (1948).

(6) Bergmann, P. G.; Phys. Rev., 107, 2 (1957).

(7) Boerner, H.; Representations of Groups, North-Holland (1970).

(8) Brauer, R.; Weyl, H.; Am. J. Math., 57, 425 (1935).

(9) Buchdahl, H. A.; Proc. Royal Soc. (London), A303, (1967).

(10) Case, K. M.; Phys. Rev., 97, 3 (1955).

(11) Cercignani, C.; J. Math. Phys., 8, 3 (1967).

(12) Chevalley, C.B.; Theory of Lie Groups, Princeton Univ.Press (1946).

(13) Chevalley, C.B.; The Algebraic Theory of Spinors, Columbia (1954).

(14) Clifford, W.K.; Am. J. Math, 1, 126 (1878).

(15) Clifford, W.K.; Am J. Math, 1, 350(1878).

(16) Corson, E.M.; Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave--Equations, Blackie & Sons (1955).

(17) Crumeyrolle, A.; Ann. Inst. Henri Poincaré, 11, 1 (1969).

(18) Crumeyrolle, A.; Ann. Inst. Henri Poincaré, 14, 4 (1971).

(19) Crumeyrolle, A.; Ann. Inst. Henri Poincaré, 16 , 3 (1972).

(20) Dirac, P.A.M.; Proc. Roy. Soc. (London), A117, 610 (1928).

(21) Dirac, P.A.M.; Proc. Roy. Soc. (London), A118, 341 (1928).

(22) Dirac, P.A.M.; Proc. Roy. Soc. (London), A155, (1936).

(23) Dirac, P.A.M.; The Principles of Quantum Mechanics, Oxford (1967).

(24) Doria, F.A.; Lett. al Nuovo Cimento, 7, 5 (1973).

(25) Fierz, M.; Helv. Phys. Acta, 12, 3 (1939).

(26) Fisk, C.; Tait, W.; J. Phys., A6, 3 (1973).

(27) Fraleigh, J.B.; A First Course in Abstract Algebra, Addison-Wesley,(1968).

(28) Good, R.H.; Rev. Mod. Phys., 27, 2 (1955).

(29) Greub, W.H.; Linear Algebra, Springer (1967).

(30) Hermann, R.; Lie Groups for Physicists, W.A. Benjamin (1966).

(31) Herstein, I.N.; Topics in Algebra, Blaisdell (1964).

(32) Hestenes, D., Space-Time Algebra, Gordon & Breach (1966).

(33) Hestenes, D.; J. Math. Phys., 8, 4, 798 (1967).

(34) Hestenes, D.; J. Math. Phys., 8, 4, 809 (1967).

(35) Hestenes, D.; J. Math. Phys., 8, 5 (1967).

(36) Hestenes, D.; Am. J. Phys., 39, 1013 (1971).

(37) Hestenes, D.; Gurtler, R.; Am. J. Phys., 39, 1028 (1971).

(38) Hoffman, K.; Kunze, R.; Linear Algebra, Prentice-Hall (1961).

(39) Lord, E.A.; Proc. Cambridge Phil. Soc., 63, 2 (1967).

(40) Luriẽ, D.; Particles and Fields, Interscience (1968).

(41) Nelson, E.; Tensor Analysis, Princeton (1967).

(42) Pais, A.; J. Math. Phys., 3, 6 (1962).

(43) Pauli, W.; Fierz, M.; Proc. Roy. Soc. (London), A173 (1939).

(44) Rarita, W.; Schwinger, J.; Phys. Rev. 60 (1941).

(45) Raševskii, P.K.; Am. Math. Soc. Transl., Series 2, 6 (1957).

(46) Rastall, P.; Rev. Mod. Phys., 36, 3 (1964).

(47) Riesz, M.; Clifford Numbers and Spinors, Lecture Series nº 38, University of Maryland (1958).

(48) Sakurai, J.J.; Advanced Quantum Mechanics, Addison-Wesley (1967).

(49) Salam, A.; Delbourgo, R.; Strathdee, J.; Proc. Roy. Soc. (London), A284, 146 (1965).

(50) Sauter, F.; Z. Physik, 63, 803 (1930).

(51) Sauter, F.; Z. Physik, 64, 295 (1930).

(52) Silveira, A.; Phys. Rev., 97, 4 (1955).

(53) Sternberg, S., Lectures on Differential Geometry, Prentice-Hall (1964).

(54) Teitler, S., Nuovo Cimento Supp., 3, 1 (1965).

(55) Teitler, S.; Nuovo Cimento Supp., 3, 1, 15 (1965).

(56) Teitler, S.; J. Math. Phys., 7,9, 1730 (1966).

(57) Teitler, S.; J. Math. Phys., 7, 9, 1739 (1966).

(58) Waerden, B.L. van der; Algebra I, Springer (1966).

(59) Wedderburn, J.M.; Lectures on Matrices, Dover s/d.

(60) Wigner, E.P.; Group Theory and Atomic Spectra, Academic Press (1959).

* * *

ÍNDICE

Prefácio ii

Convenções iv

I. Introdução 1

II. Propriedades Gerais 3

III. Comutação e anticomutação em C^n 7

IV. Comutação e anticomutação em C^n: Regras de Contagem 12

V. Subálgebras quaterniônicas em C^n 15

VI. Conexão entre as álgebras pares e as álgebras ímpares 18

VII. Produtos diretos de álgebras de Clifford 20

VIII. Álgebras de Clifford como produtos diretos de álgebras de quatérnions 22

IX. Propriedades algébricas e operações sobre vetores de Clifford.. 23

X. Automorfismos lineares em C^n 31

XI. Ideais e idempotentes em C^n 39

XII. Espinores 51

XIII. As classes espinoriais de Teitler 61

XIV. Transformações espinoriais 71

XV. Equações para uma partícula livre com spin qualquer 73

Bibliografia e Referências 80

Índice 83

* * *