

Tese de Doutorado

Modelos de Universo não singular com campo escalar

Felipe Tovar Falciano

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
COORDENAÇÃO DE COSMOLOGIA RELATIVIDADE E ASTROFÍSICA - ICRA
RUA DR. XAVIER SIGAUD 150, RIO DE JANEIRO - RJ

FEVEREIRO DE 2008

ORIENTADOR: NELSON PINTO-NETO

Sumário

Agradecimentos	iv
Resumo	vi
Abstract	vii
1 Introdução	1
2 Fundamentação Teórica	5
2.1 <i>Teoria Quântica Não-Relativística</i>	5
2.1.1 Interpretação causal	5
2.1.2 Sistema de várias partículas	10
2.1.3 Medida na interpretação causal	11
2.2 <i>Sistemas Hamiltonianos Vinculados</i>	13
2.2.1 Número finito de graus de liberdade	13
2.2.2 Extensão para campos clássicos	16
2.2.3 Quantização de sistemas vinculados	22
2.3 <i>Formulação Hamiltoniana da TRG</i>	25
2.3.1 Folheamento da variedade com hipersuperfícies tipo espaço	25
2.3.2 Formalismo ADM da Relatividade Geral	29
2.3.3 Hamiltoniana da Teoria da Relatividade Geral	32
2.4 <i>Teoria Linear de Perturbações Cosmológicas</i>	37
2.4.1 Formalismo	37
2.4.2 Perturbações escalares	40
2.4.3 Perturbações com campo escalar	44

3	Inflação	49
3.1	<i>Motivações</i>	49
3.2	<i>Propriedades Gerais</i>	55
3.3	<i>Modelos Típicos</i>	56
3.3.1	Modelo original	57
3.3.2	Inflação caótica	58
3.4	<i>Espectro de Potência</i>	60
3.5	<i>Problemas do Paradigma Inflacionário</i>	62
4	Modelos de Universos Não-Singulares	64
4.1	<i>Campo Escalar Clássico</i>	65
4.1.1	Dinâmica do sistema não perturbado	65
4.1.2	Perturbações escalares	71
4.1.3	Potencial massivo com termo $\lambda\varphi^4$	75
4.1.4	Matriz de transferência através de um ricochete	80
4.2	<i>Campo Escalar Quântico</i>	87
4.2.1	Soluções clássicas para o campo escalar livre	89
4.2.2	Quantização do sistema não perturbado	91
4.2.3	Trajетórias quânticas	94
4.2.4	Modelo inflacionário não singular	100
4.2.5	Quantização das perturbações	103
5	Comentários Finais	111
	Bibliografia	116

Agradecimentos

O processo de se desenvolver em um pesquisador, que vai muito além da óbvia necessidade de proficiência no tema de seu trabalho, é um trajeto árduo onde os vínculos criados nessa escalada se tornam raízes de cumplicidade. Ao longo desses quatro anos, eu acumulei dívidas que espero um dia poder pagar retribuindo com o meu tempo e minha dedicação.

Gostaria de agradecer em especial ao meu orientador e amigo Nelson Pinto Neto pela excelente convivência que tivemos durante esses seis anos. É impressionante como o seu profissionalismo, as suas virtudes e o seu jeito descontraído conseguem conviver tão harmoniosamente. De fato, você é uma dupla referência para mim. Te admiro como pesquisador e também, em mesma proporção, como pessoa! (apesar de ser tricolor....)

O fato é que o Nelson foi o primeiro contato que tive com a área de cosmologia e gravitação. Neste primeiro período, além dos cursos requeridos no programa de mestrado, me dediquei ao curso de gravitação com o Nelson e ao curso de cosmologia do professor Mário Novello com quem aprendi a não-linearidade da prática científica e o valor da curiosidade crítica.

Só tenho a agradecer a todos os pesquisadores do ICRA-BR pelo ótimo ambiente de trabalho e pela abertura à discussões e ampla disposição à colaboração. Um exemplo positivo dessas colaborações são os trabalhos desenvolvidos com o Santini a quem agradeço por nossas frutíferas discussões. Além disso, o regular “pequeno seminário” das sextas-feiras de manhã são a prova sistêmica da dinâmica produtiva e motivadora que existe neste grupo. Agradeço em especial ao Mário, ao Salim, ao Nelson, ao Luiz, ao Joffily e ao Martin além dos colaboradores Santiago, Santini e Herman.

Os pós-graduandos, vulgo meus amigos, merecem uma referência a parte. É verdade que com alguns a minha dívida talvez seja apenas registrada em chopes, mas sem esses momentos de descontração provavelmente o rendimento acadêmico teria sido bem menor. Além do mais, cada um tem a sua própria qualidade. Dentre músicos (Érico), cronistas (Rômulo), ativistas (Boiúna) e degustadores (André), minhas lembranças não esquecerão o Emanuel, a Maria, o Felipe, a Marcela, o grande Dudu, o Rafael, o Aranha, o meu caro Nilton, etc...

Desde o primeiro contato, por pior que ele seja, até o último momento, por mais dolorosa que possa ser uma defesa, qualquer pós-graduando sempre pode contar com o Ricardo e a Myriam para quase tudo.... Cada um no seu estilo próprio, ambos são pessoas por quem tenho grande carinho.

Outra pessoa que gostaria de nomear explicitamente é o Patrick Peter, pesquisador do “Institut d’Astrophysique de Paris”. Espero que o voto de confiança que ele me concedeu, aceitando a proposta de colaboração de hum ano, tenha sido para ele pelo menos 10% tão proveitosa quanto a minha estada em Paris. Descobri que além de ótimo pesquisador, o Patrick é uma pessoa admirável, mas por culpa do Nelson também é tricolor...

Não vou poder abranger todas as bifurcações, mas seria importante ao menos citar os meus queridos amigos que venho acumulando ao longo da vida: Marquinhos e Larissa, Camila, Maria, Rafa e Mayra, Carica e Aline, Marcão e Maria Clara, Bello, Carlinhos, Rochedo, o pessoal da Maison du Brésil como Rogério, Gisela, Marcelo e Paula, Paula da Mata, Pedro e Jú, Lia e senhor Rodrigues, Malu, Serginho e Adailton, e por aí vai....

A minha família..... não sei nem por onde começar! A meus pais, Silverio e Mônica, obrigado pelo carinho e dedicação incansável! Aos meus irmãos, Bruno e Carla, e a minha cunhada e amiga Gabriella obrigado pela amizade e companheirismo.

Obrigado por tudo!

Gostaria de agradecer ao CNPq pelo custeio da minha bolsa de doutorado e à Capes pela bolsa de estágio de doutoramento durante a minha estada em Paris.

Resumo

Este trabalho faz parte de um estudo sistemático de modelos não singulares que vem sendo desenvolvido no intuito de ampliar a descrição causal do Universo observável. Para isto iremos nos restringir à evolução do Universo primordial, considerando o conteúdo material descrito por um campo escalar minimamente acoplado à gravitação.

Primeiramente consideraremos um modelo essencialmente clássico com um campo escalar massivo cujo potencial de auto-interação é do tipo $\lambda\varphi^4$. Este sistema apresenta soluções de ricochete seguidas de uma fase de expansão quase-exponencial, com um número suficiente de “e-fold’s”. Neste contexto, estudaremos como se comportam as perturbações escalares de primeira ordem e calcularemos a matriz de transferência que conecta os modos crescente e decrescente antes e depois do ricochete.

Em seguida, de acordo com o programa de mini-superespaço, quantizaremos o sistema para um campo escalar livre, e encontraremos as soluções da equação de Wheeler - de Witt para os três valores possíveis da curvatura espacial, $\mathcal{K} = 0, \pm 1$. Este sistema apresenta vários tipos de solução como por exemplo, modelos de Universos cíclicos, modelos com ricochete, modelos do tipo “Big Bang - Big Crunch” e Universos que sempre se expandem de (contraem para) uma singularidade.

A partir de uma generalização da função de onda inicial, desenvolveremos um modelo inflacionário não singular onde o fator de escala se expande de forma acelerada de um valor finito não nulo. Após a transição para a fase desacelerada, o sistema passa a um regime clássico nos permitindo conjecturar uma possível conexão com o modelo padrão da cosmologia, antes da nucleossíntese.

Por fim, quantizaremos as perturbações escalares sem usarmos as equações de fundo como normalmente é feito na literatura. Para tanto utilizaremos transformações canônicas no intuito de encontrar um sistema hamiltoniano equivalente que possa ser quantizado consistentemente e, com o auxílio da teoria de Bohm - de Broglie, chegaremos a correta equação para as perturbações escalares na representação de Heisenberg.

Abstract

This work is part of a systematic study on non-singular models aiming at extending the causal description of the observable Universe. We will be mainly concerned with the dynamics of the primordial Universe with its matter content described by a scalar field minimally coupled to gravity.

First, we consider a classical model with a massive scalar field under the influence of a self-interaction potential of the $\lambda\phi^4$ type. We find that the system goes through a bounce followed by a quasi-exponential expansion, which can be controlled to produce a sufficient number of e-fold's. Given the background dynamics, we go on to consider the evolution of first order scalar perturbations, and we obtain the mixing matrix connecting the dominant and sub-dominant modes through the bounce.

The quantization of the system follows the minisuperspace program. We solve the Wheeler - de Witt equation for a free scalar field and find the general solutions for the three possible values of the spatial curvature, $\mathcal{K} = 0, \pm 1$. This system presents all types of solutions such as cyclic Universes, "Big Bang - Big Crunch" models, bounce models and also ever expanding or contracting singular Universes.

Futhermore, with a generalization of the initial wave function, we can develop a non-singular inflationary model with a finite volume in the far past. After the inflationary expansion, already in the decelerated phase, the system goes to a classical regime which possibly could be connected to the standard cosmological model.

Finally, we proceed to quantize the scalar perturbations without using the background equations of motion as is normally done in the literature. To do so, we perform a series of canonical transformations to an equivalent hamiltonian system that can be consistently quantized and, by making use of the Bohm - de Broglie quantum interpretation, we show how to generate the correct quantum equation for the scalar perturbation in the Heisenberg's picture.

Capítulo 1

Introdução

*“Não há realidade objetiva
sem história.”*

Cesar Lattes

Este trabalho faz parte de um estudo sistemático de modelos não singulares que pretende ampliar a descrição evolutiva do Universo se mantendo sempre no campo científico.

O modelo padrão da cosmologia prevê que aproximadamente a 14 bilhões de anos o Universo se encontrava num estado de alta densidade e temperatura com o conteúdo material se comportando como um plasma de partículas elementares. Numa fase anterior, a teoria clássica, ao ser extrapolada, leva o modelo a uma singularidade a qual não pode ser tratada por nenhuma técnica até hoje desenvolvida.

Existe uma série de possibilidades para se evitar esta quimera. Poderíamos, por exemplo, supor que durante esta fase a matéria se comporte como um fluido que viola as condições de energia necessárias para a validade dos teoremas de singularidade desenvolvidas na década de 60 por Penrose e Hawking Ref. [83].

Embora a primeira vista suas hipóteses nos pareçam coerentes e razoáveis, concluiu-se que estes teoremas são na realidade excessivamente restritivos.

Algumas possíveis condições para gerarmos modelos não singulares são (ver Ref. [91]):

1. Introdução de uma constante cosmológica.
2. Violar a condição $R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu > 0$ modificando a descrição do conteúdo material.
3. Modificar o lado direito das equações de Einstein com flutuações estocásticas ou efeitos quânticos.
4. Considerar geometrias não Riemannianas como a de Weyl e geometrias com torção.
5. Acoplamento não-mínimo dos campos físicos com a gravitação.
6. Lagrangianas não-lineares como o Eletromagnetismo com $\mathcal{L} = \mathcal{L}(F)$ e gravitação com $\mathcal{L} = f(R)$.

Neste estudo desenvolvemos modelos de Universos não singulares cujo conteúdo material é descrito por um campo escalar. Além da sua simplicidade descritiva, a adequação desta hipótese pode ser argumentada tanto pela expectativa de que a velocidade do som, devido à extrema densidade deste fluido, deva ser próxima da velocidade da luz ($\delta p/\delta\rho \approx 1$) Ref. [103], como encontramos motivações na física de altas energias onde o campo escalar descreve um campo fundamental da teoria.

De um ponto de vista físico, o primeiro modelo cosmológico relativístico proposto em 1917 por Einstein Ref. [50] é um modelo de Universo eterno e, logo em seguida, na década 30, encontramos modelos cíclicos de Universos não singulares Ref.'s [1]-[3]. As primeiras soluções explícitas de modelos com ricochete foram obtidas no final da década de 70 por Novello e Salim Ref.[4] e por Melnikov e Orlov Ref.[6].

No entanto, somado aos teoremas de singularidade, o paradigma inflacionário, com a possibilidade de resolver algumas questões cosmológicas aumentando o poder preditivo / e explicativo do modelo padrão, fez com que se postergasse o ataque a questão da singularidade inicial. Argumentava-se que deveríamos nos restringir a questões que tratassem apenas do Universo observável ou que deveríamos esperar a formulação de uma teoria quântica para a gravitação para podermos lidar consistentemente com esta questão.

Com a observação da aceleração da expansão do Universo, aparentemente, a cogitação de violarmos a condição $\rho + 3p > 0$ que é justamente a necessária para termos um ricochete

passou a se tornar mais plausível.

Hoje em dia, podemos encontrar uma série de trabalhos de modelos não singulares com uma infinidade de modificações do modelo padrão da cosmologia (para uma revisão ampla do assunto ver Ref. [90]). Em geral, esses modelos podem ser divididos em duas classes: Universos criados (ver Ref.[5]) ou Universos eternos que podem ainda ser divididos entre modelos que sempre se expandiram ou modelos com ricochetes.

Esta tese está dividida basicamente em três capítulos. No capítulo “Fundamentação Teórica” desenvolvemos o essencial das teorias que nos serão úteis nos modelos estudados posteriormente. No capítulo seguinte nos dedicamos a um breve apanhado das principais idéias envolvidas no paradigma inflacionário considerando as suas vantagens, desvantagens e os seus limites de aplicabilidade.

O capítulo “Modelos de Universos Não Singulares”, onde desenvolvemos de fato o nosso trabalho, é dividido em duas seções. Na primeira seção analisamos um sistema estritamente clássico e estudamos o comportamento das perturbações escalares através de um ricochete (“bounce”). Embora a dinâmica do sistema não perturbado seja extremamente interessante, o potencial massivo com um termo $\lambda\varphi^4$ para o campo escalar não nos permite construir um modelo completo que preveja um espectro primordial para as perturbações escalares. No entanto, a análise deste sistema continua sendo válida se supusermos que existe uma fase anterior a dominada pelo campo escalar de forma que podemos estudar a influência do ricochete no espectro das perturbações.

Em seguida, quantizamos o sistema para um campo escalar livre minimamente acoplado à gravitação. A dinâmica do sistema não perturbado mostra uma riqueza de soluções não encontrada na dinâmica clássica com modelos do tipo “Big Bang - Big Crunch”, Universos cíclicos, modelos singulares que sempre se expandem (contraem) a partir de (em direção a) uma singularidade com uma possível fase intermediária acelerada e modelos não singulares que descrevem ricochetes.

Além disso, desenvolvemos uma solução interessante que ainda não havia sido explorada na literatura onde generalizamos o parâmetro que define a variância da gaussiana que modela a função de onda inicial do Universo. Este último modelo representa um Universo inflacionário não singular cujo fator de escalar se expande de um valor finito no passado remoto atingindo uma fase de comportamento clássico que pode eventualmente ser conectada com o modelo

padrão da cosmologia.

Neste contexto, para estudarmos as perturbações deste sistema, não podemos usar o procedimento geralmente utilizado na literatura pois este se vale das equações clássicas do sistema não perturbado para simplificar o sistema e torná-lo tratável. Para abrir a possibilidade do estudo das perturbações num sistema onde as variáveis de fundo também são quantizadas, desenvolvemos consistentemente a quantização deste sistema encontrando corretamente a equação que descreve a dinâmica para o operador associado à variável de Mukhanov - Sasaki.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

*“O Universo (que outros chamam a Biblioteca)
compõe-se de um número indefinido, e talvez infinito,
de galerias hexagonais...”*
- A Biblioteca de Babel -
Jorge Luis Borges

2.1 *Teoria Quântica Não-Relativística*

2.1.1 Interpretação causal

Em 1900, Max Planck foi o primeiro cientista a quantizar a energia do campo eletromagnético. Na realidade, Planck utilizou a quantização como mero artifício matemático para conseguir reproduzir o espectro de emissão de um corpo negro sem, de fato, propor que o campo eletromagnético fosse realmente quantizado. Albert Einstein, por sua vez, levou a sério a proposta de quantização de Planck e usou a noção de fótons, quanta do campo eletromagnético, para explicar o efeito fotoelétrico.

Neste início de século XX, surgiram vários experimentos que comprovaram a necessidade de uma reformulação profunda nos conceitos da mecânica clássica. Seguindo este caminho, os mais proeminentes cientistas da época conseguiram em esforço conjunto construir um formalismo matemático capaz de prever resultados experimentais que, mais tarde com o advento

da eletrodinâmica quântica, se tornariam as previsões mais precisas já atingidas na física, fato este que comprova o sucesso de uma teoria.

No entanto, desde do seu início, não houve um consenso geral quanto a interpretação da mecânica quântica. P.A.M Dirac e Von Neumann, por exemplo, assumiram uma postura pragmática e postularam o colapso da função de onda, enquanto que Niels Bohr optou por explicar o processo de medição através do conceito de complementaridade entre quantidades físicas. Compreendendo a importância do princípio de incerteza, Werner Heisenberg tentou descrever a mecânica quântica utilizando apenas observáveis com o seu programa matricial.

Em 1929, durante uma conferência realizada na cidade de Copenhague, a maioria dos cientistas convergiram para o que hoje nós chamamos de interpretação de Copenhague. Apesar de seu sucesso com previsões muito precisas, com o passar do tempo, as limitações conceituais desta interpretação começaram vir a tona e com isso novas interpretações foram formuladas.

Em 1952, David Bohm Ref. [15] publicou um artigo onde apresentou pela primeira vez sua formulação de variáveis ocultas, também conhecida como interpretação de Bohm- de Broglie.¹ Outra interpretação foi desenvolvida por Hugh Everett e publicada em 1957 Ref. [19] com o título “Relative State Formulation of Quantum Mechanics”, hoje em dia conhecida como interpretação de vários mundos.

Por enquanto, ainda não existem observações contundentes que nos permitam descartar qualquer uma dentre essas interpretações de forma que somos levados a considerar todas equivalentemente válidas, salvo por inconsistências lógicas como, por exemplo, querer aplicar a interpretação de Copenhague ao Universo como um todo Ref. [20].

Nesta seção, nos restringiremos a analisar a interpretação causal de Bohm- de Broglie comparando-a com a interpretação de Copenhague quando necessário.

Nesta interpretação o conceito de sistema isolado é modificado. Um elétron é entendido como uma partícula adimensional que descreve uma trajetória no espaço sempre acompanhada de uma onda $\psi(\vec{x}, t)$ que exerce influência sobre a sua trajetória. Entende-se então que um sistema isolado é composto pela partícula acompanhada por sua onda. Ao contrário dos campos físicos convencionais, não existe uma fonte para esta onda - ela é intrínseca ao sistema. Vale ressaltar que, ao contrário da interpretação de Copenhague, na interpretação causal

¹o nome é referência ao trabalho de 1926 Ref.'s [16]-[18] de L. de Broglie, cujo D. Bohm teve conhecimento após ter concluído seu artigo de 1952

a função de onda ψ não caracteriza completamente o sistema quântico em questão visto a realidade ontológica do conceito de partícula.

A sua evolução dinâmica é descrita naturalmente pela equação de Schrödinger. Para uma função de onda complexa bem comportada sempre podemos re-escrevê-la na forma polar,

$$\Psi(\vec{x}, t) = R(\vec{x}, t) e^{\frac{i}{\hbar} S(\vec{x}, t)}$$

onde $R(\vec{x}, t)$ e $S(\vec{x}, t)$ são funções reais e \hbar é a constante de Planck dividida por 2π .

É interessante re-escrever a equação de Schrödinger com a função de onda na sua forma polar pois assim podemos separá-la em duas equações reais acoplando os dois campos $R(\vec{x}, t)$ e $S(\vec{x}, t)$, o que facilitará a sua interpretação física e a sua relação com a partícula.

Tomemos então a equação de Schrödinger para um dado potencial $V(\vec{x}, t)$:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{x}, t) \right) \Psi(\vec{x}, t).$$

Ao substituir a forma polar da função de onda encontramos duas novas equações, a saber,

$$\frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{(\nabla S(\vec{x}, t))^2}{2m} + V(\vec{x}, t) + Q(\vec{x}, t) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial R^2(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \left(R^2(\vec{x}, t) \frac{\nabla S(\vec{x}, t)}{m} \right) = 0 \quad (2.2)$$

$$Q(\vec{x}, t) \doteq -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R(\vec{x}, t)}{R(\vec{x}, t)} \quad R^2(\vec{x}, t) = \Psi^* \Psi = \|\Psi\|^2$$

A equação (2.1) é uma equação tipo Hamilton–Jacobi com a presença de dois potenciais, enquanto que a (2.2) é uma equação de continuidade, uma lei de conservação. Para tornar estas analogias consistentes, postula-se que o momento da partícula, no caso o elétron, é descrito pelo gradiente da fase da função de onda em unidades de \hbar , ou seja, $\vec{p}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} S(\vec{x}, t)$. Feito isto, para se encontrar a trajetória da partícula basta integrarmos a expressão

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\nabla S(\vec{x}, t)}{m}. \quad (2.3)$$

Ao pensar na equação (2.2) como uma equação de continuidade, estamos atribuindo à função $R^2(\vec{x}, t)$ uma característica de densidade de probabilidade. $R^2(\vec{x}, t)$ fornece a probabilidade da partícula estar na posição entre \vec{x} e $\vec{x} + d\vec{x}$ num dado instante de tempo t ². Note,

²Na interpretação de Copenhague esta quantidade é associada com a probabilidade de se encontrar a partícula nesta posição.

porém, que na equação (2.1) a função $R(\vec{x}, t)$ também determina o potencial quântico, ou seja, esta função assume dois papéis distintos: determina a probabilidade da partícula estar numa dada região do espaço e ao mesmo tempo influencia na dinâmica da partícula através do potencial quântico.

Como já mencionamos, devido a equação (2.3) a função de onda $\psi(\vec{x}, t)$ não especifica completamente o estado do sistema, ainda fica faltando fornecer a posição inicial da partícula \vec{x}_0 . Este é o único dado extra que não está contido na função de onda.

Nesta formulação, a noção de probabilidade advém justamente da incapacidade experimental de determinarmos com precisão infinita a posição inicial. A probabilidade associada ao mundo quântico não é inerente ao conceito de realidade como N. Bohr defendia, mas surge da mesma maneira que na mecânica estatística clássica. A associação de $R^2(\vec{x}, t)$ com probabilidade não é ingênua, é justamente através desta associação que garantimos a reprodução de todos os resultados experimentais estatísticos da mecânica quântica.

Na realidade, basta requeremos uma condição mais fraca. É suficiente postular que no instante inicial t_0 a probabilidade de encontrar a partícula na região entre \vec{x} e $\vec{x} + d\vec{x}$ é dada por $R^2(\vec{x}, t_0)$. A unitariedade da equação de Schrödinger nos garante que se a probabilidade em $t = t_0$ é $R^2(\vec{x}, t_0)$ então num tempo t a probabilidade será $R^2(\vec{x}, t)$.

À primeira vista parece uma tarefa ingrata tentar explicar os fenômenos nada intuitivos do mundo quântico como, por exemplo, o tunelamento ou o experimento de dupla fenda mantendo-se o conceito de trajetória e a realidade das partículas. Isto só é possível graças ao potencial quântico o qual é responsável por todas as manifestações quânticas.

Aparece assim uma maneira natural de se tomar o limite clássico. Definimos o limite clássico como o regime onde podemos desprezar os efeitos do potencial quântico frente aos do potencial $V(\vec{x}, t)$. A teoria é consistentemente aplicada a todos os sistemas microscópicos e macroscópicos inclusive ao processo que chamamos medição.

Vamos então analisar as características do potencial quântico e tentar elucidar como elas geram os fenômenos quânticos.

O potencial quântico tem uma peculiaridade de não depender da intensidade do campo $R(\vec{x}, t)$, ele depende apenas da sua forma, o que faz com que a sua influência possa ser estendida a distâncias macroscópicas. As suas características nos permite de entendê-lo como uma onda de informação. Para melhor explicar esta idéia, D. Bohm recorreu ao conceito de

informação ativa. Façamos uma analogia seguindo as idéias de Bohm Ref. [21].

As ondas de rádio permeiam todo o espaço carregando consigo informação (música, fala, etc.) codificada na sua forma. A música que nós ouvimos ao ligar o aparelho de rádio tem como fonte de energia não a onda eletromagnética mas sim a tomada da rede elétrica, ou seja, a onda tem apenas o papel de carregar a informação. Neste sentido podemos dizer que as ondas de rádio são potencialmente ativas em todo o espaço, porém são realmente ativa apenas dentro do sistema elétrico do aparelho.

É desta mesma forma que devemos pensar o potencial quântico. Ele é potencialmente ativo em todo espaço onde não é nulo mas é realmente ativo apenas na posição onde se encontra a partícula. A única diferença nesta analogia é que o potencial quântico, ao contrário das ondas de rádio convencionais, não possui nenhuma forma de energia, ele carrega estritamente apenas informação.

No experimento de dupla fenda Ref. [22], poderíamos fazer passar uma partícula de cada vez através do anteparo de forma a garantirmos que não haja interação entre as partículas. Na interpretação causal, cada partícula passa por apenas uma das duas fendas enquanto que a função de onda passa necessariamente pelas duas. As ondas emergentes de cada fenda carregam consigo informação sobre a estrutura global do aparato como a posição e a largura das fendas. Além disso, com a sua evolução, estas ondas que antes estavam separadas espacialmente irão se sobrepor transportando e mesclando essas informações sobre o aparato de medida. Assim o potencial quântico influencia a trajetória da partícula informando-a sobre a estrutura do ambiente como um todo, mesmo quando a partícula já se encontra distante do aparato experimental.

Vemos assim que os sistemas quânticos possuem uma dependência no estado do sistema global. A interpretação causal fornece uma maneira de tentar entender como o todo tem influência local. Bohr foi talvez o primeiro a defender que um sistema quântico não pode ser entendido a partir de seus fragmentos. No entanto, dentro de sua interpretação querer estudar a influência do todo sobre cada parte é carente de sentido devido a noção de complementariedade que ele desenvolve.

2.1.2 Sistema de várias partículas

Se formos um passo mais adiante e analisarmos o caso de muitos corpos, esta estrutura do todo inseparável é ainda mais alarmante. Num sistema de N partículas, a função de onda $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, t)$ é definida num espaço de configuração $3N$ dimensional. Re-escrevendo-a na forma polar chegamos a equações análogas as anteriores dadas por

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{(\nabla_i S)^2}{2m_i} + V + Q = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \nabla_i \left(R^2 \frac{\nabla_i S}{m_i} \right) = 0 \quad (2.5)$$

onde,

$$Q(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) \doteq -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \frac{\nabla_i^2 R(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)}{R(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)}$$

$$R^2 = \Psi^* \Psi = \|\Psi\|^2$$

A interpretação de probabilidade continua sendo válida devido à equação de continuidade, porém, agora fica mais evidente a dependência do potencial quântico com relação à configuração de todas as partículas. A força associada ao potencial quântico difere das outras forças da natureza por não poder ser determinada a partir das posições das partículas e eventuais condições de contorno, ela depende do estado do sistema, ou seja, da função de onda que é solução da equação de Schrödinger.

Assim sendo, a separação espacial não é mais um critério para definirmos um sistema isolado de influência externa. É fácil perceber que este processo em cadeia nos levaria a considerar a função de onda do Universo como um todo para estudarmos, por exemplo, a dinâmica de uma bolinha de ping-pong.

Como é então possível explicarmos o sucesso da física clássica onde o processo é exatamente o inverso, estuda-se as partes para se explicar o todo? A resposta esta na fatorização da função de onda.

Pode-se mostrar que quando a função de onda é fatorável em produtos de funções de onda de sub-sistemas, cada sub-sistema se comporta independentemente dos outros sendo assim necessário considerar apenas o seu todo isoladamente. Dentro desta visão, a dependência no

todo é uma propriedade fundamental dos sistemas físicos enquanto que o reducionismo, a possibilidade de análise por particionamento, é apenas um caso particular que deve sempre ser testado caso a caso.

2.1.3 Medida na interpretação causal

Uma vantagem adicional da interpretação causal é a possibilidade de descrever o processo de medida. A teoria é em princípio aplicável a qualquer sistema físico inclusive no que costumamos chamar de arranjo experimental. Deve-se ressaltar que o termo “medida de um observável” é danoso e geralmente leva-nos a idéias imprecisas a respeito do processo. Alguns autores, dentre eles John Bell Ref. [23], já expressaram suas críticas a este respeito.

Não se pretende aqui esgotar a análise do “processo de medição”, iremos apenas fazer alguns comentários a respeito deste tema. Para melhor entender este processo, podemos dividí-lo em duas etapas Ref.'s[24, 25] que se distinguem com relação à reversibilidade do processo. A primeira etapa é reversível enquanto que a segunda irreversível.

Suponha que queiramos “medir” um “observável” $A(\vec{x}, \vec{p})$ dado que o estado de um elétron seja uma superposição linear de N de seus auto-estados. Na primeira etapa do processo, dá-se uma separação espacial entre os pacotes de onda associados a cada auto-estado do observável de modo a não haver superposição entre eles. Uma vez separados, a partícula deve se encontrar em apenas um destes pacotes já que a região intermediária tem probabilidade nula $R^2(\vec{x}, \vec{p}) = 0$.

Certamente, nesta situação a informação potencialmente ativa nos pacotes vazios (vazios no sentido de não conterem a partícula) não podem mais influenciar o elétron. No entanto, nada impede que no futuro os pacotes venham a se sobrepor novamente o que nos mostra que durante esta etapa não há o que chamamos de “colapso da função de onda” ou igualmente a perda de informação. É a segunda etapa que nos possibilita desprezar todos os pacotes de onda que não estão associados ao auto-estado “medido”.

Durante o processo de registro do experimento é necessário que tenhamos um sistema termodinâmico macroscópico para amplificar o sinal e gerar um resultado macroscópico legível.

Este processo é intrinsecamente irreversível.

Neste caso, a função de onda do sistema é descrita por um produto tensorial entre a função de onda do elétron e a função de onda do aparato. Pode-se mostrar que, mesmo havendo superposição de diferentes auto-estados do observável A , no sub-espaço associado à função de onda do elétron, as funções de onda do aparato não se superpõem.

O resultado final é que a única função de onda que pode influenciar o movimento futuro da partícula é a que está associada ao resultado do experimento medido de forma que podemos consistentemente ignorar todos os outros pacotes de onda “não medidos”. Isto é equivalente a “colapsar a função de onda” sendo que neste caso todos os elementos do sistema foram descritos causalmente e sempre com a evolução temporal dada pela equação de Schrödinger.

Na Mecânica Quântica, além da função de onda que caracteriza o estado do sistema, a cada quantidade física associamos um operador do espaço de Hilbert. O princípio de incerteza nos fornece uma regra de comutação entre estes operadores que nos indica quais observáveis podem ou não ser observados simultaneamente. Como devemos então entender as relações de comutação entre estes operadores se assumimos que a partícula sempre possui todas as quantidades físicas bem definidas?

A não comutação entre dois operadores significa que não podemos “medí-los” simultaneamente, o que não implica que não possamos atribuir de forma bem definidas estas quantidades físicas a partícula.

O processo de “medida” é uma interação entre a partícula e o “sistema de medida”. Devemos então interpretar a não comutatividade entre dois operadores como a impossibilidade de interagir simultaneamente com o objeto dos dois modos necessários para as duas medições. A não comutatividade restringe as possibilidades de interações simultâneas com a partícula e não com relação ao seu estado e qualidades ontológicas.

Para finalizar, um comentário sobre a não-localidade do potencial quântico. Embora a idéia de interação não-local não nos seja familiar, a princípio, ela não representa nenhuma inconsistência com relação a teorias não-relativísticas. No entanto, é necessário verificar se é coerente construir uma teoria causal relativística não-local. De fato, já se mostrou ser possível estender a interpretação causal para um campo escalar satisfazendo a equação de Klein-Gordon Ref.'s [24]-[26] e para o campo eletromagnético Ref. [27], ou seja, aparentemente não-localidade e Relatividade especial podem ser compatíveis.

2.2 *Sistemas Hamiltonianos Vinculados*

2.2.1 Número finito de graus de liberdade

Na tentativa de construir uma formulação hamiltoniana para a Teoria da Relatividade Geral, devido ao fato de ser uma teoria invariante por reparametrizações arbitrárias de coordenadas, surgem naturalmente vínculos entre as variáveis canônicas. Desta maneira, se faz necessário estudar o método desenvolvido por P.A.M Dirac Ref. [9], no início da década de 50, para tratar sistemas hamiltonianos vinculados.

Apesar do formalismo hamiltoniano ser completo, no sentido de ser equivalente e independente do formalismo lagrangiano, é comum construí-lo a partir de uma lagrangiana. Seguiremos este mesmo caminho.

Estamos interessados em casos onde os momenta não são todos funções independentes das velocidades generalizadas. Desta forma surgem naturalmente vínculos que são traduzidos em equações relacionando as coordenadas e os momenta

$$\phi_m(q, p) = 0. \quad (2.6)$$

Estas equações são chamadas de vínculos primários³ (terminologia usada pelo próprio Dirac), ou seja, os vínculos oriundos da própria definição dos momenta ($p \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$). Daqui a pouco definiremos precisamente a diferença entre vínculos primários e secundários.

Devido aos vínculos (2.6) a hamiltoniana definida por

$$H(q, p) \doteq [p\dot{q} - L(q, \dot{q})]_{p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}$$

deve ser acrescida das equações de vínculos para garantirmos a validade dos mesmos. De fato, é necessário modificar a hamiltoniana para

$$H^* = H + C_m \phi_m,$$

onde em geral os coeficientes C_m podem ser funções arbitrárias dos q 's e dos p 's. Eles nada mais são do que os multiplicadores de lagrange associados a cada vínculo. Impondo que a

³Hoje em dia já existem refinamentos a esta terminologia, porém não são relevantes para esta exposição Ref.'s [7, 8].

variação da ação com relação a esses coeficientes se anule, garantimos a validade das equações de vínculo.

As equações de movimento para o sistema hamiltoniano precisam ser generalizadas, Ref. [9], para:

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u_m \cdot \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \quad , \quad (2.7)$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} - u_m \cdot \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n} \quad , \quad (2.8)$$

onde os u_m 's são desconhecidos.

Uma função arbitrária $g(q, p)$ tem a sua evolução temporal descrita em termos dos parênteses de poisson dada por

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial g}{\partial p_n} \dot{p}_n = \{g, H\} + u_m \{g, \phi_m\} .$$

Esta expressão pode ser condensada, definindo-se a hamiltoniana total $H_T = H + u_m \phi_m$,

$$\dot{g} = \{g, H_T\} .$$

É necessário ressaltar que os vínculos só podem ser substituídos após o cálculo dos parênteses de poisson. De fato, se pensarmos geometricamente os vínculos $\phi_m(q, p)$ são interpretados como superfícies no espaço de fase onde a dinâmica deve ocorrer na região de superposição, enquanto que os parênteses de Poisson, ao utilizarem derivadas parciais, estão calculando variações na direção normal às superfícies. Para lembrar este fato escrevemos

$$\phi_m(q, p) \approx 0 .$$

Por consistência do formalismo temos que garantir que os vínculos sejam preservados para todos os instantes:

$$\dot{\phi}_k = \{\phi_k, H_T\} = \{\phi_k, H\} + u_m \{\phi_k, \phi_m\} \approx 0 \quad (k=1, \dots, m) .$$

Estas m equações podem trazer 4 situações distintas.

1. é trivialmente satisfeita
2. revela uma inconsistência

3. resulta em uma nova equação de vínculo independente dos u_m 's
4. gera equações que os u_m 's devem satisfazer

Se nos depararmos com a situação 2, o formalismo não pode ser aplicado para este sistema específico e fim da linha.

No caso 3, novas equações de vínculo serão criadas quando impusermos preservação dos vínculos primários. Estes novos vínculos são chamados de vínculos secundários por razões óbvias. Porém, estes vínculos também devem ser preservados, o que nos leva às quatro situações possíveis novamente. Qualquer equação de vínculo que venha a surgir deste processo é chamada de secundária.

Este procedimento continua até que todos os casos recaiam em 1, em 2, ou em 4 que pode ser entendido como equações para as variáveis u_m 's,

$$\{\phi_j, H\} + u_m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0. \quad (2.9)$$

Iremos supor que estas equações podem ser satisfeitas, caso contrário o formalismo é inconsistente. A equação (2.9) pode ser entendida como uma equação matricial do tipo $A.u_m = B$. Se a matriz $\{\phi_j, \phi_m\}$ não puder ser invertida, a solução não será unívoca pois podemos somar à sua solução qualquer combinação linear de funções $V_m(q, p)$ tal que

$$V_m \{\phi_j, \phi_m\} = 0. \quad (2.10)$$

Assim, concluímos que a solução mais geral para a equação (2.9) é dada por

$$u_m = U_m(q, p) + v_a V_{am}(q, p),$$

onde os coeficientes v_a 's são completamente arbitrários podendo ser quaisquer funções do tempo, enquanto $V_{am}(q, p)$ são funções linearmente independentes que satisfazem (2.10) e os coeficientes U_m 's são as soluções particulares das equações (2.9).

Da álgebra linear, sabemos que a impossibilidade de inversão de uma matriz está associada a duas ou mais de suas linhas ou colunas serem linearmente dependentes, ou seja, temos excesso de informação. Neste caso, é natural pensarmos que estamos lidando com um sistema com liberdades de calibre. Como veremos mais adiante, a liberdade de calibre está intimamente ligada à existência de vínculos de primeira classe. Chamamos de vínculo de primeira classe

todos os vínculos que possuam parênteses de poisson fracamente igual a zero com qualquer outro vínculo e de vínculo de segunda classe todos os outros. Caso só exista vínculos de segunda classe, a equação (2.9) poderá ser invertida e nos fornecerá a única solução possível.

É interessante reescrevermos a hamiltoniana total na forma:

$$H_T = H + U_m \phi_m + v_a \phi_a \quad , \quad (\phi_a \doteq V_{am} \phi_m) \quad .$$

A presença de funções arbitrárias (v_a 's) manifesta a existência de liberdades adicionais dentro do formalismo. Estas liberdades estão ligadas à escolhas de calibre, ou seja, este formalismo abrange teorias como o eletromagnetismo e a gravitação.

Seguindo a nomenclatura usada por Dirac, vamos definir variáveis dinâmicas de primeira classe como funções das variáveis q 's e p 's que possuam parênteses de poisson zero com qualquer outro vínculo (primário ou secundário). Caso contrário a variável é dita de segunda classe.

Um parênteses de poisson de uma variável de primeira classe Q com um vínculo ϕ_j pode ser expandido em combinações lineares dos próprios vínculos de modo que $\{Q, \phi_j\} = a_{jk} \phi_k$. Uma propriedade interessante que resulta da identidade de Jacobi é que o parênteses de poisson de duas variáveis de primeira classe também é de primeira classe, e é fácil ver que a hamiltoniana total é de primeira classe.

O número de funções arbitrárias é igual ao número de coeficientes v_a 's, os quais são tantos quanto o número de vínculos primários de primeira classe. Pode-se mostrar, Ref. [9], que os vínculos primários de primeira classe são geradores de transformações de contato infinitesimal que não alteram o estado físico do sistema.

De fato, um estado físico está bem definido quando fornecemos como condição inicial todos os q 's e p 's. A arbitrariedade das funções v_a 's implica que existe mais de um conjunto de q 's e p 's associados a um mesmo estado físico. Dirac conjecturou que qualquer vínculo de primeira classe, sendo primário ou secundário, deve ser um gerador de uma dada transformação de contato, no entanto ainda não existe provas conclusivas nem a favor e nem contra este fato.

2.2.2 Extensão para campos clássicos

A extensão deste formalismo para campos clássicos é praticamente imediata. No entanto, devemos tomar cuidado com a definição dos momenta generalizados onde a derivada da lagrangiana com respeito às velocidades tem que ser substituída por variações funcionais. Formalmente, definimos os momenta generalizados como sendo o coeficiente na integral quando fazemos uma variação funcional na lagrangiana com respeito às velocidades generalizadas.

$$\delta L = \int p \delta \dot{q} \quad (2.11)$$

Como exemplo de aplicação deste formalismo, tomemos um sistema clássico Newtoniano invariante por reparametrização temporal.

A ação Newtoniana de um sistema com n graus de liberdade com uma lagrangiana $L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right)$ pode ser reparametrizada de modo a escrevermos,

$$S = \int d\tau \bar{L}(q, \dot{q}, t, \dot{t})$$

onde o ponto indica derivada com relação ao parâmetro τ e $\bar{L}(q, \dot{q}, t, \dot{t}) = \dot{t} \cdot L\left(q, \frac{\dot{q}}{\dot{t}}, t\right)$

Definamos os momenta por

$$\pi^i \doteq \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_i} = \dot{t} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq_i}{dt}\right)} \cdot \frac{\partial \left(\frac{dq_i}{dt}\right)}{\partial \dot{q}_i} \quad i=1, \dots, N$$

como $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\dot{q}_i}{\dot{t}}$,

$$\begin{aligned} \pi^i &= p^i \quad i = 1, \dots, N \\ \pi^0 &\doteq \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{t}} = L\left(q, \frac{\dot{q}}{\dot{t}}, t\right) + \dot{t} \cdot \sum_i \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq_i}{dt}\right)} \cdot \frac{\partial \left(\frac{dq_i}{dt}\right)}{\partial \dot{t}} = \\ &= L - \sum_i p^i \cdot \frac{\dot{q}_i}{\dot{t}} = L - \sum_i p^i \cdot \frac{dq_i}{dt} = -H(q_i, p^i, t) \end{aligned}$$

Assim temos o vínculo

$$\phi_0(q_\mu, p^\mu) = \pi^0 + H(q_i, \pi^i, t) = 0.$$

Note que a hamiltoniana do sistema reparametrizado é zero, de fato

$$\begin{aligned} \bar{H}(q_\mu, p^\mu) &= \pi^\mu \cdot \dot{q}_\mu - \bar{L}(q_\mu, \dot{q}_\mu) = \pi^0 \dot{t} + \sum_i \pi^i \dot{q}_i - \sum_i \dot{t} L = \\ &= \dot{t} \left[\pi^0 + \sum_i p^i \frac{dq_i}{dt} - L \right] = \dot{t} (\pi^0 + H) = 0 \quad . \end{aligned}$$

No entanto, a evolução do sistema é dada pela hamiltoniana total:

$$H_T = \overline{H} + u_0 \phi_0 = u_0 [\pi^0 + H(q_i, \pi^i, t)]$$

É trivial mostrar que este vínculo se conserva no tempo

$$(\dot{\phi}_0 = [\phi_0, u_0 \phi_0] \approx 0).$$

As equações de movimento são :

$$\begin{aligned} \dot{t} = \{t, H_T\} &= u_0 & \implies & u_0 = \frac{dt}{d\tau} \\ \dot{\pi}^0 = \{\pi^0, H_T\} &= -u_0 \cdot \frac{\partial H}{\partial t} & \implies & \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \\ \dot{q}_i = \{q_i, H_T\} &= u_0 \cdot \frac{\partial H}{\partial p^i} & \implies & \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i} \\ \dot{p}^i = \{p^i, H_T\} &= -u_0 \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} & \implies & \frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Como já era esperado, recaímos nas equações dinâmicas convencionais para um sistema hamiltoniano de $2N$ graus de liberdade (q_i, p^i) .

Só nos resta examinar a que tipo de transformação este vínculo ϕ_0 está associado. Em notação de parênteses de poisson, as transformações podem ser escritas Ref. [10]

$$\delta v = \epsilon \{v, G\} \quad \begin{array}{l} \epsilon\text{- parâmetro infinitesimal} \\ G\text{- função geratriz} \end{array}$$

Queremos então considerar o efeito de tomarmos como função geratriz o vínculo primário ϕ_0

- $\delta t = \epsilon \{t, \phi_0\} = \epsilon \{t, \pi^0\} = \epsilon$
- $\delta \pi^0 = \epsilon \{\pi^0, \phi_0\} = -\epsilon \frac{\partial H}{\partial t} = \epsilon \frac{d\pi^0}{dt}$ (usando 2.12)
- $\delta q_i = \epsilon \{q_i, \phi_0\} = \epsilon \frac{\partial H}{\partial p^i} = \epsilon \frac{dq_i}{dt}$ (usando 2.12)
- $\delta p^i = \epsilon \{p^i, \phi_0\} = -\epsilon \frac{\partial H}{\partial q_i} = \epsilon \frac{dp^i}{dt}$ (usando 2.12)

- $\delta H = \epsilon \{H, \phi_0\} = \epsilon \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt}$ (usando 2.12)

A partir destas transformações, vemos que este vínculo primário gera transformações infinitesimais no tempo físico t . Estas transformações não alteram o “estado físico” do sistema já que agora a evolução é dada pelo parâmetro τ e o tempo t funciona meramente como uma coordenada canônica. De fato, neste contexto, uma trajetória completa no tempo t deve ser interpretada como um único estado físico do sistema.

Para esclarecermos melhor este ponto, talvez seja interessante analisarmos outro exemplo já bem conhecido na literatura que foi utilizado pelo próprio Dirac – o campo eletromagnético.

Seja a ação do campo eletromagnético para o espaço-tempo de Minkowski⁴ sem fontes ($\vec{J} = \vec{0}; \rho = 0$)

$$S = \frac{1}{4} \cdot \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad , \quad \text{com} \quad F_{\mu\nu} \doteq \partial_\mu A_\nu(x^\alpha) - \partial_\nu A_\mu(x^\alpha) \quad .$$

Formalmente, a única diferença com relação ao exemplo anterior é que agora as variáveis são campos e por isso temos que tomar cuidado no cálculo dos momenta e nos parênteses de Poisson.

Para calcular os momenta precisamos variar a lagrangiana com respeito aos campos $A_\mu(x^\alpha)$,

$$\delta L = \frac{1}{2} \int d^3x F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = \int d^3x F^{\mu\nu} \partial_\mu (\delta A_\nu).$$

Comparando com a equação (2.11) os momenta Π^μ são dados por

$$\Pi^\mu(x^\alpha) = F^{0\mu}(x^\alpha) \quad \longmapsto \quad \begin{cases} \Pi^0(x^\alpha) = 0 \\ \Pi^i(x^\alpha) = E^i \end{cases}$$

Temos, então, novamente um único vínculo primário do tipo $\phi(A_\mu, \Pi^\mu) = 0$ que neste caso é simplesmente $\Pi^0(x^\alpha) \approx 0$. Assim, a hamiltoniana é dada por

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \left(\Pi^\mu \dot{A}_\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) = \int d^3x \left(F^{i0} \dot{A}_i - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} - \frac{1}{2} F^{0i} F_{0i} \right) = \\ &= \int d^3x \left(-\frac{1}{2} F^{0i} F_{0i} - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} + F^{0i} \partial_i A_0 \right) = \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} + \frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i - \Pi^i{}_{,i} A_0 \right) = \\ &= \int d^3x \left(\frac{1}{2} (E^2 + B^2) - \Pi^i{}_{,i} A_0 \right), \end{aligned}$$

⁴ $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$

onde foi feita uma integração por partes no último termo e desprezamos termos de superfície.

O passo seguinte é examinar a variação temporal do vínculo. Como só existe um único vínculo primário,

$$\begin{aligned}\dot{\Pi}^0 &= \{\Pi^0(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{y})\} \doteq \int d^3z \left(\frac{\delta \Pi^0(\vec{x})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \cdot \frac{\delta \mathcal{H}(\vec{y})}{\delta \Pi^\mu(\vec{z})} - \frac{\delta \Pi^0(\vec{x})}{\delta \Pi^\mu(\vec{z})} \cdot \frac{\delta \mathcal{H}(\vec{y})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \right) = \\ &= - \int d^3z \frac{\delta \mathcal{H}(\vec{y})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \cdot \delta(\vec{x} - \vec{z}) \cdot \delta_\mu^0 = \\ &= \Pi^i{}_{,i}(\vec{y}) \cdot \delta(\vec{x} - \vec{y}) \approx 0 \quad .\end{aligned}$$

Este é um novo vínculo secundário. A sua variação no tempo nos fornece:

$$\begin{aligned}(\Pi^i{}_{,i})' &= \{\Pi^i{}_{,i}(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{y})\} \doteq \int d^3z \left(\frac{\delta \Pi^i{}_{,i}(\vec{x})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \cdot \frac{\delta \mathcal{H}(\vec{y})}{\delta \Pi^\mu(\vec{z})} - \frac{\delta \Pi^i{}_{,i}(\vec{x})}{\delta \Pi^\mu(\vec{z})} \cdot \frac{\delta \mathcal{H}(\vec{y})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \right) = \\ &= - \int d^3z \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\delta \mathcal{H}(\vec{y})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \cdot \delta_\mu^i \delta(\vec{x} - \vec{z}) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\int d^3z F^{kl}(\vec{y}) \frac{\delta F_{kl}(\vec{y})}{\delta A_\mu(\vec{z})} \cdot \delta_\mu^i \cdot \delta(\vec{x} - \vec{z}) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\int d^3z F^{kl}(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y^k} (\delta_l^\mu \cdot \delta(\vec{y} - \vec{z})) \cdot \delta_\mu^i \cdot \delta(\vec{x} - \vec{z}) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\int d^3z F^{ki}(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y^k} (\delta(\vec{y} - \vec{z})) \cdot \delta(\vec{x} - \vec{z}) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} F^{ki}(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) = 0 \quad (\text{F é antisimétrica})\end{aligned}$$

Com isso garantimos que os vínculos são conservados no tempo. Note que ambos são vínculos de primeira classe. De fato,

$$\{\Pi^0(\vec{x}), \Pi^i{}_{,i}(\vec{y})\} = \frac{\partial}{\partial y^i} [\delta(\vec{x} - \vec{y})] \delta^{0i} = 0.$$

Antes de estabelecermos a hamiltoniana total, vamos verificar que o vínculo secundário de primeira classe gera transformações que não alteram o estado físico do sistema. Por completeza, calculemos as transformações geradas pelo vínculo primário de primeira classe $\phi_1 \doteq \Pi^0 \approx 0$.

- $\delta_1 A_\mu(x^\alpha) = \int d^3z \epsilon_1(z^\alpha) \{A_\mu(x^\alpha), \Pi^0(z^\alpha)\} = \delta_\mu^0 \epsilon_1(x^\alpha)$;
- $\delta_1 A_0(x^\alpha) = \epsilon_1(x^\alpha)$; $\delta_1 A_i(x^\alpha) = 0$;
- $\delta_1 \Pi^\mu(x^\alpha) = \int d^3z \epsilon_1(z^\alpha) \{\Pi^\mu(x^\alpha), \Pi^0(z^\alpha)\} = 0 \quad \forall \mu$

este vínculo gera transformações apenas na variável $A_0(x^\alpha)$.

O vínculo $\phi_2 \doteq \Pi^i{}_{,i} \approx 0$, gera transformações nas variáveis $A_i(x^\alpha)$ e não altera a variável $A_0(x^\alpha)$. De fato,

- $\delta_2 A_\mu(x^\alpha) = \int d^3z \epsilon_2(z^\alpha) \{A_\mu(x^\alpha), \Pi^i{}_{,i}(z^\alpha)\} =$
 $= \int d^3z \epsilon_2(z^\alpha) \frac{\partial}{\partial z^i} (\delta_\mu^i \cdot \delta(x^\alpha - z^\alpha)) = -\delta_\mu^i \frac{\partial}{\partial x^i} \epsilon_2(x^\alpha)$
- $\delta_2 A_0(x^\alpha) = 0; \quad \delta_2 A_i(x^\alpha) = -\frac{\partial}{\partial x^i} \epsilon_2(x^\alpha);$
- $\delta_2 \Pi^\mu(x^\alpha) = \int d^3z \epsilon_2(z^\alpha) \{\Pi^\mu(x^\alpha), \Pi^i{}_{,i}(z^\alpha)\} = 0 \quad \forall \mu$

O significado destas transformações fica claro quando analisamos as conhecidas transformações de calibre dos potenciais eletromagneticos A_μ :

$$\delta A_\mu(x^\alpha) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \lambda(x^\alpha)$$

Reconhecemos então que as transformações geradas pelos vínculos de primeira classe são casos particulares das transformações de calibre do eletromagnetismo.

Ainda seguindo a nomenclatura de Dirac, vamos chamar de hamiltoniana estendida a hamiltoniana total acrescida de todos os geradores que não alteram o estado físico do sistema. Para este nosso exemplo, a hamiltoniana estendida (H_E) então se escreve:

$$H_E = H_T + \int d^3x u_1(x^\alpha) \Pi^i{}_{,i}(x^\alpha) =$$

$$H_E = \int d^3x \left(\frac{1}{2} (E^2 + B^2) + u_0 \Pi^0 + u_1 \Pi^i{}_{,i} \right)$$

onde absorvemos a variável A_0 dentro de u_1 .

Chegando a hamiltoniana estendida o trabalho está completo. No entanto, um leitor atento notaria que as coordenadas conjugadas A_0 e Π^0 possuem liberdades de calibre de forma que podemos fixá-las sem perda alguma de graus de liberdade (escolha de calibre). Note que $\dot{A}_0 = u_0$ é completamente arbitrário e que $\dot{\Pi}_0 = \Pi^i{}_{,i} \approx 0$ juntamente com o vínculo $\Pi^0 \approx 0$ fixa $\Pi^0 = 0$.

2.2.3 Quantização de sistemas vinculados

Uma vez bem estabelecido o formalismo hamiltoniano para sistemas clássicos com vínculos, é de interesse construirmos um formalismo quântico para este sistema.

O caso mais simples para a quantização é adotar um sistema clássico apenas com vínculos de primeira classe.

A equação dinâmica é a equação de Schrödinger onde tomamos a hamiltoniana como sendo a hamiltoniana de primeira classe mais geral possível:

$$i\hbar \cdot \frac{d}{dt}\psi = \hat{H} \psi$$

No processo de quantização, associamos a cada variável dinâmica clássica um operador quântico definido no espaço de Hilbert. Além disso, requeremos que as relações entre as variáveis clássicas através dos parênteses de Poisson sejam levadas em relações de comutação entre os operadores

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar.$$

Como as relações de comutação já estão fixadas, não podemos interpretar as equações de vínculo $\phi_j(\hat{q}, \hat{p})$ como novas relações entre operadores. Com efeito, seja um vínculo $\phi_j(q, p)$ e uma função $F(q, p)$ qualquer das coordenadas e momenta generalizados tal que $\{\phi_j(q, p), F(q, p)\} \neq 0$. Ao quantizarmos esta equação teremos $[\phi_j(\hat{q}, \hat{p}), F(\hat{q}, \hat{p})] \neq 0$. Porém, se fizermos $\phi_j(\hat{q}, \hat{p}) = 0$, teríamos $[\phi_j(\hat{q}, \hat{p}), F(\hat{q}, \hat{p})] = 0$ pois o comutador de um operador identicamente nulo é zero com qualquer outra função de operadores e, claramente, isto é uma inconsistência.

Para tornarmos este procedimento consistente, devemos requerer que cada equação de vínculo seja uma restrição sobre a função de onda que é solução da equação de Schrödinger

$$\phi_j(\hat{q}, \hat{p}) \psi(\vec{x}, t) = 0.$$

O formalismo construído desta forma deve satisfazer a alguns requisitos para garantirmos a sua coerência.

Se a aplicação de um determinado vínculo $\phi_j(\hat{q}, \hat{p})$ anula a função de onda, então, a aplicação sucessiva de dois vínculos sobre a função de onda também tem que resultar em

zero ($\phi_k \phi_j \psi = 0$). Se invertermos a ordem de aplicação o resultado ainda deve ser zero, de forma que, o comutador de quaisquer dois vínculos aplicado à função de onda deve anulá-la. Esta equação não gera nenhum vínculo novo, e por isso a única possibilidade é que o comutador entre os vínculos de primeira classe seja uma combinação linear entre todos os possíveis vínculos,

$$[\phi_j(\hat{q}, \hat{p}), \phi_k(\hat{q}, \hat{p})] = C_{jk}^m \phi_m(\hat{q}, \hat{p}),$$

o que é consistente com $\{\phi_j, \phi_k\} = C_{jk}^m \phi_m$, a menos de problemas de ordenamento.

Não é trivial que esta equação seja satisfeita. Em geral, os operadores do espaço de Hilbert não comutam entre si, e justamente por isso, os coeficientes C_{jk}^m , que podem depender dos operadores \hat{q} 's e \hat{p} 's, precisam ser posicionados à esquerda do lado direito da equação para garantir que a aplicação do comutador $[\phi_j(\hat{q}, \hat{p}), \phi_k(\hat{q}, \hat{p})]$ anule a função de onda.

Além disso, as relações de vínculo devem valer para qualquer instante. Utilizando a equação de Schrödinger para um acréscimo infinitesimal de tempo, e impondo que um determinado vínculo $\phi_k(\hat{q}, \hat{p})$ anule a função de onda nos dois instantes t e $t + dt$ temos que

$$\phi_k \psi(t + dt) = \phi_k \psi(t) - \frac{i}{\hbar} \phi_k \hat{H} \psi(t) \Rightarrow \phi_k \hat{H} \psi(t) = 0$$

e naturalmente também temos que a aplicação da hamiltoniana posterior a aplicação de um vínculo deve anular a função de onda

$$\hat{H} \phi_k \psi(t) = 0$$

Concluimos assim que o comutador entre quaisquer vínculos de primeira classe e a hamiltoniana deve anular a função de onda. Como este não é um novo vínculo temos

$$[\phi_j(\hat{q}, \hat{p}), H(\hat{q}, \hat{p})] = D_j^m \phi_m(\hat{q}, \hat{p}) \quad .$$

Todos os comentários feitos anteriormente se repetem.

Nesta exposição só me preocupei em elucidar problemas específicos deste formalismo. Questões relacionadas a qualquer método de quantização como, por exemplo, o problema de ordenamento não são alterados com este tratamento.

Com relação à quantização de sistemas hamiltonianos vinculados onde aparecem vínculos de segunda classe, serei breve e farei apenas alguns comentários. Para maiores esclarecimentos, consultar as referências indicadas Ref.'s [11]-[14].

O fato do sistema apresentar vínculos de segunda classe está relacionado com a existência de variáveis dispensáveis. O primeiro passo é, através de combinações lineares, diminuir ao máximo o número de vínculos de segunda classe (o número mínimo de vínculo de segunda classe é sempre par). Concluída esta etapa, podemos redefinir os parênteses de Poisson pelos chamados parênteses de Dirac, os quais possuem a propriedade de fornecer corretamente as equações de movimento e não alterar as relações de comutação dos vínculos de primeira classe.

Além disso, pode-se mostrar que os parênteses de Dirac entre um vínculo de segunda classe com qualquer função das coordenadas e momenta generalizados $A(q, p)$ é identicamente (ou fortemente) nulo. Isto nos possibilita tomar os vínculos de segunda classe identicamente nulos desde o princípio. Com efeito, se ϕ_j^2 é um vínculo de segunda classe então $\{\phi_j^2, A(q, p)\}^D = 0$ para qualquer função $A(q, p)$ das coordenadas e momenta generalizados. Assim, fixarmos $\phi_j^2(\hat{q}, \hat{p}) = 0$ é consistente pois teremos $\{\phi_j^2, A(q, p)\}^D = 0$ levados em $[\phi_j^2(\hat{q}, \hat{p}), A(\hat{q}, \hat{p})]^D = 0$ identicamente.

Podemos então, ao contrário dos vínculos de primeira classe, interpretar as equações de vínculos de segunda classe como identidades entre operadores.

Certamente neste processo o número de graus de liberdade do sistema é reduzido. Com as novas variáveis e a redefinição dos parênteses de Dirac, recaímos novamente no caso anterior onde só existem vínculos de primeira classe, e tudo segue como antes.

2.3 *Formulação Hamiltoniana da TRG*

2.3.1 Folheamento da variedade com hipersuperfícies tipo espaço

No início do século XX surgiu, dentro da comunidade científica, um ideal com motivações filosóficas para se conseguir a unificação de todas as teorias físicas. Certamente isto é um mero desejo humano, já que a natureza não busca na ciência o seu comportamento, ao contrário, somos nós que observamos a natureza para tentar entendê-la. No entanto, havia motivos para que os cientistas acreditassem que esta unificação fosse possível. No final do século XIX, o trabalho de James Maxwell nos mostrou como duas forças até então consideradas independentes, a saber, as forças elétrica e magnética, eram na verdade manifestações diferentes de um único campo, o campo eletromagnético. Mais tarde, com o advento da mecânica quântica e posteriormente com a sua compatibilização com a mecânica relativística sem gravitação (meados do século XX), se conseguiu incorporar o eletromagnetismo ao mundo quântico, dando origem à eletrodinâmica quântica (QED). Neste contexto a única teoria de interação fundamental da natureza que ainda não fazia parte deste arcabouço matemático era a teoria da gravitação, ou seja, a teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein.

A primeira dificuldade técnico-matemática surge de o caminho natural de quantização canônica requerer uma formulação hamiltoniana. Os primeiros trabalhos nesta direção datam do final da década de 40 e início de 50 do século passado. Para se construir este formalismo foi necessário desenvolver uma teoria para sistemas hamiltonianos vinculados Ref. [13] e Ref.'s [28]-[30], já que a Relatividade Geral é uma teoria invariante por reparametrização de coordenadas. Ao se tentar construir a hamiltoniana da gravitação é necessário singularizar a coordenada temporal gerando assim vínculos entre as variáveis canônicas. Nota-se assim que a formulação hamiltoniana da Relatividade Geral só é possível para espaços cuja topologia é do tipo $R \otimes M^3$ onde M^3 é uma hipersuperfície espacial arbitrária de dimensão 3.

Para chegar na hamiltoniana da gravitação, seguiremos a linha de exposição de R. Arnowitt, S. Deser e C.W. Misner Ref. [31], primeiro folheando o espaço-tempo com uma hipersuperfície tipo espaço e depois aplicando o formalismo para sistemas hamiltonianos vinculados às variáveis canônicas em questão.

Todo o desenvolvimento será feito supondo-se seções espaciais fechadas para que não te-

nhamos que nos preocupar com os eventuais termos de superfície que possam vir a surgir. Em casos com seções espaciais abertas o procedimento é analisar caso a caso e, quando houver contribuições não nulas, somam-se termos à hamiltoniana total de forma a cancelarmos as contribuições de superfícies. A orientação nestes casos é conseguir reproduzir as equações de Einstein, o que não é possível com os termos de superfície.

Seja uma variedade com topologia $R \otimes M^3$. Primeiramente preenchamos a variedade com uma congruência de curvas tipo-tempo, ou seja, uma congruência que em cada ponto podemos definir um vetor como a derivada com relação ao parâmetro da curva (τ) e por construção este vetor (η^α) é do tipo-tempo. Num dado ponto existe uma hipersuperfície local cujo vetor normal é o próprio η^α . Devido à topologia da variedade, esta hipersuperfície pode ser estendida de modo a separar a variedade em duas regiões tal que qualquer curva tipo-tempo tem necessariamente que atravessar esta hipersuperfície. Isto é muito importante para podermos defini-la como uma superfície de Cauchy.

O parâmetro τ das curvas da congruência não são necessariamente constantes ao longo desta hipersuperfície. Definimos então um parâmetro t justamente com a exigência de que seja constante sobre cada hipersuperfície.

Naturalmente podemos parametrizar as hipersuperfície usando 3 parâmetros:

$$\chi^\alpha = \chi^\alpha(x^a).$$

Vamos escolher uma base de vetores na hipersuperfície como sendo a derivada com relação a cada parâmetro:

$$\chi_a^\alpha \doteq \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial x^a}$$

Por praticidade estamos considerando que o vetor normal à hipersuperfície é normalizado de forma que tenhamos,

$$g_{\alpha\beta} \eta^\alpha \eta^\beta = -1, \quad g_{\alpha\beta} \eta^\alpha \chi_a^\beta = 0$$

O conjunto de todas as hipersuperfície a t constante preenchem a variedade e assim descrevemos o espaço-tempo a partir das equações paramétricas $\chi^\alpha(t, x^a)$.

Num dado ponto x^i de uma hipersuperfície a t constante existe um vetor normal η^α associado a uma determinada curva da congruência. É possível que este ponto seja levado a uma outra curva da congruência ao passar para próxima hipersuperfície. Para quantificar esta

variação definimos um vetor deformação N^α como sendo o vetor que conecta dois pontos de mesma coordenada espacial x^i em duas hipersuperfícies vizinhas.

$$N^\alpha \doteq \frac{\partial \chi^\alpha(t, x^i)}{\partial t}$$

A decomposição do vetor deformação na base definida sobre a hipersuperfície e paralela ao vetor normal nos fornece:

$$N^\alpha = N\eta^\alpha + N^a\chi_a^\alpha$$

A função N é chamada de função lapso e as N^a são chamadas de função deslocamento. Note que a função lapso mede a taxa de variação entre o parâmetro t e o tempo próprio associado a um observador comóvel com quadri-velocidade η^α . A função deslocamento mede a taxa de variação do ponto com coordenada x^i entre duas hipersuperfícies a t constante.

Para estudar a evolução dinâmica do sistema precisamos projetar as quantidades físicas sobre a hipersuperfície e paralelamente ao vetor deformação, já que este é o vetor tangente às linhas coordenadas do tempo t . Podemos reescrever η^α e a métrica a partir desta decomposição e assim obter:

$$\eta^\alpha = \frac{1}{N}N^\alpha - \frac{N^a}{N}\eta_a^\alpha = \left(\frac{1}{N}, \frac{-N^a}{N} \right),$$

$$g_{ij} \doteq g_{\alpha\beta} \chi_i^\alpha \chi_j^\beta \doteq h_{ij}$$

$$g_{0i} \doteq g_{\alpha\beta} N^\alpha \chi_i^\beta = N^a h_{ai} = N_i$$

$$g_{00} \doteq g_{\alpha\beta} N^\alpha N^\beta = -N^2 + N^a N_a$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + N^a N_a & N_i \\ N_j & h_{ij} \end{pmatrix}.$$

com inversa $g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu$ (por construção $h^{ij} h_{ja} = \delta_a^i$),

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^i}{N^2} \\ \frac{N^j}{N^2} & h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix}.$$

Com estes resultados a componente covariante do vetor η^α é

$$\eta_\alpha = g_{\alpha\beta} \eta^\beta = (-N, 0, 0, 0)^t.$$

Como era de se esperar, a variável dinâmica que descreverá a evolução da geometria é a própria métrica da hipersuperfície (h_{ij}). Para tanto, precisamos caracterizá-la integralmente.

Resta-nos então sabermos como esta tri-hipersuperfície espacial está curvada com relação à variedade maior quadridimensional. O estudo de imersão nos mostra que é possível que duas hipersuperfícies distintas $(g_{\mu\nu}; g'_{\alpha\beta})$ possuam a mesma métrica intrínseca à hipersuperfície (h_{ij}) como sub-variedade. Uma maneira natural de prosseguirmos é estudarmos a variação do vetor normal à hipersuperfície, fazendo-o variar ao longo da mesma e projetando-o sobre a hipersuperfície, já que queremos descrever a evolução a partir da hipersuperfície e quantidades físicas definidas sobre ela.

Define-se o tensor de curvatura extrínseca,

$$K_{\mu\nu} \doteq -\frac{1}{2} \perp_{\mu}^{\alpha} \perp_{\nu}^{\beta} \eta_{(\alpha;\beta)} = -\frac{1}{2} \perp_{\mu}^{\alpha} \perp_{\nu}^{\beta} \mathcal{L}_{\eta}(g_{\alpha\beta})$$

onde

$$\begin{aligned} \perp_{\mu}^{\alpha} &\doteq \delta_{\mu}^{\alpha} + \eta^{\alpha} \eta_{\mu} && \text{(projetor sobre a hipersuperfície)} \\ \mathcal{L}_{\vec{\xi}}(g_{\alpha\beta}) &= \xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} && \text{(derivada de Lie da métrica ao longo do vetor } \vec{\xi}) \end{aligned}$$

com componentes:

$$K_{ab} = -\frac{1}{2} \eta_{(a;b)} = -N \Gamma_{ab}^0 \quad (2.13)$$

$$K_{0b} = N^a K_{ab} \quad (2.14)$$

$$K_{00} = N^a N^b K_{ab} \quad (2.15)$$

As únicas componentes relevantes são os K_{ab} 's. Com esta decomposição em mãos, vamos reescrever a ação da TRG em termos destas novas variáveis para podermos definir os momenta associados e assim obter a hamiltoniana desejada. Conceitualmente, o princípio de Hamilton deve ser entendido a partir da métrica da hipersuperfície. Dada duas hipersuperfícies $h_{ab}(\vec{x}, t_{final})$ e $h_{ab}(\vec{x}, t_{inicial})$ existe infinitos modos para deformarmos $h_{ab}(\vec{x}, t_{inicial})$ em $h_{ab}(\vec{x}, t_{final})$, no entanto a evolução será dada pela deformação contínua tal que a ação associada a métrica $g_{\mu\nu}$ seja extremal. O espaço composto de todas as configurações possíveis para as métricas foi primeiramente introduzido por Wheeler com o nome de superespaço. Podemos então reafirmar o princípio variacional dizendo que a trajetória descrita pela métrica no superespaço será aquela que torna a ação extremal.

2.3.2 Formalismo ADM da Relatividade Geral

É amplamente sabido que a ação que fornece as equações de Einstein pode ser escrita

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (2.16)$$

Antes de fornecer o resultado final, é interessante desenvolver algumas relações utilizando as variáveis N , N^a , h_{ij} , K_{ij} . Vamos definir:

$$\begin{aligned} {}^3\Gamma_{bc}^a &\doteq \frac{1}{2}h^{ad}(h_{dc,b} + h_{db,c} - h_{bc,d}) \\ {}^3R_{ab} &\text{ tensor de Ricci formado com as conexões } {}^3\Gamma_{bc}^a \\ K &\doteq h^{ab}K_{ab} \\ h \doteq \det(h_{ab}) &\Rightarrow \delta(\sqrt{h}) = -\frac{\sqrt{h}}{2}h_{ab}\delta h^{ab} = \frac{\sqrt{h}}{2}h^{ab}\delta h_{ab} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\sqrt{h})' = \sqrt{h}h^{ab}\dot{h}_{ab} = \sqrt{h}(-NK + N^a; a) \end{aligned}$$

Por substituição direta encontramos as seguintes componentes para a conexão:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{N}}{N} + \frac{N^a N_{,a}}{N} - \frac{N^a N^b}{N} K_{ab} \\ \Gamma_{0a}^0 &= \frac{N_{,a}}{N} - \frac{N^b}{N} K_{ab} \\ \Gamma_{ab}^0 &= -\frac{K_{ab}}{N} = \frac{1}{2N^2} (\dot{h}_{ab} - N_{(a;b)}) \Rightarrow K_{ab} = -\frac{1}{2N} (\dot{h}_{ab} - N_{(a;b)}) \\ \Gamma_{00}^a &= N h^{ab} \left(\frac{N_{,b}}{N} \right)' + \frac{h^{ab}}{2} (N^2 - N^m N_m)_{,b} - \frac{N^a N^b N_{,b}}{N} + \frac{N^a N^b N^m K_{bm}}{N} \\ \Gamma_{0b}^a &= N \left[-K_b^a + \left(\frac{N^a}{N} \right)_{,b} + \frac{N^a N^m}{N^2} K_{bm} \right] \\ \Gamma_{bc}^a &= {}^3\Gamma_{bc}^a + \frac{N^a}{N} K_{bc} \end{aligned}$$

Analogamente chegamos para o tensor de Ricci,

$$\begin{aligned}
R_{00} = & N\dot{h}^{ij}\dot{K}_{ij} + NN^k_{;k} - 2NN^l_{;k}K_l^k - 2NN^lK_{l;i}^i + NN^lK_{,l} + N^2K^{ij}K_{ij} + \\
& + N^iN^j{}^3R_{ij} + N^iN^jK_{ij}K - 2N^iN^jK_i{}^lK_{lj} - \frac{N^iN^j}{N}\dot{K}_{ij} - \frac{N^iN^j}{N}N_{,j;i} + \\
& + 2\frac{N^iN^j}{N}N^l_{;j}K_{il} + \frac{N^iN^jN^l}{N}K_{il;j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{0i} = & -\frac{N^m}{N}\dot{K}_{im} - \frac{N^m}{N}N_{,i;m} + \frac{N^l}{N}K_{ml}N^m_{;i} + K_{li}\frac{N^m}{N}N^l_{;m} - 2N^mK_m{}^lK_{li} + \\
& -NK^m{}_{i;m} + NK_{,i} + {}^3R_{mi}N^m + N^mK_{mi}K + \frac{N^mN^l}{N}K_{li;m}
\end{aligned}$$

$$R_{ij} = \frac{1}{N} \left(-\dot{K}_{ij} - N_{,i;j} + N^m{}_{;i}K_{mj} + N^m{}_{;j}K_{mi} + N^mK_{ij;m} \right) - 2K_i{}^mK_{mj} + {}^3R_{ij} + K_{ij}K$$

e finalmente podemos escrever o escalar de curvatura usando as variáveis da separação (3+1).

$$R = -\frac{2\dot{K}}{N} - 2\frac{N^k_{;k}}{N} + 2\frac{N^iK_{,i}}{N} + K_{ij}K^{ij} + K^2 + {}^3R$$

A ação (2.16) após simples manipulação matemática, somando e subtraindo $2\left(\sqrt{h}\right) \cdot K$ ao escalar de curvatura, se decompõem em três termos:

$$\begin{aligned}
S &= S_G + S_1 + S_2 \\
S_G &= \int dt d^3x N\sqrt{h} (K^{ij}K_{ij} - K^2 + {}^3R) \\
S_1 &= -2 \int dt d^3x \left(\sqrt{h}K \right) \bullet \\
S_2 &= 2 \int dt d^3x \left(\sqrt{h}KN^i - \sqrt{h}h^{ki}N_{,k} \right)_{,i}
\end{aligned}$$

O termo S_2 não contribui para a equação de movimento por ser uma divergência total. O princípio é aplicado impondo variações onde δh_{ij} , δN_i , δN são zero nos extremos. Porém, o termo S_1 poderia contribuir já que ele depende essencialmente de derivadas de h_{ij} na direção ortogonal às hipersuperfícies a t constante.

Para não ter que lidar com este termo de superfície, é comum definir a ação da teoria da Relatividade Geral como $S_G = S - S_1$. De agora em diante consideraremos apenas o termo S_G como a boa ação; esta escolha será justificada a posteriori encontrando as equações de movimento que descrevem corretamente o sistema.

Façamos então a variação funcional com relação as variáveis em questão:

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta N} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial N} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{N}}\right)^{\bullet} - \left(\frac{\partial L}{\partial N_{,i}}\right); i = 0 \\ \frac{\delta S}{\delta N_i} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial N_i} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{N}_i}\right)^{\bullet} - \left(\frac{\partial L}{\partial N_{i,j}}\right); j = 0 \\ \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial h_{ij}} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{h}_{ij}}\right)^{\bullet} - \left(\frac{\partial L}{\partial h_{ij;k}}\right); k = 0\end{aligned}$$

L não depende de \dot{N} nem de $N_{,i}$ e só depende de N explicitamente ou através de K_{ij} . Usaremos que:

$$\frac{\partial L}{\partial K_{ab}} = 2\sqrt{h}N \left(h^{ki}h^{jl} - h^{ij}h^{kl}\right) K_{kl} \frac{\partial K_{ij}}{\partial K_{ab}}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial K_{ab}} = \delta_{ij}^{ab} \doteq \frac{1}{2} \left(\delta_i^a \delta_j^b + \delta_j^a \delta_i^b\right)$$

e,

$$\frac{\delta S}{\delta N} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial N} + \frac{\partial L}{\partial K_{ij}} \frac{\partial K_{ij}}{\partial N} = \sqrt{h} (K^{ij}K_{ij} - K^2 - {}^3R) = 0. \quad (2.18)$$

Para a variação de N_i só temos dependência através de K_{ij} .

$$\frac{\delta S}{\delta N_i} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial K_{ab}} \frac{\partial K_{ab}}{\partial N_{i,j}}\right)_{;j} = 0$$

como $\frac{\partial K_{ab}}{\partial N_{i,j}} = \frac{1}{N} \delta_{ab}^{ij}$ e usando o resultado de (2.17) encontramos

$$2\sqrt{h} (K_i{}^j - \delta_i{}^j K)_{;j} = 0 \quad (2.19)$$

Na variação com relação a h_{ij} é importante lembrar que a função 3R depende de h_{ij} , e que K_{ij} depende tanto através de \dot{h}_{ij} quanto de $N_{i,j}$ já que este último possui a conexão ${}^3\Gamma_{ij}^a$.

Num referencial onde a conexão se anula, temos que as relações se seguem:

$$\begin{aligned}\delta^3 R_{ij} &= (\delta^3 \Gamma_{ij}^a)_{;a} - (\delta^3 \Gamma_{ia}^a)_{;j} \\ \delta^3 \Gamma_{ij}^a &= \frac{1}{2} h^{ak} \left((\delta h_{kj})_{;i} + (\delta h_{ki})_{;j} - (\delta h_{ij})_{;k} \right)\end{aligned}$$

e já que, ao contrário da conexão, $\delta^3 \Gamma$ é um verdadeiro tensor, estas relações são tensoriais o que garante suas validades em qualquer referencial.

Encontramos depois de alguns cálculos que

$$\frac{\delta S}{\delta h_{ij}} = 0 \Rightarrow \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{K}_{ij} = & -N [{}^3R_{ij} + KK_{ij} - 2K_i^m K_{mj}] + N_{,i;j} - N_{m;i} K_j^m + \\ & -N_{m;j} K_i^m - N^m K_{ij;m} \end{aligned}$$

As equações (2.18)-(2.20) são equivalentes às três possíveis projeções das equações de Einstein,

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu &= 0 \\ G_{\mu\nu} \eta^\mu \perp_\alpha^\nu &= 0 \\ G_{\mu\nu} \perp_\beta^\mu \perp_\alpha^\nu &= 0 \end{aligned}$$

sendo portanto as equações que regem a gravitação quando a separação (3+1) for possível. Dentre as três, a única equação que possui derivada temporal de segunda ordem da variável dinâmica h_{ij} é a (2.20), o que nos leva a concluir que esta é a equação dinâmica enquanto que as outras são apenas equações de vínculo. As equações (2.18) e (2.19) restringem as possíveis configurações das hipersuperfícies a t constante. Ficará mais claro quando tivermos estabelecido os parênteses de Poisson associados aos vínculos da densidade hamiltoniana da teoria da Relatividade Geral.

2.3.3 Hamiltoniana da Teoria da Relatividade Geral

De posse da densidade lagrangiana podemos prosseguir à formulação hamiltoniana. A partir da densidade lagrangiana encontramos as seguintes densidades de momentum:

$$P \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} = 0 \quad (2.21)$$

$$P^i \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{N}_i} = 0 \quad (2.22)$$

$$\Pi^{ij} \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{h}_{ij}} = \frac{\partial L}{\partial K_{ab}} \frac{\partial K_{ab}}{\partial \dot{h}_{ij}} = -h^{\frac{1}{2}} (K^{ij} - h^{ij} K) \quad (2.23)$$

(obs: note que o momentum Π^{ij} é uma densidade tensorial do tri-espço de peso 1.)

Logo temos,

$$\begin{aligned} h_{ij}\Pi^{ij} &\doteq \pi = 2\sqrt{h}K \Rightarrow \\ \Rightarrow K^{ij} &= -\frac{1}{\sqrt{h}} \left(\Pi^{ij} - \frac{h^{ij}}{2}\pi \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\Rightarrow \dot{h}_{ij} = \frac{2N}{\sqrt{h}} \left(\Pi_{ij} - \frac{h_{ij}}{2}\pi \right) + N_{(i;j)} \quad (2.25)$$

As equações (2.21) e (2.22) nos mostram que este sistema possui vínculos. Não é possível escrever as velocidades generalizadas como função dos momenta e das coordenadas.

Precisamos então apelar para o formalismo desenvolvido por Dirac, Bergmann e outros, para construir um formalismo hamiltoniano consistente. Como este formalismo foi descrito na seção anterior, apenas me restringirei a aplicá-lo.

Por definição, a hamiltoniana canônica se escreve:

$$\begin{aligned} H_c &\doteq P\dot{N} + P^i\dot{N}_i + \Pi^{ij}\dot{h}_{ij} - L = \Pi^{ij} \left[\frac{2N}{\sqrt{h}} \left(\Pi_{ij} - \frac{h_{ij}}{2}\pi \right) + N_{(i;j)} \right] + \\ &\quad -N\sqrt{h} \left[\frac{1}{h} \left(\Pi^{ij} - \frac{h^{ij}}{2}\pi \right) \left(\Pi_{ij} - \frac{h_{ij}}{2}\pi \right) - \frac{\pi^2}{4h} + {}^3R \right] = \\ &= N \left[G_{abcd} \Pi^{ab} \Pi^{cd} - \sqrt{h} {}^3R \right] + 2\Pi^{ij} N_{i;j} \end{aligned}$$

com $G_{abcd} \doteq \frac{1}{2\sqrt{h}} (h_{ac}h_{bd} + h_{ad}h_{bc} - h_{ab}h_{cd})$, e devido aos vínculos (2.21) e (2.22) temos a hamiltoniana total:

$$H_T \doteq \int dt d^3x (N H_0 + N_i H^i + \lambda P + \lambda_i P^i) \quad (2.26)$$

onde,

$$H_0 \doteq G_{ijkl} \Pi^{ij} \Pi^{kl} - h^{\frac{1}{2}} {}^3R \text{ (super-hamiltoniana)}$$

$$H^i \doteq -2\Pi^{ij}_{;j} \text{ (super-momentum).}$$

Para chegar a esta hamiltoniana usamos a condição de seções espaciais fechadas para descartar o termo $(\Pi^{ij}N_j)_{;j}$.

Precisamos garantir que os vínculos primários sejam satisfeitos durante toda a evolução. Para isso, usaremos as relações

$$\begin{aligned} \{N(\vec{x}, t), P(\vec{y}, t)\} &= \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{N_i(\vec{x}, t), P^j(\vec{y}, t)\} &= \delta_i^j \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{h_{ij}(\vec{x}, t), \Pi^{kl}(\vec{y}, t)\} &= \delta_{ij}^{kl} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned}$$

Imposição sobre os vínculos primários:

$$\begin{aligned}\dot{P}(\vec{x}, t) &\approx 0 = \int d^3z \{P(\vec{x}, t), H_T(\vec{z}, t)\} = \int d^3z \{P(\vec{x}, t), N(\vec{z}, t)\} H_0(\vec{z}, t) = \\ &= - \int d^3z \delta(\vec{x} - \vec{z}) H_0(\vec{z}, t) = -H_0(\vec{x}, t) \Rightarrow H_0(\vec{x}, t) \approx 0\end{aligned}\quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}\dot{P}^i(\vec{x}, t) &\approx 0 = \int d^3z \{P^i(\vec{x}, t), H_T(\vec{z}, t)\} = \int d^3z \{P^i(\vec{x}, t), N_j(\vec{z}, t)\} H_0^j(\vec{z}, t) = \\ &= -H_0^i(\vec{x}, t) \Rightarrow H_0^i(\vec{x}, t) \approx 0\end{aligned}\quad (2.28)$$

estes são novos vínculos que também devem ser preservados. Antes de realizar estes cálculos vamos introduzir a álgebra de Lie associada aos vínculos H_0 e H^i .⁵

$$\{H_0(\vec{x}, t), H_0(\vec{y}, t)\} = \left(H^i(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial x^i} - H^i(\vec{y}, t) \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.29)$$

$$\{H_i(\vec{x}, t), H_k(\vec{y}, t)\} = \left(H_k(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial x^i} - H_i(\vec{y}, t) \frac{\partial}{\partial y^k} \right) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.30)$$

$$\{H_0(\vec{x}, t), H_i(\vec{y}, t)\} = H_0(\vec{y}, t) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.31)$$

Devido a esta álgebra pode-se verificar que a imposição dos vínculos serem preservados ao longo da evolução é satisfeito trivialmente, ou seja, $\dot{H}_0(\vec{x}, t) \approx 0$ e $\dot{H}_i(\vec{x}, t) \approx 0$, e sendo assim eles não geram novos vínculos. É fácil verificar que todos os parênteses de Poisson entre os vínculos (2.21), (2.22), (2.27) e (2.28) são zero, e então todos os quatro são vínculos de primeira classe. Como a equação (2.26) já inclui todos os vínculos de primeira classe, esta é a hamiltoniana da teoria da Relatividade Geral.

Vamos verificar se esta hamiltoniana de fato reproduz as equações de Einstein:

$$\dot{N}(\vec{x}, t) = \int d^3z \{N(\vec{x}, t), H_T(\vec{z}, t)\} = \lambda(\vec{x}, t) \quad (2.32)$$

$$\dot{N}_i(\vec{x}, t) = \int d^3z \{N_i(\vec{x}, t), H_T(\vec{z}, t)\} = \lambda_i(\vec{x}, t) \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}\dot{h}_{ik}(\vec{x}, t) &= \int d^3z \{h_{ik}(\vec{x}, t), H_T(\vec{z}, t)\} = \\ &= \frac{N(\vec{x}, t)}{\sqrt{h}} [2\Pi_{ik}(\vec{x}, t) - h_{ik}(\vec{x}, t) \Pi(\vec{x}, t)] + N_{i;k}(\vec{x}, t) + N_{k;i}(\vec{x}, t)\end{aligned}\quad (2.34)$$

⁵Estes cálculos embora simples são muito extensos e facilmente encontrados na literatura, por isso não os reproduzirei.

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi}^{ik}(\vec{x}, t) &= \int d^3z \left\{ \Pi^{ik}(\vec{x}, t), H_T(\vec{z}, t) \right\} = \\
&= -N\sqrt{h} \left({}^3R^{ik} - \frac{h^{ik}}{2} {}^3R \right) + \frac{N h^{ik}}{2\sqrt{h}} \left(\Pi_{lm} \Pi^{lm} - \frac{\Pi^2}{2} \right) - \frac{2N}{\sqrt{h}} \left(\Pi^{im} \Pi_m^k - \frac{\Pi \Pi^{ik}}{2} \right) \\
&\quad + \sqrt{h} \left(N^{,i;k} - N_{;m}^m h^{ik} \right) + \sqrt{h} \left(\frac{N^m \Pi^{ik}}{\sqrt{h}} \right)_{;m} - 2\Pi^{m(i} N_{;m}^{k)} \quad (2.35)
\end{aligned}$$

As duas primeiras equações nos permitem tratar as variáveis N e N_i como meros multiplicadores de Lagrange para os vínculos (2.27) e (2.28). A equação (2.34) apenas define as relações entre as “velocidades” (\dot{h}_{ij}) e os momenta. A verdadeira e única equação dinâmica é a (2.35). Esta equação é equivalente à única equação dinâmica (2.20) do formalismo lagrangiano, e os vínculos (2.27) e (2.28) são equivalentes respectivamente às equações (2.18) e (2.19). Assim fica mostrado que este sistema hamiltoniano reproduz as equações de Einstein.

Devido ao fato dos vínculos (2.27) e (2.28) satisfazerem a álgebra de Lie (2.29) - (2.31), existem relações e condições impostas sobre a evolução temporal do sistema. A partir desta álgebra pode-se provar os seguintes teoremas:

1. Se os vínculos são satisfeitos em uma dada hipersuperfície, e a evolução temporal é dada pelas equações de Hamilton, então os vínculos serão satisfeitos ao longo de toda a evolução.
2. Se os vínculos são satisfeitos para duas hipersuperfícies arbitrárias, então quantidades canônicas em duas hipersuperfícies quaisquer são necessariamente evoluídas a partir das equações de Hamilton.
3. Se a função principal de Jacobi (S) satisfizer a super-hamiltoniana em um dado ponto (\vec{x}_0) e o super-momentum em toda a hipersuperfície, então ela também satisfará o vínculo da super-hamiltoniana em toda hipersuperfície

$$\left. \begin{aligned} H_0(\vec{x}_0, t)[S] &\approx 0 \\ H_i(\vec{x}, t)[S] &\approx 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_0(\vec{x}, t)[S] \approx 0 \quad \forall \vec{x} \text{ e } t \text{ fixo.}$$

4. Se a função principal de Jacobi (S) satisfizer a super-hamiltoniana em qualquer ponto da hipersuperfície, então necessariamente também satisfará o super-momentum em qualquer ponto

$$H_0(\vec{x}, t)[S] \approx 0 \Rightarrow H_i(\vec{x}, t)[S] \approx 0 \quad \forall \vec{x} \text{ e } t \text{ fixo.}$$

Os vínculos (2.27) e (2.28), embora secundários, são vínculos de primeira classe. Espera-se então que eles sejam geradores de transformações de calibre.

Para o vínculo H_0 , a única transformação não nula é para a variável h_{ij} :

$$\begin{aligned}\delta h_{ij}(\vec{x}) &= \int d^3z \epsilon(\vec{z}) \{h_{ij}(\vec{x}), H_0(\vec{z})\} = \\ &= \int d^3z \epsilon(\vec{z}) G_{abkl}(\vec{z}) \{h_{ij}(\vec{x}), \Pi^{ab}(\vec{z}) \Pi^{kl}(\vec{z})\} = \\ &= \epsilon(\vec{x}) \frac{2}{\sqrt{h}} \left(\Pi_{ij}(\vec{x}) - \frac{h_{ij}(\vec{x})}{2} \Pi(\vec{x}) \right) = \\ &= -2\epsilon(\vec{x}) K_{ij}(\vec{x}) = -2\epsilon(\vec{x}) \mathcal{L}_{\eta^\alpha}(h_{ij})\end{aligned}$$

Esta transformação gera deslocamento na direção do vetor tipo-tempo $\eta^\alpha(\tau)$ perpendicular à tri-hipersuperfície. Enquanto a hamiltoniana total gera deslocamentos no parâmetro t , a super-hamiltoniana gera deslocamentos no parâmetro τ .

Vejam agora o vínculo do super-momentum (H_i):

- $\delta h_{ij}(\vec{x}) = \int d^3z \{h_{ij}(\vec{x}), H_a(\vec{z})\} \chi^a(\vec{z}) =$
 $= -2 \int d^3z \chi_a(\vec{z}) \left\{ h_{ij}(\vec{x}), \left(\Pi_{,b}^{ab} + \Pi^{bc} \Gamma_{bc}^a \right) \right\} =$
 $= -2 \int d^3z \chi_a(\vec{z}) \left(\frac{\partial}{\partial z^b} \delta(\vec{x} - \vec{z}) \delta_{ij}^{ab} + \delta_{ij}^{bc} \Gamma_{bc}^a \delta(\vec{x} - \vec{z}) \right) =$
 $= 2 \frac{\partial}{\partial x^b} \chi_a(\vec{x}) \delta_{ij}^{ab} - 2 \chi_a(\vec{x}) \Gamma_{ij}^a =$
 $= \chi^{(i;j)}(\vec{x}) = \mathcal{L}_{\chi^k}(h_{ij})$
- $\delta \Pi^{ij}(\vec{x}) = \int d^3z \{ \Pi^{ij}(\vec{x}), H_a(\vec{z}) \} \chi^a(\vec{z}) =$
 $= -2 \int d^3z \left\{ \Pi^{ij}(\vec{x}), h_{ak}(\vec{z}) \Pi_{,b}^{kb}(\vec{z}) \right\} \chi^a(\vec{z}) =$
 $= 2 \chi^a(\vec{x}) \Pi_{,b}^{kb}(\vec{x}) \delta_{ak}^{ij} - 2 \int d^3z \chi^a(\vec{z}) h_{ak}(\vec{z}) \Pi^{bc}(\vec{z}) \{ \Pi^{ij}(\vec{x}), \Gamma_{bc}^k(\vec{z}) \} =$
 $= \chi^{(i}(\vec{x}) \Pi_{,b}^{j)b} - \chi^{(i}(\vec{x}) {}^3 \Gamma_{ab}^{j)} \Pi^{ab} - (\chi^{(i}(\vec{x}) \Pi^{j)b})_{,b} + (\chi^m(\vec{x}) \Pi^{ij})_{,m} =$
 $= -\chi_{,b}^{(i}(\vec{x}) \Pi^{j)b} + \chi_{,m}^m(\vec{x}) \Pi^{ij} + \chi^m(\vec{x}) \Pi_{,m}^{ij} = \mathcal{L}_{\chi^k}(\Pi^{ij})$

Estas transformações são transformações gerais das coordenadas na tri-hipersuperfície, ou seja, as transformações de calibre são difeomorfismos da tri-hipersuperfície.

Concluimos assim o desenvolvimento do formalismo Hamiltoniano para a Teoria da Relatividade Geral.

2.4 *Teoria Linear de Perturbações Cosmológicas*

Nos capítulos anteriores, estudamos o formalismo hamiltoniano para a TRG e vimos que seria necessário usarmos métodos para lidarmos com sistemas vinculados devido às liberdades de calibre da teoria. No presente capítulo, vamos desenvolver a teoria linear de perturbações cosmológicas nos preocupando apenas com o formalismo que será usado no desenvolvimento dos resultados seguintes e, por isso, nos limitaremos apenas em lidar com o essencial necessário deste formalismo.

Primeiramente, vamos mostrar como podemos, de uma maneira consistente, definir uma teoria de perturbações cosmológicas e quais devem ser as variáveis dinâmicas desta descrição. Tendo estabelecido a linguagem conveniente, vamos derivar as equações dinâmicas para perturbações escalares a partir das equações da TRG. Em seguida, nos focalizando apenas no caso de um Universo permeado por um campo escalar clássico, encontraremos finalmente as equações básicas para a descrição da evolução de perturbações lineares num Universo homogêneo e isotrópico.

2.4.1 Formalismo

As observações cosmológicas nos mostram que o Universo é, em larga escala, homogêneo e isotrópico. As estruturas encontradas, por exemplo em aglomerados de galáxias, podem ser explicadas a partir da evolução de um pequeno desvio da homogeneidade observada. Devido à natureza atrativa da gravitação, qualquer desvio da homogeneidade gera uma instabilidade gravitacional a qual tenderia a crescer exponencialmente. Porém, devido à expansão do Universo, o crescimento das perturbações, em geral, segue uma lei de potência.

Para explicarmos completamente a formação de estrutura do Universo precisamos levar em conta efeitos gravitacionais não lineares Ref.[55, 58]. No entanto, antes mesmo de estudarmos a evolução dessas perturbações temos que estabelecer quais são as adequadas condições iniciais, ou seja, qual é o perfil de distribuição da densidade de matéria, o qual sabemos que está, através das equações de Einstein, associado às perturbações da métrica.

A teoria linear das perturbações da métrica nos possibilita descrever a evolução dessas perturbações num regime anterior à formação de estrutura, gerando assim as condições iniciais para esta teoria.

Com o desenvolvimento do paradigma inflacionário, que será discutido no capítulo seguinte, a teoria de perturbações ⁶ se mostrou um formalismo fundamental nas previsões cosmológicas. A partir do seu desenvolvimento pode-se explicar, por exemplo, as flutuações da radiação cósmica de fundo, tornando-se assim indispensável para qualquer análise e teste de modelos teóricos para o Universo primordial.

A TRG foi construída para ser uma teoria invariante por transformações arbitrárias de coordenadas. Esta invariância está associada à idéia de que os sistemas de coordenadas são completamente arbitrários e por isso não contém nenhum significado físico. Esta liberdade de calibre nos cria uma dificuldade técnica na construção de uma teoria de perturbações lineares pois, uma vez que é permitido fazer qualquer transformação de coordenadas, temos que garantir que as quantidades que descreverão as perturbações de uma dada métrica são de fato perturbações físicas e não meras componentes artificiais criadas por uma mudança de coordenadas.

Existem alguns métodos possíveis para tratar este problema. Uma possibilidade seria, por exemplo, descrevermos a gravitação no formalismo de equações quase-maxwellianas e descrevermos as perturbações em termos das componentes do tensor de Weyl Ref.'s [32]-[37]. Uma vez que as métricas conformalmente planas possuem tensor de Weyl igual a zero, qualquer componente não nula do tensor de Weyl para a métrica de FLRW representará necessariamente uma verdadeira perturbação.

Por conveniência, optamos por trabalhar com as variáveis invariantes de calibre em primeira ordem desenvolvidas primeiramente por Bardeen [39, 40]. Neste formalismo, as variáveis das perturbações são identificadas com componentes da métrica perturbada. De maneira análoga, poderíamos ter escolhido trabalhar num dado calibre, como o calibre síncronon e, tomando cuidado para identificarmos corretamente aos graus de liberdade físicos das perturbações, evoluirmos o sistema mesmo que as variáveis não sejam invariantes de calibre. No entanto, neste procedimento, não é fácil o acompanhamento dos graus de liberdade físicos o

⁶Vamos usar o termo teoria de perturbações como uma abreviação para teoria linear de perturbações gravitacionais, sendo sempre sub-entendido que estamos considerando a descrição do Universo através da métrica FLRW.

que torna a análise dos resultados menos clara e mais difícil de interpretar.

Formalmente podemos definir transformações de calibre de perturbações com relação a uma determinada métrica de fundo de duas maneiras: transformações passivas ou ativas. Suponha que tenhamos uma variedade \mathcal{M} que represente o espaço-tempo físico onde definimos uma estrutura de fundo e associamos a toda e qualquer variável \mathcal{Q} ⁷ em \mathcal{M} uma função específica $\mathcal{Q}^{(0)}(x^\alpha(p))$ de forma que a dependência funcional de $\mathcal{Q}^{(0)}$ em x^α seja fixa para todo ponto $p \in \mathcal{M}$. Tendo definido esta estrutura de fundo podemos então definir as perturbações simplesmente como

$$\delta\mathcal{Q}(p) = \mathcal{Q}(x^\alpha(p)) - \mathcal{Q}^{(0)}(x^\alpha(p)).$$

Para um outro sistema de coordenadas \tilde{x}^α teremos naturalmente para o mesmo ponto p

$$\delta\tilde{\mathcal{Q}}(p) = \tilde{\mathcal{Q}}(\tilde{x}^\alpha(p)) - \mathcal{Q}^{(0)}(\tilde{x}^\alpha(p)).$$

Da mesma forma que antes, a dependência funcional de $\mathcal{Q}^{(0)}$ em \tilde{x}^α é a mesma que de $\mathcal{Q}^{(0)}$ em x^α . A transformação $\delta\mathcal{Q} \rightarrow \delta\tilde{\mathcal{Q}}$ é a definição da transformação de calibre (passiva) associada à transformação de coordenada $x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha$.

A outra maneira de definirmos transformações de calibre é utilizarmos uma outra variedade e definirmos um difeomorfismo entre esta variedade de fundo \mathcal{N} e a variedade espaço-temporal física \mathcal{M} . Se a variedade de fundo possuir um sistema de coordenada rígido x_r , um dado difeomorfismo $\mathcal{D} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ induz um sistema de coordenadas em \mathcal{M} pela associação $\mathcal{D} : x_r^\alpha \rightarrow x^\alpha$. Se utilizarmos um outro difeomorfismo $\tilde{\mathcal{D}}$, teremos a indução de um novo sistema de coordenadas $\tilde{\mathcal{D}} : x_r^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha$. Para cada um destes difeomorfismos, podemos definir nossas variáveis perturbadas respectivamente como $\delta\mathcal{Q}(p) = \mathcal{Q}(p) - \mathcal{Q}^{(0)}(\mathcal{D}^{-1}(p))$ e $\delta\tilde{\mathcal{Q}}(p) = \tilde{\mathcal{Q}}(p) - \mathcal{Q}^{(0)}(\tilde{\mathcal{D}}^{-1}(p))$. Novamente definimos uma transformação de calibre como a passagem de $\delta\mathcal{Q} \rightarrow \delta\tilde{\mathcal{Q}}$. Estas duas abordagens são equivalentes, sendo que a primeira mostra mais claramente a dependência da transformação de calibre na escolha do sistema de coordenadas enquanto que a segunda salienta a dependência na relação entre a variedade de fundo e a variedade física espaço-temporal.

No caso de considerarmos transformações infinitesimais

$$x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha,$$

⁷Estamos omitindo os possíveis índices de \mathcal{Q} mas esta variável pode ser de natureza escalar, vetorial ou tensorial.

a transformação de calibre é caracterizada pela derivada de Lie na direção do vetor ξ ,

$$\delta\tilde{\mathcal{Q}} - \delta\mathcal{Q} = \mathcal{L}_\xi\mathcal{Q}. \quad (2.36)$$

O estudo de perturbações será feito num Universo descrito pela métrica de FLRW de forma que podemos definir a métrica a partir do intervalo de acordo com a separação $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}$ onde assumimos que a métrica de fundo é dada por

$$g_{\mu\nu}^{(0)} dx^\nu dx^\mu = N^2 dt^2 - \frac{a^2(t)}{(1 + \frac{\kappa}{4} r^2)^2} [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta) d\phi^2)].$$

A parte perturbada da métrica pode ser dividida em três setores, os quais evoluem de forma independente: escalar, vetorial e tensorial. Essa separação das componentes da perturbação é baseada em suas propriedades frente a transformações de coordenadas tri-espaciais em cada hipersuperfície que define o folheamento da variedade associada à métrica de fundo.

As perturbações vetoriais e tensoriais não geram nenhuma instabilidade gravitacional de forma que para o estudo da formação de estrutura basta analisarmos o setor escalar Ref.[38]. De fato, para um Universo em expansão, as perturbações vetoriais decaem inversamente proporcionais ao fator de escala, enquanto que as perturbações tensoriais geram ondas gravitacionais que não influenciam na evolução dos desvios da homogeneidade da densidade de matéria.

2.4.2 Perturbações escalares

A parte da métrica associada às perturbações escalares pode ser escrita como

$$\delta g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2N^2\phi & -Na(t)B_{|i} \\ -Na(t)B_{|i} & 2a^2(t) (\psi\gamma_{ij} - E_{|ij}) \end{pmatrix}.$$

No calibre temporal conforme, o intervalo se escreve

$$ds^2 = a^2(\eta) \{ (1 + 2\phi) d\eta^2 - 2B_{|i} dx^i d\eta - [(1 - 2\psi) \gamma_{ij} + 2E_{|ij}] dx^i dx^j \}. \quad (2.37)$$

Uma transformação infinitesimal de coordenada é inteiramente definida por um vetor $\xi = (\xi^0, \xi^i)$, onde o tri-vetor pode ser decomposto em um tri-vetor com divergência nula e uma função escalar, ou seja, $\xi^i = \xi_T^i + \gamma^{ij} \xi_{|j}$ com $\xi_{T|j}^j = 0$. Como estamos interessados apenas nas

perturbações escalares, a transformação infinitesimal mais geral pode ser caracterizada pelas duas funções escalares ξ^0 e ξ . Dada esta transformação infinitesimal, a métrica irá sofrer um transformação $\delta g_{\mu\nu} \longrightarrow \delta \tilde{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} + \Delta g_{\mu\nu}$. Podemos calcular a variação para cada uma das componentes da métrica perturbada definida em (2.37)

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{a'}{a}\xi^0 - \xi^{0'}, \quad \tilde{\psi} = \psi + \frac{a'}{a}\xi^0, \quad \tilde{B} = B + \xi^0 - \xi', \quad \tilde{E} = E - \xi,$$

onde ' significa derivada com relação ao tempo conforme.

Claramente, estas variáveis não são invariantes por esta transformação infinitesimal de coordenada. A partir de uma combinação apropriada, podemos construir duas variáveis invariantes

$$\Phi = \phi + \frac{1}{a} [(B - E')a]' \quad \Psi = \psi - \frac{a'}{a}(B - E').$$

Estas duas variáveis foram introduzidas na literatura pela primeira vez por Bardeen [40]. Além dessa possível escolha, poderíamos ter tomado qualquer combinação linear destas ou definir quaisquer outras duas variáveis invariantes de calibre para representar o espaço bidimensional das funções escalares invariantes de calibre que definem a perturbação escalar da métrica. A escolha por estas duas variáveis se dá pela simplificação das equações dinâmicas e pela fácil associação da variável Φ , chamada de potencial de Bardeen, com o potencial Newtoniano.

Em geral, a perturbação de um campo escalar $\delta\varphi(\eta, x^i) = \varphi(\eta, x^i) - \varphi_0(\eta)$, onde $\varphi_0(\eta)$ é o seu valor no espaço-tempo de fundo, também não é invariante de calibre. Frente as transformações infinitesimais, esta perturbação se transforma $\delta\varphi(\eta, x^i) \longrightarrow \delta\tilde{\varphi}(\eta, x^i) = \delta\varphi(\eta, x^i) - \varphi_0'(\eta)\xi^0$. Da mesma forma que para as variáveis da métrica, podemos definir uma perturbação invariante de calibre

$$\delta\varphi^{\text{inv}} = \delta\varphi + \varphi_0'(B - E').$$

Tendo as quantidades invariantes de calibre definidas acima, vamos agora derivar, a partir das equações de Einstein, as equações de evolução das perturbações.

As equações para as perturbações são calculadas a partir das equações de Einstein utilizando a definição para a métrica perturbada $g_{\mu\nu} = {}^{(0)}g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$. Ao inserirmos esta métrica no lado esquerdo das equações de Einstein encontramos

$$G^\mu{}_\nu = {}^{(0)}G^\mu{}_\nu + \delta G^\mu{}_\nu$$

onde ${}^{(0)}G^\mu{}_\nu$ condensa todos os termos que encontraríamos caso a métrica fosse apenas a métrica de fundo ${}^{(0)}g_{\mu\nu}$.

Utilizando a métrica no calibre de tempo conforme, eq. (2.37), encontramos para o tensor de Einstein perturbado as seguintes equações

$$\delta G^0_0 = \frac{2}{a^2} \left\{ -3\mathcal{H}(\mathcal{H}\phi + \psi') + \nabla^2 [\psi - \mathcal{H}(B - E')] + 3\mathcal{K}\psi \right\} \quad (2.38)$$

$$\delta G^0_j = \frac{2}{a^2} [\mathcal{H}\phi + \psi' - \mathcal{K}(B - E')]_{|j} \quad (2.39)$$

$$\delta G^i_j = -\frac{2}{a^2} \left\{ \left[(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi + \mathcal{H}\phi' + \psi'' + 2\mathcal{H}\psi' - \mathcal{K}\psi + \frac{1}{2}\nabla^2 D \right] \delta^i_j - \frac{1}{2}\gamma^{ik} D_{|kj} \right\} \quad (2.40)$$

onde definimos $D \doteq (\phi - \psi) + 2\mathcal{H}(B - E') + (B - E)'$.

Esses termos de perturbação para o tensor de Einstein não são invariantes de calibre para uma transformação infinitesimal do sistema de coordenadas. Se utilizarmos a definição (2.36), encontramos

$$\begin{aligned} \delta G^0_0 &\longrightarrow \delta G^0_0 - \left({}^{(0)}G^0_0 \right)' \xi^0 \\ \delta G^0_j &\longrightarrow \delta G^0_j - \left({}^{(0)}G^0_0 - \frac{1}{3} {}^{(0)}G^k_k \right) \xi^0_{|j} \\ \delta G^i_j &\longrightarrow \delta G^i_j - \left({}^{(0)}G^i_j \right)' \xi^0 \end{aligned}$$

Construímos assim as quantidades invariantes de calibre,

$$\begin{aligned} (\delta G^{\text{inv}})^0_0 &= \delta G^0_0 + \left({}^{(0)}G^0_0 \right)' (B - E') \\ (\delta G^{\text{inv}})^0_j &= \delta G^0_j + \left({}^{(0)}G^0_0 - \frac{1}{3} {}^{(0)}G^k_k \right) (B - E')_{|j} \\ (\delta G^{\text{inv}})^i_j &= \delta G^i_j + \left({}^{(0)}G^i_j \right)' (B - E') \end{aligned}$$

Podemos definir, da mesma forma que para o tensor de Einstein $G^\mu{}_\nu$, a separação para o tensor energia momentum em uma componente associada ao sistema não perturbado e um termo de correção de primeira ordem nas perturbações $T^\mu{}_\nu = {}^{(0)}T^\mu{}_\nu + \delta T^\mu{}_\nu$.

De uma forma geral, considerando que a topologia do espaço-tempo seja $M^3 \otimes \mathfrak{R}$ onde M^3 é uma variedade tri-espacial arbitrária, podemos decompor o tensor energia-momentum em sua forma irreduzível, Ref.[41], com o auxílio de uma congruência de vetores tipo tempo V^μ

$$T^{\mu\nu} = \rho V^\mu V^\nu + p h^{\mu\nu} + q^{(\mu} V^{\nu)} + \Pi^{\mu\nu},$$

onde definimos o símbolo de simetrização por $A^{(\mu}B^{\nu)} = A^\mu B^\nu + A^\nu B^\mu$ e o tensor $h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu$ é o projetor sobre a tri-hipersuperfície definida como a superfície normal à congruência V^μ . No caso da métrica ser homogênea e isotrópica, os únicos termos não nulos são ρ e p .

Fazendo uma expansão até primeira ordem para o caso homogêneo e isotrópico temos,

$$T^\mu{}_\nu = {}^{(0)}T^\mu{}_\nu + \delta T^\mu{}_\nu \quad ,$$

com

$$\begin{aligned} {}^{(0)}T^\mu{}_\nu &= \rho V^\mu V_\nu + p h^{\mu\nu} \\ \delta T^\mu{}_\nu &= \delta\rho V^\mu V_\nu + \delta p h^{\mu\nu} + \rho \delta V^{(\mu} V^{\nu)} + p \delta h^{\mu\nu} \end{aligned}$$

As componentes invariantes de calibre para as perturbações do tensor energia-momentum se escrevem

$$\begin{aligned} (\delta T^{\text{inv}})^0{}_0 &= \delta T^0{}_0 + \left({}^{(0)}T^0{}_0 \right)' (B - E') \\ (\delta T^{\text{inv}})^0{}_j &= \delta T^0{}_j + \left({}^{(0)}T^0{}_0 - \frac{1}{3} {}^{(0)}T^k{}_k \right) (B - E')|_j \\ (\delta T^{\text{inv}})^i{}_j &= \delta T^i{}_j + \left({}^{(0)}T^i{}_j \right)' (B - E') \end{aligned}$$

A partir dessas quantidades invariantes de calibre, as equações de Einstein perturbadas tomam a forma

$$-3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi') + \nabla^2\Psi + 3\mathcal{K}\Psi = \frac{3\ell_{Pl}^2}{2} a^2 (\delta T^{\text{inv}})^0{}_0 \quad (2.41)$$

$$(\mathcal{H}\Phi + \Psi')|_j = \frac{3\ell_{Pl}^2}{2} a^2 (\delta T^{\text{inv}})^0{}_j \quad (2.42)$$

$$\left[(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}\Phi' + \Psi'' + 2\mathcal{H}\Psi' - \mathcal{K}\Psi + \frac{1}{2}\nabla^2 D \right] \delta^i{}_j - \frac{1}{2}\gamma^{ik} D|_{kj} = -\frac{3\ell_{Pl}^2}{2} a^2 (\delta T^{\text{inv}})^i{}_j \quad (2.43)$$

onde temos $D = \Phi - \Psi$. Para concluirmos esta análise, ainda falta descrever como se escreve o lado direito das equações, ou seja, precisamos estabelecer como se escrevem os termos invariantes de calibre para as perturbações do tensor energia-momentum no caso de considerarmos o conteúdo material descrito por um campo escalar.

2.4.3 Perturbações com campo escalar

Para completar a descrição das equações para as perturbações, vamos descrever os termos de perturbação para o tensor energia-momento. Estamos considerando que a matéria é descrita por um campo escalar minimamente acoplado à gravitação que pode eventualmente estar sujeito a um potencial $V(\varphi)$.

A ação do campo escalar se escreve

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - V(\varphi) \right).$$

Para um Universo homogêneo e isotrópico, o campo escalar também deve ser homogêneo e isotrópico uma vez que as simetrias da métrica impõem sobre o tensor energia-momento da matéria que ele seja diagonal e apenas com densidade de energia ($T^0_0 = \rho$) e pressão isotrópica ($T^i_j = -p \delta^i_j$).

Seguindo a maneira de definirmos a perturbação do campo escalar, podemos escrever $\varphi(\eta, x^i) = \varphi_0(\eta) + \delta\varphi(\eta, x^i)$, onde φ_0 é o valor do campo para a métrica de fundo. Para o caso do campo escalar no calibre temporal de tempo conforme encontramos,

$$\rho = \frac{1}{2a^2} \varphi_0'^2 + V(\varphi_0) \quad , \quad (2.44)$$

$$p = \frac{1}{2a^2} \varphi_0'^2 - V(\varphi_0) \quad . \quad (2.45)$$

Por cálculo direto, encontramos para os termos do tensor energia-momento perturbado

$$\begin{aligned} \delta T^0_0 &= \frac{1}{a^2} \left(-\varphi_0'^2 \phi + \varphi_0' \delta\varphi' + a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta\varphi \right) \quad , \\ \delta T^0_j &= \frac{1}{a^2} \varphi_0' \delta\varphi_{|j} \quad , \\ \delta T^i_j &= \frac{1}{a^2} \left(\varphi_0'^2 \phi - \varphi_0' \delta\varphi' + a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta\varphi \right) \delta^i_j \quad . \end{aligned}$$

Novamente, estes termos não são invariantes de calibre. Precisamos então redefinir as perturbações para os campos, $\delta\varphi^{\text{inv}} \doteq \delta\varphi + \varphi_0'(B - E')$, para que as equações dinâmicas relacionem apenas quantidades invariantes de calibre. Em termos dessas variáveis invariantes

de calibre, temos

$$\begin{aligned} (\delta T^{\text{inv}})^0_0 &= \frac{1}{a^2} \left(-\varphi_0'^2 \Phi + \varphi_0' (\delta \varphi^{\text{inv}})' + a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi^{\text{inv}} \right) , \\ (\delta T^{\text{inv}})^0_j &= \frac{1}{a^2} \varphi_0' (\delta \varphi^{\text{inv}})_{|j} , \\ (\delta T^{\text{inv}})^i_j &= \frac{1}{a^2} \left(\varphi_0'^2 \Phi - \varphi_0' (\delta \varphi^{\text{inv}})' + a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi^{\text{inv}} \right) \delta^i_j . \end{aligned}$$

Note que a parte espacial do tensor energia-momento perturbado é diagonal, $\delta T^i_j \propto \delta^i_j$. Se tomarmos $i \neq j$ na equação (2.43), temos imediatamente que $D = 0 \implies \Phi = \Psi$. Para todo tensor energia-momento que não apresente pressão anisotrópica, $\Pi^{\mu\nu} = 0$, ou seja, que a condição $\delta T^i_j \propto \delta^i_j$ seja satisfeita, as perturbações da métrica apresenta apenas um grau de liberdade. Neste caso a métrica perturbada assume a forma,

$$ds^2 = a^2(\eta) \left\{ (1 + 2\Phi) d\eta^2 - (1 - 2\Phi) \gamma_{ij} dx^i dx^j \right\} .$$

Podemos agora estabelecer as equações dinâmicas se levarmos os termos encontrados para o tensor energia-momento perturbado nas equações (2.41)-(2.43). Como trataremos apenas de variáveis invariantes de calibre, por simplicidade notacional, iremos abandonar o índice “inv” nos termos $\delta \varphi^{\text{inv}}$. Para simplificarmos as expressões iremos usar a equação de fundo $\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 - \mathcal{K} = -\frac{3\ell_{Pl}^2}{2} \varphi_0'^2$. O sistema que estabelece a evolução para as perturbações escalares num Universo permeado por um campo escalar com um potencial de auto-interação $V(\varphi)$ é

$$\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}\Phi' + 4\mathcal{K}\Phi - (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) \Phi = \frac{3\ell_{Pl}^2}{2} \left(\varphi_0' \delta \varphi' + a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi \right) , \quad (2.46)$$

$$\Phi' + \mathcal{H}\Phi = \frac{3\ell_{Pl}^2}{2} \varphi_0' \delta \varphi , \quad (2.47)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) \Phi = \frac{3\ell_{Pl}^2}{2} \left(\varphi_0' \delta \varphi' - a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi \right) . \quad (2.48)$$

Este sistema deve ser completado pela equação de Klein-Gordon perturbada, $\square \varphi + \frac{dV}{d\varphi} = 0$. Se usarmos a equação de Klein-Gordon não perturbada para simplificá-la temos então,

$$\delta \varphi'' + 2\mathcal{H}\delta \varphi' - \nabla^2 \delta \varphi + a^2 \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \delta \varphi - 4\varphi_0' \Phi' + 2a^2 \frac{dV}{d\varphi} \Phi = 0 .$$

Nesta equação, o termo ∇^2 é um objeto geométrico definido com a métrica de fundo. As equações (2.46)-(2.48) podem ser combinadas para gerarmos um equação que só dependa do potencial de Bardeen Φ e de funções do sistema não perturbado. Para isto, basta subtraírmos

a eq.(2.48) de eq.(2.46), usarmos a equação de vínculo eq.(2.47) e a equação de Klein-Gordon não perturbada. Esta separação pode ser feita pois a equação de vínculo eq.(2.47) relaciona o potencial de Bardeen Φ e a perturbação do campo escalar $\delta\varphi$, $\delta\varphi = \frac{2}{3\ell_{Pl}^2} \frac{\Phi' + \mathcal{H}\Phi}{\varphi_0'}$, nos mostrando que este sistema possui apenas um grau de liberdade que podemos escolher descrevê-lo através do potencial de Bardeen. Depois destas simplificações, a equação final para a evolução das perturbações assume a forma

$$\Phi'' + 2 \left(\mathcal{H} - \frac{\varphi_0''}{\varphi_0'} \right) \Phi' - \nabla^2 \Phi + 2 \left(-2\mathcal{K} + \mathcal{H}' - \mathcal{H} \frac{\varphi_0''}{\varphi_0'} \right) \Phi = 0 \quad . \quad (2.49)$$

É importante notar que para derivarmos esta equação assumimos categoricamente que $\varphi_0' \neq 0$. Caso queiramos estudar sistemas onde, por exemplo, o campo escalar oscile no mínimo de um potencial, como é o caso da fase de pré-aquecimento depois da inflação, não poderemos usar esta equação. Esta situação será mais detalhada quando estudarmos, na seção 4.1, um modelo de ricochete (“bounce”) com um campo escalar clássico.

Se aplicarmos uma transformada de Fourier para o espaço dos comprimentos de onda \vec{k} , podemos substituir $\nabla^2 \Phi$ por $k^2 \Phi$, entendido agora que $\Phi = \Phi(\eta, k)$. A equação (2.49) pode ser simplificada por uma mudança de variável Ref.'s [42, 44] definida por

$$u \doteq \frac{2}{3\ell_{Pl}^2 (\rho + p)^{1/2}} \Phi = \frac{2}{3\ell_{Pl}} \frac{a^2 \theta}{\mathcal{H}} \Phi \quad , \quad (2.50)$$

$$\theta \doteq \frac{1}{a} \sqrt{\left(\frac{\rho}{\rho + p} \right) \left(1 - \frac{\mathcal{K}}{\ell_{Pl}^2 \rho a^2} \right)} \quad . \quad (2.51)$$

Com relação a esta nova variável, a equação para o potencial de Bardeen se escreve como

$$u'' + (k^2 - V_u) u = 0 \quad , \quad (2.52)$$

onde definimos o potencial V_u e o termo associado à velocidade do som no meio, c_s , por

$$V_u \equiv \frac{\theta''}{\theta} + 3\mathcal{K}(1 - c_s^2) \quad , \quad (2.53)$$

$$c_s^2 \equiv \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} = -\frac{1}{3} \left(1 + 2 \frac{\varphi_0''}{\mathcal{H}\varphi_0'} \right) \quad . \quad (2.54)$$

A equação (2.52) possui dois limites interessantes. No limite de pequenos comprimentos de onda, $k^2 \gg V_u$, a variável u se comporta como uma onda plana

$$u \propto e^{ik\eta} \quad .$$

No outro limite de longos comprimentos de onda, $k^2 \ll V_u$, temos que o termo do potencial domina. Se neste limite o termo de curvatura puder ser desprezado, ou seja, considerando agora apenas o caso onde podemos fazer $\mathcal{K} = 0$, a solução formal para a variável u se escreve Ref.'s [42]-[44]

$$u \approx C_1 \theta + C_2 \theta \int \frac{d\eta}{\theta^2} = \frac{\mathcal{C}(k)}{\varphi'_0} \left(\frac{1}{a} \int d\eta a^2 \right)' .$$

Neste limite o potencial de Bardeen é escrito como a soma de dois termos,

$$\Phi \approx \frac{\mathcal{C}(k)}{a} \left(\frac{1}{a} \int d\eta a^2 \right)' = \mathcal{C}(k) \left(1 - \frac{H}{a} \int dt a(t) \right) . \quad (2.55)$$

Para concluirmos esta seção vamos mencionar que, analisando a equação (2.49), é possível construir uma quantidade conservada para o limite de longos comprimentos de onda Ref.'s [45]-[48] para qualquer um dos casos $\mathcal{K} = \pm 1, 0$. Definindo a variável,

$$\zeta_{BST} \doteq \frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}^2 \rho}{(\rho + p)(\mathcal{H}^2 + \mathcal{K})} \times \left\{ \frac{\Phi'}{\mathcal{H}} + \left[1 - \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{H}^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 \right] \Phi \right\} + \Phi \quad (2.56)$$

temos que a sua derivada temporal, usando a equação (2.49) e a equação de Klein-Gordon não perturbada, pode ser escrita como

$$\zeta'_{BST} = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}^3 \rho}{(\rho + p)(\mathcal{H}^2 + \mathcal{K})} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 \left(\frac{\Phi'}{\mathcal{H}} + \Phi \right) + \frac{3\ell_{Pl}^2 a^2 \tau \delta S}{2 \mathcal{H}^2} \right] .$$

O termo δS representa a perturbação de entropia. Para um fluido, a pressão é em geral função de duas variáveis termodinâmicas, por exemplo, da densidade de energia e da entropia $p = p(\rho, S)$. Se calcularmos a sua encontramos $\delta p = \tau \delta S + c_S^2 \delta \rho$ onde $\tau \equiv \left(\frac{\delta p}{\delta S} \right)_\rho$ e $c_S^2 \equiv \left(\frac{\delta p}{\delta \rho} \right)_S$. Pela definição a partir do tensor energia-momento para um campo escalar, podemos calcular $\delta \rho$ e δp diretamente de suas definições eq.(2.44)-(2.45)

$$\delta \rho = \frac{1}{a^2} \varphi' \delta \varphi' + \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi \quad , \quad \delta p = \frac{1}{a^2} \varphi' \delta \varphi' - \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi \quad .$$

A partir destas expressões, e usando as equações (2.46) e (2.47), podemos calcular a perturbação não-adiabática

$$\tau \delta S = \delta p - c_S^2 \delta \rho = (1 - c_S^2) (3\mathcal{K} - k^2) \Phi$$

No limite de longos comprimentos de onda, i.e. escalas muito maiores do que o raio de Hubble ($\frac{k}{\mathcal{H}} \rightarrow 0$), e para perturbações adiabáticas $\tau \delta S \rightarrow 0$, a quantidade ζ_{BST} , definida em

(2.56), não varia no tempo. Esta quantidade fornece uma medida da perturbação da métrica de forma independente do folheamento das hipersuperfícies Ref.[49] e é útil para estudarmos o comportamento das perturbações, por exemplo, durante a fase de re-aquecimento onde, baseando-se apenas nesta quantidade conservada, não precisamos nos deter nos detalhes do mecanismo de re-aquecimento. Em termos da perturbação de curvatura, ζ_{BST} , temos que a dependência em k do espectro Ref. [42, 58] é dada por

$$\mathcal{P}_\zeta = k^3 \|\zeta_{BST}\|^2 \quad (2.57)$$

Na seção (4.1), usaremos esta definição para calcularmos o espectro de potência do modelo em questão e analisarmos a sua compatibilidade com os dados observacionais advindos da radiação cósmica de fundo.

Capítulo 3

Inflação

*“Everything should be made
as simple as possible,
but not simpler.”*

Atribuída à **Albert Einstein**

3.1 *Motivações*

O início da cosmologia moderna se deu com a publicação do artigo do Einstein em 1917 Ref. [50]. Depois da era mecanicista regida pela Mecânica Newtoniana, a formulação da Teoria da Relatividade Geral permitiu novamente à comunidade científica formular um modelo cosmológico Ref.'s [51, 52]. Até o final da década de 20, devido à escassez de dados observacionais, a cosmologia se baseava principalmente em princípios e preferências filosóficas como o princípio cosmológico que propõe que não haja nenhuma região privilegiada no Universo. A consequência imediata deste princípio é a imposição que a métrica que descreve o Universo seja homogênea e isotrópica.

Com a evolução dos instrumentos e técnicas observacionais, em meados do século passado se estabeleceu as propriedades básicas do nosso Universo num cenário aonde a proposta de homogeneidade e isotropia se confirmou observacionalmente juntamente com a estimativa da idade do Universo, através da medição da constante de Hubble e o fato da seção espacial ser

muito próxima de plana Ref.'s [53, 54].

A observação da radiação cósmica de fundo feita por Penzias e Wilson em 1965 mostrou que o Universo deveria de fato ter passado por um período de altas temperaturas e densidades. A evolução dos debates científicos forneceu o que ficou conhecido como o modelo do “Big Bang”. Num Universo homogêneo e isotrópico em expansão a métrica pode ser escrita num sistema de coordenadas adequado na forma

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \frac{a(t)^2}{(1 + \mathcal{K} r^2/4)^2} [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2)] \quad ,$$

onde $\mathcal{K} = \pm 1, 0$ e a única variável a determinar é o fator de escala $a(t)$, o qual é apenas função do tempo.

Estas simetrias da métrica, quando levadas às equações de Einstein, nos mostram que o conteúdo material do Universo também deve apresentar estas mesmas simetrias, ou seja, ele deve ser descrito por um fluido perfeito. Em linhas gerais, o modelo do “Big Bang” pode ser descrito como um Universo homogêneo e isotrópico em expansão permeado por dois fluidos perfeitos não interagentes. Durante a sua fase inicial a evolução é dominada pelo fluido de radiação seguida por uma fase dominada por poeira (fluido sem pressão).

Este modelo foi extremamente frutífero, conseguindo descrever a evolução em larga escala do Universo. Neste contexto foi possível explicar a concentração de elementos químicos leves, como o hidrogênio e o hélio através dos processos de nucleossíntese, assim como descrever a formação de estrutura do Universo Ref.'s [55, 56]. É evidente que se o Universo fosse estritamente homogêneo e isotrópico ele não apresentaria nenhuma estrutura como galáxias nem aglomerado de galáxias. Para descrever de forma mais realista o Universo devemos considerar pequenas flutuações com relação a métrica de fundo. Dadas determinadas condições iniciais, o modelo do “Big Bang” é capaz de prever corretamente a evolução dessas perturbações de forma compatível com os dados observacionais. Porém, a questão de como estabelecer as condições iniciais ainda não é bem estabelecida até este ponto. Somando-se ao problema das condições iniciais para as perturbações cosmológicas o modelo do “Big Bang” ainda apresenta algumas questões fundamentais.

Antes de descrever o paradigma inflacionário, vamos listar algumas das questões que fogem do poder explicativo / preditivo do modelo do “Big Bang” no intuito de motivarmos a sua modificação e mostrar que a inflação é capaz de resolver ou minimamente suavizar algumas

dessas questões Ref.'s [57, 58]. Vamos então enumerá-las:

1. Condições iniciais para as perturbações cosmológicas.

Como já mencionado anteriormente, se utilizarmos o espectro da radiação cósmica de fundo (CMB) para estabelecermos as flutuações na densidade de matéria no Universo, o modelo do “Big Bang” é capaz de reproduzir a evolução da formação de estrutura em larga escala. É natural supormos que este espectro da CMB tenha advindo de processos físicos e assim podemos nos questionar qual deva ter sido essa evolução e a partir de quais outras condições iniciais.

É notório que a inflação suaviza este problema em pelo menos dois sentidos. Primeiramente, o período inflacionário amplifica o comprimento de onda físico das perturbações tornando possível que perturbações locais antes da fase inflacionária sejam responsáveis pelas perturbações na escala de galáxias e aglomerados de galáxias. Além disso, a origem dessas perturbações é geralmente dada por flutuações de um campo quântico que tem como condição inicial o seu estado de vácuo.

O problema do estabelecimento das condições iniciais para o Universo só será definitivamente resolvido se conseguirmos construir uma teoria de condições iniciais que nos permita derivar essas condições a partir de princípios fundamentais. Porém, em geral, certas condições iniciais são consideradas mais ou menos naturais de forma que acredita-se que há de fato um ganho ao conseguirmos explicar a evolução de um dado sistema tendo como condição inicial, por exemplo, a condição de vácuo para um campo físico.

2. Problema do Horizonte de partícula.

As geodésicas radiais para fótons num Universo com $\mathcal{K} = 0$ são dadas simplesmente por $c dt = a(t)dr$. Podemos nos perguntar qual será a distância coordenada percorrida por um fóton entre dois intervalos de tempo t_0 e t_1 , ou seja,

$$\Delta r = \int_{t_0}^{t_1} \frac{c dt}{a(t)}$$

No modelo do “Big Bang”, a extrapolação para o passado nos leva a uma singularidade que pode ser feita coincidir com a origem temporal. Assim podemos nos perguntar se a integral acima converge ou diverge quando a extrapolamos para $t_0 = 0$. Caso ela convirja temos então um modelo de Universo com horizonte de partículas.

A presença de um horizonte de partículas nos diz que existem regiões do Universo que ainda não entraram em contato causal, e o valor numérico calculado pela definição acima nos fornece uma estimativa de qual é o raio máximo das regiões causalmente conectadas. Se o Universo for permeado por radiação e poeira, como é o caso do modelo do “Big Bang”, na época anterior a nucleossíntese é a radiação que domina, ou seja, $a(t) \sim t^{1/2}$ e vemos assim que a integral acima de fato converge.

O problema do horizonte pode ser entendido da seguinte forma: a distância física percorrida por um pulso luminoso no intervalo de zero a t_{des} , onde t_{des} é o momento do desacoplamento, é dada por

$$l(t) = a(t) \cdot \Delta r = a(t_{\text{des}}) \cdot \int_0^{t_{\text{des}}} \frac{c dt'}{a(t')} = \frac{a(t_{\text{des}})}{a_0} \cdot \int_0^{t_{\text{des}}} \frac{c dt'}{t'^{1/2}} = 2 ct_{\text{des}}.$$

Se calcularmos qual era o volume do Universo observado hoje no instante do desacoplamento, ou seja, se propagarmos para o passado o volume do Universo observado hoje encontramos um valor maior do que o calculado acima. Isto nos diz que no momento do desacoplamento o Universo observado hoje ainda não tinha tido tempo suficiente para entrar em contato causal e desta forma a homogeneidade e isotropia encontrada na CMB não pode ser explicada por nenhum mecanismo físico.

3. Problema da Planeza.

As seções espaciais são extremamente próximas de serem planas, porém a condição $\Omega = 1$ é instável, onde Ω é o parâmetro de densidade definido por $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$ onde ρ_c é a densidade crítica hoje. Num Universo de FLRW, a equação de Friedmann nos fornece

$$\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \|\Omega - 1\| = -2 \frac{\ddot{a}}{\dot{a}^3} .$$

Para um Universo em expansão desacelerada temos que este termo acima é sempre positivo, ou seja, o parâmetro de densidade sempre se afasta do valor 1. Hoje em dia o Universo é observado muito próximo do plano ($\Omega = 1$), o que implica que na época de Planck, quando esperamos começar a encontrar desvios do modelo padrão, este parâmetro deveria ser extremamente próximo do plano, tão próximo quanto 1 parte em 10^{56} ! É evidente que o caso plano ($\mathcal{K} = 0$) satisfaz esta condição mas de qualquer forma teríamos que explicar porque dentre todos os valores possíveis temos como condição uma classe de medida nula como o caso plano.

4. Origem da expansão.

O modelo padrão descreve o Universo em expansão porém não nos fornece nenhum tipo de explicação possível. Note que esta divergência das linhas de congruência são contrárias ao efeito atrativo da gravitação. O melhor que pode ser dito é que o Universo está se expandindo pois assim o fez no passado Ref. [59].

Para elucidarmos a fraqueza de tal argumento podemos compará-lo, por exemplo, com a trajetória de uma bala de canhão. Ao observá-la em movimento pelo ar, poderíamos afirmar que ela se movimenta pois já possuía velocidade anteriormente, porém nenhuma informação relevante é extraída a menos que consigamos explicar o mecanismo causador do movimento inicial (no caso da bala de canhão o mecanismo é obviamente a explosão da pólvora).

5. Problema da homogeneidade.

O Universo observado hoje é, em larga escala, homogêneo e isotrópico. Se olharmos para o espaço de todas as soluções possíveis das equações de Einstein percebemos que as soluções homogêneas¹ formam um sub-conjunto de medida nula, ou seja, se não houver nenhum princípio ou regra de seleção para privilegiarmos classes de soluções, as soluções homogêneas têm probabilidade zero de acontecer!

Na realidade, a homogeneidade surgiu na literatura baseada no princípio cosmológico que propõe uma equivalência entre todas as regiões do Universo, ou seja, o Universo é homogêneo por princípio. No entanto, enunciar um princípio não modifica em nada o fato do Universo apresentar esta simetria tão particular.

Para resolver esta questão, precisaríamos de uma nova teoria que explicasse essa preferência uma vez que a Relatividade Geral não distingue, ou melhor, não privilegia nenhuma de suas soluções. Uma outra possibilidade é explicarmos a homogeneidade por algum processo físico, como por exemplo a homogeneização de um gás numa caixa isolada pelo aumento de sua entropia. De fato, propor uma métrica específica sem nenhuma teoria de base vai contra as próprias idéias de que uma teoria espaço-temporal não deva apresentar objetos absolutos como havia proposto Einstein Ref.[60].

¹Me concentrei apenas na homogeneidade pois é possível pensarmos em mecanismos dinâmicos para explicarmos a isotropia para Universos em expansão desde que eles sejam homogêneos.

6. Assimetria entre bárions e anti-bárions.

O modelo padrão de partículas elementares nos diz que o número de bárions é um número quântico (uma quantidade conservada). Além disso sabemos que para energias superiores à massa do próton, um sistema em equilíbrio deve apresentar uma mesma quantidade de fótons, bárions e anti-bárions. No entanto, a fração do número de bárions e fótons hoje em dia é da ordem de $N_p/N_\gamma \sim 10^{-9}$ enquanto que $N_{\bar{p}} \approx 0$.

O excesso de fótons pode ser explicado pelo aniquilamento entre bárions e anti-bárions, aumentando a quantidade de fótons, porém, não é evidente como deve ter sido gerada esta assimetria entre bárions e anti-bárions.

Esta assimetria entre o número de bárions e anti-bárions requer pelo menos três condições que são conhecidas na literatura como regras de Sakharov Ref.[61, 62]:

- (a) Violação de N_p : o número de bárions não ser de fato um número quântico.
- (b) O sistema esteja fora do equilíbrio de forma que $N_p \neq N_{\bar{p}}$.
- (c) Termos violação das simetrias CP e C ao mesmo tempo.

7. Singularidade inicial.

Um evento como a singularidade inicial do modelo do “Big Bang” está claramente fora do escopo de qualquer teoria física desenvolvida até o momento. Esta aberração serve como um limite intransponível para a nossa descrição causal, sendo assim delegada ao filósofos, teólogos ou metafísicos.

Desde os ano 60 vem se mostrando que é uma propriedade da teoria da Relatividade Geral apresentar singularidades em suas soluções, sejam elas soluções cosmológicas, como os modelos de FLRW, ou de sistemas gravitacionais, como os buracos negros Ref.[83, 84]. Ao invés de ser considerada como uma necessidade teórica, como se tentou mostrar com os teoremas de singularidade, a presença da singularidade deve ser encarada como um sinal de que estamos extrapolando a teoria a um regime em que ela não é mais válida.

Qualquer proposta que contorne esta dificuldade deve ser tomada como uma tentativa de criarmos meios coerentes de extrapolarmos o limite imposto pelas singularidades. Num contexto cosmológico, isto se traduz em considerarmos apenas modelos não singulares para a evolução do Universo.

3.2 Propriedades Gerais

Os modelos inflacionários surgiram numa tentativa de resolver algumas das questões levantadas na seção anterior. Em especial podemos ressaltar o problema do horizonte e o problema da planeza.

Lembrando a fórmula para calcularmos o horizonte de partículas, percebemos que para que a integral divirja próxima da origem temporal é necessário que o fator de escala cresça com potencial maior do que 1, ou seja, $a(t) \sim t^\alpha$ com $\alpha > 1$. Em outras palavras, a expansão do Universo deve acontecer “mais rápida” do que a velocidade da luz. Se a evolução do Universo for dominada por um fluido perfeito temos que a equação de estado deste fluido deve ser do tipo $p = w\rho$ com $w < -1/3$.

Esta equação de fluido com pressão negativa, ao contrário do que aparenta, pode ser interpretada fisicamente. Se considerarmos, por exemplo, campos escalares massivos ou auto-interagentes, a presença de um potencial pode fornecer uma pressão negativa, ou de outra forma, dois fluidos interagentes cada um com equação de estado respeitando $p_i > 0$ pode também fornecer uma pressão efetiva negativa.

É interessante observar que esta equação de estado também resolve outro problema enumerado acima. Pelas equações de Einstein vemos que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\ell_{Pl}^2}{2} (\rho + 3p),$$

de forma que se $w < -1/3$ temos que esta fase será caracterizada por uma expansão **acelerada** ($\ddot{a} > 0$). Se esse período for longo o suficiente poderemos explicar o fato das seções espaciais serem tão próximas do plano uma vez que o parâmetro de densidade se aproximará, ao invés de se afastar, de 1

$$\frac{d}{dt} \|\Omega - 1\| < 0 \quad .$$

Podemos estimar quanto tempo deverá durar o período de inflação para resolver este problema da planeza. De acordo com os dados do WMAP Ref.[85], a planeza das seções espaciais colocam limites no parâmetro de densidade de forma que $\Omega_0 = 1.02 \pm 0.02$, onde o sub-índice se refere ao valor hoje. Se propagarmos esta restrição até o momento da nucleossíntese encontramos que $\|\Omega - 1\|_{\text{nucl}} < 10^{-56}$. Suponha que num momento inicial $\|\Omega - 1\|_i \sim 1$ e que iremos

parametrizar o fator de escala num tempo posterior a partir de $a_f = e^N a_i$. Considerando um crescimento exponencial, podemos calcular o quanto o fator de escala deve crescer a partir da razão

$$\frac{\|\Omega - 1\|_i}{\|\Omega - 1\|_f} = \frac{H^2 a_f^2}{H^2 a_i^2} = 10^{56} \longrightarrow N = 28 \times \ln(10) \approx 65 \quad .$$

Vemos assim que o número mínimo de “e-fold”² deve ser $N = 65$ para que $\|\Omega - 1\|$ se aproxime tanto de zero de forma a satisfazer os vínculos observacionais atuais.

Uma questão importante a ser analisada é como se processa o término do período de inflação. As duas fases subsequêntes a uma possível fase inflacionária são respectivamente uma fase dominada por radiação e a outra por poeira. Estas duas fases são caracterizadas por uma expansão desacelerada, ou seja, não importa qual seja o mecanismo que gere a aceleração, ela deverá terminar antes mesmo da nucleossíntese. Notamos assim que a constante cosmológica não pode ser a responsável pela aceleração durante o período de inflação pois, caso contrário, não seria possível sair do regime de expansão tipo de Sitter.

Durante a década de 60, quando foram articulados pela primeira vez os problemas do horizonte e da planeza, uma possível solução para estes problemas parecia necessariamente muito artificial. Com o advento da física de altas energias e sobretudo com a descrição de transição de fase ao se passar de regimes de altas para baixas energias, foi possível construir modelos inflacionários cujas condições eram passíveis de transitar de um regime acelerado para um desacelerado conectando-se assim ao modelo do “Big Bang”, Ref.’s [63, 64].

Após esta análise geral sobre as propriedades dos modelos inflacionários, vamos analisar alguns casos específicos.

3.3 Modelos Típicos

O paradigma inflacionário pode ser considerado como o requerimento de uma fase de expansão acelerada, $\ddot{a} > 0$, suficientemente longa de forma que o fator de escala cresça muitas ordens de grandeza. Para melhor situarmos essas teorias, vamos descrever brevemente alguns

²Este termo é utilizado para dizer que a cada “e-fold’s” o valor do fator de escala cresce de forma que o seu valor final é igual ao seu valor inicial multiplicado e^1 .

modelos capazes de gerar esta fase inflacionária.

3.3.1 Modelo original

Embora a idéia de uma fase de expansão exponencial, que é a característica fundamental dos modelos inflacionários, já estivesse sendo explorada Ref.'s [72]-[74], o primeiro modelo inflacionário construído a partir das teorias de altas energias foi proposto por Guth em 1981 Ref. [75].

A sua proposta original descreve um campo fundamental que sofre uma transição de fase de primeira ordem passando de um falso vácuo para um vácuo verdadeiro. A diferença de energia entre estes dois vácuos é liberada em forma de calor latente, $V \sim T^4$, elevando a temperatura do meio material do Universo primordial (re-aquecimento).

Este modelo sofre de alguns problemas, como por exemplo a excessiva formação de irregularidades da densidade pelo processo de nucleação, o fato de não haver um mecanismo natural para o término da inflação, além do ajuste fino nas condições iniciais do sistema. O ajuste fino é necessário para mantermos o campo fundamental no falso vácuo mesmo quando o sistema se encontrando a uma temperatura T_{GUT} ³, o que geraria perturbações térmicas sobre o mesmo.

Depois do abandono da proposta de Guth devido as suas dificuldades, as iniciativas de Linde Ref.'s [65, 66] e de Albrecht e Steinhardt Ref. [67] propõem uma modificação neste modelo onde a teoria de campo escalar sofre uma transição de segunda ordem, diferentemente do caso anterior que apresentava uma transição de primeira ordem. O problema com esta proposta, que é conhecida com o nome de nova inflação, é ainda o ajuste fino necessário para gerar uma fase inflacionária suficientemente longa.

Embora a idéia original tenha sido inteiramente baseada na física de partículas e em teorias de grande unificação, a possibilidade de resolver os problemas da planeza e da homogeneidade gerou motivação suficiente para que os cosmólogos persistissem com a idéia fundamental deste modelo, embora procurando outros mecanismos capazes de gerar esta fase inflacionária. Note que qualquer campo escalar, estando no estado de vácuo com densidade de energia diferente de zero, é capaz de gerar inflação.

³GUT é um acrônimo em inglês para teoria de grande unificação

3.3.2 Inflação caótica

Ainda motivado pelas características dos modelos inflacionários, Linde sugere uma nova modificação no modelo com o intuito de mostrar que a propriedade de gerar uma fase inflacionária é uma propriedade genérica e de certa forma quase inevitável de qualquer modelo Ref. [76]. A inflação caótica difere principalmente das anteriores pelo fato de não requerer condições iniciais tão restritas para o campo escalar nem para o potencial. Na realidade, a configuração do campo escalar logo após o tempo de Planck, ou seja, assim que o sistema comece a se comportar classicamente, deve apresentar todos os valores possíveis. A única restrição advém justamente da energia não ser alta o suficiente para não termos que tratar o sistema com uma descrição quântica.

Nesta configuração, em pelo menos uma região maior ou da ordem do comprimento associado à escala de auto-reprodução do modelo (m_{gr}^{-1}), as condições para se gerar inflação são satisfeitas, como por exemplo o valor do campo ser alto o suficiente a ponto de podermos desprezar as suas variações tanto temporais quanto espaciais, $\sqrt{\partial_0\varphi\partial^0\varphi} \sim \nabla\varphi \sim m_{pl}^2 \ll \varphi_0$. Linde argumenta que neste momento o Universo deve apresentar um número infinito destas regiões para uma grande classe de teorias. Uma vez acionada estas condições iniciais, cada uma destas regiões irá se expandir exponencialmente gerando todos os efeitos desejados para explicarmos a homogeneidade e a planeza das seções espaciais. Note, porém, que agora o Universo como um todo não é homogêneo nem isotrópico. A inflação caótica propõe um mecanismo que homogeniza apenas o Universo observável, além do raio de Hubble o Universo deve ser altamente heterogêneo e anisotrópico.

Com relação a este raciocínio, vale a pena fazermos duas ressalvas: mesmo que a distribuição de matéria e energia seja homogênea e isotrópica isto não implica na métrica ser homogênea e isotrópica. Para determinarmos a métrica, além do tensor de Ricci que é determinado pelo tensor energia-momento, precisamos especificar o tensor de Weyl o qual não pode ser determinado pela distribuição da matéria e energia do Universo. A outra objeção relaciona este raciocínio com o princípio antrópico. O argumento de Linde explora o fato de haver um número infinito de regiões com as condições necessárias para gerar uma fase infla-

cionária, porém, isto não diminui a estranheza de nosso Universo observável ser exatamente uma destas regiões. Note que, embora haja um número infinito, estas regiões não são as mais prováveis. Para que este argumento seja válido, precisamos acrescentar que apenas em Universos homogêneos e isotrópicos é possível encontrarmos as condições necessárias para se criar vida humana.

Voltemos para a análise da inflação caótica. Suponha que tenhamos, por exemplo, um modelo de inflação com potencial $V(\varphi) \sim \varphi^n$. Se as condições acima requeridas, $(\dot{\varphi}^2, (\nabla\varphi)^2 \ll V$; $\ddot{\varphi} \ll \frac{dV}{d\varphi}$), forem satisfeitas, a equação de Klein-Gordon e a de Friedmann para este sistema se escrevem

$$H^2 \approx \frac{8\pi}{3m_{pl}^2} V(\varphi) \quad ,$$

$$3H\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} \approx 0 \quad ,$$

onde desprezamos o termo de curvatura pelo fato de nestas condições o fator de escala crescer exponencialmente. Considerando um potencial em lei de potência e usando estas equações encontramos

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{n^2 m_{pl}^2}{48\pi\varphi^2} V \quad .$$

A condição $\dot{\varphi}^2 \ll V$ implica em $\varphi \gg \frac{n}{4\sqrt{3\pi}} m_{pl}$. Para o caso $V = \frac{\lambda}{4}\varphi^4$ temos, nesta aproximação, $\varphi \approx \varphi_0 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} m_{pl} t}$.

O tempo para que o campo escalar varie apreciavelmente é $\Delta t = \frac{1}{m_{pl}} \sqrt{\frac{6\pi}{\lambda}}$. Lembrando que $H \approx \sqrt{\frac{8\pi}{3m_{pl}^2} V}$, vemos que para que tenhamos um número suficiente de “e-fold’s”, i.e. $H\Delta t \sim 65$, temos que ter $\lambda \sim 4 \cdot 10^{-2}$.

No entanto, da mesma forma que para o caso do modelo de Guth, as perturbações de densidade $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim 10^{-5}$ são muito mais restritivas requerendo que $\lambda \sim 10^{-12}$ (Ref. [78]).

Uma derivação dos modelos caóticos são os chamados modelos estocásticos (“stochastic inflation”) Ref.’s [68, 69]. A inflação estocástica pode ser entendida como a implementação de uma dinâmica estocástica quântica a um modelo de inflação caótica. Nestes modelos inflacionários, as condições necessárias para gerar a inflação são continuamente realizadas para alguma região do Universo. Ao contrário dos modelos caóticos, os modelos estocásticos levam em consideração as flutuações de vácuo do campo escalar de forma que, recorrentemente, e não apenas logo depois a era de Planck, novos mini-Universos são continuamente criados.

Este processo não cessa, ou seja, o modelo é do tipo estado estacionário (“steady-state”) onde regiões homogêneas e isotrópicas são continuamente desenvolvidas.

3.4 *Espectro de Potência*

Apesar dos diferentes tipos de modelos inflacionários que podemos encontrar na literatura, uma característica geralmente compartilhada por todos esses modelos é a expansão exponencial do fator de escala. É comum supor que, durante esta fase, o campo escalar e seu potencial satisfaçam algumas propriedades de forma a garantir o crescimento quase-exponencial do fator de escala. De uma maneira geral, é preciso que o campo escalar possua uma equação de estado efetiva de forma que $p \approx -\rho$. Esta condição é atingida caso possamos desprezar tanto as variações espaciais quanto as temporais do campo escalar frente ao valor do potencial $V(\varphi)$. Como uma medida deste regime, costuma-se definir os chamados parâmetros de deslizamento lento (“slow-row parameters”), que medem justamente o quão pequeno é o desvio desta condição. Definimos então os parâmetros

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \delta \equiv -\frac{\ddot{\varphi}}{H\dot{\varphi}} \quad , \quad (3.1)$$

Em termos destes parâmetros, a equação de evolução para a variável associada à perturbação v , nesta aproximação, se escreve Ref. [70],

$$v'' + \left[k^2 - \frac{1}{\eta^2} (2 + 6\varepsilon - 3\delta) \right] v = 0 \quad ,$$

onde o prima significa derivada com relação ao tempo conforme que é definido por $\eta = \int a^{-1} dt \approx -(1 + \varepsilon)(Ha)^{-1}$. Esta equação admite como solução as funções de Bessel

$$v(\eta, k) = \sqrt{k\eta} [D_1(k) J_\nu(k\eta) + D_2(k) J_{-\nu}(k\eta)] \quad ,$$

onde $\nu = -\frac{3}{2} - 2\varepsilon + \delta$.

Em geral, os modelos de inflação tomam como condição inicial para o campo escalar um estado de vácuo. Isto só é possível pois neste momento o potencial para as perturbações se torna desprezível. Quando o fator de escala tende a zero, caso o fator de Hubble não divirja, o tempo conforme $\eta \approx -(aH)^{-1}$ diverge, i.e. $V_v \rightarrow 0$ e $k^2 \gg V_v$. Isto é equivalente a afirmar

que a escala de comprimento das perturbações é muito menor do que a escala de curvatura dada pelo inverso da raiz quadrada do escalar de Ricci. A curvatura não sendo relevante, tudo se passa como se estivéssemos no espaço-tempo de Minkowski. Nestas condições a solução para v se escreve

$$v = \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-ik(\eta - \eta_{\text{ini}})} \quad .$$

O campo escalar é tratado quanticamente enquanto que o fator de escalar se comporta classicamente. Este tratamento semi-clássico considera o tensor energia-momento como um valor esperado do campo quântico e por isso o fator de normalização \sqrt{k} .

Para conectarmos essas duas soluções precisamos utilizar o comportamento assintótico das funções de Bessel Ref.[77]

$$J_\nu(x) \approx \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \quad x \rightarrow 0 \quad ,$$

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right] \quad x \rightarrow -\infty \quad .$$

O limite $k^2 \gg V_v$ equivale a tomarmos o limite $k\eta \rightarrow -\infty$. Neste limite, igualando as funções de Bessel com a solução de vácuo, temos

$$\frac{D_1}{D_2} = -e^{i\pi\nu} \quad , \quad D_1 = \frac{2i\pi \exp\left(ik\eta_{\text{ini}} + \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{k} \sin[\pi\nu]} \quad .$$

No limite outro $k^2 \ll V_v$ ($k\eta \rightarrow 0$) a solução de v se escreve

$$v = D_1(k) \left[\frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{k\eta}{2}\right)^{\nu+1/2} + \frac{e^{i\pi\nu}}{\Gamma(1-\nu)} \left(\frac{k\eta}{2}\right)^{-\nu+1/2} \right] \quad .$$

Como o índice da função de Bessel é negativo, $\nu < 0$, e $\eta \approx H^{-1}e^{-Ht}$, podemos desprezar o segundo termo. Levando em conta a expressão de ν e que $D_1 \propto k^{-1/2}$ temos que

$$v \propto k^{-3/2-2\epsilon+\delta} \quad .$$

Neste regime, quando o potencial de Bardeen é constante, eq.(2.55), a dependência em k de $v(k)$, $\Phi(k)$ e de $\zeta(k)$ é a mesma, ou seja, $\zeta \propto k^{-3/2-2\epsilon+\delta}$. Vemos assim que, para grandes comprimentos de onda e se as perturbações de entropia puderem ser desprezadas de forma que ζ seja uma quantidade conservada durante o processo de re-aquecimento, o espectro de potência para as perturbações deve ser quase invariante de escala, ou seja,

$$\mathcal{P}_\zeta \propto k^3 \|\zeta\|^2 \propto k^{n_S-1} \propto k^{-4\epsilon+2\delta} \quad ,$$

onde definimos o índice espectral escalar,

$$n_S \equiv 1 + \frac{d}{d \ln k} \ln (\mathcal{P}_\zeta) = 1 + 2\delta - 4\epsilon \quad .$$

3.5 *Problemas do Paradigma Inflacionário*

Para concluir esta seção sobre algumas das propriedades gerais do paradigma inflacionário, vamos salientar algumas das dificuldades principais que esses modelos geraram ou não conseguiram resolver Ref.'s [78]-[80].

1. **Amplitude das flutuações de densidade.**

Os modelos de inflação baseados em potenciais para campos escalares geralmente prevêem uma amplitude para as flutuações de matéria na época do desacoplamento muito elevada Ref. [81]. Os dados medidos da anisotropia da CMB e os valores atuais para as densidades do desvio da homogeneidade nas escalas de aglomerados de galáxias nos fornecem um limite para as flutuações de massa, para uma dada escala caracterizada por um comprimento de onda k no momento em que ela cruza o raio de Hubble, da ordem de 10^{-5} . Para satisfazer este vínculo é necessário que os parâmetros que definem o potencial de auto-interação do campo escalar sejam muito pequenos. Se por exemplo a inflação fosse acionada por um único campo escalar com um potencial do tipo $\lambda\varphi^4$, teríamos que ter $\lambda < 10^{-12}$. Até o momento ainda não há nenhuma base teórica que nos permita explicar um valor tão específico.

2. **Problema Trans-Planckiano.**

Um dos efeitos de todos os modelos inflacionários é a amplificação das perturbações de escalas microscópicas para escalas cosmológicas. No entanto, muitos modelos duram tanto tempo no período de expansão acelerada que se olharmos retroativamente, a contração dos comprimentos de onda físicos atualmente observados é tão intensa que eles seriam

menores do que o comprimento de Planck. O paradigma inflacionário se vale de um tratamento semi-clássico, com a gravitação sendo descrita essencialmente pela Relatividade Geral (teoria clássica), o que lança sérias dúvidas sobre a validade de sua aplicação Ref. [82]. Para comprimentos de onda menores do que o comprimento de Planck, precisamos de uma teoria quântica da gravitação para podermos consistentemente estabelecer as condições iniciais neste regime.

3. Problema da Singularidade.

Nos modelos convencionais, a singularidade inicial não é eliminada pela fase inflacionária. Apesar do fluido apresentar equação de estado que viole as condições de validade dos teoremas de singularidade desenvolvidos por Penrose e Hawking Ref. [83], pode-se mostrar que a singularidade ainda persiste Ref. [86]. Da mesma forma, mesmo num regime semi-clássico aonde a função de onda do Universo é descrita por um pacote em torno de uma solução WKB, não se consegue tampouco eliminar a singularidade. Neste caso, o valor esperado do fator de escala apresenta variações da evolução clássica, porém segue inevitavelmente para a singularidade desde que a aproximação seja válida até o final.

No entanto, a singularidade não é inevitável, e, de fato, como mostraremos nesta tese, é possível construirmos modelos não singulares.

Concluimos assim esta breve revisão sobre as características gerais dos modelos inflacionários. As questões aqui levantadas servem como motivação e cautela para a análise subsequente.

Capítulo 4

Modelos de Universos Não-Singulares

*“The limits of my language mean
the limits of my world.”*

- Tractatus Logico-Philosophicus -

Ludwig Wittgenstein

A cosmologia ganhou prestígio como prática científica durante o século XX com a convergência de trabalhos que moldaram o que conhecemos como o modelo padrão da cosmologia. Hoje em dia, podemos considerar este modelo padrão como composto basicamente do modelo do “Big Bang” acrescido de uma fase inflacionária anterior a nucleossíntese.

Apesar disto, concomitantemente a seu desenvolvimento, existe uma série de propostas alternativas a seus paradigmas, tanto se baseando em teorias alternativas a TRG como, por exemplo, as teorias de Brans-Dicke Ref.[87], quanto modelos de Universo eterno, como é o caso do modelo de estado estacionário (“steady-state”) muito apreciado por Fred Hoyle Ref.’s[88, 89] .

Seguindo esta linha de investigação, em paralelo à aceitação majoritária de que a evolução para o passado do Universo deveria levar a uma singularidade, foram propostos na literatura vários modelos não singulares Ref.’s [90, 91]. É evidente que estes modelos violam de uma maneira ou de outra as hipóteses dos teoremas de singularidade Ref. [83], mas isto é justamente uma indicação de que estas hipóteses são excessivamente restritivas.

Neste capítulo vamos considerar dois modelos não-singulares para o Universo primordial. Em ambos os casos, a descrição do conteúdo material será dada por um campo escalar. No primeiro caso vamos estudar um Universo essencialmente clássico que possui soluções com ricochete onde o campo escalar possui um potencial de auto-interação. No segundo caso iremos analisar a quantização do sistema gravitação com campo escalar livre. Para este último sistema encontramos que a evolução do fator de escala, dada pelas trajetórias de Bohm quânticas, diferem fundamentalmente da evolução clássica. Como mostraremos mais adiante, é possível construirmos modelos inflacionários não singulares que apresentam um comportamento semelhante aos modelos de Universo emergente Ref.[92] ou os modelos pré-Big Bang Ref.'s [93]-[95].

4.1 *Campo Escalar Clássico*

4.1.1 Dinâmica do sistema não perturbado

Nesta seção iremos estudar o caso mais simples onde é possível se construir um modelo de ricochete, ou seja, consideraremos um modelo clássico cuja dinâmica é regida por um campo escalar que apresenta um potencial de auto-interação. Para descrever este potencial de auto-interação, escolhemos um potencial advindo de uma quebra espontânea de simetria o qual possui motivação em teorias de grande unificação. Depois de descrever a dinâmica da métrica de fundo e suas características, vamos analisar a evolução das perturbações escalares para este sistema.

O nosso ponto de partida será a ação da TRG com a presença de um campo escalar. Definindo o comprimento de Planck $\ell_{Pl}^2 \equiv \frac{8}{3}\pi G_N$, onde G_N é a constante universal de Newton, a ação do sistema se escreve

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{6\ell_{Pl}^2} - \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - V(\varphi) \right] ,$$

onde $V(\varphi)$ é o potencial de auto-interação para o campo escalar que será especificado mais adiante. A análise que será feita agora não depende da forma do potencial e por isso optamos por deixá-lo genérico enquanto possível.

Assumindo que o Universo é homogêneo e isotrópico, o elemento de linha mais geral é caracterizado apenas pelo fator de escala $a(t)$ e pelo valor da constante que define a curvatura

das seções espaciais, $\mathcal{K} = 0, \pm 1$, ou seja, a curvatura das hipersuperfícies de simultaneidade definidas por $t = \text{constante}$. A partir desta caracterização o elemento de linha se escreve

$$ds^2 = N^2 dt^2 - \frac{a^2(t)}{(1 + \frac{\mathcal{K}}{4} r^2)^2} [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2] \quad .$$

Como já comentado nos capítulos anteriores, o tensor energia-momento do campo escalar é expresso por sua densidade de energia e pressão isotrópica por

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \quad , \quad p = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \quad .$$

Vamos convencionar que derivadas temporais com relação ao tempo cósmico serão representadas por um ponto enquanto que derivadas temporais com relação ao tempo conforme, definido por $dt = a(\eta)d\eta$, serão representadas por um prima de forma que para qualquer função f dependente do tempo temos $f' = af$. A evolução dinâmica deste sistema é dada pelas equações de Einstein complementadas pela equação de Klein-Gordon. A partir de uma combinação conveniente dessas equações, podemos definir este sistema pelas seguintes equações

$$H^2 = \ell_{Pl}^2 \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V \right) - \frac{\mathcal{K}}{a^2} \quad , \quad (4.1)$$

$$\dot{H} = \ell_{Pl}^2 (V - \dot{\varphi}^2) - H^2 \quad , \quad (4.2)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} = 0 \quad , \quad (4.3)$$

onde o fator de Hubble é, como sempre, definido por $H \equiv \dot{a}a^{-1}$. Na realidade, este sistema é bem definido apenas com duas destas equações, o que era de se esperar uma vez que as equações de Einstein são construídas para satisfazer a conservação de energia-momento.

Para uma variedade pseudo-riemanniana, a divergência do tensor de Einstein é automaticamente satisfeita, o que, pelas equações de Einstein, garante que a divergência do tensor energia-momento também se anule. Para o nosso sistema, a equação de Klein-Gordon nada mais é do que a componente temporal da equação de conservação do tensor energia-momento, ou seja, para uma métrica homogênea e isotrópica, a dinâmica gerada pelas equações de Einstein satisfazem automaticamente a equação de Klein-Gordon. De fato, se derivarmos a equação (4.1) com relação ao tempo e utilizarmos as equações (4.1) e (4.2), encontramos a equação de Klein-Gordon (4.3). Combinando as equações acima encontramos as seguintes condições de

energia para o sistema

$$\rho + p = \frac{2}{3\ell_{Pl}^2} \left(\frac{\mathcal{K}}{a^2} - \dot{H} \right) = \dot{\varphi}^2 \quad , \quad (4.4)$$

$$\rho + 3p = -\frac{2}{\ell_{Pl}^2} \left(\dot{H} + H^2 \right) = -\frac{2}{\ell_{Pl}^2} \frac{\ddot{a}}{a} \quad . \quad (4.5)$$

Vemos que a condição de energia nula, definida por $(\rho + p) \geq 0$, é necessariamente satisfeita pois a energia cinética do campo escalar é sempre maior ou igual a zero. Por outro lado, a condição de energia forte, definida por $(\rho + 3p) \geq 0$, será necessariamente violada pelo menos em torno do valor mínimo do fator de escala uma vez que nesta região este deve ser uma função côncava para realizar um ricochete (“bounce”), $\ddot{a} > 0$. O requerimento do ricochete, i.e. pedir que haja um momento quando $\dot{H} > 0$, ainda nos mostra duas outras imposição sobre o sistema. Pela equação (4.4) vemos que a curvatura da seção espacial tem que ser necessariamente positiva, $\mathcal{K} = 1$, e pela equação (4.2) vemos que o campo escalar não pode ser livre, ou seja ele deve apresentar um potencial $V(\varphi) > 0$.

Consideremos então um Universo com seção espacial com curvatura positiva, $\mathcal{K} = 1$. A tri-hipersuperfície espacial tem que ter necessariamente uma topologia fechada a qual assumiremos ser a mais simples, ou seja, vamos assumir que a topologia seja a de uma tri-esfera \mathcal{S}^3 .

As observações atuais nos indicam que a seção espacial do Universo é bem próxima de plana. Se este modelo pretende eventualmente descrever de fato o nosso Universo, vemos que depois do ricochete o campo escalar deve ser capaz de gerar uma fase inflacionária de forma a tornar a curvatura desprezível.

Um Universo com curvatura positiva possui dois comprimentos característicos, a saber, o raio de curvatura, $\lambda_c \equiv \frac{a}{\sqrt{|\mathcal{K}|}}$, e o radio de Hubble, $\lambda_H \equiv H^{-1} = a\dot{a}^{-1}$. O limite de curvatura nula é atingido quando $\lambda_c \gg \lambda_H$, o que pode ser visto pela expressão $\|\Omega - 1\| = \frac{\lambda_H^2}{\lambda_c^2}$, onde Ω é a razão entre a densidade total de energia e a densidade crítica definida por $\rho_c \equiv \ell_{Pl}^{-2} H^2$.

Num modelo de ricochete, é interessante caracterizarmos o sistema a partir de suas propriedades próximas do valor mínimo do fator de escala. Para isto, podemos fazer uma expansão em série de Taylor das variáveis com relação ao tempo neste momento que, por conveniência, será tomado como a origem temporal e, utilizando as equações dinâmicas, relacionarmos os parâmetros do sistema. Este estudo ainda é válido para analisarmos o potencial para as

perturbações escalares já que, sendo uma teoria linear de primeira ordem, o potencial é completamente caracterizado pelas variáveis do fundo - sistema não perturbado.

Para fazermos esta análise é mais conveniente trabalharmos no calibre temporal conforme. Fazendo a expansão do fator de escala, do campo escalar e do potencial deste campo até a quarta ordem em relação ao tempo conforme η encontramos

$$a(\eta) = a_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^2 + \frac{\delta}{3!} \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^3 + \frac{5}{4!} (1 + \xi) \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^4 \right] + \mathcal{O}(\eta^5) \quad , \quad (4.6)$$

$$\varphi(\eta) = \varphi_0 + \varphi'_0 \eta + \frac{1}{2} \varphi''_0 \eta^2 + \frac{1}{3!} \varphi'''_0 \eta^3 + \frac{1}{4!} \varphi^{(IV)}_0 \eta^4 + \mathcal{O}(\eta^5) \quad , \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} V(\varphi) = & V(\varphi_0) + \frac{dV}{d\varphi} \varphi'_0 \eta + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V}{d\varphi^2} \varphi'^2_0 + \frac{dV}{d\varphi} \varphi''_0 \right) \eta^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3V}{d\varphi^3} \varphi'^3_0 + 3 \frac{d^2V}{d\varphi^2} \varphi'_0 \varphi''_0 + \frac{dV}{d\varphi} \varphi'''_0 \right) \eta^3 \\ & + \frac{1}{4!} \left(\frac{d^4V}{d\varphi^4} \varphi'^4_0 + 6 \frac{d^3V}{d\varphi^3} \varphi'^2_0 \varphi''_0 + (3 \varphi''^2_0 + 4 \varphi'_0 \varphi'''_0) \frac{d^2V}{d\varphi^2} + \frac{dV}{d\varphi} \varphi^{(IV)}_0 \right) \eta^4 + \mathcal{O}(\eta^5) . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Esta expansão é válida para tempos $\eta \ll \eta_0$ e foi definida de forma a podermos mais facilmente compará-la à solução de de Sitter. O parâmetro a_0 é o valor mínimo do fator de escala enquanto que o η_0 fornece um tempo característico do ricochete. A solução de um Universo de Sitter com curvatura positiva $\mathcal{K} = 1$, no tempo conforme, é expressa por $a(\eta) = a_0 \sqrt{1 + \tan^2(\eta)}$. Fazendo uma expansão desta solução encontramos $\eta_0 = 1$, $\delta = \xi = 0$. Qualquer desvio destes valores indica uma afastamento do comportamento tipo de Sitter, e por isso definimos os parâmetros do modo acima especificado para que a expansão em série com relação ao tempo conforme possa ser também, de uma certa forma, uma expansão com relação a solução de de Sitter. Podemos ainda definir um último parâmetro Υ de forma que nos forneça o quão próximo estamos de violar a condição de energia nula quando o fator de escala atinja o seu valor mínimo, i.e. definimos

$$\Upsilon \equiv \frac{3\ell_{Pl}^2}{2} \lim_{\eta \rightarrow 0} a^2(\rho + p) = \frac{3\ell_{Pl}^2}{2} \varphi'^2_0 \quad .$$

Usando as expansões (4.6) e (4.8) e seus parâmetros definidos acima, podemos também expandir as outras variáveis dinâmicas como, por exemplo, o fator de Hubble conforme definido por $\mathcal{H} = \frac{a'}{a}$,

$$\mathcal{H} = \frac{\eta}{\eta_0^2} + \frac{\delta}{2!} \frac{\eta^2}{\eta_0^3} + \frac{(2 + 5\xi)}{3!} \frac{\eta^3}{\eta_0^4} + \mathcal{O}(\eta^4) \quad .$$

Essas expressões devem ser utilizadas nas equações dinâmicas que devem ser satisfeitas para cada ordem da expansão. Uma vez que estamos trabalhando com o calibre conforme,

por clareza, vamos re-escrever as equações dinâmicas

$$\mathcal{H}^2 + 1 = \ell_{Pl}^2 \left(\frac{1}{2} \varphi'^2 + a^2 V \right) \quad , \quad (4.9)$$

$$2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + 1 = -3\ell_{Pl}^2 \left(\frac{1}{2} \varphi'^2 - a^2 V \right) \quad , \quad (4.10)$$

$$\varphi'' + 2\mathcal{H}\varphi' + a^2 \frac{dV}{d\varphi} = 0 \quad . \quad (4.11)$$

Em ordem zero na expansão acima, estas equações se tornam

$$1 = \ell_{Pl}^2 \left(\frac{1}{2} \varphi_0'^2 + a_0^2 V \right) \quad , \quad (4.12)$$

$$1 + \frac{2}{\eta_0^2} = -3\ell_{Pl}^2 \left(\frac{1}{2} \varphi_0'^2 - a_0^2 V \right) \quad , \quad (4.13)$$

$$\varphi_0'' + a_0^2 \frac{dV}{d\varphi} = 0 \quad . \quad (4.14)$$

Destas equações podemos derivar as seguintes relações

$$a_0^2 = \frac{2 - \ell_{Pl}^2 \varphi_0'^2}{2\ell_{Pl}^2 V} \quad \therefore \quad a_0^2 = \frac{3 - \Upsilon}{3\ell_{Pl}^2 V} \quad (4.15)$$

$$\eta_0^2 = \left(1 - \frac{3\ell_{Pl}^2 \varphi_0'^2}{2} \right)^{-1} \quad \therefore \quad \Upsilon = 1 - \frac{1}{\eta_0^2} \quad (4.16)$$

Lembrando que $\eta_0^2 \geq 1$, temos então que $0 \leq \Upsilon \leq 1$. Da mesma forma podemos calcular as equações para primeira ordem,

$$\varphi_0' \left(\varphi_0'' + a_0^2 \frac{dV}{d\varphi} \right) = 0 \quad , \quad (4.17)$$

$$\varphi_0' \left(\varphi_0'' - a_0^2 \frac{dV}{d\varphi} \right) + \frac{2\delta}{3\ell_{Pl}^2 \eta_0^3} = 0 \quad , \quad (4.18)$$

$$\varphi_0''' + \left(\frac{2}{\eta_0^2} + a_0^2 \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \right) \varphi_0' = 0 \quad , \quad (4.19)$$

e segunda ordem,

$$\frac{2}{\ell_{Pl}^2 \eta_0^4} = \frac{2a_0^2 V}{\eta_0^2} + \left(a_0^2 \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \varphi_0' + \varphi_0''' \right) \varphi_0' + \left(a_0^2 \frac{dV}{d\varphi} + \varphi_0'' \right) \varphi_0'' \quad , \quad (4.20)$$

$$\frac{6 + 10\xi}{3\ell_{Pl}^2 \eta_0^4} = \frac{2a_0^2 V}{\eta_0^2} + \left(a_0^2 \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \varphi_0' - \varphi_0''' \right) \varphi_0' + \left(a_0^2 \frac{dV}{d\varphi} - \varphi_0'' \right) \varphi_0'' \quad , \quad (4.21)$$

$$\varphi_0^{(IV)} + \frac{2a_0^2}{\eta_0^2} \frac{dV}{d\varphi} + \left(2\frac{\delta}{\eta_0^3} + a_0^2 \frac{d^3 V}{d\varphi^3} \varphi_0' \right) \varphi_0' + \left(\frac{4}{\eta_0^2} + a_0^2 \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \right) \varphi_0'' = 0 \quad . \quad (4.22)$$

Combinando essas expressões com os resultados de ordem zero encontramos

$$\delta = \frac{(3 - \Upsilon) \sqrt{\Upsilon}}{3\sqrt{6}\ell_{Pl}(1 - \Upsilon)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{V} \frac{dV}{d\varphi}, \quad (4.23)$$

$$\xi = \frac{2\Upsilon}{5(1 - \Upsilon)^2} \left[2(1 - \Upsilon) + \frac{3 - \Upsilon}{3\ell_{Pl}^2 V} \frac{d^2 V}{d\varphi^2} \right] - \frac{1}{15\ell_{Pl}^2} \left(\frac{3 - \Upsilon}{1 - \Upsilon} \right)^2 \left(\frac{1}{V} \frac{dV}{d\varphi} \right)^2. \quad (4.24)$$

Neste sistema todos os parâmetros da expansão podem ser caracterizados por Υ , pelo potencial V e suas derivadas. Com estas expressões fica claro que não podemos variar esses parâmetros de forma independente e sobretudo com relação a Υ . Os modelos não singulares construídos com este sistema podem ser classificados em dois grupos dependendo se δ , i.e. a_0''' , é igual ou diferente de zero. De acordo com as equações (4.17) e (4.18),

$$\text{se } \delta = 0 \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \varphi'_0 = 0 \quad \longrightarrow \quad \Upsilon = 0 \quad \text{e} \quad \eta_0 = 1 \\ \text{ou} \\ (ii) \quad \varphi''_0 = \frac{dV}{d\varphi} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{ricochete no extremo do potencial} \end{array} \right.$$

(i) Considerando primeiramente o caso $\varphi'_0 = 0$. Se neste mesmo ponto tivermos $\varphi''_0 = 0$ ou $\frac{dV}{d\varphi} = 0$, pela equação de Klein-Gordon, a única possibilidade é a solução de de Sitter onde não há amplificação das perturbações e os únicos modos normais da perturbação escalar que interagem com o potencial para as perturbações são os modos de calibre Ref.'s [43, 96]. A outra possibilidade é $\varphi''_0 = -a_0^2 \frac{dV}{d\varphi} \neq 0$, o que nos mostra que o campo escalar atingiu um ponto de retorno na sua trajetória. Neste caso o campo escalar “sobe” o seu potencial até o ponto crítico $\varphi'_0 = 0$, quando acontece o ricochete, e depois “rola” para baixo do potencial. Neste momento, dependendo das características do potencial V , existe a possibilidade de se criar as condições necessárias para a fase de deslizamento lento (“slow-row”), usada em vários modelos inflacionários. No entanto, como será mostrado mais a frente, o potencial para as perturbações diverge quando $\varphi'_0 \longrightarrow 0$ o que torna a evolução das perturbações através do ricochete singular.

(ii) A condição $\varphi''_0 = 0$ no ricochete impõe sérias restrições sobre a superfície de Cauchy do sistema. A equação de Friedmann (4.1) relaciona a e φ de forma que podemos escrever $\varphi' = \varphi'(a, a', \varphi)$. Com o uso da equação de Klein-Gordon (4.3) podemos expressar $\varphi'' = \varphi''(a, a', \varphi)$ e a partir da eq.(4.2) temos que $a'' = a''(a, a', \varphi)$. O espaço de configuração das condições iniciais é bi-dimensional pois apesar de poder ser expandido nas variáveis a , a' e φ , a equação de Friedmann, sendo uma equação de vínculo, reduz o espaço a uma superfície

bi-dimensional. Uma vez que o sistema é determinístico, podemos, sem perda de generalidade, escolher as condições iniciais no momento do ricochete. A condição $\frac{dV}{d\varphi} = 0$, em geral, fixa o valor de φ_0 , ou minimamente estabelece uma equação de vínculo do tipo $f(\varphi_0) = 0$. A condição $\varphi_0'' = 0$ em $a_0' = 0$ nos fornece uma outra equação de vínculo do tipo $g(a, \varphi) = 0$. Se impusermos estas condições, o domínio de condições iniciais se reduz a um conjunto discreto de sub-espacos unidimensionais.

Esta análise também pode ser feita para o caso (i). Sendo $\varphi_0' = 0$, vemos pela eq.(4.15) que $\varphi = \varphi(a)$ o que, se levado a equação (4.2), implica em $a'' = a''(a)$. Estas condições também reduzem o espaço de configurações para um espaço unidimensional. A única maneira de não recairmos num sub-espaco de medida nula para as condições iniciais é se considerarmos ricochetes assimétricos, $\delta \neq 0$. Nestes casos, se $\varphi_0' \neq 0$, temos que $\varphi_0'' \neq 0$ e $\frac{dV}{d\varphi} \neq 0$ o que faz com que o espaço de configurações tenha um volume finito dependendo apenas da forma funcional de $V(\varphi)$.

Uma última análise qualitativa que podemos fazer antes de entrarmos no estudo das perturbações pode ser derivada pela expansão

$$\begin{aligned} \frac{3\ell_{Pl}^2}{2} \varphi'^2 = \Upsilon - \left[\sqrt{\frac{2\Upsilon}{3\ell_{Pl}^2}} \frac{(3 - \Upsilon) dV}{V d\varphi} \right] \eta + \\ + \left[\left(\frac{3 - \Upsilon}{3\ell_{Pl}^2 V} \frac{dV}{d\varphi} \right)^2 - \frac{2\Upsilon}{3\ell_{Pl}^2} \left(2(1 - \Upsilon) + \frac{3 - \Upsilon}{3\ell_{Pl}^2 V} \frac{d^2V}{d\varphi^2} \right) \right] \frac{\eta^2}{2} + \mathcal{O}(\eta^3) \geq 0 \quad . \end{aligned}$$

Se o ricochete for próximo de ser simétrico, de forma que possamos desprezar os termos $\frac{dV}{d\varphi}$, encontramos uma relação para a segunda derivada do potencial

$$2(1 - \Upsilon) + \frac{3 - \Upsilon}{3\ell_{Pl}^2 V} \frac{d^2V}{d\varphi^2} \leq 0 \quad \implies \quad \frac{d^2V}{d\varphi^2} \leq 0 \quad ,$$

ou seja, próximo do ricochete, o potencial V tem que ser convexo. Esta condição restringe a forma do potencial e também a região onde pode ocorrer o ricochete .

4.1.2 Perturbações escalares

Para descrevermos as perturbações, vamos utilizar o formalismo invariante de calibre de primeira ordem descrito na seção 2.4. Em termos das variáveis invariantes de calibre, a métrica

pode ser escrita como

$$ds^2 = a^2(\eta) \{ (1 + 2\Phi) d\eta^2 - (1 - 2\Psi) \gamma_{ij} dx^i dx^j \}.$$

Uma vez que a matéria esta sendo descrita por um campo escalar e que não temos nenhuma contribuição anisotrópica ao tensor energia-momento perturbado $\delta T^i_j \propto \delta^i_j$, podemos fixar $\Phi = \Psi$. Como vimos anteriormente, as equações de Einstein perturbadas em primeira ordem nos levam a equação para o potencial de Bardeen,

$$\Phi'' + 2 \left(\mathcal{H} - \frac{\varphi''}{\varphi'} \right) \Phi' - \nabla^2 \Phi + 2 \left(-2\mathcal{K} + \mathcal{H}' - \mathcal{H} \frac{\varphi''}{\varphi'} \right) \Phi = 0 \quad . \quad (4.25)$$

Uma vez que estamos considerando o caso com curvatura positiva, $\mathcal{K} = 1$, o número de onda comóvel, k , assume um espectro discreto dado por $k^2 = n(n+2)$ com $n \in \mathbb{N}$. Os inteiros n são os auto-valores do operador de Laplace-Beltrami definido com a métrica de fundo

$$\Delta \xi_n = -n(n+2) \xi_n \quad .$$

Os dois primeiros valores $n = 0$ e 1 representam dois modos de puro calibre sem nenhum significado físico Ref.'s [97, 98]. O autovalor $n = 0$ está associado a uma deformação homogênea enquanto que o autovalor $n = 1$ está associado a uma translação global do centro da 3-esfera.

Embora a equação para a evolução do potencial de Bardeen (4.25) seja bem comportada através do ricochete, $\mathcal{H} = 0$, ela não é bem definida para regiões onde $\varphi' = 0$. Vamos mostrar que este problema persiste mesmo quando consideramos a variável de Mukhanov-Sasaki Ref.'s [99]-[101] definida por

$$v \equiv \frac{\mathcal{H}z}{\varphi'} \left[\delta\varphi + \left(\frac{\varphi'}{\mathcal{H}} - \frac{2\mathcal{K}}{3\ell_{Pl}^2 \mathcal{H}\varphi'} \right) \Phi \right] \quad , \quad (4.26)$$

com

$$z \equiv \frac{a\varphi'}{\mathcal{H} \sqrt{1 - 3\mathcal{K} \frac{(1-c_s^2)}{n(n+2)}}} \quad , \quad (4.27)$$

$$c_s^2 = -\frac{1}{3} \left(1 + 2 \frac{\varphi''}{\mathcal{H}\varphi'} \right) \quad . \quad (4.28)$$

Com relação a esta nova variável a equação (4.25) se escreve

$$v'' + [k^2 - V_v] v = 0 \quad , \quad (4.29)$$

onde definimos,

$$V_v \equiv \frac{z''}{z} + 3\mathcal{K}(1 - c_s^2) \quad . \quad (4.30)$$

Se considerarmos o caso plano, $\mathcal{K} = 0$, esta equação pode ser re-escrita na forma

$$v'' + \left(k^2 - \frac{z_0''}{z_0}\right) v = 0 \quad , \quad (4.31)$$

$$z_0 \equiv \frac{a\varphi'}{\mathcal{H}} \quad , \quad (4.32)$$

a qual é bem definida no limite $\varphi' \rightarrow 0$.

A equação (4.25) é bem definida através do ricochete quando $\mathcal{H} \rightarrow 0$ porém tem divergências no limite $\varphi' \rightarrow 0$ enquanto que a equação (4.31) é bem definida quando $\varphi' \rightarrow 0$ e possui divergências através do ricochete quando $\mathcal{H} \rightarrow 0$. De fato, pode-se mostrar que no limite $\varphi' \rightarrow 0$, a terceira derivada φ''' também vai a zero de forma que a razão φ'''/φ' se mantém finita o que claramente não pode acontecer com φ'' . No caso com curvatura $\mathcal{K} \neq 0$, após algumas manipulações algébricas, encontramos que o potencial equação (4.30) diverge no limite $\varphi' \rightarrow 0$

$$V_v \xrightarrow{\varphi' \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 \rightarrow \infty \quad .$$

Outra variável comumente utilizada para descrever as perturbações escalares pode ser definida por

$$u \doteq \frac{2}{3\ell_{Pl}^2 (\rho + p)^{1/2}} \Phi = \frac{2}{3\ell_{Pl}} \frac{a^2 \theta}{\mathcal{H}} \Phi \quad , \quad (4.33)$$

$$\theta \doteq \frac{1}{a} \sqrt{\left(\frac{\rho}{\rho + p}\right) \left(1 - \frac{\mathcal{K}}{\ell_{Pl}^2 \rho a^2}\right)} \quad . \quad (4.34)$$

A sua equação de evolução se escreve

$$u'' + (k^2 - V_u) u = 0 \quad , \quad (4.35)$$

onde definimos o potencial dependente do tempo V_u por

$$V_u \equiv \frac{\theta''}{\theta} + 3\mathcal{K}(1 - c_s^2) = 4 - \mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 - \frac{\varphi'''}{\varphi'} + 2 \left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 \quad , \quad (4.36)$$

de forma que no limite $\varphi' \rightarrow 0$ este potencial também diverge. A vantagem desta variável com relação à de Mukhanov-Sasaki é que ela é bem definida através do ricochete.

Resumindo, considerando o caso com curvatura, $\mathcal{K} \neq 0$, o potencial de Bardeen e a variável u são bem definidas ao longo do ricochete porém o potencial para a variável v diverge. No limite $\varphi' \rightarrow 0$, que ocorre, por exemplo, durante a fase de re-aquecimento quando o campo escalar oscila em torno do mínimo do potencial, nenhuma destas variáveis é bem definida. Para o caso plano, $\mathcal{K} = 0$, a análise do potencial de Bardeen e da variável u não se altera. A única diferença é que agora a variável v é bem definida no limite $\varphi' \rightarrow 0$, embora ela ainda não o seja através do ricochete.

É razoável pensarmos que deva haver alguma outra generalização para o caso curvo onde uma nova variável \tilde{v} seja bem definida e possa descrever o regime de re-aquecimento. Porém, até o momento, ainda não conseguimos encontrar esta generalização.

Antes de especificarmos um potencial de auto-interação para o campo escalar e analisarmos a sua evolução, apresentaremos um último resultado que é independente da forma explícita do potencial. Se supusermos que o sistema possua duas fases de deslizamento lento, uma na fase de contração e a outra na fase de expansão, o potencial para a variável u , dado pela equação (4.36), pode ser aproximado por

$$V_u \approx a^2 H^2 (2\varepsilon - \delta + 2\varepsilon^2 + \delta^2 - 3\varepsilon\delta - \xi) \quad , \quad (4.37)$$

onde os parâmetros de deslizamento lento são definidos por Ref.'s [70, 71]

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad , \quad \delta \equiv -\frac{\ddot{\varphi}}{H\dot{\varphi}} = -\frac{\dot{\varepsilon}}{2H\varepsilon} + \varepsilon \quad , \quad \xi \equiv \frac{\dot{\varepsilon} - \dot{\delta}}{H} \quad , \quad (4.38)$$

Neste regime, o potencial antes do ricochete (V_u^-) e depois do ricochete (V_u^+) pode ser escrito como

$$V_u^\pm = \frac{\alpha_\pm^2}{(\eta - \eta_\pm)^2} \quad ,$$

onde η_\pm são os limites assintóticos a esquerda e a direita do ricochete. Podemos definir estes limites assintóticos por,

$$\eta_\pm = \int_0^{\pm\infty} \frac{dt}{a} \quad (4.39)$$

No caso específico de um Universo de de Sitter teríamos $\eta_\pm = \pm\frac{\pi}{2}$. Os índices α_\pm são definidos a partir dos parâmetros de deslizamento lento ε_\pm , δ_\pm e ξ_\pm por

$$4\alpha_\pm^2 = 1 + 4 (2\varepsilon_\pm - \delta_\pm + 2\varepsilon_\pm^2 + \delta_\pm^2 - 3\varepsilon_\pm\delta_\pm - \xi_\pm) \quad ,$$

os quais para pequenos valores dos parâmetros pode ser aproximado por

$$\alpha_{\pm} \simeq \frac{1}{2} + (2\varepsilon_{\pm} - \delta_{\pm} + 2\varepsilon_{\pm}^2 + \delta_{\pm}^2 - 3\varepsilon_{\pm}\delta_{\pm} - \xi_{\pm}) \quad . \quad (4.40)$$

4.1.3 Potencial massivo com termo $\lambda\varphi^4$

Tendo descrito as propriedades gerais do sistema da maneira mais geral possível, vamos agora analisar a evolução do fator de escala e do campo escalar para uma escolha específica de potencial. O potencial que será usado tem motivação na física de altas energias e teorias de grande unificação, advindo, por exemplo, de uma quebra espontânea de simetria, como mostra a figura (4.1) e definido por

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \Lambda \quad . \quad (4.41)$$

Os parâmetros m e λ são respectivamente a massa e o parâmetro de auto-interação do campo escalar, enquanto que Λ além de definir a altura do potencial em $\varphi = 0$, dependendo do valor dos parâmetros, pode funcionar como uma constante cosmológica caso φ esteja no mínimo do potencial.

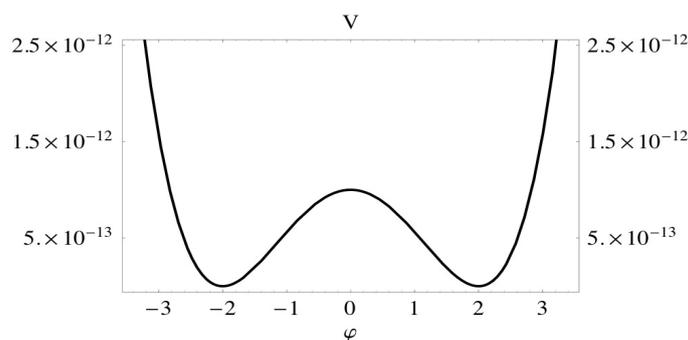


Figura 4.1: Potencial de auto-interação para valores dos parâmetros em unidades de Planck $\Lambda = 10^{-12}$, $m = 10^{-6}$ e $\lambda = \frac{3}{2} \frac{m^4}{\Lambda}$.

A evolução dinâmica será estudada com o auxílio de integração numérica e, por motivos de convergência numérica, privilegiaremos o calibre de tempo cósmico. Assim, embora para

o estudo analítico do sistema seja geralmente mais conveniente escrevermos as equações no calibre de tempo conforme, os resultados numéricos serão expressos com relação ao tempo cósmico.

Os resultados anteriores nos mostram que, para o potencial em questão, o sistema poderá apresentar um ricochete quando o campo escalar φ estiver na região próxima do máximo do potencial centrado em $\varphi = 0$. Se considerarmos um ricochete assimétrico, onde $a_0''' \neq 0$ (parâmetro δ da expansão de Taylor do fator de escala em torno do seu valor mínimo), existe um volume finito no espaço de fase de ocorrência de modelos de ricochetes Ref. [102]. Isto é importante para a validação destes modelos no sentido de que a sua probabilidade de ocorrência não seja nula.

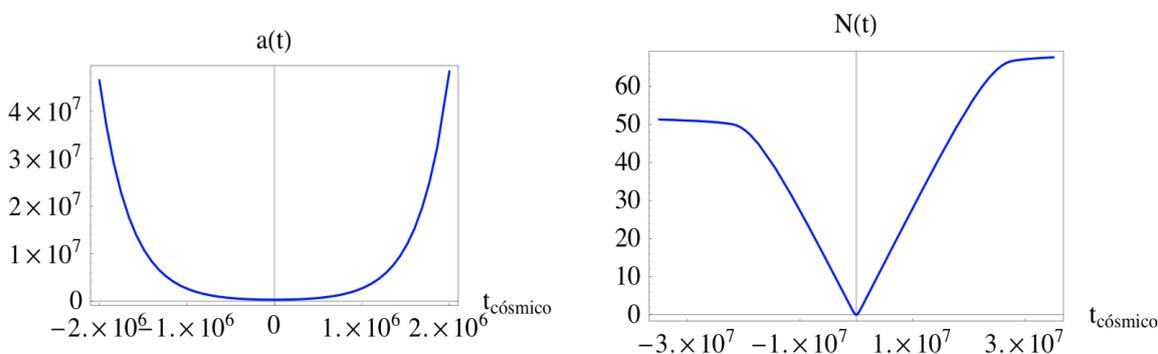


Figura 4.2: O gráfico da esquerda mostra a evolução do fator de escala com relação ao tempo cósmico. Podemos observar que de fato o sistema realiza um ricochete e o fator de escala atinge um valor mínimo de $a_0 \approx 3,3 \times 10^5$. O gráfico da direita nos mostra a evolução temporal do número de “e-fold’s” definido por $N(t) \equiv \log\left(\frac{a(t)}{a_0}\right)$. Naturalmente o número de “e-fold’s” dependerá dos parâmetros do potencial mas também das condições iniciais dadas ao sistema. Para esta evolução, por conveniência, escolhemos como condições iniciais os valores $\varphi_0 \approx -4 \times 10^{-2}$ e $\dot{\varphi}_0 \approx 4,5 \times 10^{-7}$. Com estes valores conseguimos gerar o número mínimo de “e-fold’s” para resolver os problemas de homogeneidade e planeza.

Uma característica comum a estes modelos é a presença de uma fase de contração quase-exponencial seguida de uma fase de expansão quase-exponencial, i.e. fases inflacionárias. Os gráficos (4.2)-(4.4) mostram um exemplo deste tipo de Universo não singular com ricochete. Todos esses gráficos foram gerados com os valores dos parâmetros em unidades de Planck dados por $\Lambda = 10^{-12}$, $m = 10^{-6}$ e $\lambda = \frac{3}{2} \frac{m^4}{\Lambda}$.

Podemos perceber pelos gráficos que a evolução é de fato não singular. Com uma escolha apropriada das condições iniciais podemos gerar um número suficiente de “e-fold’s”. Na realidade, neste tipo de sistema, o número de “e-fold’s” não é uma restrição forte pois variando-se

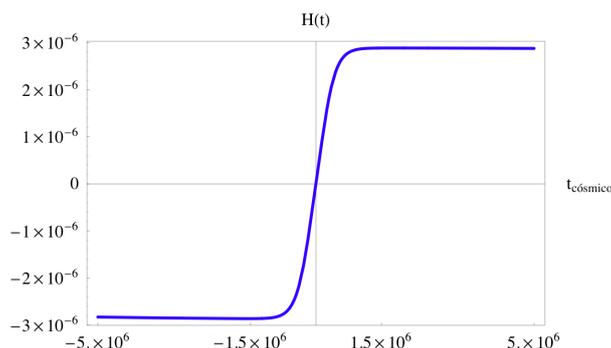


Figura 4.3: Este gráfico mostra a evolução do fator de Hubble definido por $H \equiv \dot{a}a^{-1}$. O fato do fator de Hubble ser quase constante nos mostra que o sistema se comporta com duas fases tipo de Sitter onde o fator de escala evolui de forma quase-exponencial, a primeira sendo uma contração e a segunda uma expansão tipo de Sitter. Estas duas fases apresentam as características de deslizamento lento que são comuns aos modelos inflacionários.

as condições iniciais é possível produzirmos uma faixa bem grande de “e-fold’s” sem comprometer a estabilidade do sistema. Por estabilidade me refiro a conseguir evoluir o sistema sem que o fator de escala vá a zero uma vez que estamos procurando soluções não singulares.

Próximo do mínimo do fator de escala observamos, pelo gráfico (4.3), que o comportamento é de fato quase-exponencial. Antes do ricochete o sistema se comporta com uma fase de contração e depois com uma fase de expansão ambas do tipo de Sitter com o fator de Hubble quase constante.

Se o ricochete for assimétrico, como é o exemplo em questão, o fato das seções espaciais serem bem próximas de planas pode ser entendida como a afirmação de que a fase de expansão acelerada é bem mais longa do que a fase de contração. Lembrando da expressão para a variação temporal do parâmetro de densidade,

$$\frac{d}{dt} \|\Omega - 1\| \propto -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^3} \quad ,$$

vemos que para um fase de contração acelerada, onde $\ddot{a} > 0$ e $\dot{a} < 0$, o parâmetro de densidade se afasta de 1, porém para a fase de expansão acelerada, onde $\ddot{a} > 0$ e $\dot{a} > 0$, o parâmetro de densidade se aproxima de 1, de forma que se a fase de expansão for mais longa do que a de contração o resultado final será tornar as seções espaciais mais planas.

A evolução do campo escalar é descrita pelo gráfico (4.4), onde podemos perceber que a fase de contração é capaz de fornecer energia ao campo escalar e assim impulsioná-lo através

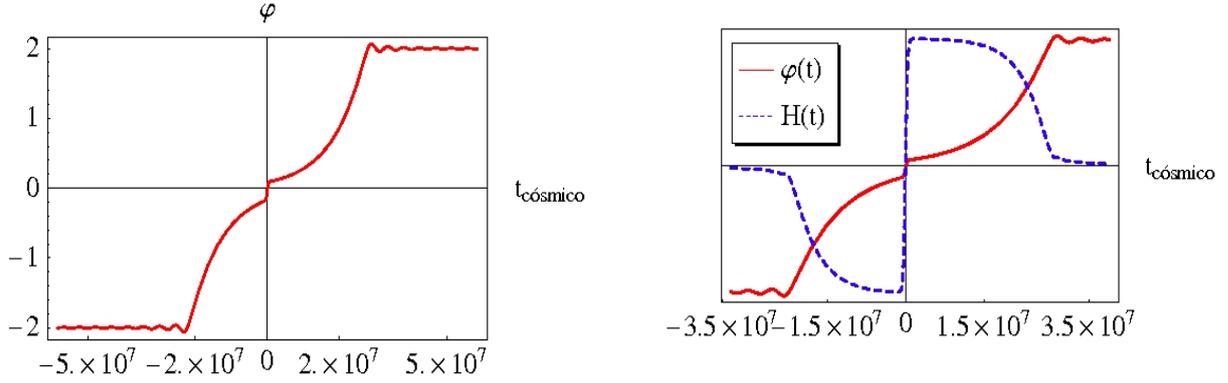


Figura 4.4: O gráfico da esquerda mostra a evolução temporal com relação ao tempo cósmico do campo escalar. No passado remoto o campo escalar se encontra no mínimo do potencial e, devido ao termo de fricção da equação de Klein-Gordon, a fase de contração do fator de escala fornece energia suficiente para que ele consiga transpor o máximo do potencial fig.(4.1). Uma vez do outro lado do potencial, quando o fator de escala já se encontra em expansão, o termo de fricção tem sinal contrário retirando energia do campo escalar que oscila até terminar no outro mínimo do potencial. O gráfico da direita é uma superposição da evolução do fator de Hubble e do campo escalar para mostrar como esta associado o comportamento de ambos e as fases tipo de Sitter caracterizadas por $\dot{H} \approx 0$.

do máximo de seu potencial, figura (4.1) em $\varphi = 0$. No passado remoto o campo escalar se encontra no mínimo do potencial e devido ao termo de fricção na equação de Klein-Gordon, com o passar do tempo, ele oscila ganhando energia até atingir o máximo do potencial quando o sistema realiza o ricochete e o termo de fricção na equação de Klein-Gordon troca de sinal. Uma vez do lado direito do máximo, ele perde novamente energia oscilando em torno do mínimo do potencial até finalmente retornar ao repouso.

Nesta evolução o campo escalar começa e termina num estado de mínima energia¹.

A riqueza desta dinâmica nos estimula a propormos um sistema que seja composto apenas por um campo escalar clássico que faça com que o fator de escala realize um ricochete e neste sistema estudarmos a evolução das perturbações escalares em primeira ordem. Para podermos descrever completamente este sistema, temos que ser capazes de encontrar condições tais que possamos propor condições iniciais para as perturbações de uma maneira consistente.

Como já mencionado, a variável u é a mais adequada para descrevermos o sistema através de um ricochete. No entanto, uma vez que o nosso sistema apresenta regiões onde o campo escalar oscila em torno do mínimo de seu potencial, i.e. o campo passa várias vezes pelo ponto

¹Optamos por não usar o termo estado de vácuo para não haver confusão com os modelos que usam campos escalares quânticos.

$\varphi' = 0$, somos forçados a descrevermos as perturbações tanto no passado quanto no futuro remoto através da variável de Mukhanov-Sasaki “ v ”.

Nestas regiões, a curvatura é desprezível devido ao comportamento quase-exponencial. Numa proposta pragmática, poderíamos supor que nestas fases o sistema é efetivamente plano de forma que poderíamos usar a equação eq.(4.31), caso plano $\mathcal{K} = 0$, para o potencial de Mukhanov-Sasaki, a qual pode ser re-escrita

$$v'' + \left[k^2 + a^2 \frac{d^2 V}{d\varphi^2} + 2 \frac{\mathcal{H}''}{\mathcal{H}} - \left(\frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}} \right)^2 + \mathcal{H}' - 5\mathcal{H}^2 \right] v = 0 \quad .$$

Examinando esta expressão percebemos que antes da fase de contração e depois da fase de expansão quase-exponencial, quando o fator de escala é extremamente grande, para qualquer valor não nulo do termo $\frac{d^2 V}{d\varphi^2}$, é o termo $a^2 \frac{d^2 V}{d\varphi^2}$ que domina. Não encontrando nenhuma região onde tenhamos $k^2 \gg V_v$, não somos capazes de propor nenhuma condição inicial que não seja completamente arbitrária.

Na realidade, a situação é ainda mais grave. O argumento de podermos considerar o sistema como plano longe do ricochete não é necessariamente válido. Quando $\varphi' \neq 0$, podemos seguramente desprezar os termos de curvatura devido ao crescimento exponencial do fator de escala. Porém, quando $\varphi' \rightarrow 0$ temos que tomar simultaneamente os limites $a \rightarrow \infty$ e $\varphi' \rightarrow 0$ sempre respeitando as equações dinâmicas e de vínculos. Para levarmos este raciocínio adiante teríamos que mostrar que os termos proporcionais à curvatura vão mais rapidamente a zero do que as divergências associadas ao termo $\varphi' \rightarrow 0$.

Esta argumentação reforça o fato de que não podemos considerar este sistema como um sistema completo. Apesar deste sistema poder ser considerado apropriado para a evolução das perturbações escalares através de um ricochete, precisamos supor que a sua validade seja limitada a uma determinada faixa temporal que exclua o regime em que o campo escalar oscila em torno do mínimo do potencial.

No entanto, este fato não é necessariamente um problema pois poderíamos imaginar que a fase dominada pelo campo escalar poderia ter sido antecedida por uma fase dominada, por exemplo, pela radiação. Neste caso, sabemos que o potencial para as perturbações vai a zero de forma que a condição necessária para estabelecermos as condições iniciais, $k^2 \gg V_v$, é satisfeita. Embora este sistema não seja capaz de propor um espectro primordial para as perturbações escalares, podemos estudar como elas se comportam ao passar através de um

ricochete.

4.1.4 Matriz de transferência através de um ricochete

Uma vez que não temos um modelo que descreva a fase anterior à dominada pelo campo escalar, para estudarmos a evolução das perturbações através do ricochete, precisamos de alguma forma dar condições iniciais para as perturbações. Para isto, vamos usar o fato de que durante a fase de deslizamento lento o potencial de Bardeen Φ é constante para comprimentos de onda muito maiores do que o raio de Hubble, $k^2 \ll aH$, de forma que $\dot{\Phi} = 0$.

Propor uma dependência em k para o potencial de Bardeen neste momento, ou seja, propor um espectro inicial para as perturbações antes do ricochete parece muito artificial e contrário a proposta de estabelecermos as condições iniciais a partir de conceitos básicos. No entanto, nesta fase sabemos qual deve ser o comportamento do potencial de Bardeen e assim podemos carregar a nossa ignorância definindo-o como

$$\Phi \propto \mathcal{C}(k) \left[1 - \frac{H}{a} \int_{\tilde{t}_0}^t a dt \right] , \quad (4.42)$$

onde \tilde{t}_0 é uma constante que deve ser determinada pela dinâmica da fase de contração anterior, e toda a dependência de Φ em k está codificada na função indeterminada $\mathcal{C}(k)$.

Utilizando a expressão (4.33) que relaciona o potencial de Bardeen à variável u , podemos estabelecer como condição inicial para evolução do sistema a expressão

$$u = \frac{2\theta}{3} \mathcal{C}(k) \left[\frac{a^2}{\mathcal{H}} - \int_{\eta_*}^{\eta} a^2 d\eta \right] . \quad (4.43)$$

Numa fase de contração quase-exponencial, onde a condição de deslizamento lento é satisfeita, podemos expandir o tempo conforme pela série

$$\begin{aligned} \eta &= \int \frac{dt}{a} = \int \frac{da}{a^2 H} = -\frac{1}{aH} + \int da \frac{\varepsilon}{a^2 H} = \\ &= -\frac{(1+\varepsilon)}{aH} + \int \frac{da}{a^2 H} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{H} + \varepsilon^2 \right) \approx -\frac{(1+\varepsilon-2\delta\varepsilon+3\varepsilon^2)}{aH} . \end{aligned}$$

Com o uso desta expressão, podemos aproximar a eq.(4.43) por

$$u = -\frac{2\theta}{3H^2\eta} \mathcal{C}(k) \left[1 + \left(\frac{\eta}{\eta_*} - 1 \right) (1 + \varepsilon + 3\varepsilon^2 - 2\delta\varepsilon) \right] (1 + \varepsilon + 3\varepsilon^2 - 2\delta\varepsilon) , \quad (4.44)$$

de forma que podemos dar como condição inicial para esta variável u

$$u_i = \frac{2a}{\varphi'} \mathcal{C}(k)$$

Antes da fase de contração e depois da fase de expansão quase-exponencial, o termo de curvatura pode ser desprezado na definição da perturbação de curvatura (2.56) e assim temos que

$$\zeta_{BST} \approx \zeta = \frac{\mathcal{H}}{a\varphi'} \left(u' + \frac{\varphi''}{\varphi'} u \right) + \frac{1}{2} \frac{\varphi'}{a} u \quad .$$

A partir desta expressão, fica claro que neste regime a única dependência em k da perturbação de curvatura ζ é a mesma que da variável u . Assim, ao determinarmos a função de transferência para a variável u , estaremos ao mesmo tempo estabelecendo a dependência em k da função de transferência para a perturbação de curvatura ζ_{BST} . Em geral, no regime em questão, o potencial de Bardeen pode ser escrito como a soma de dois termos: um dominante (D) e o outro sub-dominante (S). A matriz de transferência através de um ricochete pode ser definida como a matriz que conecta os modos antes do ricochete, D_- e S_- , com os modos depois do ricochete, D_+ e S_+ , ou seja,

$$\begin{pmatrix} D_+ \\ S_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_- \\ S_- \end{pmatrix} \quad .$$

Se esta matriz não for diagonal, temos então uma mistura dos modos crescentes e decrescente.

O modelo de ricochete que estamos considerando pode ser caracterizado por 3 fases distintas. A primeira fase consiste no período de contração quase-exponencial enquanto que a terceira no período de expansão quase-exponencial. Em ambas, como veremos logo em seguida, o potencial para as perturbações escalares é tal que as soluções para u são simplesmente funções de Bessel com o índice dependente dos parâmetros de deslizamento lento.

A fase intermediária, o ricochete propriamente dito, tem que ser tratado de maneira separada pois é nesta região que o sistema se distâcia do comportamento quase-de Sitter. Para estudarmos este período, vamos utilizar a expansão em série de Taylor a partir do ricochete e analisar como se comporta o potencial para as perturbações a partir dos parâmetros definidos nas eq.'s (4.15), (4.16), (4.23) e (4.24). O valor do potencial para a variável u , eq. (4.36), no ricochete pode ser escrito

$$V_{u0} = 3 + \Upsilon + \frac{27\delta^2}{\Upsilon^2} (1 - \Upsilon)^3 + \frac{5\xi}{2\Upsilon} (1 - \Upsilon)^2 = (5 - \Upsilon) + \frac{(3 - \Upsilon)}{3\ell_{Pl}^2 V} \frac{d^2 V}{d\varphi^2} + \frac{(3 - \Upsilon)^2}{3\ell_{Pl}^2 \Upsilon} \left(\frac{1}{V} \frac{dV}{d\varphi} \right)^2 \quad . \quad (4.45)$$

Para que este potencial tenha relevância na evolução através do ricochete é preciso que sua amplitude seja significativa com relação ao termo k^2 . Analisando a eq. (4.45), vemos que isto ocorre caso $\Upsilon \rightarrow 0$ ou se os termos $\frac{d^2V}{d\varphi^2}$ ou $\frac{dV}{d\varphi} \gg 1$.

A primeira possibilidade $\Upsilon \rightarrow 0$ aparece devido à presença de um termo inversamente proporcional a Υ . No entanto, este mesmo termo é proporcional a $\frac{dV}{d\varphi}$ o que para um ricochete simétrico é identicamente nulo. Caso tenhamos um ricochete assimétrico, onde $\delta \neq 0$, o limite $\Upsilon \rightarrow 0$ implica em $\delta \rightarrow 0$ e $\varphi' \rightarrow 0$, levando o sistema a uma configuração onde as perturbações não são bem definidas.

Consideremos, então, a outra possibilidade. A partir da definição do potencial de auto-interação do campo escalar, equação (4.41), temos que

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{d\varphi} = \left[\frac{\varphi}{4} + \frac{3(m^2\varphi^2 - 4\Lambda)}{12m^2\varphi - 2\lambda\varphi^3} \right]^{-1}, \quad (4.46)$$

$$\frac{1}{V} \frac{d^2V}{d\varphi^2} = \left(\frac{\varphi^2}{12} - \frac{5m^2}{6\lambda} - \frac{6\lambda\Lambda - 5m^4}{6\lambda m^2 - 3\lambda^2\varphi^2} \right)^{-1}, \quad (4.47)$$

de forma que se o campo for para um dos limites

$$\varphi \rightarrow \pm \sqrt{\frac{6m^2}{\lambda} \pm \frac{2(9m^4 - 6\Lambda\lambda)^{1/2}}{\lambda}}, \quad (4.48)$$

o potencial para as perturbações irá apresentar um pico central significativo no ricochete.

No entanto, para tempos muito menores do que o momento do ricochete, o campo escalar se encontra no mínimo do potencial e pela equação de Friedmann (4.1), vemos que o mínimo do potencial tem que ser positivo definido, $V_{\min} > 0$. V_{\min} é definido como o valor do potencial quando o campo φ se encontra no mínimo do potencial, i.e. por $\varphi_{\min} = \pm \sqrt{\frac{6m^2}{\lambda}}$, de forma que $V_{\min} = \Lambda - \frac{3m^4}{2\lambda} > 0$ implica na relação $\lambda > \frac{3m^4}{2\Lambda}$. Por outro lado, para que φ seja uma variável real, pela equação (4.48), temos que $\lambda \leq \frac{3m^4}{2\Lambda}$. Estes dois limite não sendo compatíveis, vemos que a amplitude do potencial no momento do ricochete não pode ser significativa.

Uma outra maneira de entendermos este resultado é analisando as equações (4.1) e (4.2). A condição eq.(4.48) é equivalente a requerermos que o potencial se anule neste ponto. No momento do ricochete, quando $H = 0$, vemos que pela equação (4.1) que se o potencial se anular, a velocidade do campo não pode se anular, i.e. $\dot{\varphi} \neq 0$. No entanto, pela equação (4.2), caso H e $V \rightarrow 0$, teremos necessariamente $\dot{H} < 0$. Este resultado contrasta com a condição de

ricochete $\dot{H} > 0$. Por este outro raciocínio, encontramos novamente que não é possível termos um potencial significativo no ricochete para nenhum valor dos parâmetros.

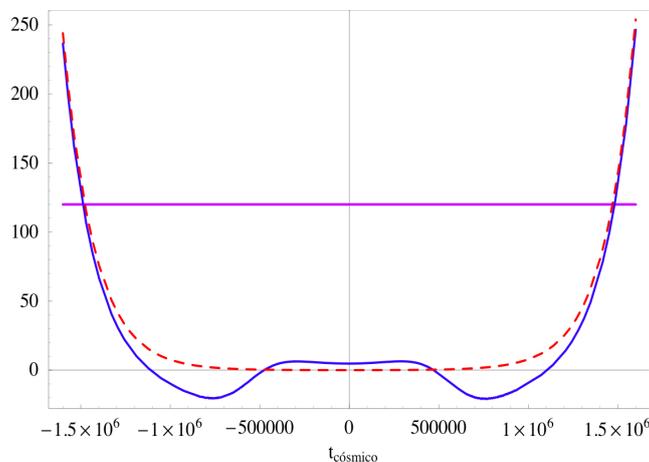


Figura 4.5: Gráfico do potencial para perturbação em torno do ricochete. A linha azul cheia representa a integração numérica da expressão completa para o potencial, equação (4.36), enquanto que a linha vermelha tracejada a expressão aproximada dada pela equação (4.37). Note que logo que as fases quase-exponenciais começam, $t \sim \pm 1.5 \times 10^6$, a expressão aproximada é uma ótima aproximação. A reta em torno de 120 representa o termo k^2 para um valor de $n = 10$. Percebemos que na região próxima ao ricochete é este termo que domina.

Com esta análise concluímos que os efeitos oriundos do potencial na região próxima do ricochete não são relevantes para o estudo da evolução das perturbações através do ricochete. A possível influência do ricochete deve então acontecer nas fases de expansão e contração e nas relações entre os parâmetros de deslizamento lento antes e depois do ricochete.

Tendo estes três períodos em mente, podemos decompor a evolução da variável u em três períodos nos quais o seu comportamento será descrito por funções de Bessel, caso esteja numa fase de deslizamento lento, ou por um comportamento oscilatório, quando atravessar o ricochete. Fazendo a junção destes três períodos, podemos construir a função de transferência e assim encontrar como deve se modificar o espectro através do ricochete.

Na fase de deslizamento lento antes do ricochete, iremos descrever a variável u por

$$u(\eta) = \sqrt{k(\eta - \eta_-)} \{A_1 J_{\alpha_-} [k(\eta - \eta_-)] + A_2 J_{-\alpha_-} [k(\eta - \eta_-)]\} \quad , \quad (4.49)$$

onde,

$$A_1 = \frac{2^{-2+\alpha_-} \pi [k(\eta_* - \eta_-)]^{-1/2-\alpha_-} [u_i(2\alpha_- - 1) + 2u'_i(\eta_* - \eta_-)] \csc(\pi\alpha_-)}{\Gamma(1 - \alpha_-)} \quad , \quad (4.50)$$

$$A_2 = -2^{-2-\alpha_-} [k(\eta_* - \eta_-)]^{-1/2+\alpha_-} [u_i(2\alpha_- + 1) - 2u'_i(\eta_* - \eta_-)] \Gamma(-\alpha_-) \quad . \quad (4.51)$$

Os parâmetros η_{\pm} e α_{\pm} foram definidos nas equações (4.39) e (4.40). Para escrevermos estas constantes A_1 e A_2 em termos dos valores iniciais u_i e u'_i assim como, posteriormente, para fazermos a junção entre as fases de diferentes comportamento para u , utilizamos as expressões para o comportamento assintótico das funções de Bessel,

$$J_\nu(x) \approx \frac{1}{\Gamma(1 + \nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \quad x \rightarrow 0 \quad ,$$

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right] \quad x \rightarrow -\infty \quad .$$

Na outra fase de deslizamento lento, depois do ricochete, teremos o mesmo comportamento

$$u(\eta) = \sqrt{k(\eta - \eta_+)} [B_1(k) J_{\alpha_+}(k(\eta - \eta_+)) + B_2(k) J_{-\alpha_+}(k(\eta - \eta_+))] \quad . \quad (4.52)$$

As constantes B_1 e B_2 podem ser relacionadas com A_1 e A_2 através de duas junções sucessivas. Tomando o limite $k\eta \rightarrow -\infty$, podemos fazer a junção entre a expressão (4.49) com duas ondas planas que descrevem o comportamento de u próximo do ricochete quando $k^2 \gg V_u$. Tendo escrito os coeficientes destas ondas planas em termos de A_1 e A_2 , podemos conectá-las com a nova fase, eq.(4.52), tomando agora o outro limite $k\eta \rightarrow \infty$. Com este procedimento, as constantes B_1 e B_2 podem ser expressas na forma

$$B_1(k) = \csc(\pi\alpha_+) \left\{ A_1 \sin \left[k(\eta_- - \eta_+) + \frac{\pi}{2}(\alpha_+ + \alpha_-) \right] + A_2 \sin \left[k(\eta_- - \eta_+) + \frac{\pi}{2}(\alpha_+ - \alpha_-) \right] \right\} \quad , \quad (4.53)$$

$$B_2(k) = \csc(\pi\alpha_+) \left\{ A_1 \sin \left[k(\eta_+ - \eta_-) + \frac{\pi}{2}(\alpha_+ - \alpha_-) \right] + A_2 \sin \left[k(\eta_+ - \eta_-) + \frac{\pi}{2}(\alpha_+ + \alpha_-) \right] \right\} \quad . \quad (4.54)$$

Destas expressões podemos ler diretamente a matriz de transferência dada por

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \csc(\pi\alpha_+) \begin{pmatrix} \sin \left[k(\eta_- - \eta_+) + \frac{\pi}{2}(\alpha_+ + \alpha_-) \right] & \sin \left[k(\eta_- - \eta_+) + \frac{\pi}{2}(\alpha_+ - \alpha_-) \right] \\ \sin \left[k(\eta_+ - \eta_-) + \frac{\pi}{2}(\alpha_+ - \alpha_-) \right] & \sin \left[k(\eta_+ - \eta_-) + \frac{\pi}{2}(\alpha_+ + \alpha_-) \right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad .$$

Nos limites assintóticos temos que $k\eta \ll 1$. Neste regime, como α_+ é positivo, podemos desprezar o termo B_1 já que ele está associado ao termo $(k\eta)^{1/2+\alpha_+}$ enquanto que B_2 está associado ao termo $(k\eta)^{1/2-\alpha_+}$. Pelas expressões (4.50) e (4.51), vemos que A_2 também pode

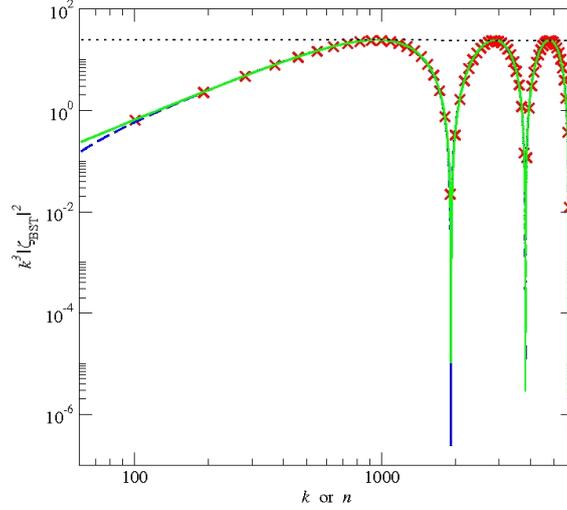


Figura 4.6: Este gráfico mostra a adequação da aproximação (4.56) para o espectro da perturbação de curvatura ζ_{BST} . A predição teórica dada pela eq. (4.55) está representada pela linha tracejada em azul, enquanto que a aproximação dada pela eq. (4.56) está representada pela linha cheia em verde. As marcações em cruz são os resultados numéricos obtidos a partir da eq. (4.35) para comprimentos de onda n na faixa de $[60 - 2000]$. Os parâmetros para o potencial (4.41) são respectivamente $\Lambda = 1$, $m = 1/5$ e $\lambda = \frac{3\mu^4}{2(\Lambda - 3\mu^2)}$ e os parâmetros numéricos $\delta\alpha_+ = \delta\alpha_- \approx 0.025$ e $\delta\eta \approx 10^{-2}$.

ser desprezado em relação a A_1 . Se parametrizarmos a dependência de u em k por $u_i(k) \propto C(k) \propto k^\beta$, e definindo

$$\delta\alpha_\pm = 2\varepsilon_\pm - \delta_\pm + 2\varepsilon_\pm^2 + \delta_\pm^2 - 3\varepsilon_\pm\delta_\pm - \xi_\pm \quad ,$$

o espectro de potência fica proporcional à

$$\mathcal{P}_\zeta \propto k^{1+2\beta-2\delta\alpha_+-2\delta\alpha_-} \sin^2 \left[k(\eta_- - \eta_+) + \frac{\pi}{2}(\delta\alpha_+ - \delta\alpha_-) \right] \quad . \quad (4.55)$$

Como já comentado anteriormente, no caso de termos uma evolução puramente de Sitter temos que $\eta_+ - \eta_- = \pi$. Podemos assim definir um parâmetro que meça o desvio deste comportamento por $\delta\eta = \pi - (\eta_+ - \eta_-)$. Sendo $k = \sqrt{n(n+2)} \approx n + 1 - \frac{1}{2n}$, o espectro pode ser aproximado por

$$\mathcal{P}_\zeta \propto k^{1+2\beta-2\delta\alpha_+-2\delta\alpha_-} \sin^2 \left[n\delta\eta + \delta\eta + \frac{\pi}{2}(\delta\alpha_+ - \delta\alpha_-) \right] \quad . \quad (4.56)$$

O gráfico (4.6) mostra que esta aproximação é de fato razoável para o caso de termos um ricochete próximo de de Sitter. Depois da fase inflacionária, este espectro pode ser reformulado

na forma

$$\mathcal{P}_\zeta = \mathcal{A}k^{n_S-1} \cos^2\left(w \frac{k_{fis}}{k_*}\right) \quad , \quad (4.57)$$

onde o número de onda k_{fis} é dado em unidades de inverso de comprimento, k_* é uma escala nominal que pode ser fixada, por exemplo, em 100 Mpc e podemos ler diretamente o valor do índice espectral $n_S - 1 = 1 + 2\beta - 2\delta\alpha_+ - 2\delta\alpha_-$. Nesta expressão, o único parâmetro livre é a frequência adimensional w . Note que para $w \ll 1$, o espectro segue uma lei de potência que pode ser invariante de escala caso $\beta = -1/2$ e $\delta\alpha_+ \sim \delta\alpha_- \ll 1$. Por outro lado, no limite de altas frequências $w \gg 1$, ao contrário do que poderíamos esperar, esta expressão não pode ser imediatamente descartada pelos dados observacionais atuais do WMAP como mostra um estudo mais detalhado Ref. [102].

Nesta seção, analisamos a evolução de perturbações escalares através de um ricochete gerado por um sistema composto por um campo escalar clássico minimamente acoplado com a gravitação e seção espacial com curvatura positiva, $\mathcal{K} = 1$. A evolução do sistema não perturbado é extremamente interessante possibilitando soluções assimétricas onde o campo escalar é levado de um mínimo do potencial para o outro devido ao termo de fricção na equação de Klein-Gordon. Durante a fase de contração este termo fornece energia para o campo escalar enquanto que na fase de expansão ele retira a sua energia levando-o ao repouso no mínimo do potencial.

O estudo das perturbações neste modelo nos mostra que, ao contrário do que poderíamos esperar, o potencial para as perturbações não é importante durante o ricochete. A assinatura do ricochete acaba por se dar na soma dos efeitos da fase de contração e expansão quase-exponencial. O espectro de potência para a perturbação de curvatura, $\mathcal{P}_{\zeta_{BST}}$, é dado por uma lei de potência multiplicada por uma função oscilatória as quais podem reproduzir os dados observados para um determinado regime destes parâmetros. Este modelo não pode ser considerado completo uma vez que o período anterior a fase de contração quase-exponencial deve ser descrito por um outro conteúdo material, possibilitando assim uma previsão da dependência espectral de u , ou seja, fornecendo o espectro antes da fase de contração.

4.2 *Campo Escalar Quântico*

Nosso estudo tem se voltado fortemente para a dinâmica do Universo durante a fase que convencionou-se chamar de Universo primordial². Neste momento é possível que a descrição da matéria seja melhor descrita por um campo escalar ao invés de um fluido de radiação Ref. [103]. Além disso, é precisamente em situações quando o fator de escala atinge o seu valor mínimo que esperamos encontrar um desvio do comportamento clássico inclusive para a gravitação.

Apesar de haver pelo menos dois candidatos a uma teoria de gravitação quântica, a saber, a teoria de cordas Ref.'s [104]-[106] e a teoria de laços Ref.[107] (“Loop Quantum Gravity”), ainda é cedo para considerarmos que de fato tenhamos atingido este objetivo. Existem alguns trabalhos na literatura Ref.'s [108]-[110] que exploram as modificações advindas destas teorias onde analisa-se como se modifica a dinâmica de um Universo homogêneo e isotrópico neste novo contexto. Note, porém, que mesmo considerando que estas duas teorias reproduzam a TRG num dado regime limite, elas induzirão termos de correção à TRG que já são em si uma manifestação direta da teoria em questão.

Uma outra opção, talvez mais conservadora, seria aplicarmos a quantização canônica à própria TRG de Einstein, caso então que nos leva diretamente à equação de Wheeler - de Witt. Sabemos que esta teoria quântica sofre de dificuldades técnicas com relação ao formalismo matemático como, por exemplo, na definição de derivadas funcionais quadráticas, $\frac{\delta^2}{\delta h_{\mu\nu}^2}$, como também do ponto de vista físico devido à dificuldade de se encontrar uma variável que faça o papel do tempo na equação de Wheeler -de Witt.

Existe, porém, um programa de estudo que geralmente leva o nome de modelos de mini-superespaço, onde é possível evitarmos algumas destas questões fundamentais associadas a equação de Wheeler - de Witt. Baseado no fato observacional da homogeneidade e isotropia do Universo, estas simetrias são impostas sobre a métrica antes mesmo do procedimento de quantização. É evidente que este programa não se propõe a montar uma teoria quântica

²Este termo é ainda de uma certa forma um resquício do modelo do “Big-Bang” onde a fase de evolução anterior à Nucleossíntese era considerada primordial pois seria uma etapa logo seguinte ao evento singular. Na perspectiva de modelos não singulares, o termo Universo primordial se refere à fase durante a qual o fator de escala atinge o seu valor mínimo, o que em geral está associado a períodos onde a densidade e a temperatura do Universo são extremamente elevadas.

para a gravitação mas espera-se que apesar desta drástica simplificação sejamos capazes de reproduzir os efeitos quânticos predominantes na evolução do Universo primordial.

Nesta seção implementaremos este programa de investigação para um Universo permeado por um campo escalar e mostraremos os principais resultados obtidos no trabalho Ref.[111]. Primeiramente iremos estudar o sistema sem considerar nenhuma perturbação, ou seja, consideraremos que o Universo é estritamente homogêneo e isotrópico. Depois de analisar as soluções deste sistema de fundo, passaremos a tratar o caso com perturbações de primeira ordem.

Seja então um campo escalar livre sem massa tal que $p = \rho$, o que é comumente conhecido na literatura como matéria dura (“stiff matter”). A Lagrangiana do sistema se escreve

$$L = \sqrt{-g} \left[\frac{R}{6\ell_{Pl}^2} - \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi \right] \quad , \quad (4.58)$$

onde definimos o comprimento de Planck ao quadrado por $\ell_{Pl}^2 \equiv \frac{8}{3} \pi G_N$ e é entendido que estamos trabalhando no sistema de unidades naturais $\hbar = c = 1$. O elemento de linha do espaço-tempo homogêneo e isotrópico é descrito por,

$$ds^2 = N^2 dt^2 - \frac{a^2(t)}{(1 + \frac{\mathcal{K}}{4} r^2)^2} [dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad ,$$

onde $r^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2$ e a curvatura espacial $\mathcal{K} = 0, \pm 1$. Inserindo este elemento de linha na Lagrangiana (4.58), e omitindo uma derivada total com relação ao tempo, encontramos para a ação que descreve este mini-superespaço,

$$\mathcal{S} = \int dt \left(\frac{-\dot{a}^2 a V}{N \ell_{Pl}^2} + \frac{N \mathcal{K} a V}{\ell_{Pl}^2} + \frac{\dot{\varphi}^2 a^3 V}{2N} \right) \quad . \quad (4.59)$$

A constante V é definida como o volume total da seção espacial dividido por a^3 . Por esta definição, fica claro que estamos apenas considerando Universos compactos de forma que V seja sempre finito. Em geral, o valor de V depende do valor de \mathcal{K} e da topologia das hipersuperfícies. Se, por exemplo, $\mathcal{K} = 1$ e a topologia for a de uma tri-esfera (\mathcal{S}^3) então encontramos que $V = 2\pi^2$. No caso de $\mathcal{K} = 0$, esta constante V pode assumir qualquer valor pois o poliedro fundamental pode ter qualquer valor (ver Ref.[112]) o que pode ser entendido como uma renormalização do fator de escala.

No caso de considerarmos espaços fechados, onde é mais apropriado utilizarmos coordenadas angulares, em geral a dimensionalidade é atribuída ao fator de escala. Além disso, para o

sistema de unidades naturais que estamos usando, o campo escalar tem dimensão de inverso de comprimento, de forma que podemos definir variáveis adimensionais $\tilde{a} = \sqrt{2V} \ell_{Pl}^{-1} a$ e $\tilde{\varphi} = \frac{\ell_{Pl}}{\sqrt{2}} \varphi$ de forma que a ação se escreve

$$\mathcal{S} = \int dt \left(-\frac{\dot{\tilde{a}}^2 \tilde{a} \ell_{Pl}}{2\sqrt{2VN}} + \frac{NK\tilde{a}V}{\ell_{Pl}\sqrt{2V}} + \frac{\dot{\tilde{\varphi}}^2 \tilde{a}^3 \ell_{Pl}}{2\sqrt{2VN}} \right) . \quad (4.60)$$

Pela definição de momento $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ encontramos,

$$\tilde{P}_a = -\frac{\dot{\tilde{a}} \ell_{Pl}}{\sqrt{2VN}} \quad , \quad \tilde{P}_\varphi = \frac{\dot{\tilde{\varphi}} \tilde{a}^3 \ell_{Pl}}{\sqrt{2VN}} . \quad (4.61)$$

A partir destes momentos podemos encontrar a hamiltoniana que é dada por

$$H = NH_0 = \frac{\sqrt{2VN}}{2\ell_{Pl}} \left(-\frac{\tilde{P}_a^2}{\tilde{a}} + \frac{\tilde{P}_\varphi^2}{\tilde{a}^3} - \mathcal{K}\tilde{a} \right) , \quad (4.62)$$

onde introduzimos o índice 0 na hamiltoniana para lembrar que esta é apenas para o sistema não perturbado. Esta distinção é necessária pois a seguir iremos tratar a quantização para o caso com perturbações até primeira ordem.

Uma vez que pretendemos quantizar este sistema, é interessante fazermos ainda mais uma mudança de variável para não termos que lidar com o fato do fator de escala ser definido apenas na semi-reta positiva. Neste caso, para garantirmos a hermeticidade da hamiltoniana, teríamos que restringir as funções de onda a um sub-espaço do espaço de Hilbert que pode ser definido por uma condição sobre a função de onda em $a = 0$ (Ref.'s [113, 114]).

Alternativamente, definimos $\alpha \equiv \log(\tilde{a})$. Note que $\dot{\alpha} = \tilde{a}^{-1} \dot{\tilde{a}} = a^{-1} \dot{a}$ e se calcularmos P_α a partir da ação eq.(4.60) encontramos a relação $P_\alpha = \tilde{a} \tilde{P}_a = -\frac{\ell_{Pl}}{\sqrt{2VN}} \dot{\alpha} e^{3\alpha}$, de forma que a hamiltoniana eq.(4.62) se escreve

$$H_0 = \frac{\sqrt{2V}}{2\ell_{Pl} e^{3\alpha}} \left(-P_\alpha^2 + P_\varphi^2 - \mathcal{K} e^{4\alpha} \right) . \quad (4.63)$$

Nesta hamiltoniana omitimos o \sim para a variável φ mas deve estar sub-entendido que esta é a variável adimensional.

4.2.1 Soluções clássicas para o campo escalar livre

Apenas examinando a hamiltoniana eq.(4.63) percebemos que φ é uma variável cíclica o que nos diz que P_φ é uma constante de movimento. Podemos resolver este sistema e encontrar as soluções clássicas para os três possíveis valores da curvatura \mathcal{K} . Temos que lembrar que este sistema é essencialmente um sistema vinculado cuja Hamiltoniana é fracamente nula, ou seja, estamos considerando a função lapso como um mero multiplicador de lagrange o que é permitido uma vez que a sua evolução não é fixada pela dinâmica.

No calibre temporal de tempo cósmico, i.e. $N = 1$, as soluções clássicas se escrevem

i) Para o caso plano $\mathcal{K} = 0$:

$$\varphi = \pm\alpha + c_1 \quad , \quad (4.64)$$

onde c_1 é uma constante de integração. Com relação ao tempo cósmico τ esta solução pode ser expressa:

$$a = e^\alpha = \sqrt[3]{3\|P_\varphi\|} \tau^{1/3} \quad , \quad (4.65)$$

$$\varphi = \frac{\ln(\tau)}{3} + c_2 \quad . \quad (4.66)$$

Esta solução representa Universos que se expandem de uma singularidade ou se contraem para uma singularidade dependendo do valor de P_φ . Note que para este modelo \ddot{a} é sempre negativo de modo que não há nenhuma fase inflacionária.

ii) Para o caso de curvatura positiva $\mathcal{K} = 1$:

$$a = e^\alpha = \frac{\sqrt{\|P_\varphi\|}}{\sqrt{\cosh(2\varphi - c_1)}} \quad , \quad (4.67)$$

onde c_1 é uma constante de integração. A condição de P_φ ser constante pode ser expressa pela relação

$$P_\varphi = e^{3\alpha} \dot{\varphi}. \quad (4.68)$$

A dependência com relação ao tempo cósmico é um pouco complicada e não é necessário mostrá-la explicitamente. Estas soluções também descrevem Universos que se expandem de uma singularidade até atingir um valor máximo para o fator de escala e depois se contraem até uma outra singularidade, ou seja, são soluções do tipo “Big Bang-Big Crunch”. É curioso observar que perto das singularidades, quando $|\varphi| \gg 1$, esta solução se comporta como o caso

plano. Novamente não encontramos nenhuma fase tipo inflação.

iii) Para o caso de curvatura negativa $\mathcal{K} = -1$:

$$a = e^\alpha = \frac{\sqrt{\|P_\varphi\|}}{\sqrt{|\sinh(2\varphi - c_1)|}} \quad , \quad (4.69)$$

onde c_1 é uma constante de integração e a condição de P_φ ser constante nos fornece a mesma relação

$$P_\varphi = e^{3\alpha} \dot{\varphi}. \quad (4.70)$$

A dependência com relação ao tempo cósmico para este caso é, como no caso anterior, complicada e não é necessário mostrá-la explicitamente. Estas soluções descrevem Universos que se expandem (se contraem) de (para) uma singularidade. Perto das singularidades esta solução também se comporta como o caso plano e novamente não encontramos nenhuma fase tipo inflação.

Apesar destas soluções apresentarem comportamento completamente diferente, é uma característica comum destas soluções clássicas o fato de elas serem singulares e não apresentarem fase inflacionária. Não há nenhum período de expansão acelerada.

4.2.2 Quantização do sistema não perturbado

A quantização de sistemas hamiltonianos vinculados deve ser feita seguindo os procedimentos da quantização de Dirac, seção (2.2). Para o caso de um Universo homogêneo e isotrópico, ou seja, para modelos de mini-superespaço a quantização se reduz a afirmação de que a função de onda não pode depender da função lapso e o requerimento da aniquilação da função de onda pela hamiltoniana

$$\frac{\partial}{\partial N} \Psi(a, \varphi, N) = 0 \quad , \quad (4.71)$$

$$\hat{H}_0 \Psi(a, \varphi, N) = 0 \quad . \quad (4.72)$$

Para não termos que lidar com o problema do fator de escala ser definido apenas na semi-reta positiva vamos quantizar a hamiltoniana eq.(4.63). Ao quantizá-la, os momentos canônicos se tornam operadores que na base coordenada são representados por derivadas

$\hat{P} \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial q}$. Sabemos que derivadas simples não são objetos geométricos, porém com o auxílio do determinante da métrica sempre podemos construir objetos covariantes utilizando apenas derivadas simples através da relação

$$\square\psi \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu \psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu) \psi \quad .$$

Uma maneira de minimizar a arbitrariedade na escolha de ordenamento dos operadores quânticos é escolher um ordenamento que seja covariante com relação a uma redefinição dos campos. No nosso caso, a métrica $g_{\mu\nu}$ é simplesmente a métrica de Lorentz a duas dimensões multiplicada por $e^{3\alpha}$, ou seja,

$$g_{\mu\nu} = e^{3\alpha} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sqrt{-g} = e^{3\alpha} \quad .$$

Com a escolha de ordenamento que deixa a hamiltoniana invariante por redefinição dos campos, a aniquilação da função de onda pela hamiltoniana eq.(4.63), na representação de base coordenada, pode ser expressa pela equação

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \mathcal{K} e^{4\alpha} \right) \Psi(\alpha, \varphi) = 0 \quad . \quad (4.73)$$

Esta é a equação de Wheeler - de Witt para este modelo de mini-superespaço que tem uma forma de uma equação tipo Klein-Gordon. Podemos fazer uma mudança de variáveis de forma a explicitarmos ainda mais a simetria desta equação. Definimos então as coordenadas nulas

$$\begin{aligned} u &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \varphi) \quad , \quad \alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v) \quad , \\ v &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \varphi) \quad , \quad \varphi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v) \quad . \end{aligned} \quad (4.74)$$

Com relação a estas novas variáveis a equação de Wheeler - de Witt se escreve

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{\mathcal{K}}{2} e^{2\sqrt{2}(u+v)} \right) \Psi(u, v) = 0 \quad . \quad (4.75)$$

Da mesma forma que para o sistema clássico, podemos encontrar as soluções desse sistema para os três valores de \mathcal{K} .

i) Para o caso plano $\mathcal{K} = 0$.

Sem o termo de curvatura, a equação de Wheeler - de Witt é extremamente simples de resolver. A solução geral para esta equação pode ser escrita na fomra

$$\Psi(u, v) = F(u) + G(v) \quad , \quad (4.76)$$

onde F e G são funções arbitrárias das variáveis u e v respectivamente. Na literatura Ref.'s [115, 116] encontramos estas soluções expressas de uma maneira um pouco diferente, geralmente numa decomposição espectral na forma,

$$\Psi(u, v) = \int dk U(k) e^{iku} + \int dk V(k) e^{ikv} \quad , \quad (4.77)$$

com U e V também completamente arbitrários.

ii) Para o caso curvo $\mathcal{K} \neq 0$.

Para encontrarmos a solução para o caso curvo $\mathcal{K} \neq 0$ basta fazermos uma nova transformação de coordenadas. Se definirmos novas variáveis

$$\begin{aligned} \xi &\equiv \frac{1}{4} e^{2\sqrt{2}u} \quad , \quad u = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln(4\xi) \quad , \\ z &\equiv \frac{1}{4} e^{2\sqrt{2}v} \quad , \quad v = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln(4z) \quad . \end{aligned} \quad (4.78)$$

Com relação a estas novas variáveis a equação de Wheeler - de Witt se escreve

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial z} + \mathcal{K} \right) \Psi(\xi, z) = 0 \quad . \quad (4.79)$$

Uma solução particular evidente para esta equação é

$$\Psi(\xi, z) = \Psi_0 e^{i(k\xi - \mathcal{K}k^{-1}z)} \quad ,$$

com Ψ_0 e k sendo duas constantes arbitrárias. A solução geral será uma superposição arbitrária desta solução uma vez que as funções exponenciais e^{ikx} formam uma base para expandir qualquer função. Note que a equação é simétrica pela troca de u por v de forma que a solução geral se escreve

$$\Psi(u, v) = \int dk U(k) \exp \left[\frac{i}{4} \left(k e^{2\sqrt{2}u} - \frac{\mathcal{K}}{k} e^{2\sqrt{2}v} \right) \right] + \int dk V(k) \exp \left[\frac{i}{4} \left(k e^{2\sqrt{2}v} - \frac{\mathcal{K}}{k} e^{2\sqrt{2}u} \right) \right] \quad , \quad (4.80)$$

com U e V novamente funções arbitrárias. Na Ref.[115] estas soluções foram expandidas na forma de funções de Bessel. Embora o resultado seja obviamente o mesmo, a vantagem de separarmos as soluções a partir das variáveis nulas ficará mais evidente ao considerarmos a interpretação causal da mecânica quântica.

4.2.3 Trajetórias quânticas

Uma vez tendo resolvido a equação de Wheeler -de Witt e encontrado a função de onda que descreve o Universo, podemos agora nos focalizar na utilização da interpretação causal da mecânica quântica, também conhecida como interpretação de Bohm-de Broglie. Na seção (2.1), vimos que nesta interpretação, para um sistema com finitos graus de liberdade, além da função de onda temos objetos pontuais de natureza ontológica que são interpretados geralmente como partículas associadas ao sistema. No nosso caso, além da função de onda do Universo definida acima, na interpretação de Bohm-de Broglie, a evolução do fator de escala assim como do campo escalar são dadas pela evolução ao longo de trajetórias. As trajetórias Bohmianas são encontradas ao resolvermos as equações guias que serão definidas mais adiante.

Para o nosso modelo, a equação de Wheeler - de Witt se escreve como

$$\mathcal{H}(\hat{p}_\mu, \hat{q}^\mu)\Psi(q) = 0 \quad , \quad (4.81)$$

onde as quantidades \hat{p}^μ, \hat{q}_μ são operadores no espaço de fase associados aos graus de liberdade homogêneos do sistema. Esta equação geralmente assume a forma

$$-\frac{1}{2}g^{\rho\sigma} \frac{\partial \Psi(q)}{\partial q^\rho \partial q^\sigma} + U(q^\mu)\Psi(q) = 0 \quad , \quad (4.82)$$

onde $g^{\rho\sigma}(q^\mu)$ é a inversa da métrica do modelo de mini-superespaço dada por $g_{\rho\sigma}(q^\mu)$.

A interpretação causal prossegue ao escrevermos a função de onda Ψ na sua forma polar $\Psi = R \exp(iS)$. Substituindo esta expressão na equação de Wheeler - de Witt e separando-a em sua parte real e imaginária, obtemos duas equações reais dadas por

$$\frac{1}{2}g^{\rho\sigma} \frac{\partial S}{\partial q^\rho} \frac{\partial S}{\partial q^\sigma} + U(q^\mu) + Q(q^\mu) = 0 \quad , \quad (4.83)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial q^\rho} \left(R^2 g^{\rho\sigma} \sqrt{-g} \frac{\partial S}{\partial q^\sigma} \right) = 0 \quad , \quad (4.84)$$

onde definimos o potencial quântico por

$$Q(q^\mu) \equiv -\frac{1}{2\sqrt{-g}R} \frac{\partial}{\partial q^\rho} \left(g^{\rho\sigma} \sqrt{-g} \frac{\partial R}{\partial q^\sigma} \right) \quad . \quad (4.85)$$

A interpretação causal aplicada a cosmologia quântica afirma que as trajetórias $q^\mu(t)$ são reais e independentes de qualquer observação. Para encontrar as equações guias (“guidance

equations”) precisamos interpretar as equações acima. A equação (4.83) é do tipo Hamilton-Jacobi para a fase da função de onda porém acrescida de um termo, o potencial quântico. Como discutido na seção (2.1), este termo é o responsável por todos os efeitos quânticos. Esta equação nos permite associarmos a fase da função de onda com o momento pela relação

$$p_\mu = \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \quad . \quad (4.86)$$

A relação entre o momento e a velocidade permite-nos escrever

$$p_\mu = g_{\mu\nu} \frac{1}{N} \frac{\partial q^\nu}{\partial t} \quad . \quad (4.87)$$

Temos então as equações guias cujas soluções são as trajetórias bohmianas e são dadas por

$$\frac{\partial S}{\partial q^\mu} = g_{\mu\nu} \frac{1}{N} \frac{\partial q^\nu}{\partial t} \quad . \quad (4.88)$$

É interessante notar que esta equação é invariante por reparametrização temporal. Para modelos de mini-superespaços não há o problema do tempo da gravitação quântica, o que deixa de ser verdade caso o sistema não apresente essas simetrias Ref.'s [117]-[120].

No caso específico da hamiltoniana eq.(4.63) identificamos a métrica e sua inversa

$$g_{\mu\nu} = e^{3\alpha} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad g^{\mu\nu} = e^{-3\alpha} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Levando esta métrica nas expressões acima, encontramos o potencial quântico

$$Q(\alpha, \varphi) \equiv -\frac{g^{\mu\nu}}{2R} \frac{\partial^2 R}{\partial q^\mu \partial q^\nu} = \frac{e^{-3\alpha}}{2R} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2} \right] \quad , \quad (4.89)$$

e as relações para as velocidades (4.88)

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = -\frac{e^{3\alpha} \dot{\alpha}}{N} \quad , \quad (4.90)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{e^{3\alpha} \dot{\varphi}}{N} \quad . \quad (4.91)$$

Para uma dada solução da equação de Wheeler - de Witt, estas relações nos permitem encontrar as trajetórias bohmianas e descrever a evolução do sistema. Embora tenhamos a solução formal da equação de Wheeler - de Witt para a caso com curvatura, $\mathcal{K} \neq 0$, vamos nos ater apenas ao estudo do caso plano.

Deste ponto em diante, toda a análise, inclusive para as perturbações que será realizada mais adiante, será restrita apenas ao caso plano $\mathcal{K} = 0$.

Como vimos na seção anterior, a solução geral da função de onda pode ser separada em duas funções independentes cada uma dependendo apenas de uma das variáveis nulas u ou v eq.(4.76). Para estudarmos a evolução no contexto da interpretação de Bohm é conveniente re-escrevermos esta solução como a soma de duas formas polares

$$\Psi(u, v) = R_+ e^{iS_+} + R_- e^{iS_-} \quad ,$$

onde definimos

$$\begin{aligned} R_+ &= R(u) \quad , \quad S_+ = S(u) \quad , \\ R_- &= R(v) \quad , \quad S_- = S(v) \quad . \end{aligned}$$

Com esta definição, o módulo da função de onda e a sua fase podem ser expressos por

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \sqrt{R_+^2 + R_-^2 + 2R_+R_- \cos(S_+ - S_-)} \\ S &= \arctan\left(\frac{R_+ \sin(S_+) + R_- \sin(S_-)}{R_+ \cos(S_+) + R_- \cos(S_-)}\right) \end{aligned}$$

Para encontrarmos as velocidades de Bohm, precisamos calcular a derivada da fase com relação a cada uma das variáveis. A derivada de S com relação a variável x , que pode ser α ou φ , é dada por

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{\mathcal{R}^2} \left[R_+^2 \frac{\partial S_+}{\partial x} + R_-^2 \frac{\partial S_-}{\partial x} + \left(\frac{\partial S_+}{\partial x} + \frac{\partial S_-}{\partial x} \right) R_+ R_- \cos(S_+ - S_-) + \left(R_- \frac{\partial R_+}{\partial x} - R_+ \frac{\partial R_-}{\partial x} \right) \sin(S_+ - S_-) \right] \quad (4.92)$$

Precisamos agora escolher uma solução específica da equação de Wheeler - de Witt e estudar as trajetórias do sistema. Num trabalho anterior, Ref.'s [115, 116], foi proposto fazer superposições gaussianas nas variáveis u e v , ou seja, foi escolhido na eq.(4.77) tomarmos $U(k) = V(\pm k)$ com

$$U(k) = \exp\left[-\frac{(k - \sqrt{2}d)^2}{\sigma^2}\right] \quad , \quad (4.93)$$

onde $\sigma^2 > 0$ e introduzimos o termo $\sqrt{2}$ apenas por conveniência. Com esta solução é possível encontrar soluções não singulares de ricochete e também modelos singulares que se expandem com uma possível fase acelerada entre as duas fases desaceleradas.

Como uma generalização desta solução, propomos considerar o caso em que o parâmetro que define a largura da gaussiana seja complexo, i.e. $\sigma^2 \rightarrow \sigma^2 + i4h$ com $h \in \Re$. Desta forma, estamos considerando soluções com

$$U(k) = \exp \left[- \frac{(k - \sqrt{2}d)^2}{\sigma^2 + i4h} \right] . \quad (4.94)$$

Integrando a equação (4.77) com $U(k) = V(k)$ dado pela eq.(4.94), encontramos a função de onda

$$\Psi(u, v) = \sqrt{\pi} \sqrt[4]{\sigma^4 + 16h^2} e^{i \arctan \sqrt{\frac{\sqrt{\sigma^4 + 16h^2} - \sigma^2}{\sqrt{\sigma^4 + 16h^2} + \sigma^2}}} \left\{ \exp \left[-\frac{\sigma^2}{4} u^2 + i(-hu^2 + \sqrt{2}du) \right] + \exp \left[-\frac{\sigma^2}{4} v^2 + i(-hv^2 + \sqrt{2}dv) \right] \right\} , \quad (4.95)$$

cuja norma é dada por

$$\mathcal{R} = \sqrt{2\pi} \sqrt[4]{\sigma^4 + 16h^2} e^{-\frac{\sigma^2}{8}(\alpha^2 + \varphi^2)} \sqrt{\cosh \left(\frac{\sigma^2 \varphi \alpha}{2} \right) + \cos[2\varphi(h\alpha - d)]} . \quad (4.96)$$

Podemos calcular diretamente a fase desta função de onda. Com relação as variáveis α e φ encontramos

$$S = \arctan \left(\sqrt{\frac{\sqrt{\sigma^4 + 16h^2} - \sigma^2}{\sqrt{\sigma^4 + 16h^2} + \sigma^2}} \right) + d\alpha - \frac{h}{2}(\alpha^2 + \varphi^2) + \arctan \left\{ \tanh \left(\frac{\sigma^2 \alpha \varphi}{4} \right) \tan[\varphi(h\alpha - d)] \right\} . \quad (4.97)$$

Substituindo esta expressão nas equações (4.90) e (4.91), encontramos:

$$\dot{\alpha} = -\frac{N}{4e^{3\alpha}} \left\{ 4(d - h\alpha) + \frac{\sigma^2 \varphi \sin[2\varphi(h\alpha - d)] + 4h\varphi \sinh \left(\frac{\sigma^2 \varphi \alpha}{2} \right)}{\cosh \left(\frac{\sigma^2 \varphi \alpha}{2} \right) + \cos[2\varphi(h\alpha - d)]} \right\} =: f(\alpha, \varphi), \quad (4.98)$$

e

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{4e^{3\alpha}} \left\{ -4h\varphi + \frac{\sigma^2 \alpha \sin[2\varphi(h\alpha - d)] + 4(h\alpha - d) \sinh \left(\frac{\sigma^2 \varphi \alpha}{2} \right)}{\cosh \left(\frac{\sigma^2 \varphi \alpha}{2} \right) + \cos[2\varphi(h\alpha - d)]} \right\} =: g(\alpha, \varphi). \quad (4.99)$$

Estas equações representam as velocidades as quais nos fornecem as tangentes às trajetórias bohmianas. A partir destas expressões, podemos construir um gráfico $\alpha \times \varphi$ dos campos e estudar as suas características.

Por conveniência, vamos trabalhar no calibre temporal $N = e^{3\alpha}$. As velocidades, eq.'s (4.98) e (4.99), possuem simetrias que nos permitem fixar os sinais dos parâmetros h e d .

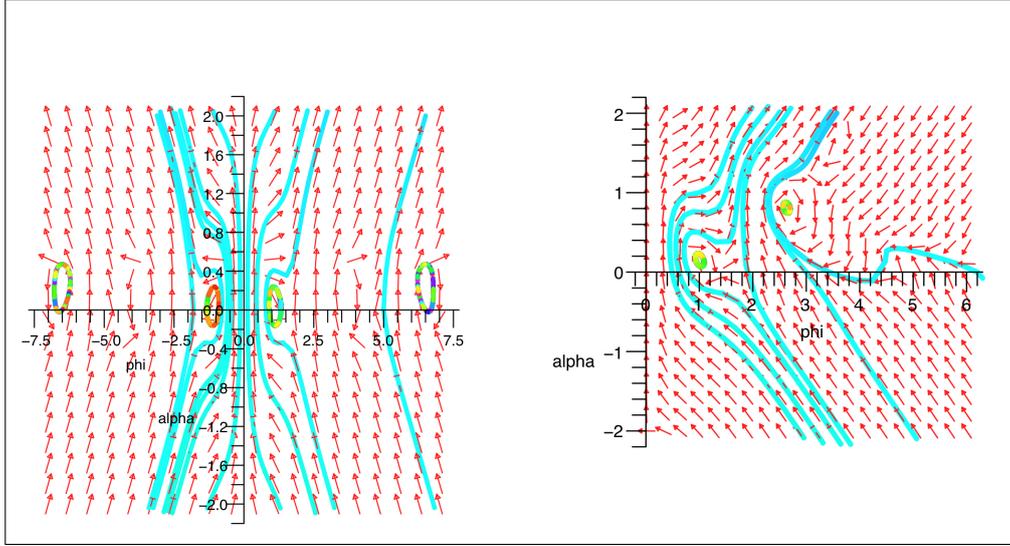


Figura 4.7: Campo de velocidades do sistema definido pelas eq.'s (4.98)-(4.99), o gráfico da esquerda mostra as trajetórias para valores de $\sigma^2 = 2, h = 1/8$, e $d = -1$ enquanto que o da direita para valores $\sigma^2 = 2, h = 0.5$, e $d = -1$. Note que o existe uma simetria de reflexão com relação ao eixo $\varphi = 0$ devido às simetrias $f(\alpha, \varphi) = f(\alpha, -\varphi)$ e $g(\alpha, \varphi) = -g(\alpha, -\varphi)$.

Note que

$$h \rightarrow -h \quad f(\alpha, \varphi; h, d) = f(-\alpha, -\varphi; -h, d), \quad g(\alpha, \varphi; h, d) = g(-\alpha, -\varphi; -h, d) \quad , (4.100)$$

$$d \rightarrow -d \quad f(\alpha, \varphi; h, d) = -f(-\alpha, \varphi; h, -d), \quad g(\alpha, \varphi; h, d) = g(-\alpha, \varphi; h, -d) \quad , (4.101)$$

de forma que uma troca no sinal do parâmetro h é equivalente a uma inversão com relação à origem enquanto que uma troca no sinal de d corresponde a uma reflexão com relação ao eixo φ no plano $\alpha \times \varphi$.

Podemos assim fixar os sinais de h e d sem perda de generalidade do comportamento das soluções. Além disso, note que $f(\alpha, \varphi) = f(\alpha, -\varphi)$ e $g(\alpha, \varphi) = -g(\alpha, -\varphi)$, ou seja, para valores de h e d fixos existe uma simetria de reflexão com relação ao eixo $\varphi = 0$ como mostra a figura (4.7). Assim podemos nos focalizar na região $\varphi > 0$ e analisar todos os comportamentos ali presentes.

Os pontos caracterizados pela norma da função de onda ser zero são chamados de nodos e representam regiões inacessíveis a qualquer trajetória. Neste sistema, estes pontos são determinados por $\alpha = 0$ e $\cos(2d\varphi) = -1$, ou seja $\varphi = (2n + 1)\pi/(2d)$ com $n \in \mathbb{Z}$. Estes pontos distam de π/d e são todos localizados no eixo $\alpha = 0$.

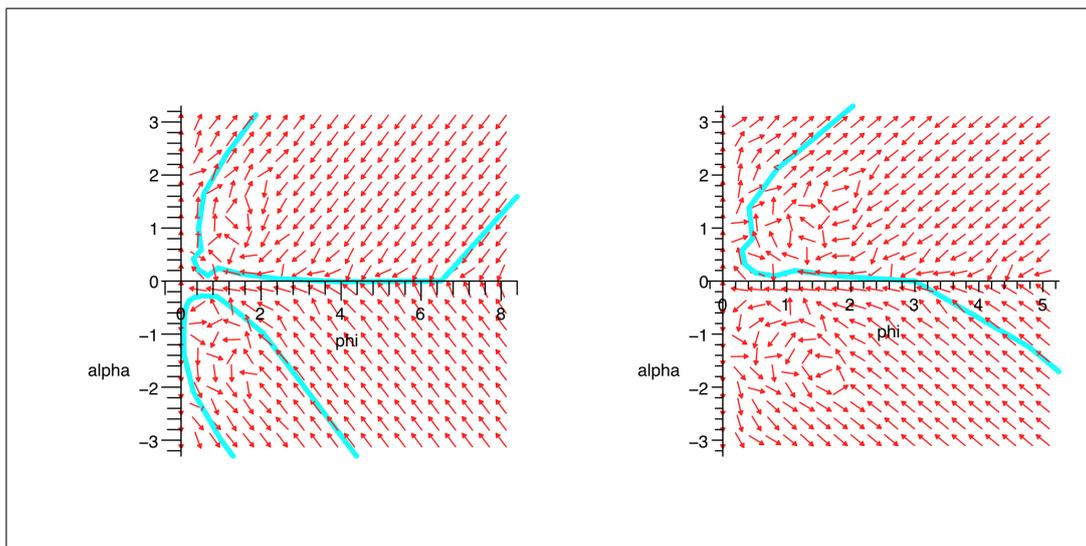


Figura 4.8: Campo de velocidades do sistema definido pelas eq.'s (4.98)-(4.99). Estes gráficos mostram duas trajetórias diferentes para os mesmo valores dos parâmetros dados por $\sigma^2 = 2$, $h = 5$, e $d = -1$. No gráfico da esquerda observamos duas soluções, uma descrevendo um ricochete enquanto que a outra é uma solução do tipo “Big Bang - Big Crunch”. O gráfico da direita mostra um Universo que “nasce” de uma singularidade e se expande eternamente passando por uma fase quase-estacionária.

As figuras (4.7) e (4.8) mostram alguns tipos de soluções que podemos encontrar. Nos dois gráficos à direita, tanto da figura (4.7) quanto da figura (4.8), vemos Universos que começam de uma singularidade em $\alpha \rightarrow -\infty$ e se expandem eternamente. Próximo da origem estas trajetórias podem passar por uma fase quase-estacionária onde o crescimento do fator de escala é extremamente reduzido.

Esses modelos ainda apresentam soluções cíclicas, embora geralmente de tamanhos da ordem do comprimento de Planck, cujas trajetórias circundam os pontos críticos definidos pela condição do numerador das equações que definem as velocidades, eq.'s (4.98) e (4.99), se anularem. Um outro caso, menos interessante, é a solução inferior no gráfico da esquerda da figura (4.8). Esta solução representa Universos que começam em um singularidade, atingem um volume máximo, e retornam para um outra singularidade. Estes modelos são conhecidos pelo nome de modelos de “Big Bang - Big Crunch”.

Uma outra possibilidade é descrita pela trajetória superior do gráfico a esquerda da figura (4.8). Esta solução descreve um Universo que realiza um ricochete devido a efeitos quânticos onde o fator de escala se contrai até atingir um valor mínimo, que naturalmente depende dos

parâmetros do sistema, e em seguida se expande novamente nunca atingindo o ponto singular $a = 0$.

Um caso particular extremamente interessante é quando consideramos na equação (4.94) $\sigma = 0$. Como veremos na seção seguinte, neste caso encontramos um modelo de Universo não singular que passa por um fase inflacionária e desemboca num comportamento clássico que pode eventualmente ser conectado com uma fase dominada pela radiação antes da nucleossíntese.

4.2.4 Modelo inflacionário não singular

Consideremos o caso particular $\sigma = 0$ na equação (4.94), ou seja, definindo

$$U(k) = \exp \left[i \frac{(k - \sqrt{2}d)^2}{4h} \right] , \quad (4.102)$$

e integrando a função de onda eq.(4.77), encontramos

$$\Psi(u, v) = 2\sqrt{\pi|h|} \left[\exp i \left(-hu^2 + \sqrt{2}du + \frac{\pi}{4} \right) + \exp i \left(-hv^2 + \sqrt{2}dv + \frac{\pi}{4} \right) \right] . \quad (4.103)$$

A norma desta função de onda é dada simplesmente por $\mathcal{R} = 4\sqrt{\pi|h|} \cos[\varphi(h\alpha - d)]$. Podemos calcular diretamente o potencial quântico que é dado por

$$Q = (h\alpha - d)^2 - h^2\varphi^2 . \quad (4.104)$$

A partir da derivada da fase da função de onda com relação as variáveis α e φ encontramos as velocidades bohmianas que são dadas por

$$\dot{\alpha} = h\alpha - d , \quad (4.105)$$

$$\dot{\varphi} = -h\varphi . \quad (4.106)$$

Estas equações são facilmente integradas resultando nas soluções analíticas

$$\alpha(t) = \frac{d}{h} + \alpha_0 e^{ht} \quad (4.107)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-ht} . \quad (4.108)$$

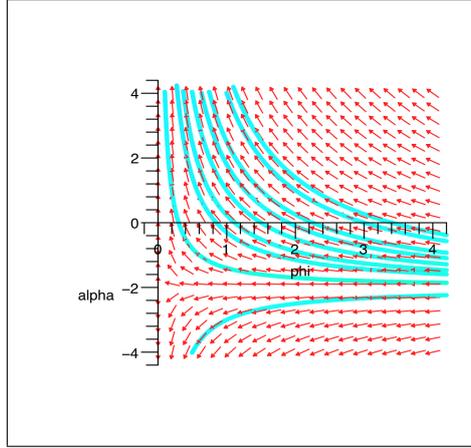


Figura 4.9: Campo de velocidades definido pelo sistema de equações (4.98) (4.99) para valores dos parâmetros dados por $\sigma^2 = 0$, $h = 0.5$, and $d = -1$. O único ponto crítico deste sistema está localizado em $\varphi = 0$ e $\alpha = d/h$ que representa um ponto de equilíbrio instável. Para valores $h > 0$ e $\alpha > d/h$ vemos pela equação (4.107) que estas soluções representam Universos que sempre se expandem de maneira acelerada contendo uma fase inflacionária com um número de “e-fold’s” da ordem de α_0 .

Note que $\varphi(\alpha - \frac{d}{h}) = \alpha_0 \varphi_0 = c^{te}$, de forma que α e φ são a grosso modo inversamente proporcionais, quando α cresce muito φ vai a zero e vice-versa. O único ponto crítico deste sistema é um ponto de sela localizado em $\varphi = 0$ e $\alpha = d/h$ que representa um ponto de equilíbrio instável. Para valores positivos (negativos) de h vemos que o Universo se expande (se contrai) continuamente, por isso vamos assumir que $h > 0$ e analisar as soluções fisicamente mais interessantes que descrevem Universos em expansão.

Estas soluções estão expressas com relação ao tempo paramétrico t do calibre temporal $N = e^{3\alpha}$. O tempo cósmico está associado com este tempo paramétrico por $\tau = \int dt e^{3\alpha(t)} \Rightarrow \tau - \tau_0 = h^{-1} \text{Ei}(3\alpha_0 e^{ht})$, onde $\text{Ei}(z)$ é a função integral-exponencial. Em termos do tempo cósmico, o parâmetro de Hubble, o parâmetro de desaceleração e o escalar de curvatura são dados respectivamente por

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} = \frac{\alpha_0 h e^{ht(\tau)}}{a^3} \quad (4.109)$$

$$q = -\frac{1}{aH^2} \frac{d^2a}{d\tau^2} = \frac{2\alpha_0 - e^{-ht(\tau)}}{\alpha_0} \quad , \quad (4.110)$$

$${}^{(4)}R = -6 \left(\frac{1}{a} \frac{d^2a}{d\tau^2} + H^2 \right) = -\frac{6\alpha_0 h^2}{a^6} e^{ht(\tau)} (1 - \alpha_0 e^{ht(\tau)}) \quad . \quad (4.111)$$

A evolução pode ser caracterizada por três fases distintas. No passado remoto, $ht \ll -1$, o fator de escala se expande de maneira acelerada a partir do seu valor inicial $a_0 = e^{d/h}$ quando

o escalar de curvatura tende a zero ³. No futuro remoto, $ht \gg 1$ o fator de escala continua se expandindo mas de maneira desacelerada com o escalar de curvatura novamente muito menor do que 1. A fase intermediária ocorre no momento de transição quando a expansão passa de acelerada para desacelerada em $ht_{\text{tran}} = -\ln(2\alpha_0)$ que é negativo caso $\alpha_0 > 1/2$.

Em torno de $ht \approx 0$ podemos aproximar a expressão do fator de escala por

$$a \approx e^{\alpha_0 + d/h} [1 + \alpha_0 ht + (\alpha_0 h^2 + \alpha_0^2 h^2) t^2 / 2! + \dots] \quad , \quad (4.112)$$

de forma que se $\alpha_0 \gg 1$, $a \approx e^{\alpha_0 + d/h} \exp(\alpha_0 ht)$. Se lembrarmos a expressão que relaciona o tempo cósmico ao tempo paramétrico, $\tau = \int dt a^3$, vemos que $a \propto (\tau - \tau_0)^{1/3}$ e $\phi' \propto 1/\tau \propto 1/a^3$ re-obtendo assim a solução clássica para o fator de escala. Note porém que esta fase clássica é válida apenas para este período em questão.

Podemos então resumir a evolução desta solução da seguinte maneira: no passado remoto, o Universo tem um volume finito e constante que pode inclusive ser do tamanho do comprimento de Planck caso $d \approx 0$. Nesta fase o Universo é essencialmente plano e apresenta uma expansão acelerada. Em torno de $ht \approx 0$, depois do tempo de transição, o Universo continua a se expandir porém de forma desacelerada. O fator de escala é e^{α_0} vezes maior do que o seu volume original, ou seja, houve uma expansão com α_0 “e-fold’s”, e sua evolução é essencialmente igual ao regime clássico com o campo escalar muitas ordens de grandeza menor do seu valor inicial. Neste momento é possível que haja uma transição a um regime dominado pela radiação e assim sermos capazes de conectar este modelo com o modelo do “Big Bang” antes da nucleossíntese.

Devemos considerar este modelo como uma boa descrição somente até o momento em que o fator de escala começa a se comportar classicamente. Uma vez que a densidade do fluido de radiação varia com a^{-3} e a do campo escalar livre varia com a^{-6} , é razoável que para valores pequenos do fator de escala a sua dinâmica seja determinada essencialmente pelo campo escalar, o que explica tratarmos esta solução como uma boa aproximação para a evolução do Universo para tempos menores que $ht \approx 0$.

Para explorar mais este modelo se faz necessário uma descrição minuciosa do fluido de radiação, o que pode ser feito por exemplo adicionando-se a Lagrangiana um termo de interação do tipo $\sigma \sqrt{-g} \phi \Psi \bar{\Psi}$ onde Ψ descreveria um campo fermiônico relativístico e σ a sua constante de acoplamento. No entanto, esta análise foge do escopo deste trabalho.

³O valor físico do fator de escala é dado por $a_0^{fis} = \frac{\ell_{Pl}}{\sqrt{2V}} e^{d/h}$.

4.2.5 Quantização das perturbações

Na seção anterior, analisamos a quantização de um sistema composto por gravitação e campo escalar livre dentro dos preceitos dos modelos de mini-superespaço. A idéia principal era examinarmos os efeitos quânticos e suas influências sobre a evolução dinâmica do fator de escala e do campo escalar. Para este sistema, mostramos que as soluções diferem consideravelmente do comportamento clássico mostrando uma riqueza de possibilidades para as trajetórias quânticas.

O passo seguinte neste contexto é estudarmos a evolução das perturbações com relação à dinâmica de um Universo homogêneo e isotrópico.

O procedimento convencional para estudarmos as perturbações cosmológicas Ref. [38] se baseia num estudo semi-clássico onde a gravitação é tratada classicamente enquanto que o conteúdo material do Universo é descrito pelo valor esperado de campos quânticos. Nesta análise híbrida, podemos utilizar as equações de ordem zero para simplificarmos as equações de primeira ordem uma vez que neste estudo perturbativo as equações devem ser satisfeitas para cada ordem da expansão independentemente.

Esta simplificação não é mais possível caso se queira levar em conta correções quânticas para a evolução do sistema em ordem zero pois neste caso as equações clássicas não são mais válidas. Lembre-se que para quantizarmos o sistema precisamos descrever um sistema hamiltoniano vinculado num formalismo invariante de calibre, o que não é nada trivial mesmo para a primeira ordem perturbativa de modelos FLRW. De fato, o uso das equações homogêneas e isotrópicas é mais do que uma mera simplificação, ela viabiliza o estudo do sistema.

Felizmente, progressos recentes Ref.'s [121]-[124] mostram que apenas usando técnicas para sistemas hamiltonianos é possível simplificar consideravelmente a hamiltoniana do sistema. No entanto, apesar de todos os avanços, o termo de massa associado ao potencial de Mukhanov-Sasaki que descreve o grau de liberdade das perturbações escalares apresenta componentes de momento o que torna a sua quantização nada trivial.

Nesta seção vamos mostrar como é possível tratarmos esta dificuldade e, consistentemente, quantizarmos as perturbações escalares para um modelo com campo escalar livre. Depois de

descrever as linhas gerais do procedimento já realizado na literatura Ref.[123], quantizaremos o sistema e mostraremos que é possível inclusive especificarmos uma equação dinâmica quântica para as perturbações, i.e. dentro deste formalismo não há o problema do tempo em gravitação quântica.

O campo escalar perturbado é definida por $\varphi(t, x) = \varphi_0(t) + \delta\varphi(t, x)$ onde φ_0 é o campo escalar homogêneo associado à métrica de FLRW. Substituindo esta definição na densidade Lagrangiana para um campo escalar livre encontramos

$$\mathcal{L}_m = \frac{(1-2\phi)}{N^2} \left(\frac{\dot{\varphi}_0^2}{2} + \dot{\varphi}\delta\dot{\varphi} \right) + \frac{\dot{\varphi}_0^2}{N^2} \left(2\phi^2 - \frac{B^{[i}B_{|i}}{2} \right) - \frac{\dot{\varphi}_0}{Na} B^{[i}\delta\varphi_{|i} + \frac{\delta\dot{\varphi}^2}{2N^2} - \frac{1}{2a^2} \delta\varphi^{[i}\delta\varphi_{|i} \quad . \quad (4.113)$$

Para facilitar a notação definimos $\epsilon_{ij} = 2\psi\gamma_{ij} - 2E_{[i|j]}$, de forma que a Lagrangiana total da parte gravitacional mais campo escalar se escreve

$$\begin{aligned} L = & -\frac{\dot{a}^2 a V}{\ell_{Pl}^2 N} + \frac{NKaV}{\ell_{Pl}^2} + \frac{\dot{\varphi}_0^2 a^3 V}{2N} + \frac{Na}{6\ell_{Pl}^2} \int d^3x \sqrt{\gamma} \left[-\frac{1}{4} \epsilon^{ij|k} \epsilon_{ij|k} + \frac{a}{N} \dot{B}_{[i} \epsilon^{ij}_{|j} + \frac{1}{2} \epsilon^{ij}_{|j} \epsilon_i{}^k{}_{|k} + \phi_{|j} \epsilon^{ij}_{|j} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \epsilon_{[i} \epsilon^{ij}_{|j} - \phi_{|i} \epsilon^{[i} + \frac{1}{4} \epsilon^{[i} \epsilon_{|i} + \mathcal{K} \left(\frac{1}{4} \epsilon^2 - \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} - \epsilon\phi + B^{[i} B_{|i} - 3\phi^2 \right) \right] + \frac{a^3}{24N\ell_{Pl}^2} \int d^3x \sqrt{\gamma} (\dot{\epsilon}^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}^2) + \\ & + \frac{a\dot{a}^2}{6N\ell_{Pl}^2} \int d^3x \sqrt{\gamma} \left(-9\phi^2 - 3\epsilon\phi - \frac{3}{4} \epsilon^2 + 3B^{[i} B_{|i} + \frac{3}{2} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} \right) - \frac{2a\dot{a}}{3\ell_{Pl}^2} \int d^3x \sqrt{\gamma} \left(\phi B^{[i}_{|i} - \frac{1}{2} B_{[i} \epsilon^{ij}_{|j} \right) + \\ & + \frac{a^2 \dot{a}}{3\ell_{Pl}^2} \int d^3x \gamma^{1/2} \left(\epsilon^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon \dot{\epsilon} - \phi \dot{\epsilon} \right) - \frac{a^2}{6\ell_{Pl}^2} \int d^3x \sqrt{\gamma} \dot{\epsilon} B^{[i}_{|i} - \frac{a^3 \dot{\varphi}_0}{N} \int d^3x \sqrt{\gamma} \left(\phi + \frac{1}{2} \epsilon \right) \delta\dot{\varphi} + \\ & + a^2 \dot{\varphi}_0 \int d^3x \sqrt{\gamma} \delta\varphi B^{[i}_{|i} + \frac{\dot{\varphi}_0^2 a^3}{4N} \int d^3x \sqrt{\gamma} \left(3\phi^2 + \epsilon\phi + \frac{1}{4} \epsilon^2 - B^{[i} B_{|i} - \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \epsilon_{ij} \right) + \\ & + \frac{Na^3}{2} \int d^3x \sqrt{\gamma} \left(\frac{\delta\dot{\varphi}^2}{N^2} - \frac{\delta\varphi^{[i} \delta\varphi_{|i}}{a^2} \right) \quad , \quad (4.114) \end{aligned}$$

onde $a^3 V$ é o volume de cada seção espacial que é considerada compacta, i.e. $V < \infty$.

Para simplificarmos este sistema sem utilizar as equações do sistema em ordem zero nas perturbações é preciso definir o sistema hamiltoniano associado a esta Lagrangiana e em seguida aplicar transformações canônicas redefinindo assim as nossas variáveis. Embora o procedimento seja direto, os cálculos são exaustivos de forma que não iremos reproduzi-los aqui pois por um lado este resultado já possui boas referências na literatura (ver referências citadas acima) enquanto que por outro lado utilizaremos exatamente estas mesmas técnicas mais adiante.

Vale apenas salientar que além de aplicar sucessivas transformações canônicas durante o processo é necessário redefinirmos a função lapso. Esta redefinição não carrega em si nenhum significado físico uma vez que a evolução da função lapso é completamente arbitrária. Esta

função está associada a uma escolha de calibre temporal e de fato podemos considerá-la até mesmo como um mero multiplicador de Langrange.

Vamos partir da equação (A39) da referência Ref. [123] onde se define a hamiltoniana do sistema por

$$H = NH_0 + \int d^3x \left(-\frac{\ell_{Pl}^2 P_a^2}{2a^2 V} \phi + \frac{3P_\varphi^2}{a^4 P_a V} \psi + \frac{3\ell_{Pl}^2 P_\varphi}{2a^4 V} v \right) \tilde{\phi}_6 + \Lambda_N P_N + \int d^3x \Lambda_\phi \pi_\phi \quad , \quad (4.115)$$

onde $\tilde{\phi}_6 = \pi_\psi$, P_N e π_ϕ são vínculos de primeira classe, v é o potencial de Mukhanov-Sasaki e H_0 é definida por

$$H_0 = -\frac{\ell_{Pl}^2 P_a^2}{4aV} + \frac{P_\varphi^2}{2a^3 V} + \frac{a^3 V U}{2} + \frac{1}{2a} \int d^3x \left(\frac{\pi^2}{\sqrt{\gamma}} + \sqrt{\gamma} v^i v_{,i} \right) + \left[\frac{15\ell_{Pl}^2 P_\varphi^2}{4a^5 V^2} + \frac{a}{4} \frac{d^2 U}{d\varphi^2} + \right. \\ \left. - \left(\frac{3\ell_{Pl}^2}{8} a - \frac{9P_\varphi^2}{4aP_a^2} \right) U - \frac{\ell_{Pl}^4 P_a^2}{16a^3 V^2} - \frac{27P_\varphi^4}{4a^7 V^2 P_a^2} - \frac{3P_\varphi}{P_a} \frac{dU}{d\varphi} \right] \int d^3x \sqrt{\gamma} v^2 \quad . \quad (4.116)$$

Estamos considerando o caso de um campo escalar livre, ou seja, o potencial para o campo escalar é zero, $U = 0$. Além disso, podemos definir a hamiltoniana em ordem zero por

$$H_0^{(0)} = -\frac{\ell_{Pl}^2 P_a^2}{4aV} + \frac{P_\varphi^2}{2a^3 V} \quad \implies \quad P_\varphi^2 = 2a^3 V \left(H_0^{(0)} + \frac{\ell_{Pl}^2 P_a^2}{4aV} \right) \quad .$$

Se levamos este resultado na hamiltoniana eq.(4.116), podemos fatorar o termo NH_0 na forma

$$NH_0 = N \left\{ 1 + \left[\frac{15\ell_{Pl}^2}{2a^2 V} - \frac{27}{aP_a^2} \left(H_0^{(0)} + \frac{\ell_{Pl}^2 P_a^2}{2aV} \right) \right] \int d^3x \sqrt{\gamma} v^2 \right\} \left[H_0^{(0)} + \frac{1}{2a} \int d^3x \left(\frac{\pi^2}{\sqrt{\gamma}} + \sqrt{\gamma} v^i v_{,i} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\ell_{Pl}^4 P_a^2}{8a^3 V^2} \int d^3x \sqrt{\gamma} v^2 \right] + \mathcal{O}(v^4, v^2 \pi^2) \quad . \quad (4.117)$$

Por uma simples redefinição da função lapso,

$$\tilde{N} = N \left\{ 1 + \left[\frac{15\ell_{Pl}^2}{2a^2 V} - \frac{27}{aP_a^2} \left(H_0^{(0)} + \frac{\ell_{Pl}^2 P_a^2}{2aV} \right) \right] \int d^3x \sqrt{\gamma} v^2 \right\} \quad ,$$

podemos escrever a hamiltoniana total, omitindo o tilda da função lapso, por

$$H = N \left[H_0^{(0)} + \frac{1}{2a} \int d^3x \frac{\pi^2}{\sqrt{\gamma}} + \frac{1}{2a} \int d^3x \sqrt{\gamma} \left(v^i v_{,i} + \frac{\ell_{Pl}^4 P_a^2}{8a^3 V^2} v^2 \right) \right] + \\ + \int d^3x \left(-\frac{\ell_{Pl}^2 P_a^2}{2a^2 V} \phi + \frac{3P_\varphi^2}{a^4 P_a V} \psi + \frac{3\ell_{Pl}^2 P_\varphi}{2a^4 V} v \right) \tilde{\phi}_6 + \Lambda_N P_N + \int d^3x \Lambda_\phi \pi_\phi \quad . \quad (4.118)$$

Esta hamiltoniana já é bem mais palatável do que a anterior porém o termo de massa que multiplica v^2 contém o momento canônico associado ao fator de escala, o que complica

a quantização deste sistema uma vez que o procedimento de quantização na representação de base coordenada associa o operador $\hat{P}_a \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial a}$. Além disso, o fator de escala é definido na semi-reta positiva o que requer cuidados extras na construção do espaço de Hilbert para garantirmos que a evolução seja de fato unitária.

Para tratarmos estes dois pontos, é conveniente mudarmos para as variáveis adimensionais definidas na seção anterior, i.e. $\alpha \equiv \log(\sqrt{2V} \ell_{Pl}^{-1} a)$ e $\varphi \rightarrow \frac{\ell_{Pl}}{\sqrt{2}} \varphi$. Com essas definições temos que

$$\begin{aligned} P_\alpha &= -\frac{\ell_{Pl}}{\sqrt{2V}} \frac{e^{3\alpha}}{N} \dot{\alpha} \quad , \quad P_a = \frac{1}{a} P_\alpha \quad , \\ \frac{\ell_{Pl}^2}{4V} \frac{P_a^2}{a} &= \frac{\sqrt{2V}}{\ell_{Pl}} \frac{P_\alpha^2}{2e^{3\alpha}} \quad , \quad \frac{P_\varphi^2}{2a^3 V} \rightarrow \frac{\sqrt{2V}}{\ell_{Pl}} \frac{P_\varphi^2}{2e^{3\alpha}} \quad , \end{aligned}$$

e a hamiltoniana se escreve,

$$\begin{aligned} H &= \frac{N\sqrt{2V}}{\ell_{Pl} e^{3\alpha}} \left[-\frac{P_\alpha^2}{2} + \frac{P_\varphi^2}{2} + \frac{e^{2\alpha}}{2} \int d^3x \sqrt{\gamma} \left(\frac{\pi^2}{\gamma} + v^i v_{,i} + \frac{P_\alpha^2}{e^{4\alpha}} v^2 \right) \right] + \\ &+ \int d^3x \left(-\frac{2V}{\ell_{Pl}^2} \frac{P_\alpha^2}{e^{4\alpha}} \phi + \frac{3\sqrt{2V}}{\ell_{Pl}} \frac{P_\varphi^2}{e^{3\alpha} P_\alpha} \psi + \frac{3\sqrt{2V}}{\ell_{Pl}} \frac{\sqrt{V} P_\varphi}{e^{4\alpha}} v \right) \tilde{\phi}_6 + \Lambda_N P_N + \int d^3x \Lambda_\phi \pi_\phi \quad . \end{aligned}$$

Para eliminarmos o problema no termo de massa vamos fazer uma transformação canônica cuja função geratriz \mathcal{F} e as variáveis modificadas são dadas por

$$\mathcal{F} = \mathcal{I} + \frac{P_\alpha}{2} \int d^3x \sqrt{\gamma} \tilde{v}^2 + e^{\tilde{\alpha}} \int d^3x \pi \tilde{v} \quad , \quad (4.119)$$

$$\alpha = \tilde{\alpha} + \frac{1}{2} \int d^3x \sqrt{\gamma} \tilde{v}^2 \quad , \quad (4.120)$$

$$e^{3\alpha} = e^{3\tilde{\alpha}} \left(1 + \frac{3}{2} \int d^3x \sqrt{\gamma} \tilde{v}^2 \right) + \mathcal{O}(\tilde{v}^3) \quad (4.121)$$

$$v = e^{\tilde{\alpha}} \tilde{v} \quad , \quad (4.122)$$

$$\tilde{\pi} = \sqrt{\gamma} \tilde{P}_\alpha \tilde{v} + e^{\tilde{\alpha}} \pi \quad , \quad (4.123)$$

$$\tilde{P}_\alpha = P_\alpha + e^{\tilde{\alpha}} \int d^3x \pi \tilde{v} \quad , \quad (4.124)$$

Redefinindo novamente a função lapso por

$$\tilde{N} = N \left[1 - \frac{3}{2} \int d^3x \sqrt{\gamma} \tilde{v}^2 \right]$$

e omitindo o tilda das novas variáveis, a hamiltoniana se transforma para

$$\begin{aligned}
H = & \frac{N\sqrt{2V}}{\ell_{Pl}e^{3\alpha}} \left[-\frac{P_\alpha^2}{2} + \frac{P_\varphi^2}{2} + \frac{1}{2} \int d^3x \left(\frac{\pi^2}{\sqrt{\gamma}} + \sqrt{\gamma} e^{4\alpha} v^i v_i \right) \right] + \\
& + \int d^3x \left(-\frac{2V}{\ell_{Pl}^2} \frac{P_\alpha^2}{e^{4\alpha}} \phi + \frac{3\sqrt{2V}}{\ell_{Pl}} \frac{P_\varphi^2}{e^{3\alpha} P_\alpha} \psi + \frac{3\sqrt{2V}}{\ell_{Pl}} \frac{\sqrt{V} P_\varphi}{e^{4\alpha}} v \right) \pi_\psi + \Lambda_N P_N + \int d^3x \Lambda_\phi \pi_\phi .
\end{aligned} \tag{4.125}$$

A partir desta hamiltoniana a quantização do sistema se torna imediata. Seguindo a quantização de sistemas hamiltonianas vinculados temos que os vínculos de primeira classe devem anular a função de onda, ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \psi} \Psi(\alpha, \varphi, v, N, \phi, \psi) &= 0 \quad , \\
\frac{\partial}{\partial N} \Psi(\alpha, \varphi, v, N, \phi, \psi) &= 0 \quad , \\
\frac{\partial}{\partial \phi} \Psi(\alpha, \varphi, v, N, \phi, \psi) &= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Essas equações nos dizem que a função de onda não depende das variáveis N, ϕ, ψ , i.e. $\Psi = \Psi(\alpha, \varphi, v)$ onde v é a única variável de perturbação. Note, porém, que devido a última transformação canônica v não é mais o potencial de Mukhanov-Sasaki.

A equação restante,

$$\hat{H}_0 \Psi(\alpha, \varphi, v) = 0 \quad , \tag{4.126}$$

possui apenas termos quadráticos nos momentos o que nos impossibilita definir uma variável que faça o papel do tempo. Quando temos um fluido perfeito, aparece na hamiltoniana um termo na forma $a^{-3(1+\lambda)} P_T$, onde $\lambda = p/\rho$ e P_T representa a quantidade total de energia associada a este fluido. A vantagem é que como este termo é linear em P_T , a equação (4.126) assume a forma de uma equação tipo Schrödinger, o que naturalmente estabelece uma evolução para o sistema.

Para o caso do campo escalar, é possível definirmos um tempo evolutivo para o sistema não perturbado se utilizarmos a quantização de Bohm-de Broglie como fizemos na seção anterior. Vamos agora mostrar que se supusermos que não haja retro-reação (“back-reaction”), ou seja, que a evolução do sistema em ordem zero não é influenciada pelas perturbações, é possível encontramos uma equação evolutiva também para as perturbações escalares.

Por conveniência, vamos trabalhar novamente no calibre temporal $N = \frac{\ell_{Pl}}{\sqrt{2V}} e^{3\alpha}$. Para isso,

vamos separar a hamiltoniana em variáveis de fundo e perturbações,

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \quad , \\ \hat{H}_1 &= -\frac{\hat{P}_\alpha^2}{2} + \frac{\hat{P}_\varphi^2}{2} \quad , \\ \hat{H}_2 &= \frac{1}{2} \int d^3x \left(\frac{\hat{\pi}^2}{\sqrt{\gamma}} + \sqrt{\gamma} e^{4\alpha} \hat{v}^i \hat{v}_{,i} \right) \quad .\end{aligned}$$

A suposição de que há retro-reação (“no back-reaction”) pode ser refraseada pela afirmação de que o espaço de Hilbert pode ser fatorado na forma de um produto tensorial, separando o sub-espaço associado às variáveis de fundo das perturbações. Para esta condição a função de onda pode ser expressa por

$$|\Psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \quad ,$$

onde $|\phi\rangle$ representa a função de onda associada as variáveis de fundo e $|\chi\rangle$ as perturbações. Além disso temos que os vínculos têm que anular as funções de onda e, por separação de variáveis, vemos que

$$\left. \begin{array}{l} \hat{H}_0|\Psi\rangle = 0 \\ \text{e} \\ \hat{H}_1|\phi\rangle = 0 \end{array} \right\} \implies \hat{H}_2|\chi\rangle = 0 \quad .$$

Uma das dificuldades da equação de Wheeler-de Witt com relação ao tempo é que esta equação, dado que a hamiltoniana é um vínculo de primeira classe e anula a função de onda, pode ser interpretada como uma equação de Schrödinger cujas soluções são sempre funções de onda que não evoluem, i.e.

$$i \frac{d}{dt} |\chi\rangle = \hat{H}_2 |\chi\rangle = 0 \quad .$$

Pela teoria quântica de Bohm-de Broglie, a cada solução da equação de Schrödinger está associada uma “partícula” com realidade independente de qualquer interferência sobre o sistema e que possui uma trajetória bem definida dada pela solução das equações guias eq.(4.88). Estas trajetórias, que são funções apenas do tempo, podem ser usadas para definirmos uma transformação unitária dependente do tempo apenas para o setor perturbativo. A hamiltoniana é separável em $\hat{H} = \hat{H}_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \hat{H}_2$, de forma que podemos definir a transformação unitária por $U = \mathbb{1} \otimes U_2$.

Esta transformação unitária nos leva um vetor $|\Psi\rangle \rightarrow |\xi\rangle = U|\Psi\rangle$, i.e. $|\Psi\rangle = U^{-1}|\xi\rangle$. Note que, embora o vetor $|\Psi\rangle$ não dependa do tempo, este novo vetor é função do tempo

$|\xi\rangle = |\xi(t)\rangle$. Para esta transformação temos que a hamiltoniana é levada em

$$\hat{H} \longrightarrow \hat{H}_U = (\mathbf{1} \otimes U_2) \left(\hat{H}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \hat{H}_2 \right) (\mathbf{1} \otimes U_2^{-1}) - \mathbf{1} \otimes iU \frac{d}{dt} U^{-1} \quad , \quad (4.127)$$

$$= \hat{H}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \hat{H}_{2U} \quad (4.128)$$

onde a equação de Schrödinger para as perturbações e sua hamiltoniana transformada se escrevem

$$i \frac{d}{dt} |\xi\rangle = \hat{H}_{2U} |\xi\rangle \quad , \quad (4.129)$$

$$\hat{H}_{2U} \equiv U_2 \hat{H}_2 U_2^{-1} - iU \frac{d}{dt} U^{-1} \quad . \quad (4.130)$$

Vamos definir a transformação unitária por $U_2 = e^{iA} e^{-iB}$ com

$$A = \frac{1}{2} \int d^3x \sqrt{\gamma} \frac{\dot{a}}{a^3} \hat{v}^2 \quad , \quad (4.131)$$

$$B = \frac{1}{2} \int d^3x (\hat{\pi} \hat{v} + \hat{v} \hat{\pi}) \log(a) \quad . \quad (4.132)$$

Nesta transformação, o fator de escala $a = a(t)$ é entendido como uma função que depende do tempo e não mais como um operador. Desta forma, estamos considerando esta função como a solução das trajetórias bohmianas associadas a equação $H_1|\phi\rangle = 0$.

Naturalmente os operadores $\hat{\pi}$ e \hat{v} não comutam com esta transformação unitária. As seguintes relações são úteis para calcularmos \hat{H}_{2U} :

$$e^{iA} \hat{\pi} e^{-iA} = \hat{\pi} - \frac{\dot{a}}{a^3} \sqrt{\gamma} \hat{v} \quad ,$$

$$e^{iA} \hat{v} e^{-iA} = \hat{v} \quad ,$$

$$e^{-iB} \hat{\pi} e^{iB} = a \hat{\pi} \quad ,$$

$$e^{-iB} \hat{v} e^{iB} = a^{-1} \hat{v} \quad .$$

Note que esta transformação unitária nos retorna a variável de Mukhanov-Sasaki uma vez

que $U \hat{v} U^{-1} = a^{-1} \hat{v}$. A partir destas relações temos que

$$U \hat{H}_2 U^{-1} = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\frac{a^2 \hat{\pi}^2}{\sqrt{\gamma}} - \frac{\dot{a}}{a} (\hat{\pi} \hat{v} + \hat{v} \hat{\pi}) + a^2 \sqrt{\gamma} \hat{v}^i \hat{v}_{,i} + \frac{\dot{a}^2}{a^4} \sqrt{\gamma} \hat{v}^2 \right), \quad (4.133)$$

$$iU \frac{d}{dt} U^{-1} = -\frac{\dot{a}}{2a} \int d^3x (\hat{\pi} \hat{v} + \hat{v} \hat{\pi}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{a}}{a^3} - \frac{\dot{a}^2}{a^4} \right) \int d^3x \sqrt{\gamma} \hat{v}^2, \quad (4.134)$$

$$\hat{H}_{2U} = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\frac{a^2 \hat{\pi}^2}{\sqrt{\gamma}} + a^2 \sqrt{\gamma} \hat{v}^i \hat{v}_{,i} - \left(\frac{\ddot{a}}{a^3} - 2 \frac{\dot{a}^2}{a^4} \right) \sqrt{\gamma} \hat{v}^2 \right]. \quad (4.135)$$

Se lembrarmos que $dt = a^{-2} d\eta$, onde η é o tempo conforme, temos que $\dot{a} = a^2 a'$ e $\ddot{a} = a^4 a'' + 2a^3 a'^2$, e a hamiltoniana de nosso sistema quântico pode ser escrita na forma

$$\hat{H}_{2U} = \frac{a^2}{2} \int d^3x \left[\frac{\hat{\pi}^2}{\sqrt{\gamma}} + \sqrt{\gamma} \hat{v}^i \hat{v}_{,i} - \frac{a''}{a} \sqrt{\gamma} \hat{v}^2 \right]. \quad (4.136)$$

Até agora expressamos a evolução pela formulação de Schrödinger. Se passarmos para a representação de Heisenberg onde a dinâmica se dá para os operadores, e aplicarmos uma transformada de Fourier de forma que $\hat{v}^i \hat{v}_{,i} \rightarrow k^2 \hat{v}$ temos

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}} &= -i [\hat{v}, \hat{H}_{2U}] = a^2 \hat{\pi} \quad , \\ \dot{\hat{\pi}} &= -i [\hat{\pi}, \hat{H}_{2U}] = -a^2 \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) \hat{v} \quad . \end{aligned}$$

Juntando estas duas equações encontramos

$$\hat{v}'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) \hat{v} = 0 \quad . \quad (4.137)$$

Mostramos assim que é possível, apenas através de transformações canônicas e redefinições da função lapso, reformularmos o sistema hamiltoniano para gravitação com campo escalar até primeira ordem nas perturbações até encontrarmos uma hamiltoniana que consigamos aplicar o procedimento de quantização de forma consistente.

A quantização é feita com o uso de uma variável que não corresponde ao potencial de Mukhanov-Sasaki, porém, uma vez quantizado o sistema, podemos fazer uma transformação unitária de forma a retornarmos a este potencial e conseguimos assim consistentemente encontrar a equação (4.137) já bem conhecida na literatura.

A diferença fundamental para o nosso procedimento é que agora podemos usar esta equação com a evolução do fator de escala dada pelas trajetórias quânticas. Embora a forma desta equação seja a mesma, o comportamento do termo de massa deve ser necessariamente diferente para sistemas onde precisamos levar em conta correções quânticas.

Capítulo 5

Comentários Finais

Neste trabalho, dedicamo-nos ao estudo da dinâmica da evolução do Universo para uma fase anterior à nucleossíntese. Assumimos categoricamente que a matéria se comporta como um campo escalar minimamente acoplado à gravitação, que é descrita pela Teoria da Relatividade Geral de Einstein.

No capítulo 3 desenvolvemos os pontos fortes e fracos do paradigma inflacionário e argumentamos a importância do ponto de vista científico de desenvolvermos modelos de Universos não singulares.

Dentro deste cenário, o capítulo 4 foi dedicado à análise de dois modelos de Universo eterno não singulares. Na seção 4.1, caracterizamos um sistema onde tanto a gravitação quanto o campo escalar se comportam classicamente. Para garantir a consistência da evolução dinâmica deste sistema fomos forçados a considerar apenas Universos compactos, com seções espaciais com curvatura positiva $\mathcal{K} = 1$. Em seguida, na seção 4.2, descrevemos a evolução do sistema de acordo com o programa de mini-superespaço, considerando os possíveis efeitos quânticos sobre as trajetórias do fator de escala e do campo escalar, a partir da interpretação causal da mecânica quântica, também chamada de interpretação de Bohm - de Broglie.

A análise do sistema clássico foi desenvolvida em duas etapas. Primeiramente, caracterizamos a dinâmica para a evolução do sistema homogêneo e isotrópico para um campo escalar com um potencial arbitrário. Mostramos que é possível construir modelos de ricochete com duas fases de comportamento quase-exponenciais. Antes da contração e depois da expansão quase-exponencial, o termo de curvatura é desprezível, e o sistema se comporta como se as

seções espaciais fossem planas. Com o auxílio de uma expansão em série com relação ao tempo conforme tomada em torno do valor mínimo do fator de escala, momento este que foi considerado como a origem temporal do sistema, podemos perceber que as soluções que descrevem ricochetes simétricos representam um sub-espaço de medida nula. Para não recairmos neste problema de ajuste fino basta considerarmos modelos com ricochetes assimétricos ($\delta \neq 0$) onde a condição de energia nula $\rho + p = \dot{\varphi}^2 > 0$ não é violada, embora a condição de energia forte $\rho + 3p \propto -\ddot{a} \geq 0$ seja necessariamente violada para conseguirmos realizar o ricochete $\ddot{a} > 0$.

Ao considerarmos um potencial do tipo $\lambda\varphi^4$ para um campo escalar massivo na forma $V(\varphi) = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \Lambda$, encontramos que a dinâmica do sistema não perturbado é extremamente interessante estimulando-nos a considerar este sistema como uma descrição completa do Universo antes da nucleossíntese. Nesta evolução o campo escalar se encontra no seu estado de vácuo, num dos mínimos do potencial e em seguida, devido a contração do fator de escala, ele começa a oscilar. O campo escalar vai ganhando energia até ultrapassar o máximo do potencial, quando o fator de escala atinge o seu valor mínimo, e o termo de fricção na equação de Klein-Gordon muda de sinal passando a retirar energia do campo escalar. O campo escalar então desce o potencial e volta a oscilar, porém agora diminuindo a amplitude de oscilação até retornar ao repouso no outro mínimo do potencial.

As perturbações escalares foram descritas pelo formalismo invariante de calibre de primeira ordem, com o auxílio do potencial de Bardeen, da variável u e da variável v conhecida como variável de Mukhanov-Sasaki Ref.'s [38, 42, 44]. Enquanto o potencial de Bardeen e a variável u são bem comportadas através do ricochete, a variável v apresenta divergências em seu potencial acarretando descontinuidades em sua evolução. Por outro lado, se considerarmos o limite $\varphi' \rightarrow 0$, a única equação dinâmica bem definida é a equação para a variável de Mukhanov-Sasaki para o caso plano $\mathcal{K} = 0$. Como comentamos anteriormente, embora não tenhamos conseguido encontrar uma boa generalização para a variável de Mukhanov-Sasaki para o caso curvo $\mathcal{K} \neq 0$, é bem provável que isto seja possível uma vez que o sistema de equações original é regular neste regime.

O fato de haver uma fase de contração quase-exponencial anterior ao ricochete nos mostra que não há região onde o termo k^2 domine sobre o potencial, tornando impossível estabelecermos condições iniciais de vácuo para as perturbações escalares. Assim, fomos forçados a ampliar a proposta e supor que pode ter havido uma fase anterior a esta descrita pelo campo

escalar, possivelmente dominada por um fluido perfeito, onde é possível consistentemente estabelecermos as condições iniciais.

A partir desta hipótese, calculamos qual é a matriz de transferência para as perturbações escalares ao passarem pelo ricochete. As perturbações escalares só são influenciadas pelo potencial durante as fases de contração e expansão quase-exponencial, enquanto que durante o ricochete elas oscilam como ondas planas pois é o termo k^2 que domina. Ao calcularmos o espectro de potência para perturbação de curvatura, $\mathcal{P}_{\zeta_{BST}}$, encontramos que ele é dado por uma lei de potência em k multiplicado por uma função oscilatória eq. (4.56). Esta expressão foi re-escrita, eq. (4.57), de forma a podermos comparar mais facilmente com os dados observacionais. Não é direta a associação do parâmetro adimensional w da equação (4.57) aos parâmetros livres do sistema. De qualquer forma, esta expressão parece ser compatível com os dados do WMAP Ref. [102].

Para os modelos quânticos de mini-superespaço, após uma mudança de variável definida por $\alpha = \ln(a)$, quantizamos o sistema utilizando a interpretação causal da mecânica quântica. A mudança de variável nos livra dos cuidados necessários ao se quantizar uma variável que seja apenas definida na semi-reta real para que seja garantida a unitariedade da evolução da função de onda.

Para os três valores do parâmetro que define a curvatura das seções espaciais, as equações de Wheeler - de Witt possuem soluções que podem ser expandidas a partir de funções base. Para o caso plano estas funções representam ondas planas na forma e^{ikx} enquanto que para os casos curvos a sua expressão é um pouco mais complicada, eq.(4.80). Estas soluções já haviam sido encontradas em trabalhos anteriores Ref.'s [115, 116].

Com a escolha de uma superposição específica para a função de onda inicial, a qual pode ser entendida como uma generalização da superposição gaussiana feita nos trabalhos citados acima, o estudo do espaço de fase nos mostra a diversidade de soluções possíveis. Este comportamento deve ser atribuído exclusivamente a efeitos quânticos, uma vez que eles diferem significativamente das soluções clássicas.

Neste sistema, encontramos soluções de Universos cíclicos, soluções singulares do tipo “Big Bang - Big Crunch” ou Universos que começam (terminam) em uma singularidade e se expandem (contraem) eternamente podendo inclusive passar por um período intermediário quase-estacionário. Além disso, existem dois outros tipos de solução que são não singulares.

Num destes casos o Universo realiza um ricochete, enquanto que a outra solução representa um modelo inflacionário não singular. Esta última solução só é possível devido à generalização feita na função de onda inicial.

Este modelo inflacionário não singular tem um comportamento similar aos modelos emergentes Ref. [92] e de pre-Big Bang Ref.'s [93]-[95]. No passado remoto, o Universo tem um volume finito quase constante, e é essencialmente plano. A sua expansão começa acelerada até um momento de transição t_{tran} quando passa a ser desacelerada. Depois desse momento, em torno de $ht \approx 0$, o sistema se comporta classicamente com o valor do fator de escala e^{α_0} vezes maior do que o seu valor inicial. Temos então um Universo plano e quântico que infla de um volume finito, com α_0 “e-fold’s”, até que a dinâmica entra num regime clássico quando pode ser que haja uma transição para uma evolução dominada por radiação e este modelo seja conectado com o modelo padrão da cosmologia antes da nucleossíntese.

A análise dessa fase de transição e a validade desta proposta de conectar este modelo ao modelo padrão requerem um estudo mais detalhado o qual deverá ser o tema de trabalhos futuros.

Um passo importante para estudarmos modelos como este descrito acima foi implementado ao conseguirmos encontrar a equação dinâmica quântica para as perturbações, sem fazer nenhuma referência às equações clássicas de ordem zero.

Utilizando apenas transformações canônicas e redefinições da função lapso, reformulamos o sistema hamiltoniano para o campo escalar livre tornando possível quantizá-lo de forma consistente. Embora a variável quantizada não seja a de Mukhanov-Sasaki, com o auxílio de uma transformação unitária dependente do tempo, retornamos à esta variável ao mesmo tempo em que recuperamos a “correta” equação dinâmica para os operadores associados às perturbações escalares.

Como comentado anteriormente, o fato de não termos utilizado as equações de ordem zero permite-nos estudar a evolução das perturbações com relação a uma dinâmica de fundo com correções quânticas.

Nesta linha existem dois trabalhos imediatos a serem feitos. Seria interessante generalizar esta técnica para quantizarmos as perturbações escalares para o caso de um campo escalar sob o efeito de um potencial $V(\varphi)$ e também considerarmos a possibilidade das seções espaciais serem curvas, $\mathcal{K} \neq 0$. Além disso é evidente que torna-se necessário investigarmos quais

modificações são geradas na evolução das perturbações ao considerarmos que o fator de escala segue uma trajetória distinta da trajetória clássica. Podemos, por exemplo, calcular como se modifica o espectro das perturbações $\mathcal{P}_{\zeta_{BST}}$ para o modelo inflacionário do tipo pré- Big-Bang e compará-lo com os dados observacionais.

Referências Bibliográficas

- [1] R. C. Tolman; “**Relativity, thermodynamics and cosmology**”, ed. Dover (1987).
- [2] A. Einstein; artigo: “Zum Kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie” em *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 235 (1931); traduzido para francês em Einstein, *Oeuvres choisies*, t. III, Relativités II, p. 107.
- [3] J. P. Luminet; “**Alexandre Friedmann et Georges Lemaître: Essais de Cosmologie**”, ed. Seuil (1997).
- [4] M. Novello e J. Salim; *Physical Review* **D20**, 377 (1979).
- [5] A. Vilenkin; *Nuclear Physics* **B 252**, 141 (1985).
- [6] V. N. Melnikov e S. V. Orlov; *Physics Letters* **A70**, 263 (1979).
- [7] Di Stefano; *Physical Review D* 27, 1752 (1983).
- [8] Alejandro Cabo; *Physical Review D* 42, 2726 (1990).
- [9] P.A.M Dirac, “*Lectures on Quantum Mechanics*”, ed. Dover (2001).
- [10] Goldstein; “*Classical Mechanics*” 3rd ed. Addison Wesley, cap.9 (2002).
- [11] P.G. Bergmann; *Physical Review* 98,531 (1955).
- [12] J. Anderson, P.G. Bergmann; *Physical Review* 83,1018 (1951).
- [13] P.A.M Dirac; *Canadian Journal of Mathematics* 2,129 (1950).
- [14] K. Sundermeyer; “*Constrained Dynamics with Application to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String*”, *Lecture notes in physics* 168 ed. springer-Verlag, Berlim (1982).
- [15] D.Bohm; *Physical Review* 85, 166 (1952).
- [16] L. de Broglie; *Compt. Rend.* 184, 447 (1926).
- [17] L. de Broglie; *Compt. Rend.* 184, 273 (1927).
- [18] L. de Broglie; *Compt. Rend.* 185, 380(1927).
- [19] H. Everett; *Reviews of Modern Physics* 29-3, 454 (1957).
- [20] N. Pinto- Neto; VIII BSCG, 299 (1995).
- [21] D. Bohm; *Physics Reports* 144- 6, 323 (1987).
- [22] C. Philippidis, C. Dewdney, B. J. Hiley; *Nuovo Cimento* B52, 15 (1979).
- [23] J. Bell; *Physics World*, pág. 33 (August 1990).
- [24] D. Bohm, B. Hiley; *Foundation of Physics-Vol. 14- n 3*, 255 (1984).
- [25] P. Holland; “*The Quantum Theory of Motion*”, ed. Cambrigde (2000).

- [26] D. Bohm, B. Hiley, P. N. Kaloyerou, Physics Reports 144- n.6, 349 (1987).
- [27] D. Bohm, Physical Review 85, 180 (1952).
- [28] P.G. Bergmann; Physical Review 75, 680 (1949).
- [29] P.A.M. Dirac; Canadian Journal of Mathematics 3, 1 (1951).
- [30] P.G. Bergmann; Helv. Phys. Acta. Suppl. IV, 79 (1956).
- [31] R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner; “*Gravitation: An Introduction to Current Research*”, L. Witten, ed. Wiley- NY (1962).
- [32] S. W. Hawking, The Astrophysical Journal **145**, 544 (1966).
- [33] G. F. Ellis e M. Bruni; Physical Review **D40**, 1804 (1989).
- [34] G. F. Ellis, J. Hwang, e M. Bruni; Physical Review **D40**, 1819 (1989).
- [35] J. M. Salim; tese de doutorado “*Equações quase-maxwellianas da gravitação*”, CBPF (1982).
- [36] M. Novello, J. M. Salim, M. C. Motta da Silva, S. E. Jorás, e R. Klippert; Physical Review **D51**, 450 (1995).
- [37] M. Novello, J. M. Salim, M. C. Motta da Silva, S. E. Jorás, e R. Klippert; Physical Review **D52**, 730 (1995).
- [38] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman e R. H. Brandenberger, Physics Reports **215**, 203 (1992).
- [39] J. Bardeen, Bull. Am. Astron. Soc. **73** (1968).
- [40] J. Bardeen, Physical Review D **22**,1882 (1980).
- [41] M. Novello; “**Cosmologia Relativística**”, II BSCG vol.1, 203 (1979) - disponível no endereço [http : //www.cbpf.br/%7Ecosmogra/Escolas/ind_cosmologia_classica.html](http://www.cbpf.br/%7Ecosmogra/Escolas/ind_cosmologia_classica.html)
- [42] P. Peter e J. P. Uzan; “*Cosmologie primordiale*”, ed. Belin (2005).
- [43] J. Martin, P. Peter; Physical Review **D68**, 103517 (2003).
- [44] V. Mukhanov; “*Physical Foundations of Cosmology*”, ed. Cambridge University Press (2005).
- [45] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, and M. S. Turner, Phys. Rev. D **28**, 679 (1983).
- [46] J. A. Frieman and M. S. Turner, Phys. Rev. D **30**, 265 (1984).
- [47] R. Brandenberger and R. Kahn, Phys. Rev. D **29**, 2172 (1984).
- [48] D. H. Lyth, Phys. Rev. D **31**, 1792 (1985).
- [49] J. Martin e D. J. Schwarz; Physical Review **D57-6**, 3302 (1998).
- [50] A. Einstein; artigo:“Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie” em *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1917).
- [51] J. Merleau-Ponty; “*La science de l’univers a l’âge du positivisme*”, ed. Vrin (1983).
- [52] A. Koyré; “*Du monde clos à l’ univers infini*”, ed.Gallimard (1973).
- [53] S. Dodelson; “*Modern cosmology*”, ed. Academic Press (2003).
- [54] P. J. E. Peebles; “*Physical cosmology*”, ed. Princeton University Press (1971).
- [55] T. Padmanabhan; “*Structure Formation in the Universe*”, ed. Cambridge University Press (1993).
- [56] E. W. Kolb e M. S. Turner; “*The early universe*” / Edward W. Kolb, ed. Addison-Wesley Publishing Company (1993).

- [57] P. Coles, F. Lucchin, “*Cosmology: the origin and evolution of cosmic structure*”, ed. John Wiley & Sons (2002).
- [58] J. A. Peacock; “*Cosmological physics*”, ed. Cambridge University Press (1999).
- [59] J. Leslie; “**Modern Cosmology & Philosophy**”, ed. Prometheus Books (1999).
- [60] J. L. Anderson; “*Principles of Relativity Physics*”, ed. Academiei Republicii Socialiste Romania (1967).
- [61] M. Dine, Review of Modern Physics **76**, 1 (2004).
- [62] A. D. Sakharov, JETP Lett. **6**, 24 (1967).
- [63] B. A. Basset, S. Tsujikawa e D. Wands; Review of Modern Physics **78**, 537 (2006).
- [64] Andrei D. Linde; “*Inflationary and quantum cosmology*”, ed. Academiei Republicii Socialiste Romania (1990).
- [65] A. D. Linde; Physics Letters **B108**, 389 (1982).
- [66] A. D. Linde; Physics Letters **B116**, 335 (1982).
- [67] A. Albrecht and P. J. Steinhardt Physical Review Letters **48** 1220 (1982).
- [68] D. S. Salopek, J. R. Bond; J. M. Bardeen Physical Review **D40**, 1753 (1989).
- [69] D. S. Salopek, J. R. Bond; Physical Review **D43**, 1005 (1991).
- [70] J. Martin, D. J. Schwarz Physical Review **D62**, 103520 (2000).
- [71] D. J. Schwarz, C. A. Terrero-Escalante, and A. A. García, Physics Letters **B517**, 241 (2001).
- [72] A. A. Starobinsky; JETP Letters **30**, 682 (1979).
- [73] A. A. Starobinsky; Physics Letters **91B**, 99 (1980).
- [74] V. Mukhanov e G. Chibisov; JETP Letters **33**, 532 (1981).
- [75] Alan H. Guth; Physical Review **D23** n-2, pag. 347 (1981).
- [76] A. D. Linde; Physics Letters **B129**, 177 (1983).
- [77] M. Abramowitz e I. A. Stegun; “*Handbook of Mathematical Functions*”, ed. National Bureau of Standards (1964).
- [78] R. H. Brandenberger arXiv: **hep-ph/0101119** (2001).
- [79] R. Wald; General Relativity and Gravitation **34** 2043 (2002).
- [80] R. H. Brandenberger; arXiv: **astro-ph/0208103** (2002).
- [81] F. Adams, K. Freese and A. Guth; Physical Review **D43**, 965 (1991).
- [82] J. Martin, R. H. Brandenberger, Physical Review **D63**, 123501 (2001).
- [83] S. W. Hawking e F. R. George Ellis; “*Large Scale Structure of Space-Time*”, ed. Cambridge University Press (1984).
- [84] M. Bojowald; arXiv: **gr-qc/0702144** (2007).
- [85] D. N. Spergel et al.; The Astrophysical Journal Supplement Series **170**, 377 (2007).
- [86] A. Borde and A. Vilenkin; Physical Review Letters **72**, 3305 (1993).
- [87] C. Brans e R. H. Dicke; Physical Review **124**, 925 (1961).
- [88] F Hoyle; “**Steady-state cosmology re-visited**”, ed. University College Cardiff Press (1980).

- [89] F. Hoyle, G. Burbidge e J. V. Narlikar ; The Astrophysical Journal **410**, 437 (1993).
- [90] M. Novello e S.E.Perez Bergliaffa; arXiv: **astro-ph / 0802.1634** (2008).
- [91] M. Novello; “**The Program of an Eternal Universe**”, V BSCG, 245 (1987) - disponível no endereço [http : //www.cbpf.br/%7Ecosmogra/Escolas/ind_cosmologia_classica.html](http://www.cbpf.br/%7Ecosmogra/Escolas/ind_cosmologia_classica.html).
- [92] D. J. Mulryne, R. Tavakol, J. E. Lidsey and G. F. Ellis; Physical Review **D71**, 123512 (2005).
- [93] G. Veneziano; Physical Letters **B265**, 287 (1991).
- [94] M. Gasperini and G. Veneziano; Astroparticle Physics **1**, 317 (1993).
- [95] J. E. Lidsey, D. Wands and E. J. Copeland; Physics Report **337**, 343 (2000).
- [96] C. Gordon, N. Turok; Physical Review **D67**, 123508 (2003).
- [97] E. Lifshitz, I. Khalatnikov; Adv. Phys. **12**, 185 (1963).
- [98] R. Lehoucq et al.; Classical and Quantum Gravity **19**, 4683 (2002).
- [99] V. F. Mukhanov, G. V. Chibisov; ZhETF Pis ma Redaktsiiu **33**, 549 (1981).
- [100] V. F. Mukhanov, G. V. Chibisov; Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters **33**, 532 (1981).
- [101] M. Sasaki, Progress Theoretical Physics **70**, 394 (1983).
- [102] F. T. Falciano, Marc Lilley, and Patrick Peter submitted to Physical Review **D** (2007).
- [103] Ya. B. Zel’dovich, Sov. Phys. - JETP **14** 1143 (1962).
- [104] B. Zwiebach; “*A First Course in String Theory*”, ed. Cambridge University Press (2004).
- [105] K. Becker, M. Becker e J. H. Schwarz; “*String Theory and M-Theory: A modern introduction*”, ed. Cambridge University Press (2007).
- [106] M. B. Green, J. H. Schwarz e E. Witten; “*Superstring Theory:Introduction*”, ed. Cambridge University Press (1987).
- [107] Carlo Rovelli; “*Quantum Gravity*”, ed. Cambridge University Press (2007).
- [108] M. Bojowald, Phys. Rev. Lett. **86**, 5227 (2001);
- [109] M. Bojowald, Phys. Rev. D **64**, 084018 (2001);
- [110] A. Ashtekar, M. Bojowald and J. Lewandowski Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 233 (2003).
- [111] Felipe T. Falciano, Nelson Pinto-Neto, and E. Sergio; Santini Physical Review **D76**, 083521 (2007).
- [112] J. Martin, N. Pinto-Neto and I. D. Soares, JHEP **0503**, 060 (2005).
- [113] N.A. Lemos; Journal Math. Phys. Vol.37 n3 (1996) 1449.
- [114] E. Farhi; Int. J. Mod. Phy. A Vol.5 n15 (1990) 3029.
- [115] R. Colistete Jr., J. C. Fabris, and N. Pinto-Neto, Physical Review **D 62**, 083507 (2000).
- [116] N Pinto-Neto and E. Sergio Santini, Phys. Lett. **A 315**, 36 (2003).
- [117] J. A. de Barros and N. Pinto-Neto, Int. J. of Mod. Phys. **D7**, 201 (1998).
- [118] N. Pinto-Neto and E. Sergio Santini, Phys.Rev. D **59** 123517 (1999).
- [119] E. Sergio Santini, PhD Thesis, CBPF-Rio de Janeiro, (May 2000), (gr-qc/0005092).
- [120] N. Pinto-Neto e E. Sergio Santini, Gen. Rel. and Grav. **34**,505 (2002).

- [121] D.Langlois, Classical Quantum Gravity **11**, 389 (1994).
- [122] Patrick Peter, Emanuel J. C. Pinho, Nelson Pinto-Neto; JCAP **07** - 014 (2005); ou em arXiv: **hep-th/0509232** (2005).
- [123] E. J. C. Pinho e N. Pinto-Neto, Phys.Rev. D **76** 023506-1 (2007).
- [124] E. J. C. Pinho, PhD Thesis, CBPFIndex , (Dezembro de 2006).