FRANCISCO ANTONIO DE MORAES DORIA

A EQUAÇÃO DE TEITLER

Representações Finitas do Grupo de Lorentz

TESE DE DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, 1977

Habe nun, ach! Philosophie,
Juristerei und Medizin
und leider auch Theologie
durchhaus studiert, mit heissem Bemühn.
Da steh ich nun, ich armer Tor!
Und bin so klug als wie zuvor;
heisse Magister, heisse Doktor gar,
und ziehe schon an die zehen Jahr
herauf, herab und quer und krumm
meine Schüler an der Nase herum -
und sehe, dass wir nichts wissen können!
Das will mir schier das Herz verbrennen.

(J.W. von Goethe, Faust, I, cena primeira: uma câmara gótica, abobadada e confinada; Fausto inquieto em sua cadeira à escrivaninha).

The synthesis of the calculus of n-variables and of n-dimensional geometry is the basis of what Seldon once called "my little algebra of humanity"...

(Encyclopaedia Galactica, citado por Isaac Asimov, Second Foundation).

À paciência de Margô e à impaciência do Pedro.

E também (por que não?) ao Ansaldo que se enroscava inconvenientemente em meu colo, ao Julião e à Juliana que nunca perdiam uma chance de me morder, enquanto eu trabalhava.

E ao mais novo morador da casa: Guigliarallo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar ao Professor Leopoldo Nachbin, cujo constante apoio e constante interesse me incentivaram a preparar este trabalho. Depois, a meus colegas do Grupo de Física Matemática, do Instituto de Física da UFRJ, Sergio Murilo Abrahão e Antonio Francisco Furtado do Amaral, sempre dispostos a me ouvir e interessados em descobrir os pontos fracos de eventuais argumentações. Bem como aos Professores Adel da Silveira e Ennio Candotti, aquele por sua dedicação espontânea ao Grupo de Física Matemática e este pela influência que teve na constituição de um grupo de pesquisas em área considerada por muitos estéril.

Muito devo também à Professora Annita Macedo, Chefe do Departamento de Física Matemática, e ao Professor Arvind Narayan Vaidya, antigo Chefe do Departamento de Física Teórica do Instituto de Física da UFRJ; sem a compreensão de ambos, este trabalho seria grandemente dificultado. O que é também verdadeiro dos Professores Alexandre Sérgio da Rocha e José Manuel de Aguiar Martins, antigo e atual diretor do Instituto de Física da UFRJ.

E também os eventuais incentivos que me foram dados por amigos tanto do Instituto de Física quanto do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas: Professor Fernando de Sousa Barros, Roberto Moreira Xavier de Araújo, Mário Novello, Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira.

E, enfim, agradeço às instituições onde realizei este trabalho, o Instituto de Física da UFRJ e o Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Bem como aos que o financiaram, o Ministério da Educação e Cultura, a FINEP e o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

RESUMO

Expomos a teoria das álgebras de Clifford a partir de um ponto de vista intrínseco. A teoria dos grupos de Clifford-Chevalley e de Clifford-Atiyah-Bott-Shapiro é a seguir desenvolvida, mostrando-se sua relação aos automorfismo e antiautomorfismo principais da álgebra (Chevalley), e à adjunção de Atiyah-Bott-Shapiro, que, verificamos, é equivalente à adjunção de Dirac largamente empregada em Física. Com esta adjunção, e exigindo-se a invariância de bilineares do tipo $\bar{\Psi}\Gamma\Psi$, chega-se a uma classificação para as representações espinoriais do grupo de Lorentz equivalente aos casos finitos da classificação de Bargmann-Wigner. Em especial, obtemos diretamente por este caminho as equações de Teitler para spins 0 e 1, e equações que implicam os sistemas de Fierz e de Rarita-Schwinger para spins superiores. A Lagrangeana que conduz a tais equações é obtida linearizando-se uma Lagrangeana muito geral. Como aplicação, explicitamos os casos de spin 0 e 1 interagindo ao campo eletromagnético e ao gravitacional, bem como o caso do spin 2 de massa nula interagindo consigo mesmo. São feitas algumas considerações geométricas com a ajuda destes exemplos.

SUMÁRIO.

1. *SPINS SUPERIORES E AS EQUAÇÕES DE TEITLER*

A forma da equação de Dirac é fascinante. E cresce o seu fascínio quando vemos que ela serve como modelo para sistemas físicos aos quais é precário - ao menos em termos imediatos - o parentesco às partículas de spin 1/2. Por exemplo, desde os trabalhos de Laporte, Uhlenbeck e Oppenheimer(1), sabe-se que o sistema de Maxwell para a descrição do campo eletromagnético também pode ser escrito na maneira de Dirac. O resultado destes autores foi, ainda na década de trinta, estendido para partículas de spin 1 com massa (2), mais ou menos ao mesmo tempo em que Rarita e Schwinger (3) usavam um sistema cuja base era uma equação de Dirac possuindo função de onda algo modificada para descrever partículas com spin semi-inteiro qualquer. Outros autores, como de Broglie ou Fierz e Pauli, além do próprio Dirac (4) usaram a equação relativística do elétron como ponto de partida para a formulação das teorias não quantizadas dos spins superiores, e será ainda a equação de Dirac a base para o sistema de Bargmann-Wigner (5), que permanece até hoje como o sistema mais usado quando se trata de manipular, clássica ou quanticamente, os spins maiores que 1/2. Um resultado recente (6) mostrou que, ao nos estendermos até o campo gravitacional, ainda lá encontraremos uma sua formulação à maneira da equação de Dirac.

Se é constante a forma, é difícil a manipulação. Já notava Corson (7) muitos dos problemas presentes nas equações tipo-Dirac para spins superiores: difícil formulação lagrangeana, utilização de álgebras complicadas ou envolvendo objetos singulares (como é o caso da teoria de Duffin-Kemmer). Trabalhos mais recentes (8) destacam outras dificuldades para os sistemas de tipo-Dirac usuais: parece meio ad-hoc a construção das funções de onda de Bargmann-Wigner para os spins superiores, e de um modo geral não se vê claramente qual é a maneira pela qual as equações tensoriais ou tensor-spinoriais associadas a cada sistema de Bargmann-Wigner são obtidas. Ou seja, falta um algoritmo que leve das equações de Bargmann-Wigner a equações diferenciais envolvendo componentes "reconhecíveis" da função de onda: potenciais, campos subsidiários (9).

Parece uma situação anômala; ao menos é o que se suspeita diante de um trabalho de Teitler (10) que se apresentava como sendo pouco mais que um review de pesquisas realizadas pelo matemático sueco Marcel Riesz (11). Teitler postula em seu trabalho duas curiosas equações:

$$(\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + m)\Psi_{o} = 0, \tag{1}$$

onde $\Psi_{o} = -m\Psi + \Psi_{\alpha}\gamma^{\alpha}$

$$(\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + m)\Psi_{1} = 0, \tag{2}$$

onde $\Psi_{1} = -m\Psi_{\alpha}\gamma^{\alpha} + \frac{1}{2}\Psi_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}$,

sendo que $[\gamma^{\alpha}, \gamma^{\beta}]_{+} = 2g^{\mu\nu}$, $\gamma^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\gamma^{\alpha}, \gamma^{\beta}]_{-}$ e os escalares Ψ funções de pontos num espaço de Minkowski. A álgebra das γ^{α} leva, imediatamente, a:

$$\partial^{\alpha}\Psi_{\alpha} = m^{2}\Psi, \tag{3}$$

$$\Psi_{\alpha} = \partial_{\alpha}\Psi, \tag{4}$$

$$\partial_{\alpha}\Psi_{\beta} = \partial_{\beta}\Psi_{\alpha} \tag{5}$$

(onde as eqs. (3) e (4) trivialmente implicam a relação de Klein Gordon $(\Box - m^{2})\psi = 0$, como consequência da eq. (1). E, de (2) obtemos também por simples multiplicação das γ^{α},

$$\partial^{\alpha}\Psi_{\alpha} = 0, \tag{6}$$

$$\partial^{\alpha}\Psi_{\alpha\beta} = m^{2}\Psi_{\beta}, \tag{7}$$

$$\Psi_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\Psi_{\beta} - \partial_{\beta}\Psi_{\alpha}, \tag{8}$$

$$\partial_{\sigma}\Psi_{\alpha\beta} + \partial_{\beta}\Psi_{\sigma\alpha} + \partial_{\alpha}\Psi_{\beta\sigma} = 0 \tag{9}$$

ou seja, o muito familiar sistema de Proca - e todas as suas condições subsidiárias. A Lagrangeana que implica ambas as equações é a de Dirac, *tout court*, onde a função de onda será Ψ_{o} ou Ψ_{1}. Com uma pequena diferença: embora um escalar de Lorentz, esta Lagrangeana não será uma função escalar, uma função com valores em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ela é um objeto pertencente à álgebra de Clifford

Dirac,ou seja, em linguagem mais corriqueira,<u>ela é uma matriz</u>. Teitler não o mostra,mas pode-se perceber, confrontando seu artigo de 1965 ao trabalho de Kamefuchi e Takahashi (12), que a equação de Teitler para spin 1 equivale ao sistema correspondente de Bargmann-Wigner. Mas não é equivalência trivial; as matrizes γ^{α} de Bargmann-Wigner possuirão ordem 16 para o caso do spin 1, enquanto que na equação de Teitler intervêm apenas as matrizes de Dirac habituais (a respeito, veja-se mais adiante a prop. 14.7).

2. *OUTROS EXEMPLOS*

Serão as equações de Teitler generalizáveis para spins superiores? Embora seu autor se limite aos primeiros spins no trabalho de 1965, um rápido cálculo mostra que da equação

$$(e^{\mu}_{1}\partial_{\mu} + m)\Psi = 0, \tag{1}$$

onde $e^{\mu}_{1} = \gamma^{\mu} \otimes 1$, se tomarmos

$$\Psi = \Psi_{3/2} = -m\Psi_{\mu A}\,(\sigma^{A} \odot \gamma^{\mu}) + \frac{1}{2}\Psi_{[\mu\nu]A}\,(\sigma^{A} \odot \gamma^{\mu\nu}) \tag{2}$$

ou

$$\Psi = \Psi_{2} = -m\Psi_{\alpha\beta}\,(\gamma^{\alpha} \odot \gamma^{\beta}) + $$
$$+ \Psi_{[\alpha\beta]\rho}\,(\gamma^{\alpha\beta} \odot \gamma^{\rho}) - \frac{1}{4m}\Psi_{[\alpha\beta][\rho\sigma]}\,(\gamma^{\alpha\beta} \odot \gamma^{\rho\sigma}) \tag{3}$$

(para a notação veja-se (13)) obteremos os sistemas clássicos de Rarita-Schwinger para spin 3/2 e de Fierz para spin 2. A este último se fará necessário juntar uma condição extra, $\Psi^{\alpha}_{\alpha} = 0$. Explicitamente, (1) e (2) implicam:

$$\partial^{\alpha}\psi_{\alpha A} = 0, \tag{4}$$

$$(\gamma^{\alpha}\partial_{\alpha} + m)\Psi_{\mu} = 0, \tag{5}$$

$$\Psi_{[\mu\nu]A} = \partial_{\mu}\Psi_{\nu A} - \partial_{\nu}\Psi_{\mu A}, \tag{6}$$

$$\partial^{\alpha}\Psi_{[\alpha\nu]A} = m^{2}\Psi_{\nu A}, \tag{7}$$

$$\partial_\alpha \Psi_{[\mu\nu]A} + \partial_\nu \Psi_{[\alpha\mu]A} + \partial_\mu \Psi_{[\nu\alpha]A} = 0, \tag{8}$$

$$(\gamma^\alpha \partial_\alpha + m)\Psi_{[\mu\nu]} = 0 \tag{9}$$

(nas eqs. (5) e (9) não se escreveram os índices espinoriais). Note-se que a função de onda (2) já foi usada outras vezes em notação diferente (14) e nunca associada à eq. (1). Quanto à eq. (3), veja-se (15) o sistema associado a esta última função de onda e à eq. (1) é

$$\partial^\alpha \Psi_{\alpha\rho} = 0, \tag{10}$$

$$\Psi_{[\mu\nu]\rho} = \partial_\mu \Psi_{\nu\rho} - \partial_\nu \Psi_{\mu\rho}, \tag{11}$$

$$\partial^\alpha \Psi_{[\alpha\nu]\rho} = m^2 \Psi_{\nu\rho}, \tag{12}$$

$$\partial^\alpha \Psi_{[\mu\nu]\alpha} = 0, \tag{13}$$

$$\partial_\alpha \Psi_{[\mu\nu]\rho} + \partial_\nu \Psi_{[\alpha\mu]\rho} + \partial_\mu \Psi_{[\nu\alpha]\rho} = 0, \tag{14}$$

$$\Psi_{[\alpha\beta][\rho\sigma]} = \partial_\alpha \Psi_{\beta[\rho\sigma]} - \partial_\beta \Psi_{\alpha[\rho\sigma]}, \tag{15}$$

$$\partial^\alpha \Psi_{[\alpha\beta][\rho\sigma]} = m^2 \Psi_{\beta[\rho\sigma]}, \tag{16}$$

$$\partial_\alpha \Psi_{[\mu\nu][\rho\sigma]} + \partial_\nu \Psi_{[\alpha\mu][\rho\sigma]} + \partial_\mu \Psi_{[\nu\alpha][\rho\sigma]} = 0. \tag{17}$$

A condição de traço nulo $\Psi^\rho_\rho = 0$ não aparece, e (12) não a implica. Deve, portanto, ser acrescentada para eliminarmos o spin 0 da partícula que Ψ_2 descreve.

Examinando as equações acima vemos o seguinte: (i) a equação de tipo Teitler para spins superiores a 1 parece implicar todas as relações diferenciais que envolvem os potenciais e campos subsidiários utilizados na descrição das partículas correspondentes;(ii) a condição não diferencial $\Psi^\rho_\rho = 0$ precisa ser imposta;(iii) não é óbvio, ainda, o parentesco entre a formulação à Teitler e as correspondentes equações de Bargmann-Wigner;em especial,note-se que (1) usa matrizes 16×16, enquanto que as equações de Bargmann-Wigner para spin 3/2 têm-nas de ordem 64 e para spin 2,de ordem 256.No entanto pressente-se que novamente os dois formalismos -Teitler e BW- devem ser bastante próximos: o fato de ambos usarem representações com ordem maior que

4 para as matrizes de Dirac e o surgimento da função de onda (2) na análise das equações de Bargmann-Wigner são os indícios renovados desta proximidade.

3. *QUE FAZER?*

É interessante, portanto, investigarmos aprofundadamente o formalismo de tipo Teitler para os spins superiores. São diversos os motivos: (i) maior facilidade de cálculo (desde que simples operações algébricas levam da equação tipo Dirac aos sistemas tensoriais e tensor-spinoriais associados, sem a intervenção de objetos mais complicados que matrizes de Dirac); (ii) facilidade da formulação lagrangeana (desde que mesmo a condição de traço nulo pode ser incorporada à função de onda (2.3)). Também (iii) parece ser extremamente interessante a estrutura matemática do formalismo de Teitler, onde uma única equação engloba toda uma família de relações diferenciais subsidiárias de óbvia simetria. As equações de tipo Teitler são mais "simples" que as correspondentes no formalismo de Bargmann-Wigner; sendo estas últimas obtidas a partir de uma teoria das representações para o grupo de Lorentz-Poincaré, é de se esperar que, junto da análise das equações de Teitler obtenhamos uma teoria proporcionalmente mais simples que a de Wigner para aquelas representações.

As equações de Teitler podem, também, levar a questões pouco exploradas no que se refere à associação entre uma teoria "local" e a topologia global do espaço-tempo. É o que surgirá quando escrevermos o operador diferencial de Dirac $\gamma^\alpha \partial_\alpha = \nabla = d - \delta$, onde d é a derivada exterior agindo na álgebra exterior associada à álgebra de Clifford-Dirac, e δ seu dual à Hodge (16).

4. *ESPINORES E ÁLGEBRAS DE CLIFFORD: Aspectos Gerais*

Nas seções 5 a 15 deste trabalho estudamos a teoria das álgebras de Clifford com vistas a desenvolver a teoria das representações do grupo de Lorentz de onde obteremos as equações de Teitler para partículas com qualquer spin. Trata-se, de modo geral, de assunto bem conhecido (17), embora, acreditemos, a exposição aqui seja original no que se refere à ênfase dada (i) à independência com a qual é possível fixar-se um conjunto gerador para a álgebra de Clifford (a indefinição da aplicação i_Q, veja-se a seção 5) e (ii) as alternativas na construção da gradação segundo $\mathbb{Z}_2$ para uma álgebra de Clifford genérica.

Assim sendo, procuramos desenvolver a teoria das álgebras de Clifford não só independentemente da escolha prévia de uma representação matricial como também sem que se fixasse um conjunto privilegiado de objetos para gerar a álgebra através da clássica condição de anticomutação. Muita coisa pode ser demonstrada neste enfoque livre de representações e geradores pré fixados: a existência de álgebras de Clifford simples, toda a sua teoria de representações e mesmo uma descrição minuciosa da sua topologia. O estudo se dirigiu para as álgebras de dimensão finita, embora frequentemente hajamos incluído resultados aplicáveis às dimensões infinitas.

A teoria das representações espinoriais do grupo de Lorentz foi exposta na linha de Chevalley (18), com as mudanças propostas por Atiyah e colaboradores (19) e Crumeyrolle(20). Em especial demos relêvo à adjunção $\tilde{}$ (que aqui chamamos de adjunção ABS em referência a seus criadores), relacionando-a em seguida à clássica adjunção de Dirac na mecânica quântica relativística. Esta adjunção terá papel fundamental na determinação das representações irredutíveis segundo o grupo de Lorentz que conduzirão às equações de Teitler. Seu uso aqui é semelhante a técnica de simetrizar e antissimetrizar um objeto para decompô-lo em pedaços invariantes.

A técnica exposta é mais simples que a teoria de Bargmann-Wigner, que conduz às equações de mesmo nome. Puramente algébrica, sem ser necessário o uso de espaços de Hilbert para chegar ao fim proposto, ela possui como desvantagem o fato de -nunca- utilizarmos aqui objetos unitários (substituídos pelos que satisfazem $u\tilde{u} = \pm 1$). No entanto, um simples argumento mostra a importância dos objetos irredutíveis aqui obtidos: sua irreducibilidade garante serem quaisquer sistemas deles formados através de combinações lineares. E, em seu contexto, a equa ção de Dirac surge como a equação "natural" para a descrição de sistemas lineares com spin.

5. ÁLGEBRAS DE CLIFFORD: *Estrutura Global*

As álgebras de Clifford são álgebras lineares cujo espaço das representações é o espaço dos espinores. Enumeramos e provamos nesta seção e nas próximas algumas de suas propriedades a serem utilizadas em nossa investigação das equações de Teitler. Na maior parte são fatos conhecidos, embora haja propriedades novas; para cada uma delas oferecemos quando for o caso a referência mais importante.

Seja M uma variedade diferenciável complexa, de classe C^{∞}; seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as aplicações de classe C^{∞} $f, g, h, \ldots : M \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ o corpo dos complexos. Atribuimos a $\mathcal{F}$ uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Seja E um $\mathcal{F}$ - módulo; se E for de dimensão infinita, nós lhe daremos a estrutura de um espaço pré-Hilbert. Formemos a álgebra tensorial (<u>21</u>) sobre E, $\otimes$ E. Seja Q uma forma quadrática não degenerada definida na parte real de E e estendida linearmente para todo o $\mathcal{F}$ - módulo E; seu índice (ou sua assinatura) são arbitrários. Designa-se por I o ideal bilateral (<u>22</u>) em $\otimes$ E gerado por $x \otimes x - Q(x)$, $x \in \mathcal{F}$ - módulo E. Então:

<u>1. Definição</u> - $C(E, Q) \cong \otimes E/I$, onde C(E, Q) é a álgebra de Clifford sobre E associada a Q (<u>23</u>).

Seja agora $i_Q : E \longrightarrow C(E, Q)$ a aplicação que identifica E ao subconjunto correspondente de C(E, Q). Então,

<u>2. Proposição</u> - Seja $\varphi : E \longrightarrow A$, A uma $\mathcal{F}$ -álgebra com unidade, linear e tal que $(\varphi(x))^2 = Q(x)$. Então o diagrama abaixo é comutativo (<u>24</u>),

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i_Q"] \arrow[dr, "\varphi"'] & C(E, Q) \arrow[d, "\psi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

<u>Prova</u> - Para $x \in E$, defina-se $\psi i_Q(x) = \varphi(x)$. Óbvio que $(\psi i_Q(x))^2 = Q(x)$. A polarização também mostra que $[\psi i_Q(x), \psi i_Q(y)]_+ = 2B(x, y)$, $x, y \in E$ e B sendo a forma bilinear associada a Q. Estendendo-se i_Q sobre $C(E, Q)$ completamos a prova.

φ, ψ, não são necessariamente isomorfismos: $\psi : C_3 \longrightarrow C_2$, onde C_3 é a álgebra de Clifford com 3 geradores, e C_2 a álgebra dos quatérnions, tomadas ambas sobre os complexos, e com $\psi : \sigma_i' \longmapsto \sigma_i$, onde os σ_i' são os elementos geradores de C_3, enquanto que os σ_i são bases para o espaço vetorial dos quatérnions, satisfaz à condição da prop. 2, embora obviamente não seja um isomorfismo. Por outro lado, é impossível encontrarmos um $\psi : C_4 \longrightarrow C_2$, onde C_4 é a álgebra de Clifford de 4ª ordem (a álgebra dos γ's de Dirac).

A propriedade seguinte conduz às condições de univocidade para a estrutura de $C(E, Q)$:

<u>3. Proposição</u> - Se ψ_1 e ψ_2 são homomorfismos como ψ na prop. 2, e A_1 e A_2 como A, então o diagrama

$$\begin{tikzcd} C(E, Q) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[dr, "\psi_2"'] & A_1 \arrow[d, "\Theta"] \\ & A_2 \end{tikzcd}$$

é comutativo e Θ é um homomorfismo.

<u>Prova</u> - Para $x \in i_Q E \subset C(E, Q)$ identifiquemos $\Theta\psi_1(x) = \psi_2(x)$. Θ é obviamente um homomorfismo, mas não necessariamente um isomorfismo.

Ou seja,

<u>4. Corolário</u> - A estrutura algébrica de $C(E, Q)$ é definida a menos de um isomorfismo.

Costuma haver muita confusão nas manipulações habituais de álgebras de Clifford em Física. No caso mais comum, a álgebra de Dirac, ora é esta utilizada havendo-se fixado previamente um conjunto de geradores e dividindo-se um objeto genérico a ela pertencente em componentes como "vetores", "bivetores", "pseudovetores" e "pseudoescalares", ora é utilizada na "representação" mais conveniente, ou seja, substituindo-se as gamas por matrizes específicas na forma de Weyl ou Majorana ou outra qualquer. O que se pretende demarcar com rigor adequado a sucessão de teoremas de estrutura é que propriedades de uma álgebra de Clifford são intrínsecas (quer dizer, dadas a menos de um automorfismo) e que propriedades não o são. Como veremos na seção 12, isto é fundamental para o estudo das representações espinoriais do grupo ortogonal de $Q(x)$ com a ajuda da álgebra $C(E, Q)$, embora nem sempre se destaque tal fato com a ênfase merecida.

6. ÁLGEBRAS DE CLIFFORD: *Estrutura em Detalhe*

Que isomorfismos têm maior importância para a Física, no estudo das álgebras de Clifford? Um exame de textos standard de Mecânica Quântica e de Teoria Quântica dos Campos (25) dá cuidado especial às "transformações de similaridade" pelas quais diferentes sistemas de representações matriciais se equivalem. Ora, são estas transformações automorfismos internos da álgebra. As proposições que se seguem esboçam uma sua classificação para as álgebras de Clifford. Partimos de um teorema bem conhecido de álgebra:

1. Lema - Seja G um grupo e seja $\mathcal{J}(G)$ o conjunto de seus automorfismos internos. Então $\mathcal{J}(G) \simeq G/Z$, onde Z é o centro de G (26).

Ao qual acrescentamos,

2. Corolário - $\alpha \in \mathcal{J}(G)$ se e somente se $\alpha(z) = z$, $z \in Z$.

Com relação às álgebras de Clifford, chamaremos $^*C(E, Q)$ ao conjunto dos elementos inversíveis da álgebra correspondente; obviamente $^*C(E, Q)$ tem uma estrutura de grupo multiplicativo. Podemos, também, definir uma operação $* : C \longrightarrow C$ (abreviamos C por $C(E, Q)$), onde $^*u = u$ se $u \in {}^*C$, e $^*u = 0$ em caso contrário. Então

3. Proposição - Seja $\Theta : C \longrightarrow C$, um isomorfismo. Então

$\Theta^* = {}^*\Theta$.

$C(E, Q)$ tem uma estrutura de grupo herdada da estrutura multiplicativa da álgebra; seus automorfismos internos $\mathfrak{J}({}^*C) \simeq {}^*C/{}^*Z$, onde o centro ${}^*Z \subset Z$, centro da álgebra. Estendamos estes automorfismos internos para C; ${}^*C/{}^*Z$ será, ainda, o grupo dos automorfismos internos da álgebra (pois, em caso contrário, haveria um automorfismo interno de ${}^*C$ que não estaria em $\mathfrak{J}({}^*C)$). Abreviadamente,

<u>4. Proposição</u> - $\Theta \in \mathfrak{J}(C)$ se e somente se $\Theta \in \mathfrak{J}({}^*C)$.

Um corolário a se destacar é,

<u>5. Corolário</u> - Para $\Theta \in \mathfrak{J}(C)$ e $x \in i_Q E$, $\Theta(x^2) = Q(x)$.

Todas essas provas são triviais; o cor. 5 tem um importante significado: a "métrica" Q é preservada pelos automorfismos internos. Veremos mais adiante que há em $C(E, Q)$ uma "métrica" natural, e que também esta "métrica" é preservada pelos automorfismos internos da álgebra.

Para que possamos ter uma idéia precisa a respeito destes grupos é necessário conhecermos com maior exatidão a estrutura das álgebras de Clifford. Ou seja, com que se parecem tais álgebras; como é seu centro; como é o centro de ${}^*C$.

Para tanto, começamos com:

<u>6. Proposição</u> - Existem álgebras de Clifford simples.

<u>Prova</u> - Seja Z o centro de $C(E, Q)$. O quociente $Z/\mathcal{J}1$ pode ser identificado ao conjunto de objetos "unimodulares" pertencentes a este centro (aspas necessárias, pois ainda não definimos um módulo para $C(E, Q)$), como, p.e., a unidade de álgebra. Escrevendo $\mathcal{S} = Z/\mathcal{J}1$, formemos o quociente (e a correspondente aplicação natural) $\pi : C(E, Q) \longrightarrow C(E, Q)/\mathcal{S}$. Este quociente é uma álgebra simples; é também uma álgebra de Clifford, pois π satisfaz à condição $(\pi(x))^2 = Q(x)$, para $x \in i_Q E$. Sendo $\pi i_Q E$ obviamente um espaço vetorial, há um isomorfismo $\varphi : \pi i_Q E \longrightarrow E'$, E' um $\mathcal{J}$-módulo e da álgebra tensorial $\otimes E'$ podemos obter uma álgebra de Clifford $\otimes E'/I'$ isomorfa a $C(E, Q)/\mathcal{S}$. Um diagra

ma sintetiza estas relações:

$$\begin{tikzcd}
 & & \otimes E'/I'(Q) \arrow[dl, "\theta"'] \\
C(E, Q) \arrow[r, "\pi"] & C(E, Q)/\mathcal{S} \arrow[dr, "\varphi"'] & \\
 & & E' \arrow[uu, "i_Q"']
\end{tikzcd}$$

Notemos que φ^{-1} e θ satisfazem às condições da prop. 5.2. Este é o primeiro teorema de estrutura para as álgebras de Clifford, desde que toda álgebra simples (se de dimensão finita) é isomorfa a um anel de matrizes sobre os escalares da álgebra.

Para que se conheça com mais detalhes a estrutura das álgebras genéricas C(E, Q), são necessárias ainda algumas etapas:

<u>7. Definição</u> - Para $x \in i_Q E$, $x \wedge x = x^2 - Q(x)$. O produto $\wedge$ é estendido para toda a álgebra C(E, Q).

<u>8. Corolário</u> - $x \wedge y = -y \wedge x$.

Definamos agora uma aplicação $\lambda : C(E, Q) \longrightarrow \Lambda(E)$, onde $\Lambda(E)$ é a álgebra exterior sobre E. Para $x \in i_Q E$, $x^2 \mapsto \lambda(x^2) = x \wedge x$, e é estendido sobre toda a álgebra. Então,

<u>9. Proposição</u> - λ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Donde,

<u>10 Corolário</u> - A dimensão da álgebra C(E, Q) enquanto $\mathcal{J}$ - módulo, $\dim_{\mathcal{J}} C(E, Q) = 2^m$, onde $\dim_{\mathcal{J}} E = m < \infty$.

Com isto chegamos à

<u>11. Proposição</u> - (Teorema de estrutura para álgebras de Clifford com dimensões finitas). Se $m < \infty$, C(E, Q) é simples quando m for par, e é a soma direta de duas álgebras simples se m for ímpar. Se Z é o centro da álgebra, $Z = \mathcal{J}1$ (e $Z = {}^*Z$) quando a álgebra é par; quando for ímpar, $\dim_{\mathcal{J}} Z = 2$, e Z possui dois projetores centrais, sendo que então $^*Z \neq Z$.

Prova - Se $C(E, Q)$ é simples, então há um isomorfismo $i : C(E, Q) \longrightarrow M(r, \mathcal{F})$, a álgebra das matrizes de ordem r sobre $\mathcal{F}$, para um valor apropriado de r. Já que $r^2 = \dim_{\mathcal{F}} C(E, Q)$, 2^m será um quadrado apenas quando $m = 2\nu$, $\nu = 1,2,3,\ldots$. Quando $m = 2\nu + 1$, não há um tal isomorfismo, e a álgebra de Clifford será então a soma direta de dois ideais bilaterais gerados por projetores centrais. Obviamente deixarão de coincidir o centro de $^*C$ e o centro da álgebra.

O caso das álgebras com dimensão infinita é aqui incluído para termos um tratamento completo. Sendo E um espaço pré-Hilbert, sua base linear é enumerável. A norma pré-Hilbertiana deste espaço é escrita $||x||_H$, $x \in E$. Então $Q(x)<\infty$, qualquer que seja sua assinatura (isto é, seja seu índice finito ou não). O teorema de estrutura parte do

12. Lema - Seja F E um subespaço linear e Q_F a restrição para F de Q. Então $C(F, Q_F) \subset C(E, Q)$, e $C(F, Q_F) \simeq C(E, Q)|_F$.

13. Proposição - (27) Se E tem dimensão infinita então $C(E, Q)$ é simples.

Prova - Forme $E = \bigcup_{n=2}^{\infty} F_n$, n par. Então

$$C(E, Q) = \bigcup_{n=2}^{\infty} C(F_n, Q_n), \quad Q_n = Q_{F_n}.$$

É fácil ver que a união feita sobre as álgebras ímpares não acrescenta nenhum elemento que comute com todos os elementos da álgebra (pois $\bigcup^{n} C(F_n, Q_n)$, n ímpar, terá sempre objetos que não comutam com algum de $C(F_{n+1}, Q_{n+1})$).

Com as props. 11 e 13 descrevemos precisamente a estrutura das álgebras de Clifford sobre um espaço pré-Hilbert E. Para detalhá-la, completaremos esta seção com alguns teoremas bastante conhecidos:

14. Proposição - Se $C(E, Q)$ é simples e de ordem $2\nu, \nu = 1, 2, \ldots$, então $^*C \simeq GL(2^\nu, \mathcal{F})$, e $\mathcal{J}(C) \simeq GL(2^\nu, \mathcal{F})/1\mathcal{F}$, que é $SL(2^\nu, \mathcal{F})$ a menos de um sinal. Se $C(E, Q)$ é semi-simples e tem ordem $2\nu + 1$, então $^*C \simeq GL(2^\nu, \mathcal{F}) \oplus GL(2^\nu, \mathcal{F})$.

15. <u>Proposição</u> - Escrevamos $\otimes (A)^{\nu} = A \otimes A \otimes A \ldots$, ν vezes. Se C_2 for a álgebra dos quatérnions complexos, então $C_{2\nu} \cong \otimes (C_2)^{\nu}$.

16. <u>Proposição</u> - $C_{2+1} \cong \otimes (C_2)^{\nu} + \otimes (C_2)^{\nu}$. O centro de $C_{2\nu+1}$ é gerado linearmente pelos elementos $1 = 1_{2\nu} \oplus 1_{2\nu}$ e $z = 1_{2\nu} \oplus (-1)_{2\nu}$.

As referências <u>standard</u> para os teoremas acima são os trabalhos de Brauer e Weyl e os textos de Corson e Bœrner (<u>28</u>). A construção de álgebras de Clifford como o produto antissimétrico direto do corpo dos complexos por si mesmo está em Atiyah, Bott e Shapiro (<u>29</u>). O caso da dimensão infinita é dado por:

17. <u>Proposição</u> - Seja E um espaço pré-Hilbert com dimensão não finita (embora separável). Então $C(E,Q) \cong \lim_{\nu\to\infty} \otimes (C_2)^{\nu}$. Se E é completado, C(E, Q) se estende a $C(\bar{E}, Q)$, onde $\bar{E}$ é o fecho de E, e sua representação estará em $\mathcal{B}(\bar{E})$, a álgebra dos operadores limitados em $\bar{E}$ (<u>30</u>).

Note-se que no limite indicado acima cada termo possuirá um número finito de fatores diferentes da unidade quaterniônica. A extensão do teorema é óbvia.

É também importante explicitarmos uma propriedade de uso frequente (<u>31</u>):

18. <u>Proposição</u> - Definamos o traço de um elemento $u \in C(E, Q)$, $sp\ u = sp\ \rho(u)$, ρ sendo uma representação fiel da álgebra, e u qualquer elemento desta. Então $u = (sp\ u)1 \oplus u'$, $u' \in C(E, Q) - Z$.

<u>Prova</u> - As matrizes de Pauli, representação para os geradores da álgebra dos quatérnions, têm traço nulo. Assim sendo, devido à prop. 15 (para o caso das álgebras simples), as representações dos geradores destas terão traço nulo, de modo que para o traço contribuirá apenas a identidade da álgebra, donde a decomposição indicada. No caso das álgebras semi-simples, para o traço contribuem apenas os projetores centrais $e_{\pm}$, de modo

que teríamos $sp\ u = sp\ u_+ \oplus sp\ u_-$, $e(sp\ u)1 = sp\ u_+e_+ \oplus sp\ u_-e_- =$ $= (sp\ u_+e_+ \oplus sp\ u_-e_-)(e_+ \oplus e_-)$. Donde o resultado.

Daí podemos definir

19. Definição - $(u, v)_C = sp\ uv$, $u, v \in C(E, Q)$.

20. Corolário - Se $\alpha \in \mathfrak{J}(C)$, então $(\alpha(u), \alpha(v))_C = (u,v)_C$. E também, para $x, y \in i_Q E$, $(x, y)_C = B(x, y)$, onde B é a forma bilinear associada a Q.

Isto quer dizer que todo elemento de $\mathfrak{J}(C)$ preserva o produto escalar indefinido $(,)$. No entanto $\mathfrak{J}(C) \subset O(C, Q)$, o grupo ortogonal da álgebra de Clifford, e a inclusão é própria, pois para que sejam preservados os produtos dos elementos da álgebra existirão condições subsidiárias que farão com que nem toda transformação pertencente ao grupo ortogonal da álgebra seja um automorfismo interno (32).

7. *TOPOLOGIA NAS ÁLGEBRAS DE CLIFFORD*

Nosso estudo exigirá a construção de objetos diferenciáveis sobre a álgebra. Assim sendo, é preciso que se tenha bem clara a topologia de $C(E, Q)$. No caso das dimensões finitas, esta topologia é induzida pelas representações; no caso da dimensão infinita não há tanta clareza. Em especial, como podemos associar uma métrica ao produto indefinido $(\ ,\ )_C$ acima, é preciso ver a compatibilidade entre esta métrica e as topologias num espaço de Hilbert. O que se segue adapta para nós resultados de Shale e Stinespring (33).

1. Definição - Dados $C(E, Q)$ e dado um mapeamento $i_Q : E \longrightarrow C(E, Q)$ (isto é, escolhendo-se um conjunto gerador para a álgebra), definiremos $+ : u \longmapsto u^+$, $u \in C(E, Q)$ satisfazendo às seguintes propriedades: (i) $+$ é um antiautomorfismo; (ii) $(u^+, u)_C \geq 0$; (iii) se valer a igualdade, $u = 0$.

2. Corolário - $(u|v) = (u^+, v)_C$ é um produto escalar sesquilinear que dá a $C(E, Q)$ uma estrutura de espaço pré-Hilbert.

A escolha dos geradores não é condição ociosa, pois é fácil ver que + é a adjunção da álgebra, e há automorfismos internos (os não unitários) que não preservarão $^+$.

3. Definição - Definamos $L_u : v \longmapsto L_u(v) = uv$, para todos u, $v \in C(E, Q)$. Então $||u||_\infty = ||L_u||_C$, tomando-se a última norma em relação a $(|)$.

4. Proposição - $\ell = ||u||_\infty$ se e somente se $u^+u - \ell^2$ for tal que ℓ é o máximo valor para o qual esta expressão não tem inverso.

Prova - Consideremos a sequência de igualdades,

$$||L_u||_C^2 = \sup_{\substack{v \in C \\ ||v||=1}} ||L_u(V)||_C^2 = \sup_{\substack{v \in C \\ ||v||=1}} (uv|uv).$$

Mas, $(uv|uv) = (u^+uv|v) < ||u^+u||_C$. Para que valha a igualdade desejada, v deve ser um autovetor. Então, chamando ℓ^2 ao autovalor correspondente de u^+u, da relação acima decorre que $u^+u - \ell^2$ não é inversível, sendo ℓ o máximo valor com que isso ocorre.

Partindo-se de $u^+u - \ell^2$, é fácil concluir que $\ell = ||u||_\infty$.

5. Proposição - Seja $\rho : C(E, Q) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ uma representação preservando $^+$ da álgebra nos operadores limitados de um espaço de Hilbert H. Então $||u||_\infty = ||\rho(u)||$, $u \in C(E, Q)$.

Prova - Seja $\ell > ||u^+ u||_\infty$. Então $u^+u - \ell$ é inversível. Donde o ser $(\rho(u))^+ \rho(u) - \ell$. Daí, $||(\rho u)^+ \rho u - \ell|| > ||(\rho u)^+ \rho u|| - ||u^+u||_\infty$. No limite $\ell \to ||u||_\infty^2$, o primeiro termo acima vai a 0. E $||u||_\infty > ||\rho u||$. No caso de álgebras simples, se $\ell > ||(\rho u)^+ \rho u||$, então $\rho(u^+u - \ell)$ é inversível. Como a álgebra é simples, $u^+u - \ell$ não pode ser um divisor de 0, e necessariamente estará em certo $C(F_n, Q_n)$ (ver prop. 6.13). De modo que $u^+u - \ell$ é então inversível. Disto decorre que $||\rho(u)|| > ||u||_\infty$.

No caso de álgebras semi-simples, sua dimensão será em decorrência finita. A prop. 6.16 garante a existência de representações redutíveis fiéis. Do que resulta a relação acima.

6. Proposição - Suponhamos que E seja um subespaço linear denso de um espaço de Hilbert H. Então C(E, Q) é densa em C(H, Q') na norma $\| \|_\infty$, de modo que seus fechos $\bar{C}(E, Q)$ e $\bar{C}(H, Q')$ coincidem.

Prova - Na restrição a $i_Q E$ e $i_{Q'} H$ as normas coincidem (ver a def. 3), bem como as formas Q e Q'. Todo elemento de C(H, Q) é a soma de produtos de elementos de $i_Q H$; todo elemento de $i_Q H$ é um limite, na norma $\| \|_\infty$, de elementos de $i_Q E$. Como $\|uv\|_\infty <$ $< \|u\|_\infty \|v\|_\infty$, então todo elemento de C(H, Q) é um limite de elementos de C(E, Q) nesta norma, coincidindo deste modo os fechos $\bar{C}(E, Q) = \bar{C}(H, Q)$.

Desta forma dotamos toda álgebra de Clifford com a estrutura de um espaço de Hilbert, podendo-se em consequência construir nelas aplicações contínuas, diferenciais, etc..

Esta descrição da estrutura das álgebras de Clifford termina com o resultado:

7. Proposição - $\bar{C}(E, Q)$ é uma álgebra de von Neumann de tipo I. Se de dimensão finita, de tipo I_n; se de dimensão infinita, I_∞.

Prova - Os teoremas que descrevem as representações das álgebras de Clifford mostram que nelas sempre haverá projeções abelianas (34). Donde a proposição.

Temos assim bem determinadas as estruturas algébrica e topológica de C(E, Q) (e seu fecho). Em resumo, podemos assinalar: (i) a estrutura de uma álgebra de Clifford, do ponto de vista puramente algébrico, é dada sempre a menos de um isomorfismo; (ii) os sistemas de geradores $i_Q E$ são também dados a menos de isomorfismo, e em especial os automorfismos internos levam elementos 'vetoriais' sobre elementos 'não vetoriais'.(iii) A estrutura topológica da álgebra é bastante simples, reduzindo-se à estrutura de um espaço de Hilbert (enquanto espaço linear) e de uma álgebra de von Neumann de tipo I (enquanto anel de operadores).

8. *ÁLGEBRAS DE CLIFFORD: Gradação e Adjunções*

Preparamos agora o estudo das representações espinoriais do grupo O(Q), que preserva a forma quadrática Q. Para tanto, percorreremos três etapas: na primeira definiremos os automorfismo e antiautomorfismo principais da álgebra de Clifford (35). Com sua ajuda construiremos os grupos de Clifford-Chevalley (36) e de Clifford-ABS (37). A partir daí estudaremos a relação de ambos ao grupo O(Q) (38), à chamada "adjunção de Dirac" (39) e às representações espinoriais irredutíveis do grupo O(Q), e em especial do grupo de Lorentz.

A peculiaridade que têm os automorfismos a serem descritos a seguir é que o grupo $\mathfrak{J}(C)$ não os preserva, de um modo geral. E precisamente esta propriedade será decisiva para podermos representar e classificar representações irredutíveis do grupo de Lorentz com sua ajuda.

De início provamos um lema clássico:

1. Lema - Existe uma inclusão natural

$i : C(E_{n-1}, Q_{n-1}) \hookrightarrow C(E_n, Q_n)$, onde E_{n-1} é um subespaço de dimensão finita n-1 de E_n, e Q_{n-1} a restrição para tal subespaço de Q_n.

Prova - Seja $x_1 \in i_{Q_n} E_n$, não isotrópico em relação a Q_n. Se x_i é ortogonal a x_1, i = 2,3, ..., n, com relação à forma B associada a Q_n. Formemos todos os produtos $x_1 x_i$. Identifiquemos $i_{Q_{n-1}} E_{n-1} = \{y \mid y = \sum_i f_i x_1 x_i,\ f_i \in \mathfrak{F}\}$. Tomando-se unimodulares os x, é fácil ver que $y^2 = Q_{n-1}(y)$. A independência linear dos produtos $x_1 x_i$ completa a demonstração.

Este lema será usado mais abaixo para identificarmos tal subálgebra à álgebra "par" de uma álgebra de Clifford, a ser definida agora:

2. Definição - Seja a decomposição $\otimes E = (\otimes E)_0 \oplus$ $\oplus (\otimes E)_1$, onde o primeiro termo inclui apenas os produtos pares de E, e o segundo os ímpares. $\mathcal{J}$, os escalares, são incluídos na decomposição par. Esta decomposição passa ao quociente (veja-se a definição 5.1) e teremos $C(E, Q) = C_0(E, Q) \oplus C_1(E,Q)$, onde $C_0(E, Q) = (\otimes E)_0/I$, e similarmente $C_1(E, Q)$.

Esta é a única gradação admissível numa álgebra de Clifford (40); que se trata de uma gradação é o que se vê na

3. Proposição - Abreviando-se $C_0 = C_0(E, Q)$ e $C_1 = C_1(E,Q)$, verificam-se as propriedades:

(a) $C(E, Q) = C_0 \oplus C_1$.

(b) $C_0C_0 = C_0$; $C_1C_1 = C_0$.

(c) $C_1C_0 = C_1$; $C_0C_1 = C_1$.

(d) C_0 é uma subálgebra de $C(E, Q)$; C_1 é um subespaço vetorial de $C(E, Q)$.

(e) A aplicação $gr: C(E, Q) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ é um homomorfismo, se $gr(C_0) = 0$ e $gr(C_1) = 1$.

Por outro lado,

4. Proposição - Dada um homomorfismo $gr: C(E, Q) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ tais que existam em $C(E, Q)$ subconjuntos C_0' e C_1' obedecendo a (e) e satisfazendo às propriedades (a), (b) e (c), então vale (d) e gr é uma gradação na álgebra.

O que é curioso nas álgebras de Clifford é que embora seja única a gradação sobre $_2$, e não sobre nenhum outro conjunto, esta gradação será sempre dada a menos de um automorfismo. Quer dizer, existe uma infinidade de homomorfismos da álgebra sobre $\mathbb{Z}_2$ satisfazendo às condições que definem uma gradação. Um teorema que melhor informa sobre a natureza da gradação numa álgebra de Clifford é

5. Proposição - Há um isomorfismo natural $\varphi: C_{n-1} \longrightarrow C_0$, onde $C_0 = C_0(E_n, Q)$.

<u>Prova</u> - É fácil ver que a álgebra dos y no lema 8.1 é também a subálgebra par, C_0, de $C(E_n, Q)$.

Já não tão trivial será a recíproca,

<u>6. Proposição</u> - Todo isomorfismo $\varphi : C_{n-1} \longrightarrow C \subset C(E_n, Q)$ (a inclusão necessariamente própria) define uma gradação em $C(E_n, Q)$.

<u>Prova</u> - Construa-se $i_{Q_{n-1}} E_{n-1}$, a imagem dos geradores de C_{n-1}, e a partir daí gere-se $C = \varphi\, C_{n-1}$. A identificação desta a C_0 é imediata.

É óbvio que há, assim, uma infinidade de gradações para uma dada álgebra de Clifford: para cada escolha de geradores $x_1 x_i$ (lema 1), há todo o grupo $\mathcal{J}(C_{n-1})$. Isto quer dizer que a gradação não é uma propriedade algébrica "essencial" para um anel de Clifford, pois grande parte de tais automorfismos internos não a preserva. Em especial,

<u>7. Proposição</u> - Cada uma gradação $gr : C(E, Q) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, ela será preservada por automorfismos internos se e somente se tais automorfismos pertencerem a $^*C \cap C_0/^*Z$ ou $^*C \cap C_1/^*Z$.

Com isto fica limpo o campo para definirmos os automorfismo e antiautomorfismo principais de uma álgebra C(E,Q)

<u>8. Proposição</u> - O "automorfismo principal" de $C(E, Q)$ é definido como a extensão para toda a álgebra da aplicação $\alpha : E \longrightarrow C(E, Q)$ dada por $\alpha(x) = -i_Q(x)$. Obviamente tal automorfismo é bem definido se for dada a inclusão $i_Q E \subset C(E, Q)$, já que $(\alpha x) = Q(x)$ (ver as props. 5.2 e 5.3). Seja agora $Re \otimes E$ a parte real da álgebra tensorial sobre E. Para $x_i \in ReE$, dado $u = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes \ldots x_k$ definamos $u^t = x_k \otimes \ldots x_2 \otimes x_1$. Esta aplicação passa ao quociente já que $I^t = I$, e induz um antiautomorfismo na álgebra de Clifford correspondente. Seja agora $\mathcal{J} \otimes ReE$ o $\mathcal{J}$-módulo E no qual trabalhamos, e também $\mathcal{J} \otimes (\otimes E)$ e a álgebra $\mathcal{J} \otimes Re\ C(E, Q)$. Obteremos

<u>9. Definição</u> - O "antiautomorfismo principapal" de C(E,Q)

é dado, para $u \in \mathrm{Re}\, C(E, Q)$, e $f \in \mathcal{J}$, por $(f \otimes u)^t = \bar{f} \otimes u^t$, a barra indicando a conjugação complexa. Quer dizer, o antiautomorfismo principal é, na base $i_Q E$, uma espécie de conjugação hermitiana para a qual todos os geradores da álgebra são auto-adjuntos, qualquer que seja a assinatura de Q. Chegamos agora à adjunção mais importante, para nós, numa álgebra de Clifford:

10. Definição - A "adjunção de Dirac-ABS" é dada por $\tilde{u} : C(E, Q) \longrightarrow C(E, Q)$, onde $\tilde{u} = \alpha(u^t)$, $u \in C(E, Q)$. §§

As referências são Chevalley, Atiyah, Bott e Shapiro, Crumeyrolle (41). A adjunção de Dirac é construída por Kahan (42). Sua conexão à adjunção ABS é dada na seção 11.

Como veremos mais adiante, com exemplos tomados na álgebra de Clifford-Dirac (a álgebra das "gamas"), a adjunção ABS-Dirac não é preservada, de um modo geral, pelo grupo de automorfismos internos de uma dada álgebra de Clifford. Grupos que de um modo ou de outro a preservam serão aqueles que representam em C(E, Q) o grupo ortogonal da forma Q. A adjunção ABS-Dirac será nosso principal instrumento para construir a classificação das representações irredutíveis do grupo de Lorentz com a ajuda da álgebra de Clifford-Dirac e de seus produtos diretos.

9. *OS GRUPOS DE CLIFFORD-CHEVALLEY E CLIFFORD-ABS*

Nesta seção estudaremos a conexão entre álgebras de Clifford e O(Q). Todos os resultados dependem de um lema e de um teorema, ambos clássicos (o primeiro generaliza resultados de Hamilton), que apresentamos a seguir:

1. Lema - Sejam $x, y \in i_Q E$, y não isotrópico. Então a transformação $\sigma_y(x) = y^{-1}xy$ induz em E a simetria de x em relação a y.

Prova - O vetor $x = x_{\parallel} + x_{\perp}$, onde o primeiro termo representa a componente paralela a y e o segundo a que lhe é ortogonal em relação a Q. Então $\sigma_y(x_{\parallel}) = x_{\parallel}$ e $\sigma_y(x_{\perp}) = -x_{\perp}$, donde $\sigma_y(x) = x_{\parallel} - x_{\perp}$, que nada mais é do que a simetria do vetor x em relação a y (43).

Quer dizer, a transformação σ mapeia E (e $i_Q E$) sobre si mesmo. Do lema anterior concluímos

2. Corolário - Seja y_r um conjunto de k vetores ($k \leq n$, onde $n < \infty$ é a dimensão de E). Então $\sigma_y : E \longrightarrow E$, onde $y = \prod_{r=1}^{k} y_r$.

A norma do vetor x não é alterada por nenhuma destas transformações. Pergunta-se então: dados dois vetores de mesma norma, existe uma transformação (do tipo da exposta acima) que mapeie um sobre o outro? Para responder-se a esta pergunta definamos primeiro a aplicação $\sigma'_y : E \longrightarrow E$ (e a correspondente em $i_Q E$), onde y é um vetor não isotrópico. $\sigma'_y = -\sigma_y$, e é a simetria em relação ao hiperplano ortogonal (em relação a Q) a y. Seja O(Q) o grupo ortogonal de Q. Então vale

3. Proposição - Para a restrição de $\mathcal{J}$ a $\mathbb{C}$, $O(Q) \subset S$, onde S é o grupo gerado por simetrias em relação a hiperplanos cujos conjugados contêm vetores não isotrópicos (44).

O teorema é devido a Cartan e foi provado por Dieudonné para corpos genéricos; responde à pergunta que o precedeu. Pois toda operação de O(Q) pode ser descrita por meio de simetrias - ou seja, de operações σ'. Nós o aplicamos na descrição de dois grupos que, dentro de C(E, Q), representam O(Q):

4. Definição - O grupo de Clifford-Chevalley G é o grupo dos $u \in C(E, Q)$ tais que $\rho_u(x) \in i_Q E$, para $x \in i_Q E$, sendo $\rho_u(x) = u\,x\,u^{-1}$. O grupo de Clifford-ABS G' é o grupo dos u tais que $\rho'_u(x) = \alpha(u)\,x\,u^{-1} \in i_Q E$ (45).

O segundo grupo foi construído porque, sendo mais amplo que o primeiro, supria e corrigia dificuldades relacionadas com a teoria das representações das álgebras de Clifford e de seus grupos ortogonais. A diferença entre os dois grupos já aparece no teorema seguinte. Para formulá-lo definamos os homomorfismos $\psi : G \longrightarrow Aut(E)$ e $\psi' : G' \longrightarrow Aut(E)$, onde Aut(E) é o grupo dos automorfismos de E. Então:

5. Proposição - $\ker \psi = Z^*$, o grupo multiplicativo dos elementos do centro de C(E, Q); $\ker \psi' = \mathcal{J}^*$.

6. Definição - $Nx = xx^t$; $N'x = x\tilde{x}$.

7. Proposição - Se $x \in G$ então $Nx \in Z$; se $x \in G'$ então $N'x \in \mathcal{J}1$.

8. Proposição - $N : G \longrightarrow \mathcal{J}^*$ e $N' : G' \longrightarrow \mathcal{J}^*$ são homomorfismos (46).

A prova destas é, de um modo geral, elementar ($\mathcal{J}^*$ designa o grupo multiplicativo dos elementos de $\mathcal{J}$). Os próximos resultados tornam precisa a relação entre $O(Q)$, G e G'. Nestes resultados, que serão expostos em separado para um e outro grupos, tomaremos $\mathcal{J}$ restrito a $\mathbb{C}$. Para nossos objetivos não é limitação essencial, visto que a variedade M onde são definidos os membros de $\mathcal{J}$ será mais adiante identificada ao espaço-tempo ou a seus produtos cartesianos, e os elementos de $\mathcal{J}$ surgirão como componentes em relação a alguma base no fibrado tangente a M(ou em estruturas associadas). Tomar $\mathcal{J}$ restrito a $\mathbb{C}$ equivalerá portanto a - usando uma linguagem mais "fisicamente" intuitiva - tomar os "campos" ponto a ponto. No que se segue restrinjamos também Aut(E) a $O(Q)$. Os resultados todos, bem como as provas completas estão no livro de Chevalley (47).

9. Proposição - Se $C(E, Q)$ é simples, então o homomorfismo $\psi : G \longrightarrow O(Q)$ é sobre. Se $C(E, Q)$ é semi-simples, então o homomorfismo $\psi : G \longrightarrow SO(Q)$ é sobre, onde $\det \lambda = 1$, $\lambda \in SO(Q)$.

Prova - Obviamente, se $u \in G$ então $\rho_u \in O(Q)$. Mostremos o contrário. Seja $\sigma \in O(Q)$. Então σ pode ser estendida para uma operação σ_1 que é um automorfismo da álgebra $C(E, Q)$. Esta ou é simples ou é a soma direta de duas álgebras simples. Suponhamos seja simples; σ_1 será um seu automorfismo interno, e haverá u_1 inversível tal que $\sigma_1 = \rho_{u1}$. Isto é, $\sigma_1(i_Q E)$, donde concluimos que para $\sigma \in O(Q)$ há um correspondente $u \in G$. Quando a álgebra é semi-simples, a inversão $\zeta x = -x$, $x \in i_Q E$ não mantem invariante o centro da álgebra, pois neste haverá (fixado um dado sistema de geradores $i_Q E$) um z ímpar (i.e., pertencente a C_1), e $\zeta z = -z$. Quer dizer, $\psi(G) \neq O(Q)$. Todo elemento de $SO(Q)$ possui um correspondente $s \in G$; por outro lado, dado $s \in G$, s sendo um automorfismo interno, necessariamente fará com que $\psi(s)=\rho_s \in SO(Q)$. Donde a proposição.

Seja σ' a simetria definida antes da prop.3. Obviamente $\sigma \in O(Q)$ e não é difícil ver que $\det \sigma' = 1$. Em consequência,

<u>10. Proposição</u> - Se $u \in G$, então $u = u_1 z$, onde z pertence ao centro Z da álgebra de u_1 é par ou ímpar se a álgebra é simples, e apenas par se a álgebra for semi-simples.

<u>Prova</u> - Pela definição de G, todo seu elemento mantém a gradação da álgebra, de modo que precisa ser ou totalmente par ou totalmente ímpar. Para o caso de álgebras simples é fácil ver que u_1 tanto pode ser par quanto ímpar; definindo-se $z=||u_1||$, concluimos esta parte da proposição. Quanto às álgebras semi-simples, note-se $\rho_y(x) = yxy^{-1}$ é tal que $\det \rho_y = -1$ (já que a simetria associada o tem positivo). Usando o teorema de Cartan-Dieudonné (prop.3) e a prop.9, é fácil concluir que só produtos $\prod_{r=1}^{k} y_r$, para $k \equiv 0 \bmod 2$ pertencerão a G, neste caso; como $\psi(z)=1$, decorre o teorema.

O próximo resultado completa esta proposição.

<u>11. Proposição</u> - Com a notação da prop.9, $\psi(G_0) = SO(Q)$.

<u>Prova</u> - Para o caso das álgebras simples, é fácil ver que todo elemento ímpar de G terá determinante negativo. Para o caso das álgebras semi-simples, a proposição decorre da anterior. Deve-se notar que em ambas as situações, $G \neq G_0$.

Em resumo: G representa o grupo ortogonal de Q para as álgebras pares, e o grupo especial $SO(Q)$ para as álgebras ímpares. A representação, no entanto, não se reduz a um isomorfismo porque o mesmo elemento de $O(Q)$ (ou de $SO(Q)$) corresponde a diversos elementos de G. A situação é a mesma que no caso das transformações de similaridade com as quais se relacionam representações matriciais equivalentes. Como neste caso, faz-se necessário fixar um parâmetro (o "módulo" da matriz de similaridade), ou seja,

12. Definição - D grupo de Clifford reduzido Γ = ker N. O grupo de Clifford reduzido especial $\Gamma_0 = \Gamma \cap G_0$.§§

13. Corolário - $\psi : \Gamma \longrightarrow O(Q)$ para álgebras simples,e $\psi : \Gamma_0 \longrightarrow SO(Q)$ para álgebras semi-simples é sobre.

Vamos agora repetir o que foi feito para o grupo de Clifford-Chevalley com o grupo de Clifford-ABS. A principal deficiência de G como instrumento para representar grupos ortogonais, sua inadequação no caso das álgebras semi-simples de Clifford, será agora superada graças à maneira como são definidos os automorfismos de G'. Em especial,

14. Proposição - $\psi : G' \longrightarrow O(Q)$ é um homomorfismo sobre, qualquer que seja C(E, Q).

Prova - O caso semi-simples é trivial, pois aqui $\psi(G'_0) = SO(Q)$, e $\psi(zG'_0) = O(Q) - SO(Q)$, z sendo um elemento não trivial de $Z \cap G'$. No caso das álgebras simples, novamente $\psi(G'_0) = SO(Q)$ e $\psi(G'_1) = \psi(eG'_1) = O(Q) - SO(Q)$, onde e é um elemento antissimétrico de C(E, Q), isto é, o produto de todos os elementos de uma base de $i_Q E$, ortogonais face a Q.

15. Definição - O grupo de Clifford-ABS reduzido Γ' = ker N'. O grupo de Clifford-ABS reduzido especial $\Gamma'_0 = \Gamma' \cap G'_0$.

Além destes grupos Chevalley (4B) e outros autores definem grupos "especiais" com a ajuda das representações da álgebra. Seja $\rho : C(E, Q) \longrightarrow M$, onde M é uma conveniente álgebra matricial, uma representação fiel da álgebra de Clifford do tipo das descritas na prop.6.11. Podemos assim definir determinantes na álgebra, e, face à prop.7, teremos

16. Proposição - $(Nx)^{2\nu} = (N'x)^{2\nu} = |\det \rho x|^2$, onde 2ν é a ordem das representações ρ, e x pertence a G se a álgebra for par, a G_0 se a álgebra for ímpar (no caso da igualdade com relação a N) ou simplesmente pertence a G'(no caso de N').

Com isto definimos, seguindo Crumeyrolle (49),

17. Proposição - Definamos a função det' : $C(E, Q) \to \mathcal{J}$, através de det' = det ρ. Então $\mathrm{Spin}_1(Q, \mathcal{J}) = \ker |\det'| \cap G$.

É o conjunto dos elementos de G com determinante unimodular.

Para que tal pletora de grupos? Com eles obteremos recobrimentos dos grupos pseudo-ortogonais de Q bem como uma rápida prova para a estrutura destes grupos. O primeiro teorema que os correlaciona (50) é:

18. Proposição - Seja a álgebra de Clifford C(E, Q) sobre os reais. Então:

(i) $\Gamma = \mathrm{Spin}_1(Q, \mathbb{R})$ se a álgebra é simples e Q positivo-definida.

(ii) $\Gamma_o = \mathrm{Spin}_1(Q, \mathbb{R})$ se a álgebra for semi-simples e Q definida.

(iii) Nos outros casos, $\mathrm{Spin}_1(Q, \mathbb{R}) / \Gamma(\text{ou } \Gamma_o) \cong \mathbb{Z}_2$.

Prova - Da prop.16 temos que se $|\det' x| = 1$, então N pode assumir os valores 1 ou -1. Restrinjamos N ao grupo Spin_1. Para álgebras simples, se a assinatura de Q é qualquer, existe $x \in i_Q E$ com $x^2 < 0$, e assim há p real tal que $N(px) = -1$. Desta maneira $\mathrm{Spin}_1(Q, \mathbb{R}) / \Gamma \cong \mathbb{Z}_2$, a não ser que a forma quadrática seja positivo-definida (no caso das negativo-definidas, observemos que para dois elementos x e y também do espaço dos geradores, $N(xy) > 0$, sempre). No caso das álgebras semi-simples, tomemos dois elementos linearmente independentes x, y, pertencentes ao espaço dos geradores, e um deles de norma negativa. N sendo um homomorfismo sobre os reais, teremos $NxNy < 0$, e haverá p real tal que $N(pxy) = -1$, desde que a assinatura de Q seja arbitrária. Então decorre $\mathrm{Spin}_1(Q, \mathbb{R}) / \Gamma_o \cong \mathbb{Z}_2$, a não ser que a assinatura de Q seja definida.

19. Proposição - No caso $\mathcal{J} = \mathbb{C}$, vale ainda a prop.18.

Prova - Note-se apenas que $Nx \in \mathbb{R}$, $x \in G$.

O caso mais interessante é o dos subgrupos de G', o grupo de Clifford-ABS. Para abordá-lo, no entanto, usare mos alguns resultados elementares, que se expoem a seguir:

20. Proposição - Seja e_i um gerador ortonormal em relação a Q numa álgebra simples C(E, Q). Então, se dim E $\geq$ 4, det' $e_i = 1$.

Prova - Pela representação das álgebras de Clifford segundo a teoria de Brauer-Weyl (51) e usando-se propriedades elementares dos determinantes de produtos diretos.

21. LemaI - Sejam $\{e_i\}$, $\{e_i'\}$, dois conjuntos de geradores ortonormais numa álgebra de Clifford simples(i.e., $[e_i,e_j]_+ = [e_i',e_j']_+$). Então existe $\pm u \in$ *C tal que $\{e_i'\} = u\{e_i\}u^{-1}$.

Prova - Usando-se representações (52) ou puramente algébrica (53).

(Este é o chamado "Teorema Geral de Pauli").

22. Lema II - Sejam u,u' $\in$ *C, não triviais, numa álgebra de Clifford simples. Então existe w $\in$ *C e f $\in \mathcal{J}$ tal que $u' = f\ w\ u\ w^{-1}$.

Prova - Seja p $\in \mathcal{J}$ tal que $||pu||^2 = 1$. Então pelo lema I há uma similaridade os conectando. Donde o lema.

23. Proposição - Se $||x||^2 = \pm 1$, então $|\det' x| = 1$. Se det' x = 1, então $||x||^2 = \pm 1$.

Prova - Usando-se o lema II, existe um gerador e_i (com norma quadrada igual a x) tal que $x = f\ u\ e_i\ u^{-1}$. Tomando-se a norma, é fácil ver que $|f| = 1$. Tomando-se determinantes e seus módulos, conclui-se o mesmo. Por outro lado, se o determinante de x é 1, use-se o lema II para conectá-lo a um gerador arbitrário e_i; o valor igual dos determinantes implicará $|f| = 1$, donde a unimodularidade de x.

Com isto relacionamos a função módulo (definida na seção 6, def.6.19) e o determinante. Notemos agora que

24. Proposição - Seja $\mathcal{F}$ = $\mathbb{R}$. Então, para $x \in i_Q E$, $Nx = N'x = \|x\|$.§§

No caso complexo, decomponhamos $E = F \oplus \overline{F}$, com a ajuda dos projetores centrais de E definidos usando-se o operador quase-complexo J de E (54) - veja-se a seção 10. Então:

25. Proposição - Seja $\mathcal{F}$ = $\mathbb{C}$. Para $x \in i_Q E$, $Nx = -N'x = (\overline{x}, x)$, sendo $\overline{x}$ o conjugado de x em relação à estrutura complexa de E.

Note-se que as "normas" N e N' são, no caso geral, indefinidas, isto é, delas não se pode extrair diretamente uma topologia métrica para o espaço E. Um raciocínio análogo ao aqui desenvolvido, mas que toma como ponto de partida a forma quadrática associada à álgebra de Clifford para então chegar à construção de uma adjunção de tipo hermitiano e também de tipo pseudo-hermitiano (como ^{t} e $\tilde{}$) está exposto mais adiante (seção 11 e (55)); as conclusões, no entanto, são equivalentes.

Com as proposições acima relacionamos determinantes e normas numa álgebra de Clifford. A finalidade é estabelecer uma coerência nas definições dos grupos associados a normas (os grupos reduzidos Γ, Γ') e naqueles associados a determinantes, i.e., baseados em representações da álgebra (como os grupos de tipo Spin, a serem mais explorados ainda nos tópicos seguintes). Chevalley e Crumeyrolle definem os grupos Spin usando determinantes; Atiyah, Bott e Shapiro, usando normas de tipo N'. Ou seja,

26. Definição - $\mathrm{Pin}\,(Q, \mathbb{C}) = \ker|\det'| \cap G'$; $\mathrm{Spin}(Q, \mathbb{C}) = \mathrm{Pin}\,(Q, \mathbb{C}) \cap G'_0$.

Para chegarmos à definição de ABS, usando a prop.23, obtem-se

27. Corolário - $\mathrm{Pin}\,(Q, C) = \ker\,|N'| \cap G'$.

Falta determinarmos as relações entre os grupos do sistema G e aqueles do sistema G'. Isto é dado por:

28. Proposição - Para álgebras de Clifford simples so-

bre os complexos:

(i) $G = G'$.
(ii) $\mathrm{Pin}\ (Q, \mathbb{C}) = \mathrm{Spin}_1\ (Q, \mathbb{C})$.
(iii) $\psi(\mathrm{Pin}\ (Q, \mathbb{C})) = O(Q)$ e $\psi(\mathrm{Spin}\ (Q, \mathbb{C})) = SO(Q)$.

E para as álgebras semi-simples:

(iv) $G_0 \subset G'$, $G \neq G'$.
(v) $\mathrm{Spin}\ (Q, \mathbb{C}) = \mathrm{Spin}_1\ (Q, \mathbb{C})$.
(vi) Vale também neste caso a relação (iii).

Prova - Veja-se apenas que a transformação indicada na prop.10 pode ser construída dentro de G'.

Chamemos ψ_1 à restrição de ψ para os grupos Pin e Spin. Então, trivialmente, desde que ψ_1 é um homomorfismo, $O(Q) \cong \mathrm{Pin}\ (Q, \mathbb{C})\ /\ \ker \psi_1$, e $SO(Q) \cong \mathrm{Spin}\ (Q, \mathbb{C})\ /\ \ker \psi_1$. Também é trivial:

29. Proposição - $\ker \psi_1 = \mathbb{Z}_2$, se $\mathcal{J} = \mathbb{R}$. $\ker \psi_1 = U(1) \otimes \mathbb{Z}_2$ se $\mathcal{J} = \mathbb{C}$.§

Prova - $\ker \psi_1 = \{u \in \mathcal{J}^{*1}$ tais que $|N'u| = 1\}$.§§

Para o caso real segue um interessante resultado, quando a métrica Q não é definida. Oo isomorfismo $\mathrm{Pin}\ Q/\ /\ \mathrm{Spin}\ Q \cong O(Q)\ /\ SO(Q)$, e notando que Γ_0 é a componente conexa à identidade de Spin Q (vide prop.18), então temos que $\mathrm{Spin}\ Q/\ /\ \Gamma_0 \cong SO(Q)\ /\boxed{SO(Q)}$ (o quadro identificando a componente conexa). Ora, $SO(Q)$ tem índice 2 em $O(Q)$, e como da prop.18, $\boxed{SO(Q)}$ é de índice 2 em relação a $SO(Q)$, a componente conexa da identidade terá índice 4 em $O(Q)$. Ou seja, o grupo de Lorentz generalizado tem 4 componentes conexas para toda dimensão (56).

Com estes últimos resultados encerramos, do ponto de vista algébrico, o estudo da estrutura dos grupos que, dentro de uma álgebra de Clifford associada à forma quadrática Q, representam $O(Q)$. São, enfim, resultados clássicos, mas obtidos aqui da maneira a mais compacta possível - independente de representações da álgebra, ou mesmo da escolha de uma certa base sua, deixada à vontade pela identificação $E \longrightarrow i_Q E$. Exemplos co nhecidos destes resultados são a representação espinorial pelo SU(2) do grupo O(3, $\mathbb{R}$). A álgebra de Clifford com dois geradores sobre uma forma quadrática negativo-definida são os quatérnions reais de Hamilton, $\mathbb{H}$. Como é bem sabido, $\mathbb{H} = {}^*\mathbb{H}$, e o grupo de Clifford $G(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, sendo o grupo reduzido SU(2, C). Mas a representação do grupo próprio de Lorentz pelo SL(2, C) (que está contido na complexificação $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$, ou seja, nos chamados "biquatérnions"), não é um exemplo das representações estudadas acima. A própria estrutura delas (o fato de relacionarmos uma forma Q a uma álgebra) faz com que a representação espinorial "natural" para o grupo de Lorentz seja aquela onde se usa o anel das matrizes de Clifford-Dirac, as "gamas". Aliás Corson (57) é bem claro a respeito, embora a conexão entre os espinores de Dirac e os espinores a duas componentes só se esclareça com as técnicas de decomposição das representações espinoriais descritas no livro de Chevalley (58).

Uma observação final: a estrutura da álgebra de Clifford é dada a menos de automorfismos, como se viu - ou seja há uma infinidade possível de mapeamentos i_Q, e uma correspondente multiplicidade de gradações para a álgebra. Ora, em especial G' depende destas duas estruturas. Quer dizer: para construir-se G' é necessário que seja fixado certo i_Q - e a gradação induzida. Por outro lado, com a ajuda dos automorfismos internos $\mathcal{J}(C)$, é fácil ver que $\rho_q(G') = {}^*C$, $\rho_q \in \mathcal{J}(C)$. Em palavras: o grupo G' é mapeado sobre todos os elementos inversíveis da álgebra através de seus automorfismos internos. Quer dizer, o grupo G' não é um universal da álgebra (e este é um fato que nunca fica bem realçado, mesmo em autores obviamente rigorosos, como Atiyah e colaboradores, Chevalley ou Crumeyrolle). Dito de outra maneira, o grupo G' depende da representação escolhida. O que não ocorre, por exemplo, com *C.

Uma última observação pode ser feita aqui. Notando-se que ψ_1 é uma aplicação aberta, então

<u>30. Proposição</u> - Pin / ker $\psi_1 \cong O(Q)$ é um isomorfismo algébrico e um homeomorfismo.

Com o que se conclui esta seção.

10. *ESPINORES*

Espinores são objetos pertencentes ao espaço das representações das álgebras de Clifford. Este espaço é necessariamente um espaço vetorial complexo, desde que representações de C(E, Q) se obtêm a partir de produtos diretos de $SU(2,\mathbb{C})$ e a própria notação habitual para o cálculo dos espinores já assimila tal natureza complexa daquele espaço, ao usar fartamente a distinção entre índices "pontuados" e não "pontuados". Diversos outros objetos ligados ao formalismo espinorial, no entanto, possuem significado obscuro. Por exemplo, a chamada "métrica espinorial" p.e., Corson (57) que costuma ser postulada a partir de considerações a respeito de formas invariantes quanto à ação do grupo $SL(2, \mathbb{C})$ e de seus produtos diretos. Esclarecer todos estes objetos pode ser conseguido se escrevermos o formalismo dos espinores do ponto-de-vista da teoria das estruturas complexas. É o que fazemos a seguir, começando por um review das principais propriedades dos espaços vetoriais complexos(59).

Ficaremos restritos aos espaços vetoriais de dimensão finita. O ponto de partida é:

1. Definição - Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, e E^* seu dual. A complexificação $E^c = L(E, C)$, o conjunto de todas as aplicações lineares de E^* sobre C. A restrição $L(E, \mathbb{R})$ e a identificação habitual $E^{**} = E$ implica na continência $E \subset E^c$, ou seja, certo $x \in E$ se e somente se, para todo $\alpha \in E^*$, $\alpha(x) \in \mathbb{R}$.

Claro que E^c, pela def.1, é um espaço vetorial sobre os complexos. E o isomorfismo $\phi' : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (onde n é a dimensão de E) se estende para $\phi : E^c \longrightarrow \mathbb{C}^n$. Definimos agora:

2. Definição - Dado $x \in E^c$, seu conjugado $\overline{x} = \phi^{-1}(\overline{\phi(x)})$, onde a barra no segundo membro indica a conjugação complexa nas componentes da imagem $\phi(x)$ em C^n.

Vetores reais são aqueles que coincidem com seu conjugado. Seja agora $(E^c)^*$, o dual de E^c. Dado um seu elemento α,

3. Definição - O conjugado $\overline{\alpha}$ de α se define: $\overline{\alpha}(x)=\overline{\alpha(\overline{x})}$,

$x \in E^c$.

Obviamente todo vetor real $x = (1/2)(x + \bar{x})$. Esta decomposição se estende para E^c. Construamos um operador $J : E^c \longrightarrow E^c$, tal que $J^2 = -1$, a transformação identidade. Para uma base do espaço vetorial, as componentes de J obviamente satisfarão à relação $\sum_k j_i^k j_k^m = -\delta_i^m$. Então, construindo-se os projetores $P_{\mp} = (1/2)(1 \mp iJ)$, podemos obter

4. Corolário - $E^c = F \oplus \bar{F}$, onde $F = P_- E^c$, e $\bar{F} = P_+ E^c$.

O operador J tem a ele associado, no espaço dual (E^c), um operador J^*, que é definido de modo a manter o pareamente $E^c \longrightarrow (E^c)^*$. Quer dizer, dado o produto escalar sesquilinear canônico $<\phi, x>$, $\phi \in (E^c)^*$ e $x \in E^c$, $<J^*\phi, Jx> = <\phi, x>$. Em consequência,

5. Corolário - $(E^c)^* = G \oplus \bar{G}$.

Para relacionar um e outro espaços na decomposição (isto e, para definirmos e relacionarmos espinores contra e covariantes, pontuados e não pontuados) são necessários alguns outros resultados simples:

6. Proposição - J tem autovalores $\pm i$; $JF = iF$, $J\bar{F} = -i\bar{F}$

Prova - Cálculo direto. A segunda parte, usando-se os projetores.

7. Proposição - $(P_{\mp})^* = (P^*)_{\mp} = (1/2)(1 \mp iJ)^* =$
$= (1/2)(1 \mp iJ^*)$.

Prova - Tomando-se ξ, x, como autovetores de J^* e J, respectivamente, da invariância do produto sesquilinear decorre a relação indicada.

Um espaço vetorial complexo se transforma num espaço espinorial através da "identificação de Sauter"(60) que descrevemos nas próximas proposições. Seja C(E, Q) uma álgebra simples de Clifford sobre os escalares $\mathbb{C}$, e seja nesta álgebra e um projetor abeliano (vide prop. 7.7). Ao ideal à esquerda ge rado por este projetor notaremos $I(e)$ (se $r \in I(e)$, então $rI(e) = I(e)$). É fácil ver que, se E^c é o espaço das representações de $C(E, Q)$, então - enquanto espaços vetoriais - $I(e)$ e E^c têm a mesma dimensão. De modo que

8. Definição - Seja $\phi' : E^c \longrightarrow I(e)$ o isomorfismo de espaços vetoriais entre o espaço das representações de $C(E, Q)$ e um seu ideal à esquerda gerado pela projeção abeliana e. Seja ϕ a extensão deste isomorfismo assim construída: $r, s \in I(e)$, $\phi^{-1}(rs) = \phi^{-1}(r)\,\phi^{-1}(s)$. À álgebra S constituída por E^c e pelo produto induzido por ϕ chamaremos álgebra dos espinores contravariantes de $C(E, Q)$.

Ou seja, na prática identificamos o espaço das representações de $C(E, Q)$ a uma matriz com uma coluna diferente de zero e todas as outras nulas. Obviamente valem para S todos os resultados anteriores, da def.1 à prop.7. Em especial, notemos que os espinores contravariantes "pontuados" serão, como tornaremos preciso abaixo, P_+S, a subálgebra dos conjugados. Seja agora $\rho : C(E, Q) \longrightarrow M$, M sendo uma conveniente álgebra matricial que representa fielmente $C(E, Q)$. Seja $+ : a \longmapsto a^+$ a conjugação hermitiana em M e, para $u \in C(E, Q)$, definamos $u^+ = \rho^{-1}(\{\rho(u)\}^+)$. É preciso que se note que a conjugação hermitiana assim induzida numa álgebra de Clifford só é invariante face a transformações unitárias (i.e., transformações cuja matriz na representação ρ é unitária), desde que é fácil ver, pelos teoremas da decomposição polar (61), que - se bem que a cada elemento de $*C/Z \cap *C$ esteja associada uma representação de $C(E, Q)$ - nem todo elemento de $*C$ é unitário. Com esta ressalva definamos

9. Definição - Formemos o isomorfismo $\phi'^* : (E^c)^* \rightarrow I^+(e)$, e sua extensão ϕ^*, definida como acima em 8. À álgebra S^* constituída pelo produto que ϕ^* induz e por $(E^c)^*$ chamaremos álgebra dos espinores covariantes de $C(E, Q)$.

Ou seja, de espaço dual a matriz linha. A seguir obtemos alguns teoremas de grande utilidade:

10. Proposição - $S^*S \cong \mathbb{C}$.

11. Proposição - Notemos S . S* o produto dos espaços dos espinores contravariantes e covariantes onde (i) dada a união $\phi \cup \phi^* : (E^c) \times (E^c) \longrightarrow C(E, Q)$, para $x \in E^c$ e $\xi \in (E^c)$, $x\xi$ é induzido por ϕ ϕ^*; e (ii) pertencem a $(E^c).(E^c)^*$ todas as combinações lineares de produtos como os anteriores. Então valem os isomorfismos $S . S^* \cong S \otimes S^* \cong C(E, Q)$,

Prova - Direta. O espaço das combinações lineares de produtos de uma matriz coluna por uma matriz linha é a álgebra de matrizes cuja ordem é o produto das ordens das colunas e linhas envolvidas.
Com estes dois teoremas se completa o nosso instrumental para a investigação das equações de Teitler em sua forma generalizada (62). Explicitemos agora nossa notação, e designemos $S = T \oplus \bar{T}$ o espaço dos espinores contravariantes e sua decomposição complexa, da mesma forma que $S^* = T^* \oplus \bar{T}^*$ é o espaço dos espinores covariantes e sua correspondente decomposição.

Será natural distinguirmos espinores "pontuados" de espinores "não pontuados" se, de alguma maneira, as representações de O(Q) assim também se decompuserem. Ora, isto é o que decorre das propriedades abaixo:

12. Proposição - Notemos $C_{2\nu}$ e $C_{2\nu-1}$, $\nu = 1,2,3,\ldots$, as álgebras de Clifford de ordem 2ν e $2\nu-1$ sobre $\mathbb{C}$ e associadas a Q qualquer. Seja τ a aplicação descrita na prop.8.5, e seja gr uma gradação consistente com τ . ψ, ψ' designam homomorfismos, e det designa o determinante das representações vetoriais de $O(Q, n)$, onde $n = 2\nu$. Então as linhas, no diagrama abaixo, são sequências exatas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & {}^*C_{2\nu-1} & \longrightarrow & {}^*C_{2\nu} & \xrightarrow{gr} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \cong\uparrow & & \\
1 & \longrightarrow & G'_{2\nu-1} & \longrightarrow & G'_{2\nu} & \xrightarrow{gr} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 1 \\
 & & \psi'\downarrow & & \psi\downarrow & & \cong\downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & SO(Q,n) & \longrightarrow & O(Q,n) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

É um resultado trivial, mas que induzirá um outro nem tanto:

13. Proposição - Toda representação espinorial de $O(Q, n)$, para n par, possui uma representação redutível de $SO(Q, n)$.

Prova - Da prop. 12 vemos que os objetos pares de $G'_{2\nu}$ constituem-se num subgrupo semi-simples, devido à estrutura semi-simples de $C_{2\nu-1}$; estes objetos são aqueles que descrevem $SO(Q, n)$ dentro de $G'_{2\nu}$. Ora, sejam σ_i, $i=1,2,3,\ldots 2\nu-2$, uma representação hermitiana (e anti-hermitiana, quando necessário), para uma álgebra de Clifford $C_{2\nu-2}$ sobre um Q' qualquer. Notando-se $\bar{\sigma}_i$ o conjugado complexo das matrizes σ_i, é fácil ver que os

$$\rho(e_k) = (\varepsilon)\begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\bar{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix} \quad k = 1 \ldots 2\nu-2 \quad \sigma_{2\nu-1} = \prod_{m=1}^{2\nu-2} \sigma_m,\ \sigma_{2\nu} = 1_{2\nu-2},$$ a matriz identidade.

constituem uma representação para um sistema ortogonal de geradores de $C_{2\nu}$ (na matriz acima, ε designa um parâmetro que tanto pode ser 1 quanto i). Todos os elementos pares da álgebra serão representados por matrizes da forma $\rho(u) = A \oplus \bar{A}$, onde a barra denota a conjugação complexa.

Assim sendo, podemos definir:

14. Definição - O espaço T dos espinores contravariantes não-pontuados é o espaço das representações A de $SO(Q, 2\nu)$. O espaço dos espinores contravariantes pontuados, $\bar{T}$, é o espaço das representações $\bar{A}$ de $SO(Q, 2\nu)$. O espaço dos espinores covariantes pontuados, $(\overline{T^*})$, é o espaço das representações A^+, hermitiano-conjugadas de A. E o espaço T^* dos espinores covariantes não-pontuados é o espaço das representações $(\overline{A^+})$.

A esta decomposição em espinores pontuados e não pontuados chamou Chevalley (63) decomposição do espaço dos espinores em "meio espinores". Trata-se de propriedade bastante usada, e pela qual relacionamos os espinores de 2 componentes aos espinores de Dirac; esta associação é, no caso geral, dada pelo

15. Corolário - Todo elemento $x \in S$ possui a decomposi

ção $x = y_1 \oplus (y_2^+)^T$, onde T designa a transposição matricial. Refizemos assim, no quadro da álgebra dos vetores complexos, a teoria usual dos espinores, como exposta em referências standard, tipo Corson (64) ou Aharoni (65).

11. *A CONJUGAÇÃO ABS E O PRODUTO ESCALAR NUMA ÁLGEBRA DE CLIFFORD SIMPLES*

A conjugação ABS é mais fundamental que a transposição ^{t} no que se refere à classificação das representações de um grupo pseudo-ortogonal com a ajuda de álgebras de Clifford (apesar dos grupos G e G' se confundirem nas álgebras de Clifford simples) porque ela está ligada a certos quase-automorfismos internos destas álgebras (o que entendemos por quase-automorfismo será definido mais adiante). A estes quase-automorfismos daremos o nome genérico de "adjunção de Dirac"; um seu exemplo está no conjugado de um espinor, $\overline{\psi} = \psi^+\gamma^o$. Outro exemplo, na bem conhecida relação explicitada por Teitler $\pm\, u^{-1} = \gamma^o\, u^+\, \gamma^o$, para elementos genéricos de uma álgebra das matrizes de Dirac. Conforme se verá mais abaixo, a adjunção que aqui se sugere é (a menos de sinal) a conjugação $^-$de Atiyah, Bott e Shapiro. A presente seção reune resultados nossos (66).

<u>1. Definição</u> - Seja C(E, Q) uma álgebra de Clifford simples sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos complexos. À forma bilinear $B(x, y) = (1/2)(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$ associaremos dois produtos internos entre os elementos $x, y \in i_Q E$:

(i) $\langle x, y\rangle = B(x^+, y)$
$\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$, $(x, x) \geqslant 0$ (igualdade só se $x = 0$), e para o subespaço real onde Q é positivo-definida, $\langle x, x\rangle = Q(x)$.

(Este produto será denominado "produto interno positivo-definido").

(ii) $\langle x, y\rangle_L = B(x^-, y)$,
$\langle x, x\rangle_L \in \mathbb{R}$, e $\langle\ ,\ \rangle_L = Q(\chi)$ ao agir no subespaço real de $i_Q E$.

(Este será chamado "produto interno real-indefinido").
Como já o indica a notação, veremos que $^+$ é a conjugação hermitiana definida em $C(E, Q)$ a partir de uma sua representação, enquanto que $^-$ será identificada à adjunção de Dirac; a menos de um fator, equivalerá à conjugação $^\sim$ de Atiyah e colaboradores. Isto se verifica da seguinte maneira:

2. <u>Definição</u> - Um quase-automorfismo interno de $C(E,Q)$ é uma aplicação $\tau : C(E, Q) \longrightarrow C(E, Q)$ obedecendo às condições seguintes:

(i) $\tau\ (u + v) = \tau(u) + \tau(v)$.
(ii) $\tau\ (fu) = \tau(f)\ \tau(u)$, f e $\tau(f) \in \mathcal{F}$ e $u \in C(E, Q)$.
(iii) $\tau\ (C(E, Q))$ é uma álgebra de Clifford, embora τ não seja necessariamente um isomorfismo de álgebras.

O que quer dizer: quase-automorfismos preservam, de certa maneira, a estrutura da álgebra, embora esta preservação seja apenas "global", e não objeto-a-objeto. Os exemplos se seguirão.

3. <u>Corolário</u> - Para $x \in i_Q E$, $\tau(x^2) = \tau(Q(x)$, onde τQ é uma forma quadrática. $\tau(xy + yx) = \tau(B(x, y)) = \tau Q(x + y) - \tau Q(x) - \tau Q(y)$.
Isto é o máximo que podemos concluir a partir da def.2, desde que não há possibilidade naquela definição de se escolher o conjunto gerador para a álgebra de Clifford, a partir de τ. Vamos agora construir dois quase-automorfismos internos para $C(E, Q)$. O primeiro será obtido a partir do produto interno positivo-definido da seguinte maneira: escolhamos uma base ortogonal (em relação a Q) no conjunto gerador $i_Q E$; notemos e_i esta base, e escrevamos $x = x^i e_i$. Então $<x, x> = (x^i)^+ x^j <e_i, e_j> \geqslant 0$. Se x for um vetor real, então é fácil ver que, de $<e_i, e_i> = 1$ (para o subespaço positivo-definido) $e_i^+ = e_i$. Se x pertencer à extensão complexa deste subespaço, é fácil concluir que $(x^i)^+$ será o complexo conjugado de x^i. Finalmente, seja e_k um elemento da base pertencente ao subespaço onde Q é negativo-definida. As condições de positividade e realidade imporão $e_k^+ = -e_k$, de modo que se terá:

<u>4. Corolário</u> - A conjugação $^+$ formalizada na def.1 é a adjunção hermitiana em $C(E, Q)$, restrita ao subespaço gerador da álgebra (vide a def.7.1).
Raciocínio similar ao acima levará a outro corolário, com pequena diferença:

<u>5. Corolário</u> - Em termos de uma base ortogonal em relação a Q, $x = x^i e_i$ terá como adjunto $x^- = (\overline{x^i})e_i$.

<u>Prova</u> - Basta notar que, devido a 11.1, para todo e_i, $e_i^- = e_i$.
A idéia de quase-automorfismo interno para $^+$ e $^-$ resultará da maneira como se estenderá estas conjugações para a totalidade da álgebra. Usaremos o produto exterior Λ entre dois elementos x, y do conjunto gerador de $C(E, Q)$, $x \Lambda y = (1/2)(xy - yx)$. E definiremos:

<u>6. Definição</u> - $Q(x \Lambda y) = Q(x)Q(y)$. Se $<x \Lambda y, x \Lambda y> \geq 0$ então $<x \Lambda y, x \Lambda y> = <x, x><y, y>$.
Ou seja,

<u>7. Corolário</u> - $(x \Lambda y)^+ = y^+ \Lambda x^+$.

O outro quase-automorfismo interno, $^-$, será construído a partir de $^+$. A primeira etapa é a prop.9.21, o "teorema geral de Pauli". Notemos que, para uma base ortonormalizada em relação a Q, $[e_i^+, e_j^+]_+ = [e_i^-, e_j^-]_+ = [e_i, e_j]_+$. Então existe um $u \in C(E, Q)$, simples, tal que $\{e_i^-\} = \pm u\{e_i\}u^{-1}$, sendo essencial a ambiguidade de sinal. Especificando caso a caso, teremos:

<u>8. Proposição</u> - Para uma álgebra de Clifford simples e com dimensão finita, notemos p o conjunto dos índices de uma base ortonormal em relação a Q tais que $Q(e_i)$, $i \in p$, é positivo, e seja p' o conjunto complementar a p. Então, se $p \equiv p' \equiv 0 \bmod 2$, $\{e_k^-\} = \pm e \{e_k^+\} e$, onde $e = \prod_{m \in p} e_m$ e o duplo sinal é ajustado para termos observada a assinatura de Q. E quando $p \equiv p' \equiv 1 \bmod 2$, a relação entre as duas conjugações é a mesma, sendo agora $e = \prod_{m \in p'} e_m$, o sinal ajustando-se da mesma maneira.

Comparando-se agora este resultado com o cor.7, podemos estender a adjunção $^{-}$ para toda a álgebra, o que se faz com

9. Proposição - Seja $u \in C(E, Q)$, uma álgebra simples. Então $u^{-} = \varepsilon\, e\, u^{+} e$, onde o sinal $\varepsilon = \pm 1$, e e é o mesmo escolhido em 8; para $u, v \in C(E, Q)$, $(uv)^{-} = \pm (v)^{-}(u)^{-}$, ficando igualmente o sinal por conta daquela definição.
E, em consequência,

10. Proposição - Para $x \in i_Q E$, $\tilde{x} = -x^{-}$.

Prova - Basta observar como se define a adjunção ABS e constatar a função do fator e na definição da adjunção de Dirac: e é o elemento que "conta" a gradação $\alpha(u)$.
Conforme veremos mais adiante, o elemento e terá a função de uma "métrica" no espaço dos espinores, desde que - a menos de sinal - ele mapeará os elementos do espaço dos espinores covariantes pontuados sobre os não pontuados.

Podemos agora passar a nosso objetivo central, a classificação das representações irredutíveis de grupos pseudo-ortogonais (e em especial, do grupo de Lorentz) com a ajuda das álgebras de Clifford. Nosso principal instrumento será a adjunção de ABS-Dirac.

12. *IRREDUCIBILIDADE FACE A GRUPOS PSEUDO-ORTOGONAIS*

É clássica a decomposição dos tensores de segunda ordem em tensores simétricos e tensores antissimétricos, irredutíveis ambos face ao grupo linear geral. Usaremos aqui esta mesma idéia para classificar as representações espinoriais irredutíveis de grupos pseudo-ortogonais. Em lugar da simetrização e antissimetrização teremos objetos u tais que $\tilde{u} = u$ e tais que $\tilde{u} = -u$; qualquer objeto pertencente a uma álgebra de Clifford admite tal decomposição. Mais precisamente,

1. Proposição - Seja $u \in C(E, Q)$. Então $u = \operatorname{sp} u + u_+ + u_-$, onde $u_{\pm} = (1/2)(u \pm \tilde{u})$, e $\tilde{u}_{\pm} = \pm u$.

Esta propriedade se completa com:

2. Proposição - Os diagramas abaixo são comutativos

$$\begin{array}{ccc} C(E,Q) & \xrightarrow{\sim} & C(E,Q) \\ \rho_u \downarrow & & \downarrow \rho_u \\ C(E,Q) & \xrightarrow{\sim} & C(E,Q) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C(E,Q) & \xrightarrow{\sim} & C(E,Q) \\ \rho'_u \downarrow & & \downarrow \rho'_u \\ C(E,Q) & \xrightarrow{\sim} & C(E,Q) \end{array}$$

se e somente se $u\tilde{u} \in Z$. Definimos $\rho_u(w) = uwu^{-1}$, $\rho'_u(w)=\alpha(u)wu^{-1}$, $u,w \in C(E, Q)$, uma álgebra simples de Clifford.

Prova - Cálculo direto, notando-se no segundo caso que se pode fazer a hipótese $u\tilde{u} = v_0 + v_1$, e daí concluir a proposição.

3. Proposição - Para ρ_u, ρ'_u definidos na prop. anterior, $\rho_u(\tilde{w}) = (\rho(w))^{\sim}$ e $\rho'_u(\tilde{w}) = (\rho'_u(w))^{\sim}$.

4. Corolário - $\rho_u(w_{\pm}) = (\rho_u(w))_{\pm}$, e $\rho'_u(w_{\pm}) = (\rho'_u(w))_{\pm}$.

5. Corolário - Sejam $u_{\pm}$, $v_{\pm}$, com a notação da prop.12.1. Então existe $f \in \mathcal{F}$ e w tal que $w\tilde{w} \in Z$ e $\rho_w(u_{\pm}) = fv_{\pm}$(resp. $\rho'_w(u_{\pm}) = f\ v_{\pm}$).

Prova - Aplique o lema 9.22 .

De um modo geral os componentes $u_{\pm}$ de um objeto genérico da álgebra (sobre um anel escalar que inclua os complexos) podem pertencer a qualquer subespaço daquela, já que todas as representações complexas de grupos pseudo-ortogonais equivalem às representações complexas do grupo ortogonal. No caso real, no entanto, tal não ocorrerá. Também é fácil ver que nem todo u tal que $u\tilde{u} \in Z$ é elemento de G(ou G'), pois estes preservam a gradação tensorial de uma álgebra de Clifford (ou sejam, mapeiam geradores sobre geradores, e assim seus produtos).

Os resultados acima conduzirão à construção de subespaços irredutíveis face às transformações de G(e G') em ál gebras de Clifford sobre os reais. Pois seja a decomposição $C(E, Q) = D(E, Q) \oplus \overline{D(E, Q)}$ de uma álgebra de Clifford simples sobre o corpo dos complexos; seja $u + \bar{u}$ um elemento real desta álgebra, e seja $(u + \bar{u})_{\pm}$ sua decomposição de acordo com a prop.1. Então é fácil ver que $i(u + \bar{u})_{\pm} = (i(u + \bar{u}))_{\mp}$. Ou seja, escrevendo-se Re e Im para as partes reais e imaginárias da álgebra.

<u>6. Proposição</u> - $\mathrm{Re}\,(C(E, Q)) \cap \mathrm{Im}(C(E, Q)) = \emptyset$; $\mathrm{Re}(C(E, Q))_{+} \oplus \mathrm{Im}(C(E, Q))_{+} = \mathrm{Re}\ C(E, Q)$.

E tomemos agora uma álgebra de Clifford sobre os complexos, $C(E, Q)$, na qual fizemos pela aplicação i_Q uma escolha do conjunto gerador. Sejam $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi}_1$ dois automorfismos que preservam a conjugação de ABS-Dirac. Então:

<u>7. Proposição</u> - Todo automorfismo que preserva a conjugação de ABS-Dirac preserva a decomposição da prop.6. E o diagrama abaixo é comutativo se e somente se ρ_u for tal que exista um u com $u\tilde{u} \in Z$:

$$\begin{tikzcd}
C(E, Q) \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[dr, "\tilde{\varphi}_1"'] & C(E, Q) \arrow[d, "\rho_u"] \\
& C(E, Q)
\end{tikzcd}$$

<u>Prova</u> - A primeira parte é trivial. Quanto à segunda, use-se a prop.2.

A interpretação destes resultados é simples: o grupo dos objetos pertencentes à álgebra tais que $u\tilde{u} \in Z$ mantem a conjugação de ABS-Dirac e decompõe a álgebra em três pedaços irredutíveis, os escalares, os ~- conjugados e os ~- anti-conjugados. Os resultados anteriores (em especial a prop.5) mostram a irreducibilidade destes pedaços. Mas é importante notarmos que, se nos limitamos ao grupo pseudo-ortogonal (ou seus representantes G e G'), estes pedaços <u>não são</u> irredutíveis, desde que a gradação de $C(E, Q)$ tomada como uma álgebra exterior (vide as props.6.7, 6.8 e 6.9) é mantida por qualquer transformação associada a um grupo pseudo-ortogonal (i.e., vetores vão em vetores, bivetores em bivetores, e assim por diante). Ora, observe-se o seguinte: o raciocínio anterior à prop.6 mostra que a multiplicação pela unidade imaginária inverte o comportamento dos pedaços irredutíveis da álgebra (o que é -- adjunto se torna -- anti-adjunto). Escolhamos uma base geradora para a álgebra de Clifford, e nela representemos o grupo pseudo - ortogonal de Q. Se desejamos manter uma certa independência de representações, é natural considerarmos que as escolhas de i_Q e de $\tilde{\varphi}\, i_Q$ devem ser equivalentes. Se impusermos esta equivalência, fica fácil ver que a decomposição da prop.6 passa a ser a decomposição irredutível face ao grupo pseudo-ortogonal. Em linguagem mais rigorosa,

<u>8. Proposição</u> - Seja O(Q) o grupo ortogonal real de Q. Seja C(E, Q) uma álgebra de Clifford simples sobre os complexos, na qual construimos os grupos G e G', que representarão O(Q). Seja $\tilde{\varphi}$ um automorfismo da álgebra que preserva a adjunção $\tilde{}$. Supondo-se equivalentes descrições de O(Q) se estas forem $\tilde{\varphi}$- equivalentes, então a decomposição descrita na prop.12.6 é irredutível mod $\tilde{\varphi}$.

Em linguagem mais "física": todas as representações em que se preserva a adjunção de Dirac-ABS serão tomadas equivalentes. E diante desta equivalência, a decomposição $u = sp\ u + u_+ + u_-$ é irredutível.

Fato semelhante ocorre na teoria de Bargmann-Wigner, quando se tomam equivalentes todas as representações unitárias. Mas uma importante consequência lá aparece obscurecida: pois preservar a adjunção $\tilde{}$ significa <u>tomar-se como operador diferencial o operador de Dirac na equação linear de ondas</u>. A hipótese da preservação da adjunção de Dirac-ABS está ligada à preservação de correntes do tipo $\Psi^- \Gamma_i \Psi$, Γ_i sendo um qualquer objeto da base de uma álgebra de Dirac. De modo que não se trata, assim, de uma hipótese <u>ad-hoc</u>. Em particular, $\Psi^- \Psi$ é um escalar mantido por tal transformação. Assim sendo, de fato obtemos os representações irredutíveis face ao grupo K que preserva a adjunção ABS-Dirac, e não apenas ao grupo G ou G' ou seus reduzidos.

A próxima proposição volta ao início de nosso trabalho, e resolve o "mistério" das funções de onda de Teitler:

9. Proposição - Seja γ^{μ} um sistema gerador para uma álgebra de Dirac real, associada a uma forma quadrática de assinatura 2. Então, para um elemento u desta álgebra, teremos $u_{+} = u_5\gamma^5 + u_{\mu 5}\gamma^{\mu}\gamma^5$ e $u_{-} = u_{\mu}\gamma^{\mu} + \frac{1}{2} u_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}$.

Ou seja, a bem conhecida decomposição da álgebra das gamas em 3 pedaços irredutíveis, com dimensões 1, 10 e 5 (veja-se a respeito Corson (67)).

Destes resultados vê-se bem a natureza fundamental da adjunção de ABS-Dirac numa álgebra de Clifford. Com ela podemos classificar os pedaços irredutíveis da álgebra ante a ação de um grupo pseudo-ortogonal.

Em seguida esclareceremos o caso dos objetos complexos, estudamos a função de onda genérica de Teitler (68), a unicidade do operador de Dirac e damos alguns exemplos.

13. *REPRESENTAÇÕES IRREDUTÍVEIS DE DIMENSÃO FINITA PARA O GRUPO DE LORENTZ*

Os resultados acima podem ser reescritos numa linguagem mais familiar. O teorema inicial é

1. Proposição - Seja $s \in \odot \pi S$, onde $\odot\Pi$ denota o produto tensorial (m fatores) simetrizado, e S é o espaço dos espinores (vide defs.10.8 e 10.9). Seja G(ou G') o grupo de Clifford associado a S. Então $s \in \odot \Pi S$ é irredutível face às transformações $u \in \otimes \Pi G$(ou G').

Prova - Seja qual for a assinatura de Q, sempre G (ou G') admitirão como subgrupo um grupo unitário. Ora (69) o espaço $\odot \Pi S$ é irredutível (na restrição correspondente) ante o grupo unitário. Assim sendo, s será irredutível ante o grupo G, tomado como representação de O(Q).

Daqui chegamos às representações de tipo Teitler para o grupo de Lorentz:

2. Proposição - Seja $C_4(\mathbb{R})$ a álgebra de Dirac (álgebra de Clifford sobre uma forma quadrática de 4ª ordem e com assinatura +2) sobre os reais. Então há uma aplicação $\sigma : (C_4(\mathbb{R}))_+ \to \mathcal{S}\,(C_4(\mathbb{R}))$, onde $\mathcal{S}$ denota a álgebra das matrizes simétricas pertencentes a uma representação irredutível da álgebra de Dirac; σ é um isomorfismo de espaços vetoriais, e designamos por $C_4(\mathbb{R})_+$ o conjunto dos $u \in C_4(\mathbb{R})$ com $u^- = u$.

Prova - Há diversas construções desta simetrização, embora nunca em referência às funções de onda de Teitler (70). A tradicional é de Corson (71), e a apresentaremos explicitamente. Dado $u \in C_4(\mathbb{R})$, $\sigma(u) = \gamma^5\, u\, \varepsilon$, onde abaixo damos as representações escolhidas para as matrizes que participam desta construção:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \tau^1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad \tau^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \tau^3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}; \quad \gamma^1 = i\begin{bmatrix} 0 & \tau^1 \\ \tau^1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \gamma^2 = i\begin{bmatrix} 0 & \tau^2 \\ \tau^2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & \tau^3 \\ \tau^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^5 = i\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}; \quad \varepsilon = i\begin{bmatrix} \tau^2 & 0 \\ 0 & -\tau^2 \end{bmatrix}$$

As matrizes transformadas são:

$$\sigma(\gamma^0) = i\begin{bmatrix} 0 & \tau^2 \\ -\tau^2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma(\gamma^1) = i\begin{bmatrix} 0 & \tau^3 \\ \tau^3 & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma(\gamma^2) = i\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix};$$

$$\sigma(\gamma^3) = i\begin{bmatrix} 0 & \tau^1 \\ \tau^1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\sigma(\gamma^0\gamma^1) = i\begin{bmatrix} \tau^3 & 0 \\ 0 & -\tau^3 \end{bmatrix}; \quad \sigma(\gamma^0\gamma^2) = i\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}; \quad \sigma(\gamma^0\gamma^3) = i\begin{bmatrix} -\tau^1 & 0 \\ 0 & \tau^1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma(\gamma^1\gamma^2) = i\begin{bmatrix} \tau^1 & 0 \\ 0 & \tau^1 \end{bmatrix}; \quad \sigma(\gamma^1\gamma^3) = -i\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}; \quad \sigma(\gamma^2\gamma^3) = (-1)\begin{bmatrix} \tau^3 & 0 \\ 0 & \tau^3 \end{bmatrix}$$

São 10 matrizes simétricas, linearmente independentes (o que se comprova através de cálculo direto ou notando-se que σ é um au-

tomorfismo). Transformações lineares que atuem no espaço S_4 dos espinores de Dirac obviamente manterão tal simetria.
Uma série de corolários conecta os espinores descritos na prop. 1 às funções de onda de Teitler:

<u>3. Corolário</u> - A aplicação σ : $(C_4(\mathbb{R}))_- \longrightarrow C_4(\mathbb{R}))$ leva a um espaço de matrizes antissimétricas com dimensão 5.

<u>Prova</u> - A aplicação acima mostra que o espaço $C_4(\mathbb{R})_+$ tem dimensão 10; na construção da prop.12.1 excluímos os escalares da álgebra - que têm dimensão 1. Obviamente o espaço $C_4(\mathbb{R})_-$ terá dimensão 5.

<u>4. Corolário</u> - O espaço $\odot \Pi C_4(\mathbb{R})_+$ dos objetos com traço nulo é isomorfo ao espaço $\odot \Pi S$, onde o número de fatores no segundo produto n=2m, sendo m o do primeiro produto.

<u>Prova</u> - A aplicação $\sigma' = \otimes \sigma$, onde o produto tem m fatores, é um isomorfismo. A condição de traço nulo se faz necessária para eliminarmos a invariância (segundo Lorentz) de $u^{\mu}_{\mu..}$.

<u>5. Corolário</u> - O espaço $S \odot (\odot \Pi C_4(\mathbb{R})_+)$ é isomorfo ao espaço $\odot \Pi S$, onde o número de fatores m neste último produto é m = 2n - 1, sendo n o número de fatores no primeiro produto.

<u>Prova</u> - A aplicação σ' onde o produto trivial tem m fatores, é um isomorfismo.
A prova da irreducibilidade pode também ser feita diretamente para o produto descrito no corolário 4, a partir da irreducibilidade do objeto descrito face ao grupo ortogonal contido no grupo de Lorentz.

<u>6. Corolário</u> - Objetos pertencentes aos espaços descritos nas props.4 e 5 são, respectivamente, em termos de uma determinada base de γ's,

$$u_{2m} = \sum_{k=0}^{k=2m} u_{\mu\nu\rho\ldots[\alpha\beta][\gamma\delta]\ldots[\lambda\xi]}\ \gamma^{\mu} \odot \gamma^{\nu} \odot \gamma^{\rho} \ldots \gamma^{\alpha\beta} \odot \gamma^{\gamma\delta} \odot \ldots \gamma^{\lambda\xi}$$

$$u_{2m+1} = \sum_{k=0}^{k=2m} u_{\mu\nu\rho\ldots[\alpha\beta][\gamma\delta]\ldots[\lambda\xi]}{}^{a}\ \gamma^{\mu} \odot \gamma^{\nu} \odot \gamma^{\rho} \ldots \gamma^{\alpha\beta} \odot \gamma^{\gamma\delta} \odot \ldots \gamma^{\lambda\xi} \ldots \theta^{a}$$

k denotando o número de pares de índices antissimétricos, e θ^a sendo uma base no espaço de espinores.
Para podermos conectar spin e irreducibilidade, faz-se necessário um teorema de decomposição do produto tensorial, que será calcado na fórmula de Clebsch-Gordan:

7. Corolário - Seja T uma representação irredutível do grupo de Lorentz, isomorfa a um produto tensorial simetrizado de espaços de espinores com m fatores, e seja T' uma representação associada a um produto com m' fatores. Então o produto direto $T \otimes T'$ se decompõe: $T \otimes T' = \bigoplus \sum_{k=m'-m}^{m'+m} T_k$, onde o índice denota o número de fatores envolvidos no produto correspondente. E o spin associado a T_k é $k/2$.

Prova - Basta considerar a decomposição à Clebsch-Gordon do subgrupo ortogonal contido no grupo de Lorentz.

8. Corolário - No cor.6, u_k tem spin $k/2$.

Com isto, concluímos a construção dos objetos irredutíveis ante o grupo de Lorentz, e ao mesmo tempo mostramos a equivalência entre a teoria de Bargmann-Wigner e a teoria de Teitler, no que se refere às funções de onda - assimiladas aqui a espinores construídos sobre os reais numa álgebra de Clifford. A teoria foi desenvolvida para objetos sobre escalares reais. Objetos complexos também estão associados a produtos simétricos de espinores, embora através da adjunção de Dirac eles mudem de sinal. No entanto, devemos notar que dado um objeto $u \in C_4(\mathbb{C})$, $\sigma(u) = (\mathrm{Re}\ u)_+ + i(\mathrm{Im}\ u)_-$, onde $\sigma(u)$ denota a parte simétrica da aplicação σ. Este resultado se estende facilmente para os produtos das álgebras de Dirac sobre os complexos e para os espaços de espinores. O inconveniente da mistura de duas componentes irredutíveis de classes diferentes para constituir o mesmo objeto pode ser superado se construirmos, a partir de $C_4(\mathbb{R})$, a álgebra "complexificada" $C_4(\mathbb{R}) + zC_4(\mathbb{R})$, onde $z^2 = -1$, z comuta com todos os elementos de $C_4(\mathbb{R})$, $z^- = z$ e $z^+ = -z$. A álgebra assim construída é uma álgebra real, embora semi-simples, e em especial, é fácil ver que $(u_+)^- = u_+$, o que evita o problema surgido com a mistura de componentes irredutíveis diferentes - resultado da simples complexificação. Deve-se notar que, se u for um objeto irredutível, tanto sobre $C_4(\mathbb{C})$ quanto sobre $C_4(\mathbb{R}) + zC_4(\mathbb{R})$, $sp(u^+u)$ é ainda um escalar positivo-definido, de modo que as interpretações usuais da teoria se mantêm. Também é importante notar-se os isomorfismos bem conhecidos $C_4(\mathbb{C}) \cong C_4(\mathbb{R}) + zC_4(\mathbb{R}) \cong C_5(\mathbb{R})$, onde a álgebra com 5 geradores, neste último caso, é sobre uma forma quadrática de assinatura +3.

De qualquer maneira, deve-se notar que a complexificação - mantendo-se ou não a 'realidade' da álgebra - faz com que os objetos irredutíveis se decomponham nas componentes dos números complexos. Se a equação de ondas (conforme a veremos abaixo) for um operador real, esta decomposição se mantem sem problemas.

14. *A EQUAÇÃO DE TEITLER*

> "O my America, my new found land"
> (John Donne, Elegy 19, "To his Mistress going to bed")
>
> "Verweile doch, du bist so schön"
> (J.W.v. Goethe, Faust, II, 5º ato)

Qual a equação de movimento que deve ser imposta para construirmos a dinâmica dos objetos irredutíveis encontrados na seção anterior? A solução clássica (72) é tomar-se como modelo a equação de Dirac. Mesmo quando não é esta a equação postulada (73), sabe-se que os resultados obtidos são equivalentes aos que se têm com o emprego do operador de Dirac. No entanto, pouco mais que a simples analogia (e no uso da locução modalizadora queremos crer esteja uma segura intuição daqueles autores) tem sido justificativa para a generalização da equação de

Dirac até os spins superiores (por exemplo, como é visto em Bargmann e Wigner (74)). Será assim tão fortuito e casual o emprego daquela equação? Ou será que a poderemos conectar à estrutura aqui desenvolvida?

Nos resultados que se seguem procuraremos investigar a forma possível de uma equação de movimento que seja consistente com a estrutura dos objetos irredutíveis ante o grupo de Lorentz. Ou seja, o que se pretende é que a irreducibilidade dos objetos em causa seja, de alguma forma, preservada na equação que sobre eles age. Da seguinte maneira: pelo corolário 13.6, todo objeto irredutível segundo Lorentz é um polinômio sobre produtos diretos de gamas, e onde os índices das componentes são índices tensoriais referidos ao espaço-tempo. Na equação de movimento deve haver alguma interdependência entre as componentes daquela expansão polinomial, de tal maneira que a transformação de Lorentz de uma componente obrigue, pela interconexão entre as diversas componentes, a transformação do resto. Ou, equivalentemente, as equações escalares de movimento das diversas componentes devem ser - todas elas - interdependentes.

Esta exigência imporá o operador de Dirac como operador diferencial na equação de movimento dos u_k. Com maior rigor:

1. Proposição - Seja $u \in C_4(\mathcal{J})$, $\sigma(u) \in \mathcal{S} C_4(\mathcal{J})$. Seja $\Theta(u) = 0$ a equação de movimento de u, atendendo às seguintes condições:

(i) Θ é linear

(ii) Seja a decomposição de $u = u_1 + u_2$, onde u_i são combinações lineares de γ^μ e de $\gamma^{\mu\nu}$, respectivamente para $i = 1$ ou 2. Então $\Theta = -\delta + d + k$, sendo δ um operador que mapeia $\delta : u_2 \longrightarrow u_1$, d um operador a determinar e k um escalar.

(iii) $u \neq 0$

Então $\Theta = \nabla + k$, o operador de Dirac.

Prova - A notação já faz óbvio o teorema. Expandindo-se o operador Θ em parcelas lineares, deve este conter um múlti plo do operador identidade (para que possamos igualar $\delta u_2 = ku_1$), além de pelo menos um operador que faça a aplicação dos bivetores sobre os vetores, e um termo arbitrário. Em símbolos, e decompondo-se a equação nas componentes tensoriais,

$(-\delta + d + k)(u_1 + u_2) = 0$, ou

$\delta u_2 = ku_1$, $\delta u_1 = 0$,

$du_1 + du_2 = -ku_2$

É agora fácil ver-se que o operador δ deve incluir uma espécie de produto contraído, ou produto escalar. Vamos escrevê-lo, numa base γ^μ, $\delta = p_\mu \gamma^\mu$. onde o $\cdot$ significa: do produto de Clifford δu devemos tomar apenas as contrações. O operador d, pela equação onde este aparece, deve ser tomado como uma aplicação $d : u_1 \longrightarrow u_2$(para não se identificar a k). Poderíamos escrevê-lo, então, $a = p'_\mu \gamma^\mu \Lambda$, onde no produto Λ indicado tomamos apenas as partes não contraídas. Da equação que envolve d, poderemos concluir: $du_1 = -ku_2$; $ddu_1 = -kdu_2 = 0$. Logo, d é a derivada exterior, e $p'_\mu = \partial_\mu$. Da equação que envolve δ, tomemos $\delta u_2 = ku_1$; $\delta\delta u_2 = k\delta u_1 = 0$; donde ser δ (a menos de um fator escalar) a divergência na álgebra exterior suporte da álgebra $C_4(\mathcal{J})$.

Notemos agora que $(d \pm \delta)^2 = Q(\partial_\mu)$. O sinal é arbitrário, e trivialmente $d-\delta = \nabla = \partial_\mu \gamma^\mu$, o operador diferencial de Dirac.

A escolha do operador de Dirac não é, então, fortuita. A proposição acima vale ainda se partirmos da aplicação $d : u_1 \longrightarrow u_2$, bem como se tomarmos a parte antissimétrica da álgebra C_4; a prova, nestes casos, é idêntica à acima, com modificações óbvias.

Uma consequência interessante é:

<u>2. Proposição</u> - O operador Θ induz sequências exatas em $C_4(\mathcal{J})_+$ e em $C_4(\mathcal{J})_-$:

$$0 \longrightarrow C_4(\mathcal{J})_+ \xrightarrow{d} C_4(\mathcal{J})_+ \xrightarrow{d} C_4(\mathcal{J})_+ \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow C_4(\mathcal{J})_+ \xrightarrow{\delta} C_4(\mathcal{J})_+ \xrightarrow{\delta} C_4(\mathcal{J})_+ \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow C_4(\mathcal{J})_- \xrightarrow{d} C_4(\mathcal{J})_- \xrightarrow{d} C_4(\mathcal{J})_- \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow C_4(\mathcal{J})_- \xrightarrow{\delta} C_4(\mathcal{J})_- \xrightarrow{\delta} C_4(\mathcal{J})_- \longrightarrow 0$$

Como estender estes resultados para casos gerais? A técnica é a mesma, embora devamos ter um pequeno cuidado, referente à simetrização dos polinômios irredutíveis descritos no corolário 13.6 .

3. Proposição - Seja $u \in \odot \Pi\ C_4(\mathcal{J})_+$, ou $u \in S \odot (\odot \Pi\ C_4(\mathcal{J})_+)$. Seja $\Theta(u) = 0$ a equação de movimento de u, atendendo às condições:

(i) Θ é linear.

(ii) Seja a expansão polinomial $u = \Sigma u_k$, onde pelo índice designamos o número de fatores $\gamma^{\mu\nu}$ na expansão do cor.13.6. $\Theta = -\delta + d + k$, onde $\delta : u_k \longrightarrow u_{k-1}$.

(iii) $u \neq 0$.

Então $d-\delta$ é uma representação do operador de Dirac, e d é a derivada exterior agindo na álgebra exterior suporte de cada um dos fatores do produto tensorial simetrizado.

Prova - Semelhante à prova da prop.13.1. Notemos que d e δ são operadores parciais, i.e., que agem apenas sobre um fator no produto tensorial.

4. Corolário - Notemos S os espaços simetrizados descritos no enunciado da proposição acima. Então a sequência abaixo é exata, sendo $\nabla = d-\delta$

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{\nabla} S \xrightarrow{\nabla} S \longrightarrow 0$$

Sejam S_k tais que todo $u_k \in S_k$, na expansão $u = \Sigma u_k$ definida acima. Então as longas sequências

$$\cdots \xrightarrow{\delta} S_{k+1} \xrightarrow{\delta} S_k \xrightarrow{\delta} S_{k-1} \xrightarrow{\delta} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{d} S_{k-1} \xrightarrow{d} S_k \xrightarrow{d} S_{k+1} \xrightarrow{d} \cdots$$

são exatas.

Falta obtermos uma expressão mais facilmente manipulável para as funções de onda de Teitler, e com elas calcularmos expressões tensoriais para as componentes das equações de movimento. Isto se consegue com um resultado simples (75):

5. Proposição - Escrevamos $e^{\mu} = \gamma^{\mu} \otimes 1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1$ (s fatores no produto). A equação $(\nabla + m)\Psi = 0$, onde $\nabla = e^{\mu}\partial_{\mu}$, $m = m_0 c/\hbar$, e

$$\Psi = \sum_{k=0}^{k=s} \binom{s}{k} (1/2)^k (-m)^{s-k} \Psi_{\mu\nu\ldots\lambda[\alpha\beta][\zeta\xi]\ldots[\rho\sigma]} \gamma^{\mu} \odot \gamma^{\nu} \odot \cdots \odot \gamma^{\lambda} \odot \gamma^{\alpha\beta} \odot \cdots \odot \gamma^{\rho\sigma}$$

descreve o movimento de uma partícula livre com spin inteiro s e implica as equações de Fierz para spin inteiro, se impusermos também a condição sp $\Psi = 0$.
Para a prova veja-se a ref. (75), bem como para as equações implicadas.

6. Proposição - Escrevamos o operador ∇ definido na prop. acima com s+1 fatores no produto tensorial. Seja Θ^a, $a=0,\ldots 3$, uma base no espaço de espinores de Dirac S. Então a equação $(\nabla + m)\Psi = 0$, com

$$\Psi = \sum_{k=0}^{k=s} \binom{s}{k} (1/2)^k (-m)^{s-k} \Psi_{\mu\nu\ldots\lambda a[\alpha\beta][\delta\xi]\ldots[\rho\sigma]} \gamma^{\mu} \odot \gamma^{\nu} \odot \cdots \gamma^{\lambda} \odot \Theta^{a} \odot \gamma^{\alpha\beta} \odot \gamma^{\delta\xi} \odot \cdots \gamma^{\rho\sigma}$$

descreve o movimento de uma partícula livre de spin semi-inteiro s+1/2 e implica as equações de Rarita-Schwinger, se incluirmos a condição de irreducibilidade sp $\Psi = 0$, além de um sistema semelhante ao sistema de Fierz para todos os índices tensoriais de Ψ.

Prova - Veja-se a ref. (75).

Podemos fazer aqui alguns comentários. Primeiro, surge agora bem claro o motivo da importância das álgebras de Clifford (e em especial da álgebra de Dirac) para a teoria das partículas com spin: não só é natural seu emprego na construção das representações irredutíveis de tipo espinorial para o grupo de Lorentz como também o próprio operador diferencial de Dirac surge do estudo destas representações como o mais simples acoplamento possível entre as diversas componentes das funções de onda que descrevem aquelas partículas. Depois: no caso da teoria das partículas de spin inteiro, é possível a sua descrição com a ajuda da álgebra exterior, sendo supérfluo o produto de Clifford se utilizarmos o operador divergência δ. Para tanto basta construir o isomorfismo canônico entre álgebras de Clifford e álgebras exteriores (o que é surpreendente nisto é que o caráter de certos objetos comumente empregados na Física pode mudar de maneira decisiva - mais adiante (subseção 17.4) mostraremos que o tensor de Riemann-Christoffel é uma forma diferencial de 4ª ordem sobre certa variedade construída a partir do espaço-tempo da Relatividade Geral). Esta formulação algébrica da teoria dos spins superiores se mostra particularmente clara, e passível de se encaixar em modelos canônicos; a ênfase dada na construção de sequências exatas com as funções de onda de Teitler tem o objetivo de ressaltar ao máximo tal "naturalidade" da teoria. É como um quebra-cabeças onde, se o montamos, nada é deixado ao arbítrio. Nem a equação de ondas, nem a função de onda, nem mesmo as relações entre as componentes desta.

É importante,agora, enfatizar:

<u>7. Proposição</u> - Cada equação de Bargmann-Wigner é equivalente a uma das equações de Teitler (nas props. 5 e 6).

<u>Prova</u> - A permutação dos índices na função de onda de Bargmann-Wigner mostra que todas as equações de cada sistema são equivalentes. O uso das props. 13.4 e 13.5 faz equivaler as funções de onda de Teitler às de Bargmann-Wigner; na passagem à equação há que se tomar cuidado com os operadores de BW, que têm ordem duas vezes maior que os de Teitler. O caso do spin 1 esclarece: o operador de BW é $((\gamma^\mu \otimes 1)\partial_\mu + m)$; construindo-se a equação correspondente,

$$(\partial_\mu \Psi_{AB})(\gamma^\mu \theta^A \odot \theta^B) = -m \Psi_{AB} \theta^A \odot \theta^B .$$

Pela associatividade, e como γ^μ age em apenas um índice espinorial, esta equação equivale a

$$(\gamma^{\mu}\partial_{\mu})\Psi_{+} = -m\ \Psi_{+}, \quad \Psi_{+} \in \quad C_4(\mathcal{J})$$

ou seja, a equação de Teitler correspondente. Os casos com spin superior a 1 são idênticos.

Tratemos agora do caso das partículas de massa nula. Este é um caso degenerado, desde que o emprego das props. 5 e 6 mostra, no limite $m \to 0$, o crescimento da componente Ψ_s face às outras. A passagem ao limite, no entanto, permite que se preserve todo o entrelace de componentes, mantendo-se umas os potenciais das outras; as condições de tipo Lorentz (equações $\delta\Psi_k = 0$, ou tensorialmente, $\partial_{\mu}\psi^{\mu}\ldots = 0$), deixam no entanto de ser implicadas pelas outras equações do sistema, bem como as relações que definem os potenciais $\Psi_{k+1} = d\Psi_k$. Ambas, no entanto, podem ser obtidas supondo-se ainda o acoplamento das diversas componentes e admitindo-se que cada função fechada é exata. Um corolário que resume isto é:

<u>8. Corolário</u> - Seja T o espaço das funções de onda irredutíveis associadas a um spin inteiro s, e seja S um espaço de espinores. Tomemos (i) $\Psi \in T$ e (ii) $\Psi \in S \odot T$. Nos dois casos temos uma expansão $\Psi = \Sigma\Psi_k$. Então a equação $\nabla\Psi_k = 0$ descreve no caso (i), para um operador de Dirac ∇ com k fatores, agindo apenas sobre os índices duplos, o movimento de uma partícula livre com spin inteiro k máximo. Para (ii), a mesma equação, com k+1 fatores no operador de Dirac, descreve o movimento de uma partícula de massa nula com spin máximo semi-inteiro k+1/2.

<u>Prova</u> - As equações são, no primeiro caso, em notação tensorial,

$$\partial^{\mu}\Psi_{[\mu\nu][\rho\sigma]\ldots[\alpha\beta]} = 0,$$

$$\partial_{\mu}\Psi_{[\alpha\beta][\rho\sigma]\ldots[\delta\xi]} + \partial_{\beta}\Psi_{[\mu\alpha][\rho\sigma]\ldots[\delta\xi]} + \partial_{\alpha}\Psi_{[\beta\mu][\rho\sigma]\ldots[\delta\xi]} = 0,$$

e no segundo caso,

$$\partial^{\mu}\Psi_{[\mu\nu]\ldots[\alpha\beta]A} = 0,$$

$$\partial_\mu \Psi_{[\nu\rho]\ldots[\alpha\beta]A} + \partial_\rho \Psi_{[\mu\nu]\ldots]\alpha\beta]A} + \partial_\nu \Psi_{[\rho\mu]\ldots[\alpha\beta]A} = 0,$$

$$(\gamma^\alpha \partial_\alpha \quad) \, \Psi_{[\mu\nu]\ldots[\alpha\beta]A} \, \Theta^A = 0, \quad \Theta^A \text{ uma base em } S,$$

(acrescentando-se mais uma equação, de tipo Dirac, o que vai garantir o spin semi-inteiro). Este resultado, pelo qual se vê que os potenciais de uma partícula com spin s ou s+1/2 descrevem partículas de massa nula e com spin (correspondentemente inteiro ou semi-inteiro) inferior, é análogo a um de Roger Penrose (76), embora neste último caso as diferenças entre os spins de um potencial para o imediatamente inferior sejam de 1/2 unidade de momento angular, e não de uma unidade, como aqui em nossa função de onda.

Completamos a presente seção com um interessante corolário. Restrinjamos a G(ou a G') o grupo dos elementos da álgebra de Dirac tais que $uu^- \in \mathcal{J}$. Os u tornam-se redutíveis, e

9. Corolário - Seja uma função de onda Ψ como as descritas no cor. 14.8. Definamos uma aplicação $\delta : \Psi_k \to \Psi_{k-1}$ induzida por um operador linear Θ tal que $\Theta(\Psi) = 0$. Então a transformação $\rho_u : \Psi_{k-1} \to \rho(\Psi_{k-1})$ induz uma transformação global $\rho_u : \Psi \to \rho_u(\Psi)$ para $u \in G$ (ou G').

Quer dizer, se a equação de movimento é de tipo Dirac, se rodarmos à Lorentz um potencial, necessariamente rodaremos todos. O que é uma certa condição de irreducibilidade, e equivalente à postulada na prop. 12.8.

15. *ESPINORES DE DIRAC E ESPINORES DE PAULI*

No contexto da teoria exposta até aqui,vamos rever os resultados clássicos da teoria dos espinores a duas e a quatro componentes. As idéias básicas estão expostas em Corson e Chevalley (77). Aplicaremos aqui a prop. 10.13, a def. 10.14 e o cor. 10.15 ao grupo de Lorentz.

1. Proposição - Toda representação do grupo próprio de

Lorentz no espaço dos espinores de Dirac se decompõe numa soma $\rho(u) = A \oplus \bar{A}$, onde $u \in G_0'$; ρ denota uma representação fiel e irredutível de $C_4(\mathcal{F})$ e a barra indica a conjugação complexa. A e $\bar{A}$ são matrizes 2 x 2, sendo representações inequivalentes do grupo próprio de Lorentz.

Prova - Aplicação direta da prop. 10.13. Para a última observação, note-se que não há automorfismo interno de uma álgebra de matrizes que leve ao conjugado complexo.
Para a distinção entre espinores pontuados e não-pontuados, veja-se a def. 10.14. O próximo tópico importante é a introdução da "métrica espinorial". Isto é feito da seguinte maneira: com ajuda da representação ρ, definamos uma transposição T na álgebra de Dirac, através de $u^T = \rho^{-1}(\rho(u))^T$. Dado um conjunto de geradores para $C_4(\mathcal{F})$, ortonormalizado pela métrica de assinatura +2, o conjunto $(\gamma^\mu)^T$ é também gerador da álgebra. Então há um objeto C pertencente à álgebra tal que $(\gamma^\mu)^T = C\, \gamma^\mu\, C^{-1}$, pelo teorema de Pauli (prop. 9.21). Ou seja, $(\gamma^\mu)^T C = C\gamma^\mu$. Se tomarmos um elemento $x \in G \wedge i_0 E$, unimodular, é fácil ver que $x^T C x = C$. Ou seja, para elementos $u\ \Gamma_0$, o grupo especial de Clifford reduzido, $u^T\, C\, u = C$. Donde admitir C uma decomposição, consequência da decomposição de $u = A(u) \oplus \bar{A}(u)$, $C = \varepsilon \oplus \bar{\varepsilon}$. Calculando-se C na representação dada na prop. 13.2, teremos

$$C = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon} \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = \bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, a métrica espinorial antissimétrica usual.

Concluímos aqui o estudo da teoria das representações do grupo de Lorentz que conduz às equações de Teitler. Nas seções deste trabalho que se seguem estudamos alguns casos particulares de interesse, as equações de spin 0 e spin 1, interagindo com os campos gravitacional e eletromagnético, e a equação de spin 2 para o caso da massa nula - que, veremos, é equivalente ao sistema gravitacional de Einstein.

16. *A LAGRANGEANA DE TEITLER*

A Lagrangeana de Teitler é obviamente aquela de Dirac. No entanto seria conveniente situá-la num contexto mais amplo, isto é, obtê-la através de restrições e simplificações impostas a uma Lagrangeana genérica (*). Como as equações de Teitler são equações matriciais, ou seja, equações construídas sobre objetos não triviais de uma álgebra de Clifford, é conveniente supormos a priori que a densidade Lagrangeana é formada de matrizes. Mais precisamente, $\mathcal{L} : C \longrightarrow C$, onde C é uma álgebra de Clifford genérica. A Lagrangeana de Teitler será obtida desta Lagrangeana genérica por meio de uma linearização.

O caminho é o seguinte: seja M um espaço - tempo, i.e., uma variedade diferenciável de classe C^{∞}, Hausdorff e dotada de uma métrica g de assinatura +2 de classe C^{∞} em toda a variedade. Formemos seu fibrado exterior $\Lambda(M)$, e para cada aberto $U \subset M$ ao qual estiver associada uma coordenação da variedade, construamos a álgebra de Clifford C_4 isomorfa, enquanto espaço vetorial, à restrição $\Lambda(M)|_U$. Sendo d e δ a derivada exterior e a divergência em $\Lambda(M)$, o operador diferencial de Dirac $\nabla = d - \delta$. Escolhido um sistema de coordenadas ortogonais em U, $\nabla = \gamma^{\mu}\partial_{\mu}$, onde os γ^{μ} anticomutam segundo a condição clássica $[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]_{+} = 2g^{\mu\nu}$. Notemos que a extensão destes γ^{μ} para toda a variedade M pode causar problemas, desde que esta extensão é equivalente à construção de um sistema de 4 vetores linearmente independentes sobre toda a variedade (78).

Ao produto cartesiano XM estão associados os produtos tensoriais $\otimes\ \Lambda(M)$ e $\otimes\ C_4$. Nestes produtos, um objeto $u \in \otimes\ C_4$ está naturalmente parametrizado pelas coordenadas XU_i $U_i \subset M$, para todo i. As funções de onda Ψ serão objetos pertencentes a $\otimes\ C_4$; definindo-se a adjunção $^-$ no produto $\otimes\ C_4$(por indução a partir de $(u \otimes v)^- = (u^-) \otimes (v^-)$), formemos o conjunto dos $\Psi^-\Psi$, $\Psi \in \otimes\ C_4$.

(*) A presente exposição surgiu de uma conversa com o Prof. Sergio Murilo Abrahão, a respeito da classificação de lagrangeanas lineares; às suas observações e críticas muito devo e agradeço.

Seja agora $\mathcal{D}'$ um campo vetorial definido em U; pela identificação $i_g : E(U) \longrightarrow C_4$ construamo-lo em C_4. Formemos os objetos $\mathcal{D}\Psi$, onde $\mathcal{D} = 1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{D}' \otimes 1 \ldots \otimes 1$, e os produtos $(\mathcal{D}\Psi)^- \Psi$, $\Psi^-(\mathcal{D}\Psi)$, $(\mathcal{D}\Psi)^-\mathcal{D}\Psi$. A Lagrangeana de Teitler é

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}\Psi)^-\mathcal{D}\Psi + \frac{1}{2}(\Psi^-\mathcal{D}\Psi - (\mathcal{D}\Psi)^-\Psi) + m\Psi^-\Psi \qquad (1)$$

acrescida da condição $\mathcal{D}^2 = \nabla^2$, que pode ser também imposta à equação de movimento, $(\nabla^2 - m^2)\Psi = 0$. As equações de movimento derivadas de (1) são:

$$-\mathcal{D}^2\Psi + \mathcal{D}\Psi + m\Psi = 0 \qquad (2)$$

$$-(\mathcal{D}^2\Psi)^- + (\mathcal{D}\Psi)^- - m\Psi^- = 0 \qquad (3)$$

e é fácil ver que, acrescentando-se a condição imposta acima (condição de Klein-Gordon), o termo de 2ª ordem desaparece, restando apenas o de 1ª ordem. A Lagrangeana (1) pode ser obtida com um raciocínio mais geral: Seja C uma álgebra associativa. Para um espaço tempo M, definamos aplicações $\Psi : U \longrightarrow C$, $U \subset M$. Estas aplicações constituem um $\mathcal{F}$-módulo que, para $x \in U$ fixo, é isomorfo a C. Construamos uma sua representação matricial, e definamos a adjunção $^-$ a partir desta representação (com a condição de que $(\Psi\Phi)^- = e^{i\Theta}\Phi^-\Psi^-$); esta adjunção terá associada uma forma bilinear (79). Para um campo vetorial $\mathcal{D}'$ definido em U, construamos $\mathcal{D} \in C$, através da identificação de E(U) com um subespaço vetorial $E' \subset C$. Formemos os objetos $\Psi^-\Psi$, $(\mathcal{D}\Psi)^-\Psi$, $\Psi^-\mathcal{D}\Psi$, $(\mathcal{D}\Psi)^-\mathcal{D}\Psi$, ao seu conjunto denominemos C'. Uma Lagrangeana $\mathcal{L} : C' \longrightarrow C$ é parametrizada por U; linearizando-a (80), obtemos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + (D_{11})_0\Delta(\Psi^-\Psi) + (D_{21})_0\Delta((\mathcal{D}\Psi)^-\Psi) + (D_{12})_0\Delta(\Psi^-(\mathcal{D}\Psi)) + (D_{22})_0\Delta((\mathcal{D}\Psi)^-\mathcal{D}\Psi) \qquad (4)$$

onde as derivadas D_{11} têm óbvia definição.

Impomos que todas as derivadas sejam não singulares. Aos acréscimos $\Delta\Psi^-\Psi = \varepsilon\Psi^-\Psi$, $\varepsilon > 0$, e similar, imponhamos que $\Psi = \Psi^- = 0$, no ponto-base da expansão de Taylor. Em consequência, $\Delta\Psi^-\Psi = \varepsilon^2\Psi^-\Psi$. Da não-singularidade das derivadas obtem-se

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \varepsilon^2(\Psi^- E_{11}\Psi + (\mathcal{D}\,\Psi)^- E_{21}\Psi + \Psi^- E_{12}\mathcal{D}\,\Psi + (\mathcal{D}\,\Psi)^- E_{22}\mathcal{D}\,\Psi) \tag{5}$$

Lagrangeana esta que implicarã

$$-\mathcal{D}(E_{22}\mathcal{D}\,\Psi) + E_{12}\mathcal{D}\,\Psi - \mathcal{D}\,E_{21}\Psi + E_{11}\Psi = 0 \tag{6}$$

$$-\ [\mathcal{D}(E_{22}\mathcal{D}\,\Psi)]^- + (E_{12}\mathcal{D}\Psi)^- - (\mathcal{D}\,E_{21}\Psi)^- + (E_{11}\Psi)^- = 0, \tag{7}$$

como equações de movimento. Escrevendo-se $\mathcal{D} = \xi^\mu \partial_\mu$, e multiplicando-se a equação acima por $m(E_{11})^{-1}$, obtemos

$$\Sigma^{\mu\nu}\,\partial_\mu\,\partial_\nu\,\Psi + \Gamma^\mu \partial_\mu \Psi + m\Psi = 0 \tag{8}$$

onde $\Gamma^\mu = mE_{11}^{-1}\,(E_{12}\,\xi^\mu - \xi^\mu E_{21})$ e $\Sigma^{\mu\nu} = -mE_{11}^{-1}\,\xi^\mu E_{22}\,\xi^\nu$. A condição de Klein-Gordon, $(\nabla^2 - m)\Psi = 0$, conduzirã ã equação, i.e.,ã equação de Teitler.

Em resumo: linearizando-se uma Lagrangeana função de produtos de Ψ, seu adjunto e suas "derivadas" $\Psi,(\mathcal{D}\,\Psi)^-$, obtemos a Lagrangeana (1), que ẽ a de Dirac acrescida de um termo quadrãtico nas derivadas. A condição que imporã uma estrutura de Clifford ã ãlgebra onde construimos esta Lagrangeana ẽ a equação de Klein-Gordon, ou, em essẽncia, a forma quadrãtica base ã Relatividade Restrita. De modo que: uma Lagrangeana linear construĩda sobre uma ãlgebra associativa, e acrescida de uma condição de compatibilidade com a Relatividade Restrita implicarã as equações de Teitler. Desta maneira se responde ã conjectura formulada na nota ao pẽ da pãgina 55.

A Lagrangeana de interação pode tambẽm ser deduzida pela mesma tẽcnica, se admitirmos como meios de realizar a interação o acoplamento mĩnimo e a corrente. No acoplamento mĩnimo substituimos a derivada ∂_μ por uma derivada covariante D_μ convenientemente construĩda (81) a introdução da corrente se faz acrescentando-se ã linearização de dada pela eq.(4) termos de interação do tipo $I^-\Psi$ e $\Psi^- I$. Normalmente ẽ preciso conjugar os dois tipos de interação, para evitar que o entrelace das equações tensoriais implicadas pela equação de Teitler dẽ origem a vĩnculos reduzindo o spin (82) do campo. A Lagrangeana de

Teitler com interação será:

$$\mathcal{L} = k(\not\partial\,\Psi)^{-}\not\partial\,\Psi + \frac{1}{2}(\Psi^{-}\not\partial\,\Psi - (\not\partial\,\Psi)^{-}\Psi) + m\Psi^{-}\Psi - (I^{-}\Psi + \Psi^{-}I) \qquad (9)$$

E as correspondentes equações de movimento,

$$(\Sigma^{\mu\nu}\, D_{\mu}\, D_{\nu} + \Gamma^{\mu}\, D_{\mu} + m)\Psi = I \qquad (10)$$

e sua conjugada (na notação D_{μ} indicamos a possível dependência da derivada por uma derivada covariante). As equações de Teitler são representações irredutíveis das eqs.(8) e (10), geradas pelas representações finitas da anticomutação $[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]_{+} = 2g^{\mu\nu}$ por meio de produtos diretos da álgebra de Dirac C_4.

No caso das partículas com massa nula, a derivada D_{11} é singular. A interpretação deste fato é obscura, além da óbvia conclusão da estacionariedade de $\mathcal{L}$ em relação a $\Psi^{-}\Psi$. É possível que melhor o compreendamos se se fizer uma classificação de Lagrangeanas do tipo $\mathcal{L} : C \longrightarrow C$, C uma álgebra associativa, em relação às suas singularidades. São notórias as dificuldades deste trabalho, que se deixa aqui em aberto.

17. *ESTUDO DE ALGUNS CASOS PARTICULARES: AS EQUAÇÕES DE TEITLER PARA PARTÍCULAS COM SPIN 0, 1, E 2, COM E SEM INTERAÇÃO*

οὐκ ἐμοῦ ἀλλὰ τοῦ λόγου ἀκούσαντας ὁμολογεῖν σοφόν ἐστιν ἓν πάντα εἶναι.

Heráclito, Diels-Kranz fr. 22 B 50.

Embora seja provavelmente impossível dizermos onde se encontra a beleza de alguma coisa, ou o que é esta beleza, sem dúvida o maior fascínio que poderemos encontrar no formalismo de Teitler é a sua força unificadora, e ao mesmo tempo o grande alcance de suas diversas interpretações. Na presente seção estudaremos o formalismo de Teitler aplicado ao campo escalar, ao campo vetorial e ao campo associado a um tensor com as simetrias do tensor de Riemann-Christoffel. Jogando com a possibilidade de se introduzir interações, obteremos na linguagem de Teitler as equações do campo maxwelliano (que já são bem conhecidas (83)) e as do campo gravitacional (não tanto assim (84)). Estudaremos também algumas consequências de interesse da teoria de Teitler; em especial, sua conexão à topologia do espaço-tempo.

1. A Equação de Teitler com Interação

A partir da eq.(16.10), e com a ajuda da eq.(16.8) acrescida da condição de Klein-Gordon, verifica-se que, se a estrutura algébrica desta última deve ser mantida, $\Sigma^{\mu\nu}$ deve ser um objeto antissimétrico nos índices $\mu\nu$, desde que o produto $\partial_\mu\partial_\nu$ é comutativo, o que não ocorrerá com $D_\mu D_\nu$. Por outro lado, embora possamos tomar $\Sigma^{\mu\nu}$ como o produto exterior de dois vetores quaisquer pertencentes a um sistema linearmente independente, $x^{(\mu)}$, não haverá perda de generalidade se impusermos $\Sigma^{\mu\nu} = k\Gamma^{\mu\nu}$, k uma constante. Estudaremos os casos em que k=0 e k≠0, de modo geral, a não ser que uma das duas soluções leve naturalmente a equações reconhecíveis. A equação que empregaremos será, portanto,

$$(k\Gamma^{\mu\nu}[D_\mu, D_\nu]_- + \Gamma^\mu D_\mu + m)\Psi = I \tag{1}$$

uma generalização das eqs.(1.1) e (2.1).

2. Spins 0 e 1: Interação com o Campo Eletromagnético

Na eq.(1) tomaremos aqui $\Psi_0 = -m\Phi + \Phi_\mu\gamma^\mu$; $\Psi_1 = -m\Phi_\mu\gamma^\mu + \frac{1}{2}\Phi_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}$ e $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$. Nestas condições, é fácil ver que, no caso k=0, a eq.(1) implica:

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu, \tag{1}$$

$$D^\alpha\Phi_\alpha - m^2\Phi = 0, \tag{2}$$

$$\Phi_\alpha = D_\alpha\Phi, \tag{3}$$

$$D_\mu\Phi_\alpha - D_\alpha\Phi_\mu = iF_{\alpha\mu}\Phi, \tag{4}$$

para o campo escalar com massa, Ψ_0. Neste caso, a corrente - que se introduz para manter a mesma interdependência do sistema escalar derivado da eq.(2.1) - será

$$I_0' = iF_{\alpha\mu}\Phi\gamma^{\mu\nu}, \qquad F_{\alpha\mu} = \partial_\alpha A_\mu - \partial_\mu A_\alpha \tag{5}$$

(a necessidade da corrente é óbvia, desde que $D_\mu D_\nu \neq D_\nu D_\mu$). Para o campo de Proca, ainda no caso k=0, a eq.(1) conduz a

$$D^2\Phi_\alpha = (1/2m^2)F^{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta} \tag{6}$$

$$D^\alpha\Phi_{\alpha\beta} = m^2\Phi_\beta, \tag{7}$$

$$\Phi_{\mu\alpha} = D_\mu\Phi_\alpha - D_\alpha\Phi_\mu, \tag{8}$$

$$D_\mu\Phi_{\alpha\beta} + D_\alpha\Phi_{\mu\beta} + D_\beta\Phi_{\alpha\mu} = \Phi_\mu F_{\alpha\beta} + \Phi_\alpha F_{\mu\beta} + \Phi_\beta F_{\alpha\mu}, \tag{9}$$

onde a corrente será

$$I_1' = (1/2m^2)F^{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta} + 3!\ \Phi_{[\mu}F_{\alpha\beta]}\ \gamma^{[\mu\alpha\beta]} \tag{10}$$

com o termo de terceira ordem antissimetrizado. O caso $k\neq 0$ é mais complexo, embora bastante mais interessante. Em primeiro lugar, é fácil ver que o termo quadrático nas derivadas reduz-se, através de uma escolha apropriada de k, a $kF_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}$, onde $F_{\mu\nu}$ é o campo eletromagnético. Olhando-se as correntes (5) e (10), pensamos em acrescentar o termo de interação

$$I_0 = q_1\Phi^\mu F_{\mu\alpha}\gamma^\alpha + (q_2\Phi F_{\mu\alpha} + q_3 D_{[\mu}(F_{\alpha]\beta}\Phi^\beta))\gamma^{\mu\alpha} + q_4 F_{[\mu\nu}\Phi_{\alpha]}\gamma^{\mu\nu\alpha} \tag{11}$$

para o caso do spin 0, e

$$I_1 = q_1\Phi^{\mu\alpha}F_{\mu\alpha} + q_2 D_{[\mu}(\Phi_{\alpha]}F^{\mu\alpha}) + q_3 F_{\alpha\beta}\Phi^\beta\gamma^\alpha +$$

$$+ (q_4 F^{\mu}_{[\alpha}\Phi_{\mu\beta]} + q_5 D_{[\beta}(F^{\alpha}_{\mu]}\Phi_\alpha))\gamma^{\beta\mu} + (q_6\Phi_{[\mu}F_{\alpha\beta]} + q_7 D_{[\mu}\Phi^{\rho}_{\alpha}F_{\rho\beta]})\gamma^{\mu\alpha\beta} +$$

$$+ q_8 F_{[\mu\rho}\Phi_{\nu\sigma]}\gamma^{[\mu\nu\rho\sigma]} \tag{12}$$

para o caso do spin 1, sendo os coeficientes constantes a serem determinados de maneira a que o sistema seja equivalente, na independência das equações diferenciais, aos correspondentes sistemas sem interação. Notemos que as correntes utilizadas fazem interagir todos os campos em causa, através de formas de todas as ordens possíveis - ou seja, através de interações "escalares", "pseudo-vetoriais" e "vetoriais".

O caso do spin 0 terá por equações

$$D_\alpha \Phi^\alpha - m^2 \Phi = 0, \qquad (13)$$

$$\Phi_\alpha = D_\alpha \Phi + \left(\frac{k+q_1}{m}\right) \Phi^\mu F_{\mu\alpha} \qquad (14)$$

$$D_\alpha \Phi_\beta - D_\beta \Phi_\alpha = (ik + q_2) \Phi F_{\alpha\beta} + \left(\frac{k}{m} + q_3\right)(D_{[\alpha}(F_{\beta]\mu} \Phi^\beta)) \qquad (15)$$

onde os coeficientes $q_1 = ik(1-1/m)$, $q_2 = i(1-k)$, $q_3 = ik(1-1/m)$, $q_4 = 1$.

Para o caso do campo de Proca,

$$D^\alpha \Phi_{\alpha\beta} = m^2 \Phi_\beta + (ik + q_3) F_{\beta\alpha} \Phi^\alpha, \qquad (16)$$

$$\Phi_{\alpha\beta} = D_\alpha \Phi_\beta - D_\beta \Phi_\alpha + \left(\frac{ik}{2m} + q_4\right)(F^\mu_\alpha \Phi_{\mu\beta} - F^\mu_\beta \Phi_{\mu\alpha}), \qquad (17)$$

$$D_{[\mu} \Phi_{\alpha\beta]} = (ik + q_6)(\Phi_{[\mu} F_{\alpha\beta]}) + q_7 D_{[\mu}(F^\rho_\alpha \Phi_{\rho\beta]} - F^\rho_\beta \Phi_{\rho\alpha]}) \qquad (18)$$

$$D^\beta \Phi_\beta = \left(\frac{ik}{m} + q_1\right) F^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} + q_2 D^\beta (F_{\beta\alpha} \Phi^\alpha) \qquad (19)$$

$$F_{[\mu\nu} \Phi_{\rho\sigma]} \neq 0 \qquad (20)$$

onde, com as escolhas $q_1 = (i/2m^2)(1-2km)$, $q_2 = -ik$, $q_3 = i(1-k)$, $q_4 = ik/2m$, $q_5 = 0$, $q_6 = i(1-k)$, $q_7 = ik/2m$, $q_8 = ik$, o sistema acima se reduz às equações

$$D^\alpha \Phi_{\alpha\beta} = m^2 \Phi_\beta + ik F_{\beta\alpha} \Phi^\alpha, \qquad (21)$$

$$\Phi_{\alpha\beta} = D_\alpha \Phi_\beta - D_\beta \Phi_\alpha + \frac{ik}{2m}(F^\mu_\alpha \Phi_{\mu\beta} - F^\mu_\beta \Phi_{\mu\alpha}), \qquad (22)$$

$$D_{[\mu}\Phi_{\alpha\beta]} = iF_{[\mu\alpha}\Phi_{\beta]} + \frac{ik}{2m} D_{[\mu}(F^{\rho}_{\alpha}\Phi_{\rho\beta]} - F^{\rho}_{\beta}\Phi_{\rho\alpha]}), \tag{23}$$

$$D^{\beta}\Phi_{\beta} = \frac{i}{2m^2} F^{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta} - ikD^{\beta}(F_{\beta\alpha}\Phi^{\alpha}), \tag{24}$$

que foram recentemente obtidas por Durand (85) num formalismo próximo ao desenvolvido nesta subseção (embora não totalmente equivalente a ele). O sistema formado pelas eqs.(21) a (24) generaliza sistemas propostos por Corben e Schwinger (86) e Young e Bludman (87) para a descrição de partículas com spin 1 em interação com o campo eletromagnético.

Embora a eq.(16.10) haja sido obtida com um mínimo de suposições arbitrárias, é visível que a interação eletromagnética não se adapta muito bem ao formalismo de Teitler; as sequências exatas que definirão o operador diferencial de Dirac para as equações de Teitler desaparecem devido à não comutatividade da derivada covariante associada ao campo eletromagnético. Em consequência, faz-se necessário acrescentar o termo - sempre ad-hoc - de interação, onde a escolha dos coeficientes nos conduzirá a um sistema de equações conhecido. Apesar disso, ainda se encontram nos sistemas das eqs.(13) a (15) e (21) a (24) regularidades suficientes para supormos a existência de uma formulação algébrica compacta, do tipo da existente para as equações sem interação.

É necessário fazermos aqui duas observações finais: primeiro, Velo e Zwanziger (88) mostraram que há soluções que se propagam fora do cone de luz, para sistemas como os estudados acima. Tem havido bastante discussão a respeito desta descoberta embora seus autores a comparem às diversas outras soluções "virtuais" encontráveis na Física. Talvez seja mais importante o fato de que as equações de Teitler para spins 0 e 1 se tornam inconsistentes quando introduzimos o campo eletromagnético por meio de uma técnica de gauge, à maneira de Yang-Mills-Utiyama (89). A corrente de interação I pretende, como se disse, restabelecer a interdependência entre as diversas equações do sistema com interação que havia no sistema original.

A comparação com o caso da interação gravitacional é instrutiva. Porque esta é a interação natural para o formalismo de Teitler, conforme veremos logo em seguida.

3. Spins 0, 1 e o Campo Gravitacional; A Cohomologia do Espaço-Tempo

Usaremos aqui o isomorfismo $C_4 \cong \Lambda$, onde Λ é a álgebra exterior isomorfa, enquanto espaço vetorial, à álgebra de Clifford. Por este isomorfismo representamos o operador de Dirac $\nabla = \gamma^{\mu}\partial_{\mu} = d - \delta$, onde d é a derivada exterior atuando em Λ, e δ a correspondente divergência. Seja M um espaço-tempo dotado de uma métrica pseudo-riemanniana de assinatura +2; seja Λ (M) o fibrado exterior de M. Para a gradação $\Lambda(M) = +\sum_{i=0}^{4} \Lambda^i(M)$, a função de onda $\Psi_o = -m\Phi_o + \Phi_1$, onde $\Phi_o \in \Lambda^0$ e $\Phi_1 \in \Lambda^1$; também $\Psi_1 = -m\,\Theta_1 + \frac{1}{2}\,\Theta_2$, onde $\Theta_1 \in \Lambda^1$ e $\Theta_2 \in \Lambda^2$. Se indicarmos com o circunflexo os operadores diferenciais em (M) associados à afinidade de Christoffel construída com a estrutura pseudo-riemanniana de M, é fácil ver que $\nabla \to \hat{\nabla}$, $d \to \hat{d}$ e $\delta \to \hat{\delta}$, e as equações do campo escalar e do campo de Proca podem ser escritas,

$$\hat{\delta}\Phi_1 = -m^2\Phi_o, \tag{1}$$

$$\Phi_1 = \hat{d}\Phi_o, \tag{2}$$

$$\hat{d}\Phi_1 = 0, \tag{3}$$

(o campo escalar), e

$$\hat{\delta}\,\Theta_2 = -n^2\,\Theta_1, \tag{4}$$

$$\hat{d}\,\Theta_2 = 0, \tag{5}$$

$$\Theta_2 = \hat{d}\,\Theta_1, \tag{6}$$

$$\hat{\delta}\,\Theta_1 = 0, \tag{7}$$

(o campo de Proca). A naturalidade da interação gravitacional salta aos olhos; não só as equações tensoriais associadas às eqs. acima são as costumeiras como também nada é mudado na estrutura algébrica do sistema de Teitler, desde que $\hat{d}^2 = \hat{\delta}^2 = 0$.

O resultado mais interessante está na conexão direta que há entre esses dois campos e a topologia do espaço-tempo. As eqs.(3) e (5) dizem que Φ_1 e Θ_2 são cociclos. Chamemos a seus conjuntos $\mathcal{F}_1 \ni \Phi_1$ e $\mathcal{F}_2 \ni \Phi_2$. Ora, alguns destes cociclos serão cobordos, isto é, possuirão potenciais contínua e diferenciavelmente construtíveis sobre toda a variedade. Chamemos ao conjunto destes $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{F}_1$ e $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{F}_2$. Então os grupos de cohomologia de de Rham $H^1 = \mathcal{F}_1/\mathcal{B}_1$ e $H^2 = \mathcal{F}_2/\mathcal{B}_2$. Para o grupo H^3 tomemos a eq.(1) no caso m=0. Para o dual (construído com o operador *) $*\Phi_1$ (90), a eq.(1) é equivalente a $d*\Phi_1 = 0$. O mesmo raciocínio acima nos faz concluir, para cociclos $*\Phi_1 \in \mathcal{F}_3$ e cobordos pertencentes a $\mathcal{B}_3$, $H^3 = \mathcal{F}_3/\mathcal{B}_3$. Acrescentando-se os grupos H^0 e H^4, formamos a cohomologia de M, $H = \bigoplus\sum_{i=0}^{4} H^i$, através de campos mesônicos.

Uma crítica pode ser feita à construção acima: a partícula escalar de massa nula não parece existir na realidade. Isto, no entanto, não invalida o raciocínio exposto (91).

4. A Partícula de Spin 2 e Massa Nula; O Campo Gravitacional no Formalismo de Teitler

A teoria do spin 2 desenvolveu-se, a partir dos trabalhos de Fierz e Pauli (92), através da formulação de equações tensoriais de ondas para a perturbação h da métrica do campo gravitacional; entre os trabalhos nesta linha podemos citar Tonnelat (93), da Silveira (94) e Ogievetskii e Polubarinov (95). No entanto, há cerca de vinte anos, uma nova variável de campo foi assumindo papel de importancia na teoria do spin2, um tensor com a mesma simetria que o tensor de Riemann-Christoffel. Na teoria de Fierz (96) é um objeto derivado, em consequência da ênfase que aquele autor dá à descrição do campo com a ajuda de potenciais; no entanto, conforme bem o mostra Lichnerowicz (97), este tensor de Riemann-Christoffel linearizado satisfaz a equações de movimento que sem maior esforço - e com a mesma estrutura algébrica - se transpoem para o caso não-linear, o campo gravitacional. Devemos citar aqui os trabalhos de Szekeres (98), Penrose (99), entre outros; em especial este último autor mostra a equivalência entre as duas equações propostas por

Lichnerowicz para a descrição do campo gravitacional sem fontes e as equações espinoriais do campo de massa nula e spin 2 interagindo com o campo gravitacional. Devemos lembrar aqui também Lord (100), cujos trabalhos muito se aproximam do formalismo abaixo, exposto em sua essência em (101).

Partiremos aqui de dois teoremas a respeito do tensor de Riemann-Christoffel:

1. Proposição - Seja M um espaço-tempo dotado de uma métrica de assinatura +2. Seja $\Lambda(M)$ o fibrado exterior de M, e seja $C_4(U)$, U M, a álgebra de Clifford isomorfa a $\Lambda(U)$ enquanto espaços vetoriais. Valem então os isomorfismos $\Lambda(M \times M) \cong \Lambda(M) \hat{\otimes} \Lambda(M)$; $\Lambda^1(M \times M) \cong \Lambda^1(M) \oplus \Lambda^1(M)$; $C_4(U \times V) \cong C_4(U) \otimes C_4(V) \cong \Lambda(U) \hat{\otimes} \Lambda(V)$, onde o produto circunflexado de fibrados exteriores é o produto tensorial anticomutativo, e o isomorfismo $\cong$ denota isomorfismo de espaços (módulos) vetoriais (102). O tensor de Riemann-Christoffel R associado à métrica de M é representado em M × M por uma forma diferencial $\Omega \in \Lambda^2(M) \otimes \Lambda^2(M)$, cuja simetria é a mesma de R; se γ^μ é uma base ortonormal geradora de $C_4(U)$, então $\gamma^\mu \otimes 1$ e $\gamma^5 \otimes \gamma^\mu$ é uma base geradora de $C_4(U) \otimes C_4(V)$, e isomorfa (inclusive no que se refere à anticomutação) à base $\Lambda^1(U) \oplus \Lambda^1(V)$ que gera $\Lambda(U \times V)$.

Prova - Os isomorfismos entre fibrados exteriores e seus produtos estão em Greub et al.(102); o isomorfismo local entre o fibrado exterior e álgebras de Clifford está em Crumeyrolle (103), onde também se acha a discussão a respeito das possibilidades de se estendê-lo para toda a variedade. Sobre a representação de R por meio de uma forma exterior, basta usar a base $e_1^\mu = \gamma^\mu \otimes 1$, $e_2^\mu = \gamma^5 \otimes \gamma^\mu$, para identificar-se

$$R = R_{\mu\nu\rho\sigma}(e^\mu \wedge e^\nu) \cdot (e^\rho \wedge e^\sigma) \longmapsto \Omega = \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu\rho\sigma}(e_1^{\mu\nu} e_2^{\rho\sigma} + e_1^{\rho\sigma} e_2^{\mu\nu}) \tag{1}$$

onde é preciso que se veja que, por exemplo, a componente R_{1234}

$$R_{1234} \mapsto \frac{1}{2} (\Omega_{1278} + \Omega_{3456}) \tag{2}$$

ou seja, as simetrias de R são preservadas à custa de uma mudança nas denominações dos índices de Ω. O restante é trivial.

O segundo teorema é devido a Ezra T. Newman (104) e nos dirá, mais adiante, da equivalência entre as identidades de Bianchi e as equações de spin 2 para campos gravitacionais sem fontes. Usando uma notação tensorial, definamos o dual de um bivetor $u_{[\mu\nu]}$,

$$*u_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}(-g)^{1/2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,u^{[\gamma\delta]} \tag{3}$$

$$**u_{[\alpha\beta]} = -u_{[\alpha\beta]} \tag{4}$$

Para o tensor de Riemann-Christoffel,

$$*R_{\mu\nu\rho\sigma} = (1/2)(-g)^{1/2}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \tag{5}$$

Então valerá a

2. Proposição - $R_{\mu\nu} = 0$ se e somente se $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ é dual de si mesmo.

Prova - A demonstração completa se acha no trabalho de Newman (104). Este autor considera 4 vetores, dos quais dois são de tipo luz e dois de tipo espaço, ortogonais aos primeiros(que satisfazem $u_1^2 = u_2^2 = 0$, $(u_1|u_2)=1$). Com estes 4 vetores Newman constroi 6 bivetores, 2 a 2 duais, cujas somas constituem bases possíveis para tensores com a simetria de $R_{\mu\nu\rho\sigma}$. Impondo a condição $R_{\mu\nu} = 0$, Newman enumera 10 tensores que a satisfazem, todos auto-duais.

Com isto podemos explorar nosso resultado principal, e algumas consequências:

3. Proposição - O sistema de Einstein é equivalente às equações

$$\mathcal{D}_1\Omega = I_1, \quad \text{ou} \tag{6}$$

$$\mathcal{D}_2\Omega = I_2, \tag{7}$$

onde a derivada $\mathcal{D}_i = e_i^{\mu}\nabla_{\mu}$, i=1,2, e ∇_{μ} age, em coordenadas locais,

$$\nabla_{\mu}(\Phi\Psi) = (\nabla_{\mu}\Phi)\Psi + \Phi(\nabla_{\mu}\Psi), \tag{8}$$

$$\nabla_{\mu}\Phi = \partial_{\mu}\Phi, \qquad \Phi \varepsilon \mathcal{F}, \tag{9}$$

$$\nabla_{\mu}e_i^{\nu} = -\{{}_{\mu\rho}^{\nu}\}\, e_i^{\rho}, \quad i=1,2, \tag{10}$$

e a corrente I_i, i=1,2, é dada por

$$I_1 = 2I_{\rho\mu\nu}\, e_1^{\rho}\, e_2^{\mu\nu}; \quad I_2 = 2I_{\mu\nu\rho}\, e_1^{\mu\nu}\, e_2^{\rho}, \tag{11}$$

$$I_{\nu\rho\sigma} = (T_{\nu\sigma;\rho} - \frac{1}{2} g_{\nu\sigma}\, T_{;\rho}) - (T_{\nu\rho;\sigma} - \frac{1}{2} g_{\nu\sigma}\, T_{;\sigma}) \tag{12}$$

Prova - Cálculo direto leva de (6) e (7) a

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma;\mu} = I_{\nu\rho\sigma}, \tag{13}$$

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma;\alpha} + R^{\mu}_{\nu\alpha\rho;\sigma} + R^{\mu}_{\nu\sigma\alpha;\rho} = 0, \tag{14}$$

que é o sistema de Lichnerowicz (105) para o campo gravitacional. Fixando-se numa superfície tipo espaço $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}$, o sistema acima será equivalente às equações de Einstein (106).

Um importante resultado de Penrose (107) pode ser agora obtido:

4. Proposição - Para espaços de Einstein com constante cosmológica nula, as equações da gravitação são equivalentes à equação espinorial

$$\nabla^{\dot{B}A}\, \Psi_{ACDF} = 0, \quad A, \ldots = 1,2, \tag{15}$$

por sua vez equivalente à identidade diferencial de Bianchi, eq. (14).

Prova - Usaremos as eqs.(6) e (7), os resultados da seção 15 e a prop.14.7. Desta última concluimos que há uma aplica ção $\Omega \longmapsto \Pi$, onde Π é um espinor de Dirac totalmente simétrico e com 4 índices, $(\Pi)_{abcd} = \Pi_{abcd}$, $a,b,c,d = 0,1,2,3$. Este espinor possui a decomposição (vide seção 15) $\Pi = \Psi \oplus \Phi$; decompondo o operador diferencial de (6) ou (7), chegamos às eqs.

$$\partial^{\mu\dot{A}B} \nabla_\mu \Psi_{BCDE} = \nabla^{\dot{A}B} \Psi_{BCDE} = 0, \tag{16}$$

$$\partial^{\mu A\dot{B}} \nabla_\mu \Phi^{....}_{BCDE} = \nabla^{A\dot{B}} \Phi^{....}_{BCDE} = 0, \tag{17}$$

que são equivalentes, pois devido ao teorema de Newman (prop.3) a identidade de Bianchi é equivalente à condição diferencial $R^{\mu}_{\nu\rho\sigma;\mu} = 0$. Em especial $\Psi = \Phi$.

Este resultado se generaliza para spins integrais e semi-integrais quaisquer, de massa de repouso nula e interagindo com o campo gravitacional (108).

18. *CONCLUSÃO*

"Lasst's mich allein, die Leut' wollen nix von mir wissen",

(Anton Bruckner, após a apresentação fracassada de sua Terceira Sinfonia; citado por W.Wolf, Anton Bruckner, Atlantis Verlag, Zuerich, 1948)

O presente trabalho teve por objetivo não só clarificar os fundamentos da teoria que S. Teitler expôs em 1965 (109) para partículas escalares e vetoriais como também fazê-la equivalente aos formalismos conhecidos para spins superiores, e - nas seções finais - levar um pouco adiante a interpretação geométrica para objetos físicos, buscada não só por Teitler como também por David Hestenes (110) e outros. Em particular destacamos (na subseção 17.3) a íntima relação entre a teoria de Teitler para campos de mesons e a topologia do espaço-tempo. À nossa bibliografia específica a respeito (111) gostaríamos de acrescentar as investigações do grupo de Física Matemática do Instituto de Física da UFRJ (112).

Um comentário final: a epígrafe desta seção refe re-se ao quase total descaso na literatura corrente à teoria de Teitler. Indagar pelos seus motivos seria exigir que entrássemos na área de uma sociologia da investigação científica, o que não pretendemos nem vemos como fazer, no momento. No entanto, parece-nos óbvio a superioridade e simplicidade que tem este formalismo sobre os outros, mais difundidos, para a teoria dos spins superiores. E não consideramos trivial - embora trivial seja o raciocínio seguido - o salto da álgebra à topologia desenvolvido em suas linhas gerais na seção 17.3. Cremos ser relacionamento fertilíssimo, à espera de maiores desenvolvimentos.

BIBLIOGRAFIA

(1) O. Laporte e G. E. Uhlenbeck, "Application of spinor analysis to the Maxwell and Dirac equations", Phys. Rev., 37, (1931), pp. 1380-1397; H. E. Moses, "A spinor representation of Maxwell's equations", Supp. Nuovo Cim., ser. X, 7, (1958), pp. 1-18, e referências neste artigo.

(2) P. A. M. Dirac, "Relativistic wave equations", Proc. Roy. Soc., A, 155, (1936), pp. 447-459; E. M. Corson, Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave-Equations, Blackie & Sons, Londres e Glasgow, (1953), e referências neste livro.

(3) W. Rarita e J. Schwinger, "On a theory of particles with half-integral spin", Phys. Rev., 60, (1941), p. 61.

(4) P. A. M. Dirac, ref. em (2).

(5) E. P. Wigner, "On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group", Ann. Math., 40, (1939), pp. 149-204; E. P. Wigner, "Relativistische Wellengleichungen", Zeits. für Phys., 134, (1948), pp. 665-684; V. Bargmann e E. P. Wigner, "Group theoretical discussion of relativistic wave equations", Proc. Nat. Acad. Sci., 34, (1948), pp. 211-223.

(6) F. A. Doria, "A Weyl-like equation for the gravitational field", Lettere Nuovo Cim., 14, (1975), pp. 480-482.

(7) E. M. Corson, ref. em (2).

(8) A. Salam, R. Delbourgo e J. Strathdee, "The covariant theory of strong interaction symmetries", Proc. Roy. Soc., A, 284, (1965), pp.146-158; S. Kamefuchi e Y. Takahashi, "A Lagrangian formalism and the relativistic quantization of the Bargmann-Wigner fields", Nuovo Cim., A, 44, (1966), pp. 1-16; D. Lurié, Particles and Fields, Interscience, Nova York, (1968).

(9) Ver S. Kamefuchi e Y. Takahashi (8), e, mais recentemente, M. Kawasaki, M. Kobayashi e Y. Mori, "Lagrange formalism of the 20-component theory of spin-3 fields", Lettere Nuovo Cim., 14, (1975), pp. 611-614.

(10) S. Teitler, "Vector Clifford algebras and the classical theory of fields", Supp. Nuovo Cim., 3, (1965), pp. 1-14.

(11) M. Riesz, Clifford Numbers and Spinors, Lecture Series nº 38, Univ. of Maryland, Maryland, (1958).

(12) Ver S. Kamefuchi e Y. Takahashi, ref. (8).

(13) F. A. Doria, "On Teitler's higher-spin field equations", Lettere Nuovo Cim., aguardando publicação; F. A. Doria, "A Lagrangian formulation for non-interacting high-spin fields", J. Math. Phys., aguardando publicação.

(14) Ver A. Salam e associados, ref. (8).

(15) F. A. Doria, refs. em (13).

(16) S. Goldberg, Curvature and Homology, Academic Press, Nova York e Londres, (1962).

(17) R. Brauer e H. Weyl, "Spinors in n-dimensions", Amer. J. Math., 57, (1935), pp. 425-515; C. Chevalley, Theory of Lie Groups, Princeton University Press, Princeton, (1946); C. Chevalley, The Algebraic Theory of Spinors, Columbia University Press, Nova York, (1954); M. F. Atiyah, R. Bott e A. Shapiro, "Clifford modules", Topology, 3, supp. 1, (1964), pp. 3-38; A. Crumeyrolle, "Structures spinorielles", Ann. Inst. Henri Poincaré, 11, (1969), pp. 19-55; F. A. Doria, Espinores como Objetos Internos a uma Álgebra de Clifford, tese de mestrado, CBPF, Rio, (1973).

(18) C. Chevalley, The Algebraic Theory of Spinors, Columbia University Press, Nova York, (1954).

(19) M. F. Atiyah, R. Bott e A. Shapiro, "Clifford modules", Topology, 3,

supp. 1, (1964), pp. 3-38.

(20) A. Crumeyrolle, "Structures spinorielles", Ann. Inst. Henri Poincaré, 11, (1969), pp. 19-55.

(21) A construção clássica das álgebras tensoriais está no artigo de F. J. Murray e J. von Neumann, "On rings of operators", Ann. Math., 37, (1936), pp. 116-229. Para dimensões finitas vale o que se expõe em S. Sternberg, Lectures on Differential Geometry, Prentice-Hall, Boston, (1964); a comparação entre as duas construções se acha em E. Nelson, Tensor Analysis, Princeton University Press, Princeton, (1967).

(22) C. Chevalley, ref. (18); I. E. Segal, "Tensor algebras over Hilbert spaces", I, Trans. Amer. Math. Soc., 81, (1956), pp. 106-134; II, Ann. Math., 63, (1956), pp. 160-175.

(23) C. Chevalley, ref. (18).

(24) C. Chevalley, ref. (18); Atiyah e cols., ref. (19).

(25) S. Schweber, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, Harper & Row, Nova York, (1966); J. J. Sakurai, Advanced Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1967); H. Muirhead, The Physics of Elementary Particles, Pergamon Press, Oxford, (1968).

(26) I. N. Herstein, Topics in Algebra, Blaisdell, Nova York, (1964).

(27) D. Shale e W. F. Stinespring, "States of the Clifford algebra", Ann. Math., 80, (1964), pp. 365-381.

(28) Ver R. Brauer e H. Weyl, ref. (17); E. M. Corson, ref. (2), e H. Boerner, Representations of Groups, North Holland, Amsterdam, (1970).

(29) Atiyah e cols., ref. (19).

(30) D. Shale e col., ref. (27).

(31) T. Kahan e cols., Theory of Groups in Classical and Quantum Physics, I, Oliver & Boyd, Edinburgh e Londres, (1965); veja-se também E. M. Corson, ref. (2).

(32) F. A. Doria, Espinores como Objetos Internos a uma Álgebra de Clifford, tese de mestrado, CBPF, Rio, (1973).

(33) D. Shale e col., ref. (27).

(34) S. Sakai, C^*-Algebras and W^*-Algebras, Springer Verlag, Berlin, (1971), p. 23.

(35) C. Chevalley, ref. (18).

(36) C. Chevalley, ref. (18).

(37) Atiyah e cols., ref. (19); A. Crumeyrolle, ref. (20).

(38) A. Crumeyrolle, ref. (20).

(39) T. Kahan e cols., ref. (31), p. 77; ver também S. Teitler, ref.(10) e F. A. Doria, "A Lagrangian formulation for non-interacting high-spin fields", J. Math. Phys., aguardando publicação.

(40) F. A. Doria, ref. (32).

(41) Atiyah e cols., ref. (19); A. Crumeyrolle, ref. (20).

(42) T. Kahan, ref. (39).

(43) C. Chevalley, ref. (18), p. 19.

(44) C. Chevalley, ref. (18), pp. 19-21.

(45) C. Chevalley, ref. (18); Atiyah e cols., ref. (19); A. Crumeurolle, ref. (20).

(46) C. Chevalley, ref. (18); Atiyah e cols., ref. (19).

(47) C. Chevalley, ref. (18).

(48) Ver a ref. (45).

(49) A. Crumeyrolle, ref. (20).

(50) A. Crumeyrolle, ref. (20).

(51) R. Brauer e H. Weyl, ref. (17); E. M. Corson, ref. (2); F. A. Doria, ref. (32).

(52) J. J. Sakurai, Advanced Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1967).

(53) F. A. Doria, ref. (39).

(54) S. I. Goldberg, Curvature and Homology, Academic Press, Nova York e Londres, (1962); E. Nelson, Tensor Analysis, Princeton University Press Princeton, (1967).

(55) F. A. Doria, ref. (39).

(56) A. Crumeyrolle, ref. (20).

(57) E. M. Corson, ref. (2).

(58) C. Chevalley, ref. (18).

(59) S. I. Goldberg, ref. (54).

(60) S. Teitler, ref. (10).

(61) C. Chevalley, Theory of Lie Groups, Princeton University Press, Princeton, (1946), trata do caso das álgebras de matrizes com dimensão finita; S. Sakai, ref. (34), trata da decomposição de objetos pertencentes a uma álgebra de von Neumann.

(62) F. A. Doria, ref. (13).

(63) C. Chevalley, ref. (18).

(64) E. M. Corson, ref. (2).

(65) J. Aharoni, The Special Theory of Relativity, Clarendon Press, Oxford, (1959), trata do assunto em tela no capítulo 7.

(66) F. A. Doria, ref. (39).

(67) E. M. Corson, ref. (2), p. 38.

(68) F. A. Doria, ref. (13).

(69) H. Boerner, ref. (28), p. 178.

(70) Ver a ref. (8).

(71) E. M. Corson, ref. (2).

(72) P. A. M. Dirac, "Relativistic wave equations", Proc. Roy. Soc., A, 155, (1936), pp. 447-459; M. Fierz, "Ueber die relativistische Theorie kraeftefreier Teilchen mit beliebigem Spin", Helv. Phys. Acta, 12, (1938),

pp. 3-37; M. Fierz e W. Pauli, "On relativistic wave-equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field", Proc. Roy. Soc., A, 173, (1939), pp. 211-232; W. Rarita e J. Schwinger, "On a theory of particles with half-integral spin", Phys. Rev., 60, (1941), p. 61; E. P. Wigner, "Relativistische Wellengleichungen", Zeits. für Phys., 134, (1948), pp. 663-684; V. Bargmann e E. P. Wigner, "Group-theoretical discussion of relativistic wave-equations", Proc. Nat. Acad. Sci., 34, (1948), pp. 211-223.

(73) E. M. Corson, ref. (2).

(74) V. Bargmann e E. P. Wigner, ref. (72).

(75) F. A. Doria, ref. (13).

(76) R. Penrose, "Zero rest-mass fields including gravitation: asymptotic behaviour", Proc. Roy. Soc., A, 284, (1965), pp. 159-203.

(77) E. M. Corson, ref. (2), e C. Chevalley, ref. (18).

(78) A. Crumeyrolle, ref. (20), e bibliografia nele incluída.

(79) M. A. Naimark, Linear Representations of the Lorentz Group, Pergamon Press, Oxford, (1964), p. 382 e seguintes.

(80) H. Cartan, Differential Calculus, Hermann-Houghton-Mifflin, Paris, Boston e Palo Alto, (1971), p. 68.

(81) E. Abers e B. W. Lee, Gauge Theories, Physics Reports nº 1, (1973), e bibliografia incluída.

(82) Veja a este respeito, por exemplo, o trabalho de S. Kamefuchi e Y. Takahashi, incluído na ref. (8), onde se mostra um desses vínculos.

(83) Ver a ref. (1), a ref. (10), e os trabalhos de A. da Silveira, A. F. F. do Amaral e S. M. Abrahão, "On Teitler's spin-0 field equations" e "On Teitler's spin-1 field equations", a serem submetidos à publicação.

(84) F. A. Doria, ref. (6).

(85) E. Durand, "16-component theory of the spin-1 particle and its gene

ralization to arbitrary spin", Phys. Rev., D, 11, (1975), pp.3405-3416.

(86) H. C. Corben e J. Schwinger, "The electromagnetic properties of mesotrons", Phys. Rev., 58, (1940), pp. 953-968.

(87) J. A. Young e S. Bludman, "Electromagnetic properties of a charged vector meson", Phys. Rev., 131, (1961), pp. 2326-2334.

(88) G. Velo e D. Zwanziger, "Propagation and quantization of Rarita-Schwinger waves in an external electromagnetic potential", Phys. Rev., 186, (1969), pp. 1337-1341; id., ib., "Noncausality and other defects of interaction Lagrangians for particles with spin one and higher", Phys. Rev., 188, (1969), pp. 2218-2222.

(89) Ver ref. (81).

(90) S. Goldberg, ref. (16).

(91) F. A. Doria, "Meson fields and space-time cohomology", submetido à publicação.

(92) M. Fierz e W. Pauli, na ref. (72).

(93) M. A. Tonnelat, Les Théories Unitaires de l'Électromagnétisme et de la Gravitation, Gauthier-Villars, Paris, (1965), caps. 13 a 15, e referências.

(94) A. da Silveira, citado na ref. (95).

(95) V. I. Ogievetskii e I. V. Polubarinov, "Interacting field of spin 2 and the Einstein equations", Ann. Phys. (N.Y.), 35, (1965), pp.167-208.

(96) M. Fierz, ref. (72).

(97) A. Lichnerowicz, citado por M. A. Tonnelat, ref. (93).

(98) P. Szekeres, "Spaces conformal to a class of spaces in general relativity", Proc. Roy. Soc., A, 274, (1963), pp. 206-212; id., "On the propagation of gravitational fields in matter", J. Math. Phys., 7, (1966), pp. 751-761; id., "Linearized gravitational theory in macroscopic media", Ann. Phys. (N. Y.), 64, (1971), pp. 599-630; P. Szekeres e P. Bell, "So-

me properties of higher spin rest mass zero fields in General Relativity", Univ. of Adelaide preprint, (1975).

(99) R. Penrose, "A spinor approach to General Relativity", Ann.Phys.(N.Y.), 10, (1960), pp. 171-201; id., "Zero rest-mass fields including gravitation: asymptotic behaviour", Proc. Roy. Soc., A, 284, (1965),pp.159-203.

(100) E. A. Lord, "Clifford algebras in General Relativity", Proc. Cambridge Phil. Soc., 67, (1967), pp. 785-807. Neste trabalho o autor utiliza, para descrever o campo gravitacional, a mesma álgebra que empregamos aqui e na ref. (6), que é a álgebra dos números E-F, de Eddington. No entanto Lord não chega à equação gravitacional tipo neutrino (proposição 3 desta seção), embora muito dela se aproxime (ver as seções 7 e 8 de seu trabalho). Ver também E. A. Lord, "General Relativity from gauge invariance", Proc. Cambridge Phil. Soc., 69, (1971), pp. 423-442. Neste outro trabalho o ponto de partida é a equação que R. Penrose (ver a ref. (99)) emprega para descrever o campo gravitacional, e que é, para campos gravitacionais reais e sem fontes, equivalente à que propomos aqui.

(101) F. A. Doria, ref. (6).

(102) W. Greub, S. Halperin e R. Vanstone, Connections, Curvature and Cohomology, Academic Press, Nova York, (1972).

(103) A. Crumeyrolle, ref. (20).

(104) E. T. Newman, "Some properties of empty space-time", J. Math.Phys., 2, (1961), pp. 324-327.

(105) A. Lichnerowicz, citado em (93).

(106) F. A. Doria, ref. (6).

(107) R. Penrose, ref. (99).

(108) R. Penrose, ref. (99).

(109) S. Teitler, ref. (10).

(110) D. Hestenes, Space-Time Algebra, Gordon and Breach, Londres (1966).

(111) F. A. Doria, refs. (6), (13), e (91).

(112) Ver a ref. (83).