

*Filadelfo Cardoso Santos*

EFEITOS DA RELATIVIDADE GERAL NO COLAPSO ESTELAR

Tese de

*MESTRADO*

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro, Brasil

- 1977 -

- à Lucia  
- aos meus filhos

## AGRADECIMENTOS

A elaboração deste trabalho só foi possível graças à ajuda e compreensão de algumas pessoas, a quem testemunho meu reconhecimento:

- Ao Professor Takeshi Kodama, pela orientação segura e apoio no decorrer deste trabalho.

- Ao Professor Chung Kai Cheong, pelos valiosos conhecimentos a mim transmitidos durante inúmeras discussões.

- À Helena de Souza Ciccarino, pela excelente apresentação do trabalho datilográfico.

Aos demais amigos do CBPF, pelo incentivo recebido.

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS .....	iii
RESUMO .....	iv
LISTA DE FIGURAS .....	vi
<u>INTRODUÇÃO</u> .....	1
<u>CAPÍTULO I</u> - FORMALISMO PÓS-NEWTONIANO .....	6
1.1 - INTRODUÇÃO .....	6
1.2 - FORMALISMO DE CHANDRASEKHAR .....	7
1.3 - APLICAÇÃO AO CASO DE SIMETRIA ESFÉRICA ...	28
<u>CAPÍTULO II</u> - MODELO DE ESTRELA EM COLAPSO GRAVITACIONAL	32
2.1 - PRÉ-SUPERNOVA .....	32
2.2 - LUMINOSIDADE .....	37
2.3 - EQUAÇÃO DE ESTADO .....	40
<u>CAPÍTULO III</u> - RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	42
<u>BIBLIOGRAFIA</u> .....	49

## RESUMO

Os efeitos da relatividade no processo de colapso estelar foram estudados pela aproximação pós-Newtoniana.

A Teoria de Chandrasekhar foi desenvolvida a fim de aplicar o cálculo de colapso estelar.

Um exemplo de cálculo foi realizado, baseando-se num modelo de pré-supernova realístico, e é mostrado que o efeito da relatividade atinge até 50% no acréscimo da densidade central, num determinado intervalo de tempo.

LISTA DE FIGURAS

<u>Fig.</u>	<u>Pág.</u>
2.1.1 .....	34
3.1 .....	46
3.2 .....	47
3.3 .....	48

## INTRODUÇÃO

O estudo das supernovas vem ocupando um lugar importante na Astrofísica. A razão é que elas constituem um dos poucos exemplos na natureza em que a matéria é sujeita a condições físicas extremas. Naturalmente, tais condições extremas (alta densidade e temperatura) dão origem a muitos outros fenômenos de interesse astrofísico, tais como a nucleosíntese por processo-r, a formação de estrelas de neutron, a origem dos buracos negros.

Um ponto importante desse estudo é explicar o mecanismo de explosão de uma supernova. Sabemos atualmente que a explosão é causada por uma violenta contração gravitacional (implosão), permitindo a formação de ondas de choque, que fazem então explodir as camadas mais externas da estrela, ou a queima explosiva do carbono e do oxigênio.

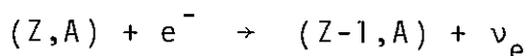
O processo de implosão começa quando a estrela, depois de passar por vários estágios de evolução, atinge a condição de pré-supernova. Neste instante, a sua densidade, temperatura e composição química alcançam o valor limiar para as reações nucleares que vão provocar uma rápida perda de energia por parte da estrela.

Os primeiros a sugerirem um mecanismo eficiente de implosão foram Burbidge, Burbidge, Fowler e Hoyle<sup>(1)</sup>. Segundo eles, as camadas centrais da pré-supernova são constituídas principalmente de  $^{56}\text{Fe}$  e, a temperaturas superiores a  $6 \times 10^9$  oK, o  $^{56}\text{Fe}$  é fotodissociado da seguinte maneira:



absorvendo uma quantidade de calor  $Q$  igual a  $2,1 \times 10^{18}$  erg/g.

Posteriormente, Chiu<sup>(2)</sup> sugeriu um outro poderoso mecanismo de implosão, baseado na captura eletrônica da Física Nuclear. Mais explicitamente, a partir de uma certa temperatura ( $\sim 10^9$  °K) e densidade ( $\sim 10^9$  g/cm<sup>3</sup>), os núcleos  $(Z,A)$  do caroço da pré-supernova passam a capturar rapidamente os elétrons degenerados do meio



Os neutrinos, tendo livre percurso médio bastante grande, praticamente escapam livremente da estrela. Com isto, a região central se contrai por causa da diminuição da pressão interna, provocando um aumento da temperatura. Este aumento da temperatura, por sua vez, acelera a taxa de captura eletrônica, resultando numa contração súbita que é a implosão.

A fim de sabermos qual dos mecanismos acima explica a implosão, se a dissociação do  ${}^{56}\text{Fe}$  ou se a captura eletrônica ou ainda se ambos, é necessário que tenhamos os valores das principais características de uma pré-supernova (densidade central, temperatura do caroço, massa total, composição química, etc.).

Infelizmente, devido à baixa estatística das explosões de supernova (aproximadamente uma por galáxia em cada 300 anos) e à escassez de informações sobre as poucas observadas (a última, em nossa galáxia, em 1604), não se pode fazer nada senão estudar as explosões de supernova, partindo-se de mode -

los de prē-supernova. É óbvio que, ao adotar um determinado modelo, devemos levar em conta os seguintes aspectos: 1) o modelo escolhido, junto com um mecanismo implosão-explosão, deve ser capaz de explicar a formação de uma estrela de neutron remanescente. Este ponto é importante, porque hoje se acredita que o pulsar do Caranguejo nada mais é que uma estrela de neutron girante, emitindo ondas na faixa do rádio, resultante da supernova que deu origem à atual Nebulosa do Caranguejo. 2) o modelo deve ainda permitir, na fase de explosão, a reprodução de condições apropriadas à nucleosíntese de elementos pesados por processo-r, a fim de explicar a curva de abundância de elementos no Universo.

É fácil entender, face às dificuldades mencionadas, por que não existe ainda uma teoria definitiva para a explo-são de uma supernova. Não obstante isso, muitos pesquisadores, partindo de hipóteses razoáveis, tentaram lançar um pouco de luz neste problema importante da Astrofísica.

Usando a Mecânica Newtoniana, Colgate e White<sup>(3)</sup> foram os primeiros a realizar um cálculo hidrodinâmico detalhado da explosão de supernova. Neste cálculo, não levaram em consideração a equação de transferência de calor, propondo em seu lugar, por simplicidade, a chamada deposição por neutrinos.

Mais tarde, Arnett<sup>(4,5)</sup> repetiu os cálculos de Colgate e White, tratando a transferência de calor com a aproximação da difusão.

Por outro lado, Colgate, Grasberger e White, diante dos resultados obtidos com a Mecânica Newtoniana, sugeriram que um tratamento relativístico geral talvez devesse ser neces

sário. Com efeito, nos últimos instantes da implosão, a densidade pode atingir valores tão elevados que não é possível esquecer que, neste caso, o campo gravitacional encurva o espaço-tempo, de modo que a métrica deixa de ser pseudo-Euclidiana<sup>(6)</sup>. Desse modo, Schwartz<sup>(7)</sup> tratou o colapso, usando as equações da hidrodinâmica relativística geral. Entretanto, várias dificuldades (por exemplo, o problema de acoplar a Física Nuclear com a dinâmica) fizeram com que os resultados obtidos não pudessem ser confiáveis. O trabalho de Schwartz não deixa, contudo, de representar um grande avanço, visto que estabeleceu um método prático para o cálculo de problemas esfericamente simétricos em Relatividade Geral.

Uma outra dificuldade, no tratamento relativístico do colapso, é o seguinte: vários parâmetros (grandezas) essenciais, embora tenham definição precisa na Física Não-Relativística, quando generalizados na Relatividade Geral, não tem uma interpretação fácil.

Desse modo, não se pode dizer que exista uma teoria relativística para a explosão de Supernova. Felizmente, há uma alternativa para contornar esta dificuldade. É a aproximação pós-Newtoniana das equações relativísticas. As vantagens desta aproximação são evidentes: 1) fácil conceituação das grandezas físicas envolvidas; 2) possibilidade de determinar o ponto, a partir do qual um tratamento relativístico se torna imprescindível; 3) o modo como os novos efeitos alteram os resultados não-relativísticos.

O presente trabalho tem por objetivo utilizar as equações hidrodinâmicas obtidas pela aproximação pós-Newtoniana-

na para tratar o problema da implosão e investigar os itens 2 e 3 mencionados acima. Em outras palavras, queremos ver de que maneira e a partir de que ponto os efeitos pós-Newtonianos durante a implosão afetam o curso da própria explosão de supernova.

No capítulo I, apresentamos as equações hidrodinâmicas obtidas pela aproximação pós-Newtoniana, bem como discutimos o formalismo de Chandrasekhar<sup>(8)</sup> e investigamos o caso particular de simetria esférica, a ser usado posteriormente. Um modelo bastante simplificado de pré-supernova é dado no capítulo II. Por fim, no capítulo III, apresentamos os nossos resultados e os comparamos com os obtidos pelo tratamento não-relativístico.

## CAPÍTULO I

### FORMALISMO PÓS-NEWTONIANO

#### 1.1 - INTRODUÇÃO

A Teoria Geral da Relatividade é talvez, dentre todas as teorias físicas, a que apresenta maior relação com outras teorias. Assim, a Teoria Geral da Relatividade relaciona-se com a Teoria Especial da Relatividade de duas formas distintas: a primeira é o limite de campo gravitacional nulo; neste limite, podemos introduzir um sistema inercial ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ), obtendo precisamente a Teoria Especial da Relatividade; a segunda é local, sendo uma exigência do princípio de equivalência que diz: — em um sistema inercial local, todas as leis da física tomam a forma dada pela Teoria Especial da Relatividade.

No limite de campo gravitacional fraco, três situações podem ocorrer:

- a) - alta velocidade e pressão; neste caso, a Relatividade Geral reduz-se à Teoria Linearizada da Gravitação;
- b) - baixa velocidade e pressão; a Relatividade Geral reduz-se à Teoria Newtoniana da Gravitação;
- c) - baixa velocidade e pressão, com correções relativísticas de primeira ordem; esta se inclui entre as chamadas Teorias pós-Newtonianas da Gravitação.

Neste trabalho, estaremos interessados no ítem (c), isto é, no caso em que a teoria Newtoniana é aproximadamente válida, mas que as correções relativísticas também são necessárias.

É interessante observar que todas estas teorias limites da Relatividade Geral são importantes em si mesmas, ocupando dentro da Física atual relativo grau de importância. Assim, a Teoria Linearizada, além de ser mais apropriada ao estudo de efeitos quânticos, prevê a existência de ondas gravitacionais, permitindo soluções explícitas de tais ondas.

## 1.2 - FORMALISMO DE CHANDRASEKHAR

Passamos a apresentar o formalismo de Chandrasekhar deduzindo as equações hidrodinâmicas, na aproximação pós-Newtoniana da Relatividade Geral. Basicamente, o método consiste em determinar todos os termos de ordem  $1/c^2$  provenientes da expansão das equações de campo de Einstein em potências de  $1/c^2$ .

Em Relatividade Geral a natureza de um sistema físico é determinada pelas hipóteses que fazemos sobre o tensor momento-energia  $T_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ). Neste trabalho, faremos a convenção usual de que índices gregos tomam valores 0, 1, 2, 3 e índices latinos assumem valores 1, 2, 3, referindo-se a coordenadas espaciais. Também usaremos a convenção de soma de índices repetidos).

Vamos trabalhar com um sistema que, no limite Newto

niano,  $\bar{e}$  é governado pelas equações clássicas de Euler da hidrodinâmica para um fluido não-viscoso, que são

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1.2.1)$$

(eq. da continuidade)

e

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (1.2.2)$$

(eq. do movimento)

onde  $v_i$  são as componentes da velocidade,  $\rho$  a densidade, e  $U$  o potencial gravitacional, que é determinado em termos de  $\rho$  pela equação de Poisson

$$\nabla^2 U = - 4\pi G \rho \quad (1.2.3)$$

A forma geral do tensor momento-energia é

$$T_{\mu\nu} = (\epsilon + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu + t_{\mu\nu} \quad (1.2.4)$$

onde  $\epsilon$  é a densidade de energia,  $u_\nu$  é o quadrivetor velocidade,  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico (com assinatura +---),  $p$  é a pressão,  $q_\nu$  é o vetor fluxo de energia e  $t_{\mu\nu}$  é o tensor tensão. Admitimos que não existem tensões anisotrópicas e que não há fluxo de energia, isto é,

$$t_{\mu\nu} = 0 \quad (1.2.5)$$

$$q_\nu = 0 \quad (1.2.6)$$

Estas hipóteses acima são necessárias para que, no limite

Newtoniano, o fluido seja governado pelas eqs. (1.2.1) e (1.2.2). No capítulo III justificaremos a hipótese (1.2.6), já que sabemos que a luminosidade da estrela é devida à condução de calor no seu interior.

Podemos assim escrever o tensor momento-energia na forma

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u_{\mu}u_{\nu} - pg_{\mu\nu} . \quad (1.2.7)$$

Para os nossos propósitos, vamos considerar que a densidade de energia pode ser dividida em duas partes: uma parte  $\rho c^2$ , associada à densidade de matéria  $\rho$ , e uma parte  $\rho\Pi$ , associada à energia interna da Termodinâmica. Desta forma, pode-se escrever

$$\varepsilon = \rho c^2 \left(1 + \frac{\Pi}{c^2}\right) . \quad (1.2.8)$$

As equações de campo de Einstein são

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} Rg_{\mu\nu} = - \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} , \quad (1.2.9)$$

que podem ser re-escritas numa forma mais conveniente para nosso uso que é:

$$R_{\mu\nu} = - \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} Tg_{\mu\nu}\right) , \quad (1.2.10)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci,  $T$  é o traço de  $T_{\mu\nu}$ ,  $G$  a constante gravitacional e  $c$  a velocidade da luz.

As equações de campo não precisam ser suplementadas por nenhuma equação de movimento. Em outras palavras, as equa

ções de movimento saem das próprias equações de Einstein

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (1.2.11)$$

onde (;) denota derivada covariante, será usado (,) para a derivada ordinária.

Estas equações são consequência direta das eqs. (1.2.9) e da identidade

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} Rg^{\mu\nu})_{;\nu} = 0 \quad (1.2.12)$$

Convém observar que a possibilidade de se obterem equações de movimento, a partir das equações de campo, é devido ao caráter não-linear das equações de Einstein.

Explicitamente podemos escrever a componente tempo - ral e os componentes espaciais das equações de movimento

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0i}}{\partial x_i} + (\Gamma_{00}^0 + y_0) T^{00} + (2\Gamma_{0i}^0 + y_i) T^{0i} + T_{ij}^0 T^{ij} = 0 \quad (1.2.13)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{0i}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ij}}{\partial x_j} + T_{00}^i T^{00} + 2\Gamma_{j0}^i T^{0j} + y_0 T^{i0} + T_{jk}^i T^{jk} + y_j T^{ij} = 0 \quad (1.2.14)$$

onde  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  são os símbolos de Christoffel e

$$y_\mu = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x_\mu} \quad (1.2.15)$$

Na eq. (1.2.15)  $g$  é o determinante de  $g_{\mu\nu}$ .

A aproximação Newtoniana permite determinar  $g_{00}$  até  $O(c^{-2})$ ; porém, as outras componentes da métrica não podem ser avaliadas até uma aproximação mais alta. Temos assim

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= 1 - \frac{2U}{c^2} + O(c^{-4}) \\ g_{ij} &= \delta_{ij} + O(c^{-2}) \quad g_{0i} = O(c^{-3}) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.16)$$

As eqs. (1.2.15) e (1.2.14), com a métrica dada por (1.2.16), reproduzem as equações clássicas de Euler. Para isso, é necessário calcular os símbolos de Christoffel

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= O(c^{-3}) \quad , \quad \Gamma_{0i}^0 = O(c^{-2}) \\ \Gamma_{ij}^0 &= O(c^{-3}) \quad , \quad \Gamma_{00}^i = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial x_i} \\ \Gamma_{0j}^i &= O(c^{-3}) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.17)$$

e

$$y_0 = O(c^{-3}) \quad , \quad y_i = O(c^{-2}) \quad . \quad (1.2.18)$$

Nesta aproximação as componentes do tensor momento-energia são

$$\left. \begin{aligned} T_{00} &= \rho c^2 \\ T_{0i} &= -\rho c v_i \\ T_{ij} &= \rho v_i v_j + p \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.19)$$

Substituindo as eqs. (1.2.17), (1.2.18) e (1.2.19) nas eqs. (1.2.13) e (1.2.14) e mantendo somente os termos de ordem zero, vem respectivamente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0$$

e

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) - \rho \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \quad .$$

A Teoria Linearizada permite obter a parte espacial da métrica até  $O(c^{-2})$ . Neste caso as equações de campo tem a seguinte expressão

$$\frac{1}{2} \square \psi_{\mu}^{\nu} = - \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu}^{\nu} \quad ,$$

onde  $\psi_{\mu}^{\nu} = h_{\mu}^{\nu} - 1/2 \delta_{\mu}^{\nu} h$  e  $h_{\mu}^{\nu}$  é definido por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

que admitem, como já sabemos, duas soluções: uma retardada e outra avançada, sendo esta última abandonada por ser incompatível com o princípio da causalidade. Considerando uma fonte de campo Newtoniano ( $T_{00} \gg |T_{0i}|$ ,  $T_{00} \gg |T_{jk}|$  e velocidades tão reduzidas que os efeitos de retardamento são desprezíveis) e usando a solução geral, temos

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= 1 - \frac{2U}{c^2} + O(c^{-4}) \\ g_{ij} &= - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) \delta_{ij} + O(c^{-4}) \\ g_{0i} &= O(c^{-3}) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.20)$$

As equações pós-Newtonianas podem ser obtidas com o uso de (1.2.11), sendo para isso necessário determinar a métrica, com uma aproximação melhor. Por outro lado, observando as

eqs. (1.2.13) e (1.2.14), concluimos que é indispensável conhecer os símbolos de Christoffel conforme abaixo

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{oi}^0 \text{ e } \Gamma_{jo}^i & \text{ até } O(c^2) \\ \Gamma_{oo}^0 \text{ e } \Gamma_{jo}^i & \text{ até } O(c^{-3}) \\ \Gamma_{oo}^i & \text{ até } O(c^{-4}) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.21)$$

e as componentes contravariantes do tensor momento-energia

$$\begin{aligned} T^{00} & \text{ até } O(c^0) \\ T^{0i} & \text{ até } O(c^{-1}) \\ T^{ij} & \text{ até } O(c^{-2}) \end{aligned}$$

Devido à relação  $T^{\rho\lambda} = g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} T_{\mu\nu}$ , as componentes covariantes do tensor momento-energia precisam ser conhecidas com aproximação

$$\begin{aligned} T_{oo} & \text{ até } O(c^0) \\ T_{oi} & \text{ até } O(c) \\ T_{ij} & \text{ até } O(c^0) \end{aligned}$$

Estas aproximações de  $T_{\mu\nu}$  podem ser feitas graças ao conhecimento de (1.2.20).

Devido a (1.2.21), é necessário determinar  $g_{oo}$  até  $O(c^{-4})$  e os termos dominantes  $O(c^{-3})$  de  $g_{oi}$ . Com este objetivo, vamos escrever o tensor métrico na forma

$$g_{oo} = 1 + h_{oo}, \quad g_{oi} = h_{oi} \text{ e } g_{ij} = -\delta_{ij} + h_{ij} \quad (1.2.22)$$

onde

$$h_{00} = -\frac{2U}{c^2} + O(c^{-4}) \quad , \quad h_{0i} = O(c^{-3}) \quad \text{e} \quad h_{ij} = -\frac{2U}{c^2} \delta_{ij} + O(c^{-4}) \quad (1.2.23)$$

Então o elemento de linha  $ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$ , com o uso de (1.2.20), pode ser calculado

$$ds = \left(1 - \frac{U}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right) c dt \quad (1.2.24)$$

As componentes da quadrivelocidade

$$u^\nu = \frac{dx^\nu}{ds} \quad (1.2.25)$$

podem, conseqüentemente ser determinadas a uma precisão que é dada pelo conhecimento atual da métrica

$$\left. \begin{aligned} u^0 &= 1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + U\right) + O(c^{-4}) \\ u^i &= \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} + U\right)\right] \frac{v_i}{c} + O(c^{-5}) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.26)$$

As correspondentes componentes covariantes são

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= 1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2}{2} - U\right) + O(c^{-4}) \\ u_i &= -\frac{v_i}{c} + O(c^{-3}) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.27)$$

Calculemos, em seguida, as componentes do tensor momento-energia nesta aproximação

$$\left. \begin{aligned} T_{00} &= \rho c^2 \left[ 1 + \frac{1}{c^2} (v^2 - 2U + \Pi) \right] + O(c^{-2}) \\ T_{0i} &= -\rho c v_i + O(c^{-1}) \\ T_{ij} &= \rho v_i v_j + p \delta_{ij} + O(c^{-2}) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.28)$$

Usando  $T^{\rho\lambda} = g^{\rho\nu} g^{\lambda\mu} T_{\mu\nu}$ , podemos levantar os índices de (1.2.28)

$$\left. \begin{aligned} T^{00} &= \rho c^2 \left[ 1 + \frac{1}{c^2} (v^2 + 2U + \Pi + \frac{p}{\rho}) \right] + O(c^{-2}) \\ T^{0i} &= \rho c \left[ 1 + \frac{1}{c^2} (v^2 + 2U + \Pi + \frac{p}{\rho}) \right] v_i + O(c^{-3}) \\ T^{ij} &= \rho v_i v_j + p \delta_{ij} + \frac{1}{c^2} \left[ \rho (v^2 + 2U + \Pi + \frac{p}{\rho}) v_i v_j - 2pU \delta_{ij} \right] + O(c^{-4}) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.29)$$

A expressão geral do tensor de Ricci é

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left( \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} \right) + \\ &+ g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \left[ \Gamma_{\sigma, \mu\nu} \Gamma_{\rho, \alpha\beta} - \Gamma_{\sigma, \mu\beta} \Gamma_{\rho, \alpha\nu} \right] . \end{aligned} \quad (1.2.30)$$

Devido a (1.2.22), a componente (0,0) de  $R_{\mu\nu}$  toma a forma

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left( \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x^0 \partial x^0} - 2 \frac{\partial^2 h_{\alpha 0}}{\partial x_0 \partial x_\beta} \right) + \\ &+ g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} (\Gamma_{\sigma, 00} \Gamma_{\rho, \alpha\beta} - \Gamma_{\sigma, 0\beta} \Gamma_{\rho, \alpha 0}) \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

Para determinar  $g_{00}$  até  $O(c^{-4})$ ,  $R_{00}$  deve ser calculado corretamente até  $O(c^{-4})$ , e nós mostraremos que, com o conhecimento de (1.2.23), isto é possível.

Os termos, envolvendo derivadas segundas, calculados até a ordem desejada, dão

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial h_i^i}{\partial x_0} - \frac{\partial h_0^i}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{2} (\delta_{ij} + h_{ij}) \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1.2.32)$$

Introduzindo a condição de gauge

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h_i^i}{\partial x_0} - \frac{\partial h_0^i}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad (1.2.33)$$

os termos em (1.2.32) reduzem-se a

$$- \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} - \frac{1}{2} h_{ij} \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x_i \partial x_j} \quad . \quad (1.2.34)$$

No último termo de (1.2.34), podemos substituir consistentemente  $h_{00}$  e  $h_{ij}$  por seus valores conhecidos. Temos

$$- \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} - \frac{2}{c^4} U \nabla^2 U \quad . \quad (1.2.35)$$

Considerando os termos que envolvem os símbolos de Christoffel na eq. (1.2.30), obtemos:

$$g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \Gamma_{\sigma,00} \Gamma_{\rho,\alpha\beta} = O(c^{-6}) \quad (1.2.36)$$

e

$$- g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \Gamma_{\sigma,0\beta} \Gamma_{\rho,\alpha 0} = \frac{2}{c^4} \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \right)^2 \quad (1.2.37)$$

Combinando os resultados (1.2.35), (1.2.36) e (1.2.34) vem:

$$R_{00} = - \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} - \frac{2}{c^4} U \nabla^2 U + \frac{2}{c^4} \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \right)^2 \quad (1.2.38)$$

Fazendo uso da identidade

$$\nabla^2 U^2 = 2 U \nabla^2 U + 2 \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \right)^2 ,$$

podemos escrever  $R_{00}$  na forma

$$R_{00} = \nabla^2 \left( - \frac{1}{2} h_{00} + \frac{U^2}{c^4} \right) - \frac{4}{c^4} U \nabla^2 U \quad (1.2.39)$$

ou ainda, devido à eq. (1.2.3) ,

$$R_{00} = \nabla^2 \left( - \frac{1}{2} h_{00} + \frac{U^2}{c^4} \right) + \frac{16\pi G}{c^4} \rho U \quad (1.2.40)$$

e assim determinamos  $R_{00}$  até a ordem de  $(c^{-4})$ .

Para calcular as componentes  $(0,i)$  do tensor de Ricci, observamos que é necessário calcular apenas os termos envolvendo as derivadas segundas, já que os termos não-lineares são no mínimo da ordem de  $c^{-4}$ . Assim podemos escrever

$$R_{0i} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial^2 h_{0i}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^0 \partial x^i} - \frac{\partial^2 h_{\mu i}}{\partial x^0 \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h_{0\nu}}{\partial x^\mu \partial x^i} \right) , \quad (1.2.41)$$

calculando os termos do segundo membro até a aproximação de-

sejada, vem:

$$R_{0i} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{0i} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial h_j^j}{\partial x_0} - \frac{\partial h_0^j}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_i^j}{\partial x_0 \partial x_j} \quad (1.2.42)$$

Tendo em vista a condição de gauge (1.2.33), a eq. (1.2.42) simplifica-se a

$$R_{0i} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{0i} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 h_j^j}{\partial x_0 \partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_i^j}{\partial x_0 \partial x_j} . \quad (1.2.43)$$

Podemos substituir  $h_i^j$  consistentemente na eq. (1.2.43), nos dois últimos termos, pelos seus valores conhecidos. Assim,

$$R_{0i} = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{0i} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{2U}{c^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{2U}{c^2} \delta_{ij} \right) \right]$$

ou após simplificações

$$R_{0i} = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{0i} + \frac{1}{2c^3} \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x_i} \quad (1.2.44)$$

Conhecendo as componentes relevantes do tensor de Ricci, podemos determinar a solução das equações de campo (10). Para a componente (0,0) temos

$$R_{00} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} \right) \quad (1.2.45)$$

o traço T pode ser obtido da eq. (1.2.7)

$$T = \rho c^2 + p\Pi - 3p . \quad (1.2.46)$$

Substituindo (1.2.20), (1.2.28) e (1.2.46) em (1.2.45), vem:

$$R_{00} = -\frac{4\pi G}{c^2} - \frac{8\pi G}{c^4} (v^2 - U + \frac{1}{2}\Pi + \frac{3}{2}\frac{p}{\rho}) \quad (1.2.47)$$

e comparando as eqs. (1.2.40) e (1.2.47) vem:

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{2} h_{00} + \frac{U^2}{c^4} \right) + \frac{16\pi G}{c^4} \rho U = -\frac{4\pi G}{c^2} \rho - \frac{8\pi G}{c^4} (v^2 - U + \frac{1}{2}\Pi + \frac{3}{2}\frac{p}{\rho}).$$

Esta última equação pode ser simplificada para

$$\nabla^2 \left( -\frac{1}{2} h_{00} - \frac{U}{c^2} + \frac{U^2}{c^4} \right) = -\frac{8\pi G}{c^4} \rho \phi \quad (1.2.48)$$

onde

$$\phi = v^2 + U + \frac{\Pi}{2} + \frac{3}{2}\frac{p}{\rho}. \quad (1.2.49)$$

Definindo um potencial  $\Phi$  pela equação

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi G \rho \phi, \quad (1.2.50)$$

podemos escrever a solução da eq. (1.2.37)

$$h_{00} = -\frac{2U}{c^2} + \frac{1}{c^4} (2U^2 - 4\Phi) + O(c^{-6}) \quad (1.2.51)$$

Considerando agora as componentes  $(0,i)$  da eq. (1.2.10) e substituindo as eqs. (1.2.28) e (1.2.44) tiramos

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 h_{0i} + \frac{1}{2c^3} \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x_i} = \frac{8\pi G}{c^3} \rho v_i. \quad (1.2.52)$$

Definindo novos potenciais  $\chi$  e  $U_i$  pelas equações

$$\nabla^2 \chi = -2U \quad (1.2.53)$$

e

$$\nabla^2 U_i = -4\pi G \rho v_i \quad (1.2.54)$$

podemos escrever a solução da eq. (1.2.52) na forma

$$h_{0i} = \frac{1}{c^3} \left( 4U_i - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial x_i} \right) \quad (1.2.55)$$

Para que estas soluções de  $h_{0i}$  sejam aceitáveis, resta mostrar que elas satisfazem a condição de gauge (1.2.33). Então, substituindo as eqs. (1.2.23) e (1.2.35) no primeiro membro de (1.2.33), vem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial h_i^i}{\partial x_0} - \frac{\partial h_0^i}{\partial x_i} &= \frac{3}{c^3} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{c^3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( 4U_i - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{c^3} \left( 3 \frac{\partial U}{\partial t} + 4 \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \chi \right) \\ &= \frac{4}{c^3} \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right) . \end{aligned}$$

Mas, devido às equações satisfeitas por  $U$  e  $U_i$ , temos

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right) = -4\pi G \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho U_i) \right] = 0$$

e, desde que  $U$  e  $U_i$  são continuamente deriváveis e se anulam no infinito,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 .$$

Assim fica verificada a condição de gauge (1.2.33).

Prosseguindo na dedução das equações, vamos escrever a métrica na aproximação pós-Newtoniana

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= 1 - \frac{2U}{c^2} + \frac{1}{c^4} (2U^2 - 4\Phi) + O(c^{-6}) \\ g_{0i} &= \frac{1}{c^3} (4U_i - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial x_i}) + O(c^{-5}) \\ g_{ij} &= - (1 + \frac{2U}{c^2}) \delta_{ij} + O(c^{-4}) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.56)$$

As componentes contravariantes podem ser calculadas a partir de

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\rho} \quad (1.2.57)$$

e achamos

$$\left. \begin{aligned} g^{00} &= \frac{1}{g_{00}} + O(c^{-6}) = 1 + \frac{2U}{c^2} + \frac{1}{c^4} (2U^2 + 4\Phi) + O(c^{-6}) \\ g^{0i} &= g_{0i} + O(c^{-5}) = \frac{1}{c^3} (4U_i - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial x_i}) + O(c^{-5}) \\ g^{ij} &= - (1 - \frac{2U}{c^2}) \delta_{ij} + O(c^{-4}) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.58)$$

Podemos agora calcular os símbolos de Christoffel, usando a métrica dada pelas eqs. (1.2.56) e (1.2.58)

$$\left. \begin{aligned}
 \Gamma_{00}^0 &= -\frac{1}{c^3} \frac{\partial U}{\partial t} \quad , \quad \Gamma_{0i}^0 = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial x_i} \\
 \Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2c^3} \left[ 4 \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial^3 \chi}{\partial t \partial x_i \partial x_j} + 2 \delta_{ij} \frac{\partial U}{\partial t} \right] \\
 \Gamma_{00}^i &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{1}{c^4} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (2U^2 - 2\Phi) - 4 \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \chi}{\partial t^2 \partial x_i} \right] \\
 \Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{c^3} \left[ \frac{\partial U}{\partial t} \delta_{ij} - 2 \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \\
 \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{c^3} \left( \frac{\partial U}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial U}{\partial x_j} \delta_{ik} - \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta_{jk} \right)
 \end{aligned} \right\} (1.2.59)$$

As equações da hidrodinâmica na aproximação pós-Newtoniana podem ser obtidas, com o auxílio de (1.2.59) e as eqs. (1.2.13) e (1.2.14). As componentes contravariantes do tensor momento-energia são dadas em (1.2.29). Para a componente temporal temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left[ 1 + \frac{1}{2} (v^2 + 2U + \Pi) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \rho v_i \left[ 1 + \frac{1}{2} (v^2 + 2U + \Pi + \frac{p}{\rho}) \right] \right\} \\
 + \frac{1}{c^2} \rho \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad . \quad (1.2.60)
 \end{aligned}$$

Fazendo

$$\sigma = \rho \left[ 1 + \frac{1}{2} (v^2 + 2U + \Pi + \frac{p}{\rho}) \right] \quad (1.2.61)$$

a eq. (1.2.60) pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma v_i) + \frac{1}{c^2} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) = 0 \quad . \quad (1.2.62)$$

Esta última equação substitui a equação da continuidade da hidrodinâmica clássica.

Considerando agora as componentes espaciais, eq. (1.2.14), obtemos substituindo os símbolos de Christoffel e as componentes do tensor momento-energia,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left[ 1 + \frac{1}{c^2} (v^2 + 2U + \Pi + \frac{p}{\rho}) \right] v_i \right\} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \rho v_i v_j + p \delta_{ij} + \frac{1}{c^2} \left[ \rho (v^2 + 2U + \Pi + \frac{p}{\rho}) v_i v_j - 2pU \delta_{ij} \right] \right\} \\
 & - \rho \left\{ \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (2U^2 - 2\Phi) - 4 \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \chi}{\partial t^2 \partial x_i} \right] \right\} \left[ 1 + \frac{1}{c^2} (v^2 + 2U + \Pi) \right] \\
 & + \frac{2}{c^2} \rho v_j \left[ \frac{\partial U}{\partial t} \delta_{ij} - 2 \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{2}{c^2} \rho U_i \frac{\partial U}{\partial t} \\
 & + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial U}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial U}{\partial x_j} \delta_{ik} - \frac{U}{\partial x_i} \delta_{jk} \right) (\rho v_j v_k + p \delta_{jk}) \\
 & + \frac{2}{c^2} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad , \quad (1.2.64)
 \end{aligned}$$

simplificando esta equação, vem

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} (\sigma v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma v_i v_j) + \left( 1 - \frac{2U}{c^2} \right) \frac{\partial p}{\partial x_i} - \sigma \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial U}{\partial x_i} + \\
 & \frac{4}{c^2} \rho v_i \left( \frac{\partial U}{\partial t} + v_j \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) - \frac{4}{c^2} \left[ \rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + v_j \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] + \\
 & \frac{1}{c^2} \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left( 2U^2 - 2\Phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) = 0 \quad , \quad (1.2.65)
 \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\sigma v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma v_i v_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) \rho \right] - \rho \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{4}{c^2} \rho \frac{d}{dt}(v_i U - U_i) + \\ \frac{4}{c^2} \rho v_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{1}{2c^2} \rho \frac{\partial^3 \chi}{\partial t^2 \partial x_i} - \frac{2}{c^2} \rho \left( \phi \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.2.66)$$

Deve ser observado que na eq. (1.2.66) o superpotencial  $\chi$  aparece duas vezes derivado. Para reduzir a ordem desta derivação, procedemos da seguinte forma. Começamos com a representação integral de  $\chi$

$$\chi = - G \int_V \rho(x', t) |x_i - x'_i| d^3 x' \quad (1.2.67)$$

onde a integração é feita sobre todo o volume  $V$  ocupado pelo fluido.

Derivando a eq. (1.2.67) em relação ao tempo vem:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = - G \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} |x_i - x'_i| d^3 x' .$$

Desde que  $\chi$  aparece na eq. (1.2.66) somente em termos pós-Newtonianos, podemos fazer uso de uma equação Newtoniana para sua redução. Assim, usando a eq. (1.2.1), obtemos

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = G \int_V |x_j - x'_j| \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \rho(x', t) v_j(x', t) \right] d^3 x' .$$

Uma integração por partes dá

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = G \int_V \rho(x', t) v_i(x', t) \frac{x_i - x'_i}{|x_j - x'_j|} d^3 x' .$$

Derivando esta última equação em relação a  $x_i$ , vem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial x_i} &= G \int_V \frac{\rho(x', t) U_i(x', t)}{|x - x'|} d^3 x' - \\ &G \int_V \frac{\rho(x', t) v_j(x', t) (x_j - x'_j) (x_i - x'_i)}{|x - x'|^3} d^3 x' . \end{aligned}$$

O primeiro termo do segundo membro da equação acima é, de acordo com a definição (1.2.54), igual a  $U_i$  e, definindo

$$U_{jik} = G \int_V \rho(x', t) v_j(x', t) \frac{(x_i - x'_i) (x_j - x'_j)}{|x - x'|^3} d^3 x' \quad (1.2.68)$$

podemos escrever

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial x_i} = U_i - U_{jij} \quad (1.2.69)$$

Desta última equação, obtemos por derivação em relação ao tempo

$$\frac{\partial^3 \chi}{\partial t^2 \partial x_i} = \frac{d}{dt} (U_i - U_{jij}) - v_k \frac{\partial}{\partial x_k} (U_i - U_{jij}) , \quad (1.2.70)$$

levando a eq. (1.2.70) na eq. (1.2.66), vem:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sigma v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma v_i v_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( 1 + \frac{2U}{c^2} \right) p \right] - \rho \frac{\partial U}{\partial x_i} +$$

$$\frac{4}{c^2} \rho \frac{d}{dt} (v_i U - U_i) + \frac{4}{c^2} \rho v_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{1}{2c^2} \rho \frac{d}{dt} (U_i - U_{jij}) -$$

$$\frac{1}{2c^2} \rho \left[ (v_k \frac{\partial}{\partial x_k} (U_i - U_{jij})) \right] - \frac{2}{c^2} \rho \left( \phi \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (1.2.71)$$

As eqs. (1.2.71), juntamente com a equação

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma v_i) + \frac{1}{c^2} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.2.72)$$

são as generalizações das eqs. (1.2.1) e (1.2.2) da hidrodinâmica clássica.

Vamos colocar a eq. (1.2.72) na forma da equação de continuidade, para isso transformamos o termo não-Newtoniano

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) &= \frac{1}{c^2} \left[ \rho \frac{dU}{dt} - \frac{dp}{dt} - v_i \left( \rho \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= \frac{1}{c^2} \left[ \rho \left( \frac{dU}{dt} - v_i \frac{dv_i}{dt} \right) - \frac{dp}{dt} \right] \\ &= \frac{1}{c^2} \left[ \rho \frac{d}{dt} \left( U - \frac{1}{2} v^2 \right) - \frac{dp}{dt} \right] \end{aligned}$$

e podemos escrever a eq. (1.2.72) na seguinte forma

$$\left[ \frac{d}{dt} + \text{div } v \right] \left\{ \rho \left[ 1 + \frac{1}{c^2} (v^2 + 2U + \Pi) \right] + \frac{p}{c^2} \right\} + \frac{1}{c^2} \left[ \rho \frac{d}{dt} \left( U - \frac{v^2}{2} \right) - \frac{dp}{dt} \right] = 0. \quad (1.2.73)$$

Simplificando a equação acima, temos

$$\left[ \frac{d}{dt} + \text{div } v_i \right] \left\{ \rho \left[ 1 + \frac{1}{c^2} (v^2 + 2U + \Pi) \right] \right\} + \frac{1}{c^2} \left[ \rho \frac{d}{dt} \left( U - \frac{v^2}{2} \right) + p \text{div } v_i \right] = 0 \quad (1.2.74)$$

Devido à primeira lei da Termodinâmica, supondo condições não dissipativas, temos

$$\rho \frac{d\Pi}{dt} = -p \frac{d\rho}{dt} \quad (1.2.75)$$

Para a substituição em termos pós-Newtonianos, podemos substituir a eq. (1.2.75) por sua equivalente Newtoniana

$$\rho \frac{d\Pi}{dt} = -p \text{div } v_i, \quad (1.2.76)$$

e levando a eq. (1.2.76) na eq. (1.2.74), vem

$$\left[ \frac{d}{dt} + (\text{div } v_i) \right] \left\{ \rho \left[ 1 + \frac{1}{c^2} (v^2 + 2U + \Pi) \right] \right\} - \frac{1}{c^2} \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} - U + \Pi \right) = 0.$$

Depois de algumas simplificações, a equação acima transforma-se em

$$\left[ \frac{d}{dt} + (\text{div } v_i) \right] \left\{ \rho \left[ 1 + \frac{1}{c^2} v^2 + 3U \right] \right\} + \frac{1}{c^2} \left( \frac{v^2}{2} - U + \Pi \right) \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } v_i \right) = 0 \quad (1.2.77)$$

O último termo da eq. (1.2.77) pode ser desprezado devido à eq. (1.2.1) e também ao fato de que ele aparece com um fator  $1/c^2$ . Assim, uma equação equivalente à eq. (1.2.73) é

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho^* v_i) = 0 \quad (1.2.78)$$

onde

$$\rho^* = \rho \left[ 1 + \frac{1}{c^2} \left( \frac{v^2}{2} + 3U \right) \right] . \quad (1.2.79)$$

A eq. (1.2.78) permite tirar a importante conclusão de que na aproximação pós-Newtoniana a massa  $M^*$ , definida por

$$M^* = \int_V \rho^* d^3x , \quad (1.2.80)$$

é conservada.

### 1.3 - APLICAÇÃO AO CASO DE SIMETRIA ESFÉRICA

Vamos agora escrever a eq. (1.2.71) para o caso de um sistema com simetria esférica. Por isso, tomamos como coordenada espacial o raio. Definindo

$$\lambda = \rho \left( \frac{v^2}{2} - U + \Pi + \frac{p}{\rho} \right) \quad (1.3.1)$$

e

$$w_r = v \frac{\partial}{\partial r} (U_r - U_{jrj}) , \quad (1.3.2)$$

onde  $v$  é a velocidade radial, e substituindo na referida equação ficamos com

$$\begin{aligned} & \sigma \frac{dv}{dt} + \frac{1}{c^2} \left( \frac{d\lambda}{dt} + \lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right) v + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( 1 + \frac{2U}{c^2} \right) p \right] - \rho \frac{\partial U}{\partial r} \\ & + \frac{4}{c^2} \rho \left( \frac{dv}{dt} U + v \frac{dU}{dt} - \frac{dU}{dt} r \right) + \frac{4}{c^2} \rho v \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{2c^2} \rho \left( \frac{dU_r}{dt} - \frac{dU_{iri}}{dt} \right) \\ & - \frac{1}{2c^2} w_r - \frac{2\rho}{c^2} \left( \phi \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 . \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Por outro lado, da eq. (1.2.2) temos:

$$\rho \dot{v}_N + \frac{\partial p}{\partial r} - \rho \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \quad , \quad (1.3.4)$$

onde  $v_N$  denota a velocidade Newtoniana e o ponto  $\dot{\phantom{x}}$  é usado para indicar derivação em relação ao tempo. Substituindo a eq. (1.3.4) na eq. (1.3.3) vem:

$$\begin{aligned} \sigma \dot{v} = & \rho \dot{v}_N - \frac{1}{c^2} \left( \frac{d\lambda}{dt} + \lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right) v - \frac{2}{c^2} \frac{\partial}{\partial r} (pU) - \frac{4}{c^2} \rho \left( \dot{v}U + v \frac{dU}{dt} - \frac{dU}{dt} r \right) \\ & - \frac{4}{c^2} \rho v \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{2c^2} \rho \left( \frac{dU}{dt} r - \frac{dU}{dt} i r i \right) + \frac{1}{2c^2} \rho w_r + \\ & \frac{2\rho}{c^2} \left( \phi \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Podemos obter, a partir de (1.3.1)

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} + \lambda \frac{\partial v}{\partial r} = & \rho v \dot{v} - \rho \frac{dU}{dt} + p \frac{\partial v}{\partial r} + \rho \frac{\partial \Pi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \Pi}{\partial V} \frac{\partial v}{\partial r} + \\ & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial T} \dot{T} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial V} \frac{\partial v}{\partial r} \quad , \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

e substituindo as eqs. (1.2.49) e (1.3.6) na eq. (1.3.5) vem :

$$\begin{aligned} \sigma \dot{v} = & \rho \dot{v}_N - \frac{\rho v^2}{c^2} \dot{v} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial v}{\partial r} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial V} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial V} + p \right) \\ & - \rho \frac{v}{c^2} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial T} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial T} \right) \dot{T} - \frac{2\rho U}{c^2} \dot{v}_N + \frac{p}{c^2} \frac{\partial U}{\partial r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{4\rho}{c^2} \left( \dot{v}U - \frac{3v}{4} \frac{dU}{dt} - \frac{dU}{dt} r \right) - \frac{4}{c^2} \rho v \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\rho}{2c^2} \left( \frac{dU}{dt} r - \frac{dU}{dt} i r i \right) \\
 & + \frac{1}{2c^2} \rho w_r + \frac{2}{c^2} \left[ \left( v^2 + \frac{\Pi}{2} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] \tag{1.3.7}
 \end{aligned}$$

um cálculo direto, embora enfadonho, fornece

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial r} &= - \frac{4\pi GM}{r^2} \\
 \frac{dU}{dt} &= - \frac{GvM}{r^2} + 4\pi G \left( \frac{2}{r} \int_0^r r' \rho v dr' + \int_0^r \rho v dr' \right) \\
 \frac{dU}{dt} r &= 4\pi G \left[ - \frac{v}{r^2} \int_0^r r'^2 \rho v dr' + \frac{1}{r} \int_0^r r'^2 \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} dr' + \int_r^\infty r' \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} dr' \right] \\
 \frac{dU}{dt} r - \frac{dU}{dt} i r i &= 4\pi G \left[ \frac{2}{3} \int_r^\infty r' \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} dr' - \frac{2v}{r^4} \int_0^r r'^4 \rho v dr' + \frac{2}{3r^3} \int_0^r r'^4 \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} dr' \right] \\
 w_r &= - \frac{8\pi Gv}{r^4} \int_0^r r'^4 \rho v dr' \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= - \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r r'^2 \rho \phi dr'
 \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

onde  $M = 4\pi \int_0^r \rho r'^2 dr'$  é a massa do sistema.

Substituindo as eqs. (1.3.8) na eq. (1.3.7) vem:

$$\sigma \dot{v} = \rho \dot{v}_N - \frac{\rho v^2}{c^2} \dot{v} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial v}{\partial r} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial v} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial v} + p \right)$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{v}{c^2} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial T} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial T} \right) \dot{T} + \frac{1}{c^2} \frac{GM}{r^2} (2p + 3\rho v^2 - 2\rho\phi) \\
 & - \frac{2U}{c^2} \left( \frac{\partial p}{\partial r} + 2\rho \dot{v}_N \right) - 8\pi G \frac{\rho}{c^2 r^2} \int_0^r r'^2 \rho \phi dr' - 12\pi G \frac{\rho v}{c^2} \int_r^\infty \rho v dr' \\
 & - 24\pi G \frac{\rho v}{rc^2} \int_0^r r' \rho v dr' + \frac{44\pi}{3} + \frac{\rho}{c^2} \int_r^\infty r' \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} dr' + \frac{16\pi G \rho}{rc^2} \int_0^r r'^2 \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} dr' \\
 & - \frac{4\pi}{3} \frac{G\rho}{c^2 r^2} \int_0^r r'^4 \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} dr' \tag{1.3.9}
 \end{aligned}$$

Desde que  $v - v_N$  é de ordem igual a  $(c^{-2})$ , podemos substituir nos termos pós-Newtonianos  $v$  por  $v_N$ . Então,

$$\begin{aligned}
 \sigma \dot{v} &= \rho \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{4U}{c^2} \right) \dot{v}_N - \frac{v_N}{c^2} \frac{\partial v_N}{\partial r} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial V} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial V} + p \right) \\
 & - \rho \frac{v_N}{c^2} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial T} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial T} \right) \dot{T} + \frac{1}{c^2} \frac{GM}{r^2} (2p + 3\rho v_N^2 - 2\rho\phi) - \frac{2U}{c^2} \frac{\partial p}{\partial r} \\
 & - 8\pi G \frac{\rho}{c^2 r^2} \int_0^r r'^2 \rho \phi dr' - \frac{12\pi G \rho v_N}{c^2} \int_r^\infty \rho v_r dr' - \frac{24\pi G \rho v_N}{rc^2} \int_0^r r' \rho v_N dr' + \\
 & \frac{44\pi \rho}{3c^2} \int_r^\infty r' \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} dr' + \frac{16\pi G}{rc^2} \int_0^r r'^2 \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} dr' - \frac{4\pi}{3} \frac{G\rho}{c^2 r^3} \int_0^r r'^4 \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} dr' \tag{1.3.10}
 \end{aligned}$$

A eq. (1.3.10) requer, para a solução completa do problema esfericamente simétrico, a especificação de uma equação de estado  $\epsilon = \epsilon(\rho)$ .

## CAPÍTULO II

### MODELO DE ESTRELA EM COLAPSO GRAVITACIONAL

#### 2.1 - PRÉ-SUPERNOVA

Acredita-se atualmente que as estrelas sejam formadas a partir de um gás altamente rarefeito e difuso, composto principalmente de hidrogênio, que se condensa devido à atração gravitacional. Após a condensação, a estrela tem sua evolução caracterizada pela contração e, em consequência, pela emissão de energia radiante. Podemos dizer, então, que, no processo de contração, a luminosidade da estrela é uma consequência direta da perda de energia potencial gravitacional.

Nesta fase, as temperaturas são ainda baixas e as perdas de energia por reações termonucleares são desprezíveis. A estrela está próxima do equilíbrio hidrostático, sem fontes internas de energia. A duração desta fase é relativamente pequena ( $\sim 10^7$  anos).

À medida que a estrela se contrai, a temperatura no seu interior aumenta e, finalmente, torna-se tão alta ( $\geq 10^6$  °K) que as reações nucleares, envolvendo a transformação de hidrogênio em hélio, começam a se processar. Neste instante, a estrela está em equilíbrio hidrodinâmico e térmico, e chega à fase de Sequência Principal do diagrama Hertzsprung-Russel (gráfico da luminosidade contra a temperatura na superfície).

O subsequente desenvolvimento da estrela é ditado principalmente por sua massa e composição química. O período de atividade da estrela nesta fase é determinado pela reserva de hidrogênio no caroço e é da ordem de  $10^{10}$  anos. Durante o estágio da Sequência Principal, o equilíbrio da estrela é mantido pela pressão do gás e pela pressão da radiação.

A fim de melhor entender os estágios subsequentes da evolução, convém discutir os principais estados finais de equilíbrio de uma estrela. Estes estados finais devem ser tais que não haja perdas de energia, isto é, sua luminosidade deve ser nula, o que equivale a dizer que a temperatura da estrela é nula, ou ainda, que a pressão gravitacional deve ser equilibrada pela pressão do gás frio existente. Sabemos que, nos estados finais, existem dois tipos principais de gás: o de elétrons e o de neutrons. Em ambos os casos, a pressão do gás degenerado ( $T = 0$ ) é o fator equilibrante contra a sempre presente pressão gravitacional.

Chandrasekhar<sup>(9)</sup> determinou a massa máxima para a qual ainda é possível existir equilíbrio entre a pressão do gás de elétrons e a pressão gravitacional. Este valor máximo é chamado massa-limite de Chandrasekhar  $M_{Ch}$  e vale  $1,26 M_{\odot}$  no nosso caso de estrelas com caroço de  $^{56}\text{Fe}$ . Para entendermos como se determina esta massa-limite, devemos lembrar que a pressão gravitacional  $p_{gra}$  é proporcional a  $\rho^{4/3}$  (sendo  $\rho$  a densidade da matéria), enquanto que a pressão do gás de elétrons, à temperatura  $T = 0$ , é proporcional a  $\rho^{5/3}$  para elétrons não-relativísticos e  $\rho^{4/3}$  para elétrons relativísticos. Obviamente, quando os elétrons se tornam relativísticos,  $p_{gra}$

passa a ser proporcional a  $p_{\text{gas}}$ , e o equilíbrio não é mais possível. Esquemáticamente, temos o seguinte, como mostra a fig. 2.1.1, em que a pressão é plotada contra a densidade, ambas em escala logarítmica.

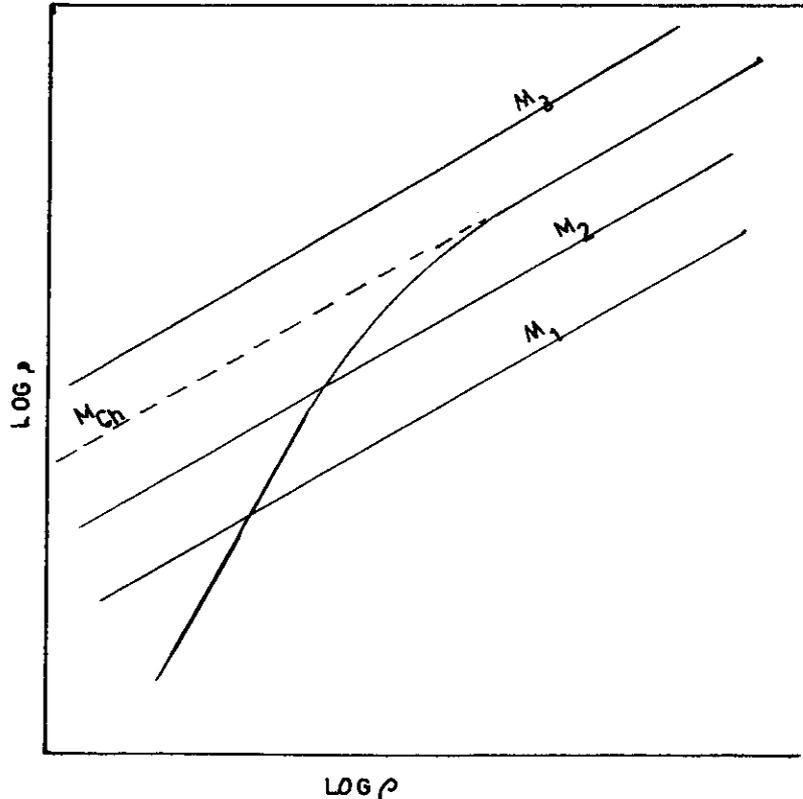


Fig. 2.1.1 - Pressão do gás de elétrons (linha curva) e pressão gravitacional (família de retas com  $M_1 < M_2 < M_3$ ).

A família de retas (com inclinação igual a 4/3) representa a pressão gravitacional: cada reta é associada a uma massa diferente. A pressão do gás de elétrons é dada pela reta que começa com inclinação igual a 5/3 e continua depois com inclinação de 4/3. Vemos, então, que o ponto de equilíbrio é determinado pela interseção de  $p_{\text{gra}}$  e  $p_{\text{gas}}$ . Se  $M < M_{\text{Ch}}$ , tem-se equilíbrio; se  $M > M_{\text{Ch}}$ , a pressão do gás degenerado de elétrons já não é suficiente para suportar o peso.

De modo análogo, a massa crítica, no caso de um gás de neutrons, também pode ser calculada. Com efeito, ela foi determinada pela primeira vez por Oppenheimer e Volkoff<sup>(10)</sup>, que utilizaram equações de equilíbrio hidrostático tiradas da Relatividade Geral, junto com a aproximação do gás de neutrons ideal. Eles acharam  $M_{crit} = 0.75 M_{\odot}$ . Como a aproximação do gás ideal é bastante grosseira, esta massa crítica foi recalculada, usando-se a equação de estado de um gás real, por Cameron<sup>(11)</sup>, Canuto e Chitre<sup>(12)</sup> e Tsuruta e Cameron<sup>(13)</sup>. Os resultados fornecem  $M_{crit}$  entre 1.6 e  $2 M_{\odot}$ .

Vejamos agora como a estrela evolui depois de queimar sua reserva de hidrogênio.

Se a massa for pequena em relação a  $M_{Ch}$ , a estrela simplesmente começa a esfriar e a se contrair. Após um certo período ( $\sim 10^6$  anos), atinge-se o equilíbrio, isto é, o peso é completamente equilibrado pela pressão do gás degenerado de elétrons. Tais estrelas são chamadas Anãs Brancas, com densidade central aproximadamente igual a  $10^7$  g/cm<sup>3</sup>, temperatura central  $\sim 10^9$  °K e raio  $\sim 10^3$  Km.

Se a massa for comparável à massa do Sol, então a não-homogeneidade da composição química, causada pela queima de hidrogênio no centro, leva a uma re-estruturação da estrela. Neste caso, sua envoltória se expande e seu caroço se contrai. São as chamadas Gigantes Vermelhas que, após a queima de elementos mais pesados, como o carbono, oxigênio e enxofre, começam a esfriar, podendo tornar-se em Anãs Brancas, se sua massa for inferior ao limite de Chandrasekhar, ou continuar sua evolução até à configuração de Pré-Supernova, se sua massa for

superior a  $M_{Ch}$ .

Neste último caso, o que ocorre é o seguinte. A degenerescência dos elétrons aumenta e o caroço fica mais denso, provocando a captura eletrônica por parte dos núcleos, que assim se tornam cada vez mais neutronizados. A perda de energia por neutrinos, devido à reação de captura, leva a estrela a uma instabilidade dinâmica. Em outras palavras, a estrela está na iminência de um colapso gravitacional ou implosão, durante a qual a matéria cai praticamente em queda livre. Este estado é conhecido como Pré-Supernova.

O tempo de implosão é da ordem de décimos de segundo, e a tremenda energia liberada (entre  $10^{50}$  a  $10^{52}$  erg) é emitida em apenas alguns dias, alcançando um máximo de  $10^{43}$  erg/seg.

Como dissemos na Introdução deste trabalho, a implosão dá origem a violentas ondas de choque que esquentam e, em seguida, ejetam as camadas mais externas, formando o que chamamos de explosão de Supernova.

Convém, entretanto, lembrar que uma Supernova pode ser formada através de uma linha de evolução diferente. Por exemplo, uma Anã Branca pode tornar-se instável pelo esfriamento gradativo ou pela atração de massas em sua vizinhança.

Em qualquer caso, a principal diferença é dada pela equação de estado. Por outro lado, resultados recentes indicam que, se a massa de uma estrela for superior ao limite de Chandrasekhar, então ela deve explodir como uma Supernova ao fim de sua evolução.

Tomamos como modelo de Pré-Supernova uma com as se-

guintes características: densidade central igual a  $10^9$  g/cm<sup>3</sup>, temperatura central de  $6,5 \times 10^9$  °K, raio igual a  $10^{10}$  cm, com posição química no caroço dada pelo  $^{56}\text{Fe}$ . Ainda, por simplicidade, assumimos uma distribuição inicial de densidade e de temperatura dada por uma Lorentziana. A massa total da Pré-Supernova foi tomada como sendo igual a  $57 M_{\odot}$ .

## 2.2 - LUMINOSIDADE

No capítulo anterior, dissemos que processos de condução de energia seriam desprezados. A justificativa para isso é que o tempo gasto para um fóton, criado no interior da estrela, chegar até às camadas externas é muito grande comparado com o tempo de implosão, isto é, o colapso é tão rápido que não há tempo para que a energia possa escoar pelas camadas da estrela. Apesar disso, não podemos ignorar a luminosidade da estrela. Assim consideraremos o efeito da luminosidade como uma correção, mesmo tratando o colapso com as equações clássicas.

Desde que a variação de temperatura está relacionada com a luminosidade, e como tal variação aparece nas equações de movimento devido à eq. (1.3.10), concluímos que a luminosidade passa a afetar diretamente o movimento.

Em Relatividade Geral, a luminosidade é definida, para um corpo com simetria esférica, por

$$L = - \frac{16\pi^2}{3\kappa} a c r^4 e^{4\phi} (T^u_e u^\phi)' \quad (2.2.1)$$

onde  $a$  é a constante de radiação e  $\kappa$  a opacidade da matéria.

Para o caso da aproximação p̄s-Newtoniana, temos

$$L = - \frac{16\pi^2 a c R^4}{3\kappa} \left( \frac{dT^4}{dr} - \frac{4}{c^2} \frac{dU}{dr} \right) \quad (2.2.2)$$

Finalmente, desde que a luminosidade aparece nas equações de movimento somente em termos não-Newtonianos, podemos considerar

$$L = - \frac{16\pi^2 a R^4}{3\kappa} \frac{dT^4}{dr} \quad (2.2.3)$$

A opacidade da matéria estelar é um fator importante para determinar o transporte de energia. O seu cálculo é um tanto difícil, por isso uma fórmula empírica, relativamente simples, é desejável. Tal fórmula é chamada Opacidade de Kramers, e é dada por

$$\kappa = \kappa_0 \rho T^{-3,5} \quad (2.2.4)$$

onde  $\kappa_0$  é uma constante que depende do material. Seu peso, porém, é limitado aos estados termodinâmicos em que apenas a contribuição dos elétrons é importante.

A equação da conservação da energia, em termos da temperatura, é

$$\frac{dT}{dt} = \left[ \dot{s} - \frac{\partial L}{\partial M} \right] + (p + \frac{\partial \Pi}{\partial V}) \frac{dV}{dt} \left] \frac{\partial \Pi}{\partial T} \quad (2.2.5)$$

onde  $\frac{\partial L}{\partial M}$  é a taxa de energia liberada por difusão,  $p dV$  é o trabalho devido ao movimento macroscópico e  $\dot{s}$  é a taxa de energia ganha por outros mecanismos.

A eq. (2.2.5) pode ser escrita na forma

$$\frac{dT}{dt} = \left[ \left( \dot{s} - \frac{\partial L}{\partial M} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial r} \left( p + \frac{\partial \Pi}{\partial V} \right) \right] \frac{\partial \Pi}{\partial T} \quad (2.2.6)$$

Nesta equação, a derivada da luminosidade  $\bar{e}$  em relação a  $M$ . Para os nossos objetivos, consideraremos esta derivada em relação a  $M^*$ , tal como definida no capítulo anterior. A eq. (2.2.6) e mais

$$\begin{aligned} \sigma \frac{dv}{dt} = & \rho \dot{v}_N - \frac{\rho v^2}{c^2} v_N - \frac{v_N}{c^2} \frac{\partial v_N}{\partial c^2} \frac{\partial v_N}{\partial r} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial V} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial V} + p \right) - \frac{\rho v_N}{c^2} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial T} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial T} \right) \dot{T} + \\ & \frac{1}{c^2} \frac{GM}{c^2} (2p + 3\rho v_N^2 - 2\rho\phi) - \frac{\partial U}{\partial z^2} \left( \frac{\partial p}{\partial r} + 2\rho \dot{v}_N \right) - 8\pi G \frac{\rho}{c^2 r^2} \int_0^r r'^2 \rho \phi dr' - \\ & \frac{12\pi G v_N}{c^2} \int_r^\infty \rho v_N dr' - \frac{24\pi G \rho v_N}{rc^2} \int_0^r r' \rho v_N dr' + \frac{44\pi \rho}{3c^2} \int_r^\infty r' \frac{\partial(\rho v_N)}{\partial t} dr' + \\ & \frac{16\pi G \rho}{rc^2} \int_0^r r'^2 \frac{\partial(\rho v_N)}{\partial t} dr' - \frac{4\pi}{3} \frac{G \rho}{c^2 r^3} \int_0^r r'^4 \frac{\partial(\rho v_N)}{\partial t} dr' \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

formam um sistema simultâneo consistente. Finalmente, na eq. (2.2.7), onde aparecem as integrais envolvendo  $\partial(\rho v_N)/\partial t$ , transformamos esta derivada da seguinte maneira

$$\frac{\partial(\rho v_N)}{\partial t} = \rho \dot{v}_N - \frac{\partial \rho}{\partial r} v_N^2 - 2\rho v_N \frac{\partial v_N}{\partial r} \quad (2.2.8)$$

### 2.3 - EQUAÇÃO DE ESTADO

A fim de resolvermos as equações hidrodinâmicas eqs. (2.2.6) e (2.2.7), precisamos de uma equação de estado

$$\epsilon = \epsilon(\rho, T, c_i) \quad (2.3.1)$$

que fornece a densidade de energia em função da densidade de matéria  $\rho$ , temperatura  $T$  e composição química  $c_i$ , onde o índice  $i$  especifica a espécie nuclear.

Neste trabalho, utilizamos a equação de estado do gás perfeito, com a composição química dada unicamente pelo  $^{56}\text{Fe}$ . Isto é,

$$\epsilon = \frac{3}{2} \frac{N_0}{\mu_e} \rho kT, \quad (2.3.2)$$

onde  $\mu_e$  é o peso molecular médio,  $N_0$  número de Avogadro, e  $k$  a constante de Boltzmann. A razão para procedermos assim é dupla:

- 1) - os outros termos, que poderiam ser levados em conta, tais como a radiação e o gás de elétrons degenerados, são praticamente desprezíveis. Mais explicitamente, o gás de elétrons contribui apenas com uns poucos porcentos. A radiação, por sua vez, contribui com um percentual muito menor ainda. Na fase de implosão, que a que interessa ao nosso trabalho, a aproximação do gás perfeito é então bastante razoável;

2) - o tempo de cálculo, fator crucial, fica bem menor com a utilização da equação de estado simplificada.

Em resumo, com a equação de estado do gás perfeito, quantitativamente a diferença é irrelevante, mas qualitativamente nada se perde, e computacionalmente o tempo de cálculo é reduzido de modo substancial.

## CAPÍTULO III

### RESULTADOS E DISCUSSÃO

A fim de discutir os efeitos da Relatividade Geral, vamos primeiramente lembrar um efeito provocado pela própria Relatividade Especial. Devido ao fato de que as velocidades relativísticas são sempre menores que as correspondentes velocidades Newtonianas, a Relatividade Especial deve modificar os resultados obtidos pela Hidrodinâmica Newtoniana, reduzindo a velocidade de implosão.

Em Relatividade Geral, a questão não é tão simples. Podemos ver isso da seguinte maneira: pela equação de movimento (eq. (1.2.71)), verificamos que  $\sigma$  aparece multiplicando a aceleração  $\dot{v}$ . Isto nos permite interpretar como sendo fator de inércia do sistema, no sentido da Mecânica Newtoniana. Por outro lado, a eq. (1.2.61)

$$\sigma = \rho \left[ 1 + \frac{1}{2} (v^2 + 2U + H) \right],$$

onde  $H$  é a entalpia, mostra que os termos de energia cinética, energia potencial gravitacional e entalpia contribuem para aumentar o valor de  $\sigma$ , visto que eles são estritamente positivos. Assim, concluímos que esses três termos aumentam a inércia da matéria.

O ponto importante em Relatividade Geral é que as formas de energia que aumentam a inércia aumentam também o campo gravitacional.

Assim, encontramos duas tendências antagônicas que se competem: uma para acelerar (devido ao aumento do campo gravitacional), outra para retardar (devido ao aumento da inércia, junto com os já mencionados efeitos da Relatividade Especial).

O problema de saber qual a tendência que vai prevalecer depende possivelmente das condições iniciais (por exemplo, massa total, distribuição inicial de velocidades etc.) bem como do estágio em que a implosão estiver se processando.

Para fixar melhor as idéias, consideremos uma estrela na iminência da implosão. O que vai ocorrer é o seguinte. Iniciada a implosão, sua velocidade aumenta (pelo nosso modelo, mais no caroço que na envoltória), acarretando uma concentração de energia no caroço. Esta energia, por sua vez, é fonte de campo gravitacional, o que provoca a aceleração do colapso, até que o aumento da inércia torne os efeitos de retardamento predominantes. Isto pode ocorrer já fora do limite de validade da nossa aproximação pós-Newtoniana.

Em se tratando do colapso de uma Pré-Supernova, ainda na fase em que a implosão está sendo acelerada, ocorre a explosão de Supernova.

A fim de ver quantitativamente os efeitos, assumimos um modelo bastante realístico de Pré-Supernova, dado no cap. II, e resolvemos o problema de implosão, utilizando as eqs. (2.2.6), (2.2.7) e (1.2.78). Estas equações formam um sis

tema de equações diferenciais, que foram aproximadas por equações de diferença e resolvidas numericamente, usando-se o método aplicado por Arnett<sup>(4)</sup>. Para os nossos cálculos, duas modificações foram feitas neste método. A primeira se refere à quantidade conservada usada como parâmetro; em vez de  $M$ , usamos  $M^*$ , tal como definida pela eq. (1.2.80). Desse modo, a massa de cada camada, em que dividimos a estrela, é dada em termos de  $M^*$ . A segunda modificação se relaciona com o cálculo do campo de velocidades, em que geramos em cada instante as velocidades relativísticas por iteração, a partir das velocidades Newtonianas.

Resolvemos as equações até o instante  $t_f$ , que definimos como sendo o instante, a partir do qual a densidade atinge valores tão elevados que as interações nucleares se tornam apreciáveis e a aproximação de gás ideal para o caroço não é mais válida.

Para  $t > t_f$ , a implosão deve acionar o mecanismo de explosão de Supernova.

É óbvio que existe uma incerteza no valor de  $t_f$ , associada ao mecanismo de explosão. Por esta razão, neste trabalho, escolhemos  $t_f = 0,2$  seg, de modo que a densidade central pode atingir até à ordem de  $10^{11}$  g/cm<sup>3</sup>.

Na fig. 3.1 apresentamos a densidade em função do raio para  $t = 0$  e  $t = t_f$ , nesta figura  $\rho(R)$  é a densidade na superfície. Podemos ver, como era de se esperar, que as camadas exteriores praticamente não alteram suas propriedades (densidade, temperatura, velocidade, etc). Isto significa que a matéria forma um caroço muito denso e bem distinto.

Comparamos nas figuras seguintes os resultados pós-Newtonianos com os clássicos, no instante  $t_f$ . Nas figs. 3.2 e 3.3 apresentamos, respectivamente, as densidades e velocidades em função do raio. Para melhor clareza, fizemos o raio variar até  $10^9$  cm, visto que, como já dissemos, para raios maiores não existem praticamente diferenças.

Nossos resultados mostram que as velocidades centrais sofrem um aumento de aproximadamente 20% e que a densidade central é aumentada em cerca de 50% em comparação ao resultado não-relativístico. Como o mecanismo de criação de onda de choque, que provoca explosão, é bastante sensível aos valores de densidade e velocidade no instante  $t = t_f$ , esta mudança nas quantidades pode provocar alteração significativa no mecanismo de explosão.

Quanto à equação de estado, convém repetir que nosso interesse principal no processo de implosão é determinar como os efeitos relativísticos afetam o movimento. Por isso, não é relevante a utilização de uma equação de estado mais sofisticada, pois os efeitos relativísticos não devem ser apreciavelmente alterados pela mudança da equação de estado. Isto não significa que tais efeitos sejam independentes do estado termodinâmico, mas simplesmente, que a consideração de um gás real não vai introduzir mudanças significativas nos efeitos relativísticos.

Os resultados deste trabalho podem ser de utilidade em futuros cálculos hidrodinâmicos de explosão de Supernova.

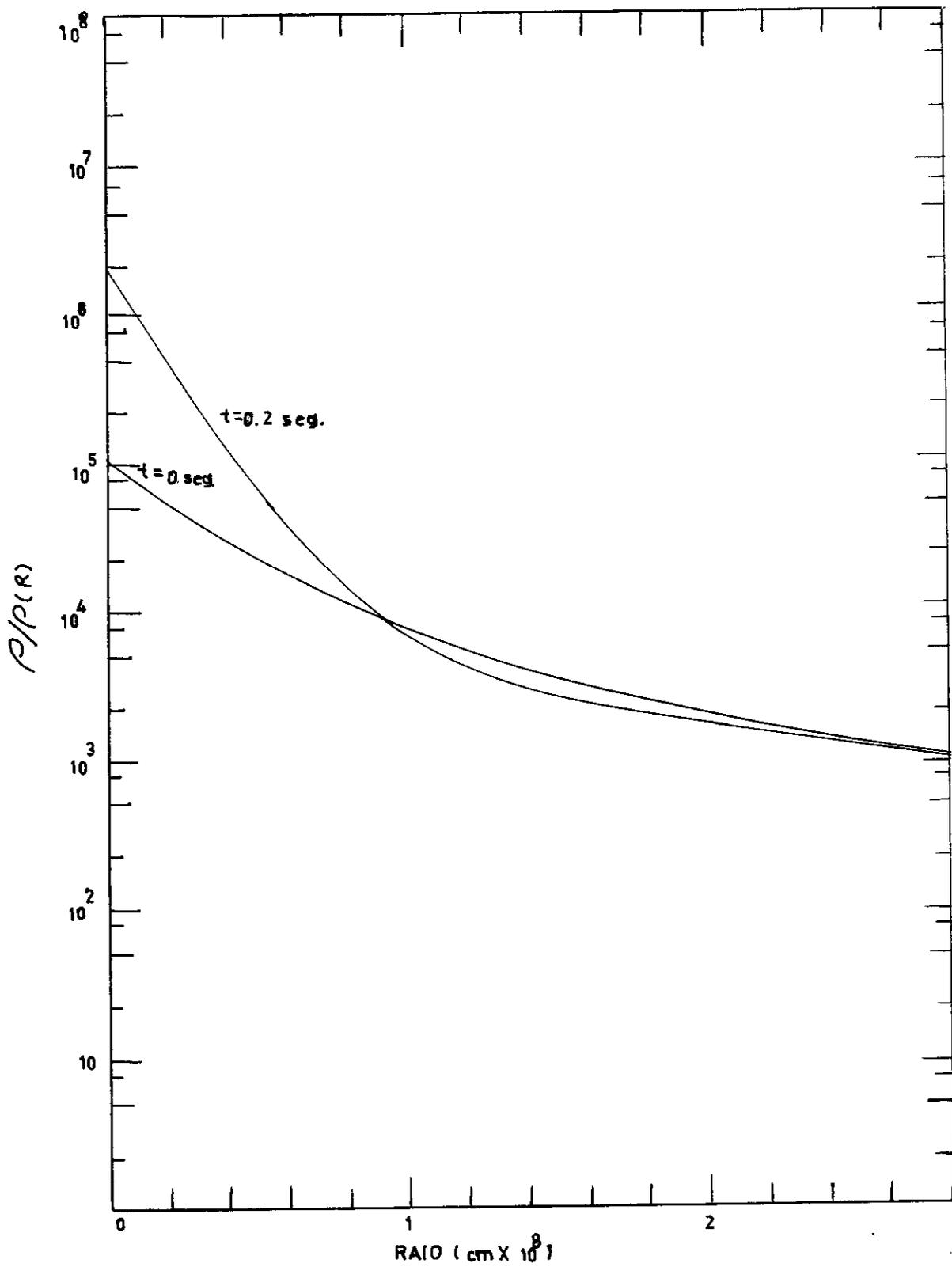


Fig. 3.1 - Distribuição da densidade nos instantes inicial e final.

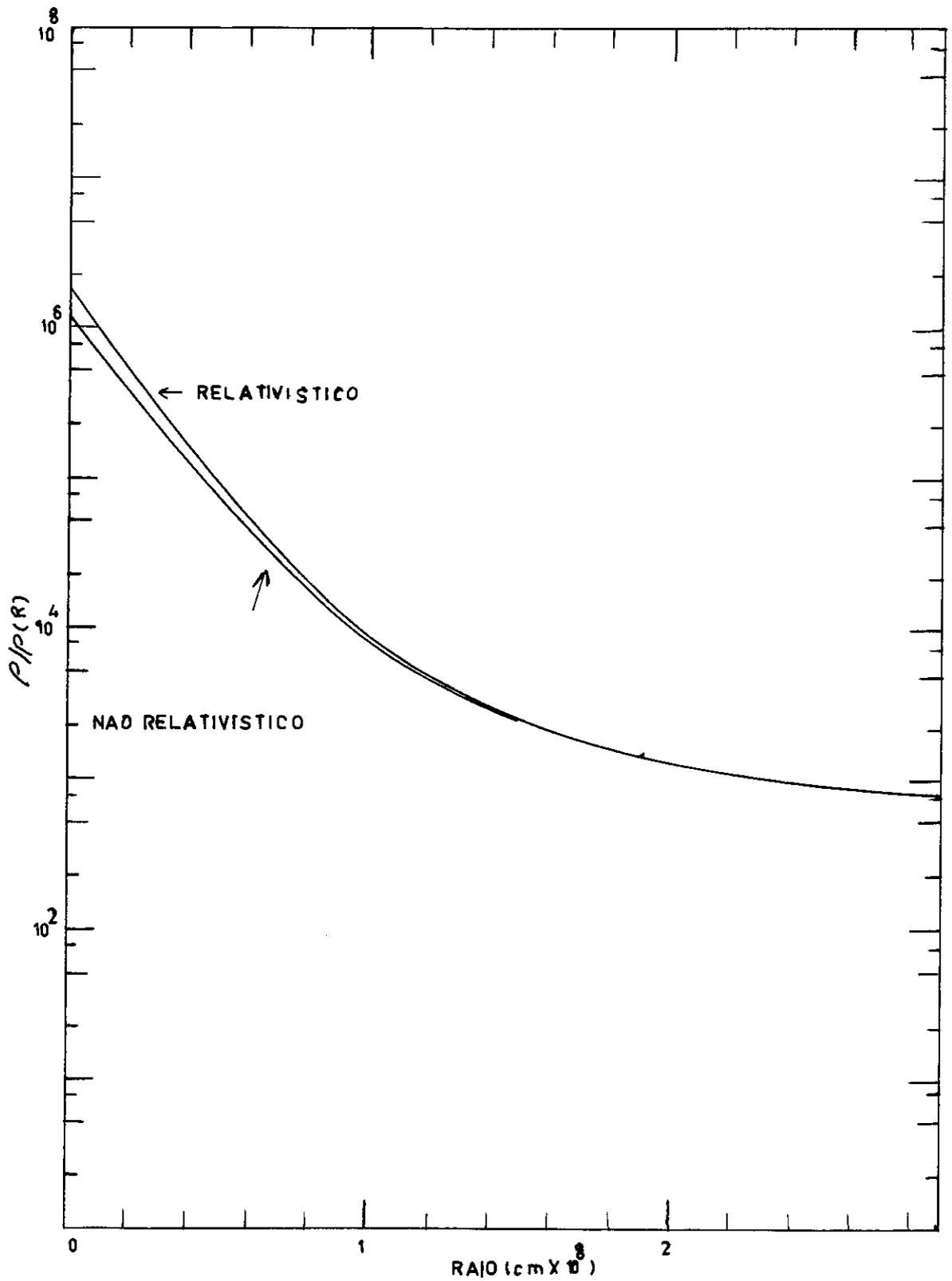


Fig. 3.2 - Distribuição da densidade no instante final para os casos relativístico e não-relativístico.

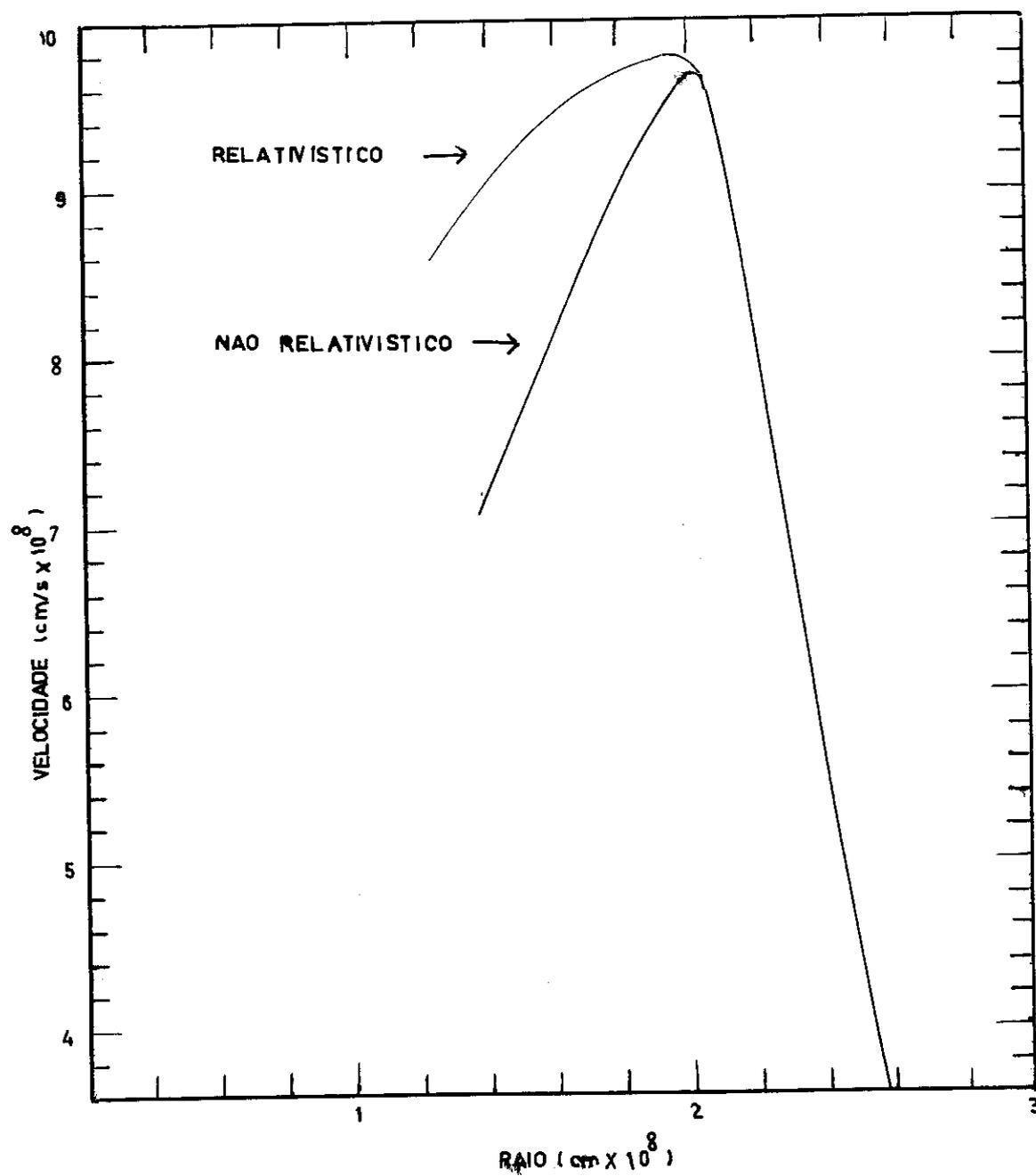


Fig. 3.3 - Campo de velocidade no instante final, para os casos relativístico e não-relativístico.

## BIBLIOGRAFIA

- 1 - E.M. Burbidge, G.R. Burbidge, W.A. Fowler e F. Hoyle, "Synthesis of the Elements in Stars", Rev. Mod. Phys. 29 (1957) 547.
- 2 - H.Y. Chiu "Stellar Physics", vol. I, Blaisdell Publishing Co. (1968).
- 3 - S.A. Colgate e R.H. White, "The Hydrodynamics Behavior of Supernovae Explosions", Ap. J. 143 (1966) 626.
- 4 - W.D. Arnett "Gravitational Collapse and Weak Interactions" Can. J. Phys. 44 (1966) 2553.
- 5 - W.D. Arnett, "Mass Dependence in Gravitational Collapse of Stellar Cores" Can. J. Phys. 45 (1967) 1621.
- 6 - Ya. B. Zeldovich e J.D. Novikov, "Relativistic Astrophysics", vol. I, The University of Chicago Press, (1971), pag. 22.
- 7 - R.A. Schwartz, "Gravitational Collapse, Neutrinos and Supernovae", Ann. Phys. 43 (1967) 42.
- 8 - S. Chandrasekhar, "The Post-Newtonian Equations of Hydrodynamics in General Relativity" Ap. J. 144 (1965) 1488.
- 9 - S. Chandrasekhar, "An Introduction to the Study of Stellar Structure", Dover Publications, INC.
- 10 - J.R. Oppenheimer e G. Colkoff, "On Massive Neutron Core", Phys. Rev. 55 (1966) 374.
- 11 - A.G.W. Cameron, "How are Neutron Stars Formed", Comm. Astrophys. Space Sci. 1 (1965) 172.
- 12 - V. Canuto e S.M. Chitre, "Solidification of Neutron Matter", 30 (1973) 999.
- 13 - S. Tsuruta e A.G.W. Cameron, "Source Effects of Nuclear Forces on Neutron-Star" 43 (1966) 2056.

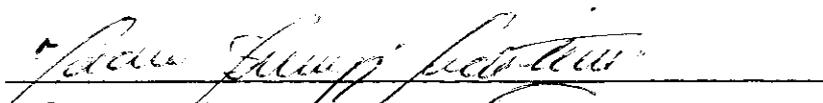
Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tec-  
nológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes  
professores:



Takeshi Kodama - Presidente



Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira



Jader Benuzzi Martins

Rio de Janeiro, 17 de novembro de 1977