TESE DE MESTRADO

INVARIÂNCIA CONFORME DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO EM ESPAÇOS CURVOS

por

Eliane Schnirman

1972

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Colber G. de Oliveira, pela sua orientação e estímulo; ao Professor Carlos Márcio do Amaral; a meu pai, pelo apoio e a Morgana Tavares, por haver datilografado este trabalho.

RESUMO

Estuda-se a invariância conforme das equações clássica e quântica de movimento em espaços curvos. Mostra-se que essa invariância é obtida sem considerar qualquer variação na massa. Isto é possível devido a uma modificação conveniente da métrica do espaço-tempo Riemanniano. Considerando a variação conforme na métrica como uma transformação de gauge em $g_{\mu\nu}(x)$, redefini-se a métrica de modo a torná-la gauge-invariante. O elemento de arco da nova geometria depende dos valores assumidos por um campo vetorial $k_\mu(x)$ ao longo de uma trajetória que leva ao ponto em consideração. Esta nova formulação pode ser chamada de semi-métrica, no sentido de que não só a métrica $g_{\mu\nu}(x)$, como também o campo vetorial, são objetos fundamentais. Para a nova geometria, a massa é um escalar conforme-invariante.

ÍNDICE

de repouso se transformar de uma certa maneira covariante. À proposição de que a massa deve se transformar como um escalar (de peso 1/2) foi feita primeiramente por Schouten e Haantjes [4].

Como veremos, uma realização qualquer da massa, que se transforme daquela maneira, deve depender, necessariamente, das coordenadas. No caso particular do grupo restrito conforme do espaço chato, a massa dependerá dos parâmetros de aceleração e de escala, além das coordenadas. Como essas quantidades podem assumir um conjunto contínuo de valores, obtemos uma representação da massa que depende de um conjunto de variáveis contínuas (valores contínuos da massa). Do ponto de vista das partículas elementares, em que o espectro atômico de massas é descontínuo (valores de massa bem determinadas), êsse fato não tem interpretação física. Dessa maneira, diz-se usualmente que a simetria conforme verifica-se somente a altas energias, a energia de repouso das partículas sendo negligenciáveis com relação à sua energia cinética [5]. Poder-se-ia permitir, em teoria clássica, uma variação de massa análoga àquela, pensando-se na correção conforme à massa como uma interação escalar que atuasse no sistema, i.e., em termos de integral de ação:

$$S_t = \int m \, ds + \int \alpha \, \phi \, ds$$

$$S_t = \int m_{ef} \, ds$$

onde $m_f = (m + \alpha\phi)$ fosse a massa efetiva do sistema, que poderia, eventualmente, assumir valores contínuos. Mas numa teoria quântica tal interpretação não é possível.

Neste trabalho, propomos uma redefinição da métrica do espaço-tempo, de tal maneira que a massa de repouso torna-se um invariante conforme. Isto é feito para o caso de variedades curvas. Com a nova métrica, ou seja, com a nova geometria, o elemento de arco, calculado para qualquer ponto regular para $g_{\mu\nu}(x)$ (métrica de um espaço Riemanniano), dependerá da integral de linha de um campo vetorial, ao longo de uma trajetória que leve a esse ponto sem cruzar nenhuma singularidade para $g_{\mu\nu}(x)$.

No capítulo II, apresentamos a relação entre as métricas de dois espaços que estão em correspondência conforme e mostramos a invariância conforme do tensor de Weyl. A seguir, obtemos as equações de transformação do grupo restrito C_0, no espaço chato, definido como o grupo de transformações que levam a um referencial de repouso uma partícula que se move com aceleração constante em relação àquele referencial. As transformações são obtidas pela determinação do grupo de simetria que deixa invariante a equação diferencial característica do movimento de uma partícula uniformemente acelerada. Obtemos, ainda, as leis de conservação associadas a um sistema com simetria conforme C_0.

Introduzimos, no capítulo IV, o grupo extendido conforme C, que contém, como sub-grupos, o grupo geral de transformações de coórdenadas (M.M.G.) e as transformações conformes da métrica (C_g). Para que uma dada equação seja conforme-invariante, requer-se sua invariância sob C_g e sob M.M.G. Como dissemos acima, para equações que contêm termos de massa não nulos, tal invariância só é verificada se permitirmos variações da massa. Definimos uma métrica conforme-invariante, cuja invariância é obtida introduzindo-se um campo vetorial $k_\mu(x)$, que, sob C_g, sofre uma transformação do tipo *gauge*. Com a nova métrica é possível construir equações de movimento conforme-invariantes, sem necessidade de se considerar transformações na massa (capítulo V).

A notação usada é a seguinte: letras gregas indicam valores de 0 a 3, índices latinos, de 1 a 3. Derivadas parciais usuais são indicadas por uma vírgula ou por $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ se operam em qualquer quantidade independente da trajetória de integração referida acima. O símbolo ∂_μ será usado para indicar derivadas de objetos dependentes de trajetória. Ponto e vírgula denota derivada covariante para objetos independentes de trajetória e D_μ, derivada covariante para os dependentes, como, por exemplo, a nova métrica. Finalmente, $g_{\mu\nu}(x)$ tem uma signatura local igual a (-2).

II. ESPAÇOS CONFORMES

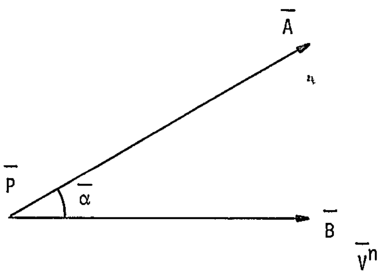
Se 2 tensores métricos $g_{\mu\nu}(x)$ e $\overline{g}_{\mu\nu}(x)$ de 2 espaços V_n e $\overline{V}_n$, respectivamente, estão na relação

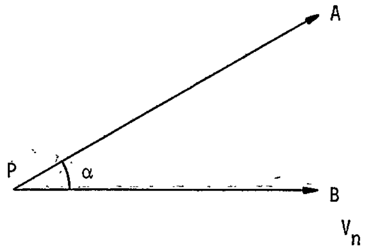
$$\overline{g}_{\mu\nu}(x) = e^{2\sigma} g_{\mu\nu}(x) \tag{2-1}$$

com $\sigma = \sigma(x)$, temos, para o elemento de linha $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, definido na vizinhança de um ponto $P \in V_n$, e o elemento de linha $\overline{ds}^2 = \overline{g}_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu$, definido num ponto $\overline{P} \in \overline{V}_n$, de mesmas coordenadas x_i, a seguinte relação:

$$\overline{ds}^2 = e^{2\sigma(x)}\, ds^2 \tag{2-2}$$

Considerando em P e $\overline{P}$ duas direções correspondentes em correspondentes pontos de V_n e $\overline{V}_n$





o ângulo entre êsses vetores será invariante sob a transformação (2-1), i é:

$$\cos\overline{\alpha} = \frac{\overline{g}_{\mu\nu}\, dx^\mu\, \delta x^\nu}{\sqrt{\overline{g}_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu}\ \sqrt{\overline{g}_{\alpha\beta}\, \delta x^\alpha\, \delta x^\beta}} = \cos\alpha \tag{2-3}$$

Uma transformação da forma acima, que satisfaz às condições (2-1) e (2-3), define uma *correspondência conforme* entre os espaços V_n e $\overline{V}_n$ ou seja, V_n e $\overline{V}_n$ são *espaços conformes*. Poderíamos estabelecer o teorema: A C.N.S. para que 2 espaços V_n e $\overline{V}_n$ estejam relacionados conformalmente é é que as métricas desses espaços estejam relacionadas na forma:

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x) = e^{2\sigma(x)}\, g_{\mu\nu}(x)$$

(em qualquer sistema de coordenadas).

Notemos que a relação entre $g_{\mu\nu}(x)$ e $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ representa uma *transformação ativa*, i.é, uma transformação no espaço funcional de todos os possíveis campos métricos, que transforma um ponto dêsse espaço noutro ponto. Cada ponto do espaço corresponde a um V_n, e o sistema de coordenadas onde eles são dados é suposto conhecido. Temos:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\mu\nu}(x) &= e^{2\sigma(x)}\, g_{\mu\nu}(x) \\ \bar{g}^{\mu\nu}(x) &= e^{-2\sigma(x)}\, g^{\mu\nu}(x) \quad . \end{aligned} \tag{2-4}$$

Uma quantidade que é invariante sob essa transformação ativa é

$$\overset{*}{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}/|g|^{1/n} \tag{2-5}$$

$$g^{*\mu\nu} = g^{\mu\nu}\ |g|^{n} \quad ,$$

com

$$|g| = \det\,(g_{\mu\nu}) \quad .$$

O símbolo de Christoffel para a métrica $\bar{g}$ é dado por:

$$\overline{\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\}} = \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} + \delta^{\alpha}_{(\beta}\, \sigma_{,\gamma)} - g_{\beta\gamma}\, g^{\alpha\rho}\, \sigma_{,\rho} \; . \tag{2-6}$$

Introduzimos a notação:

$$\sigma_{\mu|\nu} \equiv \sigma_{,\mu;\nu} \equiv \sigma_{,\nu;\mu} = \sigma_{,\mu\nu} - \{ {}^{\alpha}_{\mu\nu} \} \sigma_{,\alpha} \qquad (2\text{-}7)$$

$\sigma_{\mu|\nu}$ é um tensor simétrico de 2ª ordem e com (2-7) podemos escrever a relação conectando os tensores de curvatura em V_n e $\overline{V}_n$.

$$\overline{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = \overline{\{\nu\sigma, \mu\}}_{,\rho} - \{\nu\rho,\mu\}_{,\sigma} + \{{}^{\lambda}_{\nu\rho}\} \{\sigma_{\mu,\lambda}\} \quad \{{}^{\lambda}_{\nu\sigma}\} \{\mu\rho,\lambda\} ,$$

onde

$$\overline{\{\mu\sigma,\nu\}} = \overline{g}_{\lambda\sigma} \overline{\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}}$$

Obtemos, para

$$\sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\mu|\nu} - \sigma_{,\mu} \sigma_{,\nu} ,$$

a expressão,

$$e^{-2\sigma} \overline{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} + g_{\mu\sigma} \sigma_{\nu\rho} + g_{\nu\rho} \sigma_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} \sigma_{\nu\sigma} + \qquad (2\text{-}8)$$
$$-g_{\nu\sigma} \sigma_{\mu\rho} + (g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}) g^{\alpha\beta} \sigma_{,\alpha} \sigma_{,\beta}$$

onde $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ é o tensor de curvatura para o espaço V_n.

Como $\sigma_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu} \sigma_{,\mu} \sigma_{,\nu}$ são um tensor e um escalar, respectivamente, a equação (2-8) é covariante sob o grupo de transformações gerais de coordenadas (Manifold mapping group - MMG) dos espaços n-dimensionais. Pelo mesmo tipo de argumento, a relação (2-6) entre as afinidades de V_n e $\overline{V}_n$ é tal que representa a soma da afinidade de V_n com um tensor, igual a $(\delta^{\alpha}{}_{(\beta} \sigma_{,\gamma)} - \sigma^{,\alpha} g_{\beta\gamma})$, resultando numa nova afinidade, a de $\overline{V}_n$. Esta aproximação é semelhante à dada por Weyl em sua teoria unitária, onde ele propõe uma modificação na relação $g_{\mu\nu;\rho} = 0$, tornando-a igual a um tensor A_ρ vêzes $g_{\mu\nu}$, obtendo uma expressão semelhante à (2-6) para a afinidade (a conexão é feita com $A_\rho = -\sigma_{,\rho}$). Aqui, modificamos a forma da métrica mas conservemos a condição $g_{\mu\nu;\rho} = 0$. Como vemos, ambos os métodos são relacionados intimamente.

O tensor de Ricci para o espaço $\overline{V}_n$:

$$\overline{R}_{\mu\nu} = \overline{g}^{\rho\sigma}\,\overline{R}_{\rho\mu\nu\sigma}$$

será

$$\overline{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + (n-2)\sigma_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}(\Delta_2\,\sigma + (n-2)\Delta_1\sigma) \ , \qquad (2\text{-}9)$$

com

$$\Delta_1\,\sigma = g^{\mu\nu}\,\sigma_{,\mu}\,\sigma_{,\nu}$$

$$\Delta_2\,\sigma = g^{\alpha\beta}\,\sigma_{\alpha|\beta} \qquad\qquad (\sigma_\alpha \equiv \sigma_{,\alpha})$$

$R_{\mu\nu}$ = tensor de Ricci de V_n.

A curvatura escalar $\overline{R} = \overline{g}^{\mu\nu}\,\overline{R}_{\mu\nu}$ terá a forma:

$$\overline{R} = e^{-2\sigma}(R + 2(n-1)\,\Delta_2\,\sigma + (n-1)(n-2)\Delta_1\,\sigma\,) \ . \qquad (2\text{-}10)$$

Como $\Delta_1\sigma$ e $\Delta_2\sigma$ são escalares, as expressões (2-9) e (2-10) são covariantes. O caso n=2 não apresenta interêsse, pois qualquer forma quadrática em duas variáveis é redutível à forma $\lambda[(dx^1)^2 \pm (dx^2)^2]$ por uma infinidade de maneiras [6]. Assim, um espaço V_2 é conforme a qualquer outro.

Consideremos $n > 2$. Multiplicando (2-10) por $\overline{g}_{\mu\nu}$:

$$\overline{g}_{\mu\nu}\,\overline{R} = g_{\mu\nu}(R + 2(n-1)\Delta_2\sigma + (n-1)(n-2)\Delta_1\,\sigma) \ , \qquad (2\text{-}11)$$

Resolvemos esta equação para $g_{\mu\nu}\,\Delta_2\,\sigma$ e substituindo o resultado em (2-9), obtemos .

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{n-2}\,(\bar{R}_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}) - \frac{1}{2(n-1)(n-2)}\,(\bar{g}_{\mu\nu}\,\bar{R} - g_{\mu\nu}\,R) + - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,\Delta_1\sigma \quad . \tag{2-12}$$

Após levantar o 1º índice de $\bar{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$, teremos, na equação (2-8):

$$\bar{R}^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} + \delta^{\mu}{}_{\sigma}\,\sigma_{\nu\rho} - \delta^{\mu}{}_{\rho}\,\sigma_{\nu\sigma} + g^{\mu\lambda}\,(g_{\nu\rho}\,\sigma_{\lambda\sigma} + - g_{\nu\sigma}\,\sigma_{\lambda\rho}) + (\delta^{\mu}{}_{\sigma}\,g_{\nu\rho} - \delta^{\mu}{}_{\rho}\,g_{\nu\sigma})\,\Delta_1\,\sigma \quad . \tag{2-13}$$

Substituindo nessa equação o valor de $\sigma_{\mu\nu}$ dado por (2-12)

$$\bar{C}^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = C^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} \quad , \tag{2-14}$$

onde

$$C^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} + \frac{1}{n-2}\,(\delta^{\mu}{}_{\rho}\,R_{\nu\sigma} - \delta^{\mu}{}_{\sigma}R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}\,R^{\mu}{}_{\rho} + g_{\nu\rho}\,R^{\mu}{}_{\sigma}) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}\,(\delta^{\mu}{}_{\sigma}\,g_{\nu\rho} - \delta^{\mu}{}_{\rho}\,g_{\nu\sigma}) \quad . \tag{2-15}$$

O tensor definido por (2-15) é o mesmo para V_n e $\bar{V}_n$ em correspondência conforme. Foi denominado por Weyl [7] (1918, Mathematische Zeitschrift, vol. 2, pag. 404) o tensor de curvatura conforme. O tensor de Weyl tem todas as propriedades de simetrias do tensor de Riemann-Christoffel (o tensor de curvatura calculado com as afinidades métricas) e ainda a propriedade:

$$g^{\rho\mu}\, C_{\rho\sigma\mu\nu} = 0 \tag{2-16}$$

A invariância de $C^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}$ pode ainda ser vista do fato de que este tensor pode ser escrito exatamente da mesma maneira que o tensor de curvatura $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}$ mas com a métrica $\overset{*}{g}_{\mu\nu}$ e seu recíproco $g^{*\mu\nu}$, que são ambos conforme-invariantes, i. é:

$$C^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \{^{\mu}_{\nu\rho}\}^{*}_{,\sigma} - \{^{\mu}_{\nu\sigma}\}^{*}_{,\rho} + \{^{\mu}_{\lambda\sigma}\}^{*} \{^{\lambda}_{\nu\rho}\}^{*} - \{^{\mu}_{\lambda\rho}\}^{*} \{^{\lambda}_{\nu\sigma}\}^{*} , \tag{2-17}$$

onde

$$\{^{\mu}_{\nu\rho}\}^{*} = \frac{1}{2}\, g^{*\mu\lambda} \left(\overset{*}{g}_{\nu\lambda,\rho} + \overset{*}{g}_{\lambda\rho,\nu} - \overset{*}{g}_{\nu\rho,\lambda}\right)$$

e

$$\overline{\overset{*}{g}}_{\mu\nu} = \frac{\overline{g_{\mu\nu}}}{|\overline{g}|^{1/n}} = \frac{e^{2\sigma}\; g_{\mu\nu}}{e^{2n\sigma/n}\; |g|^{1/n}} = \overset{*}{g}_{\mu\nu}$$

III. OBTENÇÃO DO GRUPO CONFORME RESTRITO C_0

O grupo conforme restrito C_0 é o grupo de transformações que levam a um referencial de repouso uma partícula que se move com *aceleração constante* relativamente àquele referencial.

O movimento acelerado de uma partícula pode ser caracterizado, tanto clássica quanto relativisticamente, como um movimento no qual a aceleração é constante, quando medida num referencial em que a partícula está instantâneamente em repouso. Tal referencial é chamado *sistema de repouso*, e um referencial no qual a partícula esteja não somente instantâneamente em repouso, mas também não tenha aceleração, é um *sistema próprio*. Uma partícula em repouso sendo um caso especial de uma partícula em movimento uniformemente acelerado, a transformação de um sistema de repouso para um sistema próprio é a transformação de um tipo de movimento uniformemente acelerado noutro tipo. A obtenção do grupo C_0 pode então, ser colocada em têrmos da determinação de transformações que levam o movimento acelerado de uma partícula num outro do mesmo tipo [3]. Restringiremo-nos a movimentos unidimensionais, que são suficientemente gerais para indicar a natureza do problema. O tratamento pode ser estendido a movimentos tri ou quadri-dimenionais, mas a análise é extremamente trabalhosa.

1) *O PROBLEMA RELATIVÍSTICO*

O método visa a determinar o grupo de simetria de Lie mais geral que deixa invariante uma dada equação diferencial característica do movimento. No caso de movimento uniformemente acelerado,,a equação característica é:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 0 \quad . \tag{3-1}$$

Chamando

$$v = \frac{dx}{dt} \quad , \qquad a = \frac{dv}{dt} \qquad\qquad b = \frac{da}{dt}$$

(3-1) torna-se

$$F(x, t, v, a, b) \equiv b = 0 \quad . \tag{3-2}$$

Na teoria especial da relatividade, impomos ainda que a equação característica seja invariante sob o grupo de Lorentz, L_2. Então, F não pode depender explicitamente de x, t, pois as translações formam um sub-grupo de Lorentz. Supomos, ainda, que se pode resolver explicitamente a equação para b,

$$F \equiv b + f(v, a) = 0 \tag{3-3}$$

Para um mapeamento infinitesimal associado ao grupo de Lorentz, neste problema onde existem, além de v, b e a, teremos:

$$\begin{aligned} x' &= x - v_0 t & &\rightarrow \delta x = - v_0 t \\ t' &= t - \frac{v_0}{c^2}\, x & &\rightarrow \delta t = - \frac{v_0}{c^2}\, x \end{aligned} \tag{3-4}$$

Então,

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v_0\, dt}{dt - \frac{v_0}{c^2}\, dx} \simeq (v - v_0)\left(1 + \frac{v_0}{c^2}\, v\right)$$

Em termos lineares da velocidade infinitesimal v_0:

$$\delta v \equiv \frac{dx'}{dt'} - \frac{dx}{dt} \simeq - v_0 + \frac{v_0}{c^2}\, v^2$$

ou seja,

$$\delta v \simeq - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) v_0$$

Da mesma maneira, em termos de 1ª ordem em v_0, obtemos:

$$\delta a \simeq \frac{3a}{c^2}\, v_0\, v$$

e

$$\delta b \simeq \frac{3a^2 + 4\ v\ b}{c^2}\ v_o\ .$$

Considerando também as translações em δx e δt,

$$\delta x = \delta\alpha + t\ \delta\ \beta \quad ; \qquad \delta\beta = -\ v_o$$

$$\delta t = \delta\gamma + \frac{x}{c^2}\ \delta\beta$$

$$\delta v = (1 - \frac{v^2}{c^2})\delta\beta$$

$$\delta a = -\ \frac{3av}{c^2}\ \delta\beta \qquad\qquad \delta\beta = -\ \frac{3a^2 + 4\ v\ b}{c^2}\ \delta\beta$$

A condição que (3-3) seja invariante sob L_2 é dada por:

$$\frac{\partial F}{\partial v}\ \delta\pi + \frac{\partial F}{\partial a}\ \delta a + \frac{\partial F}{\partial b}\ \delta b = 0 \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial t} = 0\right),$$

o que dá a seguinte equação diferencial para $f(v,a)$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(c^2 - v^2) - \frac{\partial f}{\partial a}\ 3\ a\ v - (3a^2 + 4\ v\ b) = 0\ .$$

Como $f = -\,b$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial v}(c^2 - v^2) - \frac{\partial f}{\partial a}\ 3\ a\ v + 4\ v\ f - 3\ a^2 = 0\ .$$

Uma solução para esta equação é:

$$f_1(v,\ a) = \frac{3\ v\ a^2}{c^2 - v^2}\ . \tag{3-5}$$

Substituindo (3-5) em (3-3) obtemos uma equação diferencial para o movimento que é invariante sob L_2:

$$b + \frac{3\,v\,a^2}{c^2 - v^2} = 0 \qquad (3\text{-}6)$$

Para $c \to \infty$, (3-6) torna-se a equação $b = 0$, característica de todos os movimentos uniformemente acelerados não relativísticos. O número de geradores do grupo de Lie de simetria, neste caso, é sete. Sabendo que tal número não varia na transição da teoria relativística para a formulação não relativística, pode-se estabelecer diretamente que o grupo total de de Lie de simetria da equação (3-6) é um grupo a sete parametros. Não derivaremos tal grupo aqui, mas um seu importante sub-grupo, que denotaremos por C_0^3, a 6 parâmetros. C_0^3 (o sufixo 3 especifica que sua equação diferencial característica é de ordem 3) é o grupo conforme *unidimensional*.

Para obter tal grupo, façamos a transformação infinitesimal geral:

$$\begin{aligned} x' &= x + \xi(x,t) \\ t' &= t + \eta(x,t) \;; \end{aligned} \qquad (3\text{-}7)$$

teremos

$$dx' = dx + \xi_x\, dx + \xi_t\, dt$$

$$dt' = dt + \eta_x\, dx + \eta_t\, dt \;,$$

onde os índices x(t) indicam derivadas parciais em relação a x(t). Donde:

$$v' = \frac{dx'}{dt'} \simeq v - v^2\,\eta_x - v\,\eta_t + v\,\xi_x + \xi_t \;,$$

$$\delta v = v' - v \simeq -v^2\,\eta_x + v(\xi_x - \xi_t) + \xi_t$$

em têrmos de 1ª ordem em ξ e η. Analogamente:

$$\delta a = a' - a \simeq a(\xi_x - 2\,\eta_t) - 3\,av\,\eta_x - v^3\,\eta_{xx} + v^2(\xi_{xx} - 2\,\eta_{xt}) +$$

$$+ v(2\,\xi_{xt} - \eta_{tt}) + \xi_{tt} \;,$$

$$\delta b = b' - b \simeq b(\xi_x - 3\,\eta_t) - 4\,bv\,\eta_x - 3\,a^2\,\eta_x + a(3\,\xi_{xt} +$$

$$- 3\,\eta_{tt}) + a\,v\,(3\,\xi_{xx} - 9\,\eta_{tt}) + a\,v^2\,(-6\,\eta_{xx}) +$$

$$+ v^4(-\eta_{xxx}) + v^3(\xi_{xxx} - 3\,\eta_{xxt}) + v^2\,(3\,\xi_{xxt} - 3\,\eta_{xtt}) +$$

$$+ v(3\,\xi_{xtt} - \eta_{ttt}) + \xi_{ttt} \;.$$

Como

$$b = -\frac{3\,v\,a^2}{c^2 - v^2} \simeq \frac{-3\,a^2\,v}{c^2}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \;,$$

a equação $F(x,t,v,a,b) = 0$ é invariante se:

$$b + \delta b + \frac{3(v+\delta v)(a^2 + 2a\,\delta a)}{c^2\left[1 - \dfrac{v^2 + 2v\delta v}{c^2}\right]} = 0$$

a menos de têrmos de ordem superior nas variações, ou, ainda:

$$\delta b + \frac{3}{c^2}\left[2a\ v\ \delta a\ (1 + \frac{v^2}{c^2}) + a^2\ \delta\ v\ (1 + \frac{3v^2}{c^2})\right] = 0 . \qquad (3\text{-}8)$$

Substituindo os valores δv, δa, δb encontrados acima, obtemos uma expressão cujos coeficientes devem ser nulos, para que a equação característica seja invariante, i.é., obtemos o seguinte conjunto de equações (já eliminadas as inconsistentes):

$$\xi_t = c^2\ \eta_x \qquad \eta_t = \xi_x$$

$$\xi_{ttt} = 0 \qquad \eta_{xxx} = 0$$

$$\xi_{xxx} = 3\ \eta_{xxt} \qquad \eta_{ttt} = 3\ \xi_{ttx} \qquad \xi_{xxt} = \eta_{ttx} .$$

A resolução do sistema acima determina as funções $\xi(x,t)$ e $\eta(x,t)$:

$$\xi(x,t) = -\ \alpha_1 - \alpha_4\ (\frac{c^2t^2 + x^2}{2c^2}) - \alpha_5\ xt + \alpha_6 x - \alpha_3 t$$

$$(3\text{-}9)$$

$$\eta(x,t) = -\ \alpha_2 - \alpha_4\ \frac{xt}{c^2} - \alpha_5\ (\frac{c^2t^2 + x^2}{2\ c^2}) + \alpha_6\ t - \alpha_3\ \frac{x}{c^2} ,$$

$\alpha_1, \ldots \alpha_6$, constantes.

Portanto, as transformações infinitesimais gerais que deixam a equação (3-6) invariante são:

$$x' = x - \alpha_1 - \alpha_3 t - \alpha_4\ \frac{x^2 + c^2t^2}{2\ c^2} - \alpha_5\ xt + \alpha_6\ x \qquad (3\text{-}10)$$

$$t' = t - \alpha_2 - \alpha_3\ \frac{x}{c^2} - \alpha_4\ \frac{xt}{c^2} - \alpha_5\ \frac{x^2 + c^2t^2}{2\ c^2} + \alpha_6\ t,$$

com os seguintes geradores:

$$X_1 \equiv -\partial_x \qquad X_2 \equiv -\partial_t \qquad X_3 \equiv -t\,\partial_x - \frac{x}{c^2}\,\partial_t$$

$$X_4 \equiv -\left(\frac{c^2t^2 + x^2}{2\,c^2}\right)\partial_x - \frac{xt}{c^2}\,\partial_t \qquad X_5 \equiv -xt\,\partial_x - \frac{c^2t^2 + x^2}{2\,c^2}\,\partial_t \qquad X_6 \equiv x\partial_x + t\partial_t .$$

Os operadores X_1 e X_2 geram as translações no espaço (x,t); X_3 gera as transformações de Lorentz, i.ē, rotações reais no plano complexo (x, ict) ou rotações imaginārias no plano real; X_4 e X_5 geram as transformações de aceleração e X_6 estā relacionado ās transformações de escala ou dilatações uniformes do plano (x,t). As transformações geradas por X_1, X_2 levam a partīcula para a origem do plano (x,t); enquanto as transformações de Lorentz levam a partīcula para o repouso na origem (sistema de repouso). O subgrupo gerado por X_4 e X_5 leva a partīcula para o sistema prōprio $(a=0)$.

2) *MOVIMENTO 4-DIMENSIONAL*

No caso 4-dimensional, pode-se fazer uma generalização do sistema de operadores $X_1, \ldots X_5$, da seção precedente, por cālculo direto. No entanto, o usual ē se estabelecer a relação de transformações entre movimento uniformemente acelerados com o grupo conforme de Lie [9] a 4 dimensões. A conexão ē feita reconhecendo-se que uma partīcula viajando com a velocidade da luz ē um caso especial de aceleração uniforme no qual ē impossīvel obter-se maior aceleração, e a famīlia de trajetōrias de raios luminosos

$$(dx^0)^2 - (dx^i)^2 = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{3-11}$$

deve ser invariante sob transformações entre sistemas que se movem com aceleração relativa constante.

O problema se reduz, então, à determinação de todas as transformações que preservam (3-11). Permitindo-se que as coordenadas variem sôbre um domínio complexo, $t = x^0/c$ pode ser substituido por $(-1)^{1/2}$ τ/c e o problema torna-se o da determinação das transformações que deixam

$$(d\tau)^2 + (d\,x^i)^2 = 0$$

invariante. As transformações que satisfazem essa propriedade e apresentam um desvio do grupo de Lorentz até termos quadráticos nas coordenadas foram determinadas por Lie. Tais transformações formam um grupo de 15 parâmetros, que chamaremos grupo especial conforme C_0. (Embora na literatura de partículas elementares tal grupo é comumente referido como grupo conforme, achamos conveniente frisar o carater *especial* desde que se refere a espaços chatos, para evitar confusão com o grupo generalizado conforme C, em espaços curvos).

O grupo C_0, porque contém o grupo de Poincarê como um sub-grupo, é um candidato, em certas circunstâncias, para a generalização do grupo de Poincarê como um grupo de simetria da Física. Além disso, como as partículas de massas nulas têm como uma característiça a anulação dos elementos de linha de suas linhas de universo e C_0 é um grupo que preserva elementos de linha nulos (cf. 3-11), existe a possibilidade de que o C_0 seja um grupo exato de simetrias para partículas não massivas (ou, ainda, para partículas massivas a altas energias, tal que a energia de repouso seja negligenciável em comparação à energia cinética) [10].

O grupo C_0 é composto pelo grupo não homogêneo de Lorentz:

$$x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} \qquad \text{(10 parâmetros)} \tag{3-12a}$$

com

$$ds'^2 = ds^2;$$

das transformações de dilatação

$$x'^{\mu} = \beta\, x^{\mu}\,, \qquad \text{(1 parâmetro)} \tag{3-12b}$$

$$ds'^2 = \beta^2\, ds^2,$$

e das transformações de inversão

$$x'^{\mu} = x^{\mu}/x^2 \tag{3-12c}$$

$$ds'^2 = ds^2/x^4$$

As transformações que consistem duma inversão, translação e inversão formam um sub-grupo abeliano:

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} + a^{\mu} x^2}{1 + 2a.x + a^2x^2}\,, \tag{3-12d}$$

$$ds'^2 = ds^2(1 + 2a.x + a^2x^2)^{-2}$$

(obtido de 1 inversão

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu}}{x^2}\,,$$

uma translação

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} + a^{\mu}}{(x^{\mu} + a^{\mu})(x_{\mu} + a_{\mu})}$$

e a combinação de 1 inversão com translação:

$$x'^{\mu} = \frac{(x^{\mu}/x^2 + a^{\mu})}{(x^{\mu}/x^2 + a^{\mu})(x_{\mu}/x^2 + a_{\mu})}$$

i.ē:

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} + a^{\mu}\, x^2}{1 + 2ax + a^2x^2}\quad)$$

Êste grupo depende de 4 parâmetros e ē continuamente conectado com a unidade (a=0).

Todas as transformações continuamente conectadas com a unidade podem ser escritas como uma transformação de Lorentz (10 parâmetros), de escala (1 parâmetro) e uma transformação do subgrupo (3-12d), (4 parâmetros). O grupo conforme restrito tem, portanto, 15 parâmetros.

Reflexões espaço-temporais e inversão levam a partes desconexas, mas reflexão temporal e inversão são continuamente conexas. Segue-se diretamente do isomorfismo do grupo conforme restrito com o grupo de Lorentz a 6 dimensões e do fato de que êste grupo generalizado de Lorentz consiste de 4 partes, que o grupo C_0 tem 4 partes desconexas.[11]

Para verificarmos a relação entre o grupo de rotações num espaço pseudo euclidiano a seis dimensões e o grupo conforme no espaço-chato [12], consideremos as suas respectivas formas fundamentais:

$$\eta^2 = (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2 - (\eta^0)^2 + (\eta^5)^2 - (\eta^6)^2 \qquad (3\text{-}13a)$$

e

$$g_{\mu\nu}\, x^\mu\, x^\nu = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^0)^2 \qquad (3\text{-}13b)$$

(Por conveniência, adotamos temporariamente uma signatura igual a +2 para a métrica do espaço pseudo-euclidiano a 4 dimensões).

Se introduzirmos η^μ, ξ e ζ relacionadas com x^μ da seguinte maneira:

$$\frac{\eta^\mu}{\xi} = x^\mu \qquad \zeta/\xi = \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, x^\mu\, x^\nu$$

a forma (3-13b) torna-se

$$g_{\mu\nu}\, \eta^\mu \eta^\nu - 2\,\xi\zeta = 0 \qquad (3\text{-}14)$$

Consideremos, ainda as relações:

$$\xi = \frac{\eta^6 + \eta^5}{\sqrt{2}} \qquad \zeta = \frac{\eta^6 - \eta^5}{\sqrt{2}} \quad ,$$

que, substituidas em (3-14), leva a forma (3-13b) à expressão

$$g_{\mu\nu}\, \eta^\mu \eta^\nu + (\eta^5)^2 - (\eta^6)^2 = 0$$

que coincide com a forma (3-13a) igualada a zero.

Nessas variáveis, as transformações (3-12a, b e c) se escrevem:

$$\left.\begin{aligned}
\eta'^{\mu} &= L^{\mu}{}_{\nu}\,\eta^{\nu} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,a^{\mu}(\eta^{5}+\eta^{6})\\
\eta'^{5} &= \eta^{5} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,g_{\mu\nu}\,L^{\mu}{}_{\lambda}\,a^{\nu}\eta^{\lambda} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,g_{\mu\nu}\,a^{\mu}\,a^{\nu}(\eta^{5}+\eta^{6})\\
\eta'^{6} &= \eta^{6} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,g_{\mu\nu}\,L^{\mu}{}_{\lambda}\,a^{\nu}\,\eta^{\lambda} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,g_{\mu\nu}\,a^{\mu}\,a^{\nu}\,(\eta^{5}+\eta^{6})
\end{aligned}\right\}\qquad (3\text{-}12a)$$

$$\left.\begin{aligned}
\eta'^{\mu} &= \eta^{\mu}\\
\eta'^{5} &= \frac{1}{2}\,(\beta + \frac{1}{\beta})\eta^{5} - \frac{1}{2}\,(\beta - \frac{1}{\beta})\eta^{6}\\
\eta'^{6} &= \frac{1}{2}\,(\beta - \frac{1}{\beta})\eta^{5} + \frac{1}{2}\,(\beta + \frac{1}{\beta})\eta^{6}
\end{aligned}\right\}\qquad (3\text{-}12b)$$

$$\left.\begin{aligned}
\eta'^{\mu} &= \eta^{\mu}\\
\eta'^{5} &= -\eta^{5}\\
\eta'^{6} &= \eta^{6}
\end{aligned}\right\}\qquad (3\text{-}12c)$$

Consideremos, agora, transformações infinitesimais:

$$L^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \varepsilon^{\mu}{}_{\nu}$$
$$a^{\mu} = \varepsilon^{\mu}$$
$$\beta = 1 + \varepsilon$$

Teremos, para (3-12a) e (3-12b):

$$\eta'^{\mu} = \eta^{\mu} + \varepsilon^{\mu}{}_{\nu}\, \eta^{\nu} + \varepsilon^{\mu}\, \eta^{5} + \varepsilon^{\mu}\, \eta^{6}$$

$$\eta'^{5} \quad \eta^{5} - g_{\mu\nu}\, \varepsilon^{\mu}\, \eta^{\nu}$$

$$\eta'^{6} = \eta^{6} + g_{\mu\nu}\, \varepsilon^{\mu}\, \eta^{\nu}$$

e

$$\eta'^{\mu} = \eta^{\mu}$$

$$\eta'^{5} = \eta^{5} - \varepsilon\, \eta^{6}$$

$$\eta'^{6} = \eta^{6} - \varepsilon\, \eta^{5} \ .$$

Vemos, assim, que os operadores de rotação infinitesimal nos planos $(\eta^{j} - \eta^{k})$ e $(\eta^{i} - \eta^{0})$ geram transformações de Lorentz; dilatações, no plano $(\eta^{5} - \eta^{6})$, e as translações são geradas por $p_{\mu} - X_{\mu}$, onde p_{μ} e X_{μ} são os geradores das rotações infinitesimais nos planos $(\eta^{\mu} - \eta^{5})$ e $(\eta^{\mu} - \eta^{6})$, respectivamente.

Por exemplo, a translação infitesimal na direção i é:

$$\eta'^{i} = \eta^{i} + \varepsilon\, \eta^{5} + \varepsilon\, \eta^{6}$$

$$\eta'^{5} = \eta^{5} - \varepsilon\, \eta^{i}$$

$$\eta'^{6} = \eta^{6} + \varepsilon\, \eta^{i}$$

$$\eta'^{\mu} = \eta^{\mu} \qquad (\mu \neq i)$$

que é uma soma de .

$$\begin{aligned} \eta'^{i} &= \eta^{i} + \varepsilon\, \eta^{5} \\ \eta'^{5} &= \eta^{5} - \varepsilon\, \eta^{i} \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \eta'^{i} &= \eta^{i} + \varepsilon\, \eta^{6} \\ \eta'^{6} &= \eta^{6} + \varepsilon\, \eta^{i} \end{aligned}$$

as $1^{\underline{as}}$ geradas por $- \varepsilon X_i$ e as $2^{\underline{as}}$ por εp_i.

Considerando, agora, os geradores $p_\mu + X_\mu$ (por exemplo, $\varepsilon(p_1 + X_1)$, as transformações geradas por tais operadores são:

$$\eta'^1 = \eta^1 - \varepsilon \eta^5 + \varepsilon \eta^6$$

$$\eta'^5 = \eta^5 + \varepsilon \eta^1$$

$$\eta'^6 = \eta^6 + \varepsilon \eta^1$$

$$\eta'^\mu = \eta^\mu \qquad (\mu \neq 1)$$

Essas transformações podem ser obtidas de 1 inversão, translação e inversão, como se vê:

$$(\eta^1, \eta^5, \eta^6) \xrightarrow{\text{inversão}} (\eta^1, -\eta^5, \eta^6) \xrightarrow{\text{translação}} (\eta^1 - \varepsilon \eta^5 + \varepsilon \eta^6 -$$

$$- \eta^5 - \varepsilon \eta^1, \ \eta^6 + \varepsilon \eta^1) \xrightarrow{\text{inversão}} (\eta^1 - \varepsilon \eta^5 + \varepsilon \eta^6, \eta^5 + \varepsilon \eta^1, \eta^6 + \varepsilon \eta^1) .$$

Escrevendo a série de transformações em coordenadas x, temos

$$x'^1 = \frac{x^1 + \frac{1}{2} \varepsilon x_\lambda x^\lambda}{1 + \varepsilon x^1} , \qquad x'^\mu = \frac{x^\mu}{1 + \varepsilon x^1} \quad (\mu \neq 1) ;$$

se $x'^i = 0$, obtemos

$$x^1 + \frac{1}{2} \varepsilon (x^{1^2} - x^{0^2}) = 0 ,$$

$$x^1 = \frac{1}{2} \varepsilon x^{0^2} + \ldots$$

i.ē, a origem do sistema S' desenvolve um movimento hiperbólico. Assim, $p_i + \varepsilon X_i$ geram transformações que levam um sistema coordenado a outro em movimento uniformemente acelerado em relação ao primeiro.

Através da inversão, o cone de luz ē mapeado no infinito. (Pontos no cone de luz são caracterizados por $x^2 = 0$; então, por (3.12c) $x'^{\mu} \to \infty$). Como as transformações (3.12d) consistem numa inversão, translação e inversão, um cone de luz ē mapeado no infinito e o centro ē deslocado da origem. Da (3.12d) segue-se que

$$1 + 2a\cdot x + a^2 x^2 = a^2 \left(x + \frac{a}{a^2} \right)^2 = 0 \qquad (3\text{-}14)$$

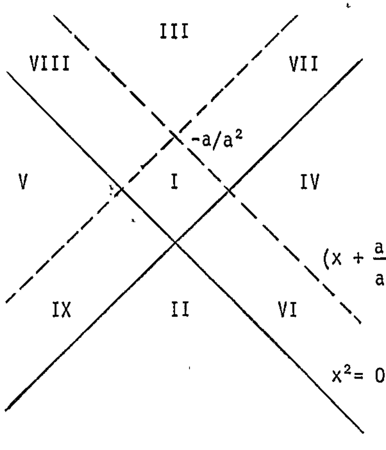
ē a equação dêsse cone de luz cujo centro ē em $-a/a^2$. Como, sob (3-12d)

$$x'^2 = \frac{x^2}{1 + 2a\cdot x^2 + a^2 x^2}, \qquad (3\text{-}15)$$

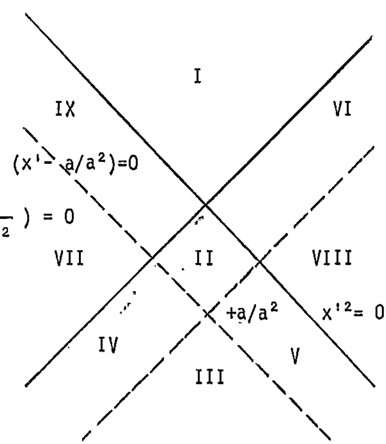
vemos que o sinal de x'^2 será diferente do sinal de x^2 quando $a^2\left(x + \frac{a}{a^2}\right)^2$ for negativo. Portanto, um vetor tipo tempo ($x^2 > 0$) poderá se tornar tipo espaço ($x^2 < 0$), através dessas transformações. Pontos sôbre cone de luz transformam-se em pontos sôbre cone de luz, enquanto pontos finitos nos dois sistemas de coordenadas (x e x'), como se pode ver pela (3-14).

De acôrdo com (3-12d), o sinal de ds^2 ē invariante, isto significa que para distâncias infinitesimais, os conceitos "tipo tempo" e "tipo espaço" são invariantes. Para distâncias finitas, tem sido levantada uma objeção à possível utilização física do C_0, a de que este grupo viola a causalidade, no sentido de que a relação causal entre pares de eventos espaço-tempo rais, nem sempre é mantida: eventos que têm separação tipo-tempo podem ser transformados por uma transformação conforme, tal que suas imagens tenham separação tipo-espaço. [13]

Num esquema a duas dimensões, indiquemos os planos x e x'. Os cones de luz $x^2 = 0$, $(x + a/a^2)^2 = 0$ e $x'^2 = 0$, $(x' - \frac{a}{a^2})^2 = 0$, cortam os planos em 9 partes. Enumerando estas partes de I a IX, podemos identificar a que parte do plano x' cada parte do plano x é mapeada através da transformação (3-12d)



Plano x



Plano x'

Uma reta no plano x transforma-se numa hipérbola, em geral, mas trajetórias de raios luminosos transformam-se em trajetórias de raios luminosos, como já havíamos observado:

$$(x' - y')^2 = \frac{(x - y)^2}{(1 + 2a.x + x^2)(1 + 2a.y + y^2)}$$

As transformações infinitesimais podem ser escritas:

$$x'^\mu = x^\mu + \alpha^\mu$$

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu{}_\nu \, x^\nu , \qquad \varepsilon_{\mu\nu} = - \varepsilon_{\nu\mu}$$

$$x'^\mu = x^\mu + \beta \, x^\mu$$

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu \, x^2 - 2 \, x^\mu \, a.x \quad ,$$

Com α_μ, $\varepsilon_{\mu\nu}$, β, a_μ respectivamente os parâmetros de translação, do subgrupo de Lorentz, de dilatação e da transformação especial conforme (aceleração). Os correspondentes geradores das transformações, P^μ , $M^{\mu\nu}$, S, A^μ, têm as seguintes relações de comutação:

$$
\begin{aligned}
&[P^{\mu}, P^{\nu}] = 0 \\
&[M^{\mu\nu}, M^{\lambda\sigma}] = g^{\mu\sigma} M^{\nu\lambda} + g^{\nu\lambda} M^{\mu\sigma} - g^{\mu\lambda} M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} M^{\mu\lambda} \\
&[M^{\mu\nu}, P^{\lambda}] = g^{\nu\lambda} P^{\mu} - g^{\mu\lambda} P^{\nu} \\
&[S, P^{\mu}] = 0 \\
&[S, M^{\mu\nu}] = 0 \\
&[A^{\mu}, A^{\nu}] = 0 \\
&[A^{\mu}, P^{\nu}] = 2 M^{\mu\nu} - 2 g^{\mu\nu} S \\
&[A^{\lambda}, M^{\mu\nu}] = g^{\lambda\mu} A^{\nu} - g^{\lambda\nu} A^{\mu} \\
&[A^{\lambda}, S] = A^{\lambda}
\end{aligned}
\tag{3-16}
$$

A obtenção dessas relações de comutação é bastante simples. Para ilustrar, calculamos o comutador entre os geradores do grupo de Lorentz $M^{\mu\nu}$, e de transformação especial conforme A^{λ}:

$$
\begin{aligned}
[A^{\lambda}, M^{\mu\nu}] &= \left[(g^{\tau\lambda} x^2 - 2 x^{\tau}x^{\lambda})\partial_{\tau}, (x^{\mu} g^{\rho\nu} \partial_{\rho} - x^{\nu} g^{\rho\mu} \partial_{\rho})\right] = \\
&= (g^{\tau\lambda} x^2 - 2 x^{\tau} x^{\lambda})\partial_{\rho} (x^{\mu} g^{\rho\nu} \partial_{\rho} - x^{\nu} g^{\rho\mu} \partial_{\rho}) + \\
&- (x^{\mu} g^{\rho\nu} \partial_{\rho} - x^{\nu} g^{\rho\mu} \partial_{\rho})(g^{\tau\lambda} x^2 \partial_{\tau} - 2 x^{\tau} x^{\lambda} \partial_{\tau})
\end{aligned}
$$

o que nos leva, por cálculo direto, a:

$$
[A^{\lambda}, M^{\mu\nu}] = g^{\lambda\mu} A^{\nu} - g^{\lambda\nu} A^{\mu}
$$

3) *LEIS DE CONSERVAÇÃO*

As propriedades de simetria de um sistema físico reduzem a complexidade de matemática desse sistema e levam a leis de conservação.

De acôrdo com o teorema de Noether, [14] a invariância da integral de ação de um sistema físico sob um grupo de transformações que depende de p parâmetros dados, leva à conservação de um conjunto de p quantidades invariantes, os geradores das transformações. Se a invariância da integral de ação se verificar sob um grupo de transformações que depende de q funções dadas, o teorema estabelece a existência de q identidades.

Quando as equações de movimento são deriváveis de um princípio variacional, pode-se desenvolver um processo geral para o estabelecimento de teoremas de conservação.

Consideremos a integral de ação

$$I = \int_R \mathscr{L}(x^k;\ \psi^\alpha;\ \psi^\alpha{}_{;\ell}\ )\ d(x) \tag{3-17}$$

onde $\mathscr{L}$ é a densidade lagrangeana do sistema, função das variáveis independentes x^k, das funções de estado ψ (ou variáveis dependentes) e de suas derivadas primeiras.

$k = 1, 2, \ldots n$

$\alpha = 1, 2 \ \ldots m$

$d(x)$ = elemento do volume R, domínio arbitrário das variáveis independentes.

Para uma transformação infinitesimal

$$x'^k = x^k + \delta x^k$$

$$\psi'^{\alpha}(x) = \psi^{\alpha}(x) + \delta\psi^{\alpha}(x) \qquad (3\text{-}19)$$

$$\psi'^{\alpha}{}_{,k}(x) = \psi^{\alpha}{}_{,k}(x) + \delta\psi^{\alpha}{}_{,k}(x)$$

a variação funcional da integral de ação I é definida pela relação:

$$\delta I = \int_{R'} \mathcal{L}(x'; \psi'^{\alpha}, \psi'^{\alpha}{}_{,k}) d(x') - \int_{R} \mathcal{L}(x; \psi^{\alpha}; \psi^{\alpha}{}_{,k})\, d(x) \qquad (3\text{-}20)$$

onde a forma funcional do integrando não deve ser alterada.[15] Em têrmos de 1ª ordem, a expressão (3-20) pode ser reduzida à forma:

$$\delta I = \int_R \left\{ \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x^k} \left[\left(\mathcal{L}\delta^k{}_{\ell} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{\alpha}{}_{,k}} \psi^{\alpha}{}_{,\ell}\right) \delta x^{\ell} + \frac{\partial}{\partial\psi^{\alpha}_{,k}} \delta\psi^{\alpha} \right] + \right.$$

$$\left. + \left[\mathcal{L}\right]_{\alpha} \left(\delta\psi^{\alpha} - \psi^{\alpha}{}_{,m}\ \delta x^m\right) \right\} d(x) \qquad (3\text{-}21)$$

com

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x^k} \equiv \frac{\partial}{\partial x^k} + \psi^{\alpha}_{,k} \frac{\partial}{\partial\psi^{\alpha}} + \psi^{\alpha}{}_{,k\ell} \frac{\partial}{\partial\psi^{\alpha}{}_{,\ell}}$$

e

$$[\mathcal{L}]_{\alpha} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{\alpha}} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x^k} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{\alpha}{}_{,k}} \right)$$

Se as equações de movimento do sistema são deriváveis do princípio de Hamilton, a variação da integral de ação deve se anular idênticamente para variações tais que:

$\delta x^k = \delta\psi^\alpha = 0$ sôbre o contôrno do domínio de integração R.

A equação (3-21) se reduz a:

$$\int_R [\mathcal{L}]_\alpha \, (\delta\psi^\alpha - \psi^\alpha{}_{,m} \, \delta x^m) \, d(x) \equiv 0 \ ,$$

obtendo-se as equações de movimento

$$[\mathcal{L}]_\alpha = 0 \ . \tag{3-22}$$

Notamos que densidades lagrangeanas que diferem entre si por uma divergência levam a um mesmo conjunto de equações de movimento.

As transformações que deixam as equações de movimento invariantes em forma são denominadas *transformações de simetria* e são tais que levam uma solução qualquer das equações de movimento, representando um tipo particular de comportamento do sistema, a outra solução, representativa de outro movimento possível do sistema [16]. Essas transformações relacionam-se intimamente com a alteração da forma funcional da densidade lagrangeana

$$\mathcal{L}'(x'; \psi'; \psi'{}_{,k}) \, d(x') = \mathcal{L}(x; \psi; \psi_{,k}) \, d(x) \ . \tag{3-23}$$

Como as equações de movimento em função das novas variáveis devem ter a mesma forma funcional como nas variáveis antigas, as duas densidades lagrangeanas devem diferir, no máximo, por uma divergência:

$$\mathcal{L}'(x;\ \psi;\ \psi_{,k}) = \mathcal{L}(x;\ \psi;\ \psi_{,k}) + \frac{\mathcal{D}\Omega^{\ell}}{\mathcal{D}x^{\ell}} \ . \tag{3-24}$$

Se as relações (3-19) representam transformações infinitesimais de simetria, substituindo-as nas equações (3-23)e (3-24) e retendo termos até primeira ordem, obtemos:

$$\mathcal{L}(x+\delta x;\psi + \delta\psi;\ \psi_{,k} + \delta\psi_{,k})d(x') = \left[\mathcal{L}(x;\psi;\ \psi_{,k}) - \frac{\mathcal{D}(\delta\ \Omega^{k})}{\mathcal{D}x^{k}}\right]\ d(x)$$

que, integrada, nos fornece

$$\int_R \left\{\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x^k}\ \left[(\mathcal{L}\ \delta^k{}_{\ell} - \frac{\mathcal{D}\mathcal{L}}{\partial\psi^{\alpha}{}_{,k}}\ \psi^{\alpha}{}_{,\ell})\ \delta x^{\ell} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{\alpha}{}_{,k}}\ \delta\psi^{\alpha} + \delta\Omega^{k}\right] + \right. \tag{3-25}$$

$$\left. + [\mathcal{L}]_{\alpha}\ (\delta\psi^{\alpha} - \psi_{,\ell}{}^{\alpha}\ \delta x^{\tau})\right\}\ d(x) = 0 \ .$$

Considerando-se que (3-25) deve anular-se idênticamente para toda região R, o integrando se anula identicamente. Segue-se o teorema de conservação, se impusermos que as equações de movimento do sistema são deriváveis do princípio variacional, i.é., $[\mathcal{L}]_{\alpha} = 0$, (3-22). A equação de conservação resultante,

$$\frac{\mathscr{D}}{\mathscr{D}x^k}\left[(\mathscr{L}\delta^k{}_\ell - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^\alpha_{,k}}\psi^\alpha{}_{,\ell})\,\delta x^\ell + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi_{,k}^\alpha}\delta\psi^\alpha + \dot{\delta}\ \Omega^k\right] = 0\ , \qquad (3\text{-}26)$$

deve ser compatível com as equações lagrangeanas do movimento, e a cada transformação infinitesimal de simetria está associada uma relação particular de conservação. O conjunto de todas as transformações de simetria formando um grupo, encontramos os teoremas de conservação associados a tal grupo.

Para derivarmos as equações de conservação associadas ao grupo conforme restrito, escolhemos uma lagrangeana para um campo escalar não massivo. Lagrangeanas contendo termos de massa não são conforme-invariantes [1], embora seja possível separar uma parte que o seja, sob certas condições; por exemplo, a altas energias, o termo de massa pode ser desprezado.

As propriedades de transformação do campo (escalar) envolvido são definidas para as transformações (3-12) de maneira que a integral de ação seja invariante. Trabalhamos com a lagrangeana cinética $\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\ \phi^{,\mu}\ \phi_{,\mu}$. Para as transformações de Poincaré e de escala, $\delta\,\Omega^\mu = 0$, enquanto que para as transformações de especiais conformes, $\delta\ \Omega^\mu = -\ a^\mu\ \phi^2$.

a) *Transformações de translação*

Nesse caso,

$$x'^\mu = x^\mu + \alpha^\mu$$

$$\delta\phi(x) = 0$$

$$\delta\Omega^\mu = 0$$

A equação de conservação (3-26) se escreve:

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x^\mu}\left\{\left[-\frac{1}{2}\,\phi'^\alpha\,\phi_{,\alpha}\,\delta^\mu{}_\tau+\phi'^\mu\,\phi_{,\tau}\right]\alpha^\tau\right\}=0$$

Como os α^τ são arbitrários,

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x^\mu}\,T^\mu{}_\tau=0\ , \tag{3-27}$$

onde $T^\mu{}_\tau \equiv \phi'^\mu\,\phi_{,\tau}-\frac{1}{2}\,\phi'^\alpha\,\phi_{,\alpha}\,\delta^\mu{}_\tau$ é o tensor de energia-momento. A equação (3-27) representa a sua lei de conservação.

b) *Transformações de Lorentz*

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu{}_\nu\,x^\nu \qquad ,\varepsilon_{\mu\nu}=-\varepsilon_{\nu\mu}$$

$$\delta\phi(x)=0$$

$$\delta\Omega^\mu=0$$

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x^\mu}\left\{\left(-\frac{1}{2}\,\phi'^\alpha\,\phi_{,\alpha}\,\delta^\mu{}_\tau+\phi'^\mu\,\phi_{,\tau}\right)\varepsilon^{\tau\rho}\,x_\rho\right\}=0$$

ou,

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x^\mu}\left\{\left[T^\mu{}_\tau\;x_\rho-T^\mu{}_\rho\;x_\tau\right]\varepsilon^{\tau\rho}\right\}=0\ , \tag{3-28}$$

que expressa a conservação do momento angular:

$$M^{\mu}{}_{\tau\rho} \equiv T^{\mu}{}_{\tau}\, x_{\rho} - T^{\mu}{}_{\rho}\, x_{\tau} \ .$$

c) *Transformações de escala (dilatações)*

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \beta\, x^{\mu}$$

$$\delta\phi(x) = -\,\beta\, \phi(x)$$

$$\delta\Omega^{\mu} = 0$$

Temos:

$$\frac{\mathscr{D}}{\mathscr{D}x^{\mu}} \left\{ \left[-\frac{1}{2}\, \phi'^{\alpha}\, \phi_{,\alpha}\, \delta^{\mu}{}_{\tau} + \phi'^{\mu}\, \phi_{,\tau} \right] \beta\, x^{\tau} + \beta\, \phi'^{\mu}\, \phi \right\} = 0 \ . \qquad (3\text{-}29)$$

Com

$$S^{\mu} \equiv \phi'^{\mu}\, \phi + x^{\tau}\, (\phi'^{\mu}\, \phi_{,\tau} - \frac{1}{2}\, \phi'^{\alpha}\, \phi_{,\alpha}\, \delta^{\mu}{}_{\tau}) \ ,$$

podemos escrever (3-29) como

$$\frac{\mathscr{D}}{\mathscr{D}x^{\mu}}\, S^{\mu} = 0$$

d) *Transformações Especiais Conformes*

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} + a^{\mu}\, x^2}{1 + 2\, ax + a^2 x^2} \ , \quad x^2 = \eta_{\mu\sigma}\, x^{\mu}\, x^{\sigma}$$

$$\delta\phi = 2\, ax\, \phi(x)$$

$$\delta\Omega^{\mu} = -\, a^{\mu}\, \phi^2$$

Portanto,

$$\frac{\mathscr{D}}{\mathscr{D}x^{\mu}} \left\{ \left[-\frac{1}{2}\ \phi^{,\alpha}\ \phi_{,\alpha}\ \delta^{\mu}_{\ \tau} + \phi^{,\mu}\ \phi_{,\tau} \right] \left[a^{\tau}\ x^2 - 2\ x^{\tau}(a.x) \right] - \right.$$

$$\left. - 2(ax)\ \phi\ \phi^{,\mu} - a^{\mu}\ \phi^2 \right\} = 0\ ,$$

ou seja:

$$\frac{\mathscr{D}}{\mathscr{D}x^{\mu}} \cdot \{\ T^{\mu}_{\ \tau}(\delta^{\tau}_{\ \rho}\ \ X^2 - 2\ x^{\tau}\ x_{\rho})a^{\rho} - (2\phi^{,\mu}\ \phi\ x_{\rho} +$$

$$+ \delta^{\mu}_{\ \rho}\ \phi^2)a^{\rho}\ \} = 0\ , \qquad (3\text{-}30)$$

ou

$$\frac{\mathscr{D}}{\mathscr{D}x^{\mu}}\ A^{\mu}_{\ \rho} = 0\ ,$$

onde

$$A^{\mu}_{\ \rho} \equiv -\delta^{\mu}_{\ \rho}\ \phi^2 - 2\ x_{\rho}\ \phi^{,\mu}\ \phi - (2\ x^{\tau}\ x_{\rho} - \delta^{\tau}_{\ \rho}\ x^2)\ T^{\mu}_{\ \tau} .$$

As leis de conservação (3-29) e (3-30) não parecem ter nenhum significado físico simples. [17]

4) *VETORES DE KILLING*

Um vetor de Killing conforme ξ^{α} pode ser definido como um campo vetorial tal que, para qualquer geodésica nula com vetor tangente afim

u_α $(u^\alpha \; u_{\beta;\alpha} = 0)$, $\xi^\alpha u_\alpha$ é constante ao longo da geodésica [18].

Em particular, numa variedade 4-dimensional, com métrica $g_{\mu\nu}(x)$, uma solução da equação

$$\xi_{(\mu;\nu)}(x) = \frac{1}{2} \xi^\alpha{}_{;\alpha} g_{\mu\nu}(x) \qquad (3\text{-}31)$$

é um vetor de Killing conforme.

A equação (3-31) pode ser obtida da relação:

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = - \xi_{(\mu;\nu)} \qquad (3\text{-}32)$$

Numa transformação conforme (cf. 2-1)

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x) = e^{2\sigma(x)} g_{\mu\nu}(x) \simeq (1 + 2\sigma(x))g_{\mu\nu}(x) \quad .$$

Então

$$\xi_{(\mu;\nu)} = - 2\sigma(x) \; g_{\mu\nu}(x) \; , \qquad (3\text{-}33)$$

da qual obtemos

$$\sigma(x) = - \frac{1}{4} g^{\mu\nu}(x) \; \xi_{\mu;\nu}(x) \quad , \qquad (3\text{-}34)$$

e a equação (3-33) pode ser reescrita como:

$$\xi_{(\mu;\nu)}(x) = \frac{1}{2} \xi^\alpha{}_{;\alpha}(x) \; g_{\mu\nu}(x)$$

Particularizando para um espaço-chato, onde é sempre possível fazer-se um mapeamento tal que $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$, temos

$$\xi_{(\mu,\nu)} - \frac{1}{2} \xi^\alpha{}_{,\alpha} \eta_{\mu\nu} = 0 \qquad (3\text{-}35)$$

Uma possível solução dessa equação é

$$\xi^{\mu}(x) = \alpha^{\mu} + \beta x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} + a_{\alpha}(\eta^{\alpha\mu}\, x^2 - 2\, x^{\alpha}\, x^{\mu}) \ ,$$

exatamente os descriptores de uma transformação conforme no espaço chato, em termos de primeira ordem nos parâmetros, onde, como já vimos:

α^{μ} = parâmetros de translação

β = parâmetro de dilatação ou de escala.

$\varepsilon^{\mu}{}_{\nu}$ = parâmetros de rotação (grupo de Lorentz)

a^{μ} = parâmetros de aceleração (ou especial conforme).

A existência de vetores de Killing conformes em espaços chatos permite, mostrada a conexão íntima entre momentos de multipolo e o grupo conforme C_o, definir momentos de multipolo do campo gravitacional numa solução estática, assintoticamente chata, das equações de Einstein. Como êsse não é nosso objetivo no presente trabalho, citamos como referência o artigo de R. Geroch, Journal of Mathematical Physics, volume 11, número 6, junho de 1970.

Da expressão (3-34), para espaços chatos com métrica $\eta_{\mu\nu}$, obtemos que $\sigma(x)$ é função dos parâmetros de dilatação e de aceleração, explicitamente:

$$\sigma(x) = -\beta + 2a_{\alpha}\, x^{\alpha} \ , \qquad (3\text{-}36)$$

um resultado que será importante para futuras considerações.

Vejamos qual a modificação resultante na função $\sigma(x)$, quando nos afastamos ligeiramente do espaço-chato:

Expandindo a equação (3-33) em torno de um P = 0 e considerando um sistema de coordenadas tal que:

$$g_{\mu\nu}(0) = \eta_{\mu\nu}$$

$$g_{\mu\nu,\rho}(0) = 0$$

$$g_{\mu\nu,\rho\sigma}(0) = F(R_{\mu\nu\rho\sigma}) ,$$

onde $R_{\mu\nu\rho\sigma}(0)$ é a curvatura no ponto P = 0 e $F(R_{\mu\nu\rho\sigma})$ é linear no argumento, obtemos, retendo termos até derivadas de segunda ordem:

$$\xi_{(\mu,\nu)}(0) + \xi_{(\mu,\nu)}(0)\, x^\rho + \frac{1}{2}\, \xi_{(\mu,\nu)\rho\sigma}(0)\, x^\rho\, x^\sigma = -\, 2(\sigma(0) + \sigma_{,\rho}(0)\, x^\rho + \tag{3-37}$$

$$+ \frac{1}{2}\, \sigma_{,\rho\sigma}(0)\, x^\rho\, x^\sigma)(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu,\rho\sigma}(0)\, x^\rho\, x^\sigma\,)$$

Consideremos, ainda, que uma solução da equação (3-33) seja os descriptores do grupo conforme C_0 mais uma correção proporcional a termos de terceira potência em x:

$$\xi_\mu(x) = \alpha_\mu + \varepsilon_{\mu\nu}\, x^\nu + \beta\, g_{\mu\rho}\, x^\rho + a_\alpha(\delta^\alpha_{\ \mu}\, g_{\tau\lambda}\, x^\tau\, x^\lambda - 2\, x^\alpha\, g_{\mu\rho}\, x^\rho) +$$

$$+ C_{\mu\alpha}\, x^\alpha\, g_{\lambda\tau}\, x^\lambda\, x^\tau$$

Substituindo esta expressão em (3-37) e igualando termos de iguais potências em x, obtemos

$$2\beta\, \eta_{\mu\nu} = -\, 2\, \sigma(0)\, \eta_{\mu\nu}$$

$$-\, 4\, a_\rho\, \eta_{\mu\nu} = -\, 2\, \sigma_{,\rho}(0)\, \eta_{\mu\nu}$$

$$-\, \frac{1}{4}\, \beta\, F(R_{\mu\sigma\rho\nu})\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\, C^\mu_{\ \mu}\, \eta_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\, C_{(\sigma\rho)} = -\sigma_{,\rho\sigma}(0)$$

A expressão de $\sigma(x)$ em espaços ligeiramente curvos resulta proporcionál ã curvatura $R_{\mu\nu\rho\sigma}$:

$$\sigma(x) = - \beta + 2\, a_\rho\, x^\rho - \frac{1}{4}\, \beta\, F(R_{\mu\sigma\rho\nu})\, \eta^{\mu\nu}\, x^\rho\, x^\sigma +$$

$$- \frac{1}{2}\, C^\mu{}_\mu\, \eta_{\rho\sigma}\, x^\rho\, x^\sigma - \frac{1}{2}\, C_{(\sigma\rho)}\, x^\rho\, x^\sigma\,, \qquad (3\text{-}38)$$

com

$$C \equiv C^\mu{}_\mu = \frac{1}{3}\left(- \Box\sigma(0) + \frac{1}{4}\, \beta\, F(R_{\mu\sigma\rho\nu})\, \eta^{\mu\nu}\, \eta^{\rho\sigma}\right)$$

e

$$C_{(\rho\sigma)} = - 2\, \sigma_{,\rho\sigma}(0) + \frac{1}{2}\, \beta\, F(R_{\mu\sigma\rho\nu})\, \eta^{\mu\nu} - C\, \eta_{\rho\sigma}.$$

IV. O GRUPO CONFORME-TRANSFORMAÇÕES CONFORMES DA MÉTRICA

1) *O GRUPO EXTENDIDO CONFORME*

As transformações conformes são ativas (cf. cap. II), caracterizadas pelas transformações do tensor métrico tais que:

$$g'_{\mu\nu}(x) = e^{2\sigma(x)}\, g_{\mu\nu}(x) \qquad (4\text{-}1)$$

onde $\sigma(x)$ é uma função escalar diferenciável arbitrária.

Sob tais transformações, o elemento de linha não é invariante, mas varia como

$$ds'^2 = e^{2\sigma(x)}\, ds^2 \tag{4-2}$$

As transformações conformes, consideradas como transformações de gauge na métrica, formam um grupo, que denotaremos por Cg. Esse é o grupo conforme considerado por Schouten e Haantjes [4] e por Pauli [19] e que adotaremos aqui *. A totalidade das variedades diferindo uma das outras por elementos de Cg é chamada um espaço conforme. Elementos de linha $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu\, dx^\nu$, em tal espaço, não têm sentido absoluto, porque comparação de comprimento em diferentes pontos envolve a função $\sigma(x)$, embora a razão entre dois comprimentos infinitesimais, referidos ao mesmo ponto, seja bem definida.

---

* Um ponto de vista alternativo, mas equivalente, usualmente adotado para o caso do grupo Co, é considerar-se as transformações conformes como transformações de coordenadas que deixam inalterada a estrutura Minkowskiana da variedade (onde entendemos por estrutura Minskowskiana a condição $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}(x) = 0$). Nesse caso, $\sigma(x)$ depende dos parâmetros de aceleração e de dilatação de uma maneira bem definida (cf. (3-36)).

As transformações conformes da métrica, (4-1), mais as transformações que caracterizam a natureza tensorial de $g_{\mu\nu}(x)$:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta}(x), \tag{4-3}$$

sob transformações gerais de coordenadas

$$x'^{\mu} = h^{\mu}(x) \quad ,$$

com $h^{\mu}(x)$, função diferenciável e de jacobiano diferente de zero, podem ser reunidas num grupo de transformações gerais C. Chamaremos C o "grupo extendido conforme" [17].

Assim, quando estudarmos equações que são covariantes sob transformações gerais de coordenadas, será necessário somente verificar a covariância dessas equações sob o grupo Cg, para garantirmos a covariância sob C (conforme-covariância).

2) *VARIAÇÃO CONFORME DA MASSA*

Devido à variação da métrica (4-1), as geodésicas de um espaço Riemanniano não são conforme - invariantes, desde que os símbolos de Christoffel se transformam, sob o grupo Cg, como:

$$\overline{\{^{\mu}_{\alpha\beta}\}} = \{^{\mu}_{\alpha\beta}\} + \delta^{\mu}_{(\alpha}\, \sigma_{,\beta)} - g_{\alpha\beta}\, g^{\mu\rho}\, \sigma_{,\rho} \,. \tag{4-4}$$

Essa dificuldade foi resolvida por Weyl, em sua teoria da gravitação e do eletromagnetismo [3], introduzindo uma afinidade semi-métrica simétrica, conforme-invariante, por meio da condição:

$$g_{\mu\nu}(x)_{;\alpha} = A_\alpha(x)\ g_{\mu\nu}(x) \tag{4-5}$$

Esta condição não determina univocamente $g_{\mu\nu}(x)$ e $A_\alpha(x)$, devido ao fato de que, dado um par $(g_{\mu\nu}, A_\alpha)$, que satisfaça (4-5), existe uma infinidade de outros pares possíveis $(g'_{\mu\nu}(x), A'_\alpha(x))$ satisfazendo a mesma condição [21], desde que:

$$g'_{\mu\nu}(x) = e^{2\sigma(x)}\ g_{\mu\nu}(x) \tag{4-6a}$$

e

$$A'_\alpha(x) = A_\alpha(x) + \sigma_{,\alpha}(x)\ , \tag{4-6b}$$

para $\sigma(x)$ uma função escalar.

A afinidade semi-métrica simétrica da formulação de Weyl:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \{^{\mu}_{\alpha\beta}\} - \frac{1}{2}\left(\delta^\mu_{(\alpha}\, A_{\beta)} - A^\mu\, g_{\alpha\beta}\right)\ , \tag{4-7}$$

onde $\{^{\mu}_{\alpha\beta}\}$ são os símbolos de Christoffel de segunda espécie para a métrica $g_{\mu\nu}$, é invariante sob a passagem de um par de soluções da condição fundamental (4-5) para outro.

A primeira metade das transformações (4-6) representa exatamente a transformação conforme da métrica e obtemos, assim, uma afinidade conforme invariante considerando-se como objetos fundamentais a métrica $g_{\mu\nu}$ e o campo vetorial $A_\alpha(x)$, que se transforma segundo a expressão (4-6b). Na teoria de Weyl, A_α é interpretado como o potencial eletromagnético. Nessa teoria, deslocamentos paralelos de um vetor modificam seu comprimento. Seja V^μ as componentes contravariantes de um vetor e V_μ, as contravariantes;

seu comprimento é definido por:

$$\ell^2 \equiv V_\mu V^\mu = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu .$$

O deslocamento paralelo do vetor contravariante, $\delta V^\mu = 0$, não implica no deslocamento paralelo do correspondente vetor covariante, porque:

$$\delta V_\mu = \delta(g_{\mu\nu} V^\nu) = \delta g_{\mu\nu} V^\nu + g_{\mu\nu} \delta V^\nu$$
$$\delta V_\mu = V_\mu A_\lambda dx^\lambda$$

e a variação no comprimento será:

$$\delta\ell^2 = V^\mu \delta V_\mu = \ell^2 A_\lambda dx^\lambda .$$

Num espaço Riemanniano, $A_\lambda = 0$, e o deslocamento paralelo não modifica o comprimento de um vetor. Entretanto, mesmo na teoria de Weyl, vetores nulos permanecem nulos. A comparação de comprimentos, em diferentes pontos torna-se sem significado, embora deslocamentos infinitesimais no mesmo ponto possam ser comparados, como havíamos previamente notado.

Outras variações dessa teoria foram propostas, com $A_\alpha(x)$ interpretado como um objeto proporcional à métrica $g_{\mu\nu}(x)$. Para ilustrar, citamos o trabalho de T. Fulton, R. Rohrlich e L. Witten, Reviews of Modern Physics, 34, 3 (1962). É proposto o seguinte esquema para o estudo da invariância conforme de uma dada equação (C-invariância como a invariância: a) sob todas as transformações de coordenadas; b) sob todas as transformações conformes da métrica

$$g'_{\mu\nu}(x) = \phi(x)\, g_{\mu\nu}$$

e as transformações

$$k'_\mu = k_\mu + \partial_\mu \ln \phi ,$$

análogas às (4-6), com $\phi(x) = e^{2\sigma(x)}$ e $k_\mu = A_\mu(x)$):

1) A equação é suposta dada covariantemente no espaço de Miskowski (espaço chato 4-dimensional, onde é sempre possível definir-se afinidades nulas sobre todo o espaço).

2) Generaliza-se para uma equação covariante num espaço $\mathcal{A}$, com conexão simétrica e tensor métrico simétrico real. A generalização é efetuada trocando-se derivadas em relação às coordenadas por derivadas covariantes (construídas com as afinidades de $\mathcal{A}$) e as derivadas em relação a parâmetros por derivadas covariantes em relação a esses parâmetros, i.é:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \to \nabla_\mu \; ; \quad \frac{d}{d} \to \frac{\delta}{\delta} = \frac{dx^\mu}{d} \nabla_\mu \; .$$

Em particular, toma-se o espaço $\mathcal{A}$ como sendo de Weyl, definido como um espaço dotado de tensor métrico simétrico, real e uma conexão simétrica semimétrica:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \{^{\mu}_{\alpha\beta}\} - \frac{1}{2} \left(\delta^\mu{}_{(\alpha} k_{\beta)} - k^\mu g_{\alpha\beta}\right) \; . \qquad (4\text{-}8)$$

Note-se que, se $k_\mu = 0$, o espaço de Weyl se reduz a um espaço de Riemann. Se k_μ for o gradiente de uma função escalar, será conforme a um espaço de Riemann, no sentido de que a afinidade de (Weyl) será o símbolo de Christoffel de segunda espécie construido com um tensor métrico

$$g'_{\mu\nu} = \phi \, g_{\mu\nu} \; .$$

A relação entre $k_\mu(x)$ e a métrica é obtida considerando-se a derivada covariante (construida com as afinidades (4-8)) do determinante da métrica:

$$\nabla_\mu = \partial_\mu g - 2\,\Gamma_\mu g$$

ou, formalmente,

$$\nabla_\mu \ln \sqrt{|g|} = \partial_\mu \ln \sqrt{|g|} - \Gamma_\mu .$$

Com

$$\Gamma_\mu \equiv \Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} = \partial_\mu \ln \sqrt{|g|} - 2\, k_\mu ,$$

obtém-se

$$k_\mu = \frac{1}{4} \nabla_\mu \ln |g| . \tag{4-9}$$

3) Estuda-se a invariância da equação resultante sob C_g. Se a invariância da equação covariante em W é obtida sob C_g, a invariância sob o grupo C está assegurada.

Seja a equação de Lorentz, num espaço de Minkowiski:

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} = \frac{e}{m} F^{\mu\nu} v_\nu , \tag{4-10}$$

onde e é a carga e m, a massa de repouso de uma partícula cuja linha de universo tem por tangente

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} ,$$

$F_{\mu\nu}$ = tensor do campo eletromagnético produzido por uma dada configuração de cargas. Generalizando para um espaço de Weyl:

$$\frac{\delta v^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \nabla_\alpha v^\mu = \frac{dx^\alpha}{d\tau} (\partial_\alpha v^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} v^\beta) ,$$

com $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ as afinidades de Weyl (4-8).

Então,

$$\frac{\delta v^{\mu}}{d\tau} = \frac{dv^{\mu}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\, v^{\alpha}\, v^{\beta} \tag{4-11}$$

A equação (4-10) se torna, em W:

$$\frac{\delta v^{\mu}}{d\tau} = \frac{e}{m}\, g^{\mu\alpha}\, F_{\alpha\beta}\, v^{\beta}\ . \tag{4-12}$$

Definindo um tensor de Weyl de peso n como um tensor de Riemann que se transforma sob C_g como:

$$T'(x) = \phi^{n}\, T(x)\ ,$$

v^{μ} é um tensor de Weyl de peso - 1/2, desde que, sob C_g:

$$v'^{\mu}(x) = \frac{dx^{\mu}}{d\tau'} = \phi^{-1/2}\, v^{\mu}\,(x)\ .$$

Como ϕ é um escalar:

$$\frac{\delta v'^{\mu}(x)}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\phi}}\, \frac{\delta v^{\mu}}{d\tau} + v^{\mu}\, \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{\phi}}\right)$$

e a equação (4-12) pode ser escrita como:

$$\frac{\delta v^{\mu}}{d\tau} - v^{\mu}\, \frac{d}{d\tau}\, \ln\sqrt{\phi} = \frac{1}{\phi}\, \frac{e}{m}\, g^{\mu\alpha}\, F_{\alpha\beta}\, v^{\beta} \tag{4-13}$$

para $F_{\alpha\beta}$ considerado como um tensor de Weyl de peso zero e

$$g'^{\mu\alpha}(x) = \frac{1}{\phi}\ g^{\mu\alpha}(x)\ .$$

Obviamente, a equação (4-11) não é invariante em forma. Para obter-se a referida forma-invariância, propõe-se que a quantidade fundamental da equação seja uma densidade vetorial de peso 1/4, e W_0 (sob C_g, n=0), que denotaremos por b^μ:

$$b^\mu \equiv |g|^{1/8}\ v^\mu\ ,$$

$$|g| = \det g_{\mu\nu}(x)\ .$$

Propõe-se então, a seguinte equação em W:

$$\frac{\delta b^\mu}{d\tau} = \frac{e}{m}\ g^{\mu\alpha}\ F_{\alpha\beta}\ b^\beta \qquad (4\text{-}14)$$

Embora (4-14) seja covariante sob transformações gerais de coordenadas (ambos os membros da equação são densidades vetoriais de peso 1/4), a invariância sob C_g só é assegurada quando se assume que a massa seja um escalar de Weyl de peso - 1/2, i.é:

$$m' = \frac{m}{\sqrt{\phi}} \qquad (4\text{-}15)$$

quando se tem, em ambos os membros, densidades vetoriais de Weyl de peso - 1/2.

O carater $W_{-1/2}$ da massa foi proposto primeiramente por Schouten e Haantjes [4]. Excluida a transformação (4-15) da massa, a equação de Lorentz não é conforme invariante. O significado físico de tal transformação deve ser extraido de um exame detalhado das transformações conformes. Considerando-se o grupo restrito C_o, tais transformações levam uma partícula de repouso para aceleração uniforme. Esse movimento é equivalente à presença de um campo gravitacional constante e homogêneo. Quando m é considerada a energia de repouso, mais do que a massa, deve conter a energia potencial associada com a posição da partícula nesse campo. Assim, a transformação conforme corresponderia a uma mudança do campo aparente de forças atuando sôbre a partícula e a transformação da massa representaria a correspondente transformação da energia de repouso, que leva em consideração a mudança na energia potencial. Como ϕ é a deformação local do campo, m deve depender de ϕ. A discussão de massa na Relatividade Geral não é tão simples, desde que o conceito de energia total da partícula (qualquer que seja o seu significado em Relatividade Geral) seria mais importante do que a massa. Uma realização possível para a massa, que se transforme de acôrdo com (4-15) será

$$m = \frac{m_{(o)}}{|g|^{1/8}} \tag{4-16}$$

onde m_o = constante. Sob C_g:

$$m' = \frac{m_o}{\sqrt{\phi}\ |g|^{1/8}} .$$

Uma realização qualquer da massa, que se transforme como um escalar de Weyl de pêso -1/2 deve depender, portanto, das coordenadas. No caso particular do grupo conforme restrito C_o, em que $\phi(x)$ depende dos parâmetros de aceleração e de dilatação, que podem assumir um conjunto contínuo de va lores, obtemos uma representação da massa que depende de um conjunto de valores contínuos, implicando em valores contínuos da massa. Essa conclusão pode ser feita diretamente a partir da análise do espectro dos operadores associados aos geradores das transformações conformes (3-16). Na representação de coordenadas, o operador de transformação de escala é representado por:

$$- i\vec{x}\cdot\nabla = - i r \frac{\partial}{\partial r} .$$

Este operador não é hermitiano, mas

$$S = -i \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{3}{2} \right\}$$

o é. As autofunções de S associadas aos autovalores s são:

$$u_s(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{r^3}} \exp \{is \ln r\} .$$

Elas formam um conjunto ortonormal e completo, tal que:

$$\int_0^\infty u_{s'}(r)\, u_s(r)\, r^2\, dr = \delta(s-s')$$

$$\int_{-\infty}^\infty u_s(r')\, u_s(r) ds = \frac{1}{r^2}\, \delta(r-r') .$$

O domínio de s é o domínio de todos os números reais. Numa tentativa de caracterização das partículas elementares pelos autovalores de S, as massas das partículas poderiam, então, assumir valores contínuos. Nessa conexão, diz-se que o grupo C_0 não é um bom grupo de simetrias, no sentido usual, para a física de partículas a baixas energias, porque o espectro atômico é descontínuo. A simetria conforme poderia verificar-se a altas energias, quando a energia de repouso das partículas tornam-se negligenciáveis em relação à sua energia cinética, [5]

$$p^2 c^2 >> m^2 c^4$$

Em teoria clássica, serie permissível uma transformação de massa análoga a (4-15), pensando-se na correção conforme à massa como uma interação escalar atuando num dado sistema físico, ou seja, em termos de integral de ação:

$$S_{total} = \int m \, ds + \int \alpha \, \phi \, ds = \int m_{ef} \, ds$$

onde $m_{ef} = (m + \alpha\phi)$ fosse a massa efetiva do sistema, que poderia, eventualmente, assumir valores contínuos. Uma interpretação semelhante é dada por Rohrlich, Fulton e Witten, no trabalho prèviamente citado. Numa teoria quântica, tal interpretação não é possível. Devido às dificuldades de interpretação física de uma variação na massa, achamos interessante procurar uma forma possível de se obter equações de movimento que sejam invariantes sob o grupo conforme, tal que a massa seja também conforme-invariante.

3) *INTRODUÇÃO DE UMA MÉTRICA CONFORME-INVARIANTE*

Para obter esse tipo de formalismo, modificamos a forma da métrica, ao invés de modificar a forma da afinidade. Para ésta modificação em $g_{\mu\nu}(x)$, xão, diz-se que o grupo C_0 não é um bom grupo de simetrias, no sentido usual, para a física de partículas a baixas energias, porque o espectro atômico é descontínuo. A simetria conforme poderia verificar-se a altas energias, quando a energia de repouso das partículas tornam-se negligenciáveis em relação à sua energia cinética, [5]

$$p^2 c^2 >> m^2 c^4$$

Em teoria clássica, serie permissível uma transformação de massa análoga a (4-15), pensando-se na correção conforme à massa como uma interação escalar atuando num dado sistema físico, ou seja, em termos de integral de ação:

$$S_{total} = \int m \, ds + \int \alpha \, \phi \, ds = \int m_{ef} \, ds$$

onde $m_{ef} = (m + \alpha\phi)$ fosse a massa efetiva do sistema, que poderia, eventualmente, assumir valores contínuos. Uma interpretação semelhante é dada por Rohrlich, Fulton e Witten, no trabalho prèviamente citado. Numa teoria quântica, tal interpretação não é possível. Devido às dificuldades de interpretação física de uma variação na massa, achamos interessante procurar uma forma possível de se obter equações de movimento que sejam invariantes sob o grupo conforme, tal que a massa seja também conforme -invariante.

3) *INTRODUÇÃO DE UMA MÉTRICA CONFORME-INVARIANTE.*

Para obter esse tipo de formalismo, modificamos a forma da métrica, ao invés de modificar a forma da afinidade. Para esta modificação em $g_{\mu\nu}(x)$, seguimos uma ideia de Mandelston[22] que mostra como definir quantidades gauge-invariantes com um campo de matéria interagindo com o campo eletromagnético. As desvantagens das formulações correntes da eletrodinâmica quântica, que usam os potenciais como variáveis fundamentais e, portanto, dependem de gauges particulares (como, por exemplo, a gauge de Coulombo ou de Lorentz), não estão presentes numa formulação em termos de operadores que se mantêm inalterados por transformações de gauge. Evita-se, dessa maneira, a introdução de estados não físicos normalizados em relação a uma métrica não definida, exigida pela quantização na gauge de Lorentz. Ou, no processo alternativo da gauge de Coulomb, o uso de operadores cujas gauge e Lorentz invariâncias não são manifestamente mantidas.

Para o campo eletromagnético interagindo com um campo escalar, as variáveis gauge-invariantes do campo material são definidas por:

$$\Phi(x,P) = \phi(x) \exp \{-ie \int_{-\infty}^{x} A_\mu(\xi)\, d\xi^\mu \} \tag{4-17}$$

$$\Phi^*(x,P) = \phi^*(x) \exp \{ie \int_{-\infty}^{x} A_\mu(\xi)\, d\xi^\mu \} .$$

As quantidades Φ dependem não somente do ponto $\underline{x}$, mas também da trajetória P, definido pela integral à direita de (4-17).

As equações de movimento são construidas com a Lagrangeana gauge-invariante e Lorentz covariante

$$\mathcal{L} = -\{\partial_\mu \Phi^*(x)\} \{\partial_\mu \Phi(x)\} - m^2 \Phi^*\Phi - \frac{1}{4} \{ F_{\mu\nu}(x)\}^2 ,$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \quad \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$$

e

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} - i\, e\, A_\mu$$

As regras de comutação entre os operadores gauge-invariantes são determinadas pela maneira usual, levando a uma quantização do campo eletromagnético que depende somente de quantidades gauge-independentes.

Nesse trabalho, consideramos a variação conforme na métrica como uma transformação de gauge em $g_{\mu\nu}(x)$, e procuramos uma redefinição de $g_{\mu\nu}$ de tal maneira que ela se torne gauge-invariante.

Com esse objetivo, definimos (por conveniência, tomamos um sistema de coordenadas cartesiano):

$$G_{\mu\nu}(x,P) = g_{\mu\nu}(x) \exp\left\{ -2 \int_{x_{in}}^{x} k_\alpha(\xi)\, d\xi^\alpha \right\} , \qquad (4\text{-}18)$$

onde a integração é feita sôbre uma trajetória P, cujo limite inferior é x_{in}, sem cruzar nenhuma linha de singularidade para $g_{\mu\nu}(x)$. Tomamos $x^o_{in} < \xi^o < x^o$, desde que os efeitos de propagação do campo vetorial na variedade obedecem à lei da causalidade. $k_\alpha(x)$, em (4-18) é definido como um quadrivetor sob transformações gerais de coordenadas e varia sob C_g como:

$$k'_\alpha(x) = k_\alpha(x) + \sigma_{,\alpha}(x) \qquad (4\text{-}19)$$

É interessante notar que estas duas imposições simultâneas não permitem uma representação direta para k_α em termos da métrica $g_{\mu\nu}$ e de suas derivadas $g_{\mu\nu,\sigma}$. Realmente, podemos construir as quantidades:

$$k_\mu = \frac{1}{6} g^{\alpha\beta}(g_{\alpha\beta,\mu} - g_{\beta\mu,\alpha})$$

que obedecem à lei de transformação (4-19), mas não se transformam como um quadrivetor sob transformações de coordenadas curvilíneas. Isto implica que devemos conservar $k_\alpha(x)$ como um conjùnto de variáveis independentes, da mesma ordem fundamental que $g_{\mu\nu}(x)$. Uma formulação conforme invariante, como a que desejamos introduzir, necessitará dos dois tipos de quantidades.

$G_{\mu\nu}(x, P)$, definida por (4-18) será conforme-invariante se impusermos a seguinte condição na função de transformação $\sigma(x)$:

$$\sigma(x_{in}) = 0 \quad (4\text{-}20)$$

porque, então:

$$G'_{\mu\nu}(x,P) = g_{\mu\nu}(x)\, e^{2\sigma(x)} \exp\left\{-2 \int_{x_{in}}^{x} (k_\rho + \sigma_{,\rho})\, d\xi^\rho = \right.$$
$$= G_{\mu\nu}(x,P) \ .$$

No entanto, é importante notar que nosso formalismo não absorve as transformações de escala (dilatação) do espaço-tempo chato. Temos, nesse caso:

$$G_{\mu\nu}(x,P) = \eta_{\mu\nu} \exp\left\{-2 \int_{x_{in}}^{x} k_\rho \, d\xi^\rho \right\} \quad (4\text{-}21)$$

que, sob o grupo C_g se transforma como:

$$G'_{\mu\nu}(x,P) = \eta_{\mu\nu}\, e^{2\sigma(x_{in})} \ .$$

Mas, no espaço-chato, pela (3-36)

$$\sigma(x) = - \beta + 2\, a_\alpha\, x^\alpha \ .$$

Num ponto fixo qualquer, que pode, eventualmente, ser tomado como $x_{in} = 0$,

$$\sigma(x_{in}) = -\beta$$

Dessa maneira, a métrica (4-21) somente é invariante para as transformações conformes especiais que não contenham dilatações. Concluimos que a introdução do campo vetorial $k_\alpha(x)$ não absorve as transformações de escala. Essa impossibilidade de se obter uma métrica invariante sob C_0, o grupo especial conforme, que é o primeiro passo para a formulação de equações de movimento com a massa como um invariante conforme, leva-nos a lembrar a suposição geral que a C_0-invariância somente é obtida ou:

a) considerando-se a transformação na massa (4-15), com as inerentes dificuldades de interpretação física; ou,

b) a altas energias, quando a massa de repouso é negligenciável e se pode contornar a implicação de valores contínuos da massa determinados pelo espectro contínuo do operador do espaço de Hilbert associado ao gerador de transformações de escala.

Como veremos no que se segue, uma massa escalar conforme-invariante é somente realizável em espaços curvos satisfazendo a condição (4-20).

Embora tenhamos usado um sistema cartesiano de coordenadas para a definição de $G_{\mu\nu}(x,P)$ e das condições limites, notamos que isso pode ser feito em qualquer sistema de coordenadas, desde que impusemos que $K_\mu(x)$ seja um quadri-vetor. Denotando por $\phi(x,P)$ o valor da integral presente em (4-18), temos:

$$G_{\mu\nu}(x,P) = g_{\mu\nu}(x)\ f(x,P) \ ,$$
$$f(x,P) = \exp\ \{-2\ \phi(x,P)\} \ .$$

Sob uma transformação para um sistema curvilíneo de coordenadas, obtemos:

$$G'_{\mu\nu}(x',P') = g'_{\mu\nu}(x')\, f'(x',P') = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\, g_{\alpha\beta}(x)\, f(x,P) =$$

$$= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\, G_{\alpha\beta}(x,P)\,.$$

A integração em (4-18) dependerá da escolha da trajetória, em cada sistema de coordenadas fixo. Considere-se duas trajetórias P_1 e P_2 que coincidem em todos os pontos, exceto em algum ponto $\bar{x}$, onde diferem por um pequeno círculo. Chamando a área desse círculo infinitesimal fechado por $\sigma^{\alpha\beta}$, obtemos pelo teorema de Stockes:

$$\delta \int k\rho(\xi)d\xi^{\rho} = \int_{P_2} k_{\rho}\, d\xi^{\rho} - \int_{P_1} k\rho\, d\xi^{\rho} \equiv \oint_{C} k_{\rho}(\xi)d\xi^{\rho}$$

$$\oint_{C} k_{\rho}(\xi)d\xi^{\rho} = \int_{S} (k_{\rho,\sigma} - k_{\sigma,\rho})d\, S^{\rho\sigma} \underset{\substack{\text{teorema} \\ \text{do valor médio}}}{=} k_{[\rho,\sigma]}(\bar{x})\sigma^{\rho\sigma} \quad ,$$

onde C = contôrno em $\bar{x}$

S = área do contôrno.

Portanto:

$$G_{\mu\nu}(x, P_2) = G_{\mu\nu}(x, P_1) - 2\, G_{\mu\nu}(x, P_1)\, k_{[\alpha,\beta]}\, (\bar{x})\, \sigma^{\alpha\beta} \quad , \tag{4-23}$$

onde

$$k_{[\alpha,\beta]} = k_{\alpha,\beta} - k_{\beta,\alpha} \quad . \tag{4-24}$$

Uma variação infinitesimal da trajetória provoca, portanto, uma variação $\delta_{\overline{x}}\, G_{\mu\nu}(x,P)$, onde

$$\delta_{\overline{x}}\, G_{\mu\nu}(x,P) = -\,2\, G_{\mu\nu}(x,P)\; k_{[\alpha,\beta]}(\overline{x})\; \sigma^{\alpha\beta}$$

Haverá independência da trajetória, se $k_\alpha(x)$ for o gradiente de uma função escalar. Entretanto, não imporemos nenhuma forma particular para o campo vetorial.

4) *DERIVADAS CONFORME-INVARIANTES*

As derivadas de $G_{\mu\nu}$ são dadas por:

$$\partial_\mu\, G_{\alpha\beta}(x,P) = \lim_{\Delta x^\mu \to 0} \frac{G_{\alpha\beta}(x^\mu + \Delta\, x^\mu,\, \overline{x}, P + dP) - G_{\alpha\beta}(x,P)}{\Delta x^\mu}$$

onde indicamos por $\overline{x}$ o conjunto restante de variáveis que são consideradas fixas; a variação na trajetória P sendo gerada pela variação Δx^μ, na coordenada x^μ. Pode-se mostrar que esta variação na trajetória tende a zero, no limite $\Delta x^\mu \to 0$, de maneira que podemos definir as derivadas de $G_{\mu\nu}$ na forma usual:

$$\partial_\mu\, G_{\alpha\beta}(x,P) = \lim_{\Delta x^\mu \to 0} \frac{G_{\alpha\beta}(x^\mu + \Delta x^\mu,\, \overline{x}, P) - G_{\alpha\beta}(x,P)}{\Delta x^\mu}$$

que nos leva a:

$$\partial_\mu\, G_{\alpha\beta}(x,P) = e^{-2\int_{x_{in}}^{x} k_\rho\, d\xi^\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - 2\, k_\mu \right) g_{\alpha\beta}(x) \qquad (4\text{-}25)$$

Notamos que, sob uma transformação conforme, as derivadas (4-25) são invariantes, i.é:

$$(\partial_\mu G_{\alpha\beta}(x,P))' = \partial_\mu G_{\alpha\beta}(x,P)$$

Isto mostra explicitamente que os símbolos de Christoffel de primeira espécie, construindo com $G_{\alpha\beta}$ x,P), são conforme-invariantes:

$$\{\rho,\sigma\nu\} \quad (x,P) = \frac{1}{2} \{\partial_\sigma G_{\rho\nu}(x,P) + \partial_\nu G_{\rho\sigma}(x,P) - \partial_\rho G_{\sigma\nu}(x,P)\} \qquad (4\text{-}26)$$

As quantidades $\{\rho,\sigma\nu\}$ dependem da escolha da trajetória P. Entretanto, os símbolos de Christoffel de segunda espécie:

$$\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = G^{\mu\rho}(x,P) \ \{\rho,\nu\sigma\}(x,P) \qquad (4\text{-}27)$$

são também conforme-invariantes e independem de trajetória, desde que eles podem ser escritos inteiramente em termos de quantidades independentes de trajetória:

$$\Gamma^\mu_{\nu\sigma}(x) = \frac{1}{2} g^{\mu\rho}(x) \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma} - 2\ k_\sigma\right) g_{\rho\nu}(x) + \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} - 2\ k_\nu\right) g_{\rho\sigma}(x) + \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho} - 2\ k_\rho\right) g_{\sigma\nu}(x)\right] \qquad (4\text{-}28)$$

Para a definição de $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$ usamos a convenção de que o índice tensorial de qualquer quantidade dependente de trajetória, por exemplo, $\phi_\rho(x,P)$ é levantada (ou abaixada) por $G^{\lambda\rho}$ ($G_{\lambda\rho}$) associada à mesma trajetória:

$$\phi^\lambda(x,P) = G^{\lambda\rho}(x,P)\ \phi_\rho(x,P)$$

Em particular,

$$G^{\lambda\rho}(x,P)\ G_{\rho\sigma}(x,P) = g^{\lambda\rho}(x)\ g_{\rho\sigma}(x) = \delta^{\lambda}{}_{\sigma},$$

mas

$$G^{\lambda\rho}(x,P')\ G_{\rho\sigma}(x,P) = \delta^{\lambda}{}_{\sigma}\ (1 - 2\ k_{[\tau,\alpha]}(\bar{x})\ \sigma^{\tau\alpha})$$

se

$$P' = P + \delta P$$

Em geral, todas as quantidades conforme-invariantes independentes de trajetórias são equivalentes aos correspondentes objetos na teoria de Weyl. Por exemplo, a afinidade $\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}$ é semelhante à afinidade de Weyl. A diferença é que, agora $\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}$ é o símbolo de Christoffel de segunda espécie para $G_{\mu\nu}$ e seu recíproco. Esta interpretação não é obtida na geometria de Weyl. Por outro lado, objetos como $G_{\mu\nu}(x,P)$ e $\{\mu,\nu\rho\}$ (x,P) que são conforme-invariantes, mas dependem da trajetória P, não existem na formulação de Weyl. Como se mostrará, a seguir, é exatamente a existência de tais objetos que permitirão uma formulação das equações de movimento numa forma conforme-invariante, sem se requerer qualquer transformação na massa de repouso das partículas.

A ordem em que as derivadas conforme-invariantes aparecem não pode ser trocada. Um cálculo direto mostra que:

$$(\partial_\mu\ \partial_\nu - \partial_\nu\ \partial_\mu)\ G_{\alpha\beta}\ (x,P) = 2\ k_{[\mu,\nu]}\ (x)\ G_{\alpha\beta}(x,P) \quad (4\text{-}29)$$

O tensor à direita da equação (4-29) é um tensor de 4ª ordem, conforme invariante.

Vimos que $\partial_\rho\ G_{\alpha\beta}(x,P)$ é invariante sob C_g; entretanto, não é um tensor de terceira ordem em relação a transformação curvilínea de coordenadas. Para obter um tensor conforme-invariante de 3ª ordem a partir de $\partial_\rho\ G_{\alpha\beta}(x,P)$, introduzimos as derivadas covariantes conforme-invariantes

$$D_\rho\ G_{\alpha\beta}(x,P) = \partial_\rho\ G_{\alpha\beta}(x,P) - \Delta^\lambda_{\alpha\rho}(x,P)\ G_{\lambda\beta}(x,P) - \Delta^\lambda_{\beta\rho}(x,P)\ G_{\alpha\lambda}(x,P) \,, \tag{4-30}$$

onde $\Delta^\lambda_{\alpha\rho}$ é a correspondente afinidade, que, por definição, deve ser conforme invariante. Impomos a condição:

$$D_\rho\ G_{\alpha\beta}(x,P) = 0 \tag{4-31}$$

Para outra trajetória $P' = P + \delta P$,

$$D_\rho\ G_{\alpha\beta}(x,P + \delta P) = \partial_\rho\ G_{\alpha\beta}(x,P + \delta P) - \Delta^\lambda_{\alpha\rho}(x,\ P + \delta P)\ G_{\lambda\beta}(x,P + \delta P) - \Delta^\lambda_{\beta\rho}(x,P + \delta P)\ G_{\alpha\lambda}(x,P + \delta P)$$

$$D_\rho\ G_{\alpha\beta}(x,P + \delta P) = \partial_\rho\ G_{\alpha\beta}(x,P) - 2\ k_{[\tau,\sigma]}(\overline{x})\sigma^{\tau\sigma}\ \partial_\rho\ G_{\alpha\beta}(x,P) - \Delta^\lambda_{\alpha\rho}(x,P + \delta P) \left[G_{\lambda\beta}(x,P) - 2\ G_{\lambda\beta}(x,P)\ k_{[\tau,\sigma]}(x)\sigma^{\tau\sigma}\right] - \Delta^\lambda_{\beta\rho}(x,P + \delta P) \left[G_{\alpha\lambda}(x,P) - 2\ G_{\alpha\lambda}(x,P)\ k_{[\tau,\sigma]}(x)\sigma^{\tau\sigma}\right]$$

Como, para qualquer escolha da afinidade, nós temos:

$$\Delta^\lambda_{\rho\beta}(x,P + \delta P) = \Delta^\lambda_{\rho\beta}(x,P) + \delta\ \Delta^\lambda_{\rho\beta}(x,\ \overline{x}) \,,$$

obtemos, em termos de primeira ordem nas variações:

$$D_\rho\, G_{\alpha\beta}(x,P+\delta P) = D_\rho\, G_{\alpha\beta}(x,P) - 2\, k_{[\tau,\sigma]}(\bar{x})\; D_\rho\, G_{\alpha\beta}(x,P) +$$

$$- \delta\Delta^{\lambda}_{\alpha\rho}(x,\bar{x})\; G_{\lambda\beta}(x,P) - \delta\Delta^{\lambda}_{\beta\rho}(x,\bar{x})\; G_{\alpha\lambda}(x,P)$$

Então, a condição (4-31) manter-se-á independente de trajetória somente se:

$$\delta\, \Delta^{\lambda}_{\alpha\rho}(x,\bar{x}) = 0$$

ou seja:

$$\Delta^{\lambda}_{\alpha\rho} = \Delta^{\lambda}_{\alpha\rho}(x) \qquad (4\text{-}32)$$

A afinidade que se obtem das condições (4-31) e (4-34) é o símbolo de Christoffel de segunda espécie, calculado para $G_{\mu\nu}(x,P)$ e seu recíproco:

$$\Delta^{\lambda}_{\alpha\rho}(x) = \Gamma^{\lambda}_{\alpha\rho}(x) \qquad (4\text{-}33)$$

5) *O TENSOR DE CURVATURA CONFORME-INVARIANTE E AS IDENTIDADES CONTRAÍDAS DE BIANCHI*

O tensor de curvatura conforme-invariante associado a $G_{\mu\nu}(x,P)$ é

$$\mathbb{R}^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\sigma\, \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} - \partial_\rho\, \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\, \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\, \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho}\ . \qquad (4\text{-}34)$$

(4-34) independe de trajetória e pode ser expresso em função do tensor de Riemann-Christoffel e de $k_\mu(x)$:

$$\mathbb{R}^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} - \delta^{\mu}_{\nu}\, \phi_{\rho\sigma} + (\delta^{\mu}_{\sigma}\, k_{\nu;\rho} - \delta^{\mu}_{\rho}\, k_{\nu;\sigma}) +$$

$$+ (g_{\nu\rho}\, k^{\mu}{}_{;\sigma} - g_{\nu\sigma}\, k^{\mu}{}_{;\rho}) + (\delta^{\mu}_{\sigma}\, k_{\rho} - \delta^{\mu}_{\rho}\, k_{\sigma})\, k_{\nu} + (\delta^{\mu}_{\rho}\, g_{\nu\sigma} + \qquad (4\text{-}35)$$

$$- \delta^{\mu}_{\sigma}\, g_{\nu\rho})\, k_{\tau}\, k^{\tau} + (g_{\nu\rho}\, k_{\sigma} - g_{\nu\sigma}\, k_{\rho})\, k^{\mu} ,$$

onde

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \{^{\mu}_{\nu\rho}\}_{,\sigma} - \{^{\mu}_{\nu\sigma}\}_{,\rho} + \{^{\lambda}_{\nu\rho}\}\{^{\mu}_{\lambda\sigma}\} - \{^{\lambda}_{\lambda\sigma}\}\{^{\mu}_{\lambda\rho}\} ,$$

construindo com os símbolos de Christoffel de segunda espécie para a métrica $g_{\mu\nu}(x)$, e

$$\varphi_{\mu\nu} \equiv k_{\mu,\nu} - k_{\nu,\mu} . \qquad (4\text{-}36)$$

O tensor de Ricci, obtido por contração dos índices μ e σ do tensor $\mathbb{R}^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}$, pode ser escrito como:

$$\mathbb{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + 2\, \phi_{\mu\nu} + k_{\mu;\nu} + k_{\nu;\mu} + g_{\nu\mu}\, k^{\sigma}{}_{;\sigma} + \qquad (4\text{-}37)$$

$$+ 2\, k_{\mu}\, k_{\nu} - 2\, g_{\mu\nu}\, k_{\sigma}\, k^{\sigma} ,$$

$R_{\mu\nu}$ sendo o tensor de Ricci associado à métrica $g_{\mu\nu}(x)$. Notamos que $\mathbb{R}_{\mu\nu}$ pode ser decomposto numa parte simétrica e numa antissimétrica,

$$\mathbb{R}_{\mu\nu} = \mathbb{R}_{\underline{\mu\nu}} + \mathbb{R}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} , \qquad (4\text{-}38)$$

com

$$\mathbb{R}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = 2\, \phi_{\mu\nu}$$

Da relação

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\, G_{\alpha\beta}(x,P) = 0 ,$$

obtemos, após um cálculo direto:

$$\mathbb{R}_{\alpha\beta\mu\nu} + \mathbb{R}_{\beta\alpha\mu\nu} = -2\, \varphi_{\mu\nu}\, G_{\alpha\beta}(x,P) . \qquad (4\text{-}39)$$

O tensor $\mathbb{R}_{\alpha\beta\mu\nu} = G_{\alpha\lambda}\mathbb{R}^{\lambda}{}_{\beta\mu\nu}$ não tem as mesmas simetrias que o correspondente tensor de Riemann-Christoffel - é antissimétrico somente no último par de índices e assimétrico em relação ao primeiro par, isto é:

$$\mathbb{R}_{\underline{\alpha\beta}\mu\nu} = \frac{1}{2}\,(\mathbb{R}_{\alpha\beta\mu\nu} + \mathbb{R}_{\beta\alpha\mu\nu}) = -\,\phi_{\mu\nu}\, G_{\alpha\beta}(x,P)$$

$$\mathbb{R}_{\underset{\vee}{\alpha\beta}\mu\nu} = \frac{1}{2}\,(\mathbb{R}_{\alpha\beta\mu\nu} - \mathbb{R}_{\beta\alpha\mu\nu}) = U_{\alpha\beta\mu\nu} \neq 0$$

$$\mathbb{R}_{\alpha\beta\underset{\vee}{\mu\nu}} = 2\mathbb{R}_{\alpha\beta\mu\nu} .$$

As afinidades (4-28) sendo simétricas, as identidades de Bianchi são verificadas:

$$D_\sigma \mathbb{R}^{\tau}{}_{\mu\nu\rho} + D_\rho \mathbb{R}^{\tau}{}_{\mu\sigma\nu} + D_\nu \mathbb{R}^{\tau}{}_{\mu\rho\sigma} \equiv 0 . \qquad (4\text{-}40)$$

Na (4-40) contraindo os índices μ e σ, ρ e τ, após haver levantado o índice μ, obtemos

$$D_\sigma \mathbb{R}^{\rho\sigma}{}_{\nu\rho} + D_\rho \mathbb{R}^{\rho\sigma}{}_{\sigma\nu} + D_\nu \mathbb{R}^{\rho\sigma}{}_{\rho\sigma} \equiv 0 \qquad (4\text{-}41)$$

Da relação (4-39) é fácil ver que

$$\mathbb{R}^{\alpha\tau}{}_{\mu\nu} + \mathbb{R}^{\tau\alpha}{}_{\mu\nu} = -2\, \phi_{\mu\nu}\, G^{\alpha\tau} . \qquad (4\text{-}42)$$

Substituindo esta última expressão na (4-41) e utilizando o fato de que $\mathbb{R}_{\alpha\beta\rho\sigma}$ é antissimétrico em ρ e σ, vem

$$D_\sigma(\mathbb{R}^{\rho\sigma}{}_{\nu\rho}) + \frac{1}{2} D_\nu(\mathbb{R}^{\rho\sigma}{}_{\rho\sigma}) - D_\rho(\phi_{\sigma\nu}\, G^{\rho\sigma}) \equiv 0 \ ,$$

ou seja,

$$D_\sigma(G^{\lambda\sigma}\mathbb{R}_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}\, \delta^\sigma{}_\nu\, \mathbb{R} - \phi_{\rho\nu}\, G^{\sigma\rho}) \equiv 0 \ .$$

Como

$$\mathbb{R}_{\lambda\nu} = \mathbb{R}_{\underline{\lambda\nu}} + 2\, \phi_{\lambda\nu},$$

temos

$$D_\sigma(\mathbb{R}^\sigma{}_{\underline{\nu}} - \frac{1}{2}\, \delta^\sigma{}_\nu\, \mathbb{R} + \phi^\sigma{}_\nu) \equiv 0 \ , \tag{4-43}$$

com

$$\mathbb{R}^\sigma{}_{\underline{\nu}} = G^{\lambda\sigma}\mathbb{R}_{\underline{\lambda\nu}}$$

Escrevendo

$$\mathbb{G}^\sigma{}_\nu = \mathbb{R}^\sigma{}_{\underline{\nu}} - \frac{1}{2}\, \delta^\sigma{}_\nu\, \mathbb{R}$$

temos, para a equação (4-43)

$$D_\sigma(\mathbb{G}^\sigma{}_\nu + \phi^\sigma{}_\nu) \equiv 0 \tag{4-44}$$

que são as identidades contraidas de Bianchi para o nosso caso. Notamos que as expressões (4-35), (4-37) e (4-44), para os tensores de curvatura, de Ricci e as identidades contraidas de Bianchi, respectivamente, são análogas às obtidas na teoria de Weyl da gravitação e eletromagnetismo. [23]

V. AS EQUAÇÕES CLÁSSICAS E QUÂNTICAS DE MOVIMENTO

1) *A EQUAÇÃO CLÁSSICA DE MOVIMENTO*

A generalização covariante da lei fundamental da dinâmica é obtida definindo-se um quadrivetor F^{μ} tal que

$$F^{\mu} = m \frac{\nabla u^{\mu}}{ds} , \qquad (5\text{-}1)$$

onde m é a massa de repouso da partícula cuja velocidade é $u_{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds}$, ds sendo o elemento de linha da geometria Riemanniana do espaço-tempo. Como $u^{\mu} u_{\mu} = 1$,

$$u^{\mu} \nabla \rho \; u_{\mu} = 0$$

e a força é normal à quadrivelocidade, isto é:

$$u_{\mu} F^{\mu} = m \, u_{\mu} \frac{\nabla u^{\mu}}{ds} = 0$$

A equação (5-1) pode ser escrita como:

$$m \left\{ \frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} + \left\{ {\mu \atop \rho\sigma} \right\} \frac{dx^{\rho}}{ds} \frac{dx^{\sigma}}{ds} \right\} = F^{\mu} , \qquad (5\text{-}2)$$

com $\left\{ {\mu \atop \rho\sigma} \right\}$ os símbolos de Christoffel de segunda espécie para a métrica $g_{\mu\nu}(x)$.

Para uma partícula livre, $F_{\mu} = 0$, e a trajetória

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{ds} + \left\{ {\mu \atop \rho\sigma} \right\} \frac{dx^{\rho}}{ds} \frac{dx^{\sigma}}{ds} = 0$$

é a equação de uma geodésica no espaço-tempo Riemanniano.

Se a partícula for adotada de carga e, colocada num campo eletromagnético, a fôrça que atua sôbre ela é a fôrça de Lorentz:

$$F^{\mu} = e\, F^{\mu}{}_{\rho}\; u^{\rho}$$

($F_{\mu\nu}$: tensor de campo eletromagnético), cuja substituição em (5-2) nos dá a equação clássica de movimento para as interações eletromagnéticas.

$$\frac{d^2x^{\mu}}{ds} + \{^{\mu}_{\rho\sigma}\}\; \frac{dx^{\rho}}{ds}\; \frac{dx^{\sigma}}{ds} = \frac{e}{m}\, F^{\mu}{}_{\rho}\; u^{\rho};$$

ou ainda:

$$u^{\sigma}\; u^{\nu}_{;\sigma} = \frac{e}{m}\, g^{\nu\rho}\, F_{\rho\sigma}\, u^{\sigma}\;, \qquad (5\text{-}4)$$

onde os campos são os campos retardados produzidos por outras cargas, excluindo-se as contribuições da própria partícula, para evitar problemas de auto energia.

A equação (5-4) é não-invariante em forma sob C_g, devido principalmente ao comportamento da afinidade métrica $\{^{\mu}_{\rho\sigma}\}$, que sob o grupo conforme, se transforma segundo (4-1). Para tornar (5-4) conforme-invariante, podemos tentar, como uma primeira aproximação, a substituição da afinidade métrica $\{^{\mu}_{\rho\sigma}\}$ pela afinidade semimétrica $\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}$ dada por (4-28). Mas a covariância conforme da equação de movimento só é obtida se a massa variar conformalmente. Realmente, chamando por:

$$U^{\nu} = u^{\sigma}\; u^{\nu}{}_{|\sigma}\;,$$

onde $u^{\nu}{}_{|\sigma}$ indica derivação covariante construida com as afinidades $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$,

$$W^{\nu} = \frac{e}{m} g^{\nu\rho} F_{\rho\sigma} u^{\sigma} ,$$

vemos que, sob C_g:

$$U'^{\nu} = e^{-2\sigma} U^{\nu}$$

e

$$W'^{\nu} = e^{-3\sigma} W^{\nu} ;$$

desde que:

$$u'^{\sigma} = \frac{dx^{\sigma}}{ds'} = e^{-\sigma} u^{\sigma} , \quad g'^{\rho\sigma} = e^{-2\sigma} g^{\rho\sigma} ,$$

e considerando que $F_{\mu\rho}$ e a carga e são invariantes sob tal grupo.

Assim, para obtermos covariância conforme, a massa de repouso teria de se transformar como:

$$m' = e^{-\sigma(x)} m . \tag{5-5}$$

Esta variação corresponde a (4-15). Desde que nosso objetivo inicial foi evitar tal transformação na massa, procuraremos uma equação de movimento para as interações eletromagnéticas que seja invariante sob o grupo C, partindo de equações de campos conforme-invariantes. (Em analogia com a teoria da Relatividade Geral, onde, como é bem conhecido, podemos obter, a partir das equações de campo, as equações corretas de movimento de uma partícula, considerada como singularidade. Embora na eletrodinâmica a lei de movimento de carga não provenha das equações de campo, na gravitação as leis de movimento e as equações de campo são ligadas entre si.[24]

As equações $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, deduzidas das identidades de Bianchi $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, representam o movimento das fontes de energia; ou seja, as leis de conser vação $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, válidas para toda solução de $G_{\mu\nu} = \chi\, T_{\mu\nu}$, são equivalentes às equações de movimento).

No nosso caso, as equações de campo serão derivadas formalmente a partir de um princípio variacional, onde $G_{\mu\nu}(x,P)$ é a quantidade variável que se anula nos limites do domínio de integração.

Consideramos a seguinte densidade Lagrangeana conforme-invariante para o espaço vazio:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-G}\,\mathbb{R} + \alpha \sqrt{-G}\,(u_1 + u_2)\ , \tag{5-6}$$

onde $\mathbb{R}$ é a curvatura escalar para nossa geometria; α, uma constante e u_1, u_2 são os dois invariantes de campo construidos com $\phi_{\mu\nu} = k_{[\mu,\nu]}$:

$$u_1 = G^{\mu\alpha}\, G^{\nu\beta}\, \phi_{\mu\nu}\, \phi_{\alpha\beta}$$

e

$$u_2 = \frac{\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}}{\sqrt{-G}}\, \phi_{\alpha\beta}\, \phi_{\rho\sigma}$$

Para variações em $G_{\mu\nu}$ que se anulam nos limites de integração, obtemos as equações de campo (representando o sistema $g_{\mu\nu}(x)$ e $k_\mu(x)$ através de $G_{\mu\nu}$):

$$\mathbb{R}_{\underline{\mu\nu}} - \frac{1}{2}\, G_{\mu\nu}\, \mathbb{R} = T_{\mu\nu}^{\ \phi}\ . \tag{5-7}$$

Nessas equações, $\mathbb{R}_{\underline{\mu\nu}}$ é a parte simétrica do tensor de Ricci generalizado (4-38) e $T_{\mu\nu}^{\ \phi}$ é o análogo do tensor de Maxwell para o campo $\phi_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu}^{\ \phi} = 2\alpha \left(\frac{1}{4}\, \phi_{\alpha\beta}\, \phi^{\alpha\beta}\, G_{\mu\nu} - \phi_{\mu\rho}\, \phi_\nu{}^\rho\right) \tag{5-8}$$

O traço de $T_{\mu\nu}{}^{\phi}$ sendo nulo, obtemos de (5-7) a seguinte condição:

$$\mathbb{R} = 0 \; ,$$

que pode ser escrita em termos de $g_{\mu\nu}$ e k_μ como:

$$R = 6(k_\alpha \; k^\alpha - k^\alpha{}_{;\alpha}) \; , \qquad (5\text{-}9)$$

com R, o escalar de Ricci para o geometria Riemanniana. Vemos, assim, que a condição "Ricci-flat", R = 0, só é obtida com a anulação de $k_\mu(x)$.

Como (5-7) representam dez equações para as quatorze quantidades $g_{\mu\nu}(x)$ e $k_\mu(x)$, vamos impor quatro condições subsidiárias: *

$$D_\mu \; \phi^{\mu\nu} = 0 \; . \qquad (5\text{-}10)$$

Essas equações não podem ser obtidas da Lagrangeana (5-6) para variações em $k_\mu(x)$, desde que tais variações não são independentes das variações em $G_{\mu\nu}(x,P)$.

Num espaço com matéria e cargas, sob a ação de um campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$, consideramos a densidade Lagrangeana:

* Supomos que o campo $\phi_{\mu\nu}$ só interage com gravitação. Eventualmente, poder-se-ia considerar uma corrente, tal que $D_\mu \; \phi^{\mu\nu} = J^\nu$, tendo-se em vista que um campo vetorial pode também ser repulsivo. Para um campo que só interage com a gravitação, torna-se difícil explicar um eventual caráter repulsivo. Essa corrente, em princípio, seria proveniente da interação do campo $\phi_{\mu\nu}$ com a matéria ou com campos eletromagnéticos. Presentemente não consideramos a presença da corrente pois isso torna muito complexa as equações resultantes, e também por não haver motivações práticas da existência de um campo vetorial diferente do campo eletromagnético e que interaja com esse último.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \sqrt{-G}\, G^{\mu\alpha} G^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + \Lambda \,, \tag{5.11}$$

onde $\mathcal{L}_f$ é a densidade Lagrangeana (5-6) e Λ, densidade que caracteriza a matéria.

Variações em $G_{\mu\nu}$ que se anulam nos limites do domínio de integração conduzem às equações de campo:

$$\mathbb{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} \mathbb{R} = T^{\phi}_{\mu\nu} + M_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu} \quad . \tag{5-12}$$

$M^{\mu\nu}$ é uma generalização do tensor de energia da matéria definido por:

$$M^{\mu\nu} = \mu\, u^{\mu} u^{\nu} \,,$$

onde $u^{\mu} = \dfrac{dx^{\mu}}{d\sigma}$ é o quadrivetor velocidade para a geometria com elemento de linha $d\sigma = (G_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dx^{\beta})^{1/2}$; μ é a densidade de matéria no sistema próprio.

$$\tau^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} G^{\mu\nu} - F^{\mu}{}_{\rho} F^{\nu\rho} \right)$$

é o tensor de Maxwell construido com a métrica $G_{\mu\nu}(x,P)$.

Das identidades contraidas de Bianchi (4-44), obtemos:

$$D_{\mu} G^{\mu\nu} \equiv - D_{\mu} \phi^{\mu\nu},$$

ou seja,

$$D_{\mu}(M^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}_{\phi}) = 0 \,, \tag{5-13}$$

pelas condições (5-10).

Calculando as derivadas covariantes de cada termo de (5-13), obtemos

$$D_\mu M^{\mu\nu} = \mu u^\mu D_\mu u^\nu \quad ; \tag{5-14}$$

$$D_\mu \tau^{\mu\nu} = - F^\nu{}_\rho D_\mu F^{\mu\rho}$$

ou, ainda,

$$D_\mu \tau^{\mu\nu} = - \rho F^\nu{}_\rho u^\rho \;, \quad * \tag{5-15}$$

ρ sendo a densidade de carga no sistema próprio.

Pelas condições (5-10)

$$D_\mu T^{\mu\nu}{}_\phi = - \phi^\nu{}_\rho D_\mu \phi^{\mu\rho} = 0 \;. \tag{5-16}$$

Substituindo (5-14), (5-15) e (5-16) em (5-13), obtemos

$$u^\mu D_\mu u^\nu = \frac{e}{m} G^{\nu\sigma} F_{\sigma\rho} u^\rho \;, \tag{5-17}$$

com $\frac{\rho}{\mu} = \frac{e}{m}$.

---

* Considerada como uma generalização da equação

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi\rho\, v^\mu \quad ,$$

v^μ, o quadrivetor velocidade para a geometria Riemanniana.

(5-17) são as equações de movimento conforme-invariantes para partículas de massa m e carga e. Podemos escreve-las ainda como:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\sigma} + k_\lambda\, u^\lambda\, u^\mu = \frac{e}{m} G^{\mu\nu}\, F_{\nu\rho}\, u^\rho \; . \tag{5-18}$$

Vemos, dessa equação, que mesmo no caso em que $F_{\mu\nu} = 0$ e as afinidades se anulem, a partícula não se move uma linha reta, no plano tangente local, devido à presença do campo vetorial $k_\mu(x)$. Resultado já esperado, desde que a anulação local da afinidade conforme-invariante não implica na anulação dos ção dos símbolos de Christoffel para $g_{\mu\nu}(x)$, mas sim que eles são proporcionais ao valor local assumido pelo vetor $k_\mu(x)$,

$$\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = 0 \quad \rightarrow \quad \{^{\mu}_{\sigma\mu}\} \qquad = 2\, k_\sigma(x) \; .$$

Observamos que a equação (5-17) só é obtida com a imposição das quatro condições subsidiárias (5-10). Essas condições nos permitem obter uma equação análoga à de Lorentz e nos dá o número necessário de equações, juntamente com (5-7), para a determinação das quantidades $g_{\mu\nu}$ e k_μ.

Em (5-17), m é um escalar conforme-invariante, desde que todas as quantidades que entram na equação são invariantes sob C_g (a carga é suposta ser conforme-invariante). Notamos, no entanto, que essa invariância de m somente se mantém num espaço não Riemanniano, mais semelhante ao chamado de Weyl que aparece em sua teoria de campo unitária [3].

2) *A EQUAÇÃO QUÂNTICA DE MOVIMENTO*

Na relatividade restrita, a equação de onda proposta por Dirac para o eletron livre é

$$i h \gamma^{\mu} \psi_{,\mu} - m \psi = 0 \quad . \tag{5-19}$$

Esta equação é de primeira ordem nas derivadas temporais, o que permite obter densidades de probabilidade positivas, e fornece a estrutura fina de origem relativística do movimento do eletron com spin, no átomo. Os γ^{μ} são um conjunto de operadores que não comutam entre si, restritos pela imposição de que cada solução de (5-19) seja solução de equação de Klein-Gordon

$$\eta^{\mu\nu} \psi_{,\mu\nu} + m^2 \psi = 0$$

Multiplicando (5-19) por $i h \gamma^{\nu} \partial/\partial x^{\nu}$ e simetrizando os coeficientes de $\psi_{,\mu\nu}$, obtemos a equação de Klein-Gordon, desde que:

$$\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} = 2 \eta^{\mu\nu} \tag{5-20}$$

estabelecendo-se, assim, uma álgebra de Clifford para o espaço interno das γ^{μ}.

A equação de Dirac admite o grupo de Lorentz como grupo de simetria se:

1) a função de onda ψ forma uma base de representação espinorial do grupo, e como tal se transforma como:

$$\psi'(x) = S\ (x) \tag{5-21}$$

onde S é uma matriz unitária 4 x 4, constante. A unitariedade de S é imposta para conservar a expressão da densidade de probabilidade sob tal transformação. $\psi'(x)$ refere-se à função de onda num referencial L', tal que

$$x'^{\mu} = L^{\mu}_{\ \nu} \ x^{\nu} ;$$

2) matrizes γ^{μ} se transformam como

$$\gamma'^{\mu} = S \ \gamma^{\sigma} \ S^{+} \ L^{\mu}_{\ \sigma} \ . \tag{5-22}$$

Sob uma transformação infinitesimal de coordenadas,

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}_{\ \nu} \ k^{\nu}$$

$$S = e^{i \ \varepsilon^{A} \Lambda_{A}} = 1 + i \ \varepsilon^{A} \ \Lambda_{A} \ ,$$

temos, de (5-21) e (5-22)

$$\bar{\delta} \ \psi(x) \equiv \psi'(x) - \psi(x) = i \ \varepsilon^{A} \ \Lambda_{A} \ \psi(x)$$

$$\bar{\delta}\gamma^{\mu}(x) \equiv \gamma'^{\mu}(x) - \gamma^{\mu}(x) = \varepsilon^{\mu}_{\ \sigma}\gamma^{\sigma} + i \ \varepsilon^{A}(\Lambda_{A}\gamma^{\mu} - \gamma^{\mu}\Lambda_{A}) .$$

ψ sendo uma representação espinorial do grupo de Lorentz, S é função das matrizes de Lorentz $L^{\mu}_{\ \nu}$ e $\varepsilon^{A} \ \Lambda_{A}$ é função de $\varepsilon_{\mu\nu}$. Desde que ε_{A} e $\varepsilon_{\mu\nu}$ são de primeira ordem, segue-se que

$$\varepsilon_{A} = \varepsilon_{\mu\nu}$$

e

$$S = 1 + i \ \varepsilon^{\mu\nu} \ \Lambda_{\mu\nu} \ , \qquad \Lambda^{+}_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\nu} \ .$$

A forma explícita de $\Lambda_{\mu\nu}$ é obtida pela imposição de que γ_{μ} tenha a mesma forma em todos os referenciais de Lorentz, isto é:

$$\bar{\delta}\, \gamma^{\mu} = 0 \ . \qquad (5\text{-}23)$$

Esta equação é satisfeita para

$$\Lambda_{\mu\nu} = \frac{i}{4} \left[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\right] \qquad (5\text{-}24)$$

e a função de onda espinorial de Dirac se transforma como:

$$\psi'(x) = (1 - \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu} \left[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\right]) \ \psi(x) \ . \qquad (5\text{-}25)$$

Para obter uma equação do tipo de Dirac na relatividade geral, generaliza-se a relação de anticomutação para as matrizes γ^{μ}, agora consideradas dependentes de coordenadas.

$$\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} = 2 \ g^{\mu\nu}(x) \ . \qquad (5\text{-}26)$$

A álgebra de Clifford (5-26) [25] estabelece uma relação entre as estruturas interna e externa do espaço-tempo Riemanniano.

Pode-se manter a transformação sob um mapeamento interno (os índices espinoriais de $\psi(x)$, $\psi_i(x)$, variam sob transformações internas) como sendo dada por (5-25), mas considerando-se que os geradores não são mais constantes.

Para objetos como a função de onda $\psi(x)$, que sofrem transformações sob mapeamento do espaço-tempo (grupo geral de coordenadas) e sob grupos internos de transformação, requer-se que suas derivadas covariantes ($\psi_{;\mu}$) se transformem como $\psi(x)$ sob mapeamentos internos e como um vetor covariante sob mapeamento externos. Tal quantidade é definida por:

$$\gamma_{\mu;\nu} = \gamma_{\mu,\nu} - \{^{\rho}_{\mu\nu}\}\ \gamma_{\rho} + S_{\nu}\ \gamma_{\mu} - \gamma_{\mu}\ S_{\nu} \qquad (5\text{-}28)$$

A expressão da conexão afim espinorial S_{ν} é obtida impondo-se a condição

$$\gamma_{\mu;\nu} = 0$$

Sua forma explicita sendo (ver Apêndice):

$$S_{\nu} = \frac{1}{8}\left[\gamma^{\mu}\ \gamma_{\mu,\nu} - \gamma_{\mu,\nu}\ \gamma^{\mu} - \{^{\rho}_{\mu\nu}\}\ (\gamma^{\mu}\ \gamma_{\rho} - \gamma_{\rho}\ \gamma^{\mu})\right] \qquad (5\text{-}29)$$

Podemos, então, escrever a equação de Dirac na Relatividade Geral como:

$$i\hbar\ \gamma^{\mu}(\psi_{,\mu} + S_{\mu}\ \ \psi) - m\psi = 0 \qquad (5\text{-}30)$$

que tem o grupo geral de transformações (M.M.G.) e o grupo interno com geradores $\Lambda_{\mu\nu}(x)$ como grupos de simetria. Ela difere da equação de Dirac na Relatividade Restrita, pois, contrariamente à esta, não se pode estabelecer uma relação entre o grupo interno e o M.M.G. O mais que se pode obter é uma relação local entre os dois grupos.

Da relação (5-26) vemos que as matrizes $\gamma^{\mu}(x)$ se transformam, sob C_g, como

$$\gamma'_{\mu}(x) = \gamma_{\mu}(x)\ \exp\ \sigma(x)\ . \qquad (5\text{-}31)$$

Com essa lei de transformação e com a variações das afinidades métricas dada por (2-6), obtemos para as afinidades internas (5-29)

$$S'_{\nu}(x) = S_{\nu}(x) + \frac{1}{4}\ \sigma_{,\mu}\ (\gamma_{\nu}\ \gamma^{\mu} - \gamma^{\mu}\gamma_{\nu}\ )\ ,$$

o que implica que a equação (5-30) não é conforme-invariante.

Para obter uma equação do tipo de Dirac, covariante sob o grupo C_g, generalizamos a relação (5-26), fazendo corresponder a $\gamma_\mu(x)$ o novo objeto

$$\Gamma_\mu(x,P) = \gamma_\mu(x) \exp \left\{ - \int_{x_{in}}^{x} k_\rho(\xi) d\xi^\rho \right\} \tag{5-32}$$

Obtemos, então, para o espaço com métrica $G_{\mu\nu}(x,P)$:

$$\Gamma_{(\mu}(x,P)\, \Gamma_{\nu)}\, (x,P) = 2\, G_{\mu\nu}(x,P) \tag{5-33}$$

De (5-32), construimos a derivada conforme invariante de $\Gamma_\mu(x,P)$, de uma forma semelhante a (4-25)

$$\partial_\mu\, \Gamma_\alpha(x,P) = e^{-\int_{x_{in}}^{x} k_\rho\, d\xi^\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - k_\mu \right) \gamma_\alpha(x) \,. \tag{5-34}$$

Como antes, notamos que esta derivada não é um tensor de segunda ordem sob transformações curvilíneas de coordenadas; $\partial_\mu\, \Gamma_\alpha$ também não se transforma como um "spin-tensor" de Dirac sob as transformações internas. Estas duas dificuldades podem ser removidas introduzindo-se as derivadas covariantes conforme-invariantes $D_\rho\, \Gamma_\alpha(x,P)$ por:

$$D_\rho\, \Gamma_\alpha(x,P) = \partial_\rho \Gamma_\alpha(x,P) - \Gamma^\lambda_{\alpha\rho}(x)\, \Gamma_\lambda(x,P) + \Sigma_\rho(x)\, \Gamma_\alpha(x,P) - \Gamma_\alpha(x,P)\Sigma_\rho(x) \,, \tag{5-35}$$

onde tomamos diretamente a afinidade $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\rho}(x)$ dada pela expressão conforme-invariante (4-28), e consideramos que a afinidade interna $\Sigma_{\rho}(x)$ é independente de trajetória pela mesma razão que para o caso de $G_{\mu\nu}(x,P)$).

Impomos, de acôrdo com (4-31) e (5-33),

$$D_{\rho}\Gamma_{\alpha}(x,P) = 0 \tag{5-36}$$

As expressões (5-32) e (5-34) tomam as seguintes formas para os contravariantes $\gamma^{\mu}(x)$:

$$\Gamma^{\mu}(x,P) = \gamma_{\mu}(x)\,\exp\left\{\int_{x_{in}}^{x} k_{\rho}(\xi)\ d\xi^{\rho}\right\} \tag{5-37}$$

e

$$\partial_{\mu}\,\Gamma^{\alpha}(x,P) = e^{\int_{x_{in}}^{x} k_{\rho}\ d\xi^{\rho}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + k_{\mu}\right)\gamma^{\alpha}(x) \tag{5-38}$$

Numa notação compacta, introduzindo

$$\Pi_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - k_{\mu}\ ,\qquad \widetilde{\Pi}_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + k_{\mu}\ ,$$

podemos reescrever (5-34) e (5-38) como

$$\partial_{\mu}\Gamma_{\alpha}\,(x,P) = e^{-\int_{x_{in}}^{x} k_{\rho}\ d\xi^{\rho}}\ \Pi_{\mu}\gamma_{\alpha}(x) \tag{5-34'}$$

$$\partial_{\mu}\,\Gamma^{\alpha}(x,P) = e^{\int_{x_{in}}^{x} k_{\rho}\ d\xi^{\rho}}\ \widetilde{\Pi}_{\mu}\,\gamma^{\alpha}(x) \tag{5-38'}$$

Considerando-se a condições (5-36), as afinidades internas $\Sigma_\mu(x)$ são obtidas e sua forma explícita é (ver apêndice):

$$\Sigma_\nu(x) = \frac{1}{8}\left[\gamma^\mu \pi_\nu \gamma_\mu - (\pi_\nu \gamma_\mu)\gamma^\mu - \Gamma^\rho_{\mu\nu}(\gamma^\mu\gamma_\rho - \gamma_\rho\gamma^\mu)\right] \tag{5-39}$$

onde usamos a notação introduzida acima. Essa expressão é semelhante a (5-29), exceto que as derivadas usuais são substituidas por π_μ e as afinidades $\{^\mu_{\rho\sigma}\}$ por $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$. No entanto, devemos observar que os dois primeiros termos dentro dos parênteses podem ser escritos simplesmente como

$$\gamma^\mu \pi_\nu \gamma_\mu - (\pi_\nu \gamma_\mu)\gamma^\mu = \gamma^\mu \gamma_{\mu,\nu} - \gamma_{\mu,\nu} \gamma^\mu$$

Dessa forma, a única diferença entre Σ_ρ e S_ρ é devida à mudança de $\{^\mu_{\rho\sigma}\}$ pela afinidade semi-métrica $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$. Como se pode facilmente verificar, Σ_ρ será conforme-invariante, isto é

$$\Sigma'_\rho(x) = \Sigma_\rho(x)$$

sob C_g, independentemente do uso de $\gamma^\mu \pi_\nu \gamma_\mu - (\pi_\nu \gamma_\mu)\gamma^\mu$ ou de $\gamma^\mu \gamma_{\mu,\nu} - \gamma_{\mu,\nu} \gamma^\mu$ como o primeiro termo de (5-39). Em outras palavras, a combinação acima é conforme-invariante.

Teremos, então, para a generalização de (5-27)

$$D_\mu \psi(x) = \psi_{,\mu}(x) + \Sigma_\mu(x) \psi(x) \tag{5-40}$$

como a derivada covariante conforme-invariante do espinor de Dirac. Dessa expressão segue-se diretamente a forma para a equação de Dirac

$$i\hbar \Gamma^\mu D_\mu \psi(x) - m \psi(x) = 0 \tag{5-41}$$

Considerando-se o espinor $\psi(x)$ invariante sob C_g, a equação (5.41) é naturalmente conforme-invariante, sem requerer nenhuma variação na massa, isto é, m é um escalar conforme-invariante. Notamos, novamente, que essa invariância da massa somente é obtida em espaços curvos com métrica $G_{\mu\nu}(x,P)$ e que a equação (5.41) depende de variáveis que contêm explicitamente a trajetória P, ou seja, as Γ^{μ}. Se usarmos, ao invés de $\Gamma^{\mu}(x,P)$, as matrizes usuais $\gamma^{\mu}(x)$, a simples substituição das afinidades métricas $\{^{\mu}_{\rho\sigma}\}$ pelas semi-métricas $\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}$ em (5-29) não é suficiente para evitar uma transformação na massa, requerida para manter a covariante conforme da equação (5.30).

VI. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A existência de um grupo de transformações mais gerais do que as de Lorentz, explicitamente, o grupo conforme, sob o qual as equações de Maxwell são covariantes, levou à constatação de que equações de movimento de partículas massivas não são covariantes sob tal grupo. Para torná-las covariantes, foi proposta [4] uma variação conforme da massa. No caso específico do grupo C_o, Fulton, Rohrlich e Witten [17] interpretaram essa variação como sendo devida à mudança do campo de forças atuando a partícula. Desde que as transformações (3.12) levam uma partícula em repouso para um movimento com aceleração uniforme, equivalente à presença local de um campo gravitacional constante (pelo princípio de equivalência), essas transformações são equivalentes à introdução de um campo gravitacional. A massa, considerada como energia de repouso, deve conter a energia potencial associada a esse campo. Como $\phi(x)$ mede a deformação local do campo, m deve depender de $\phi(x)$. A transformação (4.15) representa a mudança da energia de repouso que leva em consideração a mudança de energia potencial.

O espectro atômico das partículas elementares sendo descontínuo, e a variação (4.15) levando a valores descontínuos da massa, é-se levado a considerar que o grupo conforme só é um bom grupo de simetria para a Física de altas energias (quando a energia de repouso de uma partícula pode ser negligenciada em comparação com sua energia cinética).

De maneira a evitar uma transformação na massa, propusemos um tensor métrico conforme-invariante, em espaços curvos. O formalismo introduzido com a definição de nova métrica $G_{\mu\nu}(x,P)$, dos símbolos de Christoffel construídos com $G_{\mu\nu}(x,P)$ e das respectivas derivadas covariantes, permitiu-nos obter equações de movimento que são invariantes sob o grupo extendido conforme C (cap. IV). A invariância é obtida sem necessidade de se impor nenhuma lei de transformação para a massa, que se torna, assim, um invariante conforme. No entanto, cumpre ressaltar que a citada invariância da massa só é possível em espaços curvos, especificamente, para campos gravitacionais fortes. Isso é devido a imposição de que a função escalar $\sigma(x)$, do grupo de gauge da métrica, se anula para algum ponto inicial, de maneira a tornar o novo tensor métrico conforme-invariante.

Em espaços chatos, tal condição não é obedecida, para transformações que contenham dilatações, quando num ponto inicial, $\sigma(x_{in})$ é proporcional a β (eq. 3.36). Consequentemente, numa região de campo fraco, onde a métrica é Minkowskiana, devemos abandonar a condição $\sigma(x_{in}) = 0$, e reobtemos os resultados conhecidos da Relatividade Restrita, tendo então uma variação conforme de escala no espectro de massas.

Esquematicamente, teríamos duas regiões distintas: a região I - de campos gravitacionais fortes e a região II - de campos gravitacionais fracos. Na transição de I para II, ocorreria uma quebra de simetria. *

Para manter a simetria conforme na região I, introduzimos o campo vetorial $k_\mu(x)$, na forma da integral usada. Esta contém um parâmetro arbitrário x^μ_{in}. As equações de movimento dependem desse parâmetro; para levantar essa indeterminação, pode-se eventualmente tomar $x^\mu_{in} = 0$ (origem do sistema de coordenadas; um observador na região I (ou II), está em $x^\mu = x^\mu_{in} = 0$).

Na região I, $\sigma(x_{in}) = 0$ implica que, no ponto inicial, $g_{\mu\nu}(x_{in})$ não contém fatores de escala, logo medidas de tempo local não sofrem variações.

Quanto à massa conforme - invariante obtida ser um observável, certamente não o é no sentido usual de uma observação direta, desde que ela só e

---

* Quebra de simetria no sentido de que nosso formalismo não absorve, na região II, a variação conforme da massa.

xiste em regiões de campo gravitacionais fortes; a massa obtida por processos diretos é observada numa região de campo fraco e, portanto, conforme variante.

A generalização da equação quântica de movimento (5.30) para espaços com métrica $G_{\mu\nu}(x,P)$ é obtida naturalmente, fazendo-se corresponder às matrizes $\gamma_\mu(x)$ os novos objetos $\Gamma_\mu(x,P)$.

No caso clássico, dificuldades surgiram quando, em analogia com a Relatividade Geral, procuramos obter as equações de movimento para as interações eletromagnéticas a partir das equações de campo. O princípio variacional aplicado a uma ação conforme-invariante, para variações de $G_{\mu\nu}(x,P)$, só nos fornece dez equações para as quatorze quantidades $g_{\mu\nu}(x)$ e $k_\mu(x)$. Introduzimos quatro condições subsidiárias $D_\mu{}^{\mu\nu} = 0$. Estas condições completam o sistema de equações para a determinação do tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$ e do campo vetorial $k_\mu(x)$ e permitem obter uma equação de movimento conforme-invariante formalmente semelhante à equação de Lorentz em espaços curvos.

Finalmente, mencionamos o trabalho de Isham, Salam e Strathdee [20], onde é proposta uma formulação conforme-invariante para equações de campo, pela introdução de um campo escalar e pela generalização das derivadas usuais num sistema de equações Lorentz-invariantes por derivadas covariantes. O campo escalar introduzido corresponde a uma partícula sem massa e de spin zero.

Schwinger [26] apontou a possibilidade de se construir uma lagrangeana conforme-invariante para um campo escalar $\phi(x)$ interagindo com o campo gravitacional. A variação da lagrangeana

$$\mathcal{L}(\phi,g) = -(-g)^{1/2}\,\frac{1}{2}\left[\partial_\mu \phi\, g^{\mu\nu}\, \partial_\nu \phi + (m^2 + \frac{1}{6} R)\, \phi^2\right]$$

sob uma transformação

$$g'_{\mu\nu}(x) = \lambda(x)\, g_{\mu\nu}(x) ,$$

pode ser compensada introduzindo-se um campo escalar $\sigma(x)$ que se transforma como

$$\sigma'(x) = \lambda^{-1/2}\, \sigma(x)$$

e com

$$\phi'(x) = \lambda^{-1/2}\, \phi(x) .$$

A lagrangeana modificada

$$\mathcal{L}(\phi,g,\sigma) = \frac{1}{2k} (-g)^{1/2} \left[R\, \sigma^2 + 6\, \partial_\mu \sigma\, g^{\mu\nu}\, \partial_\nu \sigma\right] - (-g)^{1/2} \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \phi\, g^{\mu\nu}\, \partial_\nu \phi + \right.$$
$$\left. + \left(m^2 \sigma^2 + \frac{1}{6} R\right) \phi^2\right]$$

é conforme-invariante. A massa m é substituida por $m_\sigma \cdot \sigma(x)$ representaria uma partícula de massa e spin nulos.

* * *

APÊNDICE:

Da (5.29), com a condição $\gamma_{\mu;\nu} = 0$, temos

$$\gamma_{\mu,\nu} - \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \gamma_\rho + S_\nu\, \gamma_\mu - \gamma_\mu\, S_\nu = 0 \qquad \text{(A-1)}$$

Usamos o formalismo das "vierbein", onde as matrizes dependentes de coordenadas $\gamma_\mu(x)$ são dadas como combinação linear das matrizes usuais de Dirac $\gamma_{(\mu)}$,

$$\gamma_\rho(x) = h^{(\mu)}{}_\rho(x)\; \gamma_{(\mu)} ,$$

podemos expandir a matriz S(x) como uma combinação linear das 16 matrizes de Dirac

$$S_\nu(x) = a_\nu(x)\cdot 1 + a_{\nu(\lambda)}(x)\, \gamma^{(\lambda)} + \frac{i}{4}\, b_\nu(x)_{[(\lambda)(\sigma)]}\, (\gamma^{(\lambda)}\, \gamma^{(\sigma)} +$$

$$- \gamma^{(\sigma)}\, \gamma^{(\lambda)}) + c_\nu(x)\, \gamma_{(5)} + d_{\nu(\rho)}(x)\, \gamma_{(5)}\, \gamma^{(\rho)} \tag{A-2}$$

Portanto, o comutador que aparece no membro esquerdo de (A-1) toma a forma

$$[S_\nu, \gamma_\mu] = a_{\nu(\lambda)}\, [\gamma^{(\lambda)}, \gamma_\mu] + \frac{1}{2}\, b_{\nu\, [(\lambda);\, (\sigma)]}\, [\sigma^{(\lambda)(\sigma)}, \gamma_\mu] +$$

$$+ c_\nu\, [\gamma_{(5)}, \gamma_\mu] + d_{\nu(\rho)}\, [\gamma_{(5)}\, \gamma^{(\rho)}, \gamma_\mu]\, ,$$

onde

$$\sigma^{(\lambda)(\sigma)} = \frac{i}{2}\, (\gamma^{(\lambda)}\, \gamma^{(\sigma)} - \gamma^{(\sigma)}\, \gamma^{(\lambda)})$$

Usando que

$$[\gamma_{(5)}, \gamma_\mu] = 2\, h_{\mu(\rho)}\, \gamma_{(5)}\, \gamma^{(\rho)}$$

$$[\gamma_{(5)}\, \gamma^{(\rho)}, \gamma_\mu] = 2\, h_\mu{}^{(\rho)}\, \gamma_{(5)}$$

$$[\sigma^{(\lambda)(\sigma)}, \gamma_\mu] = -\, 2i(\eta^{\lambda\tau}\, \gamma^{(\sigma)} - \eta^{\sigma\tau}\, \gamma^{(\lambda)})\, h_{\mu(\tau)}$$

com $\eta^{\lambda\tau}$ = diagonal (+, -, -, -),

obtemos

$$[S_\nu, \gamma_\mu] = \frac{2}{i}\, a_{\nu(\lambda)}\, h_{\mu(\rho)}\, \sigma^{(\lambda)(\rho)} - i\, h_{\mu(\tau)}\, b_{\nu[(\lambda)(\sigma)]}(\eta^{\lambda\tau}\, \gamma^{(\sigma)} +$$

$$-\, \eta^{\sigma\tau}\, \gamma^{(\lambda)}) + 2\, c_\nu\, h_{\mu(\rho)}\, \gamma_{(5)}\, \gamma^{(\rho)} + 2\, d_{\nu(\rho)}\, h_\mu^{(\rho)}\, \gamma_{(5)}\, .$$

Substituindo esta expressão em (A-1), encontramos, após alguns cálculos:

$$\left\{h_{\mu}{}^{(\alpha)}{}_{,\nu} - \{^{\rho}_{\mu\nu}\}\, h_{\rho}{}^{(\alpha)} - i\, h_{\mu(\tau)}\, b_{\nu[(\lambda)}{}^{(\alpha)]}\, \eta^{\lambda\tau} + i b_{\nu}{}^{[(\alpha)}{}_{(\sigma)]}\, h_{\mu(\tau)} \eta^{\sigma\tau}\right\} \gamma_{(\alpha)} +$$

$$+ \frac{2}{i}\, a_{\nu(\lambda)}\, h_{\mu(\rho)}\, \sigma^{(\lambda)(\rho)} + 2\, c_{\nu} h_{\mu(\rho)}\, \gamma_{(5)}\, \gamma^{(\rho)} + 2\, d_{\nu(\rho)}\, h_{\mu}{}^{(\rho)}\, \gamma_{(5)} = 0$$

Da independência linear dos operadores de Dirac, segue-se que

$$a_{\nu(\lambda)} = 0 \qquad c_{\nu} = 0 \qquad \text{e} \qquad d_{\nu(\rho)} = 0 \,,$$

e ainda,

$$i\, h_{\mu(\tau)}\, b_{\nu}{}^{[(\tau)(\alpha)]} = \frac{1}{2}\left[h_{\mu}{}^{(\alpha)}{}_{,\nu} - \{^{\rho}_{\mu\nu}\}\, h_{\rho}{}^{(\alpha)}\right]$$

(onde se usou o fato de que $b_{\nu[(\tau)(\alpha)]}$ é antissimétrico nos índices τ, α)
Esta última equação, resolvida para $b_{\nu}{}^{[(\tau)\,(\alpha)]}$ dá

$$i\, b_{\nu}{}^{[(\tau)\,(\alpha)]} = \frac{1}{2}\, h^{\mu(\tau)} \left[h^{(\alpha)}_{\mu,\nu} - \{^{\rho}_{\mu\nu}\}\, h_{\rho}{}^{(\alpha)}\right]$$

Substituindo os coeficientes a, b, c e d em (A-2), obtemos a forma explícita da matriz $S_{\nu}(x)$ que satisfaz (A-1):

$$S_{\nu} = a_{\nu} \cdot 1 + \frac{1}{8}\left[\gamma^{\mu}\, \gamma_{\mu,\nu} - \gamma_{\mu,\nu}\, \gamma^{\mu} - \{^{\rho}_{\mu\nu}\}\, (\gamma^{\mu}\, \gamma_{\rho} + - \gamma_{\rho}\, \gamma^{\mu})\right] \qquad \text{(A-3)}$$

que exceto por um múltiplo da matriz identidade é a fórmula (5-29) do texto. O termo proporcional à matriz identidade é usualmente conectado com a interação eletromagnética por meio da imposição de acoplamento mínimo. Colocaremos, aqui, $a_{\nu} = 0$.

A expressão (A-3) foi primeiramente derivada por Fock e Ivanenko [26] e por essa razão S é algumas vezes chamado de coeficientes de Fock-Ivanenko.

A derivação da formula (5-39) é semelhante à derivação que fizemos acima. Incluiremos, no entanto, alguns detalhes que são interessantes.

De (5-35) e (5-36), temos:

$$\partial_\rho \Gamma_\alpha - \Gamma^\lambda_{\alpha\rho} \Gamma_\lambda + \Sigma_\rho \Gamma_\alpha - \Gamma_\alpha \Sigma_\rho = 0$$

Considerando

$$\Gamma_\lambda = h^{(\alpha)}_\lambda \Gamma_{(\alpha)} , \quad \Gamma_{(\alpha)} = \gamma_{(\alpha)} e^{\int_{x_{in}}^{x} k_\rho(\xi) d\xi^\rho}$$

uma forma semelhante a (A-2) é obtida para $\Sigma_\rho(x)$. Assim,

$$\left[\Sigma_\rho, \Gamma_\alpha\right] = \frac{2}{i} a_{\rho(\lambda)} h_{\alpha(\tau)} e^{-\int_{x_{in}}^{x} k_\nu d\xi^\nu} \sigma^{(\lambda)(\tau)} + 2 c_\rho h_{\alpha(\beta)}$$

$$e^{-\int_{x_{in}}^{x} k_\nu d\xi^\nu} \gamma_{(5)} \gamma^{(\beta)} - i h_{\alpha(\tau)} e^{\int_{x_{in}}^{x} k_\nu d\xi^\nu} b_{\rho[(\lambda)(\sigma)]} (\eta^{\lambda\tau} \gamma^{(\sigma)} -$$

$$- \eta^{\sigma\tau} \gamma^{(\lambda)}) + 2 d_{\rho(\beta)} h_\alpha^{(\beta)} e^{-\int_{x_{in}}^{x} k_\nu d\xi^\nu} \gamma_{(5)}$$

e, ainda,

$$\partial_\rho \Gamma_\alpha = e^{-\int_{x_{in}}^{x} k_\nu d\xi^\nu} H^{(\beta)}_{\alpha\rho} \gamma_{(\beta)} ,$$

onde

$$H^{(\beta)}_{\alpha\rho} = h^{(\beta)}_{\alpha,\rho} - k_\rho \, h^{(\beta)}_\alpha$$

Um cālculo semelhante ao anterior nos leva a

$$c_\rho = 0 \,, \qquad d_{\rho(\beta)} = 0 \qquad a_{\rho(\lambda)} = 0$$

Portanto,

$$\Sigma_\rho(x) = \frac{1}{8}\left[\gamma^\alpha \pi_\rho \gamma_\alpha - (\pi_\rho \gamma_\alpha)\gamma^\alpha - \Gamma^\lambda_{\alpha\rho}(\gamma^\alpha\gamma_\lambda - \gamma_\lambda\gamma^\alpha)\right]$$

onde fizemos $a_\nu = 0$. Como observamos no texto,

$$\gamma^\alpha \pi_\rho \gamma_\alpha - (\pi_\rho \gamma_\alpha)\gamma^\alpha = \gamma^\alpha \gamma_{\alpha,\rho} - \gamma_{\alpha,\rho} \gamma^\alpha$$

e S pode ser escrito como

$$S_\rho = \frac{1}{8}\left[\gamma^\alpha \gamma_{\alpha,\rho} - \gamma_{\alpha,\rho} \gamma^\alpha - \Gamma^\lambda_{\alpha\rho} (\gamma^\alpha \gamma_\lambda - \gamma_\lambda \gamma^\alpha)\right] \qquad \text{(A-4)}$$

que define de (A-3) pela substituição das afinidades $\{^{\mu}_{\rho\sigma}\}$, para a mētrica $g_{\mu\nu}(x)$, pelas $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$, afinidades construidas com $G_{\mu\nu}(x,P)$.

* * *

BIBLIOGRAFIA

1. E. Cunningham e H. Bateman, Proc. London Mathem. Soc., 8 77 (1909); ibid 8·223 (1910).

2. L. Page, Phys. Rev., 49 254 (1936).

3. H. Weyl, Space, Time, Matter, Dover Publications, New York.

4. J. A. Schouten e J. Haantjes, Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap Proc., 43, 1288 (1940).

5. H. A. Kastrup, Phys. Rev., 142 4 (1965).

6. L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry, Princeton Un. Press, pag. 80.

7. H. Weyl, Mathematische Zeitschrift, vol. 2, pag. 404 (1918).

8. E. L. Hill, Phys. Rev., 67 11 e 12, junho 1945.

9. S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen (Leipzig, 1893).

10. J. Wess, Nuovo Cimento, 18, 1086 (1960).

11. F. Klein, Gesammelte Math. Abhandlugen, Berlin (1921).

12. Y. Murai, Proc. Theor. Phys., 11 4-5, abril (1954).

13. J. Rosen, Annals of Physics, 47 468 (1968).

14. E. Noether, Gottinger Nachrichten, (1918).

15. E. L. Hill, Rev. Mod. Phys., 23 3, julho (1951).

16. J. L. Anderson, Principles of Relativity Physics, Acad. Press, New York (1967), cap. IV.

17. T. Fulton, F. Rohrlich, L. Witten, Rev. Mod. Phys., 39 3, julho (1962).

18. R. Geroch, Journal of Math. Phys., 11, 6, junho (1970).

19. W. Pauli Jr., Helv. Phys. Acta, 13 204 (1940).

20. C. Isham, A. Salam, J. Strathdee, Annals of Phys., 62 98 (1971).

21. M. Zorawski, Théorie Mathématique des Dislocations, Dunod ed. (1967), pág. 24.

22. S. Mandelstam, Annals of Phys. 19 1-24 (1962).

23. M. A. Tonnelat, Les Théories Unitaires de l'electromagnetisme et de la gravitation, Gauthier-Villars (1965), cap. IX.

24. A. Einstein, L. Infeld e B. Hoffmann, Annals of Math., 39 65 (1938).

25. D. R. Brill e J. A. Wheeler, Rev. Mod. Phys., 29 3, julho (1957); V. Bargmann e E. Wigner, Proc. Natl. Acad. Sc., 34 211 (1948).

26. J Schwinger, Particles Sources and Fields, Addison-Wesley Publishing Company, pag. 392 (1970).

27. V. Fock e D. Ivanenko, Comptes Rendues, 188, 1470 (1929).