TESE DE
MESTRADO

Monopólos Magnéticos Abelianos e Quantização da Massa Topológica em $(3+1)$ Dimensões.

WINDER ALEXANDER DE MOURA MELO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF.

RIO DE JANEIRO, JUNHO DE 1997.

Dedicatória

À memória de

Mário de Moura (avô),

Isolina Tollentina dos Anjos (avó) e

Maria Celeste de Moura (tia).

Agradecimentos

José Abdalla Helayël-Neto, professor e orientador durante todo este trabalho de tese. E, principalmente, pelo grande amigo que sempre mostrou ser;

Minha Mãe (Deni), meu Pai (Joaquim), Irmãs (Deyse, Denise e Daisa) e Irmãos (Wallassy, Wesley e Wyllian), sem os quais de nada eu seria...;

"Vovó" Hilda, "vovô" João, tias, tios, primas e primos, pelo carinho e amizade em momentos que tanto necessitei;

Evânia Costa Carvalho, pelos bons momentos que passamos juntos. [Também ao pessoal de "Divinópis" (e "Itapicirica") pela hospitalidade e amizade para comigo]:

Denise, Myriam, Daise, Renato e Vitorio (& Eliane), pela recepção quando aqui cheguei, e principalmente, pela grande amizade;

J.L. Boldo, Claudio e Daniel (& Luciana) pela amizade e companhia nos '*apartamentos da vida*'. Também à galera da 509B;

Nelson Panza Neto, pela amizade e pelo trabalho conjunto, parte do qual, aqui apresentado;

Guillermo, Humberto, Casana e Hugo (e tantos outros amigos que cujos nomes não consigo me lembrar) pela paciência em me ensinarem alguns *truques* com o latex;

Pessoal do DCP (PG's, Funcionários e Professores; devido à quantidade e à memória fraca nestes tempos, prefiro não citar só alguns, pois o reconhecimento é a todos) que faz deste Departamento uma extensão de nossa casa;

Galera do futebol (... e da *cervejada!!!), sem o qual (... a qual) eu não teria muita* disposição para o trabalho;

Galera *Ufeveana* daqueles tempos maravilhosos;

Pessoal de "Tarú" (e de Sobrália), pelas conversas agradáveis e por aquele "cafezinho". Também, pelo futebol, volley, pipas, bolinhas de gude (...) e *noitadas ébrias*;

Pessoal da Biblioteca e demais PG's, Funcionários e Professores do CBPF. (Aqui, não posso deixar de mencionar o *Professor* S.A. Dias, vulgo "Tião Metal", pelos n cursos de TQC e, também, pela grande amizade e caixas de cerveja; também, o Prof. Luiz A. Oliveira pelas lições sobre História e Filosofia da Ciência);

Por fim, mas não de menor grado, ao Povo Brasileiro, através do CNPq, pela Bolsa de Mestrado.

Resumo

Mostra-se que configurações de monopólos magnéticos tipo-Dirac aparecem em um modelo de gauge Abeliano, onde um potencial 4-vetorial e um campo de gauge tensorial (2-forma) *acoplam-se* através de um termo de massa topológica, em presença de um "background" de matéria fermiônica. Obtém-se uma condição de quantização na qual estão presentes as cargas e o parâmetro de massa.

Abstract

An Abelian gauge model with vector and 2-form potential fields mixed up by a topological mass term is shown to exhibit Dirac-like monopoles in the presence of a matter background. A generalised quantisation condition comes out that involves charges and the mass parameter.

Índice

Introdução

Dentre os diversos desafios que se apresentam em nossos tempos no âmbito da Física de Altas Energias, destacam-se o *setor de Higgs* do Modelo Padrão ($SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$), o conglomerado de *partículas supersimétricas* (com fenomenologia tangível a uma escala de 1 TeV), a questão do *mecanismo de confinamento dos quarks* e a questão dos *monopólos magnéticos*. Estes últimos aparecem, naturalmente, em modelos de Yang-Mills acoplados a escalares responsáveis pela quebra espontânea da simetria de gauge, desde que o grupo de gauge e a simetria residual satisfaçam a uma precisa condição topológica [1, 2] (pode-se consultar também [3]-[6] para uma revisão sobre o assunto). Segundo resultados recentes para modelos auto-duais de super-Yang-Mills ($\mathcal{N} = 2$ e $\mathcal{N} = 4$), monopólos magnéticos podem apresentar o fenômeno de *condensação*, que parece ser essencial para a compreensão do mecanismo de confinamento dos *quarks* [7]-[9] (veja também [10]-[14]). Além do mais, tais objetos podem ajudar a elucidar algumas questões importantes em Astrofísica e em Cosmologia [15].

Em geral, os monopólos advindos dos modelos de Yang-Mills, ou de teorias de Grande Unificação, são massivos e localizam-se na escala em que se dá a quebra da simetria em questão (veja, por exemplo, [1]-[6] e [16]-[18]). Por exemplo, os monopólos massivos das teorias de Grande Unificação correspondem a partículas com massa da ordem de 10^{16} GeV. Entretanto, já na Eletrodinâmica Clássica, monopólos magnéticos não-massivos aparecem se, seguindo-se a possibilidade aberta por Dirac[19, 20], estruturas de singularidades tipo "strings" (não-detectáveis fisicamente) são permitidas ao potencial vetor associado ao campo magnético. Neste caso, a invariância de gauge e a ausência de massa para o fóton são os dois ingredientes essenciais para a "existência" de tais objetos (para uma breve introdução ao assunto consulte o Apêndice A; veja também [3]-[6] e [21] para uma revisão). Por outro lado, já é fato bastante afirmado que simetria de gauge e massa para bósons vetoriais de gauge *não são resultados conflitantes*. Como exemplo, podemos mencionar o modelo de Schwinger[22] em $D = (1+1)$, onde o *"fóton"* adquire massa dinamicamente, e os modelos de Chern-Simons em $D = (2+1)$ (para um "review" consulte [30]), nos quais o espectro eletromagnético apresenta-se massivo sem violar a simetria de gauge.

Esta observação sugere-nos a possibilidade de investigar a estabilidade de monopólos tipo-Dirac em $D = (3+1)$, adotando-se um modelo com simetria $U(1) \otimes U(1)$ no qual o espectro apresenta um *quantum massivo de spin-1*. A massa é introduzida através de um termo topológico que preserva ambas as simetrias de gauge. Entretanto, para que isto seja possível, um dos fatores Abelianos deve ser associado a um campo de gauge de natureza tensorial (2-forma).

Cabe, aqui, salientar que *potenciais de gauge tensoriais* aparecem na composição de multipletes de modelos de *supergravidade* em $D = 10$ e $D = 11$ [23], na formulação de *modelos duais* com "strings" em interação [28] e, mais recentemente, no estudo da dinâmica de objetos estendidos do tipo "p-branes" [24]. Por outro lado, a investigação de campos tensoriais tratados como graus de liberdade de matéria vem merecendo considerável atenção nos últimos anos [26].

Será nosso propósito central nesta tese averigüar o papel que um campo tensorial anti-simétrico de "rank-2" pode desempenhar no que diz respeito à geração de massa no setor dos bósons vetoriais de gauge, e, como conseqüência, que influência pode causar no setor de configurações clássicas correspondentes a monopólos tipo-Dirac. Um dos resultados a que se chegará é que o parâmetro de massa do modelo figurará numa condição de quantização. sendo assim passível de ajuste a uma escala muito aquém dos 10^{16} GeV introduzidos pela unificação das interações no Modelo Padrão.

Convém. ainda. mencionar a tentativa de se inferir a respeito da massa de monopólos tipo-Dirac através do estudo de contribuições ao momento magnético anômalo do *múon*. no contexto de uma formulação estendida da QED onde férmions com cargas magnéticas são introduzidos [25].

A presente tese é organizada da seguinte forma: no Capítulo 1 (onde não são apresentados resultados originais) discute-se alguns aspectos essenciais sobre o modelo a ser estudado, em especial aqueles relativos ao campo de gauge tensorial e seu acoplamento ao campo de Maxwell, bem como o espectro de partículas do modelo. Prosseguindo. no Capítulo 2 estuda-se a questão das configurações de monopólos magnéticos tipo-Dirac. onde se conclui que a introdução de matéria (fermiônica, no caso) como "background" permite acomodar tais configurações sem qualquer incompatibilidade com a presença de um bóson vetorial massivo. Finalmente, no Capítulo 3 contempla-se a inclusão de um acoplamento não-mínimo do campo tensorial à matéria carregada. Restringindo-se à Mecânica Quântica de uma partícula carregada em interação com uma configuração de monopólo. obtém-se uma condição de quantização generalizada, onde estão presentes não só as cargas mas também o parâmetro de massa topológica (que responde pela massa do bóson intermediário de *spin-1*). Os resultados que se encontram nos Capítulos 2 e 3 constituem-se nas contribuições originais que pretendemos trazer nesta tese. Tais resultados são discutidos na seção de Conclusões, onde reunimos as Críticas e as Perspectivas de prosseguimento. Seguem-se dois apêndices: o Apêndice A pretende ser uma breve introdução aos monopólos de Dirac, com o objetivo de fixar alguns conceitos fundamentais; no Apêndice B (a fim de eliminar cálculos algébricos que poderiam comprometer as discussões do Capítulo 1).

desenvolve-se os cálculos que nos permitem concluir alguns resultados sobre o espectro do modelo.

Capítulo 1

Fundamentos do modelo de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond

Neste primeiro capítulo, pretendemos estudar alguns aspectos do modelo de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond (CSKR), com o qual vamos lidar durante todo o desenvolvimento desta dissertação. Tal modelo fora proposto, independentemente, por Cremmer e Scherk [27], no contexto de geração topológica de massa via quebra dinâmica de simetrias de gauge, e por Kalb e Ramond [28], no estudo da interação clássica entre "*strings*", em modelos duais.

Na Seção 1.1 apresentamos o modelo propriamente dito, que consiste, basicamente, de uma densidade de Lagrangeano contendo os termos cinéticos para os dois campos de gauge (um vetorial, A_μ; e um tensorial, $H_{\mu\nu}$), além de um termo de "mixing" entre eles. Alguns aspectos interessantes deste termo, como sua natureza topológica, são discutidos. Exibimos, também, as equações de campo e as identidades de Bianchi. Finalizando a seção, apresentamos alguns resultados recentes obtidos sobre o modelo, tais como a sua renormalizabilidade e sua unitariedade.

Prosseguindo, na Seção 1.2 estudaremos a questão dos graus de liberdade (g.l.) físicos propagados pelos campos (i.e., o espectro de partículas do modelo). Particularmente, veremos como as simetrias de gauge (e as equações de movimento) atuam sobre os campos, subtraindo-lhes certos graus de liberdade (o que é mostrado em detalhes no Apêndice B). Finalmente, são apresentados os propagadores a "tree-level". Como se sabe, a informação contida neles é dupla: se, por um lado, os pólos fornecem as massas dos possíveis *quanta* propagados, por outro, o resíduo para um dado pólo está associado à normalização da *função de onda* que descreve o *quantum* livre correspondente ao pólo. Assim, resíduo *nulo* significa que a excitação não é dinâmica; resíduo *negativo* indica a presença de um estado de "ghost". No entanto, no caso aqui tratado o resíduo é positivo, o que garante que a excitação massiva de spin-1 corresponde à uma partícula física.

1.1 Apresentação

O modelo em discussão é expresso pelo seguinte Lagrangeano:[1]

$$\mathcal{L}_1 = +\frac{1}{6}G_{\mu\nu\kappa}G^{\mu\nu\kappa} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mu_0\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}A^{\mu}\partial^{\nu}H^{\kappa\lambda}; \tag{1.1}$$

adotamos $\mu_0 > 0$ (para finalidades futuras), além das definições para os tensores de intensidade de campo:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,, \tag{1.2}$$

$$G_{\mu\nu\kappa} = \partial_\mu H_{\nu\kappa} + \partial_\nu H_{\kappa\mu} + \partial_\kappa H_{\mu\nu}\,, \tag{1.3}$$

sendo $H_{\mu\nu} = -H_{\nu\mu}$. A ação obtida a partir de $\mathcal{L}_1$ ($S_1 = \int d^4x\mathcal{L}_1$) é invariante sob as transformações de gauge Abelianas (locais):[2]

$$A_\mu(x) \longmapsto A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\Lambda(x)\,, \tag{1.4}$$

[1]Trabalharemos com as convenções: $diag(\eta_{\mu\nu}) = (+,-,-,-)$; $\epsilon^{0123} = +1 = -\epsilon_{0123}$. Índices gregos vão de 0 a 3: μ, ν,etc$= 0, 1, 2, 3$.

[2]Supomos que os parâmetros de tais transformações, Λ e ξ_μ, *vão a zero* no infinito.

$$H_{\mu\nu}(x) \longmapsto H'_{\mu\nu}(x) = H_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu \xi_\nu(x) - \partial_\nu \xi_\mu(x) \,. \tag{1.5}$$

A transformação (1.4) é aquela já conhecida da Eletrodinâmica, $U(1)_{A_\mu}$, enquanto que (1.5) é a versão anti-simetrizada da transformação de gauge para um tensor de *rank*-2, $U(1)_{H_{\mu\nu}}$. Assim, S_1 é $U(1)_{A_\mu} \otimes U(1)_{H_{\mu\nu}}$-invariante.

Cremmer e Scherk[27], mostraram que $\mathcal{L}_1$, após ser diagonalizado apropriadamente, descreve o movimento livre de um campo vetorial massivo, sendo essa massa gerada dinamicamente através do termo de "mixing" entre A_μ e $H_{\mu\nu}$. Devemos salientar que o procedimento por eles utilizado baseia-se em uma definição não-local de campos (para a discussão a respeito do número de graus de liberdade propagados pelos campos, tal método não traz problemas. No entanto, para se estudar outros aspectos, deve-se ter muito cuidado ao trabalhar com procedimentos não-locais em teorias de campos, haja vista, que a não-localidade pode trazer problemas de não-causalidade); por outro lado, seguindo-se as conclusões de Kalb e Ramond[28], tal bóson massivo seria responsável pela interação entre duas "*strings*"[3] abertas (considerada a interação de todo o *corpo* delas, incluindo-se as pontas), ao passo que, se fizermos $\mu_0 = 0$, teríamos a interação entre duas "strings" fechadas mediada pelo bóson escalar sem massa (que é a partícula descrita por $H_{\mu\nu}$ neste caso), ou ainda, a interação entre as pontas de duas "strings", que seria mediada pelo vetor sem massa A_μ. Para detalhes sobre o espectro dos modelos, consulte o Apêndice B.2.

As equações de campo são facilmente obtidas:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 \epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho} \partial_\kappa H_{\lambda\rho} = -\frac{\mu_0}{3} \epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho} G_{\kappa\lambda\rho} \,, \tag{1.6}$$

$$\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = +\mu_0 \epsilon^{\nu\kappa\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta = +\frac{\mu_0}{2} \epsilon^{\nu\kappa\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \,. \tag{1.7}$$

[3]Mais adiante vamos falar sobre a "string" de Dirac. Mesmo que usemos a mesma expressão para ambos os contextos, acreditamos que nenhuma confusão surgirá.

bem como as identidades de Bianchi:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0\,, \tag{1.8}$$

$$\partial_\mu \tilde{G}^{\mu} = 0\,, \tag{1.9}$$

sendo que os duais são definidos por:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}\,, \qquad \tilde{G}^{\mu} = \frac{1}{6}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}G_{\nu\kappa\lambda}\,.$$

Observa-se, facilmente, que tais expressões exibem, explicitamente, a mesma invariância de S_1, isto é, $U(1)_{A_\mu} \otimes U(1)_{H_{\mu\nu}}$.

Além do mais, nota-se que um campo (ou mais precisamente, seu "field-strength") *responde* por uma *corrente* para o outro campo, e vice-versa. Vê-se também que tais *correntes* originam-se devido à presença do termo de "mixing" entre os campos de gauge em $\mathcal{L}_1$.

Tal termo de "mixing" é denominado topológico por não contribuir para o tensor de energia-momentum invariante de gauge (ou de Hilbert), que aqui. definiremos da seguinte forma:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}(x) \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\, S_{grav}}{\delta g_{\mu\nu}(x)}\,, \tag{1.10}$$

onde $g \equiv det(g_{\mu\nu})$, sendo $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x)$ o tensor métrico de um "background" gravitacional. Denotamos por S_{grav} a ação acoplada minimamente à gravitação (também denominada ação covariantizada). Por exemplo, no caso deste termo topológico, teríamos:

$$\mathcal{L}' = \mu_0 \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} A^\mu \partial^\nu H^{\kappa\lambda} \quad \Longrightarrow \quad S' = \int d^4y\, \mathcal{L}'. \tag{1.11}$$

Agora, covariantizando-se S', i.e., fazendo-se o acoplamento com a gravitação, obteremos:

$$S'_{grav} = \int d^4y\, \sqrt{-g}\, \mathcal{L}'_{grav} = \int d^4y\, \sqrt{-g}\, \mu_0(\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}\sqrt{-g}) g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\kappa\gamma} g^{\lambda\delta} A_\alpha \partial_\beta H_{\gamma\delta}\,, \tag{1.12}$$

lembrando-se que:

$$\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\kappa\gamma}g^{\lambda\delta} = (g)^{-1}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta},$$

teremos, finalmente:

$$S'_{grav} = \int d^4y\mu_0\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}A^\mu\partial^\nu H^{\kappa\lambda} = S'. \tag{1.13}$$

Daqui, vemos que S'_{grav} não depende da métrica $g_{\mu\nu}$. Portanto:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}(x) = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(x)}\left(\int d^4y\,\mu_0\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}A_\mu\partial_\nu H_{\kappa\lambda}\right) = 0 \tag{1.14}$$

De (1.11), seguem-se as *equações de movimento*:

$$F_{\mu\nu} = 0\,, \tag{1.15}$$

$$G_{\mu\nu\kappa} = 0\,. \tag{1.16}$$

(Segue-se, daqui também, o porque de $\mathcal{L}'$ não contribuir para $\mathcal{T}^{\mu\nu}$: os tensores de intensidade de campo $F_{\mu\nu}$ e $G_{\mu\nu\kappa}$ são nulos. Como sabemos, são justamente estes tensores que contêm as quantidades físicas que contribuiriam para o tensor de energia-momento de Hilbert).

Se escrevermos as equações acima no espaço dos momenta (veja Apêndice B.1, e particularmente, as expressões (B.7 e B.8)), teremos:

$$\begin{aligned} &F_{\mu\nu} = 0 \Longrightarrow \partial_\mu A_\nu = 0 \\ &\Longrightarrow \imath p_\mu \hat{A}_\nu(p) = 0 \Longrightarrow p_\mu(ap_\nu + b\overline{p}_\nu + c_I\alpha_{I\nu}) = 0\,, \end{aligned} \tag{1.17}$$

donde segue-se que: $a = b = c_I = 0$. Assim, $\hat{A}_\mu(p) = 0$, isto é, este campo não propaga nenhum grau de liberdade físico. Analogamente:

$$\begin{aligned} &G_{\mu\nu\kappa} = 0 \Longrightarrow \partial_\mu H_{\nu\kappa} = 0 \\ &\Longrightarrow \imath p_\mu(dp_{[\nu}\overline{p}_{\kappa]} + f_I p_{[\nu}\alpha_{I\kappa]} + g_I\overline{p}_{[\nu}\alpha_{I\kappa]} + h_{IJ}\alpha_{I[\nu}\alpha_{J\kappa]}) = 0\,, \end{aligned} \tag{1.18}$$

e, assim, obtemos $\hat{H}_{\mu\nu}(p) = 0$.

Portanto, o termo que realiza o "mixing" entre os campos de gauge, além de não contribuir para $\mathcal{T}^{\mu\nu}$, também *não contém nenhuma partícula em seu espectro*; em outras palavras: não propaga nenhum grau de liberdade físico. (Deve-se observar que não utilizamos as simetrias de gauge para tal demonstração, mas se o fizéssemos, nossa conclusão não seria modificada). Outra particularidade interessante de $\mathcal{L}'$ é que ele constitui-se num exemplo de modelo exatamente solúvel em $D = (3+1)$, conforme mostrado por Horowitz[29]. Neste mesmo trabalho, é desenvolvida a generalização não-Abeliana deste termo.

Conforme discutiremos adiante, a presença deste termo constitui-se (para o modelo em questão) num mecanismo de geração (dinâmica) de massa para uma partícula vetorial. Lembremo-nos de que em $(2+1)$ dimensões espaço-temporais, o termo de Chern-Simons[4], $\alpha A_\mu \tilde{F}^\mu$, constitui-se num termo de massa para o vetor A_μ ($\mu = 0, 1, 2.$), quando embebido na teoria de Maxwell (geralmente denominado modelo de Maxwell-Chern-Simons, MCS). Uma vez que $\tilde{F}_\mu$ é o dual de $F_{\mu\nu}$ ($\tilde{F}_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\kappa}F^{\nu\kappa}$), então este termo é invariante de gauge (a menos de uma derivada total). Observe, no entanto, que uma diferença importante entre estes termos é que, enquanto aquele presente no modelo CSKR é $U(1)_{A\mu} \otimes U(1)_{H\mu\nu}$-invariante, o termo de Chern-Simons é invariante sob $U(1)_{A\mu}$, apenas. Além do mais, o termo de Chern-Simons pode ser acrescentado explicitamente ao Lagrangeano, pode advir de correções quânticas (no intuito de se evitar *anomalias*), ou ainda, ser gerado através da quebra espontânea de simetria num modelo MCS com termos de Higgs e de

[4]Teorias de gauge em $(2+1)$ dimensões espaço-temporais, com termo de Chern-Simons são comumente denominadas *Teorias de gauge topologicamente massivas*, e dão origem a alguns fenômenos bastante interessantes, como por exemplo, a Estatística Fracionária (partículas podem apresentar *spin fracionário*, isto é, spin$\neq 0, 1/2, 1, \ldots$). Existem diversos trabalhos sobre o assunto, dentre os quais sugerimos [30]-[38]. Um "review" é apresentado em [30].

acoplamento não-mínimo[34]. (Fato semelhante não parece acontecer, até onde sabemos, com o termo de geração de massa para o modelo CSKR). Além do mais, se considerarmos uma Ação construída a partir de $\mathcal{L}'$ e de um termo de massa para $H_{\mu\nu}$ (tipo H^2, em $(3+1)$ dimensões):

$$S_T = \int d^4x \left(\mu_0 \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} A^\mu \partial^\nu H^{\kappa\lambda} + \lambda H_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \right) ,$$

pode-se mostrar (a nível quântico) que a Ação de Chern-Simons (S_{CS}, em $(2+1)$ dimensões), pode ser obtida de S_T pelo método de *redução do espaço de fase* (veja referência[29]). Por fim, uma última *analogia* entre estes termos é a seguinte: o termo de Chern-Simons é o resíduo 3-dimensional de um modelo de gauge dual definido em $D = (2+2)$, enquanto aquele aqui estudado é o remanescente de um modelo de gauge dual em $D = (3+3)$ [39].

Antes de passarmos à questão do número de graus de liberdade físicos (para o modelo completo, descrito por $\mathcal{L}_1$), vamos explanar alguns resultados recentes obtidos sobre tal modelo: Allen, Bowicke e Lahiri [40] mostraram que ele é unitário e renormalizável (na presença de férmions acoplados a A_μ: veja Seção 2.1), e também, que seu mecanismo de geração topológica de massa difere, quanticamente, do mecanismo de Higgs (quando este é acoplado à teoria de Maxwell); seu funcional de vácuo foi obtido via quantização de Battalin-Vilkovisky (B-V *quantization*) por Amorim e Barcelos-Neto [42]; o modelo foi, ainda, estudado sob o enfoque da dinâmica de vínculos por Lahiri [41], utilizando-se o procedimento de Dirac, o qual revelou algumas características bastante peculiares, como por exemplo, o fato de uma transformação de dualidade (no espaço de fase reduzido) levar a parênteses de Poisson *não-usuais* entre os campos transformados e seus momenta, na presença de cordas cósmicas. Por outro lado, considerando-se um modelo de gauge constituído apenas pelo setor tensorial (que descreve um escalar sem massa, como veremos adiante), sua quantização revelou alguns aspectos interessantes[43, 44], como o fato de um dos modos (não-físico) do propagador do campo de gauge tensorial desacoplar-se como conseqüência das identidades de Ward (e não, ser cancelado por um "ghost" de Fadeev-Popov), característica similar, neste sentido, com um campo de gauge de spin-3/2. Consulte, também, Nambu[45] para uma conexão entre este tipo de modelo e o confinamento de *quarks*, e Balachandran e Teotonio-Sobrinho[46] para um estudo sobre a presença de *estados de borda* em modelos com termo de "mixing" tipo $F_{\mu\nu}H^{\mu\nu}$.

1.2 Espectro do modelo

Nesta seção, pretendemos desenvolver uma discussão qualitativa a respeito de que partículas estão sendo descritas pelos campos presentes no modelo. Os cálculos necessários às diversas demonstrações, inclusive para os propagadores livres, são apresentados no Apêndice B.

Como bem sabemos, o campo A_μ possui 4 parâmetros reais independentes, uma vez que ele é um 4-vetor real:

$$A^\mu = \{\Phi, +\vec{A}\};$$

daí, vemos que, a priori, este campo descreve uma partícula de *spin* $= 1$ e outra de *spin* $= 0$, sendo representadas pelo vetor $\vec{A}$ e pelo escalar Φ, respectivamente. Já $H_{\mu\nu}$, por ser um tensor anti-simétrico de *rank*-2 e real, possui 6 parâmetros reais independentes:

$$H_{\mu\nu} = \begin{cases} H_{0i} = (+\vec{a})_i \\ H_{ij} = -\epsilon_{ijk}(\vec{\varphi})_k \end{cases}$$

e pode descrever, a príncipio, duas partículas de *spin* $= 1$.

Todavia, uma conseqüência, tanto das simetrias (no caso, as de gauge) quanto das equações de movimento, é de diminuir o número de tais parâmetros, e assim, reduzir o número de g.l. físicos. De fato, a transformação de gauge que atua em A_μ subtrai a componente longitudinal deste campo, ou seja, a componente escalar (*spin* $= 0$); isto é o que nos permite, por exemplo, escolher o gauge de Lorentz, $\partial_\mu A^\mu = 0$). Já para $H_{\mu\nu}$, sua respectiva transformação subtrai-lhe 3 dos 6 g.l. possíveis. Portanto, restam-nos 3 g.l. para cada um dos campos (*off-shell*, i.e., utilizando-se apenas as simetrias da teoria. Veja Apêndice B.1). Para passarmos à análise *on-shell*, i.e., usando-se, efetivamente, as equações de movimento, vamos distinguir dois casos:

caso 1: $\mu_0 = 0$, não há acoplamento entre os campos. Aqui, as equações de movimento, escritas no espaço dos momenta (B.17-B.18,B.21-B.22 e B.23-B.24, no Apêndice B.2) determinam que A_μ propaga somente 2 g.l. físicos (*on-shell*) ao passo que $H_{\mu\nu}$ só propaga 1; segue também, que ambos os campos têm massa nula (observe a estrutura de pólos dos propagadores para esses campos):

$$\triangle_A^{\mu,\nu}(p) = \frac{-1}{p^2}\Theta^{\mu\nu}$$
$$\triangle_H^{\mu\nu,\alpha\beta}(p) = \frac{-1}{p^2}\left(\left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{3\nu} - \eta^{\mu 3}\eta^{\alpha\nu}\right) - \left(\eta^{\mu\alpha}\omega^{3\nu} - \eta^{\mu 3}\omega^{\alpha\nu}\right)\right),$$

sendo os projetores definidos por:

$$\Theta^{\mu\nu} = \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right), \qquad \omega^{\mu\nu} \equiv \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}$$

Em síntese, o espectro da teoria livre é o seguinte: A_μ descreve um bóson vetorial sem massa (como o fóton, por exemplo), enquanto $H_{\mu\nu}$ comporta-se como uma partícula escalar, também de massa nula. (Consulte também [28, 43, 44]).

caso 2: $\mu_0 \neq 0$, que é o modelo propriamente dito. Neste caso, as equações de movimento (também escritas no espaço dos momenta; equações (B.38-B.39) e (B.42), no Apêndice B.2) mostram-nos que, aparentemente, cada um dos campos propaga 3 g.l. físicos, e possuem a mesma massa ($M_A^2 = M_H^2 = +2\mu_0^2$), o que pode ser visto da estrutura dos propagadores:

$$\tilde{\Delta}_A^{\mu,\nu}(p) = \frac{-1}{(p^2 - 2\mu_0^2)} \left(\Theta^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}\right) = \frac{-1}{(p^2 - 2\mu_0^2)} \eta^{\mu\nu},$$
$$\tilde{\Delta}_H^{\mu\nu,\kappa\lambda}(p) = \frac{-1}{(p^2 - 2\mu_0^2)} \left[\frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda} - \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\kappa}\right)\right].$$

Todavia, o modelo descreve, na verdade, apenas um bóson vetorial massivo, que pode ser descrito tanto por A_μ quanto por $H_{\mu\nu}$, indiferentemente (veja comentário no Apêndice B.2, e também as referências [27, 40, 42]). Isto pode parecer um tanto peculiar, mas é o que acontece de fato: as próprias equações de movimento (aquelas referidas logo acima) exibem isto claramente, pois descrevem o movimento livre tanto de um quanto do outro campo. Mais ainda, note que o que diferencia os dois casos ($\mu_0 = 0$ e $\mu_0 \neq 0$) é a presença do termo de "mixing" entre os campos de gauge. No entanto, como mostramos na seção anterior, tal termo não carrega nenhum g.l. físico (além de não contribuir com energia e momento para $\mathcal{L}_1$). Assim sendo, é de se esperar que, de fato, ele se comporte, neste caso, como um mecanismo de geração de massa[27, 40]. Isto nos leva à conclusão de que o número de g.l. físicos do modelo não deve mudar devido a sua presença. É por isso que, tanto para $\mu_0 = 0$ quanto para $\mu_0 \neq 0$, temos 3 g.l. físicos. Por outro lado, mesmo que a presença deste termo não altere a quantidade de g.l., ela altera o espectro do modelo: para $\mu_0 = 0$ tínhamos 1 bóson vetorial e outro escalar, ambos sem massa; e agora ($\mu_0 \neq 0$) temos 1 bóson vetorial massivo.

O papel das simetrias de gauge, bem como das equações de movimento, é evidente com relação ao espectro do modelo: subtrai certos g.l. dos campos, determinando assim o seu conteúdo físico de partículas.

A seguir, vamos analisar se o modelo é compatível ou não com a presença de monopólos magnéticos de Dirac.

Capítulo 2

O "background" de matéria e a configuração de monopólos

Para estudarmos a compatibilidade do modelo com a presença de monopólos de Dirac, teremos que incorporar campos de matéria (no caso, fermiônica), já que $\mathcal{L}_1$ é composto apenas por campos de gauge. A introdução de tais campos faz-se necessária, porque o problema que vamos estudar é o de uma partícula teste no campo de um monopólo magnético. Neste sentido, tal partícula seria "criada" pelo campo de matéria[1]. Isto será tratado no ínicio da Seção 2.1, onde acoplaremos os campos de matéria ao de gauge (A_μ), de forma a preservar a covariância de gauge e de Lorentz do Lagrangeano ($\mathcal{L}_2$). Deste, são obtidas as equações dinâmicas. Aquelas para os campos de gauge são reescritas em notação 3-dimensional e, a partir daí, analisamos se este modelo é compatível, ou não, com a presença de monopólos de Dirac. Mostramos que, realmente, tais *objetos* não são admitidos dentro do modelo em questão, basicamente, porque a "string" que está presente na solução do potencial $\vec{A}$ (ao longo da qual, $\vec{A}$ é singular) apresenta-se detectável (por

[1]É claro que, uma teoria de campos lida com um *número infinito de partículas*. Considerar uma só partícula é dar, neste sentido, um tratamento de Mecânica Quântica, a um problema de teoria de campos.

exemplo, via Efeito Bomh-Aharonov). Verificamos que este *problema* surge devido ao fato do campo magnético $\vec{B}$ não ser esfericamente simétrico, neste caso.

Assim, na Seção 2.2, proporemos (e usaremos) um método para solucioná-lo. Este consiste em impor um *ansatz* tipo-London para a componente vetorial da 4-corrente fermiônica ($\vec{J}$). Isto, de fato, resolve o problema e, assim, poderemos obter uma condição de quantização (de Dirac), o que, em outras palavras, torna aquela "string" fisicamente indetectável. Por outro lado, ao impor tal *ansatz*, conseqüentemente, obtemos uma corrente, $\vec{J}$, com a mesma estrutura de singularidade que $\vec{A}$ (que agora, devido à condição de quantização que obtivemos, não apresenta conteúdo físico). Este ponto é discutido, mas ainda carece de uma interpretação plausível.

2.1 A introdução de campos de matéria no modelo CSKR

No intuito de introduzirmos uma corrente de matéria para o modelo em questão, consideremos o Lagrangeano:

$$\mathcal{L}_1 \quad \stackrel{J^\mu}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \overline{\psi}(\imath\mathcal{D}_\mu\gamma^\mu - m)\psi, \tag{2.1}$$

com $\mathcal{L}_1$ já conhecido, e $\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + \imath e A_\mu$ sendo a derivada covariante de gauge (quanticamente, deveríamos ter $\imath e A_\mu/\hbar$, como segundo termo em $\mathcal{D}_\mu$). Como sabemos, esta é a forma covariante, de gauge e de Lorentz, que temos para acoplar férmions ao campo de gauge A_μ, em (3+1) dimensões espaço-temporais. Denotamos por e o "*strength*" deste acoplamento.

Além do mais, observe que, $S_2 = \int d^4x\mathcal{L}_2$, é invariante sob $U(1)_A \otimes U(1)_H$, desde que os férmions transformem-se como:

$$\begin{cases} \psi(x) \longmapsto \psi'(x) = exp(+\imath e\Lambda(x))\psi(x) \\ \overline{\psi}(x) \longmapsto \overline{\psi}'(x) = exp(-\imath e\Lambda(x))\overline{\psi}(x). \end{cases} \tag{2.2}$$

Seguem-se as equações de campo para os férmions:

$$\begin{cases} ((\imath\partial_\mu - eA_\mu)\gamma^\mu - m)\psi(x) = 0 \\ \overline{\psi}(x)((\imath\overleftarrow{\partial}_\mu + eA_\mu)\gamma^\mu + m) = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde γ^μ são as 4 matrizes de Dirac, que satisfazem à álgebra de Clifford: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = +2\eta^{\mu\nu}$. Já $\overleftarrow{\partial}_\mu$ na segunda expressão, implica que a devivação atua sobre $\overline{\psi}(x)$.

Para os campos de gauge, obtemos:[2]

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0\epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho}\partial_\kappa H_{\lambda\rho} + eJ^\nu = -2\mu_0\tilde{G}^\nu + eJ^\nu \tag{2.4}$$

$$\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = +\mu_0\epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho}\partial_\lambda A_\rho = +\mu_0\tilde{F}^{\nu\kappa}, \tag{2.5}$$

com a definição: $J^\nu = \overline{\psi}\gamma^\nu\psi$, sendo $J^\nu = (\rho, +\vec{J})$. De (2.4) fica claro que J^μ é uma corrente conservada.

Num trabalho recente, Allen *et al* [40] sugerem que $\mathcal{L}_2$ seja entendido como um modelo de QED *estendida* (QED *usual* + setor tensorial), no qual o fóton seria massivo. [Tal extensão não compromete nem a renormalizabilidade nem a unitariedade da teoria "standard"]. Uma QED com fóton massivo[3] é a extensão mais simples da teoria usual (podendo,

[2]Usaremos unidades naturais, aquelas comumente usadas em T.Q.C. Para um comentário e relações com outros sistemas de unidades, veja[3]. Assim, por exemplo, haverá um aparente diferença entre a condição de quantização aqui escrita e aquela do trabalho original de Dirac[19, 20], que usa as unidades gaussianas para a Eletrodinâmica (enquanto aqui, usaremos as de Heaviside-Lorentz).

[3]Existem diversos limites máximos (dependendo do experimento) para a massa do fóton [47]. Além do mais, os resultados experimentais seriam completamente compatíveis com a QED usual se tais limites forem obedecidos. Para uma melhor discussão a respeito deste assunto, sugerimos: Bass e Schrödinger[48], Boulware e Deser[49] e também, Nieto e Goldhaber[47] para um "review" sobre o assunto.

inclusive, ser embebida numa teoria de gauge unificada, como a de Weinberg-Salam). No entanto, se por um lado, a presença de tal massa (por menor que fosse) tornaria a teoria mais facilmente manipulável (por exemplo, a quantização poderia ser feita de uma maneira covariante de Lorentz sem invocar uma métrica indefinida e, a ausência das divergências infra-vermelha), por outro, a introdução de monopólos magnéticos de Dirac estaria comprometida[4]. Tal impossibilidade ocorre, por exemplo, com a teoria de Proca [52, 53] (veja também, Ahrens[54] e Dattoli e Mattioli[55]), e também, com o modelo aqui estudado, $\mathcal{L}_2$, como mostraremos a seguir. Em ambos os casos, é justamente o fato do bóson vetorial possuir massa que impede a presença de tais monopólos na teoria, isto porque, como veremos adiante, ao "sentir" tal massa, o campo magnético perde sua simetria esférica (propriedade esta, que parece ser essencial para que a teoria acomode monopólos de Dirac).

Passemos agora, à introdução de monopólos magnéticos ao modelo. Como se sabe, isto é feito mediante a quebra da identidade de Bianchi para o setor "Eletromagnético" [3]-[5] e [19, 20, 52]:[5]

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \qquad \overset{\text{monopolo}}{\longrightarrow} \qquad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \chi^\nu; \tag{2.6}$$

sendo $\chi^\mu = (\chi^0, \vec{\chi})$ a 4-corrente magnética conservada (já que $\partial_\mu \chi^\mu = 0$).

Um fato interessante deve ser notado: a introdução de monopólos magnéticos (e a conseqüente quebra da identidade $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$) causa *"problemas"* não só no setor eletro-

[4]Até onde sabemos, tal afirmação é válida para teorias Abelianas (com ou sem simetria de gauge) construídas no espaço-tempo de Minkowski. De fato, conforme mostrado por Israelit[50, 51], num espaço-tempo com torção, poderiam existir fótons massivos e monopólos de Dirac. O modelo proposto por este autor recobre a teoria de Maxwell, se tomarmos o limite de torção nula e fóton sem massa.

[5]O uso de tal expressão, aqui e adiante, deve-se à analogia entre o setor de A_μ, aqui tratado, e a teoria de Maxwell. Assim, quando fizermos alguma referência a esta teoria, isto será explicitado.

magnético do modelo (que envolve A_μ), mas também, no setor tensorial (de $H_{\mu\nu}$). Isto pode ser verificado, diretamente, das expressões (2.4 e 2.5) e da relação de dualidade entre F e $\tilde{F}$. Assim, se por um lado, A_μ passa a ter estrutura singular, o mesmo deverá ocorrer no setor de $H_{\mu\nu}$ (como veremos adiante, uma estrutura singular idêntica é apresentada por $\tilde{G}_\mu$).

Conforme adiantamos no parágrafo precedente, a quebra da identidade de Bianchi para o setor eletromagnético, torna o potencial A^μ indefinido globalmente (além da conhecida indeterminação de gauge). Tal indefinição pode ser contornada pela fixação de uma *linha* (dita "string" de Dirac, que não precisa ser reta, necessariamente), que comece no monopólo e vá até o infinito, ao longo da qual, A^μ é singular, ou seja, toma valores infinitos. A escolha da "string" é arbitrária, mas determinará a estrutura de A_μ. Assim, diferentes *linhas* nos levam a diferentes formas para o potencial vetor. No entanto, a condição de quantização de Dirac é invocada, para nos garantir que tal "string" não possua qualquer significado físico. Esta afirmação é verdadeira, por exemplo, para a Eletrodinâmica (de alcance infinito) com monopólos. Originalmente, Dirac[19] chegou a tal condição:[6]

$$\frac{eg}{4\pi} = \frac{n}{2}\hbar c\,,$$

impondo que a função de onda de um elétron[7], colocado no campo magnético de um monopólo (estático e puntual), fosse "*single-valued*", o que noutras palavras, implica em

[6]Observe que aqui, estamos utilizando unidades naturais (e de Heaviside para a Eletrodinâmica, enquanto Dirac usou unidades Gaussianas), daí, a aparente controvérsia com o resultado original de Dirac: $eg = \hbar cn/2$. Veja Apêndice A.

[7]Nesta análise, os *spins*, tanto das partículas teste (no caso, o elétron) quanto do monopólo, não são levados em consideração. No entanto, a inclusão desta quantidade não traz nenhum problema, devendo somente, ser adicionada ao momento angular total do sistema. Aproveitamos o momento, para enfatisar que em todos os problemas semelhantes a este, exposto acima, seguiremos esta análise, ou seja, trataremos as partículas envolvidas com *spin* $= 0$.

dizer que a *variação de sua fase*:

$$\Delta\alpha = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

devido à "string", deverá ser nula (ou múltipla de $2\pi n$, com n inteiro. Isto é discutido em detalhes, no Apêndice A).

A partir de então, outros procedimentos foram desenvolvidos e utilizados [57]-[63]. Gostaríamos, pelo momento, de citar o de Wu e Yang[57], cuja formulação baseia-se no conceito de *fatores de fase não-integráveis*, e constitui-se, para o caso da Eletrodinâmica com monopólos, no procedimento mais rigoroso para se mostrar a condição de Dirac. Para uma discussão um pouco mais detalhada, veja o Apêndice A, onde apresentamos uma introdução aos monopólos de Dirac.

Observe, então, que para o modelo que estamos estudando. a presença de monopólos magnéticos (de modo consistente. isto é, com a "string" fisicamente indetectável) nos será garantida, se pudermos mostrar que, para um problema semelhante àquele exposto acima (elétron no campo de um monopólo), por exemplo, é possível obtermos uma *condição de quantização*, análoga à de Dirac. É justamente a esse ponto que vamos nos ater daqui pra diante.

No intuito de estudarmos a questão dos monopólos, propriamente dita. será preferível trabalharmos com as equações em notação tri-dimensional. Assim, definimos:[8]

$$A^{\mu} = (A^0, A^i) \equiv (\Phi, +\vec{A}) \tag{2.7}$$

$$H_{\mu\nu} = \begin{cases} H_{0i} \equiv (+\vec{a})_i \\ H_{ij} \equiv -\epsilon_{ijk}(\vec{\varphi})_k, \end{cases} \tag{2.8}$$

assim como:

$$F_{\mu\nu} = \begin{cases} F_{0i} = -\left(\nabla\Phi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)_i \equiv +(\vec{E})_i \\ F_{ij} = -\epsilon_{ijk}(\nabla \wedge \vec{A})_k \equiv -\epsilon_{ijk}(\vec{B})_k \end{cases} \tag{2.9}$$

[8]Usamos: $\epsilon_{123} = \epsilon^{123} = +1$; índices latinos vão de 1 a 3: i, j,etc$= 1, 2, 3$.

$$G_{\mu\nu\kappa} = \begin{cases} G_{0ij} = -\epsilon_{ijk}\left(\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t} + \nabla \wedge \vec{a}\right)_k \equiv -\epsilon_{ijk}(\vec{\mathcal{E}})_k \\ G_{ijk} = -\epsilon_{ijk}(\nabla \cdot \vec{a}) \equiv +\epsilon_{ijk}\,\mathcal{B} \end{cases} \tag{2.10}$$

e assim:

$$\tilde{G}^{\mu} = +\frac{1}{3!}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}G_{\nu\kappa\lambda} = (\mathcal{B}, \vec{\mathcal{E}}). \tag{2.11}$$

Feito isto, as equações (2.4-2.6) e a identidade de Bianchi, $\partial_\mu \tilde{G}^\mu = 0$, escrevem-se como segue:

$$\nabla \wedge \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\partial \vec{E}(\vec{r})}{\partial t} + e\vec{J}(\vec{r}) - 2\mu_0 \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}), \tag{2.12}$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = +e\rho(\vec{r}) - 2\mu_0 \mathcal{B}(\vec{r}), \tag{2.13}$$

$$\nabla \wedge \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = +\mu_0 \vec{B}(\vec{r}), \tag{2.14}$$

$$\nabla \mathcal{B}(\vec{r}) + \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})}{\partial t} = -\mu_0 \vec{E}(\vec{r}), \tag{2.15}$$

$$\nabla \wedge \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{r})}{\partial t} = +\vec{\chi}(\vec{r}), \tag{2.16}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \chi^0(\vec{r}), \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial \mathcal{B}(\vec{r})}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0. \tag{2.18}$$

A partir de agora, vamos nos concentrar no seguinte problema: suponha uma configuração de monopólo magnético de Dirac (estático e puntual; situado na origem, por conveniência); no campo gerado por ele, vamos colocar uma partícula teste (de massa m_p), com carga elétrica de prova q. (Observemos que, uma vez que os campos fermiônicos estão acoplados ao campo de gauge A_μ, então as partículas destes campos poderão possuir carga frente a esse grupo de simetria, digo, $U(1)_{A_\mu}$). Suporemos também, que tal partícula só interaja com o campo magnético do monopólo, cuja configuração não será alterada, apreciavelmente, pela carga de prova.

Para esta configuração de monopólo, devemos tomar o limite estático para os campos e correntes, além de fazer: $\vec{\chi} = \vec{0}$ e $\chi^0(\vec{r}) = +g\delta^3(\vec{r})$. Já que se tratam de monopólos de

Dirac, também devemos fazer: $\vec{J} = 0$ e $\rho = 0$. Assim, as equações acima ficam:

$$\nabla \wedge \vec{B}(\vec{r}) = -2\mu_0 \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \tag{2.19}$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -2\mu_0 \mathcal{B}(\vec{r}) \tag{2.20}$$

$$\nabla \wedge \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = +\mu_0 \vec{B}(\vec{r})$$

$$\nabla \mathcal{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{E}(\vec{r}) \tag{2.21}$$

$$\nabla \wedge \vec{E}(\vec{r}) = 0 \tag{2.22}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \chi^0(\vec{r}) = g\delta^3(\vec{r}) \tag{2.23}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0 \tag{2.24}$$

Antes de introduzirmos, de fato, a partícula teste no campo do monopólo, vamos analisar a consistência das equações acima. Para aquelas que relacionam $\vec{E}$ e $\mathcal{B}$, não se verifica qualquer inconsistência, pois tendo-se:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{E}_0}{4\pi} exp(-\sqrt{2}\mu_0|\vec{r}|) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B}(\vec{r}) = \frac{\mathcal{B}_0}{4\pi} exp(-\sqrt{2}\mu_0|\vec{r}|) \tag{2.25}$$

com a relação: $\sqrt{2}\mu_0\mathcal{B}_0\hat{r} = +\vec{E}_0$, as equações que envolvem estes campos são satisfeitas. Da expressão acima, fica clara a dependência deste setor elétrico com relação à massa do bóson descrito pelo modelo CSKR.

Já para o setor de $\vec{B}$ e $\vec{\mathcal{E}}$, temos (para maiores detalhes a respeito dos cálculos que se seguirão consulte Ygnatiev e Joshi[52]):

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = +g\delta^3(\vec{r}) \quad \Longrightarrow \quad \vec{B}(\vec{r}) = +\frac{g}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3} \equiv \vec{B}^D(\vec{r}), \tag{2.26}$$

que, por sua vez, nos dá (em coordenadas esféricas: r, θ, ϕ; e escolhendo-se a "string" ao longo de $\theta = +\pi$, ou $r = -z$):[9]

$$\vec{\mathcal{E}}^D = \begin{cases} \mathcal{E}_r^D = \mathcal{E}_\theta^D = 0; \\ \mathcal{E}_\phi^D = \frac{g\mu_0}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \end{cases} \tag{2.27}$$

$$\vec{A}^D = \begin{cases} A_r^D = A_\theta^D = 0; \\ A_\phi^D = \frac{g}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \end{cases}. \tag{2.28}$$

Mas, $\nabla \wedge \vec{B}^D(\vec{r}) = 0$, o que é inconsistente com $\nabla \wedge \vec{B}(\vec{r}) = -2\mu_0\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ (que é $\neq 0$, a priori). Assim sendo, para resolvermos este problema, deveremos encontrar uma solução mais geral para $\vec{B}$. Assim, se conseguirmos:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}^D(\vec{r}) + \vec{B}'(\vec{r}), \tag{2.29}$$

tal que:

$$\nabla \cdot \vec{B}'(\vec{r}) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \wedge \vec{B}'(\vec{r}) = -2\mu_0\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}), \tag{2.30}$$

sendo que, $\vec{\mathcal{E}} \equiv \vec{\mathcal{E}}^D + \vec{\mathcal{E}}'$ assim obtido, satisfaça $\nabla \wedge \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = +\mu_0\vec{B}(\vec{r})$ e $\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0$, então tal problema estaria resolvido.

Substituindo-se (2.21) em (2.19), e lembrando-se que $\nabla \wedge \nabla \wedge \vec{\mathcal{E}}^D(\vec{r}) = \nabla \wedge \vec{B}^D(\vec{r}) = 0$, teremos:

$$(\nabla^2 - 2\mu_0^2)\vec{\mathcal{E}}'(\vec{r}) = -2\mu_0^2\vec{\mathcal{E}}^D(\vec{r}) \tag{2.31}$$

cuja solução é:

$$\vec{\mathcal{E}}'(\vec{r}) = +\frac{2\mu_0^2}{4\pi}\int d^3r'\vec{\mathcal{E}}^D(\vec{r'})\frac{exp(-\sqrt{2}\mu_0|\vec{r}-\vec{r'}|)}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \tag{2.32}$$

[9] Observe que não estamos utilizando $A_\mu = \frac{\tilde{G}_\mu}{\mu_0}$. Isto porque se o fizéssemos, poderíamos ter problemas, se eventualmente, precisássemos tomar o limite $\mu_0 \to 0$. [Além do mais, A_μ é um campo de gauge, enquanto $\tilde{G}_\mu$ é invariante de gauge]. O que se obtém para $\vec{A}^D$ e $\vec{\mathcal{E}}^D$ seguem de (2.21) e da própria definição do campo $\vec{B}$, $\vec{B} \equiv +\nabla \wedge \vec{A}$.

que nos conduz a:

$$\vec{B}'(\vec{r}) = \nabla \wedge \frac{\vec{\mathcal{E}}'(\vec{r})}{\mu_0} = +\frac{2\mu_0}{4\pi}\int d^3\vec{r'}(1+\sqrt{2}\mu_0 R)\,\frac{exp(-\sqrt{2}\mu_0 R)}{R^3}\,(\vec{\mathcal{E}}^D(\vec{r'})\wedge\vec{R}), \quad (2.33)$$

com $\vec{R} \equiv (\vec{r}-\vec{r'})$ e $R = |\vec{r}-\vec{r'}|$.

Segue da definição do vetor $\vec{B}$, $\vec{B} = \nabla\wedge\vec{A}$, a forma para $\vec{A}'$:

$$\vec{A}'(\vec{r}) = +\frac{2\mu_0}{4\pi}\int d^3\vec{r'}\vec{A}^D(\vec{r'})\frac{exp(-\sqrt{2}\mu_0 R)}{R} \quad (2.34)$$

Notemos um aspecto interessante no setor magnético: $\vec{B}^D$, que é o campo gerado pelo monopólo, não tem sua solução afetada por μ_0 (e assim, *não sente* a massa do bóson vetorial descrito pelo modelo CSKR); já $\vec{B}'$, que não possui simetria esférica (já que, por construção, $\nabla\wedge\vec{B}' = -2\mu_0\vec{\mathcal{E}} \neq 0$), *sente* esta massa, o que é explícito em sua solução. (Um quadro análogo é exibido pela teoria de Proca com monopólos. Para detalhes, consulte[52]).

Mostra-se que, ao contrário de $\vec{A}^D$ (ou $\vec{\mathcal{E}}^D$), o vetor $\vec{A}'$ (ou $\vec{\mathcal{E}}'$) não possui singularidades tipo "string"[52]. Neste mesmo trabalho (no qual é estudada a teoria de Proca), demonstra-se que:

$$\nabla\cdot\vec{A}'(\vec{r}) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}'(\vec{r}) = 0$$

para $\vec{A}'$ e $\vec{\mathcal{E}}'$ dados pelas expressões acima. Desta forma, resolve-se o problema de inconsistência que havia no setor de equações que envolviam $\vec{B}$ e $\vec{\mathcal{E}}$. Cabe salientar que nesta demonstração, $\vec{A}'$ (ou aqui, também $\vec{\mathcal{E}}'$), é suposto ser um *pseudo-vetor* e não um vetor. Noutras palavras, estes autores tratam a teoria de Proca como não sendo invariante sob paridade. Todavia (como eles mesmo afirmam), os resultados físicos são independentes desta escolha.

Agora vamos tratar do problema, de fato: coloquemos a partícula teste no campo do *monopólo. Seu Lagrangeano (massa m_p e carga $+q$) será dado por:*[10]

$$L_p = \frac{1}{2} m_p \dot{r}^2 + q\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}. \tag{2.35}$$

Do qual, seguem-se as equações de movimento (clássicas) para a partícula.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_p}{\partial \dot{r}_i}\right) - \frac{\partial L_p}{\partial r_i} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = m_p\ddot{\vec{r}} = +q\dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}(\vec{r}). \tag{2.36}$$

onde $\vec{B} = \vec{B}^D + \vec{B}'$, e $\vec{p} = m_p\dot{\vec{r}}$ é o momento cinético (linear) para a partícula.

O momento canonicamente conjugado à coordenada r_j é dado por:[11]

$$\pi_j \equiv \frac{\partial L_p}{\partial \dot{r}_j} = m_p \dot{r}_j + qA_j, \tag{2.37}$$

como podemos determinar $\dot{r}_j(\vec{\pi})$, $\forall j = 1, 2, 3$:

$$\dot{r}_j = \frac{1}{m_p}(\pi_j - qA_j),$$

então, o Hamiltoniano se escreve:

$$H_p \equiv \sum_j \pi_j \dot{r}_j(\pi) - L_p = \frac{1}{2m_p}(\vec{\pi} - q\vec{A})^2 = \frac{1}{2m_P}(\vec{p})^2 \tag{2.38}$$

Passemos agora, à questão de uma possível condição de quantização para o problema estudado. Assim, a partir de agora, consideraremos as quantidades físicas clássicas como

[10]Que é obtido de:

$$S = \int \left(-m_p c\, ds - \frac{q}{c}A_\mu dx^\mu\right) = \int \left(-m_p c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} - \frac{q}{c}\Phi\right) dt$$

tomando-se o limite não-relativístico, bem como $\Phi = 0$. Observe que estamos denotando $q = eq'$, onde q' responde pela carga da partícula em unidades da constante e. Usamos também $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$.

[11]Observe que as grandesas canônicas, são dependentes do potencial A_μ, que possui singularidades. Assim sendo, elas serão apresentadas aqui, apenas de modo ilustrativo. Para que possamos utilizá-las, efetivamente, por exemplo, para procedermos uma quantização canônica para um sistema, deveremos ter de antemão, uma garantia de que aquela singularidade não seja fisicamente detectável.

operadores quânticos. Canonicamente, esta passagem é feita *levando-se* os parênteses de Poisson (clássicos) às relações de comutação correspondentes, através da prescrição:

$$\{\alpha, \beta\}_{r,\pi} \leftrightarrow \frac{-\imath}{\hbar}[\alpha, \beta] \tag{2.39}$$

(claramente, no lado direito desta expressão, α e β são operadores quânticos). Com o parêntese de Poisson de α e β definido por:

$$\{\alpha, \beta\}_{r,\pi} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial\, \alpha}{\partial r_i}\frac{\partial\, \beta}{\partial \pi_i} - \frac{\partial\, \beta}{\partial r_i}\frac{\partial\, \alpha}{\partial \pi_i}\right). \tag{2.40}$$

Todavia, se tentarmos escrever o operador de momento angular conservado ($\mathcal{J}$, tal que $[\mathbf{H}, \mathcal{J}] = 0$, sendo $\mathbf{H}$ o operador de energia, ou o Hamiltoniano) para este problema, que satisfaça às relações de comutação:

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = \imath\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k \tag{2.41}$$

$$[\mathcal{J}_i, r_j] = \imath\epsilon_{ijk}\, r_k \tag{2.42}$$

$$[\mathcal{J}_i, p_j] = \imath\epsilon_{ijk}\, p_k \tag{2.43}$$

(que são as relações (A.28-A.30), no Apêndice A), concluiremos que tal operador não existe para o problema em questão. Realmente, esta impossibilidade surge do fato de $\vec{B} = \vec{B}^D + \vec{B}'$ não ser esfericamente simétrico (devido à presença de $\vec{B}'$.

Vamos esclarecer melhor este ponto. (O que se segue, é mostrado em detalhes na referência[52], para o caso da Teoria de Proca, na presença de monopólos. Uma leitura atenta levará à conclusão de que os mesmos argumentos e resultados, aplicam-se aqui). Das relações de comutação acima , segue-se que:

$$[\mathcal{J}_i, B_j] = \imath\epsilon_{ijk}B_k \tag{2.44}$$

No entanto, para $\vec{B} = \vec{B}^D + \vec{B}'$, a relação de comutação acima, não é satisfeita. De fato,

$$[\mathcal{J}_i, B_j^D] = \imath\epsilon_{ijk}B_k^D\,,$$

mas $\vec{B}'$ não satisfaz à relação semelhante. Para ver isto melhor, vamos escrever este vetor como a soma de duas partes: $\vec{f}$, que tem simetria esférica; e $\vec{g}$ que não a possui. Temos, então:

$$\vec{B}'(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r}) + \vec{g}(\vec{r}).$$

Para que $[\mathcal{J}_i, B'_j] = \imath\epsilon_{ijk}B'_k$ (e daí, possamos prosseguir no processo de quantização da componente radial de $\mathcal{J}$: $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathcal{J}$), teríamos que ter

$$\vec{g} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{B}'(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r})$$

No entanto, tal estrutura (simetria esférica) é incompatível com $\vec{B}'$, já que:

$$\nabla \wedge \vec{B}' = -2\mu_0\vec{\mathcal{E}} \neq 0$$

Portanto, o fato de $\vec{B}'$ não ser esferiamente simétrico, impede-nos de obter um operador de momento angular conservado para o problema em questão. e daí, uma condição de quantização (tipo a de Dirac). (Também neste aspecto, nosso modelo é muito semelhante à teoria de Proca com monopólo magnético[52].)

Uma demonstração mais rigorosa de tal impossibilidade, será dada a seguir. Mostraremos, que se considerarmos duas soluções distintas para $\vec{A} = \vec{A}^D + \vec{A}'$, com as "strings" escolhidas ao longo de $r = \pm z$ $(\theta = 0, \pi)$, então, mesmo numa região (em torno do monopólo) onde ambas são bem definidas, elas não se relacionam por uma transformação de gauge, e daí, o porque de não termos obtido uma condição de quantização para o problema em questão. Assim, consideremos as seguintes expressões para $\vec{A}$:

$$\vec{A}_a(\vec{r}) = \begin{cases} (A_a)_r = (A_a)_\theta = 0 \\ (A_a)_\phi = (A_a^D)_\phi + (A'_a)_\phi \end{cases} \tag{2.45}$$

$$\vec{A}_b(\vec{r}) = \begin{cases} (A_b)_r = (A_b)_\theta = 0 \\ (A_b)_\phi = (A_b^D)_\phi + (A'_b)_\phi \end{cases} \tag{2.46}$$

sendo que $\vec{A}_a$ e $\vec{A}_b$ possuem "strings" ao longo de $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, respectivamente. Com as expressões:

$$(A_{a,b})_\phi \, \hat{e}_\phi = \vec{A}_{a,b} = (A^D_{a,b})_\phi + (A'_{a,b})_\phi$$

onde:

$$(A^D_a)_\phi = -\frac{g}{4\pi r}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \qquad (A^D_b)_\phi = \frac{g}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \tag{2.47}$$

e também:

$$(A'_{a,b})_\phi \, \hat{e}_\phi = \frac{2\mu_0^2}{4\pi}\int d^3\vec{r'}\, \vec{A}^D_{a,b}(\vec{r'})\, \frac{exp(-\sqrt{2}\mu_0|\vec{r}-\vec{r'}|)}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \tag{2.48}$$

Agora, vamos dividir o espaço em torno do monopólo, em duas regiões:

$$R_a = \begin{cases} r > 0 \\ 0 < \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases} \quad , \quad R_b = \begin{cases} r > 0 \\ 0 \leq \theta < \pi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases}$$

Claramente, R_a compreende todo espaço, com exceção do semi-eixo $r = +z$ $(\theta = 0)$, onde $\vec{A}_a$ é singular; ao passo que R_b exclui $r = -z$ $(\theta = \pi)$, ao longo do qual, $\vec{A}_b$ possui estrutura singular.

Todavia, na região de interseção ente R_a e R_b, ou seja, todo o espaço que circunda o monopólo, com exceção do eixo z ($r = \pm z$ ou $\theta = 0, \pi$), ambas as soluções $\vec{A}_{a,b}$ são bem definidas (já que a estrutura singular de $\vec{A}$ está contida em $\vec{A}^D$, pois $\vec{A'}$ é regular). Assim, para que tais soluções sejam igualmente satisfatórias, nessa interseção, elas devem se relacionar aí via uma transformação de gauge. No entanto, isto não é possível, neste caso. Realmente, $\vec{A}^D_a$ e $\vec{A}^D_b$ se relacionam desta forma, mas $\vec{A}'_a$ e $\vec{A}'_b$ não. É justamente isto, que vamos mostrar a seguir. Tomemos, na região de interceção, a diferença:

$$\vec{A}_a(\vec{r}) - \vec{A}_b(\vec{r}) = [\vec{A}^D_a(\vec{r}) - \vec{A}^D_b(\vec{r})] + [\vec{A}'_a(\vec{r}) - \vec{A}'_b(\vec{r})]$$

como é mostrado em detalhes no Apêndice A, seção A.2,

$$\vec{A}^D_a(\vec{r}) - \vec{A}^D_b(\vec{r}) = -\frac{2g}{4\pi r \sin\theta}\hat{e}_\phi = +\frac{\imath\hbar c}{q} S^D \nabla (S^D)^{-1},$$

com:

$$S^D = exp\left(\frac{2\imath q g}{4\pi\hbar c}\phi\right)$$

sendo S^D a transformação de gauge correspondente.

Já para $\vec{A}'$:

$$\begin{aligned}
\vec{A}'_a - \vec{A}'_b &= 2\mu_0^2 \int d^3\vec{r'}\,(\vec{A}^D_a(\vec{r}) - \vec{A}^D_b(\vec{r}))\,\frac{exp(-\sqrt{2}\mu_0|\vec{r}-\vec{r'}|}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \\
&= 2\mu_0^2 \int d^3\vec{r'}\,(-\frac{2g}{r\sin\theta})\frac{exp(-\sqrt{2}\mu_0|\vec{r}-\vec{r'}|}{|\vec{r}-\vec{r'}|)}\,\hat{e}_\phi
\end{aligned}$$

passando-se a integral para coordenadas esféricas ($d^3\vec{r'} = r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\phi$), obtemos:

$$\begin{aligned}
\vec{A}'_a - \vec{A}'_b &= -\frac{4g\mu_0^2}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\infty} r'\,\frac{exp(-\sqrt{2}\mu_0|\vec{r}-\vec{r'}|}{|\vec{r}-\vec{r'}|)}\,dr'\right)d\theta\,\hat{e}_\phi \\
&= -2g\mu_0^2 \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\infty} r'\,\frac{exp(-\sqrt{2}\mu_0|\vec{r}-\vec{r'}|}{|\vec{r}-\vec{r'}|)}\,dr'\right)d\theta\,\hat{e}_\phi \\
\Longrightarrow\ & \vec{A}'_a - \vec{A}'_b \equiv -2g\mu_0^2 f(r)\hat{e}_\phi \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

onde definimos $f(r)$ como a função que é obtida ao se fazer as integrações em r' e em θ, acima. Uma vez que $\vec{A}'$ não possui singularidade, então o mesmo acontece com $f(r)$.

Não precisaremos da forma explícita desta função em nossa demonstração, no entanto, devemos ter $f(r) \neq 0$. Para ver que isto acontece, façamos:

$$\frac{\partial}{\partial r'} exp(-\sqrt{2}\mu_0|\vec{r}-\vec{r'}|) = \left(+\sqrt{2}\mu_0\vec{r}\cdot\hat{r'} - \sqrt{2}\mu_0 r'\right)\,\frac{exp(-\sqrt{2}\mu_0|\vec{r}-\vec{r'}|)}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$$

o que nos dá (sendo θ o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{r'}$):

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty r'\,\frac{exp(-\sqrt{2}\mu_0|\vec{r}-\vec{r'}|)}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\,dr' &= +r\cos\theta\int_0^\infty \frac{exp(-\sqrt{2}\mu_0|\vec{r}-\vec{r'}|)}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\,dr' + \\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{2}\mu_0}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r'}\left(e^{-\sqrt{2}\mu_0|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)\,dr',
\end{aligned}$$

que nos dá:

$$\int_0^\infty r' \frac{exp(-\sqrt{2}\mu_0|\vec{r}-\vec{r'}|)}{|\vec{r}-\vec{r'}|} dr' = +\frac{1}{\sqrt{2}\mu_0} exp(-\sqrt{2}\mu_0|\vec{r}|) + r\cos\theta \int_0^\infty \frac{exp(-\sqrt{2}\mu_0|\vec{r}-\vec{r'}|)}{|\vec{r}-\vec{r'}|} dr'$$

então, mesmo que a integral acima se anule. o primeiro termo permanecerá finito e não nulo. Conforme já fizemos, vamos denotar o resultado acima por $f(r)$.

Agora escrevemos:

$$\vec{A}'_a - \vec{A}'_b \equiv -2g\mu_0^2 f(r)\hat{e}_\phi = +\frac{\imath\hbar c}{q} S'\nabla(S')^{-1} \tag{2.50}$$

donde segue que S' deve ser:[12]

$$S' = exp\left(-2\imath\mu_0^2 \frac{qg}{\hbar c} r\sin\theta\, f(r)\phi\right) \tag{2.51}$$

para que satisfaça $\vec{A}'_a - \vec{A}'_b$ (na direção ϕ). No entanto, $\nabla(S')^{-1}$ nos dá um vetor que possui componentes ao longo de ϕ, bem como de r e θ, o que é contraditório com a expressão (2.50). Portanto, $\nexists\, S'$ tal que $\vec{A}'_a - \vec{A}'_b = +\frac{\imath\hbar c}{q} S'\nabla(S')^{-1}$, e assim, mostramos o que havíamos afirmado. [Noutras palavras, o tensor eletromagnético, $F_{\mu\nu}$, não poderá ser definido de forma contínua em todos os pontos de uma região arbitrária que envolva o monopólo].

A este ponto, cabe-nos fazer algumas observações:

i) A massa carregada pelo bóson vetorial (descrito pelo modelo em questão), é responsável pela violação da simetria entre os setores elétrico e magnético: enquanto o campo $\vec{E}$ tem sua solução drasticamente afetada por essa massa, já o campo $\vec{B}$ só

[12]Em coordenadas esféricas, o gradiente se escreve:

$$\nabla(r,\theta,\phi) = \hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{e}_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

a sente parcialmente, já que na solução típica de monopólo puntual, $\vec{B}^D$, não está presente nenhum parâmetro de massa;

ii) Como foi observado, é justamente a presença de $\vec{B}'$ (na solução para $\vec{B}$), que nos impede de obtermos uma condição de quantização para o problema estudado. Isto sugere que o fato do setor magnético sentir a massa do bóson, é que nos leva a tal impossibilidade.

A seguir, tentaremos contornar a dificuldade em questão (o que identificamos como sendo a presença de $\vec{B}'$ na solução de $\vec{B}$), para que assim, possamos continuar com nosso trabalho, em busca de uma condição de quantização para o problema.

2.2 A matéria fermiônica como "*background*" para a configuração de monopólos

Como vimos na seção anterior, o modelo CSKR (com matéria fermiônica) não admite a presença de monopólos de Dirac de modo consistente, isto é, preservando a *invisibilidade* física da "string".

No intuito de continuar com nossa discussão, vamos considerar as equações (2.12-2.18) para a configuração de monopólo (estático e puntual), só que com uma diferença em relação às equações (2.19-2.24): que a corrente fermiônica, J^μ, seja mantida. Assim, teremos:

$$\begin{aligned}
&\nabla \wedge \vec{B}(\vec{r}) = +e\vec{J}(\vec{r}) - 2\mu_0\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \qquad (2.52)\\
&\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = +\chi^0 = +g\delta^3(\vec{r})\\
&\nabla \wedge \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = +\mu_0\vec{B}(\vec{r})\\
&\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0
\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = e\rho - 2\mu_0 \mathcal{B}(\vec{r}) \tag{2.53}$$
$$\nabla \wedge \vec{E}(\vec{r}) = 0$$
$$\nabla \mathcal{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{E}(\vec{r}),$$

Novamente, para as equações de $\vec{E}$ e $\mathcal{B}$ não se verifica qualquer problema de inconsistência. já que:

$$\mathcal{B}(\vec{r}) = -\frac{e\mu_0}{4\pi}\frac{exp(-\sqrt{2}\mu_0|\vec{r}|)}{|\vec{r}|} \tag{2.54}$$
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi}(r - \sqrt{2}\mu_0 r^2)\frac{exp(-\sqrt{2}\mu_0|\vec{r}|)}{|\vec{r}|^3}\hat{r} \tag{2.55}$$

satisfazem a seu respectivo conjunto de equações.[13]

Já para aquelas que relacionam $\vec{B}$ e $\vec{\mathcal{E}}$, temos o mesmo problema que no caso anterior: a solução obtida de $\nabla \cdot \vec{B} = +g\delta^3(\vec{r})$ é inconsistente com $\nabla \wedge \vec{B} \neq 0$. É justamente por isso, que mantivemos a corrente $\vec{J}$ na primeira das equações acima, pois se a fizéssemos igual a zero, retornaremos, basicamente, ao caso anterior, e nossa discussão estaria assim terminada.

Todavia, o caminho que vamos escolher, é impor que tal corrente tenha uma forma bastante particular. Mais precisamente, implementaremos o seguinte *ansatz*:[14]

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{+2\mu_0}{e}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}). \tag{2.56}$$

[13] De $\nabla\mathcal{B} = -\mu_0\vec{E}$ e $\nabla \cdot \vec{E} = e\rho - 2\mu_0\mathcal{B}$, segue que:

$$(\nabla^2 - 2\mu_0^2)\mathcal{B}(\vec{r}) = -e\mu_0\rho(\vec{r}),$$

cuja solução é:

$$\mathcal{B}(\vec{r}) = \frac{-e\mu_0}{4\pi}\int d^3\vec{r'}\rho(\vec{r'})\frac{exp(-\sqrt{2}\mu_0|\vec{r}-\vec{r'}|)}{|\vec{r}-\vec{r'}|}.$$

Tomando-se fontes puntuais, $\rho(\vec{r}) = \delta^3(\vec{r})$, obtém-se a expressão (2.54) . A forma para $\vec{E}$, (2.55), segue imediatamente.

[14] Que tem a forma de um *ansatz* tipo-London, para a supercondutividade: $j_\mu = \kappa A_\mu$; ou de maneira mais concisa[46]:

$$\partial_\mu j_\nu - \partial_\nu j_\mu = \kappa F_{\mu\nu},$$

Mesmo que o tenhamos imposto, vamos mostrar, a seguir, que tal *ansatz* surge naturalmente de $\mathcal{L}_2$ no limite de baixas energias. Para isso tomemos (lembrando-se que $\partial_\mu \leftrightarrow p_\mu$, no espaço dos momenta, e $p^2 \ll p$, etc.):

$$\lim_{p\to 0} \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_{p\to 0} \approx +\mu_0 \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} A_\mu \partial_\nu H_{\kappa\lambda} - eJ^\mu A_\mu + (\text{termo de Dirac})\,, \tag{2.57}$$

calculando-se a equação de campo para A_μ, obtemos:

$$eJ_\mu = 2\mu_0 \tilde{G}_\mu$$

que nos conduz (para as componentes vetoriais) ao *ansatz* (2.56).

Agora, utilizando (2.56) as equações (para $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{B}$) ficam:

$$\nabla \wedge \vec{B}(\vec{r}) = +e\vec{J}(\vec{r}) - 2\mu_0 \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0 \tag{2.58}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = +\chi^0(\vec{r}) = +g\delta^3(\vec{r})$$

$$\nabla \wedge \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = +\mu_0 \vec{B}(\vec{r}) = +\frac{e}{2\mu_0} \nabla \wedge \vec{J} \tag{2.59}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0,$$

sendo tal sistema, consistente com:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}^D(\vec{r}) = +\frac{g}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Agora, completamos o problema com a introdução da partícula teste. Contudo, antes de prosseguirmos, precisamos implementar algumas restrições (ou aproximações), além daquelas já feitas no caso anterior. Tais restrições são:

i) Já que essa matéria é estática, $\nabla \cdot \vec{J} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (já que J^μ é conservada), considerá-la-emos como um "*background*" estacionário, sobre o qual admitiremos

com $\kappa = constante$. Uma diferença é clara entre os dois casos: $\vec{\mathcal{E}}$ (ou se preferir, $\tilde{G}_\mu$) é uma "quantidade física", digo, não dependente de gauge, ao passo que A_μ é um típico campo de gauge.

a configução de monopólo. [Num trabalho sobre quantização de massa topológica para $(2N + 1)$ dimensões $(N = 1, 2, 3, \ldots)$, no qual é analisado o problema de uma *carga elétrica* no campo de um monopólo magnético em $(2 + 1)$ dimensões espaço-temporais), Henneaux e Teitelboim[32], introduzem uma *nova corrente* (não conservada) nas Equações de Maxwell, de forma a garantir a consistência delas com a presença desses monopólos. Tal corrente é interpretada como sendo *induzida pelo monopólo*. Todavia, em nosso trabalho, uma interpretação similar não parece plausível, já que aqui, a corrente fermiônica é conservada];

ii) A carga de prova só interage com o campo do monopólo; neste sentido, estamos desconsiderando a interação desta com o "*background*";

iii) Não levaremos em conta, as alterações na configuração do monopólo, devidas a interações entre este e o "*background*" de matéria.

Feito isto, passemos a discutir o problema, efetivamente.

O Lagrangeano para a partícula teste é dado por (análogo ao caso anterior, seção 2.1):

$$L_p = \frac{1}{2} m_p \dot{r}^2 + q\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}$$

que nos dá as equações de movimento clássicas:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m_p \ddot{\vec{r}} = +q\dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}(\vec{r}) \tag{2.60}$$

A diferença em relação ao caso anterior está aqui: lá, $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}^D(\vec{r}) + \vec{B}'(\vec{r})$, que não era esfericamente simétrico; já aqui,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}^D(\vec{r}) = \frac{g}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3},$$

que é o campo devido ao monopólo, portanto, com simetria esférica.

Agora, analogamente ao caso da teoria de Maxwell com monopólos (veja Apêndice A), podemos aqui, escrever uma expressão para o *momento angular conservado* ($\mathcal{J}$) do sistema (partícula teste + monopólo + campos). Classicamente:

$$\vec{\mathcal{J}} = \vec{\mathcal{J}}_0 + \vec{\mathcal{J}}_{em} = \vec{r} \wedge \vec{p} + \frac{qg}{4\pi c}\hat{r}$$

onde $\vec{r} \wedge \vec{p} \equiv \vec{\mathcal{J}}_0$ é o *momento angular orbital* da partícula; e

$$\frac{qg}{4\pi c}\hat{r} \equiv \vec{\mathcal{J}}_{em}$$

é o *momento angular dos campos* $\vec{E}$ e $\vec{B}$, que pode ser obtido, fazendo-se:

$$\vec{\mathcal{J}}_{em} = \int d^3\vec{x}\ \vec{x} \wedge \vec{S}(\vec{x}) = \int d^3\vec{x}\ \vec{x} \wedge \frac{1}{c}\left(\vec{E}(\vec{x}) \wedge \vec{B}(\vec{x})\right)$$

onde $S(\vec{x})$ é o *vetor de Poynting* (Isto é discutido e demonstrado em detalhes no Apêndice A).

Segue-se, também, que a componente radial de $\vec{\mathcal{J}}$ é :

$$\hat{r} \cdot \vec{\mathcal{J}} = \frac{qg}{4\pi c}$$

(a ausência de $\hbar$ multiplicando c, no denominador é devido ao fato de que ainda, não estamos tratando o problema quanticamente, o que faremos a seguir).

A partir daqui, passemos a tratar o momento angular (e outras quantidades físicas que aparecerem) como *operadores quânticos*:

$$\mathcal{J} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} + \frac{qg}{4\pi\hbar c}\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}} \tag{2.61}$$

Tal operador satisfaz a:

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = \imath\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k$$

$$[\mathcal{J}_i, r_j] = \imath\epsilon_{ijk}\, r_k$$

$$[\mathcal{J}_i, p_j] = \imath\epsilon_{ijk}\, p_k$$

(que são as relaccões (2.41-2.43)), já que ele satisfaz a:

$$[\mathcal{J}_i, B_j] = \imath\epsilon_{ijk}B_k$$

(que é a relação (2.44)), com $B_i = \left(\frac{g}{4\pi}\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}^3}\right)_i$. Para mostrarmos isto explicitamente, precisamos ainda das seguintes relações de comutação (relações (A.24-A.26), Apêndice A, seção A.2):

$$[r_i, r_j] = 0$$

$$[r_i, p_j] = \imath\delta_{ij}$$

$$[p_i, p_j] = -\imath\epsilon_{ijk}\, qB_k(x)$$

Então:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{J}_i, B_j] &= \left[(\mathbf{r}\wedge\mathbf{p})_i + \frac{qg}{4\pi\hbar c}\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}}\right)_i, \frac{g}{4\pi}\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}}\right)_j\right] \\
&= \frac{g}{4\pi\mathbf{r}^3}\epsilon_{ikl}[r_k p_l, r_j] + \frac{qg^2}{4\pi\hbar c\mathbf{r}^3}[r_i, r_j] \\
&= -\frac{g}{4\pi\mathbf{r}^3}\imath\epsilon_{ikj} = \imath\epsilon_{ijk}B_k(r) \qquad (2.62)
\end{aligned}$$

e daí, sua componente radial deve ser quantizada de acordo com:

$$\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}}\cdot\mathcal{J} = \frac{qg}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{2}n \qquad (2.63)$$

com n inteiro. Que é idêntica à condição de quantização de Dirac (A.22). Assim, tornamos a "string" sem conteúdo físico para o nosso problema.

Observe que, como estamos lidando com um modelo $U(1)_{A\mu}$-invariante (além de $U(1)_{H\mu\nu}$), então podemos usar outros métodos para chegarmos à condição (2.63). Por exemplo, podemos utilizar aquele empregado, originalmente por Dirac, que se baseia na *fase da função de onda* da partícula teste; ou aquele desenvolvido por Wu e Yang. A utilização destes métodos deverá nos conduzir à mesma condição.

Gostaríamos de fazer alguns comentários, referentes ao que foi abordado acima:

i) Para a teoria de Proca, o quadro seria semelhante: precisaríamos impor um *ansatz* tipo-London, $\vec{J} = \kappa\vec{A}$ entre a corrente $\vec{J}$ e o campo $\vec{A}$, bem como as novas restrições, implementadas anteriormente. Fazendo-se isto, poderemos chegar a uma condição de quantização para o *par* 'eg', da mesma maneira que no caso acima. (Para um estudo da teoria de Proca, e de sua incompatibilidade com monopólos de Dirac, consulte a referência[52];

ii) Portanto, pode-se coexistir bósons vetoriais massivos e monopólos magnéticos, numa mesma teoria, seja ela invariante de gauge (como a CSKR, que estamos estudando) ou não (como a de Proca, o que necessita ser verificado com mais detalhes), mas desde que (2.56) ou $\vec{J} = \kappa\vec{A}$ seja implementada, juntamente com as restrições já comentadas. Neste sentido, os monopólos citados acima, estritamente falando, não são monopólos de Dirac, já que estes *objetos*, não necessitam deste "background" (ou mesmo, da imposição desses *ansatz*) para sua presença numa teoria (como na de Maxwell, por exemplo). Por outro lado, assim com os de Dirac, os monopólos aqui estudados não apresentam *problemas* de "3-cocycle" (uma introdução a este assunto é apresentado ao final do Apêndice A), já que a diferença entre eles está na necessidade deste "background" (o que não influi no problema em questão);

iii) Ao colocar tal imposição, o que estamos fazendo, em última análise, é exigir que a corrente de matéria possua singularidade tipo "string" de Dirac. No entanto, a condição de quantização que obtivemos garante-nos (tanto para J^μ quanto para A^μ e $\tilde{G}^\mu$) que esta "string" mantém-se fisicamente indetectável. Ainda assim, esta é uma questão que deve ser melhor explorada. [Lembremo-nos, que um "ansatz" como o feito aqui, envolvendo a "string" de Dirac, já havia sido utilizado por Nambu[10], ao estudar "strings" duais (abertas e com monopólos nas pontas) e, sua conexão com a Física Hadrônica. No entanto, os objetivos são fundamentalmente diferentes:

aqui, implementamos tal relação (2.56) com o objetivo de tornarmos o vetor $\vec{B}$ esfericamente simétrico, o que em outras palavras, implica em fazer com que este campo não *sinta* a massa do bóson vetorial descrito pelo modelo CSKR; já Nambu impõe tal "ansatz" (entre j_μ e A_μ, pois lida com a teoria de Maxwell na presença de monopólos de Dirac), no intuito de que isto o conduza a um termo de massa para o campo A_μ].

Resumindo este capítulo, inicialmente, introduzimos campos de matéria no modelo CSKR. Isto foi feito acoplando-se os campos fermiônicos a A^μ, de forma covariante, de gauge e de Lorentz. Prosseguindo, obtemos as equações dinâmicas para os campos, e as reescrevemos (aquelas para os campos de gauge, somente) em notação de 3-vetor. O motivo de termos feito isto, foi para analisarmos se este modelo admitia configurações de monopólos de Dirac (no setor magnético de A_μ). No entanto, a presença de tais *objetos*, mostrou-se não ser possível, já que a "string" de Dirac mantinha-se fisicamente detectável. Tal impossibilidade foi mostrada de duas maneiras diferentes: que o problema estudado não admitia um operador de momento angular conservado (que obedecesse a certas relações de comutação); e mais rigorosamente (através do procedimento de Wu e Yang), mostrando-se que duas soluções distintas para $\vec{A}$ não de relacionavam, por uma transformação de gauge, numa região em que ambas fossem bem definidas.

Prosseguindo, na Seção 2.2, tendo detectado que a impossibilidade de tratarmos o problema quanticamente, surgia do fato de que $\vec{B} = \vec{B}^D + \vec{B}'$ não possuía simetria esférica (devido a $\vec{B}'$), propusemos uma maneira de solucioná-la. Basicamente, tal solução é conseguida, mantendo-se a corrente $\vec{J}$ na equação que relaciona $\nabla \wedge \vec{B}$ com $\vec{\mathcal{E}}$:

$$\nabla \wedge \vec{B} = e\vec{J} - 2\mu_0\vec{\mathcal{E}},$$

e impondo-se que $\vec{J}$ satisfaça a:

$$e\vec{J} = +2\mu_0\vec{\mathcal{E}} \quad \Longrightarrow \quad \nabla \wedge \vec{B} = 0$$

e assim, $\vec{B} = \vec{B}^D = \frac{g}{4\pi r^3}\vec{r}$, que evidentemente, possui simetria esférica. A partir daí, passamos à análise quântica do problema, para o qual, obtém-se a condição de Dirac (e assim, a "string", que se apresenta nas soluções de $\vec{A}, \vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{J}$, torna-se fisicamente indetectável).

No entanto, devemos notar que a obtenção de tal condição, não implica, estritamente falando, que monopólos de Dirac (com a "string" mantida indetectável) são possíveis. De fato, há uma diferença fundamental entre os monopólos aqui introduzidos e os de Dirac: enquanto os primeiros são admitidos sobre um "background" de matéria, já os segundos, não necessitam deste suporte material para sua presença.

Capítulo 3

O modelo com acoplamento não-mínimo e a quantização da massa topológica

No capítulo anterior, vimos que a coexistência de bósons vetoriais massivos e monopólos magnéticos (com a "*string*" mantendo-se fisicamente indetectável) só seria possível se admitíssemos, previamente, a matéria fermiônica como um "*background*" para a configuração de tais monopólos.

Continuando com nosso trabalho, pretendemos, no presente capítulo, mostrar que o parâmetro de massa topológica (μ_0) pode participar de uma condição de quantização similar àquela obtida anteriormente. Para tanto, será necessária a introdução de um termo de interação entre os férmions e o campo de gauge $H_{\mu\nu}$, o que será feito na Seção 3.1. Nesta mesma seção, obteremos as novas equações de campo. A princípio, tais equações (escritas em notação 3-D) apresentam um problema de indeterminação (quanto à estrutura das soluções de alguns campos). Este problema é discutido com certo detalhe. Um caminho para resolvê-lo (que se constitui, basicamente, na generalização do *ansatz* (2.56) para as 4 componentes da corrente fermiônica) é proposto, e a seguir, utilizado naquelas equações.

A partir daí, na Seção 3.2, estudamos essas novas expressões, com enfoque no problema de uma partícula-teste tipo-*dyon*, sujeita ao campo magnético de um monopólo puntual. Realmente, obtém-se uma condição de quantização para o problema em questão, onde estão presentes, dentre outros, o parâmetro de massa topológica (μ_0). Isto é feito de duas maneiras distintas: utilizando-se o método baseado na álgebra do operador de momento angular; e aquele que lida com a *fase da função de onda* da partícula em questão. Ambos os caminhos levam-nos à mesma relação. Finalmente, discutimos como tal condição de quantização poderia ser obtida, mais rigorosamente, através de um procedimento análogo ao de Wu-Yang. O fato de tal demonstração não ser tão diretamente obtida (e não a faremos aqui) reside no fato de estarmos lidando com um modelo $U(1)_{A\mu} \otimes U(1)_{H\mu\nu}$-invariante, cuja formulação, neste caso, passa necessariamente, por uma definição não-local de campos de gauge. (Como é bem sabido, o trabalho original destes autores, trata da teoria de Maxwell com monopólos, que é $U(1)_{A\mu}$-invariante).

3.1 A introdução do termo de acoplamento não-mínimo

Consideremos o Lagrangeano, com termo de acoplamento não-mínimo, especificado pela derivada covariante de gauge,

$$\nabla_\mu \psi(x) \equiv (\partial_\mu + \imath e A_\mu - \imath\sigma \tilde{G}_\mu)\psi(x)\,,$$

sendo σ a constante de acoplamento que mede a interação entre a matéria e o setor tensorial:

$$\mathcal{L}_3 = +\frac{1}{6}G_{\mu\nu\kappa}G^{\mu\nu\kappa} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mu_0\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}A^\mu\partial^\nu H^{\mu\nu} + \overline{\psi}(\imath\mathcal{D}_\mu\gamma^\mu + \sigma\tilde{G}_\mu\gamma^\mu - m)\psi \quad (3.1)$$

Aqui, escolhemos $e, \sigma > 0$ (e $\mu_0 > 0$, como já feito). Claramente, S_3 é invariante sob $U(1)_{A\mu} \otimes U(1)_{H\mu\nu}$, desde que os férmions transformem-se como:

$$\psi(x) \longmapsto \psi'(x) = exp(+\imath e\Lambda(x))\psi(x) \tag{3.2}$$

$$\overline{\psi}(x) \longmapsto \overline{\psi}'(x) = exp(-\imath e\Lambda(x))\overline{\psi}(x)\,. \tag{3.3}$$

Uma pergunta deve ser colocada: qual a razão de se fazer um acoplamento não-mínimo (através do tensor de intensidade de campo) entre a matéria e o setor tensorial em vez de se fazer, diretamente, com o campo de gauge $H_{\mu\nu}$?

A questão é que um acoplamento (covariante de Lorentz) entre este campo e os férmions só seria possível através de um termo como:

$$\overline{\psi} H_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi\,,$$

(que seria um acoplamento tipo Pauli, já que $H_{\mu\nu}$ é anti-simétrico). Assim, para que pudéssemos escrever uma derivada covariante de gauge,

$$\triangle_\mu \equiv \partial_\mu + \imath e A_\mu - \imath\sigma' H_{\mu\nu}\gamma^\nu\,,$$

deveríamos modificar as transformações que atuam nos férmions (3.2 e 3.3). É justamente aí que temos sérios problemas, pois a transformação que atua em $H_{\mu\nu}$ nos produz um termo tensorial e anti-simétrico: $(\partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu)$, o que nos leva a algumas dificuldades para ser introduzida na respectiva transformação ($U(1)_{H\mu\nu}$) dos campos fermiônicos (para que o termo da derivação seja, de fato, covariante de gauge). Só para tentar esclarecer um pouco este ponto, consideremos, novamente, a transformação sobre H:

$$\delta_{gauge}(\overline{\psi} H_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi) = \overline{\psi}(\partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu)\gamma^\mu\gamma^\nu\psi$$

(onde ainda, supomos que os férmions não sofram a transformação do setor tensorial). Por analogia com A_μ, poderíamos tentar fazer:

$$(\partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu)\gamma^\mu \equiv \partial_\nu\Omega\,,$$

o que seria facilmente incorporado na transformação dos férmions (de maneira idêntica ao setor de A_μ). No entanto, observe que a relação acima não pode ser satisfeita (em geral), já que ela pretende determinar o rotacional de 4-vetor por meio de um campo escalar. Outra maneira de se tentar contornar o problema, é escrevermos:

$$(\partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu)\gamma^\mu \equiv \partial_\mu \Omega^{\mu\nu} ,$$

o que é satisfeito. No entanto, isto só poderá ser incorporado (como um escalar) na transformação dos férmions, na forma de um termo não local:

$$\psi'(x) = exp\left\{+\imath e\Lambda(x) - \imath\sigma \int \Omega_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu\right\}\psi(x) .$$

Observe que, ainda assim, não poderemos ter

$$\overline{\psi}(\imath\triangle_\mu\gamma^\mu)\psi$$

invariante de gauge. Tais problemas é que nos levaram a considerar a interação da matéria com o setor tensorial, através do acoplamento não mínimo (isto é, a interação sendo feita por meio do tensor de intensidade e não do próprio campo de gauge. Daí o porque das transformações acima serem as mesmas para o modelo sem este novo acoplamento. A seguir vamos discutir alguns aspectos deste acoplamento.

De início, observe que a presença de $\overline{\psi}(\sigma\tilde{G}_\mu\gamma^\mu\psi)$ em $\mathcal{L}_3$ constitui-se numa forma, por si só, invariante de gauge e de Lorentz, de acoplar os férmions ao campo $H_{\mu\nu}$, já que $\tilde{G}_\mu$ é invariante sob $U(1)_{H_{\mu\nu}}$. Neste aspecto, este termo é radicalmente diferente de $\overline{\psi}(-eA_\mu\gamma^\mu)\psi$, cuja presença faz-se necessária *para garantir a covariância de gauge* do modelo, quando A_μ interage com os férmions. Em outras palavras: o termo que é $U(1)_{A_\mu}$-invariante é $\overline{\psi}(\partial_\mu + \imath eA_\mu)\gamma^\mu\psi$, e não $\overline{\psi}(\imath\partial_\mu\gamma^\mu)\psi$ ou $\overline{\psi}(-eA_\mu\gamma^\mu)\psi$, individualmente.

Outro aspecto interessante é que, devido à dimensão quadridimensional do espaço - tempo, e $H_{\mu\nu}$ ser de *rank*-2 e anti-simétrico, a forma covariante de Lorentz que temos para escrever a interação deste com os férmions, é via $\tilde{G}_\mu \gamma^\mu$. De fato, outros termos, aparentemente diferentes, permitidos por tal simetria, seriam: $\overline{\psi}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\partial_\mu H_{\nu\kappa}\gamma_\lambda\psi$ ou $\overline{\psi}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}G^{\mu\nu\kappa}\gamma^\lambda\psi$. Mas é claro que tais termos reduzem-se àquele com $\tilde{G}_\mu$, a menos de uma constante multiplicativa (lembremo-nos de que: $\tilde{G}_\mu = +\frac{1}{6}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}G^{\nu\kappa\lambda} = +\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}\partial^\nu H^{\kappa\lambda}$).[1] Restam-nos ainda, termos que envolvem γ_5, tais como:

$$\overline{\psi}G_{\mu\nu\kappa}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\kappa\psi = \overline{\psi}G_{\mu\nu\kappa}\gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\kappa]}\psi = \overline{\psi}G_{\mu\nu\kappa}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\gamma_5\gamma_\lambda\psi\,,$$

(onde usamos o fato de $G_{\mu\nu\kappa}$ ser totalmente anti-simétrico nos índices espaço-temporais e também a identidade $\gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\kappa]} \equiv \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\gamma_5\gamma_\lambda$). Como é claro, tal termo viola, explicitamente, a paridade. Já que, no momento, não estamos interessados em estudar efeitos de quebra de paridade em modelos com monopólos, vamos desconsiderar este tipo de interação.

Devemos ressaltar, que a presença do termo de acoplamento não-mínimo em $\mathcal{L}_3$, deverá tornar o modelo não-renormalizável. Basicamente, isto é porque a constante de acoplamento, σ, possui *dimensão canônica* negativa ($[\sigma]_c = [massa]^{-1}$). É claro que uma palavra definitiva sobre a questão, só poderá ser dada após a devida análise quântica do modelo (o que não faremos aqui). O fato de admitirmos, no presente trabalho, um modelo com tais características é aceitável, já que não trataremos de aspectos de *segunda quantização*. Aqui, o nosso interesse básico é a influência física deste termo, a nível de Mecânica Quântica, no sistema constituído por uma partícula teste colocada num campo magnético externo.

Em (2+1) dimensões espaço-temporais, a introdução de um termo de acoplamento não-mínimo num modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs (MCSH, Abeliano)[2], que acople os campos de Higgs ao setor "eletromagnético" (sendo isto feito através do tensor de curvatura, $F_{\mu\nu}$), mostrou-se contribuir como um *momento magnético anômalo* para o

[1]Devido à propriedade de anti-simetria de $H_{\mu\nu}$ termos com derivadas superiores, como por exemplo: $\overline{\psi}(\partial_\mu\partial_\nu\partial_\kappa H^{\mu\nu})\gamma^\kappa\psi$, são identicamente nulos.

[2]Este termo, também necessita de uma constante de acoplamento com dimensão canônica negativa.

setor de Higgs[37]. Sobre esta última colocação, devemos frisar que, para o nosso caso, a introdução daquele termo contribui, de fato, para o momento angular do sistema (e não um momento anômalo), como veremos adiante.

Feitos tais comentários. passemos às equações de movimento:

$$\begin{cases} \left[(\imath\partial_\mu - eA_\mu + \sigma\tilde{G}_\mu)\gamma^\mu - m\right]\psi(x) = 0\,, \\ \overline{\psi}(x)\left[\imath\overleftarrow{\partial}_\mu + eA_\mu - \sigma\tilde{G}_\mu)\gamma^\mu + m\right] = 0\,, \end{cases} \tag{3.4}$$

que são as equações dinâmicas para os férmions, em interação com os campos de gauge A_μ e $H_{\mu\nu}$. Temos também:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0\epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho}\partial_\kappa H_{\lambda\rho} + eJ^\nu = -2\mu_0\tilde{G}^\nu + eJ^\nu \tag{3.5}$$

$$\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = +\epsilon^{\nu\kappa\alpha\beta}\partial_\alpha\left(\mu_0 A_\beta + \frac{\sigma}{2}J_\beta\right) = \mu_0\tilde{F}^{\nu\kappa} + \frac{\sigma}{2}\epsilon^{\nu\kappa\alpha\beta}\partial_\alpha J_\beta\,, \tag{3.6}$$

com $J_\mu = \overline{\psi}\gamma_\mu\psi$, já conhecida.

As identidades de Bianchi são aquelas já conhecidas:

$$\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

$$\partial_\mu\tilde{G}^\mu = 0,$$

sendo que, ao introduzirmos os monopólos magnéticos, quebramos a primeira das identidades acima (como feito anteriormente):

$$\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \overset{monopolo}{\Longrightarrow} \partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu} = \chi^\nu.$$

Reescrevendo-se (3.5-3.6) e as duas últimas expressões acima em notação tri-dimensional, obtemos, respectivamente:

$$\nabla\wedge\vec{B}(\vec{r}) - \frac{\partial\vec{E}(\vec{r})}{\partial t} = +e\vec{J}(\vec{r}) - 2\mu_0\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}),$$

$$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r}) = +e\rho(\vec{r}) - 2\mu_0\mathcal{B}(\vec{r}),$$

$$\nabla\wedge\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = +\mu_0\vec{B}(\vec{r}) + \frac{\sigma}{2}\nabla\wedge\vec{J}(\vec{r}),$$

$$
\begin{aligned}
&\nabla \mathcal{B}(\vec{r}) + \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})}{\partial t} = -\mu_0 \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\sigma}{2}\left(\frac{\partial \vec{J}(\vec{r})}{\partial t} + \nabla \rho(\vec{r})\right), \\
&\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) + \frac{\partial \mathcal{B}(\vec{r})}{\partial t} = 0, \\
&\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \chi^0(\vec{r}), \\
&\nabla \wedge \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{r})}{\partial t} = +\vec{\chi}(\vec{r}).
\end{aligned}
$$

Para que estas equações possam descrever uma configuração estática e puntual de monopólo, devemos tomar o limite estático para os campos e correntes, bem como: $\chi^0(\vec{r}) = +g\delta^3(\vec{r})$ e $\vec{\chi} = \vec{0}$. Fazendo-se isto, teremos (reagrupando-as):

$$\nabla \wedge \vec{B}(\vec{r}) = +e\vec{J}(\vec{r}) - 2\mu_0 \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}), \tag{3.7}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \chi^0(\vec{r}) = g\delta^3(\vec{r}), \tag{3.8}$$

$$\nabla \wedge \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = +\mu_0 \vec{B}(\vec{r}) + \frac{\sigma}{2}\nabla \wedge \vec{J}(\vec{r}), \tag{3.9}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0, \tag{3.10}$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = +\epsilon\rho(\vec{r}) - 2\mu_0 \mathcal{B}(\vec{r}), \tag{3.11}$$

$$\nabla \wedge \vec{E}(\vec{r}) = 0, \tag{3.12}$$

$$\nabla \mathcal{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\sigma}{2}\nabla \rho(\vec{r}). \tag{3.13}$$

Observe que, analogamente ao capítulo anterior, mantivemos a corrente fermiônica nas expressões acima. Tal presença será justificada nas discussões a seguir.

Passemos a analisar a consistência dessas equações. Para aquelas que envolvem $\vec{E}$, $\mathcal{B}$, e ρ (expressões 3.11-3.13), observa-se que tais equações constituem-se num sistema linear indeterminado. (Sendo que esta inconsistência aparece com a introdução do termo de acoplamento não-mínimo). De fato, como pode ser facilmente observado, dispomos de apenas uma equação que relaciona os gradientes de $\mathcal{B}$ e de ρ para determiná-los. Daí, uma das funções só poderá ser determinada, se tivermos o conhecimento prévio da outra. Já para o vetor $\vec{E}$, temos as expressões para seu divergente e seu rotacional. Assim sendo, poderemos, a priori, obter a estrutura da solução deste. Tomando-se, $\nabla \wedge \nabla \wedge \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = 0$, e usando-se (3.11), tem-se:

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla(e\rho - 2\mu_0 \mathcal{B}) = 0,$$

agora, utilizando-se (3.13), teremos:

$$(\nabla^2 - 2\mu_0^2)\vec{E} = (e - \sigma\mu_0)\nabla\rho \qquad \text{e} \tag{3.14}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{2\mu_0 e}{\sigma}\right)\vec{E} = +\frac{2}{\sigma}(e - \mu_0\sigma)\nabla\mathcal{B} \tag{3.15}$$

Daqui, vemos que a solução para $\vec{E}$ é fortemente dependente daquela para $\mathcal{B}$ ou ρ: se não conhecermos nenhuma dessas funções escalares, então o vetor $\vec{E}$ permanecerá indeterminado. Tais aspectos, levam-nos a encarar (3.13), como uma relação de vínculo entre $\mathcal{B}$ e ρ. Além do mais, observe que o fato de termos escolhido $e, \sigma, \mu_0 > 0$, justifica-se aqui: na segunda das equações acima, se ocorrer $-\frac{2\mu_0 e}{\sigma} > 0$, então o vetor $\vec{E}$ tem uma solução oscilatória (tipo $exp(\imath\mu_0 r)$), e não uma forma de exponencial decrescente (como $exp(-\mu_0 r)$). Desta forma, quando fizéssemos $r \to \infty$, o campo $\vec{E}$ não se anularia.

Problema semelhante ocorre com as equações que envolvem $\vec{B}$, $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{J}$, e surge da presença de $\nabla \wedge \vec{J}$ em (3.9). Todavia, o *ansatz* que havíamos implementado, $e\vec{J} = +2\mu_0\vec{\mathcal{E}}$, resolve este problema (como veremos a seguir). Lembremo-nos, no entanto, de que quando estudamos a questão da solução geral para o vetor $\vec{B}$ (no Capítulo 2), havíamos chegado à conclusão de que deveríamos impor:

$$\vec{J}(\vec{r}) = +\frac{2\mu_0}{e}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}),$$

para que $\vec{B}$ fosse esfericamente simétrico, e daí, para que configurações de monopólos magnéticos (com "*string*" de Dirac sem conteúdo físico), pudessem ser possíveis (num "*background*" de matéria fermiônica).

Para resolvermos este novo problema, que surgiu com a introdução do termo de acoplamento não-mínimo, um bom caminho é generalizarmos o *ansatz* acima às 4 componentes da corrente fermiônica:

$$J_\mu(\vec{r}) \equiv +\frac{2\mu_0}{e}\tilde{G}_\mu(\vec{r}) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} e\vec{J}(\vec{r}) = +2\mu_0\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}), \\ e\rho(\vec{r}) = +2\mu_0\mathcal{B}(\vec{r}) \end{cases}. \tag{3.16}$$

Agora, implementando-se a relação acima, nas equações (3.7-3.13), obtemos:

$$\nabla \wedge \vec{B}(\vec{r}) = +e\vec{J}(\vec{r}) - 2\mu_0\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0, \tag{3.17}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = +\chi^0(\vec{r}) = +g\delta^3(\vec{r}), \tag{3.18}$$

$$\nabla \wedge \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = +\mu_0\vec{B}(\vec{r}) + \frac{\sigma}{2}\nabla \wedge \vec{J}(\vec{r}) = \left(\frac{e\mu_0}{\epsilon - \sigma\mu_0}\right)\vec{B}(\vec{r}), \tag{3.19}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0, \tag{3.20}$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = +e\rho(\vec{r}) - 2\mu_0\mathcal{B}(\vec{r}) = 0. \tag{3.21}$$

$$\nabla \wedge \vec{E}(\vec{r}) = 0, \tag{3.22}$$

$$\nabla\mathcal{B}(\vec{r}) = -\mu_0\vec{E}(\vec{r}) + \frac{\sigma}{2}\nabla\rho(\vec{r}) = -\left(\frac{e\mu_0}{\epsilon - \sigma\mu_0}\right)\vec{E}(\vec{r}). \tag{3.23}$$

Daqui, vemos que o campo "elétrico", $\vec{E}$, é uma função harmônica (assim como as escalares $\mathcal{B}$, e ρ), isto é, um vetor que satisfaz à equação de Laplace: $\nabla^2\vec{E} = 0$. A solução para o potencial Φ, que também é harmônica, segue imediatamente da definição do vetor $\vec{E}$: $\vec{E} = -\nabla\Phi - \partial\vec{A}/\partial t$, no limite estático. Neste aspecto, o quadro é semelhante à Eletrostática (de Maxwell) no vácuo.

Já o vetor $\vec{B}$, admite a solução tipo-Dirac:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}^D(\vec{r}) = g\frac{\vec{r}}{r^3},$$

ao passo que $\vec{\mathcal{E}}, \vec{A}$ e também $\vec{J}$ possuem singularidade tipo "string", como já vimos no Capítulo 2. À parte da questão dessas singularidades e das soluções harmônicas, resolvemos o problema de inconsistência a que nos propomos.

A este ponto, cabe-nos fazer algumas observações:

i) A interpretação que havíamos feito a respeito da matéria fermiônica, como um "*background*" (sobre o qual seria admitida a configuração de monopólo magnético), continua válida aqui, mesmo com a inclusão da "densidade de carga" $e\rho$. Neste sentido, o que fizemos, em última análise, foi escrever o *ansatz* $e\vec{J} = +2\mu_0\vec{\mathcal{E}}$, em notação de 4-vetor, isto é, incorporando-se todas as componentes de J_μ e $\tilde{G}_\mu$. Assim, se novamente aqui, pudermos ter a presença de monopólos magnéticos, então tais configurações serão admitidas sobre este "background";

ii) Observe que, nas eqs. (3.19 e 3.23) há a presença da razão:

$$\frac{e\mu_0}{e - \sigma\mu_0}.$$

Ela surge após termos implementedo o *ansatz* (3.16) nas expressões (3.7-3.13). Lembremo-nos de que os valores destes parâmetros (e, σ e μ_0) são arbitrários, a priori. Desta maneira, se em determinado regime do modelo (descrito por $\mathcal{L}_3$), tivéssemos $e = \sigma\mu_0$, então a relação (3.16), não poderia ser implementada, uma vez que a razão acima assumiria um valor infinito. [Pode-se observar, também, que o uso de (3.16), juntamente com $\sigma\mu_0 = e$ na equação de campo (3.6), nos conduz a $\tilde{F}_{\mu\nu} = 0$ (e daí, $F_{\mu\nu} = (\vec{E}, \vec{B}) = 0$): é como se o setor eletromagnético fosse *retirado* do modelo em questão. Além do que, $\tilde{F}_{\mu\nu} = 0$ entra em contradição explícita com a própria presença dos monopólos: $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \chi^\nu \neq 0$]. Portanto, nas discussões e cálculos que se seguem, suporemos que $e \neq \sigma\mu_0$.

3.2 O problema de uma partícula tipo *dyon* no campo de um monopólo magnético e a quantização da massa topológica

Nesta seção, vamos tratar do seguinte problema: considere um monopólo estático e puntual (situado na origem, por conveniência), *imerso num "background" fermiônico*. No campo magnético deste, coloquemos uma partícula-teste tipo *dyon*[3], com cargas de prova $+q = eq'$ e $+Q = +\sigma$, segundo os grupos de gauge $U(1)_{A^\mu}$ e $U(1)_{H^{\mu\nu}}$, respectivamente.[4]

Uma explicação deve deve ser feita com relação ao porquê de se tomar $Q = 1\sigma$, e não, deixá-la arbitrária como fizemos para q. Isto acontece porque enquanto o setor de A_μ possui atributo de carga, ou seja:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \qquad j^\nu = (\rho, \vec{j})$$

onde $q = \int d^3x\rho(x)$, o mesmo não ocorre com o setor tensorial, já que:

$$\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = J^{\nu\kappa} \quad \Longrightarrow \quad J^{\mu\nu} = \begin{cases} J^{0i} = (\vec{J}_1)^i \\ J^{ij} = \epsilon^{ijk}(\vec{J}_2)^k \end{cases},$$

isto é, a 4-corrente tensorial é formada por um dublete de 3-corrente. Daí o porque deste setor não possuir tal atributo.

Observe que aquelas restrições já implementadas anteriormente (Capítulo. 2, Seção 2.2), também deverão ser colocadas aqui, como por exemplo, que a partícula-teste só interage com o campo magnético do monopólo.

Assim, o Lagrangeano para esta partícula, será:[5]

$$L_P = +\frac{1}{2}m_P\dot{r}^2 + (q\vec{A} - Q\vec{\mathcal{E}}) \cdot \dot{\vec{r}} \tag{3.24}$$

[3]Tal nomenclatura foi introduzida por Schwinger[69] para designar uma partícula portadora de cargas elétrica e magnética. Pensamos que o uso da expressão 'tipo *dyon*', aqui, não trará confusões.

[4]Observe que, neste caso, em que os férmions interagem tanto com A_μ quanto com $H_{\mu\nu}$, então as partículas criadas por tais campos de matéria possuiriam cargas frente aos dois grupos de simetria.

[5]Que é obtido tomando-se o limite não-relativístico de:

$$S = \int L_{rel}dt = \int \left(-m_P c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}} - Q\vec{\mathcal{E}}\cdot\dot{\vec{r}} - q\Phi + QB\right)dt$$

($\vec{v} = \dot{\vec{r}}$), além de fazer $\Phi = B = 0$, já que a partícula só está sujeita ao campo magnético do monopólo. Novamente, vamos escrever algumas grandesas canônicas. O comentário feito anteriormente, com relação à sua utilização, continua válido aqui.

O momento canonicamente conjugado à coordenada r_j, é:

$$\pi_j \equiv \frac{\partial L_P}{\partial \dot{r}_j} = m_P \dot{r}_j + qA_j - Q\mathcal{E}_j \tag{3.25}$$

Como podemos determinar $\dot{r}_j(\vec{\pi})$: $\dot{r}_j = \frac{1}{m_P}(\pi_j - qA_j + Q\mathcal{E}_j)$, então o Hamiltoniano se escreve:

$$H_P = \sum_j \pi_j \dot{r}_j(\pi) - L_P = +\frac{1}{2m_P}p^2 = +\frac{1}{2}m_P(\vec{\pi} - q\vec{A} + Q\vec{\mathcal{E}})^2, \tag{3.26}$$

onde definimos o momento linear da partícula por:

$$p_j \equiv m_P \dot{r}_j = (\pi_j - qA_j + Q\mathcal{E}_j).$$

(p_j pode também, ser obtido através da prescrição $p_\mu \leftrightarrow i\triangle_\mu \equiv i\partial_\mu - qA_\mu + Q\tilde{G}_\mu$, com (q, Q) em lugar de (e, σ). Daqui, vê-se que p_μ, ao contrário de π_μ, é invariante de gauge.)

Seguem-se as equações de movimento clássicas (de L_p, pelas equações de Euler-Lagrange):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_P}{\partial \dot{r}_i}\right) = \frac{\partial L_P}{\partial r_i} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}(m_P\dot{\vec{r}} + q\vec{A} - Q\vec{\mathcal{E}}) = \nabla_r(\dot{\vec{r}} \cdot (q\vec{A} - Q\vec{\mathcal{E}})) \\ &\Longrightarrow \quad m_P\ddot{\vec{r}} = +\dot{\vec{r}} \wedge (q\nabla \wedge \vec{A} - Q\nabla \wedge \vec{\mathcal{E}}).\end{aligned} \tag{3.27}$$

mas: $\nabla \wedge \vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{B}(\vec{r})$ e $\nabla \wedge \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = +\frac{e\mu_0}{e-\sigma\mu_0}\vec{B}(\vec{r})$, então:

$$m_P\ddot{\vec{r}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \left(q + \frac{Qe\mu_0}{e - \sigma\mu_0}\right)\dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}(\vec{r}). \tag{3.28}$$

Já o momento angular da partícula é dado por:

$$\vec{\mathcal{J}}_0 = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

Tomando-se a derivada temporal:

$$\frac{d\vec{\mathcal{J}}_0}{dt} = \vec{r} \wedge m_P\ddot{\vec{r}} = \left(q + \frac{Qe\mu_0}{e - \sigma\mu_0}\right)\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}(\vec{r}).$$

onde $\vec{B}(\vec{r}) = +\frac{g}{4\pi r^3}\vec{r} = \vec{B}^D(\vec{r})$. Então:

$$\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}(\vec{r}) = \frac{g}{4\pi}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \equiv +\frac{g}{4\pi}\frac{d}{dt}\hat{r} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\vec{\mathcal{J}}_0 = \frac{g}{4\pi}\left(q + \frac{Qe\mu_0}{e - \sigma\mu_0}\right)\frac{d}{dt}\hat{r} \qquad (3.29)$$

com $\hat{r}$ um vetor unitário na direção (e sentido) definida por uma reta que ligue o monopólo à partícula-teste.

Como o vetor $\mathcal{J}_0$ não se constitui numa constante de movimento, vamos definir o vetor de momento angular conservado, para a partícula em questão, como sendo:

$$\vec{\mathcal{J}} \equiv \vec{\mathcal{J}}_0 + \vec{\mathcal{J}}^T_{em} = \vec{\mathcal{J}}_0 - \frac{g}{4\pi}\left(q + \frac{Qe\mu_0}{e - \sigma\mu_0}\right)\hat{r} \qquad (3.30)$$

Claramente, já que $\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{J}} = 0$, então pela equação de Heisenberg, numa versão quântica, ele comutaria com o Hamiltoniano : $[\mathrm{H}, \mathcal{J}] = 0$.

Algumas observações fazem-se necessárias sobre o termo proporcional a g, que compõe $\vec{\mathcal{J}}$:

i) O termo $\frac{gq}{4\pi}\hat{r}$, é idêntico àquele obtido na seção 2.2. Como já comentamos, tal termo refere-se ao momento angular do campo "eletromagnético", que é obtido, integrando-se o momento do vetor de Poynting ($\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{B}$) sobre todo o espaço:

$$\vec{\mathcal{J}}_{em} = \int d^3x\, \vec{x} \wedge \vec{S}(x) = \int d^3x \quad \vec{x} \wedge \vec{E}(x) \wedge \vec{B}(x),$$

onde $\vec{E}(x)$ e $\vec{B}(x)$ são os campos devido à carga $+q$ e ao monopólo $+g$, situados em $\vec{x} = \vec{r}$ e $\vec{x} = 0$, respectivamente. Assim,

$$\vec{B}(x) = \frac{g}{4\pi x^3}\vec{x}$$

e também:

$$\vec{E}(x) = +\frac{q}{4\pi}\frac{(\vec{x} - \vec{r})}{|\vec{x} - \vec{r}|^3} \quad \Longrightarrow \quad \nabla \cdot \vec{E}(x) = +q\delta^3(\vec{x} - \vec{r}).$$

Então:

$$(\vec{\mathcal{J}}_{em})_i = \int d^3x\, E_j(\delta_{ij} - \hat{x}_i\hat{x}_j)\left(\frac{1}{4\pi x}\right) = \int d^3x\, E_j \frac{\partial}{\partial x^j}(\frac{g}{4\pi}\hat{x}_i)$$

fazendo-se uma integração por partes e tomando-se o termo de superfície igual a zero, obtemos:

$$\vec{\mathcal{J}}_{em} = -\int d^3x\, \nabla \cdot \vec{E}(x)\, \frac{g}{4\pi}\hat{x} = -\frac{qg}{4\pi c}\hat{r} \tag{3.31}$$

ii) A componente $gQe\mu_0\hat{r}/4\pi(e - \sigma\mu_0)$, que também está relacionada com o momento angular dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, surge devido à presença do termo de acoplamento não-mínimo em $\mathcal{L}_3$ (como já havíamos adiantado, quando introduzimos este termo). Observe que tal contribuição é devida à "interação" entre $\vec{B}$ e outro campo "elétrico"', que denotaremos por $\vec{\epsilon}$, que está diretamente relacionado com $\vec{E}$ pela relação:

$$\vec{\epsilon}(x) \equiv \left(\frac{e\mu_0}{e - \sigma\mu_0}\right)\frac{Q}{q}\vec{E}(x). \tag{3.32}$$

Aqui, novamente, $\vec{E}(x)$ é o campo devido à carga puntual $+q$, situada no ponto $\vec{r}$, em relação à origem (onde está o monopólo).

Notemos que esta contribuição adicional ao momento angular total do sistema (partícula-teste + monopólo), digo, o momento angular dos campos, pode ser obtido diretamente se nós definirmos um novo "*vetor de Poynting*":

$$\vec{S}(x) \equiv (\vec{E}(x) + \vec{\epsilon}(x)) \wedge \vec{B}(x) = \left(1 + \frac{Qe\mu_0}{q(e - \sigma\mu_0)}\right)\vec{E}(x) \wedge \vec{B}(x).$$

e integrarmos seu momento sobre todo o espaço:

$$\vec{\mathcal{J}}^T_{em} = \int d^3x\, \vec{x} \wedge \vec{S}(x) = -\frac{g}{4\pi}\left(q + \frac{Qe\mu_0}{e - \sigma\mu_0}\right)\hat{r}$$

Agora, passemos à análise quântica do problema. Para isto, as quantidades clássicas são levadas a caráter de operadores, do ponto de vista da Mecânica Quântica. Assim, por exemplo, o operador de momento angular conservado do sistema (ou seja, que comuta com o Hamiltoniano: $[\mathbf{H}, \mathcal{J}] = 0$) será:

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + \mathcal{J}^T_{em} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} - \frac{g}{4\pi\hbar}\left(q + \frac{Qe\mu_0}{e - \sigma\mu_0}\right)\frac{\mathbf{r}}{\mathrm{r}} \tag{3.33}$$

(note aqui, a presença explícita de $\hbar$ no denominador do segundo termo). Observe, também, que a estrutura deste operador é análoga àquela do problema anterior, tratado na Seção 2.2 (já que a diferença, está no fator multiplicativo: $\frac{Qe\mu_0}{e-\sigma\mu_0}$). Assim sendo, então ele satisfaz às relações de comutação, previamente estabelecidas (equações (2.41-2.43), Seção 2.1). Portanto, sua componente radial deverá ser quantizada da seguinte forma (aqui substituímos $Q = \sigma$):

$$\frac{\mathbf{r}}{\mathrm{r}} \cdot \mathcal{J} = -\frac{g}{4\pi\hbar c}\left(q + \frac{\sigma e\mu_0}{e - \sigma\mu_0}\right) = \frac{n}{2}, \tag{3.34}$$

sendo n inteiro (e daí, o sinal negativo não tem importância, tendo surgido, porque consideramos $\hat{r}$ dirigido do monopólo à partícula). E assim, mostramos o que havíamos pretendido: que o parâmetro de masssa topológica (μ_0), participa de uma condição de quantização. No entanto, devemos chamar a atenção para o fato de que isto não implica, necessariamente, em dizer que este parâmetro seja *quantizado*. Realmente, mesmo que o monopólo possua *carga* quantizada (ou seja, $g = Ng_0$, sendo g_0 uma *carga magnética elementar* e N inteiro), então, o que podemos afirmar é que a *"carga"*:

$$\left(q - \frac{\sigma e\mu_0}{e - \sigma\mu_0}\right),$$

que envolve q e μ_0 (além de e e σ)[6],é quantizada. Assim sendo, para que possamos afirmar que μ_0 é uma grandesa quantizada, devemos admitir, de antemão, que g e q já o são.

[6]Os parâmetros de acoplamento entre os férmions e os campos de gauge A_μ e $H_{\mu\nu}$ (e e σ, respectivamente), estão presentes na condição acima, devido à forma pela qual definimos a corrente fermiônica:

Um aspecto interessante com relação à condição de quantização acima, é que se tomarmos $\sigma \to 0$ ou $\mu_0 \to 0$, independentemente, voltamos à condição anterior:

$$\frac{gq}{4\pi} = \frac{n}{2}\hbar c$$

.

No entanto, um ponto ainda deve ser esclarecido: como é realizada a "interação" entre os férmions e o setor tensorial? Seria realizado por intermédio do termo de massa topológica, o qual faz o "linking" entre os dois campos de gauge? Os limites acima na condição de quantização nos induzem a responder afirmativamente à segunda pergunta. Parece que, de fato, tal acoplamento não se dá diretamente entre estes campos (tensorial e fermiônico) mas por intermédio do campo A_μ (cuja transformação é 'lida' pelos férmions) através do termo de "linking" entre ambos os campos de gauge.

Devido à invariância de gauge de $\mathcal{L}_3$, podemos utilizar outros métodos para se chegar à condição de quantização obtida. Por exemplo, pela fase da função de onda da partícula teste (com cargas q e Q), teríamos:

$$\Psi \equiv \Psi_0 \, exp\left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)\right).$$

mas como a partícula (lembrando-se $q = eq'$ e $Q = \sigma$) está no campo magnético do monopólo, então:

$$p^\mu \to p^\mu - qA^\mu + Q\tilde{G}^\mu,$$

e assim, teremos(com $\Phi = \mathcal{B} = 0$):

$$\Psi \to \Psi' = \Psi_0 \, exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\vec{p}\cdot\vec{r} - q\vec{A}\cdot\vec{r} + Q\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{r} - Et\right)\right] \tag{3.35}$$

$J_\mu = \overline{\psi}\gamma_\mu\psi$; e não $J_\mu = e\overline{\psi}\gamma_\mu\psi$, por exemplo, como em geral é feito. Tal escolha, é aqui justificada, porque estamos lidando com um tipo de corrente apenas (fermiônica), mas que interage com dois campos diferentes.

onde:

$$exp\left[\frac{i}{\hbar}(q\vec{A} - Q\vec{\mathcal{E}})\cdot\vec{r}\right] \equiv \Delta\alpha \tag{3.36}$$

é a variação na *fase* de Ψ, devido às interações das cargas da partícula com o campo do monopólo.

Seguindo-se os passos descritos no Apêndice A, seção A.2, chegar-se-á à expressão já obtida:

$$\frac{g}{4\pi\hbar c}\left(q + \frac{eQ\mu_0}{e - \sigma\mu_0}\right) = \frac{n}{2}.$$

Para um problema semelhante, ou seja, *carga elétrica* no campo de um "monopólo", mas em (2+1) dimensões, Henneaux e Teitelboim[32] mostraram que um parâmetro de massa topológica deveria ser quantizado[7]. Basicamente, o modelo tratado consiste de uma extensão da Eletrodinâmica (neste espaço-tempo), que comporte um termo de massa topológica (que é um termo de Chern-Simons). Todavia, algumas diferenças entre este e o modelo aqui tratado são claras: por exemplo, neste espaço-tempo a *linha de universo* de um "monopólo" reduz-se a um ponto (e daí, o motivo de tais objetos serem denominados "instantons", como já fizemos anteriormente); além do mais, a presença deste termo de massa implica que a 4-corrente presente não seja conservada (semelhante, neste aspecto, à teoria de Proca). Por fim, cabe mencionar, que o resultado obtido por estes autores pode ser generalizado, diretamente, para uma "Eletrodinâmica" (que contenha um termo de massa topológica) em $(2N+1)$ dimensões ($N = 1, 2, 3, \ldots$). Neste espaço-tempo arbitrário, tanto as "cargas elétricas" quanto as "strings" (*atadas* aos "monopólos") são de dimensão $(N-1)$, ao passo que os "monopólos",propriamente ditos, são de dimensão $(N-2)$. (Daí, segue porque em $(2+1)$, a "string" é um *ponto* e o "monopólo" *reduz-se* a um tipo de

[7]O fato de uma teoria admitir a quantização do parâmetro de massa é um aspecto muito interessante exibido por ela. Tal característica, como já se sabe, é apresentada por teorias de Chern-Simons não-Abelianas (veja, por exemplo, a referência [38]).

"instanton" e não de uma partícula, propriamente dita). Consulte também, a referência [31], para uma discussão a respeito dos conceitos aqui apresentados.

Cabe-nos, ainda, discutir como poderia ser feita uma formulação "á la" Wu-Yang para este caso. Para tal discussão, é importante observar, mais uma vez, que estamos lidando com um problema constituído por uma partícula-teste, com cargas de prova frente a dois grupos de gauge distintos, no campo de um monopólo magnético. Neste sentido, já que o modelo em questão é invariante sob ambos os grupos, então, tal formulação deve levar em consideração os dois campos de gauge A_μ e $H_{\mu\nu}$ (e não $\tilde{G}_\mu$, que é um tensor (dual) de curvatura, mesmo que a interação entre os férmions e $H_{\mu\nu}$ tenha sido feita através dele; já discutimos o porquê de tal questão). Assim, por analogia com a Eletrodinâmica, escreveríamos:

$$exp\left(\frac{\imath e}{\hbar c}\oint A^\mu dx_\mu\right)$$

como sendo a *entidade* que descreveria (quanticamente) o setor $U(1)_{A_\mu}$, para nosso caso. Também, tomaríamos:

$$exp\left(\frac{\imath\sigma}{\hbar c}\oint_S H^{\mu\nu}dS_{\mu\nu}\right)$$

para o setor $U(1)_{H_{\mu\nu}}$. (Note que, enquanto na primeira expressão a integral é considerada ao longo de um percurso fechado; já na segunda, ela deve ser feita por toda uma superfície fechada).

É justamente aí que pode residir uma dificuldade: enquanto conhecemos a forma para A_μ (mesmo que dependente da "string"), o mesmo não ocorre com $H_{\mu\nu}$. Isto, porque o que conhecemos é $\tilde{G}_\mu$. Mas, já que a relação de $H_{\mu\nu}$ com $\tilde{G}_\mu$ é não-local:

$$\tilde{G}_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}\partial^\mu H^{\kappa\lambda},$$

então poderíamos ter problemas de não-localidade (como já comentamos, anteriormente) ao fazermos a passagem $\tilde{G}_\mu \mapsto H_{\mu\nu}$. Particularmente, numa eventual teoria de campos que descrevesse a interação deste tipo de partícula (com cargas frente a dois grupos de gauge) e monopólos, com aquelas descritas, propriamente, pelos campos, tal procedimento poderia nos levar a sérias dificuldades: como a questão da não-causalidade, por exemplo. Portanto, não nos parecem bastante claros os caminhos que devíamos seguir para estudar o problema exposto, dando-lhe um tratamento análogo àquele de Wu e Yang (para a teoria de Maxwell na presença de monopólos de Dirac).

Em síntese, este terceiro (e último) capítulo da presente dissertação pretendeu, basicamente, mostrar que o parâmetro de massa topológica poderia estar presente numa condição de quantização, semelhante àquela obtida na Seção 2.2. Para que isto pudesse ser feito, começamos por introduzir um termo de interação entre os férmions e o setor tensorial. Vimos que, devido à dimensão quadri-dimensional do espaço-tempo, este tipo de interação só seria permitida pelas covariâncias de gauge e de Lorentz, através do tensor de curvatura (ou do seu dual, como fizemos), e não do próprio $H_{\mu\nu}$ (o que, provavelmente, torna o modelo não-renormalizável, devido à presença da constante de acoplamento com dimensão canônica negativa). Discutimos, também, a diferença fundamental existente entre este termo e aquele que acopla os férmions a A_μ: enquanto o primeiro é, por si só, um invariante de gauge ($U(1)_{H_{\mu\nu}}$), a presença do segundo é necessária para preservar, tanto a simetria de Lorentz quanto a de gauge ($U(1)_{A_\mu}$). Ainda nesta seção, obtivemos as equações dinâmicas para os campos. Para aquelas que se referiam aos campos de gauge, reescrevemo-las em notação de 3-vetor (como feito no Capítulo 2). Um certo problema de inconsistência foi verificado em algumas dessas *novas* equações. Para solucioná-lo, generalizamos o *ansatz* feito no capítulo anterior, às 4 componentes da corrente fermiônica J_μ.

Resolvida esta dificuldade, na Seção 3.2, passamos a estudar o sistema constituído pela partícula-teste no campo do monopólo. Escrevemos o Lagrangeano e deste as equações de movimento (clássicas) para a partícula (já que o monopólo é considerado estático). Obtivemos, também, o vetor de momento angular conservado para o sistema e discutimos a natureza de um novo termo que aparecia (com relação ao caso tratado, anteriormente). Passando-se ao tratamento quântico, verificamos que o operador correspondente satisfazia às relações de comutação que foram estabelecidas. Da quantização de sua componente radial, seguiu-se uma condição onde estavam presentes, dentre outros parâmetros, o de massa topológica (μ_0). Os limites de $\mu_0 \to 0$ e $\sigma \to 0$ para a condição de quantização foram tomados, sendo que ambos os resultados recobrem a condição já obtida no Capítulo 2. Repetindo-se a análise quântica, considerando-se a função de onda para a partícula teste, apontamos como se chega ao mesmo resultado. Por fim, discutimos como poderia ser implementada uma formulação análoga a de Wu e Yang, para o caso considerado. Devido a questões de não-localidade, pensamos que este ponto deve ser mais bem discutido, para que possamos seguir em tal procedimento.

Críticas e Perspectivas

Tendo em vista que, em cada capítulo, comentamos sobre os principais resultados obtidos, pretendemos nesta seção, desenvolver algumas críticas e ressaltar possíveis propostas de continuação dos estudos aqui iniciados.

A coexistência de um monopólo com "string" de Dirac com um fóton massivo não se concretiza com o modelo aqui estudado, a não ser que haja um "background" (no caso, fermiônico) que funcione como um *suporte material* sobre o qual os monopólos possam se acomodar. [De fato, no Capítulo 2, impusemos que a densidade de corrente deste "background" deveria satisfazer a um *ansatz* tipo-London da supercondutividade]. Portanto, apesar de não "aparecerem" no vácuo, pode ser que no interior de um supercondutor, onde os pares de Cooper criam um meio onde o fóton apresenta-se como um quantum massivo (efeito Meissner), tais monopólos possam se configurar. Assim, os pares condensados de elétrons constituir-se-iam neste "background" (num limite estacionário) necessário à estabilidade dos monopólos.

Também, a questão do aparecimento do parâmetro de massa na relação de quantização a que chegamos no Capítulo 3, equação (3.34), merece alguma crítica. Não se pode, a partir dela, afirmar, estritamente, que a massa topológica seja quantizada (como já discutimos, tal afirmação só é verdadeira se soubermos, de antemão, que as cargas aí presentes já o são). Tem-se, simplesmente, uma relação de quantização estendida, que no nosso caso, envolve a massa e as cargas (Abelianas e magnética). Tal relação se reduz, no limite de massa (μ_0) nula e/ou constante σ nula, à condição de quantização de Dirac.

Uma crítica final, bastante cabível, é que não apresentamos aqui uma teoria quântica de campos para os monopólos. Estes aparecem como meras configurações clássicas, em relação às quais estudamos alguns aspectos (a nível de Mecânica Quântica) de sua interação com uma partícula-teste. Seria conveniente, em uma etapa posterior, atacar a questão da quantização destes monopólos, mesmo sabendo-se das dificuldades em se construir teorias locais para a "segunda quantização" de tais objetos. (Como não nos detemos a este ponto aqui, sugerimos as seguintes referências [5, 20, 68, 70] e [77]-[80]).

Outra proposta de continuação seria efetuar a redução dimensional do modelo aqui estudado para $D = (2+1)$, onde aparecerão 3 campos de natureza vetorial e 1 escalar (este último, advindo do campo de Maxwell das 4 dimensões). Aí, o termo de Chern-Simons seria necessariamente misto em dois campos vetoriais, gerando um modelo semelhante ao proposto por Dorey e Mavromatos[81] para descrever a QED_3, com fóton massivo, sem quebra de paridade. A questão a se entender, posteriormente, é se o escalar, que aqui provém das 4 dimensões, pode executar a tarefa do escalar introduzido "*à mão*" em 3 dimensões a fim de gerar um pólo de massa nula no setor de gauge e garantir a supercondutividade sem quebra de paridade.

Finalizando o presente trabalho, gostaríamos de chamar a atenção para um ponto bastante interessante: como Dirac mostrou-nos, a Eletrodinâmica de Maxwell (i.e., fóton sem massa) admite configurações (clássicas) estáveis de monopólos magnéticos (no vácuo), desde que, se permita que o potencial vetor possua uma estrutura singular (na argumentação original do próprio Dirac). Todavia, se agora, estamos lidando com uma "Eletrodinâmica estendida", onde o fóton adquire massa (por exemplo, a teoria de Proca), a introdução de monopólos de Dirac fica inviabilizada (o que pode ser visto claramente em [52]). Fato análogo acontece com o modelo aqui estudado (o que foi visto na Seção 2.1), que descreve um bóson vetorial massivo, sendo neste aspecto, semelhante à teoria de Proca, com a diferença no mecanismo de geração dessa massa. Conforme constatamos, isto acontecia porque o campo magnético "sentia" a massa daquele bóson[8] (e daí, perdia sua simetria esférica). Assim, o que fizemos para introduzir monopólos no modelo foi impor a relação (2.56) (ou sua generalização 4-dimensional (3.16), no Capítulo 3) que, ao fim, conduziu-nos a equações análogas àquelas da Eletrodinâmica de Maxwell (para o setor magnético. Veja detalhes nas respectivas equações da Seção 2.1)[9]. Deste modo, a pergunta que nos colocamos, é se há algum príncipio físico que nos afirme a incompatibilidade de termos numa mesma teoria (Abeliana e em espaço-tempo de Minkowski) bóson vetorial massivo e monopólos magnéticos de Dirac. Uma resposta satisfatória, mas apenas parcial, pode ser dada quanto ao mecanismo de geração de massa para os bósons: se isto ocorrer de forma a manter a simetria esférica do campo magnético, então a coexistência de ambos os *objetos* é compatível. No entanto, se esta simetria for perdida, retornaremos à questão inicial.

Pensamos que este problema (que pode parecer simples) seja de grande relevância no contexto aqui apresentado, e uma resposta definitiva, se possível, pode nos ajudar a elucidar algumas questões importantes, pelo menos no que se refere a monopólos magnéticos Abelianos.

[8]O que parece fisicamente razoável, já que também o campo elétrico a "sentia".

[9]O que nos leva a uma assimetria entre os setores elétrico e magnético, já que o parâmetro de massa está presente na solução do campo elétrico, mas não do magnético.

Apêndice A

Introdução ao estudo dos monopólos magnéticos de Dirac

Neste Apêndice, pretendemos apresentar uma rápida, mas concisa introdução sobre os monopólos magnéticos. Estes *objetos* foram propostos (na moderna Eletrodinâmica) em 1931, pelo próprio Dirac[19], no intuito de se entender a natureza física da constante de estrutura fina: $e^2/\hbar c$, e daí, o porquê de termos uma *carga elétrica elementar quantizada* na Natureza.

Na Seção A.1, discutiremos a questão de se introduzir uma 4-corrente magnética no Eletromagnetismo usual (na presença de fontes elétricas). Isto é feito em conexão com a idéia de *dualidade*, entre os setores elétrico e magnético. Apresentamos, também, as equações que descrevem a dinâmica clássica de um sistema constituído por cargas elétrica e magnética em interação com o campo eletromagnético. A impossibilidade ("naive") de tratarmos este sistema, quanticamente, vem do fato de não podermos definir um campo, A_μ, que satisfaça tanto a $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ quanto a $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \chi^\nu \neq 0$ (com $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}$).

Na Seção A.2, obteremos, por alguns métodos distintos, a condição de quantização de

Dirac, que é a maneira pela qual a contradição acima (com relação a A_μ) será solucionada, podendo-se, assim, dar um tratamento quântico àquele sistema. Finalizando, fazemos uma apresentação sobre o conceito de "3-cocycle" e sua conexão com os monopólos.

A.1 Dualidade eletromagnética e monopólos

Comecemos esta seção pelas equações de Maxwell:[1]

$$\nabla \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \qquad \nabla \cdot \vec{E} = \rho\,, \tag{A.1}$$

$$\nabla \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0\,, \tag{A.2}$$

que, escritas na notação 4-vetorial, assumem as formas:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu\,, \tag{A.3}$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0\,, \tag{A.4}$$

sendo $F_{\mu\nu}$ o tensor do campo eletromagnético, definido como:

$$F_{\mu\nu} = \begin{cases} F_{0i} \equiv (+E)_i \\ F_{ij} \equiv -\epsilon_{ijk}(B)_k \end{cases} . \tag{A.5}$$

Denotamos por $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ a 4-corrente elétrica conservada, e $\tilde{F}^{\mu\nu}$ o dual de $F_{\mu\nu}$.

No vácuo, onde temos $j^\mu = 0$, as Equações de Maxwell, (A.3 e A.4), são simétricas sob a seguinte *transformação de dualidade*:

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{F}_{\mu\nu} \qquad \text{e} \qquad \tilde{F}_{\mu\nu} \longrightarrow F_{\mu\nu} \tag{A.6}$$

(que equivale a fazer a troca: $\vec{E} \to \vec{B}$ e $\vec{B} \to -\vec{E}$).

[1] Nesta seção, estaremos seguindo, basicamente, o exposto na referência[3], inclusive com relação às unidades. Veja também, Olive[9], para uma discussão mais recente sobre dualidade e sua conexão com monopólos e outros objetos topológicos (sólitons, por exemplo).

Poder-se-ia indagar, se uma simetria análoga seria admitida na presença de matéria, digo, $j^\mu = (\rho, \vec{j}) \neq 0$! A resposta seria afirmativa, mas se introduzíssemos uma 4-corrente magnética do lado direito de (A.4), o que equivaleria a *quebrar* a identidade de Bianchi $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$. Assim, teremos:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \qquad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \chi^\nu \,. \tag{A.7}$$

Nota-se, facilmente, que as equações acima são invariantes sob (A.6), conquanto que façamos, simultaneamente:

$$j^\mu \longrightarrow \chi^\mu \qquad \text{e} \qquad \chi^\mu \longrightarrow -j^\mu \,. \tag{A.8}$$

Se estas correntes resultam de partículas puntuais, então podemos escrever:

$$j^\mu(x) = \sum_i q_i \int dy_i^\mu \, \delta^4(x - y_i) \,. \tag{A.9}$$

$$\chi^\mu(x) = \sum_i g_i \int dy_i^\mu \delta^4(x - y_i) \,. \tag{A.10}$$

sendo q_i e g_i os valores correspondentes às cargas elétricas e magnéticas, respectivamente. A integral é feita ao longo da *linha de universo* de uma determinada partícula.

A equação de movimento (clássica) para uma partícula com carga elétrica (q) e massa (m), em interação com um campo eletromagnético, é dada por:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = q F^{\mu\nu} \frac{d x_\nu}{d\tau} \tag{A.11}$$

(τ é o tempo próprio da partícula), donde segue a expressão para a força de Lorentz (em 3 dimenssões):

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{\mathcal{F}} = q(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \wedge \vec{B}) \tag{A.12}$$

Por outro lado, numa teoria simétrica, em que uma mesma partícula carregasse cargas elétrica (q) e magnética(g), então sua equação de movimento (clássica) seria:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = (q F^{\mu\nu} + g \tilde{F}^{\mu\nu}) \frac{d x_\nu}{d\tau} \tag{A.13}$$

Assim, as equações de movimento acima, conjuntamente com (A.7), descrevem toda a dinâmica clássica de um sistema que contenha correntes elétrica e magnética em interação com o campo eletromagnético. No entanto, um tratamento quântico para este sistema não pode ser feito. Isto vem do fato de que, quanticamente, a entidade básica é o campo A_μ (e não $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, que é o ente físico, numa análise clássica)[2], que não poderá ser definido aqui, já que esta expressão acima, entra em contradição com $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \chi^\nu \neq 0$. Noutras palavras: uma descrição quântica de um sistema (seguindo-se o procedimento canônico) pressupõe o conhecimento (a nível clássico) das quantidades canônicas, tais como o Hamiltoniano, o momento conjugado, etc, que, por sua vez, dependem de A_μ. Então, não poder definir tal 4-vetor, implicaria, conseqüentemente, na impossibilidade de uma análise quântica, pelo menos, através deste procedimento.

É justamente neste ponto, que entra o trabalho de Dirac[3], sendo capaz de mostrar que, mesmo uma teoria com correntes elétrica e magnética poderia ser quantizada, desde que, para quaisquer valores de q e g, a condição:

$$\frac{qg}{4\pi} = \frac{n}{2}\hbar c \tag{A.14}$$

com n inteiro, fosse satisfeita (onde q e g são as *cargas* elétrica e magnética, respectivamente). Esta é a chamada condição de quantização de Dirac[19, 20], que nos afirma que, desde que exista um monopólo magnético (g) na Natureza (mesmo que não fosse observado!), então *qualquer* carga elétrica observada, *deverá* ser múltlipa inteira de $e_0 \equiv 2\pi\hbar c/g$

[2]Mais precisamente, é o *fator de fase*

$$exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}\right),$$

que possui, quanticamente, significado físico. Isto será discutido adiante.

[3]Originalmente, a condição de Dirac foi obtida impondo-se que a *string* não possuía qualquer significado físico. Veremos isto em mais detalhes adiante. Nos trabalhos originais de Dirac[19, 20], esta relação é escrita como: $eg = n\hbar/2$. Isto acontece, porque aí, são utilizadas unidades Gaussianas para a Eletrodinâmica.

(que é obtida da relação acima fazendo-se $n = 1$). Até o momento, está parece ser a argumentação mais plasível para a quantização da carga elétrica. [O fato de termos explicitado a constante de Planck ($\hbar$) aqui, é para salientarmos a natureza quântica de tal condição].

A seguir, vamos obter esta condição, explicitamente, por meio de alguns métodos distintos.

A.2 O problema de um elétron no campo de um monopólo magnético

Nesta seção, consideraremos o conhecido problema do movimento de um elétron[4] (carga e e massa m_e; não levaremos em conta seu spin) colocado no campo externo de um monopólo magnético (puntual e estático, localizado na origem). Pretendemos, a partir daí, derivar a condição de quantização de Dirac. Isto será feito por meio de alguns procedimentos distintos: "*single-valuedness*" da função de onda do elétron; propriedades da álgebra do momento angular; e *fatores de fase não-integráveis*, juntamente com transformações de gauge *generalizadas*.

O campo magnético devido a este monopólo é dado por:[5]

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{g}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{g}{4\pi}\nabla\left(\frac{1}{r}\right). \tag{A.15}$$

Uma vez que $\vec{B}$ é um campo radial, então seu fluxo (Φ_B) através de uma esfera (ou de qualquer outra superfície gaussiana fechada) que englobe o monopólo, será:

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = g. \tag{A.16}$$

[4]Conforme feito ao longo de todo trabalho, não levaremos em conta, os *spins* das partículas.

[5]Nesta primeira parte, estaremos seguindo, basicamente, o exposto em Ryder[21], com a diferença no uso do sistema de unidades (neste livro-texto são utilizadas unidades Gaussianas para a Eletrodinâmica).

Agora, consideremos a função de onda para um elétron:

$$\psi \equiv \psi_0 \, exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)\right] . \qquad (A.17)$$

Quando ele é colocado num campo eletromagnético externo, teremos que fazer: $p^{\mu} \rightarrow p^{\mu} - \frac{e}{4\pi c}A^{\mu}$. Para o caso considerado, em que o campo elétrico externo é nulo ($\vec{E} = 0$), ψ sofre a variação:

$$\psi \rightarrow \psi \, exp\left(-\frac{ie}{4\pi\hbar c}\vec{A}\cdot\vec{r}\right) . \qquad (A.18)$$

Assim, a fase da função de onda ($\psi = \psi_0 e^{i\alpha}$, sendo α a fase), varia de:

$$\alpha \rightarrow \alpha - \frac{e}{4\pi\hbar c}\vec{A}\cdot\vec{r}. \qquad (A.19)$$

Para se ter uma idéia desta variação, vamos calculá-la explicitamente. Para isto, consideremos um percurso fechado (C, com r, θ fixos e ϕ variando de 0 a 2π), que limite uma superfície aberta (S; no caso, sendo em formato esférico). A variação total de α, ao longo de C, é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{e}{4\pi\hbar c}\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} \\ &= \frac{e}{4\pi\hbar c}\int_S (\nabla \wedge \vec{A})\cdot d\vec{S} = \frac{e}{4\pi\hbar c}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \equiv \frac{e}{4\pi\hbar c}\Phi_B(r,\theta) \qquad (A.20) \end{aligned}$$

(observe que a passagem $\nabla \wedge \vec{A}$ para $\vec{B}$ na segunda linha, só será bem definida onde $\vec{A}$ for regular). Além do mais, note que, se por um lado $\Delta\alpha$ é dependente de $\vec{A}\cdot\vec{r}$, por outro, ela está relacionada com o fluxo $\Phi_B(r,\theta)$ (onde é possível definir $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$).

Agora, consideremos um percurso C_1, quando $\theta \rightarrow 0$. Neste caso, C_1 é um círculo de raio infinitesimal, que se contrai a um ponto quando $\theta = 0$. Calculando-se $\Delta\alpha$, obteremos:

$$(\Delta\alpha)_{C_1} = \frac{e}{4\pi\hbar c}\oint_{C_1} \vec{A}\cdot d\vec{l} = \frac{e}{4\pi\hbar c}\Phi_B(r, \theta = 0) = 0 \qquad (A.21)$$

(supondo-se que $\vec{A}$ seja regular para $\theta = 0$).

Aumentando o valor do ângulo θ, progressivamente, passamos por $\theta = \pi/2$, para o qual o caminho é um círculo de raio r e a superfície é um dos hemisférios da esfera. Ao aproximarmos de $\theta = \pi$, novamente, o percurso (C_2) tenderá a um ponto (análogo ao caso $\theta \to 0$), mas a superfície tenderá à toda a esfera. Neste caso, como já determinamos em (A.16), $\Phi_B(r, \theta = \pi) = g$, ou seja:[6]

$$(\Delta\alpha)_{C_2} = \frac{eg}{4\pi\hbar c}$$

E daí vemos que:

$$\frac{e}{4\pi\hbar c}\oint_{C_2} \vec{A}\cdot d\vec{l} = (\Delta\alpha)_{C_2} = \frac{eg}{4\pi\hbar c}$$

Mas como C_2 tende a um ponto, então $\vec{A}$ deverá ser singular ao longo de $\theta = \pi$, pois de outro modo, a integral acima se anularia. Esta *linha de singularidade* é a "string" de Dirac[7]. Observe que esta "string" não pode ser física, pois ela não está presente na forma de $F_{\mu\nu}$ (ou de $\vec{B}$, mais precisamente). De fato, a *única singularidade física* de A_μ está no ponto onde se encontra o monopólo, para o qual $\vec{B}$ é singular (assim como, no setor elétrico, o ponto onde se localiza uma carga elétrica puntual, é um ponto de singualridade física).

Portanto, a variação total da fase α, devido ao fluxo do campo do monopólo, é numericamente igual àquela devido ao potencial $\vec{A}$ da "string". Como sabemos, pelo Efeito Bohm-Aharonov[56], tais diferenças são fisicamente detectáveis. Isto porque, quantica-

[6]Observe que a integral $\int_{S2} \vec{B}\cdot d\vec{S}$ é feita em toda a superfície esférica, excluindo-se o ponto $\theta = \pi$, onde escolhemos a "string". Ora, como o ***fluxo magnético*** que atravessa a ***área de um ponto*** é nulo, então, a integral acima é igual a g: $\int_{S2} \vec{B}\cdot d\vec{S} = \Phi_B(r, \theta = \pi) = +g$.

[7]Como esta *linha* estende-se até o infinito, então o campo A_μ, neste caso, possui topologia *não trivial*, isto é, mesmo a distâncias infinitamente afastadas do monopólo, este campo mantém-se não-nulo. É justamente por isso, que os monopólos são entendidos como manifestações (ou defeitos) topológicos de uma teoria.

mente, a entidade física para a Eletrodinâmica, é o *fator de fase*:

$$exp\left(\frac{\imath e}{\hbar}\oint A_\mu dx^\mu\right),$$

(questão também discutida por Wu e Yang[57]).

Por outro lado, como queremos que tal "string" não produza quaisquer efeitos físicos, então a variação da fase de onda do elétron devido à ela deverá ser nula (ou mais precisamente, igual a $2\pi n$ (n inteiro), de forma que $exp(\imath\Delta\alpha) = 1$). Isto é conseguido se fizermos:

$$\frac{eg}{4\pi} = \frac{n}{2}\hbar c$$

que é a condição de quantização de Dirac.

Enfatisemos que, este método é fortemente dependente da simetria de gauge, no caso, aquela da Eletrodinâmica. Isto, porque a *fase da função de onda* (α) está intimamente relacionada à transformação de gauge que atua em A_μ. Para ver isto mais claramente, consideremos a Equação de Schrödinger para o elétron no campo do monopólo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}(\vec{D}^2)\Psi + e\Phi\Psi = \imath\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t},$$

onde: $\imath D_\mu = \imath\partial_\mu - eA_\mu \leftrightarrow \frac{-\imath}{\hbar}p_\mu = \pi_\mu - eA_\mu$ (com $D^\mu = \{D^0, \vec{D}\}$). Assim, como queremos que a equação acima seja invariante de gauge, então não só potencial deve se transformar ($A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\Lambda(x)$), mas também, a própria função de onda sofrerá uma transformação:

$$\Psi(x) \longmapsto \Psi'(x) = exp(+\imath e\Lambda(x))\Psi(x).$$

Desta forma, a variação na função de onda, $\Delta\alpha$, conforme considerado, está relacionada com o parâmetro $\Lambda(x)$.

Outro procedimento para se chegar a tal condição é através da álgebra dos operadores de momento angular. Seguiremos[8] o trabalho de Lipkin, Weisberger e Peshkin[58]. Justifi-

[8]De fato, vamos nos ater somente, aos pontos principais e conclusivos, mas a demonstração é desenvolvida em detalhes por estes autores. Consulte também [59]-[63].

camos tal escolha (por exemplo, em relação a [3]), porque aqui, nenhuma assertiva é feita com relação ao potencial A_μ, e portanto, sobre sua estrutura singular, que traz problemas ao lidarmos, por exemplo, com o formalismo Hamiltoniano.

Assim, para o problema já exposto em detalhes (no início da seção), supõe-se que o gerador dos deslocamentos temporais (o operador de energia) seja dado por:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m_e}\mathbf{p}^2 , \tag{A.22}$$

sendo $\mathbf{p}$ o operador de momento linear:

$$\mathbf{p} = m_e\dot{\mathbf{x}} . \tag{A.23}$$

Além do mais, supomos que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{p}$ satisfaçam às seguintes relações de comutação:[9]

$$[x_i, x_j] = 0 , \tag{A.24}$$

$$[x_i, p_j] = \imath\delta_{ij} , \tag{A.25}$$

$$[p_i, p_j] = -\imath\epsilon_{ijk}\, eB_k(x) , \tag{A.26}$$

sendo $\mathbf{B}$ o campo magnético devido ao monopólo:

$$B_i = \frac{g}{4\pi x^3}x_i .$$

A expressão para a força de Lorentz (numa versão quântica) é dada por:

$$\dot{p}_i = \frac{-\imath}{\hbar}[\mathbf{H}, p_i] = -\frac{e}{2m_e\hbar}(\mathbf{p}\wedge\mathbf{B} - \mathbf{B}\wedge\mathbf{p})_i \tag{A.27}$$

Já o operador de momento angular conservado (i.e., $[\mathbf{H}, \mathcal{J}] = 0$) deverá satisfazer a:

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = \imath\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k , \tag{A.28}$$

$$[\mathcal{J}_i, x_j] = \imath\epsilon_{ijk}\, x_k , \tag{A.29}$$

$$[\mathcal{J}_i, p_j] = \imath\epsilon_{ijk}\, p_k . \tag{A.30}$$

[9]Que não são as Canônicas, já que $\mathbf{p}$ não é o momento canônico.

Sendo $\mathcal{J}$ dado por:

$$\mathcal{J} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p} + \frac{eg}{4\pi\hbar c}\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}} . \tag{A.31}$$

Pode-se mostrar que (A.31) é a única solução para as relações de comutação acima (entre $\mathcal{J}, x$ e p). Para isto, é necessário supor que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{p}$ formem um conjunto completo de observáveis.

Todavia, preferimos dar um significado mais concreto ao segundo termo que compõe o momento angular conservado (digo, $\frac{eg}{4\pi\hbar c}\frac{\mathbf{x}}{x} \equiv \mathcal{J}_{em}$, já que $\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$ é bem conhecido). Classicamente, ele pode ser obtido, integrando-se o *momento do vetor de Poynting*, $\vec{x} \wedge \vec{S}(\vec{x})$, sobre todo o espaço, ou seja:[10]

$$\vec{\mathcal{J}}_{em} = \int d^3x\, \vec{x} \wedge \vec{S}(\vec{x}) = \int d^3x\, \vec{x} \wedge \left(\vec{E}(\vec{x}) \wedge \vec{B}(\vec{x})\right) , \tag{A.32}$$

onde $\vec{E}(\vec{x})$ é o campo do elétron (situado no ponto $\vec{r}$); e $\vec{B}(\vec{x})$ é o campo magnético do monopólo (colocado na origem):

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{e}{4\pi}\frac{(\vec{x}-\vec{r})}{|\vec{x}-\vec{r}|^3} \quad \Longrightarrow \quad \nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = e\delta^3(\vec{x}-\vec{r}) , \\ \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{g}{4\pi x^3}\vec{x} . \end{aligned} \tag{A.33}$$

Assim:

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_{em})_i &= \int d^3x\, \epsilon_{ijk} x_j (\vec{E} \wedge \vec{B})_k = \int d^3x\, \epsilon_{ijk} x_j \epsilon_{klm} E_l B_m \\ &= \int d^3x\, E_j(\delta_{ij} - \hat{x}_i\hat{x}_j)\frac{g}{4\pi x} = \int d^3x\, E_J \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{g}{4\pi}\hat{x}_i\right) \\ &= -\int d^3x\, \nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) \left(\frac{g}{4\pi}\hat{x}_i\right) = -\frac{eg}{4\pi}\hat{x}_i \\ &\Longrightarrow \quad \vec{\mathcal{J}}_{em} = -\frac{eg}{4\pi}\hat{r} , \end{aligned} \tag{A.34}$$

(observe que falta o fator $1/c$ na expressão acima. Isto, porque escrevemos $\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{B}$, onde também falta o mesmo fator. Não vamos nos preocupar com isto aqui, pois as

[10] Por se tratar de uma análise clássica, explicitaremos a natureza vetorial das grandesas como de costume, digo, colocando um '$\rightarrow$' sobre a letra.

expressões podem ser corrigidas facilmente, por uma análise dimensional.) Assim, $\vec{\mathcal{J}}$ é a soma do momento angular orbital do elétron ($\vec{r} \wedge \vec{p}$) e do momento angular do campo eletromagnético, $\vec{\mathcal{J}}_{em}$.

Feita tal observação, voltemos à questão da condição de Dirac. A componente radial do momento angular ($\vec{r} \cdot \vec{x} = -1$, daí o porque do sinal '+' abaixo: enquanto $\vec{r}$ vai do monopólo ao elétron, numa linha reta, $\vec{x}$ toma o sentido oposto):

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}} \cdot \mathcal{J} = +\frac{eg}{4\pi\hbar c}, \tag{A.35}$$

comuta com todos os observáveis (o que pode ser verificado por meio das relações de comutação ao longo do texto), e assim, deve ser quantizada da seguinte maneira (que é a regra usual, Mecânica Quântica, para a componente radial do momento angular de um sistema físico):

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}} \cdot \mathcal{J} = \frac{eg}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{2}n \tag{A.36}$$

que é a condição de Dirac, equação (A.22). Observe que, nenhuma referência é feita ao potencial A_μ, e assim, à "string". Realmente, tal relação é a condição necessária e suficiente para a realização de todos os observáveis do sistema. Esse é o argumento físico para se justificar tal condição, neste procedimento.

No entanto, ambas as partículas envolvidas nesta demonstração, são tomadas sem spin, ou seja, $spin = 0$ (e daí, bósons). Deste modo, pode parecer contraditório que tenhamos eg quantizado de acordo com a regra aplicada aos férmions: $\approx \hbar/2$ (para n impar). Queria isto sugerir que um sistema fermiônico (elétron +monopólo) seria *formado por constituintes bosônicos* (elétron e monopólo, individualmente)? Realmente, uma discussão neste sentido vem se desenvolvendo há algum tempo. Não pretendemos nos ater a ela aqui, mas sugerimos as seguintes referências: Goldhaber[64], que trata da questão acima para o caso Abeliano e; Jackiw e Rebbi[65] e Hasenfratz e 't Hooft[66], para o caso não-Abeliano.

Um procedimento de quantização semelhante (digo, para a componente radial do momento angular), baseado na invariância rotacional do problema, foi desenvolvido por Hurst[60]. Veja também, Perez[67], que faz uso das invariâncias de gauge e rotacional para chegar à condição de Schwinger: $eg = \hbar c n$ (n inteiro).[11]

Finalizando este Apêndice, vamos fazer uma derivação da condição de quantização de Dirac, utilizando o procedimento de Wu-Yang[57], que é baseado na invariância de gauge do modelo. Para tal, vamos nos basear nos textos expostos em [3, 4, 21, 57]. Em nossa demonstração, vamos precisar conhecer a forma explícita para A_μ. No entanto, conforme já salientamos, este 4-vetor não existe em todos os pontos de uma superfície fechada que englobe o monopólo. Mais precisamente, A_μ possui uma estrutura singular, como vimos anteriormente. Assim sendo, podemos até obter uma solução para este potencial e definirmos $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$, exceto ao longo da *linha* que $\vec{A}$ seja singular.

Vamos agora, obter uma solução explícita para $\vec{A}$. Para isso, vamos escolher, por exemplo, a "string" ao longo de $r = -z$ ($\theta = \pi$). Devido à simetria axial do problema, esperamos que $\vec{A} = \vec{A}(r, \theta, \phi) = A(r, \theta)\hat{e}_\phi$, onde $\hat{e}_\phi$ é o vetor unitário ao longo da direção ϕ. O fluxo magnético que passa através de uma superfície aberta (S), limitada por um círculo, é igual ao produto do ângulo sólido (subtendido por este círculo) pela carga do

[11]Esta diferença entre as duas condições de quantização, surge, por um lado, porque no caso de Dirac, a "string" estende-se ao longo de uma *linha* semi-infinita, partindo-se (ou terminando-se) do monopólo. Já para o caso tratado por Schwinger[68, 70], a "string" estende-se ao longo de uma *linha* infinita, que passa pelo monopólo. A nível de Teoria de Campos para as cargas (com potenciais possuindo estruturas singulares arbitrárias), feita uma escolha particular dessa singularidade, e tomando-se pares de pontos que são conectados por ela, estes pontos possuem características especiais com relação aos demais pontos do espaço-tempo. Em particular, na teoria de Dirac, este fato é explicitamente representado pelo *veto de Dirac*. Por outro lado, na teoria de Schwinger, o quadro é extremamente diferente: aqui, a condição de quantização (de Schwinger) tem a função de *restaurar a equivalência de todos os pontos* do espaço-tempo, sem qualquer excessão (e daí, a *invariância rotacional* do sistema).

monopólo (g): $\frac{g}{2\pi}(1-\cos\theta)$, que deve ser igual a :

$$\begin{aligned} \frac{g}{4\pi}(1-\cos\theta) &= \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 2\pi r\sin\theta\, A(r,\theta) \\ &\Longrightarrow \quad A(r,\theta)\hat{e}_\phi = \frac{g}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\hat{e}_\phi \end{aligned} \tag{A.37}$$

que exibe, explicitamente, a singularidade ao longo de $\theta = \pi$ ($r = -z$).

Analogamente, se escolhermos a singularidade ao longo $\theta = 0$ ($r = +z$), obteremos:

$$A(r,\theta)\hat{e}_\phi = -\frac{g}{4\pi r}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\hat{e}_\phi$$

Agora, vamos dividir o espaço em torno do monopólo (a esfera, essencialmente, devido à simetria explícita), em duas regiões:

$$R_a = \begin{cases} r > 0 \\ 0 < \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases} \qquad R_b = \begin{cases} r > 0 \\ 0 \leq \theta < \pi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases} .$$

Basicamente, R_a envolve todo o espaço, exceto o semi-eixo $r = +z$ ($\theta = 0$), isto é, a linha que é *ocupada* pela "string"; R_b é análoga, com a diferença de excluir $r = -z$. Se definirmos:

$$\vec{A}_a(\vec{r}) = \begin{cases} (A_a)_r = (A_a)_\theta = 0 \\ (A_a)_\phi = -\frac{g}{4\pi r}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \end{cases} \qquad \vec{A}_b(\vec{r}) = \begin{cases} (A_b)_r = (A_b)_\theta = 0 \\ (A_b)_\phi = \frac{g}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \end{cases} . \tag{A.38}$$

Assim, $\vec{A}_a$ e $\vec{A}_b$ são regulares em R_a e R_b, respectivamente. Observe, no entanto, que na região de interseção entre R_a e R_b, ambas as soluções são bem definidas. Deste modo, esperamos mostrar que aí estas duas soluções se relacionam via uma transformação de gauge. Daí, o fato de $\vec{A}$ não poder ser definido globalmente (e de forma única) em toda a região em torno do monopólo. Esta transformação *não é* aquela já conhecida da Eletrodinâmica *usual*, mas outra mais geral, que envolve também, a *carga* do monopólo.

Na região de interseção definida acima, consideremos:

$$\vec{A}_a(\vec{r}) - \vec{A}_b(\vec{r}) = \frac{2g}{4\pi r \sin\theta}\hat{e}_\phi \equiv +\frac{\imath\hbar c}{e} S \nabla S^{-1} \tag{A.39}$$

É fácil ver que:[12]

$$S = exp(\frac{2\imath e g}{4\pi\hbar c}\phi) \tag{A.40}$$

satisfaz a esta expressão.

Em notação de 4-vetor, teríamos:

$$A^\mu_a - A^\mu_b = +\frac{\imath\hbar c}{e} S \partial^\mu S^{-1} \tag{A.41}$$

Voltemos à forma de S. Para que ela seja uma transformação de gauge permitida por um campo físico, então ela deve ser "single-valued", i.e.,:

$$\begin{aligned} S(\phi) = S(\phi + 2\pi) \quad & \Longrightarrow \quad exp\left(\imath\frac{2eg}{\hbar c}\phi\right) = exp\left(\imath\frac{2eg}{\hbar c}(\phi + 2\pi)\right) \\ & \Longrightarrow \quad \frac{eg}{4\pi\hbar c} = \frac{n}{2} \end{aligned}$$

com n inteiro, que é a condição de quantização de Dirac (A.22). Aí é que a invariância de gauge tem sua importância: demonstra-nos que a "string" não possui significado físico, já que duas soluções (para A_μ) com "strings" diferentes conduzem-nos aos mesmos resultados. Em outras palavras, variar a posição desta "string" seria como *escolher um novo* sistema de coordenadas para se tratar um problema físico.

Fisicamente, a existência dessa transformação de gauge implica em dizer que o tensor eletromagnético é contínuo e bem definido em todos os pontos de uma região arbitrária (uma esfera, por exemplo) que envolva o monopólo.

[12]Em coordenadas esféricas, o gradiente se escreve:

$$\nabla(r,\theta,\phi) = \hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{e}_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

Todavia, cabe-nos salientar que nossa demonstração não foi extremamente rigorosa. Isto, porque escolhemos duas "strings" particulares. Todavia, pode-se mostrar[57] que, se repetirmos a análise para o caso de duas "strings" arbitrárias, encontraremos o mesmo resultado (i.e., a Condição de Dirac). [Além do mais, devemos chamar a atenção que este trabalho foi importante no sentido de fazer uma conexão entre o Eletromagnetismo (e de certa forma, teorias de gauge em geral) e conceitos da geometria diferencial (especialmente, o de *fibrados*). Neste sentido, o texto acima apresenta esta lacuna].

Apenas de passagem, vamos comentar sobre a relação entre o problema dos monopólos magnéticos e o conceito de "cocycles", em particular, o terceiro (geralmente denominado "3-cocycle"). Para uma melhor compreensão do assunto, consulte [71]-[76].

Assim, consideremos uma região com um campo magnético arbitrário ($\vec{B}$. inclusive aquele gerado por fontes, puntuais ou não). Para uma partícula (carga elétrica e e massa $m_e = 1$, e daí, $\vec{p} = \dot{\vec{r}}$) colocada nesse campo, a expressão (clássica) para a força de Lorentz:

$$\vec{\mathcal{F}} = e\vec{p} \wedge \vec{B},$$

só poderá ser representada via uma relação de comutação com o Hamiltoniano:

$$\mathcal{F} = \dot{\mathbf{p}} = \frac{\imath}{\hbar}[\mathbf{p}, \mathbf{H}],$$

se a seguinte álgebra de comutadores:

$$[r_i, r_j] = 0 \qquad [r_i, p_j] = \imath\delta_{ij} \qquad [p_i, p_j] = \imath e \epsilon_{ijk} B_k,$$

for postulada.

Segue daí, que a quantidade invariante de gauge: $\mathcal{U}(\mathbf{a}) \equiv exp(\imath \mathbf{a} \cdot \mathbf{p})$ implementa as translações espaciais:

$$\mathcal{U}(\mathbf{a}) f(\mathbf{r}) \mathcal{U}^{-1}(\mathbf{a}) = f(\mathbf{r} + \mathbf{a}),$$

onde $f(\mathbf{r})$ é uma função da posição, somente.

Compondo-se duas transformações, temos:

$$\mathcal{U}(\mathbf{a_1})\mathcal{U}(\mathbf{a_2}) = exp(\imath e\Phi(\mathbf{r};\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}))\mathcal{U}(\mathbf{a_1}+\mathbf{a_2}),$$

onde $\Phi(\mathbf{r};\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)$ representa o *fluxo magnético* que passa através do triângulo definido pelos vértices: $\mathbf{r}, \mathbf{r}+\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{r}+\mathbf{a}_2$.

Por outro lado, pode-se mostrar que tais translações não são associativas, ou seja:

$$\begin{aligned}\{\mathcal{U}(\mathbf{a_1})\mathcal{U}(\mathbf{a_2})\}\,\mathcal{U}(\mathbf{a_3}) &= exp(\imath e\Phi(\mathbf{r};\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}))\mathcal{U}(\mathbf{a_1})\,\{\mathcal{U}(\mathbf{a_2})\mathcal{U}(\mathbf{a_3})\} \\ &\equiv exp(2\pi\imath\omega_3)\mathcal{U}(\mathbf{a_1})\,\{\mathcal{U}(\mathbf{a_2})\mathcal{U}(\mathbf{a_3})\}\,.\end{aligned}$$

Aqui, definimos o "3-cocycle" como sendo a exponencial acima:

$$exp(2\pi\imath\omega_3) = exp(\imath e\Phi(\mathbf{r};\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3})),$$

onde $\Phi(\mathbf{r};\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)$ representa o fluxo magnético que atravessa toda a área que limita o tetraedro formado por $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$, com vértice em $\mathbf{r}$. Assim, o "3-cocycle" constitui-se numa *medida* da *não-associatividade* da álgebra de comutadores acima, implicando na violação da identidade de Jacobi, dando-nos:

$$\epsilon_{ijk}\,[p_i,[p_j,p_k]] = e\nabla\cdot\vec{B} \neq 0$$

(se $\vec{B}$ é gerado por fontes).

No entanto, uma composição *não-associativa* não poderá ser bem definida no espaço de Hilbert. Daí, para que um tratamento quântico (no formalismo canônico) possa ser implementado, então devemos ter:

$$\omega_3 = n$$

com n inteiro. Observe, que a *associatividade* (para os geradores das translações) poderá ser restabelecida se: $\vec{B}$ for gerado por uma carga puntual, $\nabla\cdot\vec{B} = g\delta^3$ (de forma a preservar a integrabilidade de ω_3, ou de $\int_V \nabla \cdot \vec{B}$, para valores arbitrários de $\mathbf{a}_i$); e também, que a condição de Dirac (A.22) seja satisfeita.

Ainda assim, no ponto onde está o monopólo (mais geralmente, onde $\nabla \cdot \vec{B}$ é singular), a identidade acima será violada. Por um lado, se excluírmos este ponto do espaço em consideração (uma vez que não haverá $\mathcal{U}$ que realize uma translação até ele [71]), então a violação não prevalecerá. Por outro, se considerarmos esta distribuição de fonte (i.e., não fazermos tal exclusão) teremos uma forma infinitesimal para o "3-cocycle", ou seja, ω_3 estará presente na identidade acima. No entanto, em sua forma unitária ele permanecerá inócuo [72]:

$$exp(2\pi \imath \omega_3) = 1 \, .$$

Portanto, segue do exposto acima, que no caso de monopólos de Dirac, este problema de não-associatividade está ausente. (A mesma conclusão é válida para os monopólos aqui tratados, cuja verificação é direta).

Apêndice B

Graus de liberdade físicos para os campos no modelo CSKR

B.1 O papel das simetrias de gauge nesse contexto

Sejam as transformações de gauge locais para os campos A_μ e $H_{\mu\nu}$:

$$A_\mu(x) \longmapsto A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x) \tag{B.1}$$

$$H_{\mu\nu}(x) \longmapsto H'_{\mu\nu}(x) = H_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu \xi_\nu(x) - \partial_\nu \xi_\mu(x), \tag{B.2}$$

Considere também uma Ação que seja invariante sob elas. Mostraremos então, que tais simetrias terão o papel de diminuir a quantidade de graus de liberdade (g.l.) físicos propagados pelos campos. Para isso, é mais conveniente trabalharmos no espaço dos momenta. Definimos então, as transformadas de Fourier:

$$W(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi^4)} e^{ipx}\, \hat{W}(p) \tag{B.3}$$

$$W_\mu(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi^4)} e^{ipx}\, \hat{W}_\mu(p) \tag{B.4}$$

$$W_{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi^4)} e^{ipx}\, \hat{W}_{\mu\nu}(p), \tag{B.5}$$

para um escalar, um 4-vetor e um tensor de *rank*-2, respectivamente. O símbolo sobre as letras denota a transformada de Fourier.

Vamos escolher uma base linearmente independente, nesse espaço , como sendo:

$$\begin{cases} p^\mu = (p^0, +\vec{p}) \\ \bar{p}^\mu = (p^0, -\vec{p}) \\ \alpha_I^\mu = (0, \vec{\alpha}_I) \end{cases} \tag{B.6}$$

sendo que $\vec{p}.\vec{\alpha}_I = 0$, com $I = 1, 2$.

Expandindo os campos em termos dos vetores dessa base, temos:

$$\hat{A}^\mu(p) = ap^\mu + b\bar{p}^\mu + c_I\alpha_I^\mu \tag{B.7}$$

$$\hat{H}^{\mu\nu}(p) = -\hat{H}^{\nu\mu}(p) = dp^{[\mu}\bar{p}^{\nu]} + f_I p^{[\mu}\alpha_I^{\nu]} + g_I\bar{p}^{[\mu}\alpha_I^{\nu]} + h_{IJ}\alpha_I^{[\mu}\alpha_J^{\nu]}. \tag{B.8}$$

onde: $u^{[\mu}v^{\nu]} \equiv u^\mu v^\nu - u^\nu v^\mu$.

Aqui fica claro o número de componentes independentes para cada campo: 4 para A_μ e 6 para $H_{\mu\nu}$, que são os parâmetros $a, b, \ldots h_{IJ}$ (sendo $h_{IJ} = -h_{JI}$). Estes parâmetros são funções escalares do momento.

Escritas no espaço dos momenta (lembrando-se da prescrição: $\partial_\mu \leftrightarrow \imath p_\mu$), as transformações de gauge, expressões (B.1) e (B.2), tomam as formas:

$$\hat{A}^\mu(p) \longmapsto \hat{A}'^\mu(p) = \hat{A}^\mu(p) - \imath p^\mu\hat{\Lambda}(p) \tag{B.9}$$

$$\hat{H}^{\mu\nu}(p) \longmapsto \hat{H}'^{\mu\nu}(p) = \hat{H}^{\mu\nu}(p) + \imath p^\mu\hat{\xi}^\nu(p) - \imath p^\nu\hat{\xi}^\mu(p). \tag{B.10}$$

Estudemo-as em separado:

i) Expandindo (B.9), temos:

$$a'p^\mu + b'\bar{p}^\mu + c_I'^\mu\alpha_I^\mu = ap^\mu + b\bar{p}^\mu + c_I^\mu\alpha_I^\mu - \imath p^\mu\hat{\Lambda},$$

donde vê-se, claramente, a dependência de gauge do parâmetro a: $a' = a - \imath\hat{\Lambda}$. Portanto, o coeficiente a (ou a', já que, fisicamente $\hat{A}_\mu$ e $\hat{A}'_\mu$ são equivalentes) não pode ser um g.l. físico propagado pelo respectivo campo. Noutras palavras, podemos encontrar um gauge no qual tal parâmetro possa ser anulado. Portanto, sem qualquer perda de conteúdo físico, podemos escrever:

$$\hat{A}^\mu(p) = b\overline{p}^\mu + c_I \alpha_I^\mu \tag{B.11}$$

A componente a (ou a') está associada ao setor de *spin* $= 0$ do campo A_μ (ou seja, ao potencial Φ, no espaço de coordenadas). Assim, já que $a = a(p)$, então é necessário que a transformação de gauge (sobre A_μ) seja local: $\Lambda = \Lambda(x)$, para que ela possa *anular* este parâmetro em todo ponto, e assim, subtrair a componente de *spin* $= 0$ deste campo.

ii) Repetindo o procedimento para (B.10):

$$\begin{aligned} d'p^{[\mu}\overline{p}^{\nu]} + f_I' p^{[\mu}\alpha_I^{\nu]} &+ g_I'\overline{p}^{[\mu}\alpha_I^{\nu]} + h_{IJ}'\alpha_I^{[\mu}\alpha_J^{\nu]} = \\ &= dp^{[\mu}\overline{p}^{\nu]} + f_I p^{[\mu}\alpha_I^{\nu]} + g_I\overline{p}^{[\mu}\alpha_I^{\nu]} + h_{IJ}\alpha_I^{[\mu}\alpha_J^{\nu]} \\ &+ \imath p^\mu(tp^\nu + u\overline{p}^\nu + v_I\alpha_I^\nu) - \imath p^\nu(tp^\mu + u\overline{p}^\mu + v_I\alpha_I^\mu), \end{aligned}$$

onde $\hat{\xi}^\mu(p) = (tp^\mu + u\overline{p}^\mu + v_I\alpha_I^\mu)$.

Tal expressão nos dá:

$$d' = d + \imath u$$

$$f_I' = f_I + \imath v_I,$$

isto é, tanto d quanto f_I são dependentes de gauge, e assim, não poderão se constituir em g.l. físicos propagados por $H_{\mu\nu}$. (O comentário feito acima, sobre a localidade das transformações de gauge aplica-se também aqui). Então, escrevemos:

$$\hat{H}^{\mu\nu}(p) = g_I\overline{p}^{[\mu}\alpha_I^{\nu]} + h_{IJ}\alpha_I^{[\mu}\alpha_J^{\nu]}. \tag{B.12}$$

Pode parecer estranho, o fato de que apenas 3 g.l (e nao 4) terem sido subtraídos pela transformação de gauge de $H_{\mu\nu}$, já que ela é implementada por um 4-vetor, ξ_μ. Isto é explicado, lembrando-se que esta própria transformação:

$$(\partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu)$$

é invariante sob:

$$\xi_\mu \longmapsto \xi_\mu + \partial_\mu \omega(x)$$

(ω sendo uma função regular). Assim, analogamente ao que fizemos para A_μ no espaço dos momenta:

$$\hat{\xi}_\mu(p) \longmapsto \hat{\xi}_\mu(p) + \imath p_\mu \hat{\omega}(p) \quad \Longrightarrow \quad \hat{\xi}'_0(p) = \hat{\xi}_0(p) + \imath\hat{\omega}(p)\,,$$

e daí, $\hat{\xi}_0(p)$ pode ser anulado por uma escolha apropriada de $\hat{\omega}(p)$. Assim, das 4 componentes de ξ_μ, apenas 3 (as vetorias) é que terão importância na transformação de gauge que atua em $H_{\mu\nu}$. Neste sentido, podemos escrever:

$$\xi^\mu \equiv \{\xi^0, \vec{\xi}\} = \{0, \vec{\xi}\}$$

sem perda de generalidade.

Portanto, após o uso das simetrias de gauge ficamos com 3 g.l. para cada um dos campos. Mostramos assim, o que pretendíamos com respeito a tais simetrias. Estes g.l., são ditos *"off-shell"*. Após o uso das equações de movimento, somente aqueles que se concretizarem como g.l. é que serão físicos (chamados *"on-shell"*).

B.2 As equações de campo e os graus de liberdade *on-shell*

No intuito de mostrar o que havíamos afirmado no Cap. 1, vamos distinguir dois modelos:

1. Modelo livre: Temos o seguinte Larangeano:

$$\mathcal{L}_{free} = +\frac{1}{6}G_{\mu\nu\kappa}G^{\mu\nu\kappa} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{B.13}$$

que nos conduz a:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{B.14}$$

$$\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = 0, \tag{B.15}$$

$$\tag{B.16}$$

além das identidades de Bianchi (equações (1.8,1.9), no Capítulo 1).

No espaço dos momenta, (B.14) e (B.15) tomam as formas:[1]

$$(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\hat{A}_\nu(p) = 0 \qquad \text{e} \tag{B.17}$$

$$p_\mu(p^\mu \hat{H}^{\nu\kappa} + p^\nu \hat{H}^{\kappa\mu} + p^\kappa \hat{H}^{\mu\nu}) = 0,$$

ou ainda:

$$\left(\frac{1}{2}[\eta^{\nu\alpha}\eta^{\kappa\beta} - \eta^{\nu\beta}\eta^{\kappa\alpha}]p^2 + \eta^{\kappa\alpha}p^\beta p^\nu + \eta^{\nu\beta}p^\alpha p^\kappa\right)\hat{H}_{\alpha\beta}(p) = 0, \tag{B.18}$$

(aqui, escrevemos o termo entre "[ ]" anti-simetrizado, por conveniência) cujos propagadores livres (i.e., a "tree-level") são, respectivamente:

$$\triangle_A^{\mu,\nu}(p) = \frac{1}{p^2}\Theta^{\mu\nu} \qquad \text{e} \tag{B.19}$$

$$\triangle_H^{\mu\nu,\alpha\beta}(p) = \frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\nu} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\alpha\nu}\right) - \frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\alpha}\omega^{\beta\nu} - \eta^{\mu\beta}p^\alpha p^\nu\right)\right), \tag{B.20}$$

cujos pólos nos mostram que ambos os campos possuem massa nula: $m_A^2 = m_H^2 = p^2 = 0$. Com os projetores $\Theta^{\mu\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$ definidos por:[2]

[1] Para este caso (modelo livre), as identidades de Bianchi não desempenham nenhum papel com relação ao número de g.l. propagados pelos campos. Assim, não nos preocuparemos com elas na análise que se segue.

[2] Claramente, eles satisfazem às seguintes condições de ortonormalidade:

$$\Theta^{\mu\nu}\Theta_{\nu\kappa} = \delta^\mu_\kappa\,; \quad \omega^{\mu\nu}\omega_{\nu\kappa} = \delta^\mu_\kappa\,; \quad \Theta^{\mu\nu}\omega_{\nu\kappa} = 0$$

$$\Theta^{\mu\nu} = \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) ; \qquad \omega^{\mu\nu} = \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}$$

Agora, para mostrarmos, explicitamente, a quantidade de g.l. propagados pelos campos, deveremos retomar suas equações de movimento, (B.17) e (B.18). Usando-se também, (B.11) e (B.12), obtemos:

$$\begin{aligned}
(p^2\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)(b\overline{p}_\nu + c_I\alpha_{I\nu}) &= 0, \qquad \text{(B.21)} \\
p^2(g_I\overline{p}^{[\nu}\alpha_I^{\kappa]} + h_{IJ}\alpha_I^{[\nu}\alpha_J^{\kappa]}) &+ p^\mu p^\nu(g_I\overline{p}^{[\kappa}\alpha_I^{\mu]} + h_{IJ}\alpha_I^{[\kappa}\alpha_J^{\mu]}) + \\
&+ p^\mu p^\kappa(g_I\overline{p}^{[\mu}\alpha_I^{\nu]} + h_{IJ}\alpha_I^{[\mu}\alpha_J^{\nu]}) = 0, \qquad \text{(B.22)}
\end{aligned}$$

mas: $p^2 = 0$ e $p^\mu\alpha_{I\mu} = \overline{p}^\mu\alpha_{I\mu} = 0$. Então, restam-nos:

$$bp^\mu p^\nu \overline{p}_\nu = 0 \Longrightarrow b = 0,$$

logo:

$$\hat{A}^\mu(p) = c_I\alpha_I^\mu \qquad \text{(B.23)}$$

além de:

$$g_I p^\mu \overline{p}_\mu p^{[\kappa}\alpha_I^{\nu]} = 0 \Longrightarrow g_I = 0, \quad I = 1, 2.$$

e assim:

$$\hat{H}^{\mu\nu}(p) = h_{IJ}\alpha_{IJ}^{\mu\nu}, \quad h_{IJ} = -h_{JI} \qquad \text{(B.24)}$$

Portanto, para o modelo livre, A_μ comporta-se como um campo vetorial sem massa, propagando 2 g.l. físicos (*on-shell*), enquanto que $H_{\mu\nu}$ descreve um escalar de massa nula, tendo assim, apenas 1 g.l. *on-shell*.

2. Modelo com termo de "mixing": Neste caso, temos o Lagrangeano já conhecido:

$$\mathcal{L}_1 = +\frac{1}{6}G_{\mu\nu\kappa}G^{\mu\nu\kappa} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mu_0\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}A^{\mu}\partial^{\nu}H^{\kappa\lambda}$$

Que nos dão as equações de campo e as identidades de Bianchi já conhecidas (1.6-1.9), no Capítulo 1).

Escritas no espaço dos momenta, as equações de campo ficam:

$$(\imath p_{\mu})\hat{F}^{\mu\nu}(p) = -\mu_0\epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho}(\imath p_{\kappa})\hat{H}_{\lambda\rho}(p)\,, \tag{B.25}$$

$$(\imath p_{\mu})\hat{G}^{\mu\nu\kappa}(p) = +\mu_0\epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho}(\imath p_{\lambda})\hat{A}_{\rho}\,, \tag{B.26}$$

donde segue-se que:[3]

$$\hat{F}^{\mu\nu}(p) = +\mu_0\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\hat{H}_{\alpha\beta}(p) \tag{B.27}$$

$$\hat{G}^{\mu\nu\kappa}(p) = +\mu_0\epsilon^{\mu\nu\kappa\rho}\hat{A}_{\rho}(p) \tag{B.28}$$

ou ainda (lembrando-se das definições dos duais):

$$\hat{\tilde{F}}_{\mu\nu}(p) = -2\mu_0\hat{H}_{\mu\nu}(p)\,, \tag{B.29}$$

$$\hat{\tilde{G}}_{\mu}(p) = \mu_0\hat{A}_{\mu}(p)\,, \tag{B.30}$$

Que são relações de vínculo entre os campos de gauge e os tensores de campo. É a partir destas equações que vemos o papel a ser desempenhado pelas identidades de Bianchi (escritas no espaço dos momenta):

$$(\imath p_{\mu})\hat{\tilde{G}}^{\mu}(p) = 0 \Longrightarrow (\imath p_{\mu})\hat{A}^{\mu}(p) = 0\,, \tag{B.31}$$

$$(\imath p_{\mu})\hat{\tilde{F}}^{\mu\nu}(p) = 0 \Longrightarrow (\imath p_{\mu})\tilde{H}^{\mu\nu}(p) = 0 \tag{B.32}$$

[3]Observe que no espaço de configurações, um procedimento análogo poderia incorrer em cálculos e definições não-locais de campos. Novamente, chamamos a atenção para o fato de que, estamos trabalhando no espaço dos momenta, com a finalidade de estudar a quantidade de g.l. dos campos. Para tal, o que se fará a seguir, é correto.

O que, em palavras, nos diz que , a cada uma das identidades está associada uma condição de gauge, que deverá ser escolhida (e utilizada) nas equações de campo (aqui no espaço dos momenta).

Para facilitar a discussão que se seguirá, vamos agrupar as equações anteriores em dois grupos:

$$\begin{cases} (\imath p_\mu)\hat{F}^{\mu\nu}(p) = -\mu_0\epsilon^{\nu\rho\alpha\beta}(\imath p_\rho)\hat{H}_{\alpha\beta} = -2\mu_0\hat{\tilde{G}}^{\nu}(p)\,, \\ \hat{\tilde{G}}^{\nu}(p) = \mu_0\hat{A}^\nu(p)\,, \\ \Longrightarrow (\imath p_\mu)\hat{A}^\mu(p) = 0\,. \end{cases} \tag{B.33}$$

$$\begin{cases} (\imath p_\mu)\hat{G}^{\mu\nu\kappa}(p) = +\mu_0\epsilon^{\nu\kappa\alpha\beta}(\imath p_\alpha)\hat{A}_\beta = +\mu_0\hat{\tilde{F}}^{\nu\kappa}(p)\,, \\ \hat{\tilde{F}}^{\mu\nu}(p) = -2\mu_0\hat{H}^{\mu\nu}(p)\,, \\ \Longrightarrow (\imath p_\mu)\hat{H}^{\mu\nu}(p) = 0\,. \end{cases} \tag{B.34}$$

Observe que qualquer um destes grupos contém todas as equações de movimento (que são as duas primeiras de cada grupo), bem como a identidade de Bianchi que lhe seja relevante (como vimos, basicamente, uma escolha de gauge apropriada). Vê-se, claramente, que a identidade de cada grupo segue como conseqüência imediata das próprias equações de campo. Portanto, qualquer um dos grupos acima descreve, equivalentemente. toda a *física* contida em $\mathcal{L}_1$.

Vamos agora, obter os propagadores e o espectro de partículas para este Lagrangeano:

i) Primeiro grupo: substituindo-se a segunda destas equações na primeira, obtemos:

$$(\imath p_\mu)\hat{F}^{\mu\nu} = (\imath p_\mu)(\imath p^\mu\hat{A}^\nu - (\imath p^\nu\hat{A}^\mu) = -2\mu_0^2\hat{A}^\nu$$

que nos dá:

$$\left[(p^2 - 2\mu_0^2)\eta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu\right]\hat{A}_\nu(p) = 0\,, \tag{B.35}$$

sendo que, ao usarmos a terceira equação ($p_\mu \hat{A}^\mu = 0$), teremos:

$$(p^2 - 2\mu_0^2)\hat{A}_\mu(p) = 0\,, \tag{B.36}$$

que é a equação de Klein-Gordon para um campo vetorial massivo em movimento livre. Seu propagador é:[4]

$$\tilde{\Delta}_A^{\mu,\nu}(p) = \frac{-1}{(p^2 - 2\mu_0^2)}\left(\Theta^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}\right) = \frac{-1}{(p^2 - 2\mu_0^2)}\eta^{\mu\nu}\,. \tag{B.37}$$

E daí, vemos que $\hat{A}$ propaga-se como um campo massivo: $M_A^2 = 2\mu_0^2 = p^2$.

Para mostrarmos, explicitamente, que A_μ propaga 3 g.l físicos, vamos expandir a equação de Klein-Gordon para $\hat{A}_\mu$:

$$(p^2 - 2\mu_0^2)(b\bar{p}^\mu + c_I\alpha_I^\mu) = 0\,, \tag{B.38}$$

mas $p^2 = 2\mu_0^2$, o que segue da estrutura de pólos do propagador (B.37), e assim, teremos:

$$\hat{A}^\mu(p) = b\bar{p}^\mu + c_I\alpha_I^\mu\,. \tag{B.39}$$

E assim, mostramos que A_μ propaga 3 g.l físicos.

ii) Para o segundo grupo, teremos (seguindo-se os passos anteriores):

$$\frac{1}{2}[\eta^{\nu\alpha}\eta^{\kappa\beta} - \eta^{\nu\beta}\eta^{\kappa\alpha}](p^2 - 2\mu_0^2)\hat{H}_{\alpha\beta}(p) = 0\,, \tag{B.40}$$

(onde já usamos a condição de gauge), que é uma equação tipo Klein-Gordon (em analogia com o campo vetorial) para um tensor anti-simétrico de "rank-2"

[4]De fato:

$$\left(\tilde{\Delta}_A^{\mu,\nu}(p)\right)(p^2 - 2\mu_0^2)\hat{A}_\nu(p) = \hat{A}^\mu(p).$$

massivo, cujo propagador é:[5]

$$\tilde{\Delta}_H^{\mu\nu,\kappa\lambda}(p) = \frac{1}{(p^2 - 2\mu_0^2)} \frac{1}{2} \left[\eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda} - \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\kappa}\right], \tag{B.41}$$

e daí, vemos que, realmente, $H_{\mu\nu}$ comporta-se como um campo massivo: $M_H^2 = +2\mu_0^2 = p^2$.

Uma análise semelhante ao caso anterior, mostrará que $\hat{H}_{\mu\nu}$ propaga 3 g.l físicos ("on-shell"):

$$\hat{H}^{\mu\nu}(p) = g_I \bar{p}^{[\mu}\alpha_I^{\nu]} + h_{IJ}\alpha_I^{[\mu}\alpha_J^{\nu]} \tag{B.42}$$

e assim, este campo comporta-se como um *campo vetorial massivo*, no modelo em questão.

Poder-se-ia questionar, se temos aqui, duas partículas vetorias massivas (sendo descritas por $\mathcal{L}_1$). A resposta é negativa: na verdade, o modelo descreve apenas, e tão somente, um bóson vetorial massivo (e assim, 3 g.l físicos, e não 6). O que acontece, é que este modelo permite-nos que tal partícula seja descrita, ou por um campo vetorial (primeiro grupo de equações estudado) ou por um tensorial anti-simétrico (segundo grupo), indistintamente. A descrição da partícula por um, ou outro campo, está relacionada com a escolha de um determinado gauge. Feita uma escolha, seremos levados a descrever este bóson por um determinado campo (estando o outro, ausente do modelo). (Para uma discussão sobre o assunto, mas com enfoque diferente do apresentado aqui, sugerimos [40, 42]).

A seguir, faremos uma demonstração alternativa, sobre a questão do espectro do modelo ($\mathcal{L}_1$). Particularmente, o fato de estarmos lidando com apenas 3 g.l. físicos,

[5] Já que:

$$\left(\tilde{\Delta}_H^{\mu\nu,\kappa\lambda}(p)\right)\left(\frac{1}{2}[\eta^{\alpha\sigma}\eta^{\beta\rho} - \eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}](p^2 - 2\mu_0^2)\hat{H}_{\sigma\rho}(p)\right) = \hat{H}^{\mu\nu}(p)$$

aparecerá com bastante nitidez aqui. Para isto, vamos considerar as equações de campo e as identidades de Bianchi obtidas para $\mathcal{L}_1$, escritas em notação 3-vetorial, ou seja:

$$F_{\mu\nu} = \{\vec{E}, \vec{B}\} \qquad G_{\mu\nu\kappa} = \{\mathcal{B}, \vec{\mathcal{E}}\}.$$

Que são as quantidades invariantes de gauge. Daí, a análise que faremos a seguir é invariante de gauge (ao passo que aquela feita anteriormente, é invariante de Lorentz).

Para evitar repetições desnecessárias, reescrevamos as equações (2.12-2.18, Seção 2.1) no espaço dos momenta. Para isto, supomos que os campos (designados genericamente por U) podem ser expandidos em *soluções de ondas planas*:[6]

$$U(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk^4 e^{\imath kx} \hat{U}(k) \, ,$$

seguindo-se daí, a prescrição:

$$\partial_\mu \leftrightarrow \imath k_\mu \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow \imath k_0 \equiv \imath\omega \\ \nabla \leftrightarrow \imath\vec{k} \end{cases}$$

Desta forma, teremos,

$$\vec{k} \wedge \vec{B}(k) = \omega \vec{E}(k) + 2\imath\mu_0 \vec{\mathcal{E}}(k) \, , \tag{B.43}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}(k) = 0 \, , \tag{B.44}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{E}(k) + \omega \vec{B}(k) = 0 \, , \tag{B.45}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E}(k) = +2\imath\mu_0 \mathcal{B}(k) \, , \tag{B.46}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{\mathcal{E}}(k) = -\imath\mu_0 \vec{B}(k) \, , \tag{B.47}$$

$$\vec{k}\mathcal{B}(k) + \omega \vec{\mathcal{E}}(k) = \imath\mu_0 \vec{E}(k) \, , \tag{B.48}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}}(k) + \omega \mathcal{B}(k) = 0 \, . \tag{B.49}$$

[6]Aqui, preferimos usar k_μ em lugar de p_μ. Assim, $\vec{k}$ é o vetor de onda, que especifica sua direção e seu momento. Escrevemos, também: $k_\mu k^\mu \equiv k^2 = \omega^2 - \vec{k}^2$.

(os campos acima sendo funções de k).

Agora, multiplicando-se $\vec{k}\wedge$ na equação (B.45) e utilizando-se (B.43, B.46 e B.48), obtemos:

$$(\omega^2 - \vec{k}^2)\vec{E}(k) = +2\mu_0^2\vec{E}(k)$$

e então: $k^2 = 2\mu_0^2$, ou seja, $\vec{E}$ se propaga como uma *radiação* massiva. [Relações de dispersão idênticas são facilmente obtidas para os demais campos].

A seguir, vamos mostrar que todos os demais campos são completamente determinados por $\vec{E}$ e pelo vetor de onda $\vec{k}$. Para o vetor $\vec{B}$ isto é imediatamente verificado a partir das equações (B.44 e B.45):

$$\vec{B}(k) = -\frac{1}{\omega}\vec{k}\wedge\vec{E}(k) \quad \text{e} \quad \vec{k}\cdot\vec{B}(k) = -\frac{1}{\omega}\vec{k}\cdot(\vec{k}\wedge\vec{E}(k)) = 0\,,$$

daí, vemos também, que $\vec{B}$ é perpendicular a $\vec{k}$.

Também para o escalar $\mathcal{B}$, tal verificação é imediata (da equação B.46):

$$\mathcal{B}(k) = \frac{1}{2\imath\mu_0}\vec{k}\cdot\vec{E}(k).$$

Já para $\vec{\mathcal{E}}$, podemos usar as equações (B.46 e B.48) que nos conduzem a:

$$\begin{aligned}
&\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{E}) + 2\imath\mu_0\vec{\mathcal{E}} = -2\mu_0^2\vec{E} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \vec{\mathcal{E}}(k) = \frac{-\mu_0}{\imath\omega}\vec{E}(k) - \frac{1}{2\imath\omega\mu_0}\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{E}(k)) \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \vec{\mathcal{E}}(k) = \frac{\imath\mu_0}{\omega}\left(\vec{E}(k) + \frac{\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{E}(k))}{k^2}\right)
\end{aligned}$$

(onde usamos $k^2 \equiv \omega^2 - \vec{k}^2 = +2\mu_0^2$). Daí, vemos que $\vec{\mathcal{E}}$ possui uma componente ao longo de $\vec{E}$ e outra ao longo de $\vec{k}$, sendo completamente determinado por estes dois vetores.

Assim, mostramos o que havíamos pretendido: que a *radiação* livre (no vácuo), descrita por $\mathcal{L}_1$ propaga 3 g.l. físicos (que seriam representados pelas 3 componentes independentes do vetor $\vec{E}$), já que agora, ela apresenta uma relação de dispersão massiva.[7]

[7]É claro que uma análise similar nos mostraria que todo o conjunto de campos poderia ser determinado a partir de $(\vec{\mathcal{E}}, \vec{k})$ (neste sentido, $\vec{E}$ e $\vec{\mathcal{E}}$ se equivalem). Isto não modificaria nossa conclusão com relação ao espectro.

Bibliografia

[1] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B79 (1974)276;

[2] A.M. Polyakov, JETP Lett. 20 (1974)194;

[3] P. Goddard and D.I. Olive, Rep. Prog. Phys. 41 (1978)1357;

[4] W. Nahm, "Mathematical Structures underlying Monopoles in Gauge Theories", in "Theory and Detection of Magnetic Monopoles in Gauge Theories." ed. N.S. Craigie *et al.* (World Scientific, Singapore, 1986);

[5] M. Blagojević and P. Senjanović, Phys. Rep. 157 (1988)233;

[6] J.A. Harvey, "Magnetic Monopoles, Duality and Supersymmetry.", hep-th/9603086;

[7] N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. B426 (1994)19; *ibid* B430 (1994)485 (ERRATUM);

[8] P. Di Vecchia, "Duality in supersymmetric gauge theories." Nordita preprint 96/57 P (1996); L. Álvarez-Gaumé and S.F. Hassan, "Introdution to S-Duality in $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric Gauge Theories", CERN preprint CERN-th/96-371, hep-th/9701069;

[9] D.I. Olive, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 45A (1996)88;

[10] Y. Nambu, Phys. Rev. D10 (1974)4262;

[11] S. Mandelstan, Phys. Rep. 23C (1976)245;

[12] M. Stone and P.R. Thomas, Phys. Rev. Lett. 41 (1978)351;

[13] F. Bradstaeter *et al*, Phys. Lett. B272 (1991)319;

[14] K. Yee, "Monopoles and Quark Confinement: Introdution and Overview.", hep-th/9404363 (1994);

[15] N.S. Craigie, "Monopoles and Astrophysycs", in "Theory and Detection of Magnetic Monopoles in Gauge Theories", ed. N.S. Craigie *et al*, (World Scientific, Singapore, 1986); Q. Shafi, "Monopoles in Cosmology", *ibid*;

[16] B.T. McInnes, J. Phys. A17 (1984)3287;

[17] K.L. Chang, Lettere Nuovo Cim. 36 (1983)574;

[18] M.J. Longo, Phys. Rev. D25 (1982)2399;

[19] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A133 (1931)60;

[20] P.A.M. Dirac, Phys. Rev. 74 (1948)817;

[21] L.H. Ryder, "Quantum Field Theory", (seção 10.3), (Cambridge Univ. Press, Cambridge, second edition 1996);

[22] J. Schwinger, Phys. Rev. 128 (1962)2425; C. Itzykson and J.-B. Zuber, "Quantum Field Theory" (seções 11.3 a 11.5), (McGraw Hill, Singapore, 1985);

[23] A.H. Chamseddine, Nucl. Phys. B185 (1981)403; E. Bergshoeff, M. de Rov, B. de Wit and P. van Nieuwenhuizen, Nucl. Phys. B195 (1982)97;

[24] A. Aurilia and E. Spallucci, "The Role of Extended Objects in Particle Theory and in Cosmology", in Proccedings of the Trieste Conference "Supermembranes and Physics

in (2+1) Dimensions", ed. M.J. Duff, C.N. Pope and E. Sezgin (World Scientific, Singapore, 1990);

[25] S. Graf, A. Schäfer and W. Greiner, Phys. Lett. B262 (1991)463;

[26] L.V. Avdeev and M.V. Chizhov, Phys. Lett. B321 (1994)212; "A queer reduction of degrees of freedom.", hep-th/9407067; M.V. Chizhov, Mod. Phys. Lett. A8 (1993)2753; V. Lemes, R. Renan and S.P. Sorella, Phys. Lett. B344 (1995)158; *ibid* B352 (1995)37; W.A. Moura Melo e J.A. Helayël-Neto, "Regularização de um modelo tipo $\lambda\varphi^4$ tensorial via *point-splitting.*", Proc. XVII Brazilian Nat. Meet. Particles and Fields (1996)643; Álvaro Nogueira, Tese de M. Sc., CBPF (1996);

[27] E. Cremmer and J. Scherk, Nucl. Phys. B72 (1974)117;

[28] M. Kalb and P. Ramond, Phys. Rev. D9 (1974) 2273;

[29] G.T. Horowitz, Commun. Math. Phys. 125 (1989)417;

[30] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Ann. Phys. 140 (1982)372;

[31] R.D. Pisarski, Phys. Rev. D34 (1986) 3851;

[32] M. Henneaux and C. Teitelboim, Phys. Rev. Lett. 56 (1986)689;

[33] S.K. Paul and A. Khare, Phys. Lett. B174 (1986)420;

[34] S.K. Paul and A. Khare, Phys. Lett. B193 (1987)253;

[35] J. Stern, Phys. Lett. B265 (1991) 119;

[36] I.I. Kogan, Phys. Lett. B262 (1991) 83;

[37] M. Torres, Phys. Rev. D46 (1992) R2295;

[38] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 975;

[39] Carlos H. Souza Cruz, tese de M. Sc., CBPF [em preparação];

[40] T.D. Allen, M.J. Bowick and A. Lahiri, Mod. Phys. Lett. A6 (1991) 559;

[41] A. Lahiri, Mod. Phys. Lett. A8 (1993) 2403;

[42] R. Amorim and J. Barcelos-Neto, Mod. Phys. Lett A10 (1995) 917;

[43] R.K. Kaul, Phys. Rev. D18 (1978) 1127;

[44] P.K. Townsend, Phys. Lett. B88 (1979) 97;

[45] Y. Nambu, Phys. Rep. 23C (1976) 250;

[46] A.P. Balachandran and P. Teotonio-Sobrinho, " The Edge States of BF System and the London Equations", hep-th/9205116 (1992);

[47] M.M. Nieto and A. Goldhaber, Rev. Mod. Phys. 43 (1971) 277;

[48] L. Bass and E. Schrödinger, Proc. Roy. Soc. London 232A (1955) 1;

[49] D.G. Boulware and S. Deser, Phys. Rev. Lett. 63 (1989) 2319;

[50] M. Israelit, "Massive Electrodynamics and Magnetic Monopoles.", gr-qc/9608047;

[51] M. Israelit, "Magnetic Monopoles and Massive Photons in a Weyl-type Electrodynamics.", gr-qc/9611060;

[52] A.Yu. Ygnatiev and G.C. Joshi, Phys. Rev. D53 (1996)984;

[53] D. Singleton, Int. J. Th. Phys. 35 (1996)2419;

[54] T. Ahrens, Nuovo Cimento 103A (1990)1139;

[55] G. Dattoli and M. Mattioli, Lettere al Nuovo Cimento 20 (1977) 686;

[56] D. Bohm and Y. Aharonov, Phys. Rev. 115 (1959)485; *ibid* 123 (1961)1511;

[57] T.T. Wu and C.N. Yang, Phys. Rev. D12 (1975)3845;

[58] H.J. Lipkin, W.I. Weisberger and M. Peshkin, Ann. Phys. 53 (1969)203;

[59] A.S. Goldhaber, Phys. Rev. 140 (1965)B1407;

[60] C.A. Hurst, Ann. Phys. 50 (1968)51;

[61] C.N. Yang, Phys. Rev. D1 (1970)2360;

[62] Saha, Phys. Rev. 75 (1949)1968;

[63] H. Wilson, Phys. Rev. 75 (1949)309;

[64] A. Goldhaber, Phys. Rev. Lett. 36 (1976)1122;

[65] R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. 36 (1976)1116;

[66] P. Hasenfratz and G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. 36 (1976)1119;

[67] A. Perez, Phys. Rev. 167 (1968)1449;

[68] J. Schwinger, Phys. Rev. 144 (1966)1087;

[69] J. Schwinger, Science 165 (1968)51;

[70] J. Schwinger, Phys. Rev. D12 (1975)3105;

[71] D.G. Boulware, S. Deser and B. Zumino, Phys. Lett. B153 (1985)307;

[72] R. Jackiw, Phys. Rev. Lett. 54 (1985)159;

[73] J. Mickelsson, Phys. Rev. Lett. 54 (1985)2379;

[74] R. Jackiw, Phys. Rev. Lett. 54 (1985)2380;

[75] R. Jackiw, Phys. Lett. B154 (1985)303;

[76] B. Grossman, Phys. Lett. B152 (1985)93;

[77] N. Cabibbo and E. Ferrari, Nuovo Cimento 23 (1962)1147;

[78] D. Zwanziger, Phys. Rev. D3 (1970)880;

[79] R.A. Brandt, F. Neri and D. Zwanziger, Phys. Rev. D19 (1979)1153;

[80] G. Calluci, R. Jengo and M.T. Vallon, Nucl. Phys. B197 (1982)93.

[81] N. Dorey and N.E. Mavromatos, Phys. Lett. B266 (1991)163; Nucl. Phys. B386 (1992)614.

"*MONOPÓLOS MAGNÉTICOS ABELIANOS E A QUANTIZAÇÃO DA MASSA TOPOLÓGICA EM (3 + 1) DIMENSÕES*"

Winder Alexander de Moura Melo

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes profesores:

J. A. Helayël-Neto.

José Abdalla Helayël-Neto - Presidente

Francisco Carlos Pinheiro Nunes

Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira

Marco Aurélio Cattacin Kneipp - Suplente

Rio de Janeiro, 20 de junho de 1997