Dissertação de Mestrado

# O Fator Giromagnético das Partículas Elementares e o Acoplamento Não-Mínimo.


**Jefferson Luiz de Lima Morais**

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas



Rio de Janeiro - 2008

*In George Orwell's novel, 1984, the hero is employed by the Ministry of Truth in the task of re-writing history. Any lecturer or author who attempts to sumarize progress in an area of theoretical physics is faced with a similar task. The actual historical development of a physical theory is always confused by false starts, theoretical misapprehensions, experimental errors, and the play of personalities. To make sense out of all this, one has to go back and re-write history according to one's best understanding of the underlying logic of the subject. The result is not good history, but it sometimes makes sense, in a way that history rarely does.*

**- S. Weinberg, in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, Proceedings of the Summer Institute, Brandeis University, 1970, edited by S. Deser (MIT Press, Cambridge, MA, 1970), Vol. I.**

***À minha Família***

*Era uma vez um escritor que morava numa praia tranquila, junto de uma colônia de pescadores. Todas as manhãs ele caminhava a beira do mar para se inspirar, e a tarde ficava em casa escrevendo.*

*Certo dia, caminhando na praia, ele viu um vulto que parecia dançar. Ao chegar perto, ele reparou que se tratava de um jovem que recolhia estrelas-do-mar da areia para, uma por uma, jogá-las novamente de volta ao oceano.*

*"Por que está fazendo isso? "- perguntou curioso o escritor.*

*"O amigo nao vê! - explicou o jovem - A maré está baixa e o sol está forte. Elas irão secar e morrer se ficarem aqui na areia. "*

*O escritor espantou-se: "Meu jovem, existem milhares de quilômetros de praias por este mundo afora, e centenas de milhares de estrelas-do-mar espalhadas pela praia. Que diferença faz? Você põe umas poucas ao oceano. A maioria vai morrer de qualquer forma ".*

*O jovem pegou mais uma estrela na praia, colocou de volta no oceano, e olhou para o escritor. "Para esta eu fiz a diferença ..."*

*Naquela tarde o escritor nao conseguiu escrever, nem sequer descançar. Pela manhã do dia seguinte, voltou a praia, encontrou o jovem e, juntos, começaram a jogar estrelas-do-mar de volta ao oceano.*

**- história de tradição oral.**

# Agradecimentos


- Se fosse iniciar os agradecimentos ao Prof. José Abdalla Helayël Neto inumerando suas qualidades, essa seção seria N vezes maior que toda a dissertação e ainda assim me faltariam palavras. Portanto, irei simplificar da seguinte maneira: Agradeço ao Prof. José Abdalla Helayël Neto, por simplesmente ser o Helayël!

- Agradeço aos meus pais, Luiz Cláudio e Liana, por nunca desistirem de mim. Me dando sempre apoio, carinho e amor incondicionais.

- À Kellynha pelo grande amor e imensa compreensão . Sem ela, provavelmente já teria desistido de tudo.

- Ao meu irmão, pela valiosa amizade e inspiração. Mesmo sendo mais novo, admiro muito sua experiência de vida. É muito bom saber que vou sempre poder contar com você.

- Ao meu primo Márcio (Cabelo), uma pessoa de caráter e simplicidade invejáveis. Valeu pelas nossas conversas.

- A toda a galera da casa do Cabelo.

- À toda minha família. Vocês foram sempre muito importantes nas minhas conquistas e estiveram sempre em minha mente nos momentos difíceis, me servindo como guia.

- Ao Guido, pela amizade e por sua simplicidade. Muito obrigado pela ótima recepção em São Paulo, que foi extremamente importante para concluir esse trabalho.
- Ao Professor Accioly, uma pessoa extremamente prazerosa de se trabalhar; um grande orientador e amigo.
- Ao Helayël e ao Sebastião, pelas valiosas ajudas e discussões e por me fazerem voltar a sentir prazer com a física.
- Ao Rodrigo (Turco), pela amizade e imensas contribuições a essa dissertação.
- Ao Eduardo (Fenômeno) pela "pequena "grande amizade e por sempre tentar me fazer entender que o Brasil ainda chega lá.
- Ao Guillermo, por toda ajuda nesse trabalho e por se mostrar uma grande amizade em tão pouco.
- Ao Bonilla, por aguentar nossas brincadeiras e pelo grande apoio nas horas mais conturbadas desse mestrado.
- À Cristina e ao Habib, pela amizade e pelas risadas nos momentos em que elas eram tão necessárias.
- A toda comunidade peruana do CBPF, em especial ao Martin e ao Alexander. Valeu pela hospedagem e pelo Cebiche.
- Aos amigos do LAFEX, em especial ao Alan, Victor e Alfredo, pelas contribuições ao trabalho.
- A todo o pessoal do apoio técnico do LAFEX, especialmente Cristiana por toda a ajuda.

- Aos antigos amigos da UFRGS.
- Aos novos amigos, Eduardo (Mexicano), Marcela, Stella, Mariana, Sandro, Aline, Érico, Maria, Gabriel, Neel, Daniel, Vicente, Martin, Alexander, Alexis, Zambrano, Ana Graice, Diego, André, Jô, Fernando, Nassif, Doria, Milva, Alan, Denis, Alfredo, Victor, Marcus Vinícius, Daniel, Carlos, Rafael, Edney e a todos que, com certeza, tenha esquecido.
- Ao Doria pela grande ajuda e discussões sobre física.
- Ao Professor Guido Chincarini, pela grande ajuda durante minha estada no *Osservatorio Astronomico di Brera* em Merate, Itália. Gostaria de tê-lo conhecido mais cedo.
- A todos os grandes amigos de Merate, em especial Paolo D'Avanzo, Davide, Ilaria, Rodolfo, Lara, Katrien, Raffaella, Guidorzi, Alberto, Stefano, Guido, Andreas, Federica, Elisabetta, Ileana...
- Ao Bruno pela hospedagem.
- Ao pessoal da República, Ivan, Rafael, Renan e Lorena.
- Ao Professor João Carlos dos Anjos, pela seriedade e preocupação com os pós-graduandos. E pela grande ajuda na conclusão de meu mestrado.
- A CFC, a Myriam e ao Ricardo, pelo apoio técnico na realização desse trabalho.
- Ao CNPq e a Capes, pelo apoio financeiro.

# Resumo

Partículas massivas carregadas (ou neutras) com spins-1 e -2 são acopladas não-minimamente, e de modo conveniente, a um campo eletromagnético externo. Encontra-se que, no limite não-relativístico, as partículas carregadas apresentam razão giromagnética $g = 2$, o que está de acordo com os resultados teóricos vigentes. As partículas neutras, no entanto, apresentam $g = 1$. Este resultado, trabalhado no âmbito da Mecânica Quântica Relativística, parece sugerir que $g = 1$ para todas as partículas elementares massivas e neutras, independentemente de seu spin, desde que $s \leq 2$.

# Abstract

Massive charged (or neutral) particles with spins-1 and -2 are, in a specific way, non-minimally coupled to an external electromagnetic field. It is found that, in the non-relativistic limit, the charged particles are endowed with a gyromagnetic ratio $g = 2$, wich is in full agreement with the current theoretical results. The neutral particles, however, present $g = 1$. This result, worked out in the framework of Relativistic Quantum Mechanics, seems to suggest that $g = 1$ for all massive and neutral particles of any spin $\leq 2$.

# Conteúdo

# Introdução

Sabemos, classicamente, que um partícula de massa $M$ e carga $Q$, movendo-se com velocidade $\overrightarrow{v}$ em um circuito fechado, é equivalente a um dipolo magnético de momento $\overrightarrow{\mu}$, que é proporcional ao momento angular $\overrightarrow{L}$ da partícula, sendo o fator de proporcionalidade igual a $\dfrac{Q}{2M}$. De fato,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mu} &= \frac{1}{2}\int d^3r \rho_Q \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v} \\ &= \frac{Q}{2M}\int d^3r \rho_M \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v} \\ &= \frac{Q}{2M}\overrightarrow{L}. \end{aligned} \tag{1}$$

Escrevendo este resultado como se segue,

$$\overrightarrow{\mu} = g\frac{Q}{2M}\overrightarrow{L}, \tag{2}$$

onde $g$ é o assim chamado fator giromagnético, tem-se, equivalentemente, $g = 1$.

Com o advento da Mecânica Quântica, e a posterior introdução do spin-$\frac{1}{2}$ para o elétron, o resultado clássico anteriormente analisado foi violado, já que, para o elétron, $g = 2$. Com o surgimento, mais tarde, da Teoria Quântica de Campos, mostrou-se, baseando-se no fato de que o acoplamento natural para a interação entre as partículas elementares é o acoplamento mínimo - substituição da derivada ordinária pela derivada covariante de gauge -, que a relação entre o fator giromagnético $g$ e o spin $s$ de uma partícula carregada deveria ser dada por ([17], [18], [19], [20])

$$g = \frac{1}{s}. \tag{3}$$

Infelizmente, este resultado que, por um lado, é mais um triunfo da Teoria de Dirac relativa à partículas com $s = \frac{1}{2}$, por outro, entra em conflito quando aplicado a partículas de spins mais altos. De fato, o bóson vetorial $\mathbf{W}$ - a única partícula carregada (genuinamente elementar) de spin-1 encontrada na Natureza até agora - apresenta, na aproximação semi-clássica, $g = 2$, em vez de $g = 1$, como predito por (3). É curioso, que no início dos anos setenta, Weinberg [9] já havia demonstrado, usando propriedades gerais da matriz-$\mathbf{S}$, que $g \approx 2$ para partículas massivas carregadas de spin arbitrário. Cerca de duas décadas após, Ferrara, Porrati e Teledgi [1] mostraram que qualquer partícula verdadeiramente elementar (puntiforme) carregada tem, a nível de árvore, fator giromagnético $g = 2$, que independe de seu spin. Para tanto, eles apelaram para acoplamentos eletromagnéticos não-mínimos.

O objetivo primeiro deste trabalho é analisar a nível de Mecânica Quântica, como partículas massivas carregadas (ou neutras) adquirem momento de dipolo magnético, quando acopladas não-minimamente, e de maneira judiciosa, a um campo eletromagnético externo. *Em particular, estamos interessados em compreender qual o papel do spin nas propriedades magnéticas das partículas quando desvinculado da carga.* Propômo-nos, também, mostrar que, contrariamente à expectativa corrente, os acoplamentos gravitacionais não-mínimos não violam o princípio de equivalência fraco.

Esta dissertação está organizada como se segue. Uma discussão generalizada sobre acoplamentos mínimos e não-mínimos é apresentada no Capítulo 1. No Capítulo 2, analisa-se como gerar momento de dipolo magnético para os bósons vetoriais massivos carregados, $W^{\pm}$, e neutro, $Z^0$, acoplando-os não-minimamente a um campo eletromagnético externo; mostra-se que, na aproximação não-relativística, $g = 2$ para os bósons carregados, como esperado; enquanto que, no caso dos bósons neutros, $g = 1$, resultado original que se obtém no âmbito da Mecânica Quântica Relativística. A mesma questão é abordada no Capítulo 3, mas, agora, para o caso de partículas massivas de spin-2 carregadas e neutras. Os resultados encontrados são análogos àqueles do capítulo anterior. Uma demonstração detalhada e independente de modelo sobre o fato de que o acoplamento gravitacional não-mínimo não viola o princípio de equivalência fraco é fornecida no Capítulo 4. Finalmente, concluímos o trabalho apresentando as Considerações Finais e Perspectivas Futuras.

Capítulo 1

# Sobre a Interação dos Campos Físicos

A teoria dos campos livres é, de certa maneira, trivial, mas revela-nos as propriedades intrínsecas das partículas associadas aos campos tratados. Num processo real, no entanto, as partículas interagem, podendo ser eventualmente criadas ou destruídas. Para a análise de tais processos, precisamos conhecer como os campos interagem.

No contexto do formalismo Lagrangeano, por exemplo, uma teoria de campos em interação é especificada pela densidade de Lagrangeana, a qual além da parte livre, deve conter termos relacionados às possíveis interações entre os campos. Uma questão bastante pertinente é como escolher entre as infinitas possibilidades em geral disponíveis para os termos de interação entre os campos, aquela(s) que fornece(m) uma boa descrição para o sistema físico em consideração. Argumentos de simplicidade, exploração adequada de simetrias e o critério de renormalizabilidade, impõem na prática forte restrições sobre a forma dos possíveis termos de interação, mas não determinam em muitos casos a forma destas interações .

Na verdade, como não existe uma prescrição fechada para a determinação da forma de interação dos campos - sejam eles descritos ou não pelo formalismo Lagrangeano - a teoria de campos em interação tem sido alvo de aprofundados debates por parte da comunidade científica. De um lado temos os "retóricos", que, apelando para argumentos de simplicidade, advogam a idéia do *acoplamento mínimo* como o acoplamento natural para a interação entre os campos; enquanto que no outro encontramos os "dialéticos", abertos a um diálogo onde opiniões distintas e não concordância de idéias permitem a consideração de outros tipos de acoplamentos entre os campos, acoplamentos esses que por falta de um melhor nome são denominados de *não-mínimos*.

Vejamos, pois, através de dois exemplos concretos, como esses acoplamentos se dão na prática.

Como ilustração do princípio mínimo, consideraremos o procedimento padrão utilizado na obtenção da densidade de Lagrangeano para a interação entre o campo do elétron - representado pela densidade de Lagrangeano

$$\mathcal{L}_e = \overline{\Psi}\,(x)\,(\imath\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\Psi\,(x)\,, \tag{1.1}$$

onde $\overline{\Psi} = \Psi^\dagger\Psi^0$ é o campo adjunto de Dirac - e o campo do fóton, cuja densidade de Lagrangeano é dado por

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x), \tag{1.2}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor intensidade de campo.

Como é bem conhecido, $\mathcal{L}_e$ é invariante pela transformação global

$$\Psi(x) \longmapsto \Psi'(x) = e^{-\imath\theta}\Psi(x), \tag{1.3}$$

$$\overline{\Psi}(x) \longmapsto \overline{\Psi}'(x) = e^{\imath\theta}\overline{\Psi}(x); \tag{1.4}$$

sendo $\mathcal{L}_f$ invariante pela transformação

$$A_\mu(x) \longmapsto A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x). \tag{1.5}$$

Suponhamos, então , que $\mathcal{L}_e$ seja invariante pela mudança de fase dependente do espaço-tempo:

$$\Psi(x) \longmapsto \Psi'(x) = e^{-\imath\theta(x)}\Psi(x), \tag{1.6}$$

$$\overline{\Psi}(x) \longmapsto \overline{\Psi}'(x) = e^{\imath\theta(x)}\overline{\Psi}(x). \tag{1.7}$$

O termo derivativo passa agora a ter uma lei de transformação mais complicada:

$$\overline{\Psi}(x)\partial_\mu\Psi(x) \longmapsto \overline{\Psi}'(x)\partial_\mu\Psi'(x) = \overline{\Psi}(x)\partial_\mu\Psi(x) - \imath\overline{\Psi}(x)\partial_\mu\theta(x)\Psi(x). \tag{1.8}$$

O segundo termo da equação anterior quebra a invariância de gauge. Para restaurarmos a simetria, precisamos substituir a derivada $\partial_\mu$ pela derivada covariante de gauge $D_\mu$, definida como:

$$D_\mu = \partial_\mu + \imath e A_\mu. \tag{1.9}$$

Para que a lei de transformação da derivada covariante,

$$D_\mu\Psi(x) \longmapsto D'_\mu\Psi(x)' = e^{-\imath\theta(x)}D_\mu\Psi(x), \tag{1.10}$$

seja satisfeita, $A_\mu$ deve se transformar como segue:

$$A_\mu(x) \longmapsto A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x). \tag{1.11}$$

A densidade de Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \overline{\Psi}(x)(\imath\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{1.12}$$

descreve, então , a interação entre os campos do elétron e do fóton num mesmo ponto $x$.

O processo que acabamos de descrever é conhecido como *acoplamento mínimo*. Em suma, ele nos diz que a interação entre os campos é realizada através da substituição da derivada comum pela derivada covariante.

É importante que nesse ponto abramos um parêntese a fim de analisarmos o procedimento que acabamos de realizar. Com o intuito de obtermos uma teoria com uma densidade de Lagrangeano localmente invariante de gauge, prescrevemos que as derivadas ordinárias devem ser substituídas por derivadas covariantes de gauge. Note, no entanto, que termos do tipo

$$\triangle\mathcal{L} = \lambda\overline{\Psi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Psi, \tag{1.13}$$

onde $\lambda$ é uma constante, são também localmente invariantes de gauge. Apesar deles não serem permitidos na QED, em virtude do critério de renormalizabilidade [5], não existe nenhuma razão teórica para não incluí-los em outras teorias. De fato, a utilização unilateral do princípio do acoplamento mínimo, pode levar a inconsistências internas. Uma possível maneira de contornar essa dificuldade é apelar-se para acoplamentos não-mínimos do tipo acima apresentado, conforme mostra o exemplo que se segue.

Seja $\phi^{\mu}$ um campo vetorial carregado não-massivo, cuja dinâmica é fornecida pela densidade de Lagrangeano [6]

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{1}{2}\tilde{B}^{*}_{\mu\nu}\tilde{B}^{\mu\nu}, \tag{1.14}$$

com $\tilde{B}^{\mu\nu} = \partial^{\mu}\phi^{\nu} - \partial^{\nu}\phi^{\mu}$. A densidade de Lagrangeano em questão é invariante pela transformação global

$$\phi_{\mu} \longmapsto \phi'_{\mu} = e^{-\imath\theta}\phi_{\mu}, \tag{1.15}$$

$$\phi^{*}_{\mu} \longmapsto \phi^{*\prime}_{\mu} = e^{\imath\theta}\phi^{*}_{\mu}. \tag{1.16}$$

Suponhamos, então, que $\theta$ seja uma função $\theta(x)$ do espaço-tempo e apliquemos a prescrição mínima, o que nos permite construir o campo covariante de gauge

$$B^{\mu\nu} = D^{\mu}\phi^{\nu} - D^{\nu}\phi^{\mu}. \tag{1.17}$$

Isto significa que

$$B^{\mu\nu} = \tilde{B}^{\mu\nu} + \imath e \left(A^{\mu}\phi^{\nu} - A^{\nu}\phi^{\mu}\right). \tag{1.18}$$

Vamos admitir, por simplicidade, que o campo eletromagnético seja um campo externo. Nesse caso, a densidade de Lagrangeano invariante de gauge que descreve a interação entre o campo $\phi^{\mu}$ e o campo eletromagnético

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}B^{*}_{\mu\nu}B^{\mu\nu}, \tag{1.19}$$

não precisa conter o termo que corresponde à dinâmica dos fótons. A equação de campo para $\phi^{\mu}$ fica:

$$D_{\mu}B^{\mu\nu} = 0. \tag{1.20}$$

Aplicando o operador $D_{\nu}$ à esta equação e lembrando que

$$[D_{\mu}, D_{\nu}] = \imath e F_{\mu\nu}, \tag{1.21}$$

obtemos a condicão subsidiária:

$$F_{\mu\nu}B^{\mu\nu} = 0. \tag{1.22}$$

Podemos evitar tal dificuldade adicionando a $\mathcal{L}$ o termo não-mínimo

$$\triangle\mathcal{L} = \lambda\phi^{*}_{\mu}\phi_{\nu}F^{\mu\nu}, \tag{1.23}$$

onde o campo eletromagnético é suposto constante. A densidade de Lagrangeano resultante nos fornece agora a seguinte equação de movimento para o campo $\phi^\mu$ :

$$D_\mu B^{\mu\nu} - \lambda\phi_\nu F^{\mu\nu} = 0. \tag{1.24}$$

Tomando a divergência dessa equação, obtemos agora como condição subsidiária

$$(\imath e - \lambda)\, F_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = 0, \tag{1.25}$$

que nos permite, por uma escolha conveniente do parâmetro $\lambda$, eliminar o vínculo

$$F_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = 0 \tag{1.26}$$

e tornar a teoria consistente.

Analisemos mais de perto o Lagrangeano de interação

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} B^*_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \lambda\phi^*_\mu \phi_\nu F^{\mu\nu}. \tag{1.27}$$

Esta densidade de Lagrangeano (1.27) pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{NM}, \tag{1.28}$$

onde:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} B^*_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \tag{1.29}$$

e

$$\mathcal{L}_{NM} = \lambda\phi^*_\mu \phi_\nu F^{\mu\nu}. \tag{1.30}$$

O primeiro termo, $\mathcal{L}_M$, obedece o princípio de acoplamento mínimo e como tal, garante a invariância de gauge local; enquanto que o segundo, $\mathcal{L}_{NM}$, não obedece o princípio de acoplamento mínimo, sendo, porém, invariante por uma mudança de fase dependente do espaço-tempo. Sua função é possibilitar a construção de uma teoria de interação consistente. Na realidade, $\mathcal{L}_M$ e $\mathcal{L}_{NM}$ desempenham papéis complementares e são igualmente importantes se o alvo é a obtenção de uma teoria de interação entre o campo $\phi^\mu$ e o campo eletromagnético que seja simultaneamente invariante de gauge local e consistente.

Consideraremos, agora, a questão da interação entre campos de matéria e o campo gravitacional. O primeiro passo a caminho da descrição da interação entre um dado campo e a gravitação é tentar responder à questão como a gravitação modifica a equação de movimento do campo em questão . À primeira vista, a resposta à essa indagação parece muito simples se, como é de praxe, invocarmos o princípio do acoplamento mínimo. De acordo com este princípio, a interação entre o campo gravitacional e um dado campo $\psi^A$, onde $A$ representa quaisquer índices tensoriais, é feita substituindo-se na densidade de Lagrangeano $\mathcal{L}\left(\psi^A, \partial_\mu \psi^A\right)$ que descreve a dinâmica do campo $\psi^A$ na relatividade especial,

$$\eta_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} \;\text{ e }\; \partial_\mu \longrightarrow \nabla_\mu,$$

onde a derivada covariante $\nabla_\mu$ é agora construída com os símbolos de Christofell $\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}$, os quais, por sua vez, são definidos em termos do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, como se segue:

$$\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left[ g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda} \right]. \tag{1.31}$$

É importante notar, no entanto, que uma generalização direta para o espaço curvo mesmo de equações básicas como as de Maxwell pela regra da "vírgula-vai-em-ponto-e-vírgula", como é conhecido popularmente o princípio do acoplamento mínimo, não é totalmente desprovida de ambiguidades. Para comprovarmos essa afirmação, consideremos as equações de Maxwell inomogêneas

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \tag{1.32}$$

que podem ser reescritas como

$$A^{\nu,\mu}{}_{\mu} - A^{\mu,\nu}{}_{\mu} = j^{\nu}. \tag{1.33}$$

Tendo em conta que as derivadas ordinárias comutam, essa equação é equivalente a

$$A^{\nu,\mu}{}_{\mu} - A^{\mu}{}_{,\mu}{}^{\nu} = j^{\nu}. \tag{1.34}$$

Aplicando a regra da vírgula-vai-em-ponto-e-vírgula nas duas equações anteriores, obtemos, respectivamente, [1]

$$A^{\nu\,;\mu}{}_{\mu} - A^{\mu\,;\nu}{}_{\mu} = j^{\nu} \longrightarrow F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = j^{\nu}. \tag{1.35}$$

$$A^{\nu\,;\mu}{}_{\mu} - A^{\mu}{}_{;\mu}{}^{\nu} = j^{\nu}. \tag{1.36}$$

Por outro lado, lembrando que

$$A^{\mu}{}_{;\mu}{}^{\nu} - A^{\mu\,;\nu}{}_{\mu} = R_{\lambda}^{\ \nu} A^{\lambda}, \tag{1.37}$$

podemos reescrever a equação (1.36) como

$$A^{\nu\,;\mu}{}_{\mu} - A^{\mu\,;\nu}{}_{\mu} - R_{\lambda}^{\ \nu} A^{\lambda} = j^{\nu} \longrightarrow F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = j^{\nu} + R_{\lambda}^{\ \nu} A^{\lambda}. \tag{1.38}$$

As equações (1.35) e (1.38) têm, em princípio, consequências diferentes do ponto de vista experimental. Não existe, porém, até o momento nenhuma experiência que permita dizer qual das duas equações é a correta ([7], [8]).

[1] Note que devido a antissimetria dos índices $\mu$ e $\nu$,

$$F_{\mu\nu} \equiv \nabla_{\mu} A_{\nu} - \nabla_{\nu} A_{\mu},$$

se reduz à forma tradicional

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}.$$

Os exemplos anteriores são instrutivos para que apreciemos a razão do grande interesse por acoplamentos mínimos: sua atraente simplicidade conceitual originária do pequeno número de condições arbitrárias introduzidas. Esses mesmos exemplos nos mostram também que a consideração desses acoplamentos como única forma de acoplamento entre os campos leva não só a ambiguidades como também a inconsistências internas.

Analisamos em sequência, a interessante situação em que a consideração de acoplamentos não-mínimos permite explicar certas previsões teóricas concernentes às partículas elementares.

É bem conhecido que as amplitudes de espalhamento de teorias físicas devem satisfazer ao critério de possuírem um bom comportamento no regime de altas energias. Nos primórdios dos anos setenta, Weinberg [9] mostrou, usando propriedades gerais da matriz-**S**, que este critério leva a um fator giromagnético $g \approx 2$ para partículas carregadas verdadeiramente elementares de spin arbitrário, interagindo fracamente. Mais recentemente, Ferrara, Porrati e Telegdi [1], mostraram, via considerações de acoplamentos eletromagnéticos não-mínimos, que partículas elementares massivas e carregadas, de spin arbitrário, têm razão giromagnética $g = 2$ a nível de árvore. Concluímos, então, que a consideração de acoplamentos eletromagnéticos não-mínimos leva ao valor correto para o fator giromagnético previsto teoricamente para as partículas elementares massivas carregadas de spin arbitrário.

Os pontos levantados anteriormente permitem-nos concluir que o papel desempenhado pelo acoplamento não-mínimo na interação entre os campos físicos é tão fundamental quanto aquele do acoplamento mínimo. Na realidade, estes acoplamentos têm papéis complementares na descrição da interação entre os campos, sendo igualmente importantes se o objetivo último é a obtenção de uma teoria consistente para a interação entre os mesmos.

Capítulo 2

# Bósons Vetoriais Massivos Carregados e Neutros.

Partindo-se dos Lagrangeanos apropriados para a descrição do spin-1 massivo, investigaremos, neste capítulo, como o momento de dipolo para os bósons vetoriais massivos carregados ($W^{\pm}$) e neutros ($Z^0$), são gerados, acoplando-os a um campo eletromagnético externo e introduzindo os acoplamentos adequados a cada caso. Mais especificamente, estaremos interessados em como o spin (e a carga, no caso dos bósons carregados) se acoplam a esse campo externo, no limite de baixas energias, ou seja, no limite não-relativístico ($v \ll 1$).

Iniciamos investigando o caso já estudado na literatura, bósons $W^{\pm}$, e veremos como produzir o fator giromagnético correto, previsto teoricamente, para esse grupo de partículas. Em sequência, analisaremos como o spin do bóson neutro, $Z^0$, pode se acoplar ao campo externo e produzir um termo de dipolo magnético, mesmo que esta partícula não possua carga.

## 2.1 Bósons Vetoriais W

Os bósons vetoriais **W** são descritos pelo 4-vetor (no espaço de Minkowski)[1]:

$$W^\mu = \begin{pmatrix} W^0 \\ W^1 \\ W^2 \\ W^3 \end{pmatrix}.$$

O nosso objetivo nesta seção é investigar como cada componente deste 4-vetor se acopla ao campo externo. Como primeira tentativa, usaremos apenas o acoplamento mínimo desse objeto com o campo eletromagnético, que se traduz pela adição do termo $(\imath e A_\mu)$ na derivada ordinária, de forma a compor a derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + \imath e A_\mu,$$

conforme a prescrição do capítulo anterior.

Representando o conjugado de carga de $W^\mu$ por $W^{*\mu}$, podemos escrever o Lagrangeano desse sistema como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} W^*_{\mu\nu} W^{\mu\nu} + m^2 W^*_\mu W^\mu \,, \tag{2.1}$$

[1]Utilizaremos em todo o trabalho, a métrica $\eta_{\mu\nu} = diag\,(1,-1,-1,-1)$. Assim, nossas convenções serão :

$$\begin{aligned} A^\mu &= \left(A^0; \overrightarrow{A}\right) \,, \\ A_\mu &= \left(A^0; -\overrightarrow{A}\right) \,, \\ \partial_\mu &= (\partial_0; \nabla) \,, \\ \partial^\mu &= (\partial_0; -\nabla) \,. \end{aligned}$$

Também usamos $c = \hbar = 1$ .

onde

$$W^*_{\mu\nu} = (D_\mu W_\nu)^* - (D_\nu W_\mu)^*$$

$$W_{\mu\nu} = D_\mu W_\nu - D_\nu W_\mu\,.$$

Uma variação com respeito a $W^*_\nu$ em (2.1), nos fornece a equação de campo:

$$D_\mu W^{\mu\nu} + m^2 W^\nu = 0\,. \tag{2.2}$$

Tomando a divergência da equação acima, isto é, aplicando $D_\nu$ e usando a seguinte relação

$$[D_\mu, D_\nu] = \imath e F_{\mu\nu},$$

ganhamos a condição subsidiária

$$D_\mu W^\mu = \frac{\imath e}{2m^2} F_{\mu\nu} W^{\mu\nu}. \tag{2.3}$$

Esta relação é de extrema importância, pois nos mostra que, embora este bóson massivo seja descrito por 4 componentes, uma delas não é independente. Ou seja, temos 4 equações (dadas pela equação de campo) e uma equação de vínculo (dada pela condição subsidiária). Portanto, a equação (2.3) permite-nos expressar uma das 4 componentes de $W^\mu$ como combinação das outras 3. Assim, o conjunto de equações (2.2) e (2.3) nos fornecem uma descrição de um spin-1 verdadeiro (representado por 3 componentes independentes - $(2s+1)$, com $s=1$).

Investiguemos, então, qual componente está sendo vinculada por (2.3). Nesta discussão, consideraremos por simplicidade, casos de campos elétricos nulos e campos magnéticos constantes. A motivação física para esta simplificação é que estamos interessados em interpretar termos de dipolo magnético nos nossos resultados, o que é feito através dos termos acoplados a um campo magnético externo. Com base nisso, o campo eletromagnético será descrito por $F_{\mu\nu}$ dado por:

$$\begin{cases} F_{0i} = \overrightarrow{E}_i = 0 \\ \\ F_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\overrightarrow{B}_k \\ \\ \partial_\mu F_{\nu\kappa} = 0, \end{cases}$$

onde $\varepsilon_{ijk} = +1$.

Em termos dos potenciais, ficamos com:

$$\begin{cases} A_0 = 0 \\ \\ A_i = -\dfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}x_j B_k \\ \\ \partial_0 A_i = 0. \end{cases}$$

Usando a propriedade de antissimetria de $W^{\mu\nu}$, podemos reescrever a condição subsidiária (2.3) como:

$$D_\mu W^\mu = \frac{\imath e}{m^2} F_{\mu\nu} D^\mu W^\nu \,. \tag{2.4}$$

Com algumas manipulações algébricas, chegamos a:

$$\partial_t W^0 + \nabla \cdot \overrightarrow{W} - \imath e \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{W} = -\frac{\imath e}{m^2} \overrightarrow{B} \cdot \left(\nabla \times \overrightarrow{W}\right) + \frac{e^2}{m^2} \overrightarrow{B} \cdot \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{W}\right) \,. \tag{2.5}$$

Lembrando que

$$\begin{cases} \partial_t = -\imath E \\ \\ \nabla = \imath \overrightarrow{p}, \end{cases}$$

podemos reescrever a equação anterior:

$$-\imath E W^0 + \imath \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{W} - \imath e \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{W} = +\frac{e}{m^2} \overrightarrow{B} \cdot \left( \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{W} \right) + \frac{e^2}{m^2} \overrightarrow{B} \cdot \left( \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{W} \right). \tag{2.6}$$

Agora, iremos nos concentrar no caso de interesse: Limite Não - Relativístico. Neste limite, a energia da partícula é dada praticamente pela sua energia de repouso, ou seja, em baixas energias vale que $E \cong m$. Com isto, teremos:

$$\frac{|\overrightarrow{p}|}{m} < 1,$$

$$\frac{|e\overrightarrow{A}|}{m} < 1.$$

Desta forma, podemos desprezar, neste limite, qualquer termo de interação de ordem maior que

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{m}\right).$$

Logo, a condição subsidiária diz-nos que, no limite de baixas energias, a componente temporal de $W^\mu$ é dada por:

$$W^0 = \frac{\overrightarrow{p}}{m} \cdot \overrightarrow{W} - \frac{e}{m} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{W}. \tag{2.7}$$

Esta relação nos mostra que a componente $W^0$ é proporcional à $\overrightarrow{W}$ e da ordem de $(v)$ .

Portanto:

$$W^0 \xrightarrow{v \ll 1} 0.$$

Concluímos, então, que, em baixas energias, os efeitos do spin-0 carregado por esse campo não são percebidos.Este mesmo resultado é obtido analisando-se a componente zero ($\nu = 0$) da equação de campo (2.2).

Agora, veremos como fica a parte espacial de $W^{\mu}$ neste limite de baixas energias.

Primeiro, reescrevemos a equação de campo. Usando a condição subsidiária e a fixação de calibre

$$\partial_{\mu} A^{\mu} = 0,$$

a equação (2.2) toma a forma:

$$\begin{aligned}
&\left(\Box + m^2\right) W^{\nu} - \partial^{\nu}\left(\partial_{\mu} W^{\mu}\right) + 2\imath e A_{\mu}\left(\partial^{\mu} W^{\nu}\right) - \imath e \left(\partial_{\mu} A^{\nu}\right) W^{\mu} + \\
&+ \frac{e^2}{m^2} A^{\nu} F_{\mu\kappa} D^{\mu} W^{\kappa} - \imath e A_{\mu}\left(\partial^{\nu} W^{\mu}\right) - e^2 A_{\mu} A^{\mu} W^{\nu} = 0.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Fazendo $\nu = i$ nesta equação :

$$\begin{aligned}
&\left(\Box + m^2\right) W^{i} + \partial_t \partial_i W^0 + \partial_i \partial_j W^j + 2\imath e \overrightarrow{A} \cdot \nabla W^i + \\
&- \frac{\imath e}{2} \varepsilon_{jik} B_k W^j + \frac{e^2}{m^2} \varepsilon_{jkl} A^i B_l \partial_j W^k + \\
&- \frac{\imath e^3}{m^2} \varepsilon_{jkl} A^i A^j B_l W^k - \imath e A^j \partial_i W^j + e^2 \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} W^i = 0.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Usando:

$$\Box + m^2 = -E^2 + \overrightarrow{p}^2 + m^2 = -(E+m)(E-m) + \overrightarrow{p}^2. \tag{2.10}$$

No limite não - relativístico

$$E + m \approx 2m, \tag{2.11}$$

$$E - m \approx E_{NR}, \tag{2.12}$$

onde $E_{NR}$ é a energia não-relativística da partícula.

Desta forma, a relação para a componente espacial de $W^{\mu}$, já no limite de baixas energias, fica (substituindo a relação obtida para $W^0$ neste limite):

$$\begin{aligned} E_{NR}W^i &= \frac{\overrightarrow{p}^2}{2m}W^i - \frac{e}{2m}p_i\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{W} - \frac{e}{m}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{p}W^i + \\ & -\frac{\imath e}{4m}\varepsilon_{jik}\overrightarrow{B}_kW^j + \frac{e}{2m}A^jp_iW^j + \frac{e^2}{2m}\overrightarrow{A}^2W^i. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Sendo $\overrightarrow{A}$ puramente transverso

$$\nabla\cdot\overrightarrow{A} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{A} = 0,$$

temos:

$$\left(\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{A}\right)^2 = \overrightarrow{p}^2 - 2e\left(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{A}\right) + e^2\overrightarrow{A}^2 \tag{2.14}$$

e

$$p_i\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{W} = \left(p_iA^j\right)W^j + A^jp_iW^j. \tag{2.15}$$

Ficamos, então , com:

$$E_{NR}W_i = \frac{1}{2m}\left(\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{A}\right)^2W_i - \frac{\imath e}{2m}\varepsilon_{jik}\overrightarrow{B}_kW_j. \tag{2.16}$$

Na representação adjunta, os geradores de $\mathbf{SU(2)}$ são dados pelos elementos

$$\left(S_k\right)_{ij} \equiv -\imath\varepsilon_{kij}, \tag{2.17}$$

com a álgebra

$$[S_i, S_j] = \imath\varepsilon_{ijk}S_k. \tag{2.18}$$

Portanto, nesse limite de baixas energias a relação para a componente espacial de $W^{\mu}$ fica (equação tipo-Pauli):

$$E_{NR}W_i = \frac{1}{2m}\left(\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{A}\right)^2 W_i - \frac{e}{2m}\overrightarrow{S}_{ij} \cdot \overrightarrow{B} W_j, \tag{2.19}$$

onde

$$\overrightarrow{S}_{ij}$$

é a matriz de spin.

Considerando a expressão para o momento de dipolo magnético de uma partícula

$$\overrightarrow{\mu} = g\frac{e}{2m}\overrightarrow{S}, \tag{2.20}$$

e interpretando como o momento de dipolo deste bóson vetorial, o termo

$$\overrightarrow{\mu}_{ij} = \frac{e}{2m}\overrightarrow{S}_{ij},$$

obtemos para a razão giromagnética, $g = 1$.

Vejamos, então, como recuperar o valor $g = 2$ encontrado por Ferrara, Porrati e Telegdi [1]. Para tanto, vamos utilizar o seguinte acoplamento não-mínimo entre o bóson vetorial massivo carregado, $W^\mu$, e o campo eletromagnético externo, $F^{\mu\nu}$:

$$\imath e F_{\mu\nu} W^{*\mu} W^\nu. \tag{2.21}$$

A nova densidade de Lagrangenao pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}W^*_{\mu\nu}W^{\mu\nu} + m^2 W^*_\mu W^\mu + \imath e F_{\mu\nu} W^{*\mu} W^\nu. \tag{2.22}$$

Variando (2.22) em relação a $W^{*\mu}$, ganhamos a nova equação de campo:

$$D_\mu W^{\mu\nu} + m^2 W^\nu + \imath e F^{\nu\mu} W_\mu = 0. \tag{2.23}$$

Usando o fato de que em uma teoria abeliana, $F^{\mu\nu}$ é um campo neutro,

$$D_\mu F^{\mu\nu} \equiv \partial_\mu F^{\mu\nu},$$

e sendo este $F^{\mu\nu}$ um campo de fundo, ou seja, estamos fora de suas fontes e $W^{\mu}$ carregado não contribui - *no "back reaction"*:

$$D_{\mu}F^{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}F^{\mu\nu} = 0.$$

Com isto, obtemos a nova condição subsidiária:

$$D_{\mu}W^{\mu} = 0. \tag{2.24}$$

Não precisamos repetir, certamente, tudo o que já foi dito antes sobre o papel dessa importante equação de vínculo.

Esta relação também nos leva à mesma expressão para a componente temporal de $W^{\mu}$:

$$W^{0} = \frac{\overrightarrow{p}}{m} \cdot \overrightarrow{W} - \frac{e}{m}\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{W}, \tag{2.25}$$

e, mais uma vez, constata-se que o spin-0 é supresso.

Para explorarmos os novos efeitos introduzidos pelo acoplamento não-mínimo, partimos da nova equação de campo:

$$\begin{aligned}
&\left(\Box + m^{2}\right) W^{\nu} - \partial^{\nu}\left(\partial_{\mu}W^{\mu}\right) + 2\imath e A_{\mu}\left(\partial^{\mu}W^{\nu}\right) - \imath e\left(\partial_{\mu}A^{\nu}\right) W^{\mu} + \\
&+\frac{e^{2}}{m^{2}}A^{\nu}F_{\mu\kappa}D^{\mu}W^{\kappa} - \imath e A_{\mu}\left(\partial^{\nu}W^{\mu}\right) - e^{2}A_{\mu}A^{\mu}W^{\nu} + \\
&+\imath e F^{\nu\mu}W_{\mu} = 0,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

que é a equação (2.23) em sua forma explícita.

Aqui, também, verifica-se que, com $\nu = 0$, recupera-se o resultado anterior.

Fazendo $\nu = i$, temos:

$$
\begin{aligned}
&\left(\Box + m^2\right) W^{\nu} + \partial_t \partial_i W^0 + \partial_i \partial_j W^j + 2\imath e \overrightarrow{A} \cdot \nabla W^i + \\
&-\frac{\imath e}{2} \varepsilon_{jik} B_k W^j + \frac{e^2}{m^2} \varepsilon_{jkl} A^i B_l \partial_j W^k - \frac{\imath e^3}{m^2} \varepsilon_{jkl} A^i A^j B_l W^k + \\
&-\imath e A^j \partial_i W^j + e^2 \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} W^i - \imath e \varepsilon_{ijk} B_j W^k = 0. \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

Com os mesmos procedimentos realizados para essa componente no caso de acoplamento mínimo apenas, chegamos à nova equação tipo-Pauli:

$$
E_{NR} W_i = \frac{1}{2m} \left( \overrightarrow{p} - e \overrightarrow{A} \right)^2 W_i - \frac{e}{m} \overrightarrow{S}_{ij} \cdot \overrightarrow{B} W_j, \qquad (2.28)
$$

de onde podemos redefinir o novo termo de momento de dipolo,

$$
\overrightarrow{\mu}_{ij} = \frac{e}{m} \overrightarrow{S}_{ij}, \qquad (2.29)
$$

obtendo:

$$
E_{NR} W_i = \frac{1}{2m} \left( \overrightarrow{p} - e \overrightarrow{A} \right)^2 W_i - \overrightarrow{\mu}_{ij} \cdot \overrightarrow{B} W_j. \qquad (2.30)
$$

Esta expressão revela-nos a importância do acoplamento não-mínimo na correção do fator giromagnético. Ao adotarmos este tipo de acoplamento entre $W^{\mu}$ e o campo eletromagnético externo, chegamos a $g = 2$, concordando com o resultado esperado para esta classe de partículas.

## 2.2 O Bóson Vetorial $Z^0$

Agora, investigaremos como um bóson vetorial massivo e neutro, representado no espaço de Minkowski por

$$Z^\mu = \begin{pmatrix} Z^0 \\ Z^1 \\ Z^2 \\ Z^3 \end{pmatrix},$$

pode se acoplar ao campo eletromagnérico externo, através de seu spin.

O Lagrangeano que descreve uma partícula vetorial neutra e massiva, é o Lagrangeano de Maxwell-Proca

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 Z_\mu Z^\mu\,, \tag{2.31}$$

com

$$Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu. \tag{2.32}$$

A variação de (2.31) em relação a $Z_\mu$ resulta na equação de campo:

$$\partial_\mu Z^{\mu\nu} + m^2 Z^\nu = 0. \tag{2.33}$$

Tomando a divergência dessa equação , obtemos a condição subsidiária:

$$\partial_\nu Z^\nu = 0. \tag{2.34}$$

Esta condição assemelha-se ao calibre de Lorentz. Mas, como sabemos da teoria de Maxwell-Proca, este conjunto de equações ((2.33) e (2.34)) descreve uma partícula vetorial massiva, às custas da perda da simetria de calibre.

Sabendo, então, que esta teoria descreve uma partícula de spin-1 massiva e neutra, podemos propor um acoplamento do campo eletromagnético externo ao spin de $Z^\mu$, da seguinte maneira:

$$\partial_\mu Z^{\mu\nu} + m^2 Z^\nu + \frac{\lambda}{2} F^{\kappa\lambda} (\Sigma_{\kappa\lambda})^{\nu\mu} Z_\mu = 0, \tag{2.35}$$

onde

$$(\Sigma_{\kappa\lambda})^{\nu\mu} = \delta^\nu_\kappa \delta^\mu_\lambda - \delta^\mu_\kappa \delta^\nu_\lambda \tag{2.36}$$

é a matriz geradora do grupo de Lorentz na representação - $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e, portanto, o termo leva em conta o spin de $Z^\mu$.

Como este campo não possui carga, não podemos realizar o acoplamento mínimo, como discutido no ítem anterior. Devemos partir, então, de um acoplamento do tipo não-mínimo.

Usando a definição de $(\Sigma_{\kappa\lambda})^{\nu\mu}$, obtemos a nova equação de campo:

$$\partial_\mu Z^{\mu\nu} + m^2 Z^\nu + \lambda F^{\nu\mu} Z_\mu = 0. \tag{2.37}$$

A nova condição subsidiária fica:

$$m^2 \partial_\nu Z^\nu + \lambda F^{\nu\mu} \partial_\nu Z_\mu = 0. \tag{2.38}$$

Antissimetrizando o último termo da expressão acima:

$$m^2 \partial_\nu Z^\nu + \frac{\lambda}{2} F^{\nu\mu} Z_{\nu\mu} = 0. \tag{2.39}$$

Esta expressão desempenha o mesmo papel que o da condição dos casos anteriores no sentido de vincular uma das componentes do 4-vetor $Z^\mu$.

O caso estudado será o mesmo da seção anterior, com campos elétricos nulos e magnéticos constantes e uniformes. Assim, poderemos utilizar as mesmas relações anteriores para campos e potenciais eletromagnéticos.

Aqui, partiremos diretamente da equação de campo, visto que é sempre possível verificar que a condição subsidiária reproduz os mesmos resultados.

Trabalhando a equação (2.37), podemos reescrevê-la como:

$$\left(\Box + m^2\right) Z^\nu - \partial^\nu \partial_\mu Z^\mu + \lambda F^{\nu\mu} Z_\mu = 0. \tag{2.40}$$

Fazendo $\nu = 0$, concluímos que

$$\left(\partial_0 \partial^0 + \partial_i \partial^i + m^2\right) Z^0 - \partial^0 \left(\partial_0 Z^0 + \partial_i Z^i\right) + \lambda \left(F^{00} Z_0 + F^{0i} Z^i\right) = 0, \tag{2.41}$$

$$\left(-\nabla^2 + m^2\right) Z^0 - \partial^0 \partial_i Z^i. \tag{2.42}$$

Usando as relações para os operadores momentum e energia apresentadas anteriormente, chegamos a:

$$\left(\overrightarrow{p}^2 + m^2\right) Z^0 - E\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{Z} = 0. \tag{2.43}$$

A energia relativística de uma partícula é dada por:

$$E^2 = \overrightarrow{p}^2 + m^2 .$$

$$\therefore Z^0 = \frac{1}{E} \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{Z} . \tag{2.44}$$

No limite não -relativístico, ficamos com:

$$Z^0 \approx \frac{\overrightarrow{p}}{m} \cdot \overrightarrow{Z} , \tag{2.45}$$

que, como no caso do bóson carregado, nos mostra que a componente zero do 4-vetor $Z^\mu$ é proporcional à sua parte espacial e da ordem de $(v)$. Portanto, aqui também

$$Z^0 \xrightarrow{v \ll 1} 0.$$

Com $\nu = i$ em (2.40), estudamos então a dinâmica da componente independente de $Z^\mu$ assim como o surgimento do momento de dipolo no limite de baixas energias.

$$\left(\Box + m^2\right) Z^i - \partial^i \left(\partial_0 Z^0 + \partial_j Z^j\right) + \lambda \left(F^{i0} Z_0 + F^{ij} Z_j\right) = 0, \tag{2.46}$$

$$\left(\Box + m^2\right) Z^i - \partial^i \left(\partial_0 Z^0 + \partial_j Z^j\right) - \lambda \varepsilon_{ijk} B_k Z_j = 0. \tag{2.47}$$

Vimos que:

$$\Box + m^2 = -(E + m)(E - m) + \overrightarrow{p}^2 \approx -2mE_{NR} + \overrightarrow{p}^2. \tag{2.48}$$

Assim, tomando o limite não-relativístico na expressão anterior com $Z^0$ dado por (2.45), obtemos

$$E_{NR} Z_i = \frac{\overrightarrow{p}^2}{2m} Z_i + \frac{\lambda}{2m} \varepsilon_{ijk} B_k Z_j = 0. \tag{2.49}$$

Associando $\varepsilon_{ijk}$ aos elementos dos geradores de $\mathbf{SO(3)}$ na representação vetorial:

$$\left(S_k\right)_{ij} \equiv -\varepsilon_{kij}, \tag{2.50}$$

obtemos:

$$E_{NR} Z_i = \frac{\overrightarrow{p}^2}{2m} Z_i + \frac{\lambda}{2m} \overrightarrow{S}_{ij} \cdot \overrightarrow{B} Z_j = 0. \tag{2.51}$$

Esta expressão revela-nos uma interação spin-campo magnético e a geração de um momento de dipolo magnético, mesmo a partícula de spin-1 sendo neutra. O magnetismo deste campo vetorial neutro, $Z^\mu$, deriva exclusivamente de seu spin e do acoplamento não-mínimo desta partícula a um campo magnético de fundo. Ao fazermos $\lambda = e$, observamos o aparecimento de um fator giromagnético igual a 1 para este spin-1 neutro e massivo, e não o valor 2 como é esperado para partículas carregadas verdadeiramente elementares, com spins arbitrários.

## 2.3 Discussão

Neste capítulo, estudamos a geração de momento de dipolo para partículas vetoriais massivas, tanto carregadas quanto neutras. No caso das partículas carregadas, vimos que o acoplamento mínimo do campo $W^{\mu}$ a um campo eletromagnético externo não produz o fator giromagnético esperado para essa classe de partículas elementares, o que nos motivou a introduzir o acoplamento não-mínimo no contexto das interações de Yang-Mills com grupo $\mathbf{SU(2)} \times \mathbf{U(1)}$, que é o caso da Teoria Eletrofraca de Salam-Glashow-Weinberg. Já para o campo neutro, $Z^{\mu}$, partimos direto de um acoplamento não-mínimo com o campo eletromagnético externo e vimos o surgimento de uma interação spin-campo e a geração de um termo de dipolo, dados exclusivamente pelo spin da partícula e o acoplamento adotado.

Capítulo 3

# Spin-2 Massivo Neutro e Carregado

No capítulo anterior, vimos como bósons vetoriais (spin-1) massivos, carregados ou neutros interagiam não-minimamente com o campo eletromagnético externo e como se dava, em consequência, o surgimento de um termo de dipolo magnético para essas partículas. Agora, estamos interessados em investigar como uma possível partícula massiva, neutra ou carregada, de spin-2, pode interagir com esse campo externo. Iniciaremos mostrando que a teoria massiva descreve a propagação de uma partícula spin-2. Em sequência, veremos como este spin acopla-se ao campo $F^{\mu\nu}$ externo, no caso de uma partícula neutra. E, por último, estudaremos o caso carregado, considerando primeiro acoplamento mínimo e depois, não-mínimo.

Os mesmos procedimentos adotados no capítulo anterior serão também usados aqui.

## 3.1 Partícula livre de spin-2 massiva e neutra no regime não - relativístico: os graus de liberdade físicos.

Nosso campo massivo e neutro de spin-2 será descrito pelo tensor simétrico, real e de segunda ordem, no espaço de Minkowski:

$$h^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h^{00} & h^{01} & h^{02} & h^{03} \\ h^{01} & h^{11} & h^{12} & h^{13} \\ h^{02} & h^{12} & h^{22} & h^{23} \\ h^{03} & h^{13} & h^{23} & h^{33} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Partiremos do Lagrangeano de Einstein-Hilbert com o termo massivo de Pauli-Fierz [21]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}[\partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial^\lambda h^{\mu\nu} - 2\partial^\nu h_{\mu\nu}\partial_\alpha h^{\mu\alpha} + \\ &\quad +2\partial^\nu h_{\mu\nu}\partial^\mu h - \partial_\mu h \partial^\mu h - m^2(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2)], \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde

$$h \equiv h^\alpha_{\ \alpha} \tag{3.3}$$

é o traço de $h^{\mu\nu}$.

Aplicando o Princípio Variacional em (3.2), obtemos a equação de campo:

$$\Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial^\alpha h_{\nu\alpha} - \partial_\nu\partial^\alpha h_{\mu\alpha} + \partial_\mu\partial_\nu h + m^2(h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h) = 0. \tag{3.4}$$

Tomando a divergência desta equação, chegamos à condição subsidiária:

$$\partial^\mu(h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}h) = 0. \tag{3.5}$$

É importante salientar que esta relação não faz o papel do *gauge* de de Donder da teoria não-massiva, uma vez que não temos mais as simetrias de calibre da teoria linearizada de Einstein-Hilbert satisfeitas. Este gauge da teoria não-massiva é de extrema importância, no sentido de garantir a propagação somente da excitação de spin-2 não massivo, dentre as excitações carregadas por $h^{\mu\nu}$ ([22], [23], [24]). No entanto, a seguir, veremos que, mesmo perdendo essa simetria, ganhamos uma outra condição de vínculo, além da condição acima, e que garante a propagação apenas do modo de spin-2.

Tomando o traço da equação de campo (3.4) e usando a condição (3.5), obtemos:

$$h = h^{\alpha}_{\ \alpha} = 0. \tag{3.6}$$

Com este conjunto de equações, podemos, então, discutir o número de componentes independentes deste campo massivo, $h^{\mu\nu}$ (ou, de maneira análoga, o spin carregado por ele). A simetria deste campo dá-nos um total de dez componentes independentes. As equações de vínculo (condição subsidiária e traço nulo) mostram-nos que, destas dez componentes, cinco podem ser escritas em termos das outras (isto é, cinco são vinculadas). Isto nos leva a uma descrição de spin-2, representado por cinco componentes independentes - $2s+1=5$, para $s=2$. Desta maneira, podemos descrever o campo massivo, neutro e de spin-2, pelo conjunto de equações:

$$\left(\Box + m^2\right) h_{\mu\nu} = 0, \tag{3.7}$$

$$\partial^{\mu} h_{\mu\nu} = 0, \tag{3.8}$$

$$h = h^{\alpha}_{\ \alpha} = 0. \tag{3.9}$$

Analisemos, então, as componentes vinculadas pela condição (3.8):

$\underline{\nu = 0}$:

$$\partial^0 h_{00} + \partial^i h_{0i} = 0, \tag{3.10}$$

$$\partial_0 h_{00} = -\partial^i h_{0i}. \tag{3.11}$$

Lembrando que

$$\begin{cases} \partial_t = -\imath E \\ \\ \partial^i = \imath p^i, \end{cases}$$

$$\Rightarrow h_{00} = \frac{p^i}{E} h_{0i}. \tag{3.12}$$

No limite não-relativístico temos: $E \approx m$, portanto:

$$h_{00} = \frac{p^i}{m} h_{0i}. \tag{3.13}$$

$\underline{\nu = i}$:

$$\partial^0 h_{0i} + \partial^j h_{ij} = 0, \tag{3.14}$$

$$\partial_0 h_{0i} = \partial_j h_{ij}, \tag{3.15}$$

$$\Rightarrow h_{0i} = -\frac{p_j}{E} h_{ij}. \tag{3.16}$$

No limite não-relativístico:

$$h_{0i} = -\frac{p_j}{m} h_{ij}. \tag{3.17}$$

Vimos, então, que as componentes $h_{00}$ e $h_{0i}$ são componentes supérfluas (uma vez que podem ser expressas como funções da componente $h_{ij}$) e da ordem de $v$, implicando que elas não contribuem no limite de baixas energias. Também, obtivemos $h = 0$, uma importante relação para a descrição do spin-2, pois a introdução do termo massivo por esse mecanismo nos fez perder a simetria da teoria de Einstein-Hilbert (*gauge* de de Donder), que nos permitia sempre fazer escolhas para os campos de forma a suprimir as componentes supérfluas.

Para $\mu = i$, $\nu = j$ em (3.7):

$$\left(\Box + m^2\right) h_{ij} = 0. \tag{3.18}$$

Lembrando que

$$\left(\Box + m^2\right) = -E^2 + \overrightarrow{p}^2 + m^2 = -(E+m)(E-m) + \overrightarrow{p}^2 \approx -2mE_{NR} + \overrightarrow{p}^2,$$

obtemos, no limite não-relativístico:

$$\left(-2mE_{NR} + \overrightarrow{p}^2\right) h_{ij} \tag{3.19}$$

$$\therefore E_{NR} h_{ij} = \frac{\overrightarrow{p}^2}{2m} h_{ij} = 0, \tag{3.20}$$

e

$$h \equiv h^i{}_i = 0. \tag{3.21}$$

Obtemos uma equação de partícula livre para o campo $h_{ij} = h_{ji}$, com traço nulo no limite não-relativístico, assegurando a propagação de um spin-2 massivo, com 5 graus de liberdade físicos. Agora, podemos investigar como esse campo se acopla não-minimamente a um campo eletromagnético externo.

## 3.2 Partícula de spin-2 massiva e neutra: Acoplamento Não-Mínimo.

Tendo estudado como se dá a propagação do spin-2 na teoria livre, podemos construir um acoplamento não-mínimo para $h_{\mu\nu}$, supondo que a matriz de spin deste campo se acopla a $F^{\mu\nu}$, com acoplamento $\lambda$, como na equação abaixo:

$$\Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\alpha h_{\nu\alpha} - \partial_\nu \partial^\alpha h_{\mu\alpha} + \partial_\mu \partial_\nu h + m^2 (h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h) + \\ + \frac{\lambda}{2} F^{\kappa\lambda} (\Sigma_{\kappa\lambda})_\mu^{\ \alpha} h_{\alpha\nu} + \frac{\lambda}{2} F^{\kappa\lambda} (\Sigma_{\kappa\lambda})_\nu^{\ \alpha} h_{\alpha\mu} = 0, \tag{3.22}$$

onde

$$(\Sigma_{\kappa\lambda})_\mu^{\ \alpha} = \eta_{\kappa\mu} \delta_\lambda^\alpha - \eta_{\lambda\mu} \delta_\kappa^\alpha \tag{3.23}$$

é a matriz geradora do grupo de Lorentz na representação - $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, como vimos no caso do bóson neutro $Z^0$. Esta definição leva-nos à equação:

$$\Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\nu} - \partial_\nu \partial^\alpha h_{\alpha\mu} + \partial_\mu \partial_\nu h + m^2 (h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h) + \\ + \lambda F_\mu^{\ \alpha} h_{\alpha\nu} + \lambda F_\nu^{\ \alpha} h_{\alpha\mu} = 0. \tag{3.24}$$

Conforme feito na seção anterior, podemos obter a condição subsidária, no caso com interação, tomando a divergência da equação (3.24). Com a introdução deste acoplamento não-mínimo, ganhamos uma condição subsidiária bem mais complexa:

$$\partial^\mu (h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h) = -\frac{1}{m^2} \left[ \frac{\lambda}{2} F^{\mu\alpha} (\partial_\mu h_{\alpha\nu} - \partial_\alpha h_{\nu\mu}) + \lambda F_\nu^{\ \alpha} \partial^\mu h_{\mu\alpha} \right], \tag{3.25}$$

onde usamos as relações

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0\,,$$

$$\partial^\alpha F_{\mu\nu} = 0.$$

No limite não-relativístico, onde a energia da partícula é praticamente sua energia de repouso ($E \approx m$), recuperamos:

$$\partial^\mu (h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h) = 0. \tag{3.26}$$

Tirando o traço da equação de campo (3.24) e usando a condição subsidiária (3.25), obtemos para o traço de $h^{\mu\nu}$ :

$$h = \frac{2\lambda}{3m^4} F^{\mu\alpha} \left( \partial^\nu \partial_\mu h_{\alpha\nu} - \partial^\nu \partial_\alpha h_{\mu\nu} \right). \tag{3.27}$$

Embora a introdução deste acoplamento não recupere o resultado de traço nulo, que foi de extrema importância na discussão dos graus de liberdade carregados por este campo, vemos que o traço é vinculado pelas outras componentes (não possui dinâmica) e depende da interação (sem o termo de interação , ganhamos $h = 0$). Portanto, o spin-0 carregado por esse campo é não-físico. Vemos, também, que $h$ é supresso no limite não-relativístico. Portanto, neste limite de baixas energias, teremos o campo $h^{\mu\nu}$ descrito pelas mesmas relações de vínculo dadas na teoria livre.

Com base nisto, podemos estudar a dinâmica da componente $h^{ij}$.

Fazendo $\mu = i$ e $\nu = j$ na equação de campo (3.24), tomando o limite não-relativístico e substituindo as relações dadas pela condição subsidiária e pelo traço de $h_{\mu\nu}$ já nesse limite, obtemos para essa componente:

$$E_{NR} h_{ij} = \frac{\overrightarrow{p}^2}{2m} h_{ij} - \frac{\lambda}{2m} \varepsilon_{ikl} \overrightarrow{B}_l h_j^{\ k} - \frac{\lambda}{2m} \varepsilon_{jkl} \overrightarrow{B}_l h_i^{\ k}. \tag{3.28}$$

Reescrevendo os termos de interação com o campo magnético conforme segue,

$$-\frac{\lambda}{2m}\left(\varepsilon_{lik}\overrightarrow{B}_l h_j^{\ k}+\varepsilon_{ljk}\overrightarrow{B}_l h_i^{\ k}\right), \tag{3.29}$$

e associando $\varepsilon_{lik}$ aos elementos dos geradores de **SO(3)** na representação vetorial (conforme feito no capítulo anterior para o campo vetorial massivo e neutro),

$$(S_l)_{ik}=-\varepsilon_{lik}, \tag{3.30}$$

chegamos à equação

$$\frac{\lambda}{2\mu}\overrightarrow{B}\cdot\left(\overrightarrow{S}_{ik}h_j^{\ k}+\overrightarrow{S}_{jk}h_i^{\ k}\right). \tag{3.31}$$

Como no caso para o campo $Z^{\mu}$, vemos o surgimento de uma interação spin-campo magnético e a geração de um termo de dipolo magnético. O magnetismo deste tipo de gráviton massivo deriva exclusivamente de seu spin e do acoplamento não-mínimo desta partícula a um campo magnético de fundo. É interessante também notar que, aqui, esta interação spin-campo se desdobra em dois termos, onde cada um se assemelha ao termo de interação encontrado para o caso de partícula vetorial massiva e neutra. Conforme feito anteriormente, substituindo-se $\lambda = e$, obtemos um fator giromagnético igual a 1.

Na próxima seção, estudaremos o caso de um spin-2 massivo e carregado. Assim, investigaremos o papel da carga e do spin na interação destas partículas com um campo eletromagnético externo, como fizemos no caso dos bósons da teoria eletrofraca.

## 3.3 Spin-2 Massivo Carregado.

O acoplamento mínimo é introduzido tornando o campo $h^{\mu\nu}$ complexo e substituindo as derivadas ordinárias pelas covariantes, conforme discussão no Capítulo 1.

Representando o conjugado de $h^{\mu\nu}$ por $h^{*\mu\nu}$, a densidade de Lagrangeano fica:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}[D_\lambda h^{*\mu\nu} D^\lambda h_{\mu\nu} - 2D_\mu h^{*\mu\nu} D^\alpha h_{\alpha\nu} + \\
&\quad + D_\mu h^{*\mu\nu} D_\nu h + D_\mu h^{\mu\nu} D_\nu h^* - D_\mu h^* D^\mu h + \\
&\quad - m^2 (h^*_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^* h)]. \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

Uma variação em relação a $h^{*\mu\nu}$ resulta na equação de campo

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\Box} h_{\mu\nu} - D_\mu D^\alpha h_{\alpha\nu} - D_\nu D^\alpha h_{\alpha\mu} + \frac{1}{2}(D_\mu D_\nu + D_\nu D_\mu) h + \\
&+ m^2 (h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h) = 0, \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

com

$$
\widetilde{\Box} \equiv D^\alpha D_\alpha. \qquad (3.34)
$$

Usando os mesmos procedimentos anteriores, obtemos, respectivamente, a condição subsidária e a relação para o traço de $h^{\mu\nu}$ :

$$
D^\mu \left(h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h\right) = \frac{\imath e}{m^2}\left[\left(F^\mu{}_\nu D^\alpha + F^\alpha{}_\nu D^\mu\right) h_{\alpha\mu} - F^{\mu\alpha}\left(D_\alpha h_{\mu\nu} - D_\mu h_{\alpha\nu}\right) - \frac{3}{2} F_{\mu\nu} D^\mu h\right], \qquad (3.35)
$$

$$
\left(1 + \frac{e^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{2m^4}\right) h = -\frac{2\imath e}{3m^4}\left[\left(F^\mu{}_\nu D^\nu D^\alpha + F^\alpha{}_\nu D^\nu D^\mu\right) h_{\alpha\mu} - F^{\mu\alpha}\left(D^\nu D_\alpha h_{\mu\nu} - D^\nu D_\mu h_{\alpha\nu}\right)\right], \qquad (3.36)
$$

onde vale a pena lembrar que

$$
D^\alpha F^{\mu\nu} = \partial^\alpha F^{\mu\nu} = 0.
$$

Estas relações de vínculo representam o mesmo papel das relações dos casos anteriores, no sentido de vincular algumas componentes de $h^{\mu\nu}$, fazendo com que somente o spin-2 (representado por 5 componentes) se propague.

Analisando as equações (3.35) e (3.36), vemos que na ausência de interação ($e = 0$), recuperamos os resultados do caso de spin-2 massivo na teoria livre. Podemos perceber também que no limite de baixas energias, a condição subsidiária se reduz a

$$D^{\mu}\left(h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h\right) \approx 0, \tag{3.37}$$

levando às seguintes expressões para as componentes supérfluas:

$$h_{00} = \frac{1}{m}\left(p^{i} + eA^{i}\right) h_{i0} \xrightarrow{v \ll 1} 0 \tag{3.38}$$

e

$$h_{0j} = \frac{1}{m}\left(p^{i} + eA^{i}\right) h_{ij} \xrightarrow{v \ll 1} 0. \tag{3.39}$$

É interessante ressaltar também que nesse limite temos:

$$h \approx 0. \tag{3.40}$$

Dessa forma, no limite não-relativístico temos como campo físico $h_{ij} = h_{ji}$, de traço nulo (o que representa uma partícula de spin-2, como concluímos na primeira seção desse capítulo), cuja dinâmica é dada pela expressão (fazendo $\mu = i$ e $\nu = j$ em (3.33)):

$$E_{NR} h_{ij} = \frac{1}{2m}\left(\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{A}\right)^{2} h_{ij}, \tag{3.41}$$

onde usamos a relação

$$\left(\widetilde{\Box} + m^{2}\right) \approx -2mE_{NR} + \left(\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{A}\right)^{2}.$$

Esta equação tipo-Pauli para a parte totalmente espacial de $h^{\mu\nu}$ mostra-nos que, pelo menos com acoplamento mínimo para o campo de spin-2 carregado, não há geração de momento de dipolo magnético, aparecendo apenas um termo de fase relativa na função de onda da partícula, que dá origem ao chamado *efeito Aharonov-Bohm* [25].

Podemos, então, introduzir na densidade de Lagrangeano (3.32), um termo de acoplamento não-mínimo do tipo proposto por Porrati e Rahman [26]

$$\imath e F^{\mu\nu} h^*_{\mu\rho} h^\rho{}_\nu,$$

e verificar seu efeito na dinâmica dessa partícula massiva e carregada, de spin-2.

Vale a pena ressaltar que estes autores introduzem este termo (o qual chamam de termo de dipolo) a menos de um parâmetro $\alpha$. A razão disto é que estão interessados no estudo (no limite de altas energias, usando Teoria Quântica de Campos) das patologias que este acoplamento pode resultar na teoria da gravitação, ou seja, na análise dos valores desse parâmetro em conexão com a obtenção de uma teoria da gravitação consistente. Aqui, adotaremos $\alpha = 1$, valor este que, segundo os autores, está dentro do limite livre de patologias para campos eletromagnéticos externos fracos - que é o nosso caso.

A densidade de Lagrangeano fica, então

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & -\frac{1}{4}[D_\lambda h^{*\mu\nu} D^\lambda h_{\mu\nu} - 2D_\mu h^{*\mu\nu} D^\alpha h_{\alpha\nu} + \\
& + D_\mu h^{*\mu\nu} D_\nu h + D_\mu h^{\mu\nu} D_\nu h^* - D_\mu h^* D^\mu h + \\
& - m^2(h^*_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^* h)] + \imath e F^{\mu\nu} h^*_{\mu\rho} h^\rho{}_\nu, \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

e produz a nova equação de campo:

$$\begin{aligned}
& \widetilde{\Box} h_{\mu\nu} - D_\mu D^\alpha h_{\alpha\nu} - D_\nu D^\alpha h_{\alpha\mu} + \frac{1}{2}(D_\mu D_\nu + D_\nu D_\mu) h + \\
& + m^2(h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h) + 2\imath e \left(F_\mu \rho h_{\nu\rho} + F_\nu \rho h_{\mu\rho}\right) = 0. \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

Desta equação de campo, obtemos as novas relações de vínculo:

$$\begin{aligned}
D^\mu\left(h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h\right) \;=\; & \frac{\imath e}{m^2}\left[\left(F^\mu{}_\nu D^\alpha + F^\alpha{}_\nu D^\mu\right) h_{\alpha\mu} - F^{\mu\alpha}\left(D_\alpha h_{\mu\nu} - D_\mu h_{\alpha\nu}\right)\right] + \\
& - \frac{\imath e}{m^2}\left[\frac{3}{2} F_{\mu\nu} D^\mu h - 2\left(F_\mu{}^\alpha D^\mu h_{\nu\alpha} + F_\nu{}^\alpha D^\mu h_{\mu\alpha}\right)\right], \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{e^2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{2m^4}\right)h &= -\frac{2\imath e}{3m^4}\left[\left(F^{\mu}_{\ \nu}D^{\nu}D^{\alpha}+F^{\alpha}_{\ \nu}D^{\nu}D^{\mu}\right)h_{\alpha\mu}\right]+ \\
& -\frac{2\imath e}{3m^4}\left[F^{\mu\alpha}\left(D^{\nu}D_{\alpha}h_{\mu\nu}-D^{\nu}D_{\mu}h_{\alpha\nu}\right)\right]+ \\
& \frac{2\imath e}{3m^4}\left[-2\left(F_{\mu}^{\ \alpha}D^{\nu}D^{\mu}h_{\nu\alpha}+F_{\nu}^{\ \alpha}D^{\nu}D^{\mu}h_{\mu\alpha}\right)\right]. \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

Como podemos perceber, este acoplamento não altera a estrutura da condição subisidiária e nem a relação para o traço: apenas introduz novos termos dependentes do campo externo. Logo, as mesmas discussões feitas acima para o caso de acoplamento mínimo são também válidas aqui, sendo, portanto, estes novos resultados consistentes com a propagação de spin-2 em baixas energias.

A dinâmica para o campo físico genuíno, $h^{ij} = h^{ji}$ de traço nulo, interagindo agora minimamente e não-minimamente com o campo eletromagnético externo fica:

$$
E_{NR}h_{ij} = \frac{1}{2m}\left(\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{A}\right)^2 h_{ij} + \frac{e}{m}\left(-\imath\varepsilon_{lik}\overrightarrow{B}_l h_j^{\ k} - \imath\varepsilon_{ljk}\overrightarrow{B}_l h_i^{\ k}\right). \qquad (3.46)
$$

Usando a definição dos geradores de $\mathbf{SU(2)}$ na representação adjunta (2.17), chegamos à nova equação tipo-Pauli para esta partícula

$$
E_{NR}h_{ij} = \frac{1}{2m}\left(\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{A}\right)^2 h_{ij} + \left(\overrightarrow{\mu}_{ik}h_j^{\ k} + \overrightarrow{\mu}_{jk}h_i^{\ k}\right)\cdot\overrightarrow{B}, \qquad (3.47)
$$

onde o momento de dipolo magnético é definido como:

$$
\overrightarrow{\mu}_{ij} \equiv \frac{e}{m}\overrightarrow{S}_{ij}. \qquad (3.48)
$$

Em comparação com a expressão para o momento de dipolo de uma partícula (2.20), vemos que esse termo de acoplamento não-mínimo não só gera uma interação spin-campo eletromagnético externo como também produz o fator giromagnético correto: $g = 2$.

Aqui também vemos a interação desdobrando-se em dois termos, onde cada um se assemelha à interação de um campo vetorial carregado com o campo eletromagnético externo.

## 3.4 Discussão

Estudamos, neste capítulo, a interação de uma partícula de spin-2 massiva, tanto neutra quanto carregada. Primeiro vimos como as equações de campo e as equações de vínculo se compensavam de forma a garantir a propagação de um verdadeiro spin-2 pelo campo $h^{\mu\nu}$. Depois analisamos, no caso da partícula neutra, como se dava a interação deste campo de spin-2 com um campo eletromagnético externo, através de um acoplamento não-mínimo. Analogamente como no estudo feito para o campo $Z^{\mu}$, vimos o surgimento de um termo de dipolo magnético devido exclusivamente ao spin da partícula e do tipo de acoplamento adotado. Também vimos que para uma dada escolha da constante de acoplamento, $\lambda$, obtemos um fator giromagnético igual a 1.

Já para o caso com carga, vimos que o acoplamento mínimo somente não é suficiente para gerar um termo de dipolo, diferentemente do que acontece para os bósons carregados $W^{\pm}$. A introdução de um termo não-mínimo na densidade de Lagrangeano produz, além do termo de dipolo, o fator giromagnético esperado.

Capítulo 4

# Compatibilidade Entre o Princípio de Equivalêcia Fraco e o Acoplamento Gravitacional Não-Mínimo

A pedra angular da teoria gravitacional de Einsten é o princípio de equivalêcia fraco. De acordo com a crença popular, esse princípio é incompatível com o acoplamento gravitacional não-mínimo. Vamos mostrar que esta ideia é falsa. A demonstração é independente do modelo adotado para a descrição do acoplamento gravitacional não-mínimo.

## 4.1 O Princípio de Equivalência Fraco.

O princípio de equivalência clássico - universalidade da queda livre, ou igualdade das massas inercial e gravitacional - tem caráter *não-local* e é uma das pedras básicas sobre a qual se assente a gravitação Newtoniana. Na verdade, ele é um amálgama de dois princípios:

**(i)** princípio de equivalência de Galileu (universalidade da queda livre) e

**(ii)** princípio de equivalência de Newton (igualdade das massas inercial e gravitacional),

que são equivalentes no contexto da teoria gravitacional mencionada. Evidentemente, ambos os princípios descrevem efeitos não-locais.

Por outro lado, na gravitação de Einstein o princípio de equivalência fraco, que localmente incorpora os dois princípios anteriormente mencionados, ou seja, os de Galileu e o de Newton, pode ser compreendido como a exigência de que o espaço-tempo seja Riemanniano e, consequentemente, tenha em cada ponto um referencial inercial local [10]. Portanto, este princípio é uma afirmação sobre efeitos puramente *locais*. O princípio de equivalência fraco é também enunciado como se segue: "Uma partícula em queda livre segue uma geodésica do espaço-tempo local". É interessante notar que o princípio de equivalência clássico é incompatível com a Mecânica Quântica, não tendo sido constatado até o momento, porém, qualquer conflito entre a Mecânica Quântica e o princípio de equivalência fraco ([11], [12], [15]).

Pode-se mostrar que, pelo fato do tensor de energia-momento da matéria ser covariantemente conservado na teoria da relatividade geral, o que por sua vez é uma consequência trivial das equações de campo de Einstein, as partículas livres seguem geodésicas do espaço-tempo [14]. Vamos apresentar, em sequência, uma demonstração não rigorosa, mas bastante simples e elucidativa deste fato. Seja então uma coleção de partículas livres (que não interagem entre si). Se o seu número for muito grande, podemos considerá-las como um fluido ideal sem pressão (poeira), o que implica que seu tensor de energia-momento pode ser escrito como [1]

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu. \tag{4.1}$$

Devido às equações de campo de Einstein,

$$0 = T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = (\rho U^\mu)_{;\mu} U^\nu + \rho U^\mu U^\nu{}_{;\mu}. \tag{4.2}$$

Do fato de $U_\nu U^\nu = 1$, segue-se, por sua vez, que

$$U_\nu U^\nu{}_{;\mu} = 0. \tag{4.3}$$

Multiplicando agora (4.2) por $U_\nu$ e levando em conta (4.3), obtemos

$$(\rho U^\mu)_{;\mu} = 0; \tag{4.4}$$

o que implica em

$$U^\mu U^\nu{}_{;\mu} = 0, \tag{4.5}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{4.6}$$

As linhas de universo das partículas são, pois, geodésicas; como por hipótese as partículas não interagem entre si, podemos concluir que a linha de universo de uma única partícula livre será também uma geodésica.

[1] $\rho$ é a densidade de energia e $U^\mu$ é um vetor tipo tempo normalizado a um ($U^\mu U_\mu = 1$).

## 4.2 Um Teorema Geral sobre Acoplamento Gravitacional Não-Mínimo

É crença generalizada que o acoplamento gravitacional não-mínimo viola o princípio de equivalência fraco. Essa idéia é na realidade falsa, conforme demonstraremos em sequência.

***Teorema.*** Qualquer teoria cuja ação é da forma

$$S(x) = \int d^4x \mathfrak{L}(x),$$

sendo

$$\mathfrak{L}(x) = \mathfrak{L}_E + \mathfrak{L}_I + \mathfrak{L}_M,$$

$$\mathfrak{L}_E = \sqrt{-g}\frac{R}{\kappa} = \sqrt{-g}L_E, \;\; \mathfrak{L}_I = \sqrt{-g}L_I(g, \psi^A), \;\; \mathfrak{L}_M = \sqrt{-g}L_M,$$

onde $L_E$ é a densidade de Lagrangeano de Einstein, $L_I$, a densidade de Lagrangeano para a interação não-mínima entre o campo tensorial $\psi^A$ (onde $A$ representa quaisquer índices tensoriais) e a gravitação e $L_M$ é a densidade de Lagrangeano para a matéria usual, é compatível com o princípio de equivalência fraco.

***Demonstração.*** Como a ação é um escalar, ela é invariante por uma transformação infinitesimal de coordenadas

$$x^\mu \longmapsto \bar{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu; \tag{4.7}$$

o que nos permite escrever

$$
\begin{aligned}
0 &= \bar{S}(\bar{x}) - S(x) \\
&= \int d^4\bar{x}\bar{\mathfrak{L}}(\bar{x}) - \int d^4x\mathfrak{L}(x) \\
&= \int d^4x \left[\bar{\mathfrak{L}}(x) - \mathfrak{L}(x)\right] + \int d^4x\partial_\mu \left[\varepsilon^\mu \mathfrak{L}\bar{(x)}\right] \\
&= \int d^4x\delta\mathfrak{L} \\
&= \int d^4x\delta\mathfrak{L}_E + \int d^4x\delta\mathfrak{L}_I + \int d^4x\delta\mathfrak{L}_M.
\end{aligned}
$$

Porém, $\int d^4x\delta\mathfrak{L}_E$, $\int d^4x\delta\mathfrak{L}_I$ e $\int d^4x\delta\mathfrak{L}_M$ são, por sua vez, separadamente invariantes pela transformação de coordenadas (4.7), devido à própria natureza do processo de covariância. Examinemos, pois, o que esta invariância nos fornece em cada situação específica.

- **Caso 1:** $\int d^4x\delta\mathfrak{L}_E = 0$.

Lembrando que [15]

$$
\delta(R) = \left[-R^{\mu\nu} - \nabla^\mu\nabla^\nu + g^{\mu\nu}\Box\right]\delta g_{\mu\nu},
$$

podemos escrever imediatamente

$$
\begin{aligned}
0 &= \int d^4x\delta\left(\frac{\sqrt{-g}R}{\kappa}\right) \\
&= -\int d^4x\sqrt{-g}\frac{G^{\mu\nu}}{\kappa}\delta g_{\mu\nu}.
\end{aligned}
$$

Porém,

$$
\begin{aligned}
\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) &= \bar{g}_{\mu\nu}(x+\varepsilon) \\
&= \bar{g}_{\mu\nu}(x) + \varepsilon^\lambda\partial_\lambda\bar{g}_{\mu\nu}(x).
\end{aligned}
$$

Mas, como $\delta g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x)$, podemos substituir $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ por $g_{\mu\nu}(x)$ em todos os termos que contenham $\varepsilon^\lambda$. Segue-se que

$$\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + \varepsilon^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x). \tag{4.8}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(x) \\ &= \left(\delta^\alpha_\mu - \partial_\mu \varepsilon^\alpha\right)\left(\delta^\beta_\nu - \partial_\nu \varepsilon^\beta\right) g_{\alpha\beta}(x) \\ &= g_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\beta}(x)\partial_\nu \varepsilon^\beta - g_{\nu\alpha}(x)\partial_\mu \varepsilon^\alpha. \end{aligned} \tag{4.9}$$

De (4.8) e (4.9) obtemos prontamente

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = -\varepsilon^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\beta}(x)\partial_\nu \varepsilon^\beta - g_{\alpha\nu}(x)\partial_\mu \varepsilon^\alpha. \tag{4.10}$$

Num sistema geodésico, (4.10) toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu}(x) &= -g_{\mu\beta}(x)\nabla_\nu \varepsilon^\beta - g_{\alpha\nu}(x)\nabla_\mu \varepsilon^\alpha \\ &= -\nabla_\mu \varepsilon_\nu - \nabla_\nu \varepsilon_\mu. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Como (4.11) é uma equação tensorial, ela é válida em qualquer sistema de coordenadas, o que permite-nos concluir que

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = -\nabla_\mu \varepsilon_\nu - \nabla_\nu \varepsilon_\mu. \tag{4.12}$$

Consequentemente,

$$\int d^4x \sqrt{-g} G^{\mu\nu} \left[\nabla_\mu \varepsilon_\nu + \nabla_\nu \varepsilon_\mu\right] = 0, \tag{4.13}$$

ou seja,

$$\int d^4x\sqrt{-g}\left[\nabla_\mu G^{\mu\nu}\right]\varepsilon_\nu = 0. \tag{4.14}$$

Como $\varepsilon$ é arbitrário, $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$, resultado bastante conhecido, que é usualmente obtido utilizando-se as identidades de Bianchi. Logo, o caso 1 não fornece nenhuma informação nova.

- **Caso 2:** $\int d^4x\delta\mathfrak{L}_M = 0$.

  Esta equação pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
0 &= \int d^4x\delta\left(\sqrt{-g}L_M\right)\\
&= -\int d^4x\sqrt{-g}T_M^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\\
&= 2\int d^4x\sqrt{-g}\varepsilon_\nu\nabla_\mu T_M^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Consequentemente $\nabla_\mu T_M^{\mu\nu} = 0$, o que significa que a troca de energia entre a matéria e o campo gravitacional é descrita exatamente como na teoria de Einstein.

- **Caso 3:** $\int d^4x\delta\mathfrak{L}_I = 0$.

  Procedendo à variação indicada, obtemos [2]

$$0 = \int d^4x\frac{\partial\mathfrak{L}_I}{\partial\psi^A}\delta\psi^A + \int d^4x\frac{\partial\mathfrak{L}_I}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu}.$$

Mas $\dfrac{\partial\mathfrak{L}_I}{\partial\psi^A} = 0$ são as equações de campo para $\psi^A$. Logo,

$$\int d^4x\sqrt{-g}T_I^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = 0,$$

e, como consequência,

[2] Estamos supondo a ausência de acoplamentos derivativos.

$$\int d^4x\sqrt{-g}\,[\nabla_\mu T_I^{\mu\nu}]\,\varepsilon_\nu = 0.$$

Pelo fato de $\varepsilon_\nu$ ser arbitrário, $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$, ou seja, o tensor de energia-momento correspondente ao acoplamento gravitacional não-mínimo é covariantemente conservado na concha de massa de $\psi^A$ independentemente de quaisquer outras propriedades do resto da ação. A física é simples: $\psi^A$ só vê a gravidade, portanto seu tensor de energia-momento só é afetado ou não conservado ($\nabla_\mu T_I^{\mu\nu} \neq 0$) em razão do campo gravitacional. *QED.*

A demosntração acima delineada é totalmente independente do modelo adotado para a descrição da interação gravitacional não-mínima, sendo, portanto, completamente geral.

## 4.3 Discussão

Conforme acabamos de demonstrar, o princípio de equivalência fraco e o acoplamento gravitacional não-mínimo podem conviver sem conflito. Por outro lado, na demonstração do teorema sobre o acoplamento gravitacional não-mínimo, chegamos à conclusão que $T_I^{\mu\nu} + T_M^{\mu\nu}$ é covariantemente conservado na concha de massa. Esse resultado é extremamente importante, pois evita, na prática, a árdua tarefa de computar na "força bruta", a divergência covariante deste tensor. Vejamos como isto acontece através de um exemplo. Seja $\mathcal{L}$ a densidade de Lagrangeano mais geral que descreve o acoplamento não-mínimo entre um campo escalar real, $\phi(x)$, e a gravitação de Einstein em quatro dimensões

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\frac{R}{\kappa} + \sqrt{-g}L_M + \sqrt{-g}L_I,$$

$$L_M = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi),$$

$$L_I = f(\phi)R.$$

As funções arbitrárias $f(\phi)$ e $V(\phi)$ distinguem as diferentes teorias; o potencial $V(\phi)$ desempenha o papel de uma constante cosmológica caso ele seja igual a uma constante não nula.

As correspondentes equações de campo são dadas por:

$$\Box\phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} - R\frac{df(\phi)}{d\phi} = 0, \tag{4.15}$$

$$G^{\mu\nu} + \kappa\left[T_M^{\mu\nu} + T_I^{\mu\nu}\right] = 0, \tag{4.16}$$

$$T_M^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}g^{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi + \frac{V(\phi)}{2}g^{\mu\nu}, \tag{4.17}$$

$$T_I^{\mu\nu} = \left(\nabla^\mu\nabla^\nu - g^{\mu\nu}\Box\right)f(\phi) + G^{\mu\nu}f(\phi), \tag{4.18}$$

onde

$$\delta\int d^4x\sqrt{-g}L_M \equiv -\int d^4x\sqrt{-g}T_M^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$$

e

$$\delta\int d^4x\sqrt{-g}L_I \equiv -\int d^4x\sqrt{-g}T_I^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}.$$

Vamos mostrar na força bruta que

$$\nabla_\mu\left[T_M^{\mu\nu} + T_I^{\mu\nu}\right] = 0.$$

Usando (4.17), podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu T^{\mu\nu}_M &= -\frac{1}{2}\phi_{,\alpha}\phi^{;\alpha\nu} + \frac{1}{2}\phi_{,\alpha}\phi^{;\nu\alpha} + \frac{1}{2}\frac{dV(\phi)}{d\phi}\phi^{,\nu} \\
&= \frac{1}{2}\phi^{,\nu}\left[\Box\phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi}\right].
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

Utilizando, agora, (4.18), obtemos:

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu T^{\mu\nu}_I &= \left(\Box\nabla^\nu - \nabla^\nu\Box\right) f(\phi) + G^{\mu\nu} f_{,\mu} \\
&= f^{;\nu\alpha}{}_{\alpha} - f^{;\alpha}{}_{\alpha}{}^{\nu} + \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right] f_{,\mu} \\
&= f^{;\alpha\nu}{}_{\alpha} - f^{;\alpha}{}_{\alpha}{}^{\nu} + \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right] f_{,\mu} \\
&= g^{\nu\beta}\left[f^{;\alpha}{}_{\beta\alpha} - f^{;\alpha}{}_{\alpha\beta}\right] + \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right] f_{,\mu} \\
&= -g^{\nu\beta}R^{\alpha}_{\lambda\beta\alpha}f^{,\lambda} + R^{\mu\nu}f_{,\mu} - \frac{1}{2}Rf^{,\nu} \\
&= -R_{\lambda}{}^{\nu}f^{,\lambda} + R^{\mu\nu}f_{,\mu} - \frac{1}{2}Rf^{,\nu} \\
&= -\frac{1}{2}Rf^{,\nu} \\
&= -\frac{1}{2}R\frac{df(\phi)}{d\phi}\phi^{,\nu}.
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

As equações (4.19) e (4.20), mostram-nos que

$$
\nabla_\mu\left[T^{\mu\nu}_M + T^{\mu\nu}_I\right] = \frac{1}{2}f^{,\nu}\Box\phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} - R\frac{df(\phi)}{d\phi} \tag{4.21}
$$

Consequentemente,

$$
\nabla_\mu\left[T^{\mu\nu_M} + T^{\mu\nu}_I\right] = 0,
$$

em virtude de (4.15).

Vamos realizar, agora, o mesmo cálculo, seguindo os passos utilizados na demonstração de nosso teorema. De acordo com este, $T^{\mu\nu}_I$ é covariantemente conservado na concha de massa de $\phi$, onde

$$R\frac{df(\phi)}{d\phi} = 0. \tag{4.22}$$

Usando (4.22) em (4.20), concluimos que

$$\nabla_\mu T_I^{\mu\nu} = 0,$$

conforme havíamos demonstrado genericamente. Por outro lado, o "caso2"nos afirma que $T_M^{\mu\nu}$ é covariantemente conservado na concha de massa do campo de matéria, onde

$$\Box\phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \tag{4.23}$$

Levando (4.23) em (4.19), obtemos

$$\nabla_\mu T_M^{\mu\nu} = 0,$$

o que está de acordo com o resultado do caso 2. A combinação de (4.21) e (4.23) fornece, então:

$$\Box\phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} - R\frac{df(\phi)}{d\phi} = 0, \tag{4.24}$$

o que nos permite concluir, usando (4.21), que

$$\nabla_\mu \left[T_M^{\mu\nu} + T_I^{\mu\nu}\right] = 0.$$

Estes laboriosos cálculos tornam-se desnecessários na prática, pois, de acordo com nosso teorema:

$$\nabla_\mu \left[T_M^{\mu\nu} + T_I^{\mu\nu}\right] = 0,$$

na concha de massa.

Capítulo 5

# Conclusões Gerais e perspectivas Futuras

Apesar de por algumas décadas ter-se acreditado que para uma partícula elementar massiva carregada, $gs = 1$, onde $g$ e $s$ são, respectivamente, o fator giromagnético e o spin da partícula, Ferrara, Porrati e Teledgi [1] mostraram que $g = 2$ para todas as partículas elementares massivas carregadas a nível semi-clássico. Neste trabalho, verificamos explicitamente este resultado no caso de partículas massivas carregadas, de spins-1 ($W^{\pm}$) e -2 ("grávitons massivos carregados"). Para tanto, introduzimos acoplamentos eletromagnéticos não-mínimos. Surge aqui, em decorrência, a primeira questão pertinente: Por que escolher o termo não-mínimo igual a $\imath e F^{\mu\nu} W_\mu^* W_\nu$ no caso dos bósons vetoriais, e igual a $\imath e F^{\mu\nu} h^*_{\mu\rho} h^\rho{}_\nu$ no caso dos bósons tensoriais? Duas fortes justificativas podem ser apresentadas no caso das partículas de spin 1: simplicidade e o fato deste termo estar presente no Modelo Padrão. A presença de um termo não-mínimo em teorias de gauge não é, na realidade, novidade [2]. O termo $\imath e F^{\mu\nu} h^*_{\mu\rho} h^\rho{}_\nu$, por sua vez, foi escolhido apelando-se para o critério de simplicidade. Desta maneira, a arbitrariedade usualmente presente na escolha de termos não-mínimos, praticamente desaparece. Estes "termos de dipolo"são, na verdade, os responsáveis por fornecerem na aproximação não-relativística, o fator giromagnético correto para as citadas partículas.

Uma questão bastante natural que se origina das considerações anteriores é aquela sobre qual seria o fator giromagnético correto das partículas elementares neutras, a nível de árvore. Com o intuito de respondermos a esta indagação, até então não tratada na literatura, propusemos um acoplamento eletromagnético não-mínimo, agora com o spin da partícula. Em decorrência, chegamos à importante e surpreendente conclusão que $g = 1$ no limite não-relativístico, tanto para os bósons vetoriais neutros quanto para os bósons tensoriais neutros. Este resultado mostra claramente a relevância do spin na interação das partículas elementares com o campo eletromagnético, já que ele é responsável pela geração de um termo de dipolo.

Ao contrário do que se costuma, em geral, acreditar, os acoplamentos não-mínimos são extremamente importantes; de fato, eles facilitam o entendimento de como a interação das partículas encontradas na natureza se dá. Infelizmente, estes acoplamentos são vistos com certa restrição por parte da comunidade cietífica. Tal preconceito é, em geral, sem sentido. Por exemplo, conforme demonstramos neste trabalho, a velha e arraigada idéia de que acoplamentos gravitacionais não-mínimos violam o princípio de equivalência fraco, é inteiramente falsa. Cabe, aqui, esclarecer e pôr abaixo mais uma antiga e errada idéia oriunda da confusão que se costuma fazer entre o princípio de equivalência clássico (CEP), de caráter não-local e relativo à gravitação Newtoniana, e o princípio de equivalência fraco (WEP), de caráter puramente local e concernente à gravitação de Einstein: A Mecânica Quântica é imcompatível com o primeiro, mas não viola o segundo [12]. Plagiando um artigo recente, podemos nos perguntar [11]: *Is the equivalence principle doomed forever to Dante's Inferno on account of quantum mechanics?* Na verdade, um dos obstáculos no que concerne à construção de uma teoria de gravitação quântica é reconciliar o princípio de incerteza da Mecânica Quântica, de caráter não-local, com o WEP da Relatividade Geral, de caráter completamente local. Observe, no entanto, que tal problema não ocorre quando se faz a fusão da Mecânica Quântica com a Relatividade Especial, com o intuito de edificar-se a Teoria Quântica de Campos, uma vez que a Relatividade Especial se assenta sobre princípios puramentes não-locais.

Finalizando, apresentamos as investigações que pretendemos fazer baseadas nos resultados desse trabalho:

**(i)** Mostrar que as partículas neutras em geral apresentam $g = 1$, independentemente de seu spin e a nível de árvore, se acoplamentos eletromagnéticos não-mínimos forem levados em conta;

**(ii)** Demonstrar que, em um cenário onde a simetria de Lorentz é violada ([3], [4]), partículas elementares neutras de spin-2 podem apresentar propriedades magnéticas devidas unicamente ao spin, se acoplamentos eletromagnéticos não-mínimos forem permitidos. Por que investigar teorias com violação de simetria de Lorentz? Como é bem conhecido, o Modelo Padrão não descreve o gráviton. Na tentativa de contornar esse problema, diferentes propostas foram apresentadas, incluindo aquelas provenientes da teoria de cordas. Com o amadurecimento das diversas idéias trazidas por esta última teoria, veio á luz uma nova física que incorpora a quebra de simetria de Lorentz.

# Bibliografia


[1] S. Ferrara, M. Porrati and V. Teledgi, *Phys. Rev.* **D46**, 3529 (1992).

[2] R. Finkelstein, *Rev. Mod. Phys.* **36**, 632 (1964).

[3] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Phys. Rev.* **D39**, 683 (1989).

[4] H. Belich, T. Costa-Soares, M. A. Santos e M. T. D. Orlado,*Revista Brasleira de Ensino de Física*, **V. 29**, n. 1, p. 57-64 (2007).

[5] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics* (Claredon Press, Oxford, 1984).

[6] J. Lopes, *Gauge Field Theories, An Introduction* (Pergamon Press, New York, 1981).

[7] H. Stephani, *General Relativity, An Introduction to the Theory of the Gravitational Field* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).

[8] N. Straumann, *General Relativity and Relativistic Astrophysics* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).

[9] S. Weinberg, in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, Proceedings of the Summer Institute, Brandeis University, 1970, edited by S. Deser (MIT Press, Cambridge, MA, 1970), Vol. I.

[10] G. Shore, *Nucl. Phys.* **B605**, 455 (2001).

[11] A. Accioly R. Aldrovandi and R. Paszko, *Int. J. Mod. Phys.* D **15**, 2249 (2006).

[12] A. Accioly and R. Paszko, Phys. Rev. **D78**, 064002 (2008).

[13] A. Accioly and R. Paszko, "Conflict between the classical equivalence principle and quantum mechanics", *Adv. Studies Theor. Phys.* (in press).

[14] A. Papapetrou, *Lectures on General Relativity* (D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1974).

[15] A. Accioly, A. Azeredo, H. Mukai and E. de Rey Neto, *Progr. Theor. Phys.* **104**, 103 (2000).

[16] F. J. Belifante, Phys. Rev. **92,** 997 (1953).

[17] K. M. Case Phys. Rev. **94**,1442 (Z6) (1954).

[18] C. Fronsdal, Nuovo Cimento Suppl. **9**, 416 (1958).

[19] J. Schwinger, *Particles, Sources, and Fields* ( Addison-Wesley, Reading, MA, 1970).

[20] L. P. S. Singh and C. R. Hagen, Phys. Rev. **D9**, 898 (1974); **9**, 910 (1974).

[21] P. Van Nieuwenhuizen. *Phys. Rev.* **D7** 2300-2308, 1973.

[22] Ray D'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity* (1992).

[23] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, 1985).

[24] Victor José Vásquez Otoya, *Campos, Partículas e Simetrias de Calibre com Violação da Simetria de Lorentz* (Dissertação de Mestrado, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física, 2004).

[25] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **115**: 485-491, 1959.

[26] Massimo Porrati and Rakibur Rahman, (2008) [arXiv:hep-th/0809.2807]