

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A transição de fase da QCD no modelo *String-Flip* em três dimensões

Átila de Paiva Teles

Orientado por Dr. Javier Edgardo Magnin

Dissertação apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas como requisito para a obtenção do título de mestre em Ciências Físicas.

Rio de Janeiro
Outubro de 2012

Ao meu Irmão, Amigo e Companheiro Ítalo.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelas oportunidades e coragem que me deu para que eu conseguisse chegar até aqui.

Ao meu orientador, Professor Javier Magnin, por concordar em me orientar e por todo apoio e paciência durante esse trabalho.

A minha família, meus pais, José e Maria, a quem eu devo tudo, pelo amor incondicional e pela dedicação que sempre tiveram. Aos meus irmãos, Ítalo, sem o qual seria impossível vencer essa etapa de minha vida, e Érico por toda amizade e companherismo.

A minha namorada, Paula, por todo amor, compreensão e seu senso de humor que tanto me ajudaram superar os momentos difíceis.

Aos professores que tive no CBPF: Tião, Helayel, João Paulo Sinneker, Constantino Tsalis, Gilvan Alves e Roberto Sarthour, ao professor e amigo Edson Juvêncios que sempre acreditou em mim e a todos os professores que tive ao longo da vida, que tanto contribuíram para minha formação.

Aos companheiros do CBPF: Chauca, Diogo, Felipe, Fred, Linneu e Thiago Pacheco. E aos monitores do curso de Mecânica Estatística, Léo e Max, por todo apoio que me deram.

A todos os funcionários do CBPF, em especial ao Ricardo e a Bete, que sempre foram solícitos e atenciosos.

À CAPES (Coordenação de aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.

A todos aqueles que contribuíram com a produção dessa dissertação, e por qualquer razão eu não cito aqui, o meu muito obrigado.

Resumo

A matéria nuclear como se conhece, ao atingir uma densidade muito elevada, como em colisões de íons pesados ultrarrelativísticos ou no interior de estrelas de Nêutrons, possivelmente, atinge um estado onde quarks já não mais se encontram ligados formando hádrons. Ao contrário, espera-se que quarks e glúons estejam livres em um plasma.

Uma forma de se estudar o comportamento da matéria hadrônica, em baixas e altas densidades, e o processo de desconfinamento e hadronização é usando simulações de Monte Carlo. Uma maneira de se fazer estudos nessa direção é através do modelo *String-Flip* em três dimensões. Este modelo é formulado incorporando um potencial de muitos corpos capaz de confinar quarks dentro de *clusters* singletos de cor. Em baixas densidades, o modelo descreve um dado sistema de quarks como hádrons isolados, enquanto que em altas densidades, este sistema se torna gás de Fermi de quarks livres.

Nesta dissertação, as soluções da equação de onda do gás de Fermi utilizadas no modelo são reescritas, tendo em vista que é possível se aceitar números quânticos pares e ímpares nessas soluções e não apenas ímpares como é proposto no modelo, já que é desnecessário impor tal restrição para garantir a antissimetria da função de onda, que já foi garantida ao se escrever tais funções em forma de um determinante de Slater.

Com objetivo de se observar as mudanças que ocorrem após as alterações propostas, foram realizadas um conjunto de simulações para se estudar o processo de hadronização em função da densidade de energia. As simulações foram realizadas para sistemas de mésons e sistemas de bárions separadamente, considerando quarks de sabores u , d , s e c nos dois modelos, a versão original e a versão modificada.

Abstract

Nuclear matter at high densities, like that produced in heavy ion collisions or in the interior of neutron stars, can reach a state in which quarks and gluons and not any more bounded forming hadrons. This state of the matter is known as the Quark-Gluon-Plasma.

Theoretical studies to understand the process of deconfinement and its dependence with temperature and density can be performed using Monte Carlo techniques. In this work we use a specific model, the so called String-Flip model to study the phase transition from a gas of hadrons to a gas of quarks as a function of the density of the medium. The model describes a gas of hadrons at low densities but a gas of quarks at high densities.

In our study we observe that a previous version of the model in three dimensions has been formulated in an inconsistent manner. In fact, although the multibody wave-function is explicitly anti-symmetric, since it was constructed as a Slater determinant, it does not satisfy the boundary conditions for a particle in a three dimensional infinite potential.

We re-write the model using the correct wave-function and study the differences with the old one.

Sumário

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Conteúdo	vi
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	viii
1 Introdução	1
1.1 Exemplo de transição de fase em QCD: O modelo <i>Bag</i>	1
1.1.1 Formação do QGP a partir de altas temperaturas	3
1.1.2 Formação do QGP a partir da alta densidade de número bariônico	5
1.1.3 Diagrama de fase da QCD	6
1.2 Considerações sobre a Física de colisão de íons pesados	7
1.2.1 A equação de estado nuclear	8
1.2.2 Intervalos de energia em colisão de íons pesados	8
1.2.3 A evolução espaço-temporal das colisões de núcleos ultrarrelati- vísticos	9
1.3 Sinais de produção de QGP	10
1.3.1 A produção de diléptons	11
1.3.2 Supressão do méson J/Ψ	12
1.3.3 Produção de fótons	13
1.3.4 Produção de estranheza	13
2 O modelo <i>String-Flip</i>	16
2.1 O potencial de muitos quarks	16
2.1.1 O potencial de muitos quarks para mésons	17
2.1.2 O potencial de muitos quarks para bárions	18
2.1.3 O processo de formação de pares	20
2.1.4 O método Húngaro	21
2.2 A função de onda variacional	22
2.2.1 Simulações de Monte Carlo variacional	23
2.2.2 Estudo do modelo no limite de baixas densidades	25
2.2.3 A função de onda do gás de Fermi	27
2.2.4 Estudo do modelo no limite de altas densidades	28

2.3	Aplicação do modelo <i>String-Flip</i> para o cálculo da probabilidade de se formar hádrons	29
2.3.1	O espectro térmico	29
2.3.2	Obtenção da probabilidade de se formar bárions e mésons através do modelo <i>String-Flip</i>	31
3	Modificações no modelo <i>String-Flip</i> e resultados	37
3.1	Solução da função de onda para uma partícula livre em um poço de potencial infinito tridimensional	37
3.2	Correção na função de onda do gás de Fermi	41
3.2.1	Alterações operacionais	43
3.3	Resultados	45
4	Conclusões e perspectivas	49
A	O gás ideal de Fermi	51
A.1	Gases ideais quânticos	51
A.2	Estudo do gás ideal de Fermi	53
A.2.1	Limite de altas temperaturas e baixas densidades	56
A.2.2	Limite de baixas temperaturas e altas densidades	56
B	Conversão de unidades	59
B.1	Conversão de unidades para mésons leves	59
B.2	Conversão de unidades para bárions leves	61
B.3	Fatores de conversão para hádrons com quark <i>strange</i> e com quark <i>charm</i>	63
B.3.1	Mésons contendo quark <i>strange</i>	63
B.3.2	Bárions contendo quark <i>strange</i>	63
B.3.3	Mésons contendo quark <i>charm</i>	64
B.3.4	Bárions contendo quark <i>charm</i>	64

Lista de Figuras

1.1	Sabores de quarks com suas respectivas massas, cargas e número de Spin.	2
1.2	Diagrama de $\alpha_S \times Q^2$.	3
1.3	Diagrama de fase da QCD no plano $T \times \mu$.	7
1.4	Processo de formação de QGP a partir de colisão de núcleos pesados.	10
1.5	Diagrama espaço-temporal de uma colisão entre dois núcleos.	11
1.6	Diagrama de Feynman para a reação $q + \bar{q} \rightarrow l^+ + l^-$.	12
1.7	Diagramas de Feynman do processo $q + \bar{q} \rightarrow \gamma + g$.	13
1.8	Diagramas de Feynman representando o processo $q(\bar{q}) + g \rightarrow q(\bar{q}) + \gamma$.	14
1.9	Formação de partículas estranhas a partir da QGP.	14
1.10	Diagramas de Feynman da reação $g + g \rightarrow Q + \bar{Q}$.	15
1.11	Diagrama de Feynman da reação $q + q \rightarrow Q + \bar{Q}$.	15
2.1	<i>Clusters</i> na configuração Y e triangular.	19
2.2	Emparelamento de quarks formando <i>clusters</i> .	21
2.3	Comportamento da energia por partícula em função parâmetro variacional.	32
2.4	Parâmetro variacional normalizado em função da densidade de energia para um sistema de bárions leves.	33
2.5	Parâmetro variacional normalizado em função da densidade de energia para um sistema de mésons leves.	34
2.6	Probabilidades de se formarem hádrons em função da densidade de energia.	35
2.7	Probabilidades de se formarem bárions leves, bárions <i>strange</i> e bárions <i>charm</i> em função da densidade de energia.	36
2.8	Probabilidades de se formarem mésons leves, mésons <i>strange</i> e mésons <i>charm</i> em função da densidade de energia.	36
3.1	Esquema de um poço de potencial infinito.	38
3.2	Diagrama esquemático de como é definida a função de onda do gás de Fermi no modelo original.	43
3.3	Diagrama esquemático de como é definida a função de onda do gás de Fermi no modelo modificado.	44
3.4	Diagrama esquemático da distribuição de partículas nos níveis de energia e a definição dos níveis de energia no modelo original e modificado.	45
3.5	Probabilidades de se formarem bárions e mésons para o modelo modificado.	46
3.6	Comparação entre resultados obtidos pelo modelo original e modificado.	48
A.1	Função $f_{3/2}(z)$.	55

Lista de Tabelas

2.1	Energia por quark e parâmetro do oscilador para mésons e bárions isolados.	27
2.2	Níveis de energia de um gás de Fermi para o modelo original.	28
3.1	Níveis de Energia de um gás de Fermi para o modelo modificado.	42

Capítulo 1

Introdução

A Cromodinâmica Quântica (QCD) é a teoria que descreve as interações fortes, isto é, as interações entre quarks (férmions de spin $1/2$) e glúons (bósons vetoriais sem massa).

Os quarks aparecem na natureza em seis sabores diferentes divididos em três famílias: A primeira família contendo os sabores *up* (u) e *down* (d); A segunda família contendo os sabores *strange* (s) e *charm* (c) e a terceira família contendo os sabores *bottom* (b) e *top* (t), junto com seus respectivos antiquarks. Os quarks carregam carga elétrica fracionada, $q_e = -1/3$ ou $q_e = 2/3$, e carga de cor, em uma de três cores possíveis, que tradicionalmente são associadas às cores primárias: azul, verde e vermelho. As famílias de quarks são apresentadas na figura (1.1).

Os glúons são os mediadores das interações fortes. Eles são bicoloridos, ou seja, carregam cor e anticor. Por esta razão, quando interagem com um quark, mudam sua cor. Além disso, os glúons têm a capacidade de interagirem entre si, trocando carga de cor.

Essas propriedades da interação forte fazem com que a constante de acoplamento, α_S , seja nula a distâncias muito pequenas ou escalas de energia muito grande ($> 1\text{GeV}$), e tenda ao infinito no limite de grandes distâncias e escalas de energia pequena, conforme a figura (1.2). Essa propriedade, denominada confinamento, faz com que os quarks não apareçam isolados na natureza, mas formando partículas compactas, os bárions (prótons, nêutrons e etc.) e os mésons (píons, káons e etc.).

Sem entrar em uma discussão mais detalhada, que foge do escopo dessa dissertação, a temperatura T^2 pode fazer o papel de escala de energia Q^2 , de maneira que $\alpha_S(T^2 \rightarrow 0) \rightarrow \infty$ e $\alpha_S(T^2 \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. Isto permite inferir que a QCD apresenta, para alguma dada temperatura, uma transição de fase da matéria ordinária (bárions e mésons) para a fase de plasma, em que quarks e glúons estão livres.

A pressão (densidade) pode produzir o mesmo tipo de transição de fase, esperando-se o plasma de quarks e glúons a pressões (densidades) elevadas e matéria ordinária a pressões (densidades) baixas.

1.1 Exemplo de transição de fase em QCD: O modelo *Bag*

O estudo da matéria desconfinada é feito através da QCD não perturbativa. Contudo, enquanto técnicas para se estudar a QCD perturbativa são bem desenvolvidas, para a QCD

Quarks spin = 1/2		
Flavor	Approx. Mass GeV/c ²	Electric charge
u up	0.002	2/3
d down	0.005	-1/3
c charm	1.3	2/3
s strange	0.1	-1/3
t top	173	2/3
b bottom	4.2	-1/3

Figura 1.1: Sabores de quarks com suas respectivas massas, cargas e número de Spin.

não perturbativa é muito difícil de se obter soluções numéricas e analíticas de problemas. Uma forma de se contornar esse problema é recorrer a modelos fenomenológicos. Nesta seção será apresentado o modelo *Bag*, que é um modelo fenomenológico para se estudar o comportamento de quarks e glúons sob altas temperaturas e densidades [1].

O modelo *bag* é um modelo razoavelmente simples, e ao mesmo tempo, possui muitas características que estão de acordo com a compreensão da estrutura dos hádrons [2]. Ainda, o modelo *bag* incorpora duas importantes características da QCD: A liberdade assintótica e o confinamento.

Neste modelo, hádrons são considerados como bolhas de um vácuo perturbativo (bolsas) em um meio confinante. Dentro da bolsa, os quarks se movem livremente, e em uma aproximação mais simples, não existe qualquer interação entre os quarks. Já fora da bolsa, quarks e glúons não podem aparecer como partículas livres, esse cenário é possível devido a pressão da bolsa B (a diferença entre a densidade de energia do vácuo dentro da bolsa e fora da bolsa) que mantém quarks e glúons confinados.

Como será discutido, o confinamento é resultado do balanceamento entre a pressão exercida pela bolsa e a tensão que surge a partir da energia dos quarks. Ainda, nessa descrição, a carga total de cor da matéria confinada deve ser branca (sem cor), de forma que as bolsas hadrônicas permitidas só podem ser do tipo qqq ou $q\bar{q}$, onde q representa quarks e \bar{q} representa antiquarks. Assumindo que a bolsa seja esférica, para um sistema composto por quarks confinados dentro da bolsa, a energia cinética dos quarks é inversamente proporcional ao raio R da bolsa [1], de forma que a energia do hádron pode ser escrita como

$$E_H = \frac{4\pi}{3}R^3B + \frac{C}{R}, \quad (1.1)$$

onde o primeiro termo está associado com o volume da bolsa, enquanto o segundo está

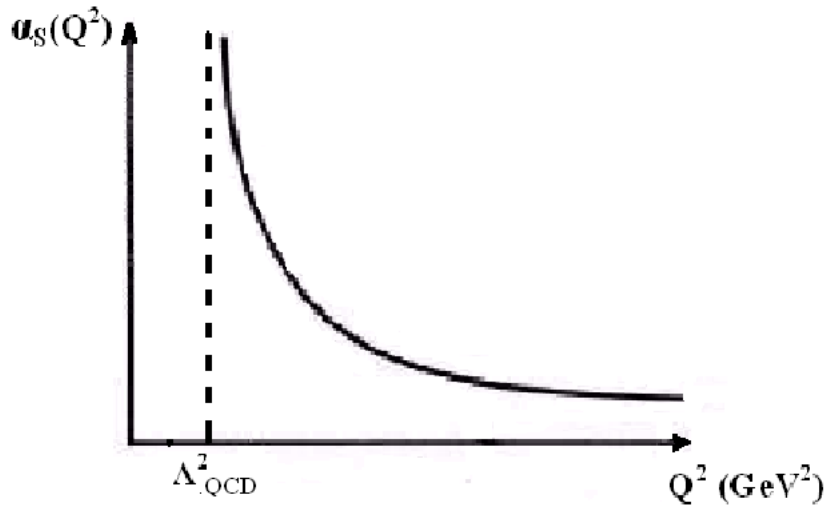


Figura 1.2: Diagrama de $\alpha_S \times Q^2$.

relacionado com a energia cinética dos quarks.

O raio da bolsa pode ser obtido pela minimização da energia E_H com relação a R ,

$$R = \left(\frac{C}{4\pi B} \right)^{1/4}, \quad (1.2)$$

e a pressão P pode ser escrita como

$$P = -\frac{\partial E_H}{\partial V} = -B + \frac{C}{4\pi R^4}, \quad (1.3)$$

onde V é o volume da bolsa. Segundo essas considerações, fica claro que se a pressão dentro da bolsa é aumentada, haverá uma pressão na qual a pressão interior será maior que a pressão exterior. Nessa situação, as pressões estão desbalanceadas e a bolsa não mais poderá confinar os quarks. Quando isso ocorre é possível se obter um estado da matéria onde quarks e glúons estão desconfinados.

Dessa forma, para se alcançar o QGP (Plasma de quarks e glúons), é necessário que exista uma pressão interna maior que a pressão externa sobre a bolsa. Esse aumento de pressão interna pode se dar por dois processos distintos: com o aumento da temperatura da matéria ou com o aumento da densidade do meio.

1.1.1 Formação do QGP a partir de altas temperaturas

O estudo da formação do QGP nesse regime pode ser feito considerando um sistema de quarks e glúons em equilíbrio térmico e a uma temperatura T muito alta em um volume V . Além disso, por simplicidade, os quarks e glúons são considerados sem massa e não interagindo entre si, a densidade é zero e o número de quarks e antiquarks no sistema são iguais.

As pressões dos quarks, antiquarks e glúons são dadas respectivamente pelas equações

$$P_q = \frac{7}{8}g_q \frac{\pi^2}{90}T^4, \quad (1.4)$$

$$P_{\bar{q}} = \frac{7}{8}g_{\bar{q}} \frac{\pi^2}{90}T^4 \quad (1.5)$$

e

$$P_g = \frac{7}{8}g_g \frac{\pi^2}{90}T^4, \quad (1.6)$$

onde g_q , $g_{\bar{q}}$ e g_g são respectivamente o número de degenerescência dos quarks, antiquarks e glúons. Esses valores de pressão podem ser obtidos em livros textos tais como a referência [3].

Somando as equações (1.4), (1.5) e (1.6), obtém-se a pressão total do plasma de quarks e glúons ideal,

$$P = [g_q + \frac{7}{8} \times (g_q + g_{\bar{q}})] \frac{\pi^2}{90}T^4 - B = g_{total} \frac{\pi^2}{90}T^4 - B. \quad (1.7)$$

Para se obter os valores dos números de degenerescência dos quarks (e para anti-quarks) se deve levar em consideração o número de sabores N_f , que será considerado igual a 2 nessa discussão, o número de cor N_c , que vale 3, e o número de spin N_s também igual 2. De forma que o número de degenerescência $g_q(g_{\bar{q}})$ será

$$g_q = g_{\bar{q}} = N_c N_f N_s = 12. \quad (1.8)$$

Para glúons é necessário notar que existem oito combinações de cores, cada um com duas possíveis polarizações, de forma que

$$g_g = 8 \times 2 = 16. \quad (1.9)$$

Substituindo os resultados obtidos em (1.8) e (1.9) em (1.7), o valor da pressão será

$$P = \frac{37}{90}\pi^2 T^4 - B. \quad (1.10)$$

Igualando a pressão do sistema no estado de plasma, equação (1.10), e no estado hadrônico, equação (1.3), e usando o fato que $R^4 = c/4\pi B$, é possível obter a temperatura crítica T_c como

$$T_c = \left(\frac{90B}{37\pi^2} \right)^{1/4} \approx 140 MeV \quad \text{para } B^{1/4} = 200 MeV. \quad (1.11)$$

Quando os quarks são aquecidos acima de uma temperatura crítica T_c , haverá uma pressão interna que superará a pressão externa exercida pela bolsa. Quando isso ocorre, a bolsa não é mais capaz de manter os quarks em seu interior. Nesse sentido, pode-se dizer que o plasma de quarks e glúons surge quando a matéria constituída de quarks atinge temperaturas muito altas.

1.1.2 Formação do QGP a partir da alta densidade de número bariônico

Como já citado, outra forma de se alcançar uma pressão dentro da bolsa que seja alta o suficiente para que ocorra o desconfinamento, mesmo para $T = 0$, é a situação em que o potencial químico do sistema se torna muito alto. Como o princípio de exclusão de Pauli impõe, cada estado quântico pode ser populado por apenas um férmion. Dessa forma, os quarks devem populiar estados com números quânticos diferentes, e a medida que um sistema tem seu número de quarks aumentado, mais estados devem ser ocupados. Consequentemente, haverá cada vez mais partículas ocupando estados com momento mais alto. Assim, a pressão do gás de quarks aumenta com o aumento da densidade. Nesse cenário, o aumento da densidade pode levar o sistema a uma pressão alta o suficiente para superar a pressão B da bolsa. Nesse ponto, a bolsa não é mais capaz de manter esses quarks confinados, produzindo o plasma de quarks e glúons.

Como cada quark carrega número bariônico $1/3$, uma alta densidade de quarks corresponde a uma alta densidade de número bariônico.

É possível se estimar a densidade de número bariônico crítica, onde ocorre a transição de fase do material hadrônico para o plasma. Contudo, primeiro é necessário determinar a pressão que surge a partir do gás degenerado de quarks. Por simplicidade, nessa análise as contribuições dos antiquarks e dos glúons são desconsideradas. Pode-se escrever que o número de estados em um volume V e com momento p em um intervalo dp é

$$\frac{g_q V}{(2\pi)^3} 4\pi p^2 dp,$$

onde g_q é o número de degenerescência que vale, como já foi discutido anteriormente, $N_c N_s N_f = 12$. Cada estado ocupado contém apenas um quark, de forma que o número total de quarks N_q do sistema, até o momento de Fermi μ_q , pode ser dado por

$$N_q = \frac{g_q V}{(2\pi)^3} \int_0^{\mu_q} 4\pi p^2 dp = \frac{2V\mu_q^3}{\pi^2}. \quad (1.12)$$

A densidade do número de quarks pode ser escrita como

$$n_q = \frac{N_q}{V} = \frac{2\mu_q^3}{\pi^2}, \quad (1.13)$$

e a energia do gás de Fermi no volume V , é

$$E_q = \frac{12V}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{\mu_q} p^3 dp = \frac{3}{2} \frac{V}{\pi^2} \mu_q^4. \quad (1.14)$$

Com o valor da energia obtido na equação (1.14), pode-se obter a pressão do gás através da equação de estado de um gás ultrarrelativístico,

$$P = \frac{1}{3} \frac{E_q}{V} = \frac{\mu_q^4}{2\pi^2}. \quad (1.15)$$

A mudança de estado da matéria ocorre quando a pressão do gás se torna igual à pressão B da bolsa, ou seja,

$$\mu_q = (2\pi^2 B)^{1/4}. \quad (1.16)$$

Agora, é possível substituir a equação (1.16) na equação (1.13) para se obter a densidade de quarks crítica que é dada por

$$n_q(qgp) = 4 \left(\frac{B^3}{2\pi^2} \right)^{1/4}. \quad (1.17)$$

Como cada quark carrega número bariônico igual a $1/3$, a densidade de número bariônico crítica é

$$n_B(qgp) = \frac{4}{3} \left(\frac{B^3}{2\pi^2} \right)^{1/4}. \quad (1.18)$$

Para uma bolsa com pressão $B^{1/4} = 206 \text{ MeV}$, pela equação (1.18) o valor da densidade de número bariônico crítica onde hádrõs podem se tornar um plasma de quarks e glúons a uma temperatura $T = 0$ é

$$n_B(qgp) = 0,72 \text{ fm}^{-3}, \quad (1.19)$$

correspondente a um momento de Fermi μ_q com valor

$$\mu_q = 434 \text{ MeV}. \quad (1.20)$$

Ao se comparar esses valores com a densidade de número bariônico de um núcleo $n_{BN} = 0,14 \text{ fm}^{-3}$, e o momento de Fermi de um núcleo $\mu_N = 251 \text{ MeV}$ da matéria nuclear em equilíbrio, é possível estimar que a densidade de número bariônico crítica é em torno de cinco vezes a densidade normal da matéria nuclear.

Como foi discutido, existe a possibilidade de se ter quarks livres em duas situações: A primeira, quando a temperatura é muito alta e a densidade de número bariônico é zero. Enquanto a segunda, quando se tem uma densidade alta para uma temperatura $T=0$. Contudo, existe ainda a situação onde o sistema está em condições intermediárias de temperatura e densidade. Nesses casos, a pressão interna total é a soma dessas duas pressões e a temperatura T'_c na qual se alcança matéria desconfiada estará entre $T=0$ e a temperatura T_c (a temperatura crítica quando a densidade de número bariônico é zero). A figura (1.3) demonstra um esquema do diagrama de fase no plano de temperatura e densidade $T \times \mu$.

1.1.3 Diagrama de fase da QCD

Embora não seja bem conhecido, tanto experimentalmente quanto teoricamente, é conjecturado que o diagrama de fase da QCD seja da forma apresentada na figura (1.3) [4]. Ao se aumentar a densidade de quarks, μ , e mantendo a temperatura T baixa, tem-se uma fase da matéria nuclear comprimida. Ao continuar aumentando a densidade até uma densidade crítica μ_c , ocorre uma transição de fase para matéria desconfiada. Esse cenário é semelhante ao que se espera do núcleos de estrelas compactas, onde deve haver um gás de quarks muito denso. Em uma densidade extremamente alta, espera-se encontrar

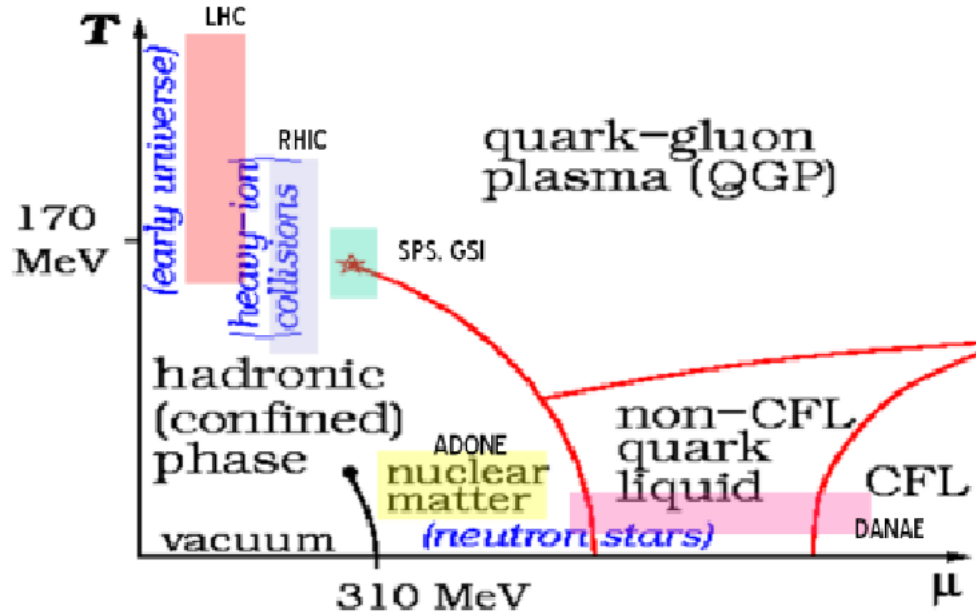


Figura 1.3: Diagrama de fase da QCD no plano $T \times \mu$ [4].

a matéria na fase CFL (*Color-Flavor-Locked*), onde a matéria de quark apresenta supercondutividade de cor. Enquanto, em densidades intermediárias, espera-se um outro estado da matéria denominado, na figura (1.3), por *non-CFL quark liquid*, cujas características ainda são desconhecidas [4].

Na parte inferior esquerda do diagrama, no vácuo, se tem $\mu = T = 0$. Ao se aquecer o sistema, ou seja, ao se mover verticalmente ao longo do eixo T , inicialmente os quarks estão confinados formando um gás de hádrons. Ao chegar a uma temperatura crítica T_c , ocorre uma transição de fase entre o gás de hádrons e o plasma de quarks e glúons. Este cenário corresponde ao estado do universo logo após o big-bang.

1.2 Considerações sobre a Física de colisão de íons pesados

O único método para se estudar a matéria em um estado com alta temperatura e alta densidade em um laboratório é através da colisão de dois núcleos atômicos (íons) com energias muito altas. Por essa razão, já na década de 80, íons pesados começaram a ser injetados em aceleradores de partículas de altas energias com o objetivo de se produzir colisões íon-íon. A partir de 1986, no *European Organization for Nuclear Research* (CERN), no *Superproton Synchrotron* (SPC), colisões dessa natureza foram realizadas com intuito de se alcançar o QGP. Os primeiros experimentos no CERN utilizaram núcleos relativamente leves como o oxigênio e o Enxofre [5]. A partir de então, colisões de íons pesados se tornaram um dos temas centrais da Física contemporânea.

Os primeiros experimentos realizados em 1986 produziram resultados compatíveis com a interpretação da QGP. Contudo, nesse momento não foram obtidas provas reais

da existência do plasma. Apenas a partir de 1994, a segunda geração de experimentos com íons pesados começaram a ser conduzidas, para que em 2000 fossem obtidas provas convincentes de que esse novo estado da matéria tinha sido observado [5].

A última corrida realizada pelo SPC ocorreu em 2003. Atualmente, as colisões de íons pesados realizadas no CERN são feitas no *Large Hadron Collider* (LHC), em particular no experimento ALICE.

A grande atenção que se volta para a física de colisões de íons pesados, e para o plasma de quarks e glúons, justifica-se pelo fato que este ramo da física está ligado a outras áreas, e possivelmente, a sua compreensão ajudará a responder grandes questões, tais como: o comportamento do universo nos seus primeiros segundos e no estudo das estrelas de nêutrons, que são estrelas suficientemente densas para que o QGP possa existir em seu interior.

1.2.1 A equação de estado nuclear

Nas colisões de íons pesados é necessário conhecer o comportamento da matéria sob altas densidades e temperaturas. Além do mais, reações podem chegar a ter milhares de partículas envolvidas no processo. Dessa forma, este sistema é suficientemente grande para se aplicar a física estatística. Por ser um processo dinâmico, propriedades de equilíbrio e desequilíbrio podem ser estudadas. As propriedades termodinâmicas da matéria em equilíbrio estático devem ser descritas por uma equação de estado. No estudo da equação de estado, existem três características a serem investigadas:

1. A transição de fase de um líquido nuclear contínuo para um vapor nuclear de fragmentos e nucleons;
2. A compressibilidade da matéria nuclear na densidade do estado fundamental do núcleo μ_0 e em densidades mais altas;
3. A transição de fase para o plasma de quarks e glúons.

1.2.2 Intervalos de energia em colisão de íons pesados

Colisões de íons pesados são realizadas em um amplo intervalo de energia que vai desde 100 A.MeV até 10 A.TeV, onde A é o número de massa atômica. Nesse intervalo existe uma grande variedade de processos de colisões e fenômenos. Analisando do ponto de vista físico, esse intervalo pode ser dividido em três importantes regiões [6]:

Reações de energia intermediária- Nessa região as propriedades da matéria nuclear podem ser estudadas em torno de sua densidade normal, μ_0 . Nessa região, os feixes de energia costumam estar em um intervalo de 10 A.MeV até 100 A.MeV, sendo possível estudar a transição de fase líquido-gás da matéria nuclear. Em uma colisão de íons pesados intermediária, a matéria pode ser comprimida inicialmente entre 1 e 2 μ_0 e ser aquecida entre 10 e 20 MeV. Então, essa matéria expande adiabaticamente para densidades abaixo de μ_0 e alcança temperaturas entre 5 e 10 MeV. Devido uma interação atrativa entre os íons, nesse estado se formam fragmentos menores de material nuclear e o vapor é condensado para formar gotículas de líquido nuclear.

Reações de íons pesados relativísticos- Neste intervalo de energia, que vai de 100A.MeV até 10A.GeV, a matéria nuclear é bem mais aquecida e comprimida do que em feixes de baixas energias. Essa região de energia é de grande interesse astrofísico para se estudar estrelas de nêutrons e explosões de supernovas, sendo possível nessa região, testar a compressibilidade e outras propriedades da equação de estado nuclear.

Reações de íons pesados ultrarrelativísticos- Essa é a região de maior interesse na física de íons pesados, pois acredita-se que as densidades de energia dessa região, que estão em torno de $10A\text{GeV}$, ou maiores, já são suficiente para se produzir o plasma de quarks e glúons. A região ultrarrelativística pode ser dividida em duas regiões distintas como é discutido abaixo:

1. *Stopping Region* - Nesta região, a desaceleração dos bárions ocorre no meio da zona de reação, gerando um plasma muito rico em bárions. Essa região é de interesse astrofísico, pois possibilita estudar as estrelas híbridas, que são estrelas de nêutrons com um gás de quarks muito denso em seu núcleo.
2. *transparent region* - Em energias mais altas, os bárions não são completamente desacelerados, de forma que as partículas carregando número bariônico não se concentram no meio da zona de reação. Assim, se forma uma região de número bariônico muito baixo ($n_B \sim 0$), permitindo que se forme um plasma de quarks e glúons livre de matéria ordinária. Essa situação também é de grande interesse na astrofísica, pois o universo em seu primeiros instantes, antes de se formar a matéria hadrônica, possivelmente era composto de uma matéria com alta densidade de energia e baixa densidade de número bariônico.

1.2.3 A evolução espaço-temporal das colisões de núcleos ultrarrelativísticos

Em colisões de núcleos atômicos, uma fração considerável da energia é depositada na região de centro de massa, permitindo a produção de hádrons. Dessa forma, colisões de núcleos podem ser uma excelente ferramenta para se produzir regiões de alta densidade de energia. Como previsto por Bjorken [7], se essas energias forem altas o suficiente, certamente reações entre núcleos podem ser utilizadas para explorar a existência de plasma de quarks e glúons.

Essa previsão encoraja o estudo das colisões de núcleos ultrarrelativísticos. Nesse estudo, por simplicidade, pode-se considerar a colisão frontal de dois núcleos iguais no referencial de centro de massa. Esses núcleos podem ser considerados na forma de discos, devido a contração de Lorentz sofrida por eles no referencial do centro de massa. A figura (1.4) descreve essa situação. Na figura (1.4-a), é mostrada a configuração do sistema antes da colisão. O projétil B que vem da posição $z = -\infty$ com uma velocidade muito próxima a da luz, e o alvo A que vem da posição $z = +\infty$ com velocidade também próxima a da luz colidem nas coordenadas $(z, t) = (0, 0)$ do referencial. Quando os dois núcleos colidem, ocorre uma grande quantidade de colisões entre os constituintes (bárions) do projétil B com os constituintes (bárions) do alvo A. Cada colisão que ocorre é acompanhada de uma enorme perda de energia e momento desses bárions. Como consequência, os bárions são desacelerados e se concentra uma grande quantidade de energia na região onde

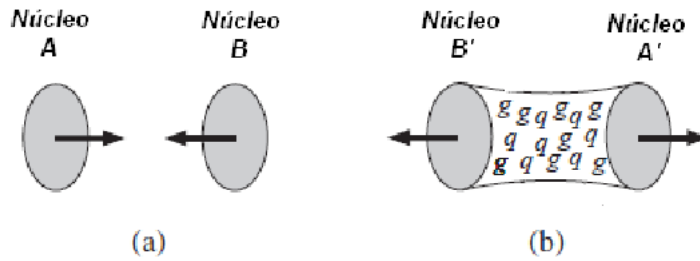


Figura 1.4: (a) Colisão entre dois núcleos em altas energias. (b) Produção de QGP devido a colisão.

ocorreu a colisão, podendo surgir um plasma de quarks e glúons com alta densidade bariônica. Por outro lado, em colisões de energias muito altas (da ordem de 100 GeV/bárion no centro de massa do sistema), esses bárions podem ter energias suficientemente altas para se afastarem da região de colisão, como apresentado na figura (1.4-b), onde A' é o alvo após a colisão e B' é o projétil após a colisão. Nessa situação, resta apenas uma grande quantidade de energia, por um curto espaço de tempo, que se concentra na região de colisão. Nessas condições, se cria uma matéria com densidade de energia muito alta e com densidade de número bariônico baixa, possibilitando a formação do plasma.

Após esse breve intervalo, onde a energia se concentra em $(z, t) = (0, 0)$, o plasma começa a expandir e a esfriar formando a matéria nuclear como é conhecida. Bjorken sugeriu um cenário espaço-temporal para a colisão nuclear com altas energias como é ilustrado na figura (1.5). As linhas mais grossas representam o alvo e o projétil. Logo após a colisão, a energia pode ser suficiente para se formar o QGP, que inicialmente não está em equilíbrio térmico. Contudo, o sistema evolui e o equilíbrio pode ser alcançado, no local denominado *proper time*, τ_0 . A partir de então, o plasma pode evoluir seguindo as leis da hidrodinâmica. Por fim, a medida que o plasma expande, sua temperatura diminui e se inicia o processo de hadronização até se alcançar a temperatura de *freeze-out*. Nesse ponto, os hádrons podem emergir da superfície que engloba a região de colisão.

1.3 Sinais de produção de QGP

Como já discutido na seção anterior, após ocorrer uma colisão entre dois núcleos, pode-se formar a matéria desconfiada, que logo se resfria voltando ao estado hadrônico. Esse é um processo muito complexo para se ter evidências diretas da formação do plasma de quarks e glúons. Contudo, as partículas que emergem dessa colisão podem trazer sinais da produção de QGP.

Nesta seção será feita uma breve abordagem qualitativa desses sinais que atestam a formação da QGP: Produção de diléptons, supressão do J/Ψ , produção de fótons e formação de matéria estranha. Para se obter uma discussão mais detalhada sobre esse assunto, que não é o objetivo dessa dissertação, a referência [1] traz um tratamento mais completo sobre o tema.

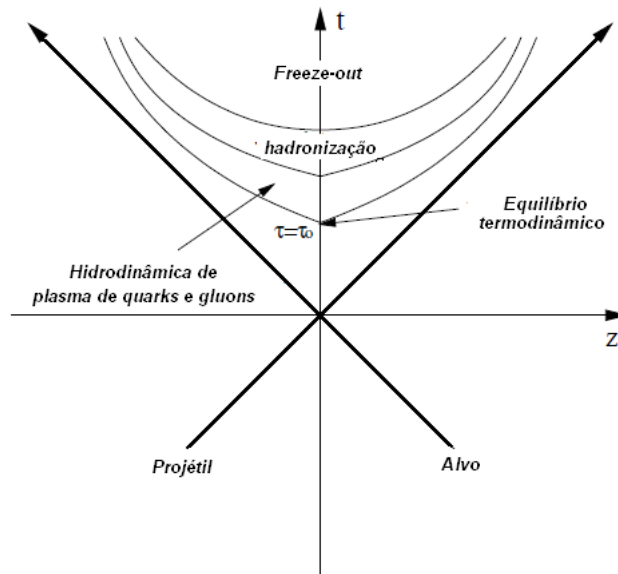


Figura 1.5: Diagrama espaço-temporal de uma colisão entre dois núcleos.

1.3.1 A produção de diléptons

No plasma de quarks e glúons, um quark pode interagir com um antiquark formando um fóton virtual, que pode decair em um lépton e um antilépton, um dilépton. A figura (1.6) apresenta o diagrama que descreve essa reação.

Ao serem produzidos, lépton e antilépton devem atravessar toda a região de colisão para serem detectados. Uma vez que léptons não podem interagir com outras partículas através de interações fortes, por não possuírem carga de cor, o caminho livre médio dessas partículas é suficientemente longo e a probabilidade que elas sofram alguma colisão após serem produzidas é baixa, o que permite que os léptons e antiléptons cheguem aos detectores.

A taxa de produção dos léptons e dos antiléptons e a distribuição de momento do par depende da distribuição de momento dos quarks no plasma, que são governadas pelas condições termodinâmicas do plasma. Dessa forma, os diléptons carregam informações a respeito do estado termodinâmico do plasma.

Contudo, em colisões de núcleos em altas energias, existem outras fontes de diléptons. Portanto, para se definir a porção devida ao QGP é necessário se conhecer as outras principais fontes produtoras de diléptons, que são:

- Processo Drell-Yan: No processo Drell-Yan em colisões entre núcleos, um quark de valência de um dos núcleos pode interagir com um antiquark do mar de antiquarks produzido por alguma partícula do outro núcleo. Então, o quark e o antiquark podem se aniquilar em um fóton virtual, que subsequentemente pode decair em um dilépton.
- Produção de diléptons a partir de hádrons e decaimento de hádrons ressonantes:

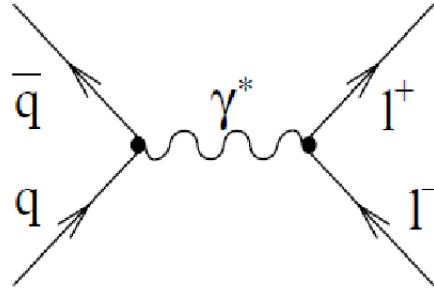


Figura 1.6: Diagrama de Feynman para a reação $q + \bar{q} \rightarrow l^+ + l^-$.

Pares de diléptons podem ser produzidos a partir da interação de um hádron e sua antipartícula ou através do decaimento de hádrons ressonantes, tais como ρ , ω , ϕ e J/Ψ .

- produção de diléptons a partir do decaimento de partículas com charm: Nos processos de colisão, são produzidos mésons com quarks *charm*, tais como D^+ e D^- . Nesse processo, o quark de um núcleo interage com o antiquark do outro núcleo para formar um glúon virtual que decai em um par *charm-anticharm*, $c\bar{c}$. Seguindo a produção do par $c\bar{c}$, ocorre a fragmentação do quark c em um méson D^+ e a fragmentação do antiquark \bar{c} em um méson D^- , resultando em um par D^+D^- . Por sua vez, o méson D^+ decai em $l^+ + X$ (por exemplo, $D^+ \rightarrow l^+ \bar{K}^0 \nu_l$) e o méson D^- decai em $l^- + X$ (por exemplo, $D^- \rightarrow l^- K^0 \bar{\nu}_l$). De maneira que se forma um dilépton.

1.3.2 Supressão do méson J/Ψ

Em colisões de núcleos, mésons J/Ψ são produzidos no estágio inicial do processo de colisão. Contudo, no plasma de quarks e glúons, a carga de cor de um quark é blindada pela presença dos quarks, antiquarks e glúons do plasma. Esse fenômeno é chamado de blindagem de Debye, em analogia à blindagem de Debye de uma carga elétrica na eletrodinâmica quântica. Dessa forma, se existir uma partícula J/Ψ ($c\bar{c}$) no plasma, a blindagem de Debye será capaz de enfraquecer a interação entre os constituintes do méson, c e \bar{c} . Além disso, no plasma, os quarks e antiquarks estão desconfinados e a tensão da corda de cor é nula entre c e \bar{c} . Por causa desses dois efeitos, uma partícula J/Ψ presente no plasma terá seus constituintes desconfinados, levando a supressão das partículas produzidas na colisão.

Por essa razão, a supressão de J/Ψ se torna uma ferramenta para identificar a presença de QGP, pois na ocorrência de plasma, a produção final de méson J/Ψ será menor quando comparada com casos onde não ocorre o plasma de quarks e glúons.

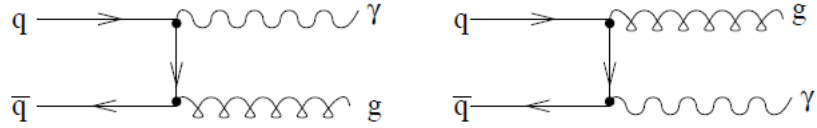


Figura 1.7: Diagramas de Feynman do processo $q + \bar{q} \rightarrow \gamma + g$.

1.3.3 Produção de fótons

No plasma de quarks e glúons, quark e antiquark podem interagir de forma a produzir um fóton e um glúon, através da reação

$$q + \bar{q} \rightarrow \gamma + g. \quad (1.21)$$

Podendo ser representada pelos diagramas de Feynman da figura (1.7).

Embora o processo $q + \bar{q} \rightarrow \gamma + \gamma$ seja possível, a probabilidade desse processo acontecer é muito menor¹.

Outra forma de se produzir fótons é através do processo de um glúon reagindo com um quark para produzir um fóton pela reação

$$g + q \rightarrow \gamma + q, \quad (1.22)$$

ou a reação de um glúon com um antiquark para produzir um fóton pela reação

$$g + \bar{q} \rightarrow \gamma + \bar{q}. \quad (1.23)$$

As reações (1.22) e (1.23) podem ser representadas pelos diagramas de Feynman na figura (1.8).

Depois do fóton ser produzido, ele deve sair da região de colisão para poder ser detectado. Como o fóton interage apenas através de interações eletromagnéticas, espera-se que o fóton tenha um caminho livre médio longo e não colida após ser produzido. Contudo, a taxa de produção dos fótons e a sua distribuição de momento dependem da distribuição de momento dos quarks, antiquarks e glúons que compõem o plasma, que são governados pelas condições termodinâmicas do plasma. Por essa razão, os fótons produzidos no plasma são fontes de informações do estado termodinâmico do meio no momento de sua produção.

1.3.4 Produção de estranheza

A quantidade de estranheza contida na matéria hadrônica e no plasma de quarks e glúons são diferentes. Na matéria nuclear, os quarks de valência são os de sabores *up* e *down* e

¹A probabilidade de ocorrer o processo $q + \bar{q} \rightarrow \gamma + \gamma$ é menor do que a probabilidade de ocorrer o processo $q + \bar{q} \rightarrow \gamma + q$ por um fator da ordem de (α_e/α_s) . Onde, α_e e α_s são as constantes de estrutura fina eletromagnética e forte respectivamente, com $\alpha_e \ll \alpha_s$.

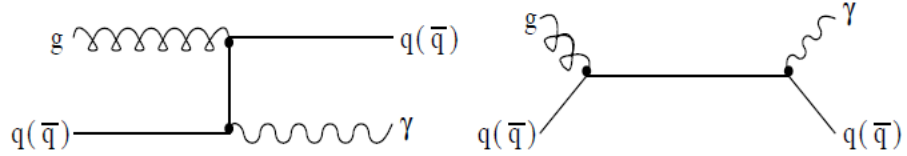


Figura 1.8: Diagramas de Feynman representando o processo $q(\bar{q}) + g \rightarrow q(\bar{q}) + \gamma$.

as quantidades de quarks e antiquarks *strange* são muito pequenas. Por outro lado, em colisões de núcleos, são produzidos pares $u\bar{u}$, $d\bar{d}$ e também $s\bar{s}$. Esses quarks e antiquarks *strange*, subseqüentemente, combinam-se com os quarks de outros sabores para formarem partículas com estranheza, como é ilustrado na figura (1.9). Por essa razão, o estudo de hádrons estranhos como K , Σ e Λ são fontes promissoras de pesquisa, que podem levar a determinação direta das condições de hadronização [8].

Na figura (1.10) é apresentado o processo

$$g + g \rightarrow Q + \bar{Q}, \quad (1.24)$$

onde Q e \bar{Q} representam quark e antiquark *strange* respectivamente. Essa reação produz uma grande quantidade de pares de quarks e antiquarks *strange* nos primeiros estágios da QGP. Em seguida, no processo de hadronização, a recombinação de quarks leva ao surgimento de bárions, tais como o $\Xi(ssu)$ e o $\bar{\Omega}(\bar{s}\bar{s}\bar{s})$ que não são comumente produzidos, considerando que raramente ocorrem processos onde esses hádrons podem ocorrer.

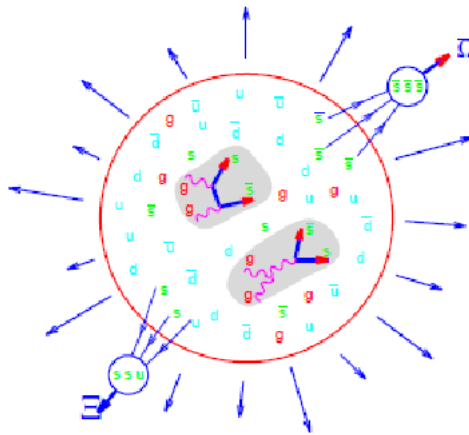


Figura 1.9: Ilustração da formação de partículas estranhas a partir da QGP: Reações de glúons geram pares $s\bar{s}$ que no processo de hadronização irão se recombinar com quarks de outros sabores.

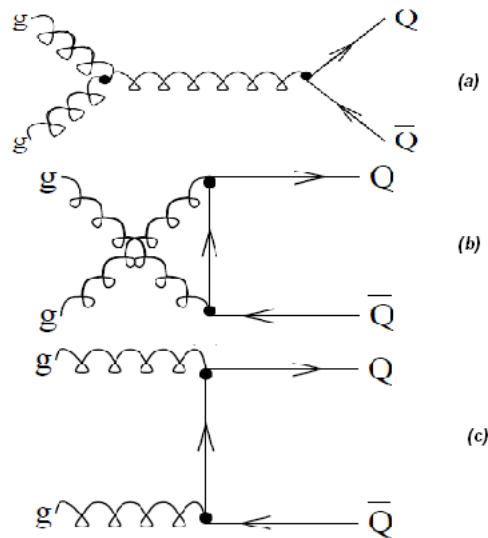


Figura 1.10: Diagramas de Feynman da reação $g + g \rightarrow Q + \bar{Q}$.

Por essa razão, o aumento de tais partículas pode ser um indício da formação de matéria desconfinada.

A produção de estranheza ocorre predominantemente pela reação entre glúons, como apresentado na equação (1.24) contudo, existe também, a contribuição de reações entre quarks leves

$$q + \bar{q} \rightarrow Q + \bar{Q}, \quad (1.25)$$

que tem o diagrama de Feynman representado na figura (1.11).

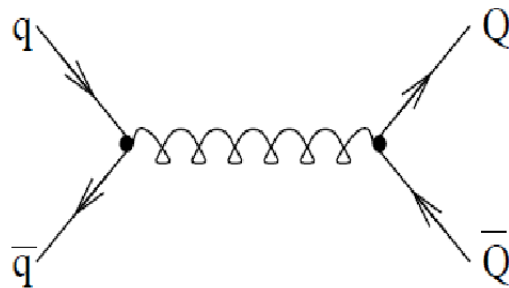


Figura 1.11: Diagrama de Feynman da reação $q + \bar{q} \rightarrow Q + \bar{Q}$.

Capítulo 2

O modelo *String-Flip*

Uma forma de se estudar processos de hadronização é através de modelos estatísticos. Para tanto, um modelo adequado é aquele que simule o ambiente no qual a hadronização acontece. Em um regime de alta densidade de partículas o sistema se comporta com um gás de quarks livres. Enquanto, a medida que a densidade diminui, a hadronização ocorre, até uma região de baixas densidades, onde o sistema se comporta como um gás de hádrons. Um modelo capaz de reproduzir essas condições é o modelo *String-Flip*. Esse modelo foi proposto inicialmente por Lenz e colaboradores, mas ainda sendo um modelo unidimensional [10], sendo aplicado pela primeira vez na matéria nuclear por Horowitz, Moniz e Negele [11]. A partir de então, o modelo foi generalizado para três dimensões [12, 13].

A base do modelo *String-Flip* é a natureza do potencial de muitos quarks. Esse potencial tem como característica ser simétrico em todas as coordenadas dos quarks, além de permitir o confinamento de quarks dentro de hádrons ao mesmo tempo que permite que os hádrons se separem sem gerar forças de Van Der Waals de longo alcance [13]. Uma descrição mais detalhada sobre o potencial de muitos quarks será dada na próxima seção deste capítulo.

O modelo *String-Flip* é um modelo não relativístico. Os quarks que constituem o modelo são considerados partículas não relativísticas, de forma que, o modelo não tem simetria quiral. O modelo também não é invariante de Lorentz e possui um número fixo de quarks [13].

2.1 O potencial de muitos quarks

Em densidades muito baixas, os quarks devem ser confinados em hádrons (ou *clusters*) de duas (mésons) ou três partículas (bárions), onde os *clusters* não interagem entre si, ou seja, uma vez formado um *cluster*, os quarks que compõem esse *cluster* apenas interagem com quarks desse mesmo *cluster*, de forma que a força satura dentro de cada hádron. Essa é uma imposição necessária da natureza para que os hádrons se afastem sem gerar qualquer força de longo alcance. Para esse propósito, dois modelos são considerados: Um modelo que forma hádrons compostos por um quark e um antiquark (modelo $Q\bar{Q}$) e um modelo que forma hádrons de três quarks (modelo $3Q$) [13].

Por outro lado, no limite de altas densidades, a interação entre os quarks é fraca. Uma vez que a distância média entre os quarks será menor que a distância média de confinamento, graças ao efeito da liberdade assintótica presente na QCD, não haverá hádrons no limite de altas densidades, onde se tem apenas um gás de Fermi de quarks e a única correlação entre esses quarks se deve ao princípio de exclusão de Pauli.

Para um sistema de N quarks, o hamiltoniano que descreve esse sistema é dado por

$$H = T + V = \sum_{i=1}^N \frac{P_i^2}{2m_i} + v(q_1, q_2, \dots, q_N), \quad (2.1)$$

sendo m_i a massa dos quarks e v é definido como o potencial de muitos quarks, que tem como característica gerar um agrupamento ótimo entre os quarks. Entende-se como agrupamento ótimo a configuração de *clusters* singletos de cor que geram a menor energia potencial. O potencial v se caracteriza por ser um potencial confinante [13], ou seja,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v(r) \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Por simplicidade, no modelo v é adotado como o potencial de um oscilador harmônico,

$$v(r) = \frac{1}{2} \kappa r^2. \quad (2.3)$$

Quando se assume esse potencial para um sistema de muitos quarks, a equação (2.3) irá implicar em uma força de Van Der Waals entre os hádrons. Contudo, essas forças não são observadas na natureza. Para contornar tal situação, impõe-se que os quarks de um hádron são conectados por “tubos de fluxo de cor” para formarem um singlete de cor e as forças saturarem dentro do hádron. O modelo de tubo de fluxo é estabelecido pela *lattice* QCD, onde se tem estabelecido que a interação entre dois quarks tem a forma de um tubo ou uma corda [12]. Neste modelo, um par quark-antiquark, por exemplo, irá experimentar uma força atrativa que não irá diminuir mesmo para separações assintoticamente grandes através de um tubo que irá ligá-los. Esta energia potencial que surge é essencialmente a base do modelo de confinamento de quarks [14].

2.1.1 O potencial de muitos quarks para mésons

Para que o modelo possa formar mésons a partir de um sistema de $N = A/2$ quarks e $N = A/2$ antiquarks em N *clusters*, o hamiltoniano $H_{\mathcal{M}}$ será dado por

$$H_{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^A \frac{\vec{P}_i^2}{2m_i} + V_P, \quad (2.4)$$

onde o potencial V_P será dado por

$$V_P = \min_P \sum_{i=1}^{A/2} v[\vec{r}_i P(\vec{r}_i)]. \quad (2.5)$$

Nesse potencial, \vec{r}_i é a coordenada espacial do i -ésimo quark e $P(\vec{r}_i)$ é a coordenada do i -ésimo antiquark mapeado [$P(\vec{r}_i) = \vec{r}_j$] e “min” representa o valor mínimo, ou seja, de todos os pares quarks-antiquarks do sistema, foram escolhidos aqueles que geram o menor potencial. Como por exemplo, em um sistema onde se tem apenas três quarks e três antiquarks haverá seis maneiras de se agrupar os quarks em mésons. Portanto, o potencial é o menor dos seis possíveis potenciais gerados, onde cada um desses é a soma de três potenciais $v(r)$. Dessa maneira, o potencial V pode ser escrito como

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = \min(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6), \quad (2.6)$$

com

$$\begin{aligned} V_1 &= v(\vec{r}_1 \vec{r}_1) + v(\vec{r}_2 \vec{r}_2) + v(\vec{r}_3 \vec{r}_3); \\ V_2 &= v(\vec{r}_1 \vec{r}_2) + v(\vec{r}_2 \vec{r}_1) + v(\vec{r}_3 \vec{r}_3); \\ V_3 &= v(\vec{r}_1 \vec{r}_3) + v(\vec{r}_2 \vec{r}_2) + v(\vec{r}_3 \vec{r}_1); \\ V_4 &= v(\vec{r}_1 \vec{r}_1) + v(\vec{r}_2 \vec{r}_3) + v(\vec{r}_3 \vec{r}_2); \\ V_5 &= v(\vec{r}_1 \vec{r}_2) + v(\vec{r}_2 \vec{r}_3) + v(\vec{r}_3 \vec{r}_1); \\ V_6 &= v(\vec{r}_1 \vec{r}_3) + v(\vec{r}_2 \vec{r}_1) + v(\vec{r}_3 \vec{r}_2), \end{aligned}$$

onde potencial v é assumido, conforme a equação (2.3), como um potencial harmônico com uma constante de mola κ , que será dado por

$$v(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \frac{1}{2} \kappa (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2. \quad (2.7)$$

Nota-se que a minimização é feita sobre todas as possíveis $(A/2)!$ permutações de um quark qualquer com os $(A/2)$ antiquarks.

2.1.2 O potencial de muitos quarks para bárions

No caso onde se tem um sistema com A quarks, sendo $N = A/3$ quarks azuis (Az), $N = A/3$ quarks verdes (Vd) e $N = A/3$ quarks vermelhos (Vm) capazes de produzirem N bárions, o hamiltoniano do sistema é dado por

$$H_B = \sum_{i=1}^A \frac{\vec{P}_i^2}{2m_i} + V. \quad (2.8)$$

No caso bariônico, o potencial é construído de forma que cada quark vermelho forme par com um e somente um quark azul e com um e somente um quark verde, que por sua vez formam pares unicamente entre eles de maneira a minimizar o potencial. Dessa forma, o potencial para bárions pode ser construído utilizando o método empregado para construir o potencial para mésons, no sentido que o mesmo algoritmo utilizado para escolher o empareamento ótimo entre quark-antiquark pode ser utilizado para fazer o empareamento

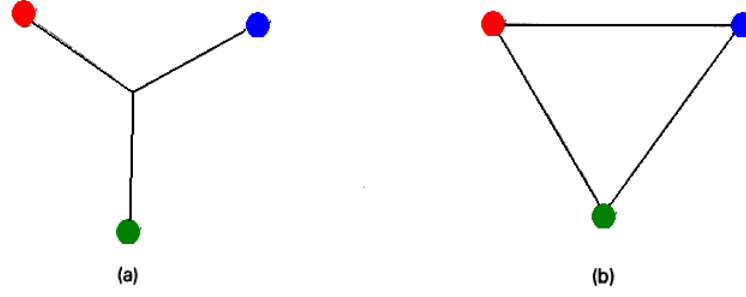


Figura 2.1: (a) *Cluster* formado por três quarks na configuração Y. (b) *Cluster* formado por três quarks na configuração triangular [13].

entre quarks de cores distintas. Como por exemplo, o empareamento ótimo entre quarks vermelhos e azuis é dado por

$$V_{VmAz} = \min_P \sum_{i=1}^{A/3} v[\vec{r}_{iVm}, P(\vec{r}_{iAz})] \quad (2.9)$$

com o potencial v sendo

$$v(\vec{r}_{iVm}, \vec{r}_{jAz}) = \frac{1}{2} \kappa (\vec{r}_{iVm} - \vec{r}_{jAz})^2. \quad (2.10)$$

Semelhante ao caso para mésons, denota-se \vec{r}_{iVm} como a coordenada espacial do i -ésimo quark vermelho e $P(\vec{r}_{iAz})$ a coordenada espacial mapeada do i -ésimo quark azul [$P(\vec{r}_{iAz}) = \vec{r}_{jAz}$]. A minimização é sobre todas as $(A/3)!$ possibilidades do i -ésimo quark vermelho formar par com um dos quarks azuis. Os empareamentos de quark azul-verde e verde-vermelho são construídos de maneira semelhante, podendo ser escritos da forma

$$V_{AzVd} = \min_P \sum_{i=1}^{A/3} v[\vec{r}_{iAz}, P(\vec{r}_{iVd})] \quad (2.11)$$

e

$$V_{dVm} = \min_P \sum_{i=1}^{A/3} v[\vec{r}_{iVd}, P(\vec{r}_{iVm})]. \quad (2.12)$$

Assim, o potencial V para o caso bariônico se torna a soma desses potenciais

$$\begin{aligned} V &= V_{VmAz} + V_{AzVd} + V_{dVm} \\ &= \min_P \sum_{i=1}^{A/3} v[\vec{r}_{iVm}, P(\vec{r}_{iAz})] + \min_P \sum_{i=1}^{A/3} v[\vec{r}_{iAz}, P(\vec{r}_{iVd})] + \min_P \sum_{i=1}^{A/3} v[\vec{r}_{iVd}, P(\vec{r}_{iVm})]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

A energia potencial para um único *cluster* é uma função de confinamento em termos das coordenadas dos três quarks. Esta função poderia envolver *strings* na forma triangular ou na forma de um Y como é apresentado na figura (2.1). Contudo, devido ao caráter harmônico do potencial dado pela equação (2.3), ambas as formas, triangular ou em Y, são equivalentes [13].

2.1.3 O processo de formação de pares

O problema de se formar pares em um sistema de muitos quarks se resume em determinar em qual quark j irá se conectar o tubo de fluxo gluônico que partiu de um determinado quark i . Contudo, a solução desse problema não é simples tendo um alto custo computacional, pois o número de possibilidades de se formarem pares aumenta rapidamente com o aumento do número de quarks do sistema, de forma que um algoritmo de força bruta, onde todas as configurações possíveis são tentadas, se torna impraticável², sendo necessária uma maneira eficiente de se obter a formação ideal de pares.

Porém, o problema de formação de pares de modo a minimizar o potencial do sistema se assemelha com problemas de atribuição, que têm métodos bem desenvolvidos por matemáticos e economistas. Para o modelo *String-Flip*, que é estudado, um eficiente algoritmo é o método húngaro [9], que será brevemente descrito na próxima seção.

O potencial construído é capaz de confinar os quarks dentro de *clusters*. Ainda, a força forte de confinamento satura dentro de cada *cluster* permitindo que eles se separem sem gerar forças de Van der Waals. Contudo, nota-se que o potencial é simétrico sobre a troca de quarks idênticos, ou seja, ao se trocar dois quarks idênticos que estão em *clusters* diferentes nenhuma alteração ocorre na forma do potencial, ao contrário do que ocorre quando se troca de posição dois quarks diferentes.

O potencial é realmente de muitos corpos, no sentido que ao se mover um único quark, o sistema irá se reconfigurar formando novos tubos de fluxo gluônicos ligando quarks de forma diferente àquela anterior ao movimento do quark.

No caso bariônico, embora no limite de baixas densidades quarks pertençam a *clusters* de três quarks, não existe qualquer garantia de que para densidades maiores ocorra a formação de *clusters*. Também não há qualquer garantia de que se formem *clusters* de três quarks. O modelo *String-Flip* não impõe qualquer restrição à formação de *clusters* com mais de três quarks, desde que esse seja incolor e conseqüentemente com um número N de quarks, tal que N seja algum múltiplo de três. Para ilustrar, imagina-se que um quark 1 vermelho forma par com um quark 2 azul, esse quark azul forma par com um quark 3 verde. Porém, não existe qualquer garantia que esse quark verde 3 irá formar par com o quark 1 vermelho e não com qualquer outro quark vermelho do sistema. Assim, é possível se obter um *cluster* com qualquer número de quarks múltiplo de três.

No caso mesônico, pode-se fazer considerações semelhantes a respeito da formação de *clusters*: Não há qualquer garantia de que se forme, embora ocorra no limite de muito baixas densidades, *clusters* em densidades mais altas. Contudo, para mésons, mesmo respeitando a imposição de serem incolores, os *clusters* não podem ser compostos por mais do que um par quark-antiquark.

No modelo não há qualquer potencial entre *clusters*, uma vez que os quarks constituintes são os únicos graus de liberdade da hamiltoniana. Porém, existe uma interação

²Em um sistema com $N = 3A$ quarks, para se obter o agrupamento ótimo de A *clusters* de três quarks (bárions) seria necessário testar as $(A!)^2$ configurações possíveis. Já para se formar mésons, se modela um sistema com $N = 2A$ partículas (A quarks e A antiquarks), onde para se obter a configuração ótima de A hádrons é necessário se testar as $A!$ configurações possíveis. Mesmo para um sistema com um número modesto de quarks, como por exemplo com $A=10$, no primeiro caso o número de configurações possíveis ultrapassa os dez trilhões, enquanto no segundo caso (embora bem menor que no primeiro caso, mas ainda um número bem elevado) passa das três milhões e quinhentas mil possibilidades de configuração.

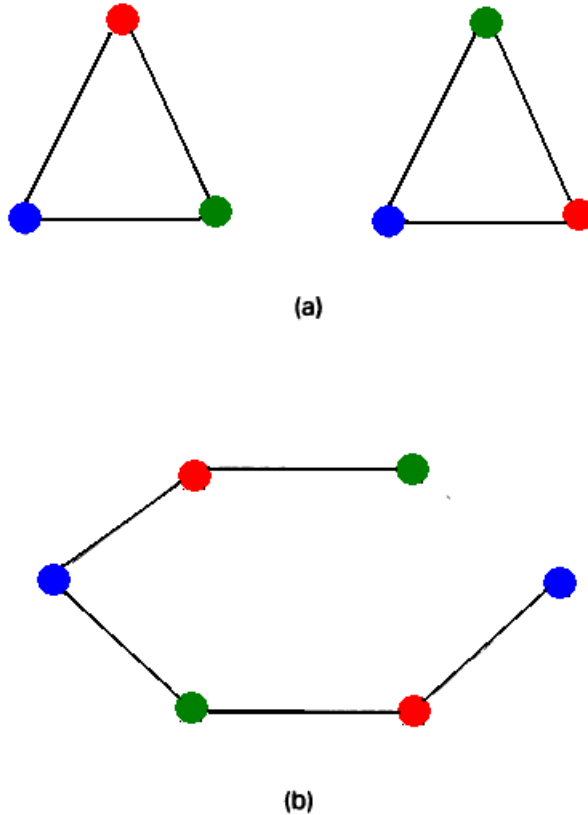


Figura 2.2: (a) Emparelhamento de *clusters* de três quarks formando dois *nucleons*. (b) Emparelhamento de um *cluster* de seis quarks [13].

residual entre os *clusters* que é garantida através dos seguintes dois efeitos:

- Troca de quarks: Gera uma atração fraca entre os *clusters*.
- Princípio de exclusão de Pauli: Gera uma repulsão entre *clusters*.

2.1.4 O método Húngaro

No problema de se formar hádrons em uma configuração ótima, com o método Húngaro se constrói uma matriz C_{ij} , onde cada elemento c_{ij} dessa matriz corresponde o potencial dado pela equação (2.3), entre a partícula i e a partícula j . Nessa matriz, todos os pares possíveis de serem formados são contemplados. Em seguida, através da série de operações a seguir, é possível obter a configuração ótima [15]:

1. Na matriz C_{ij} , em cada linha subtrai-se a célula c_{ij} de menor valor em cada uma das demais células da linha;
2. Na matriz C_{ij} , em cada coluna subtrai-se a célula c_{ij} de menor valor em cada uma das demais células da coluna;
3. Hachura-se as linhas e colunas que contêm zeros, de forma a hachurar o mínimo de colunas e linhas possíveis da matriz C_{ij} ;

4. Se o número de linhas e colunas hachuradas for igual à ordem da matriz C_{ij} , a alocação ótima terá sido encontrada. Caso contrário, continua-se o processo com o passo 5;
5. Determinar o menor valor dentre as células c_{ij} não hachuradas, então, diminui-se esse valor de todas as outras células c_{ij} não hachuradas e o soma a aquelas que estão hachuradas. Em seguida, volta-se ao passo 3.

Após essa série de passos, obtém-se a configuração ótima do empareamento de quarks. Cabe ainda comentar que para o caso bariônico, o empareamento é feito por pares de cores independentemente, ou seja, faz-se o empareamento ótimo entre quarks azuis e vermelhos, entre azuis e verdes e entre vermelhos e verdes.

2.2 A função de onda variacional

Como já discutido, a proposta do modelo *String-Flip* é descrever um sistema que evolui com a densidade de quarks. Em um limite de baixas densidades, forma-se *clusters* de quarks. Por outro lado, no limite de altas densidades, esses quarks não interagem entre si e o sistema se comporta como um gás de Fermi de quarks livres. Para esse propósito, usa-se uma função de onda variacional, que descreva a evolução de um sistema de N quarks como função da densidade de partículas. Considera-se os quarks em uma caixa tridimensional, cujos lados têm comprimento L e o sistema é descrito por uma função de onda variacional da forma

$$\Psi_{\lambda}(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N) = e^{-\lambda V(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N)} \Phi_{FG}(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N), \quad (2.14)$$

onde λ é somente um parâmetro variacional, $V(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N)$ é o potencial de muitos quarks definido pela equação (2.5), para mésons, e pela equação (2.13), para bárions. A função $\Phi_{FG}(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_N)$ é a função de onda do gás de Fermi, que como será discutido adiante, é dado por um produto de determinantes de Slater, onde existe um determinante de Slater para cada combinação de sabor e cor de quarks e X 's são as coordenadas espaciais dos N quarks que compõem o sistema.

A escolha dessa função de onda variacional é motivada pelo fato de que se tem o interesse na evolução do sistema a partir do regime de baixas densidades de energia para o regime de altas densidades de energia. Na equação (2.14), o termo exponencial é responsável pelas correlações de formação de *clusters*. Em baixas densidades de energia, o sistema é formado por hádrons singletos de cor, onde os quarks interagem fortemente dentro desses hádrons. Nesse caso, o termo exponencial da função de onda tem uma grande contribuição porque a distância entre quarks é da ordem da escala de confinamento. Por outro lado, no regime de altas densidades de energia, onde surge os efeitos de liberdade assintótica, a distância entre os quarks é muito menor do que a escala de confinamento, nesse regime a interação entre os quarks é fraca e o termo exponencial tende a desaparecer para que o sistema assuma a forma de um gás de Fermi de quarks livres.

Nesse contexto, o parâmetro variacional λ assume valores bem definidos em ambos limites: Em densidades muito baixas, ele se aproxima de um valor fixo λ_0 ($\lambda \rightarrow \lambda_0$),

que como será discutido posteriormente, corresponde à solução da função de onda de um hádron isolado, consistindo de dois ou três quarks. Em densidades muito altas, o parâmetro variacional se aproxima de zero ($\lambda \rightarrow 0$), de forma que a função de onda (2.14) assuma a forma da função de onda do gás de Fermi.

Como se verá mais a frente, o parâmetro variacional λ tem a unidade do inverso da distância ao quadrado, de forma que o estudo desse parâmetro traz informações a respeito do tamanho médio dos *clusters* formados no sistema.

2.2.1 Simulações de Monte Carlo variacional

A natureza variacional das simulações de Monte Carlo sugere que o valor esperado do hamiltoniano, equação (2.1), deve ser minimizado com respeito ao parâmetro variacional λ introduzido pela equação (2.14) [9]. Para tanto, é preciso obter o valor esperado do operador hamiltoniano para então se fazer

$$\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{onde} \quad E(\lambda) = \langle \Psi_\lambda | H | \Psi_\lambda \rangle. \quad (2.15)$$

Para se obter o valor esperado do hamiltoniano, pode-se tomar vantagem da estrutura da função de onda, que permite simplificações nos cálculos [9, 18]. Por exemplo, o valor esperado da energia cinética $\langle T \rangle$, após uma integração por partes, assume o valor

$$\langle \Psi_\lambda | T | \Psi_\lambda \rangle = T_{FG} + 2\lambda^2 \langle W \rangle_\lambda, \quad (2.16)$$

onde T_{FG} é a energia cinética de um gás de Fermi de quarks livres e $\langle W \rangle_\lambda$ é o termo que corresponde ao aumento da energia cinética devido as correlações de agrupamento, aquelas que ocorrem entre os quarks que compõem um *cluster*, que pode ser expresso como

$$\langle W \rangle_\lambda = \sum_i^N \frac{1}{m_i} (\vec{X}_i - \vec{Y}_i)^2, \quad (2.17)$$

onde a soma é sobre todos os quarks no sistema e \vec{Y}_i representa a posição média dos dois quarks conectados no i -ésimo quark para um bárion ou a posição média do correspondente antiquark para um méson.

O valor médio do hamiltoniano pode ser escrito como

$$\langle H \rangle_\lambda = \langle T \rangle_\lambda + \langle V \rangle_\lambda = T_{FG} + 2\lambda^2 \langle W \rangle_\lambda + \langle V \rangle_\lambda, \quad (2.18)$$

onde $\langle V \rangle_\lambda$ é a energia potencial definida pelas equações (2.5) e (2.13). A grande vantagem de se escrever o valor esperado do hamiltoniano $\langle H \rangle_\lambda$ na forma da equação (2.18) é que as funções do potencial V e a de correlação W são locais e podem ser calculadas usando técnicas de Monte Carlo, em especial, pode-se utilizar o método de Metropolis, da forma que será discutida a seguir.

O algoritmo de Metropolis

O algoritmo de Metropolis, um método de Monte Carlo muito empregado em sistemas físicos, é baseado no processo de Markov que gera eventos estocasticamente. A cadeia de

Markov é criada sequencialmente a partir do conhecimento da configuração corrente, ou seja, a $(m + 1)$ -ésima configuração na cadeia é gerada estocasticamente usando apenas a m -ésima configuração, independentemente de qual foi a $(m - 1)$ -ésima configuração.

Obter o valor esperado da energia potencial da equação (2.18) implica em resolver a seguinte integral

$$\langle \Psi_\lambda | V | \Psi_\lambda \rangle_\lambda = \int V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) |\Psi_\lambda(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)|^2 d(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n), \quad (2.19)$$

o que pode ser muito trabalhoso, pois se o sistema é composto de $N = 120$ quarks, por exemplo, para se obter o valor esperado de V seria necessário se calcular uma integral 360-dimensional. Contudo, com o algoritmo de Metropolis não é necessário calcular essa integral pelo método de quadraturas, o que é uma tarefa muito complicada, mas ao contrário, basta tomar uma amostragem demonstrativa relativamente pequena. De forma que a maneira de se calcular o valor esperado deixa de ser como na equação (2.19), para ser da forma

$$\langle V \rangle_\lambda = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M V(\vec{x}_1^{(m)}, (\vec{x}_2^{(m)}, \dots, (\vec{x}_N^{(m)}), \quad (2.20)$$

onde nesse processo as M configurações são distribuídas de acordo com $|\Psi_\lambda|^2$ através do uso do algoritmo de Metropolis:

- Dada uma configuração inicial das partículas na caixa \vec{x}_i , os *clusters* são formados de maneira a se obter o menor potencial de energia. Alcançada essa configuração, tem-se a função de onda $\Psi_\lambda(\vec{x}_i)$ e probabilidade $|\Psi_\lambda(\vec{x}_i)|^2$.
- Impõe-se uma nova configuração para o sistema através de um deslocamento $\vec{\delta}_i$ na configuração inicial. Então, obtém-se uma nova função de onda $\Psi_\lambda(\vec{x}_i + \vec{\delta}_i)$ com probabilidade $|\Psi_\lambda(\vec{x}_i + \vec{\delta}_i)|^2$.
- Gera-se a razão entre as probabilidades $|\Psi_\lambda(\vec{x}_i)|^2$ e $|\Psi_\lambda(\vec{x}_i + \vec{\delta}_i)|^2$. Então, é verificado se

$$\frac{|\Psi_\lambda(\vec{x}_i + \vec{\delta}_i)|^2}{|\Psi_\lambda(\vec{x}_i)|^2} > 1. \quad (2.21)$$

- Se a condição dada pela equação (2.21) for satisfeita, o potencial gerado $V(\vec{x}_i + \vec{\delta}_i)$ será aceito. Se a condição não for satisfeita, esse potencial ainda não é descartado. Gera-se um número aleatório r , entre 0 e 1, e o compara com a razão obtida na equação (2.21). Se for satisfeita a condição

$$\frac{|\Psi_\lambda(\vec{x}_i + \vec{\delta}_i)|^2}{|\Psi_\lambda(\vec{x}_i)|^2} > r, \quad (2.22)$$

o potencial $V(\vec{x}_i + \vec{\delta}_i)$ é armazenado, caso contrário, o potencial $V(\vec{x}_i + \vec{\delta}_i)$ é rejeitado.

Esse processo é repetido M vezes, com um valor de M bem grande ($M \rightarrow \infty$), para se obter o valor de $\langle V \rangle_\lambda$ conforme a equação (2.20).

2.2.2 Estudo do modelo no limite de baixas densidades

Como discutido anteriormente, no limite de baixas densidades de energia, os quarks estão confinados em *clusters* e o sistema é composto de um gás de hádrons, que interagem fracamente. Sendo que os únicos responsáveis por essa interação são o princípio de exclusão de Pauli e a troca de quarks. O hamiltoniano para um *cluster* isolado pode ser escrito como

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + \sum_{i<j=1}^N \frac{1}{2} \kappa (\hat{r}_i - \hat{r}_j)^2, \quad (2.23)$$

onde N assume valor igual a dois para o modelo $Q\bar{Q}$ e valor igual a três para o modelo $3Q$. Assume-se também que não existe qualquer grau de liberdade interna, tais como spin e sabor. Nas duas próximas subseções, serão exploradas as características desse sistema em seu estado fundamental.

O limite de baixas densidades para mésons

Para um méson, a equação (2.23) é escrita como

$$H_{\mathcal{M}} = \frac{|\vec{P}_1|^2}{2m} + \frac{|\vec{P}_2|^2}{2m} + \frac{1}{2} \kappa_{\mathcal{M}} |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2. \quad (2.24)$$

Fazendo as mudanças de variáveis de \vec{r}_1 e \vec{r}_2 para coordenadas do centro de massa e coordenadas relativas,

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2); \quad \vec{r} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (2.25)$$

Utilizando essas novas variáveis, pode-se reescrever a equação (2.24) como

$$H_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2M} |\vec{P}_{CM}|^2 + \frac{1}{2\mu} |\vec{P}_{\vec{r}}|^2 + \frac{1}{2} \kappa_{\mathcal{M}} |\vec{r}|^2, \quad (2.26)$$

onde $M = 2m$ é a massa total do sistema e $\mu = m/2$ é a massa reduzida do sistema. A dinâmica do sistema se desenvolve toda na coordenada relativa, enquanto a coordenada do centro de massa se mantém fixa. Dessa forma, pode-se desprezar o grau de liberdade do centro de massa e reescrever o hamiltoniano como

$$H_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2\mu} |\vec{P}_{\vec{r}}|^2 + \frac{1}{2} \kappa_{\mathcal{M}} |\vec{r}|^2. \quad (2.27)$$

A equação (2.27) nada mais é do que o hamiltoniano de um oscilador harmônico, sendo a solução da função de onda no estado fundamental dada por

$$\Psi_{\mathcal{M}_0}(r) = \left(\frac{\mu\omega_{\mathcal{M}}}{\pi\hbar} \right)^{3/4} \exp\left(-\frac{\mu\omega_{\mathcal{M}} r^2}{2\hbar} \right). \quad (2.28)$$

E sua energia no estado fundamental sendo

$$E_0 = \frac{3}{2} \hbar\omega_{\mathcal{M}}, \quad (2.29)$$

onde a frequência do oscilador é $\omega_{\mathcal{M}} = \sqrt{\frac{\kappa_{\mathcal{M}}}{\mu}}$. A partir do termo exponencial da equação (2.28), é possível definir uma unidade natural do inverso da distância como sendo

$$\lambda_{\mathcal{M}_0} = \frac{\mu\omega_{\mathcal{M}}}{\hbar}. \quad (2.30)$$

Agora, a função de onda de um méson pode ser escrita em termos do parâmetro $\lambda_{\mathcal{M}_0}$ como

$$\Psi_{\mathcal{M}_0}(r) = \left(\frac{\lambda_{\mathcal{M}_0}}{\pi}\right)^{3/4} e^{(-\lambda_{\mathcal{M}_0} r^2/2)}. \quad (2.31)$$

O limite de baixas densidades para bárions

De forma semelhante ao que foi feito para mésons na subseção anterior, para bárions a equação (2.23) pode ser escrita como

$$H_{\mathcal{B}} = \frac{|\vec{P}_1|^2}{2m} + \frac{|\vec{P}_2|^2}{2m} + \frac{|\vec{P}_3|^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa_{\mathcal{B}}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2). \quad (2.32)$$

Fazendo as mudanças de variáveis,

$$\vec{\xi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2); \quad \vec{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3); \quad \vec{R}_{CM} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3), \quad (2.33)$$

o hamiltoniano dado pela equação (2.32) pode ser reescrito na forma,

$$H_{\mathcal{B}} = \frac{|\vec{P}_{CM}|^2}{6m} + \left(\frac{\vec{P}_1^2}{2m} + \frac{3}{2}\kappa_{\mathcal{B}}\vec{\xi}_1^2\right) + \left(\frac{\vec{P}_2^2}{2m} + \frac{3}{2}\kappa_{\mathcal{B}}\vec{\xi}_2^2\right). \quad (2.34)$$

Novamente, como foi feito na subseção anterior, pode-se descartar a coordenada de centro de massa, restando apenas o hamiltoniano de dois osciladores harmônicos desacoplados. A solução para a função de onda nesse caso é

$$\Psi_{\mathcal{B}_0}(\xi_1, \xi_2) = \left(\frac{m\omega_{\mathcal{B}}}{\pi\hbar}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\omega_{\mathcal{B}}}{2\hbar}(\xi_1^2 + \xi_2^2)\right). \quad (2.35)$$

Com a energia do estado fundamental dada por

$$E_0 = 3\omega_{\mathcal{B}}\hbar, \quad (2.36)$$

onde a frequência do oscilador é $\omega_{\mathcal{B}} = \sqrt{\frac{3\kappa_{\mathcal{B}}}{m}}$. A partir do termo no exponencial da equação (2.35), é possível definir uma unidade natural do inverso da distância como

$$\lambda_{\mathcal{B}_0} = \frac{m\omega_{\mathcal{B}}}{3\hbar}. \quad (2.37)$$

Agora, a função de onda de um bárion pode ser escrita em termos do parâmetro $\lambda_{\mathcal{B}_0}$ na forma

$$\Psi_{\mathcal{B}_0}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \left(\frac{3\lambda_{\mathcal{B}_0}}{\pi}\right)^{3/2} e^{(-3\lambda_{\mathcal{B}_0}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)/2)}. \quad (2.38)$$

Hádron	E/N	λ_0
méson	$3/2\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
bárion	$3/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$

Tabela 2.1: Energia por quark e parâmetro do oscilador para mésons e bárions isolados

De uma forma mais apropriada, por serem parâmetros, κ e m são escolhidos convenientemente como $\kappa = m = 1$. Nessas unidades os resultados obtidos para λ_0 e E_0 podem ser resumidos na tabela (2.1).

Comparando as funções de ondas obtidas nas equações (2.31) e (2.38) com a função de onda variacional, é possível supor que ao se escolher um valor para $\lambda = \lambda_{M_0}$ está se descrevendo apropriadamente mésons no limite de baixas densidades. Enquanto, quando se escolhe $\lambda = \lambda_{B_0}$ está se descrevendo apropriadamente bárions nesse mesmo limite.

2.2.3 A função de onda do gás de Fermi

Nesta seção, a função de onda é abordada em sua versão original, conforme se pode encontrar em trabalhos anteriores [9, 13, 16, 17, 18], por exemplo. No capítulo seguinte, serão tratadas modificações, assim como as suas razões e consequências na função de onda do gás de Fermi, que motivaram este trabalho.

Para se descrever o comportamento dos quarks livres, pode-se escrever a função de onda de um gás de Fermi sob a forma de determinantes de Slater. Para o modelo $Q\bar{Q}$ (para mésons) a função de onda é dada pelo produto entre o determinante dos quarks e o determinante dos antiquarks. Já no modelo 3Q (para bárions), o produto é dado pelos determinantes de quarks azuis, quarks verdes e quarks vermelhos. Cada determinante é escrito como [9]

$$\Phi_{FG} = \begin{vmatrix} \phi_{n_1}(X_1) & \phi_{n_1}(X_2) & \cdots & \phi_{n_1}(X_N) \\ \phi_{n_2}(X_1) & \phi_{n_2}(X_2) & \cdots & \phi_{n_2}(X_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n_N}(X_1) & \phi_{n_N}(X_2) & \cdots & \phi_{n_N}(X_N) \end{vmatrix}, \quad (2.39)$$

onde $\phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{X})$ representa o autoestado de uma partícula livre em uma caixa tridimensional com números quânticos \mathbf{n} . A função de onda Φ_{FG} caracteriza um sistema em que os férmions livres (quarks) não têm qualquer correlação, a não ser aquelas geradas pelo princípio de exclusão de Pauli [17]. Outra característica da função de onda do gás de Fermi, é que ela é totalmente antissimétrica sob a troca de quarks idênticos, o que é assegurado pela sua construção através de determinantes de Slater [9]. Para se determinar a função de onda de um único quark, considera-se uma partícula com massa m confinada em uma caixa cúbica tridimensional de lado L com condições de contorno antiperiódicas. Essas considerações implicam que a energia de cada quark isolado é caracterizado por três números quânticos inteiros $\mathbf{n} \equiv (n_x, n_y, n_z)$,

$$E_{\mathbf{n}} = \frac{\pi^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (n_i = 1, 3, 5, \dots). \quad (2.40)$$

n_x	n_y	n_z	Energia	número de ocupação
1	1	1	3	[8]
1	1	3	11	[16]
1	3	1	11	[24]
3	1	1	11	[32]
3	3	1	19	[40]
3	1	3	19	[48]
1	3	3	19	[56]
3	3	3	27	[64]
1	1	5	27	[72]
1	5	1	27	[80]
5	1	1	27	[88]

Tabela 2.2: Estrutura em camadas de um determinante de Slater de um gás de Fermi para férmions de massa m ocupando uma caixa tridimensional cúbica de lado L para o modelo original. Todas energias são medidas em unidades de $\pi^2/2mL^2$.

Cada um dos valores de energia é, ao menos, oito vezes degenerado, pois são consideradas as soluções pares (funções seno) e ímpares (funções cosseno) da equação de Schrödinger em cada uma das três dimensões espaciais. Dessa forma, para um dado conjunto de números quânticos n_x , n_y e n_z , pode-se escrever oito tipos de soluções diferentes. Um estado base típico é da forma³

$$\phi_{n_x, n_y, n_z}^{P, I, P} = \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right). \quad (2.41)$$

O sistema apresenta uma estrutura em camadas de energia, onde cada camada deve conter, ao menos, oito quarks e oito antiquarks quando se tratar de um sistema $Q\bar{Q}$ e oito quarks de cada cor quando se tratar de um sistema $3Q$. A medida que as camadas são preenchidas, a energia dos quarks livres vai aumentando, que é uma consequência direta do princípio de exclusão de Pauli. Para se ilustrar tal efeito, ao se tomar um determinante de Slater do gás de Fermi e expressando a energia em unidades de $(\pi^2/2mL^2)$, a primeira camada de quarks terá energia igual a três ($n_x = n_y = n_z = 1$) e abrigará oito partículas. Na camada seguinte, ($n_x = n_y = 1, n_z = 3$ e permutações) existirão vinte e quatro partículas e assim por diante, conforme se pode ver na Tabela (2.2) [9].

2.2.4 Estudo do modelo no limite de altas densidades

No limite de altas densidades, como já discutido anteriormente, o modelo *String-Flip* estabelece que o sistema se comporta como um gás de Fermi de quarks livres [9]. Por esse motivo, uma breve discussão a respeito do gás de Fermi é feito no apêndice A.

No limite de altas densidades, a função de onda variacional (2.14) também tem valor exato. Nesse limite, o parâmetro variacional λ assume valor igual a zero e a equação

³A letra P sobrescrita na equação (2.41) expressa uma função par, e a letra I expressa a presença de uma função ímpar.

(2.14) deve ser reescrita como

$$\Psi(X) = \Phi_{FG}, \quad (2.42)$$

onde Φ_{FG} é a função de onda de um gás de Fermi. Nesse limite, onde o sistema se comporta como um gás de quarks livres, não existe a presença de um potencial V , como acontece em outras regiões, e não existe qualquer interação entre os quarks livres do sistema, a não ser aquela imposta pelo princípio da exclusão de Pauli.

No limite de altas densidades, a única contribuição para a energia do sistema é a energia cinética dos quarks livres do gás de Fermi. De forma que a energia do sistema no estado fundamental é a própria energia do gás de Fermi no estado fundamental, que é dado por ⁴

$$\frac{E_0}{N} = \frac{3}{5}\varepsilon_F, \quad (2.43)$$

onde ε_F é a energia de Fermi do sistema. Cabe chamar a atenção para o fato de que a energia do sistema é proporcional a energia de Fermi, que por sua vez, está relacionada com as degenerescências do sistema por ⁵

$$\varepsilon_F = \frac{1}{2m} \left(\frac{6\pi^2 n}{g} \right)^{2/3}. \quad (2.44)$$

Essas relações, como será discutido no próximo capítulo, trazem alterações para o comportamento do modelo no limite de altas densidades com relação aos valores de energia do sistema.

2.3 Aplicação do modelo *String-Flip* para o cálculo da probabilidade de se formar hádrons

Após a discussão realizada a respeito do modelo *String-Flip* ao longo deste capítulo, esta seção é dedicada a apresentar resultados obtidos com a aplicação do modelo. Mais precisamente, o objetivo desta seção é obter as probabilidades de se formarem bárions e mésons através do estudo da recombinação térmica de quarks em função da densidade de energia em colisões de íons pesados ultrarrelativísticos, utilizando como ferramenta o modelo *String-Flip*. Nesta seção, é introduzido o formalismo para incorporar a probabilidade de se formar *clusters* de dois ou três quarks como função da densidade e da temperatura na descrição do espectro térmico de partículas.

2.3.1 O espectro térmico

Os aspectos observados em colisões de átomos de ouro (Au+Au) em altas energias no *Relativistic Heavy Ion Collider* (RHIC) [19] têm sido interpretados com o surgimento da recombinação térmica como um mecanismo importante para o processo de produção de hádrons. Nessas colisões, observa-se que a razão entre prótons e mésons-pi em função do momento transversal p_t cresce com a energia de colisão [20, 21]. Contudo, o mesmo

⁴Conforme discutido no apêndice A.

⁵Conforme discutido no apêndice A.

não se observa em colisões entre prótons (p+p), onde essa razão permanece praticamente constante [22]. Essa estabilidade pode ser explicada pelo fato da produção de hádrons é dominada pela fragmentação de pártons e a razão entre prótons e mésons-pi simplesmente reflete a razão das funções de fragmentação. Por outro lado, o comportamento apresentado pela razão entre prótons e mésons-pi nas colisões de íons pesados pode ser compreendida como sendo devida, parcialmente, ao aumento do fluxo radial com a energia de colisão [23, 24]. Contudo, um outro aspecto que necessita ser compreendido é como a razão próton-píon é influenciada pela abundância relativa de prótons e píons, quando essas partículas são produzidas nas colisões de íons pesados em altas energias.

O cenário de recombinação explica a formação de hádrons com p_t baixo ou intermediário a partir do confinamento de quarks em um espaço densamente populado [25, 26]. Porém, esse cenário leva em consideração as correlações entre quarks no espaço de momento sem descrever as correlações correspondentes no espaço de posição. Apesar de se assumir implicitamente que a hadronização ocorra a uma temperatura constante, ela não é um processo instantâneo, mas ocorre em um intervalo de temperatura e densidade. Por exemplo, cálculos da *lattice* QCD apresentam que a transição de fase do estado de quarks livres para o material hadrônico não é imediato. Nesse contexto, existem duas grandes questões a serem respondidas: Em até que ponto a probabilidade de se recombinar quarks em bárions e mésons depende da densidade e temperatura e se esta probabilidade difere para os dois tipos de hádrons, ou seja, se as populações relativas de bárions e mésons se devem não apenas a fatores de degenerescência, mas também, a propriedades de formação de *clusters* em um cenário onde a densidade varia. O problema em questão é objeto de estudo de modelos como o *String-Flip*, que reproduzem um ambiente onde se tem *clusters* em baixas densidades e quarks desconfiados em altas densidades.

Em geral, a distribuição de momento transversal invariante de um dado hádron pode ser escrita como uma integral sobre o “freeze-out”, uma hipersuperfície espaço-temporal Σ da densidade de partículas do espaço de fase relativisticamente invariante $F(x, P)$,

$$E \frac{dN}{d^3P} = g \int_{\Sigma_f} d\Sigma \frac{P \cdot u(x)}{(2\pi)^3} F(x, P), \quad (2.45)$$

onde P é o momento do hádron, $u(x)$ é o quadri-vetor orientado normal a Σ e g é o fator de degenerescência do hádron, que leva em consideração os graus de liberdade de spin. No modelo de recombinação, a densidade de partículas do espaço de fase é tomada como a convolução do produto das funções de Wigner para cada quark que constitui o hádron em uma dada temperatura e a função de onda do quark constituinte dentro do hádron [18]. Por exemplo, a distribuição do espaço de fase do méson é dada por

$$F^M(x, P) = \sum_{a,b} \int_0^1 |\Psi_{ab}^M(z)|^2 w_a(\vec{x}, z\vec{P}^+) \times \bar{w}_b[\vec{x}, (1-z)\vec{P}^+], \quad (2.46)$$

onde P^+ é o momento do cone de luz, $\Psi_{ab}^M(z)$ é a função de onda do méson e a, b representam os números quânticos (cor, sabor e spin) do quark e do antiquark do méson, respectivamente. Quando cada função de Wigner do quark que constitui o hádron é aproximada como uma distribuição de Boltzmann e a conservação do momento é usada, o produto das funções de Wigner é dado por um fator semelhante ao fator de Boltzmann

que depende somente do momento do cone de luz do hádron [26]. Ainda tomando com exemplo os mésons,

$$w_a(\vec{x}, zP^+)w_b[\vec{x}, (1-z)P^+] \sim e^{-zP^+/T}e^{-(1-z)P^+/T} = e^{-P^+/T}. \quad (2.47)$$

Nesta aproximação, o produto das distribuições de pártons resulta de forma independente da fração do momento de párton e a integração da função de onda sobre z é encontrada através de normalização.

Para se obter um cenário de recombinação mais realístico, pode-se assumir que a ocupação do espaço de fase seja fatorizada em um produto de termos contendo o número de ocupação térmico, incluindo os efeitos da velocidade de expansão do plasma, e outro, contendo a densidade de energia do sistema ϵ conduzida pela probabilidade $\mathcal{P}(\epsilon)$ da coalescência dos pártons em um determinado hádron [18]. De forma que a equação (2.46) pode ser colocada na forma

$$F(x, P) = e^{-P \cdot v(x)/T} \mathcal{P}(\epsilon), \quad (2.48)$$

onde $v(x)$ é a velocidade de expansão do plasma.

Agora o problema se concentra em obter a probabilidade $\mathcal{P}(\epsilon)$, para tanto é necessário se obter informações a respeito da probabilidade de quarks livres formarem hádrons através de interações entre eles. O modelo *String-Flip* é capaz de fornecer essas informações, como será feito explicitamente a seguir.

2.3.2 Obtenção da probabilidade de se formar bárions e mésons através do modelo *String-Flip*

Os resultados para mésons, apresentados nesta seção, foram obtidos através de simulações com um sistema contendo um total de 300 partículas: 150 quarks e 150 antiquarks divididos em dois sabores distintos, sendo 75 quarks (antiquarks) u (\bar{u}) divididos igualmente nas suas três cargas de cor (anticor) e 75 quarks (antiquarks) d (\bar{d}) ou s (\bar{s}) ou c (\bar{c}), também divididos nas três cargas de cor (anticor). Já para bárions, os resultados foram obtidos por um sistema composto por 150 partículas: 75 quarks u divididos igualmente nas três cores possíveis e 75 quarks d (ou s ou c), também divididos nas três cargas de cor.

Para se obter o parâmetro variacional λ em função da densidade, o primeiro passo é selecionar um valor para a densidade de partículas ρ dentro da caixa tridimensional. Cabe observar que o número de partículas é mantido fixo, o que se faz ao alterar o parâmetro ρ é se alterar as dimensões da caixa. Então, após se definir o parâmetro ρ , a energia do sistema em função do parâmetro variacional λ é obtido, o mínimo da curva de energia é o valor de λ ótimo. Esse procedimento é repetido para um conjunto de valores diferentes de densidades na região que se interessa estudar. Na figura (2.3) é demonstrado um exemplo do comportamento da energia por partícula em função do parâmetro variacional, nessa figura o valor da densidade ρ é de $0.3\rho_0$ para um sistema de bárions leves (formados por quarks *up* e *down*). Na figura, a linha de cor vermelha é o ajuste dos pontos obtidos e o mínimo indica o valor ótimo do parâmetro variacional.

As simulações foram todas feitas adotando unidades arbitrárias que fossem mais convenientes, de forma que foi necessário adotar fatores de conversão para se obter algum

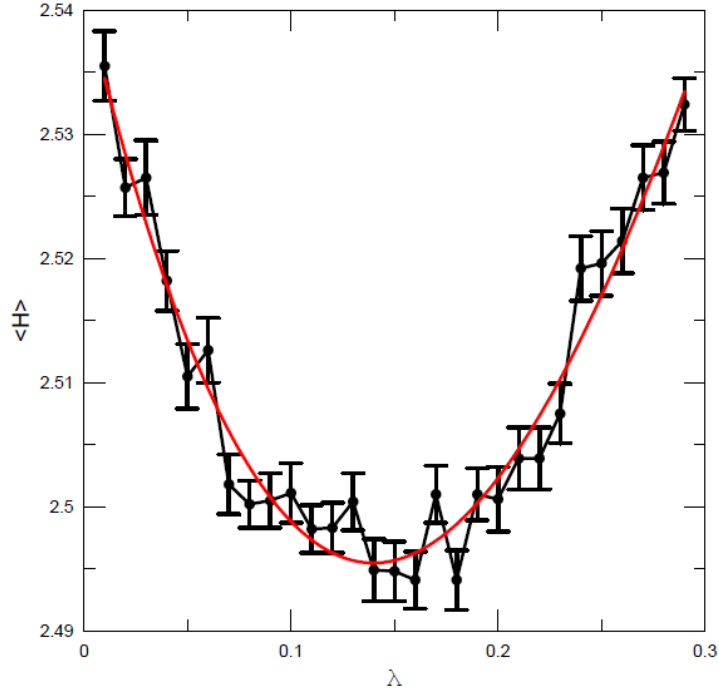


Figura 2.3: Energia por partícula em função do parâmetro variacional para uma densidade $\rho = 0,3\rho_0$ em um sistema de bárions leves. A linha vermelha representa o ajuste dos dados.

significado físico para os resultados. No apêndice B, encontram-se todos os fatores de conversão utilizados nesse trabalho e a forma como eles foram obtidos.

Nesse trabalho realizou-se simulações com bárions e mésons leves (contendo apenas quarks *up* e *down*), bárions e mésons contendo quark *strange* e bárions e mésons contendo quark *charm*. A única alteração que se foi feita nas simulações, no que se refere aos sabores dos quarks, foi no valor da massa dos quarks. Quarks *up* e *down* foram adotados com massa $m = 1$, quarks *strange* com massa $m = 1,6$ e quarks *charm* com $m = 5$.

A figura (2.4) descreve o comportamento do parâmetro variacional λ em função da densidade de energia ε para bárions leves. A constante λ_0 é o valor do parâmetro variacional no limite de baixas densidades, que como discutido anteriormente, vale $\lambda_{B_0} = 3^{-1/2}$ para bárions. O objetivo de se usar a razão entre λ e λ_0 é se obter uma normalização no limite de baixas densidades em torno de 1. Por outro lado, no limite de altas energias, o parâmetro variacional se aproxima de zero, onde se tem apenas o gás de Fermi de quarks livres. Contudo, esse valor nunca atinge zero, pois ainda que muito fracamente, existe interação entre os quarks gerada pelo princípio de exclusão de Pauli. Pela figura (2.4), pode-se observar que em torno de $0,25\text{GeV}/fm^3$ ocorre uma queda abrupta no valor do parâmetro variacional, região onde ocorre a transição de fase, para em seguida o sistema evoluir como um gás de quarks livres, onde se observa apenas uma suave queda no parâmetro variacional.

A figura (2.5) descreve o comportamento do parâmetro variacional λ em função da densidade de energia no caso dos mésons leves. Da mesma maneira que foi feito no caso

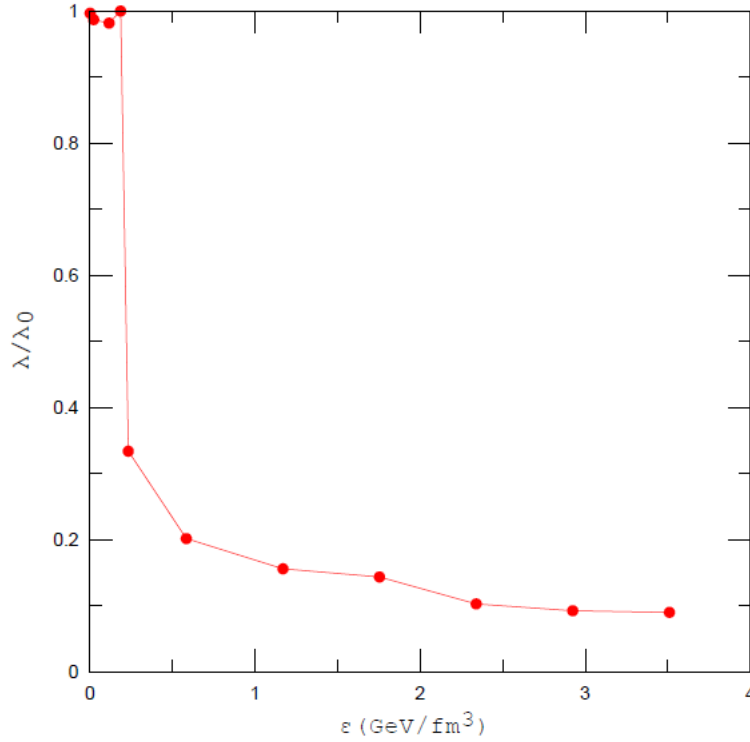


Figura 2.4: Parâmetro variacional normalizado em função da densidade de energia para um sistema de bárions leves.

dos bárions, utilizou-se um parâmetro λ_0 , que para mésons vale $2^{-1/2}$, para se normalizar o valor do parâmetro variacional λ de maneira a se obter o seu valor próximo de 1 no limite de baixas densidades. Ao contrário do que se observou para bárions, para mésons a transição de fase ocorre de uma maneira suave em torno de $0,05\text{GeV}/\text{fm}^3$. Contudo, no limite de altas densidades o comportamento do caso mesônico é similar ao caso bariônico, onde ocorre uma suave queda do parâmetro variacional.

Dentro das aproximações adotadas, em que a única informação que indica se um *cluster* foi formado em uma determinada densidade de energia é a distância média entre partículas, pode-se definir a probabilidade $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(\epsilon)$ de se formar um méson em uma determinada densidade de energia como o valor do parâmetro variacional λ normalizado com o parâmetro no limite de baixas densidades, $\lambda_{0\mathcal{M}}$, e o parâmetro κ , para se respeitar a dimensão de λ imposta pela função de onda do sistema. De forma que a probabilidade de se formar um méson pode ser escrita como

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(\epsilon) = \lambda/\lambda_{0\mathcal{M}}. \quad (2.49)$$

De maneira semelhante, nesse trabalho adotou-se que a probabilidade $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(\epsilon)$ de se formar um bárion é

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(\epsilon) = \lambda/\lambda_{0\mathcal{B}}. \quad (2.50)$$

As probabilidades $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ e $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ que são procuradas para se resolver a equação (2.48) são plotadas na figura (2.6), no caso de bárions (círculos) a probabilidade de se formar *clusters*

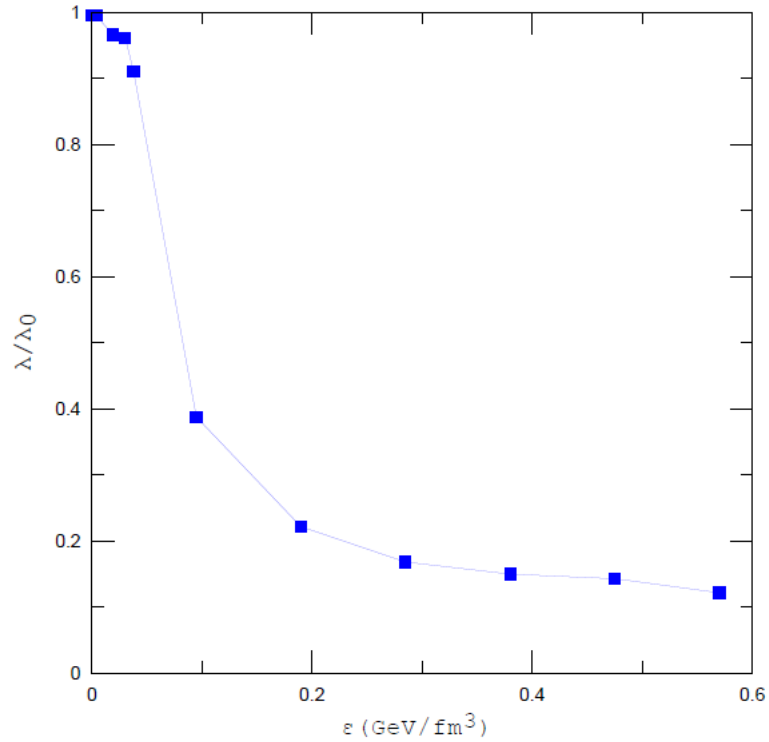


Figura 2.5: Parâmetro variacional normalizado em função da densidade de energia para um sistema de mésons leves.

é maior para uma densidade de energia de aproximadamente $0,25\text{GeV}/\text{fm}^3$, a mesma onde se inicia a transição de fase. Em seguida, ocorre uma queda abrupta na probabilidade de se formar hádrons e depois diminui suavemente. A probabilidade de se formar mésons é maior para densidades de energia menores. Nesse sistema, a probabilidade de se formar *clusters* diminui de forma mais suave a medida que se aumenta a densidade de energia. Essas características das curvas indicam que existe uma diferença na produção de bárions e mésons com a densidade de energia.

De modo semelhante ao que foi feito para se obter o parâmetro variacional em função da densidade de energia no caso de hádrons leves, foram feitas simulações para hádrons mais pesados (contendo quarks *strange* e *charm*). Na figura (2.7) são comparadas as probabilidades em função da densidade de energia para o caso onde se tem apenas quarks leves (círculos), o caso onde existe quarks *strange* (triângulos) e o caso onde existem quarks *charm* (quadrados). Como se pode notar, as curvas têm um comportamento semelhante nos três casos. Após se alcançar uma probabilidade máxima de se formar um *cluster*, ocorre uma queda abrupta na probabilidade. Esses resultados indicam que a transição de fase ocorre em densidades de energias diferente para os vários tipos de bárions.

A figura (2.8) compara a probabilidade de se formar mésons em função da densidade de energia para o caso onde se formam mésons leves (círculos), para o caso onde se formam mésons contendo quarks *strange* (triângulos) e para o caso onde se formam mésons com quark *charm* (quadrados). Novamente é possível notar semelhanças no comporta-

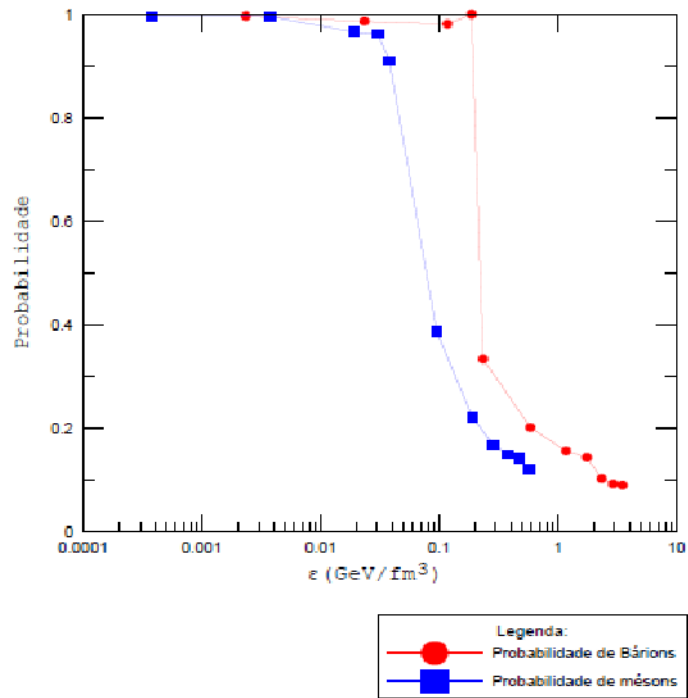


Figura 2.6: Probabilidades de se formarem bárions e mésons em função da densidade de energia.

mento das três curvas e que a transição de fase ocorre em densidades de energia maiores para sistemas que têm quarks de maior massa.

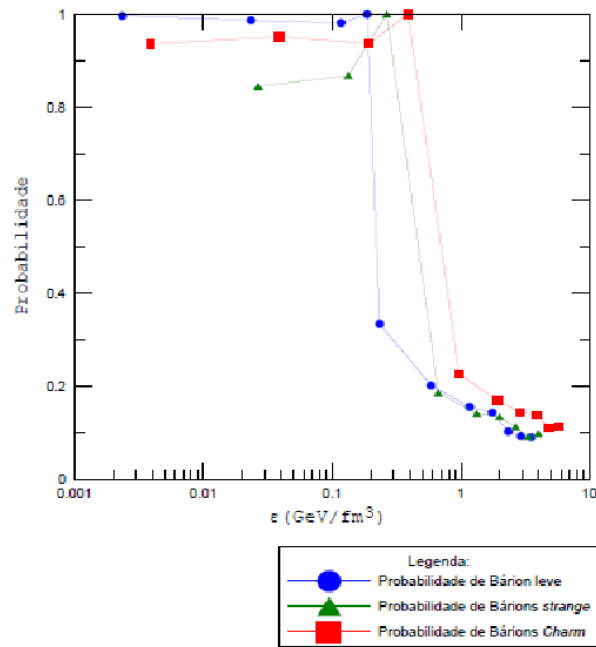


Figura 2.7: Probabilidades de se formarem bárions leves, bárions *strange* e bárions *charm* em função da densidade de energia.

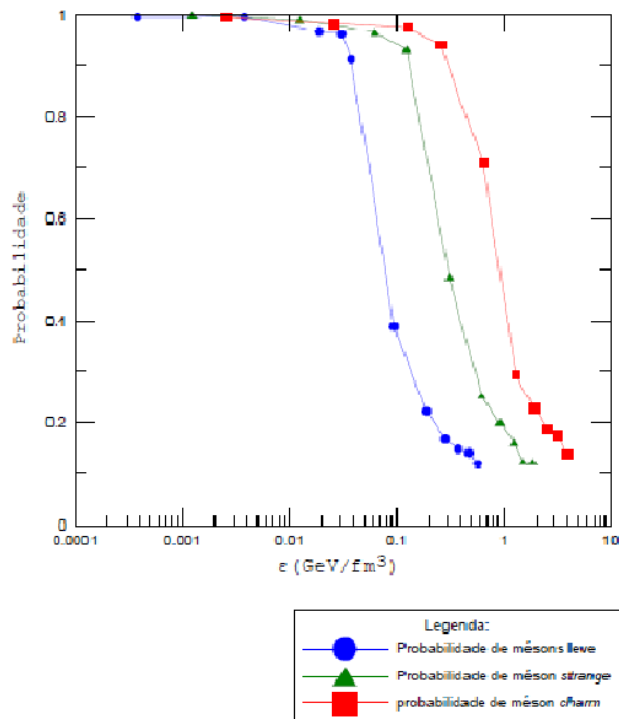


Figura 2.8: Probabilidades de se formarem mésons leves, mésons *strange* e mésons *charm* em função da densidade de energia.

Capítulo 3

Modificações no modelo *String-Flip* e resultados

Neste capítulo, as modificações feitas no modelo são discutidas, assim como as motivações para estas modificações e suas consequências. Ainda os resultados obtidos com o modelo em sua nova versão são apresentados e comparados com a versão original do modelo *String-Flip*.

A necessidade de se alterar o modelo reside no fato de que os números quânticos n_i da equação (2.40) podem também assumir valores pares, uma vez que a antissimetria da função de onda do gás de Fermi foi garantida ao ser escrita na forma de um determinante de Slater. Como será apresentado na seção 3.1, soluções com números quânticos n_i ímpares devem assumir soluções do tipo cosseno. Enquanto, números quânticos n_i pares devem assumir soluções do tipo seno. Essa imposição traz uma modificação na equação (2.41), já que para a solução ser da forma cosseno (seno) o número quântico deve ser um inteiro ímpar (par), que conseqüentemente traz modificações na degenerescência dos níveis de energia do sistema, onde esses não têm mais como regra serem ao menos oito vezes degenerados.

3.1 Solução da função de onda para uma partícula livre em um poço de potencial infinito tridimensional

Inicialmente será abordado o problema em uma dimensão, para que depois a solução seja generalizada para três dimensões, que é o caso de interesse. A discussão que se desenvolve nesta seção é baseada nas referências [27, 28].

Neste problema se considera um potencial com as características

$$V(x) = 0 \quad \text{para } |x| < \frac{L}{2}, \quad (3.1)$$

$$V(x) = \infty \quad \text{para } |x| \geq \frac{L}{2}. \quad (3.2)$$

A equação de Schrödinger para o problema pode ser escrita como

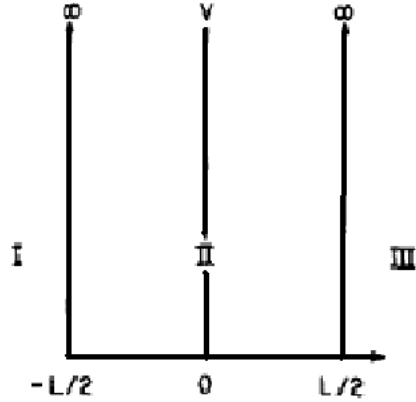


Figura 3.1: Poço de potencial dividido em três regiões.

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(V - E)\Psi = 0. \quad (3.3)$$

Pelas características do problema, pode-se dividir o espaço em três regiões, conforme a figura (3.1). Agora, existem três soluções, uma para cada região, que podem ser denominadas como Ψ_I , Ψ_{II} e Ψ_{III} para as regiões *I*, *II* e *III* respectivamente.

Considerando primeiro a região *I*, onde $V = \infty$, tem-se uma solução da equação (3.3) como

$$\Psi = Ae^{-\kappa x} + Be^{\kappa x} \quad \text{com, } \kappa = \sqrt{\frac{2m(V - E)}{\hbar^2}}. \quad (3.4)$$

Contudo para essa região, deve-se considerar $B = 0$ para se evitar que $\Psi \rightarrow \infty$, quando $x \rightarrow \infty$. Por outro lado, se $V \rightarrow \infty$, que é o caso na região *I*, $\kappa \rightarrow \infty$. Então, a solução nessa região deve ser

$$\Psi_I = 0. \quad (3.5)$$

De forma similar, a região *III* tem a mesma solução,

$$\Psi_{III} = 0. \quad (3.6)$$

Na região *II*, onde $V = 0$, a equação (3.3) pode ser reescrita na forma

$$\frac{d^2\Psi_{II}}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\Psi_{II} = 0. \quad (3.7)$$

Essa é a equação de onda para uma partícula livre, cuja solução é

$$\Psi_{II} = Ae^{-i\kappa'x} + Be^{i\kappa'x}, \quad \text{com } \kappa' = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}. \quad (3.8)$$

Requerendo que Ψ_{II} seja continua nas bordas, impõe-se as condições de contorno

$$\Psi_I(-L/2) = \Psi_{II}(-L/2) = 0, \quad (3.9)$$

$$\Psi_{III}(L/2) = \Psi_{II}(L/2) = 0. \quad (3.10)$$

Ao se aplicar as restrições acima na equação (3.8), obtém-se

$$Ae^{-i\kappa'L/2} + Be^{i\kappa'L/2} = 0, \quad (3.11)$$

$$Ae^{i\kappa'L/2} + Be^{-i\kappa'L/2} = 0, \quad (3.12)$$

onde essas soluções podem ser escritas em uma forma matricial,

$$\begin{vmatrix} e^{-i\kappa'L/2} & e^{i\kappa'L/2} \\ e^{i\kappa'L/2} & e^{-i\kappa'L/2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (3.13)$$

Para essas equações terem soluções não triviais, o determinante deve ser nulo,

$$e^{-i\kappa'L/2}e^{i\kappa'L/2} - e^{-i\kappa'L/2}e^{i\kappa'L/2} = e^{-i\kappa'L} - e^{i\kappa'L} = \sin(\kappa'L) = 0, \quad (3.14)$$

implicando que

$$\kappa' = \frac{n\pi}{L}, \quad \text{com } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.15)$$

Agora, para se obter as correspondentes autofunções, toma-se as equações (3.11), ou (3.12). Uma vez que apenas uma delas é independente, não é necessário estudar as duas. Multiplicando ambos os lados da equação (3.11) por $e^{i\pi/2}$, obtém-se

$$A = -Be^{in\pi} = -B[\cos(\pi) - i\sin(\pi)]^n = -(-1)^n B, \quad (3.16)$$

esse resultado propõe que existem duas famílias de soluções. Uma para quando n é ímpar ($A = B$) e outra para quando n é par ($A = -B$). A partir das equações (3.11) e (3.15), é possível se obter essas famílias:

1. Para n ímpar,

$$\Psi_{II} = Ae^{i\kappa x} + Ae^{-i\kappa x} = 2A \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = A' \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (3.17)$$

Normalizando a função obtém-se o valor de A' ,

$$\int_{-L/2}^{L/2} A'^2 \cos^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 1$$

$$A' = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2}. \quad (3.18)$$

2. Para n par:

$$\Psi_{II} = Ae^{i\kappa x} - Ae^{-i\kappa x} = 2Ai \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = A'' \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (3.19)$$

Normalizando a função obtém-se o mesmo valor para A'' ,

$$A'' = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2}. \quad (3.20)$$

Nota-se que para quando $n = 0$ a solução é muito pouco interessante, uma vez que $\Psi_0(x) \equiv 0$. Além disso, para n ímpar (par) tem-se que $\Psi_n = \Psi_{-n}$ ($\Psi_n = -\Psi_{-n}$), ou seja, as autofunções diferem apenas por um fator e, dessa forma, não são consideradas distintas. Isso permite que as soluções sejam restritas para n , assumindo valores inteiros positivos diferentes de zero. Finalmente as soluções podem ser escritas como

$$\Psi_n = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (3.21)$$

$$\Psi_n = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (3.22)$$

Comparando as equações (3.8) e (3.15), é possível se obter os níveis de energia que a partícula pode ocupar,

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2, \quad \text{com, } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.23)$$

Após se obter a solução para uma dimensão, é fácil generalizá-la para três dimensões. Notando que o hamiltoniano da partícula é dado por

$$H = \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + V(x) + V(y) + V(z), \quad (3.24)$$

onde $V(y)$ e $V(z)$ assumem a mesma forma que $V(x)$ nas equações (3.1) e (3.2). Esse hamiltoniano pode ser escrito como

$$H = H_x + H_y + H_z, \quad (3.25)$$

onde

$$H_u = \frac{1}{2m} P_u^2 + V(u).$$

Segundo a referência [27], as autoenergias do sistema podem ser escritas como

$$E_{n_x, n_y, n_z} = E_{n_x} + E_{n_y} + E_{n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2), \quad (3.26)$$

onde os números quânticos n_x , n_y e n_z podem assumir qualquer valor inteiro positivo diferente de zero. Além disso, as correspondentes autofunções do sistema podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\Psi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) &= \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z) \\ &= \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} f_x\left(\frac{n_x\pi}{L}\right) f_y\left(\frac{n_y\pi}{L}\right) f_z\left(\frac{n_z\pi}{L}\right),\end{aligned}\quad (3.27)$$

onde as funções f 's dependem dos números quânticos n 's da seguinte forma,

$$f_u = \cos \text{ para } n_u \text{ ímpar}, \quad (3.28)$$

$$f_u = \sin \text{ para } n_u \text{ par}. \quad (3.29)$$

3.2 Correção na função de onda do gás de Fermi

Como foi discutido na seção anterior, a solução da equação de Schrödinger para uma partícula presa em uma caixa tridimensional de potencial infinito pode assumir soluções pares ou ímpares, de acordo com os números quânticos n_x , n_y e n_z . Esse resultado implica em uma modificação nos níveis de energia acessíveis ao gás de quarks livres na caixa, já que os autoestados de energia com números quânticos pares também são permitidos, e não apenas os autoestados de energia com números quânticos ímpares, como foi considerado inicialmente.

Deve-se notar, que a antissimetria da função de onda do sistema é garantida pelo fato dessa ser escrita em forma de um produto de determinantes de Slater ⁶, não impondo, para tanto, a restrição sobre os números quânticos, de que esses devem ser apenas números inteiros ímpares. Dessa maneira, tanto as funções de paridade positiva (funções pares) quanto as funções de paridade negativa (funções ímpares) podem ser soluções para o problema. Assim, a equação (2.40), que determina os valores dos níveis de energia do sistema, pode ser reescrita como

$$E_{\mathbf{n}} = \frac{\pi^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (n_i = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.30)$$

Essa alteração implica em que com uma maior variedade de números quânticos n_i , também existe uma maior variedade de níveis de energia a serem ocupados pelas partículas do gás de Fermi. Com esta nova configuração, apesar do valor da energia no primeiro nível ser o mesmo da configuração original, a diferença de energia entre os níveis tendem a serem menores. Por exemplo, enquanto no modelo original o segundo nível apresenta uma energia $E_{\mathbf{n}} = 11$ (em unidades de $\pi^2/2mL^2$), no modelo modificado o segundo nível assume energia $E_{\mathbf{n}} = 6$ (também em unidades de $\pi^2/2mL^2$).

Pela discussão realizada na seção anterior, as equações (3.27), (3.28) e (3.29) impõem que quando se assume um número quântico n_i ímpar, necessariamente, a função de onda deve ser uma função cosseno. Enquanto, ao se assumir um número quântico n_i par,

⁶Funções de onda antissimétricas podem ser escritas mais convenientemente na forma de um determinante de Slater. Pode-se notar que quando a função de onda é escrita nessa forma, se dois estados são idênticos, a função de onda é nula, uma vez que o determinante terá duas colunas idênticas. Este resultado está em pleno acordo com o princípio de exclusão de Pauli: O mesmo estado quântico não pode ser simultaneamente ocupado por mais de um férmion.

n_x	n_y	n_z	Energia	número de ocupação
1	1	1	3	[1]
1	1	2	6	[2]
1	2	1	6	[3]
2	1	1	6	[4]
2	2	1	9	[5]
2	1	2	9	[6]
1	2	2	9	[7]
1	1	3	11	[8]
1	3	1	11	[9]
3	1	1	11	[10]
2	2	2	12	[11]
1	2	3	14	[12]
1	3	2	14	[13]
2	1	3	14	[14]
2	3	1	14	[15]
3	1	2	14	[16]
3	2	1	14	[17]
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	1	5	27	[45]
1	5	1	27	[46]
5	1	1	27	[47]
3	3	3	27	[48]

Tabela 3.1: Estrutura em camadas de um determinante de Slater de um gás de Fermi para férmions de massa m ocupando uma caixa tridimensional cúbica de lado L para o modelo modificado. Todas energias são medidas em unidades de $\pi^2/2mL^2$.

a função de onda deve ser, necessariamente, uma função seno. Sob essas condições, soluções como por exemplo aquela apresentada na equação (2.41) do capítulo anterior,

$$\phi_{n_x, n_y, n_z}^{P,I,P} = \sin\left(\frac{n_x\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n_y\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{n_z\pi}{L}z\right),$$

só poderia assumir essa forma se n_x e n_z fossem qualquer número inteiro par e n_y fosse qualquer número inteiro ímpar.

Com essa imposição sob as soluções da função de onda da partícula em uma caixa, a degenerescências do sistema é modificada. No modelo original, cada nível de energia era ao menos oito vezes degenerado [9], como já discutido anteriormente. Essas degenerescências eram possíveis porque eram aceitas soluções pares e ímpares nas três dimensões da caixa. Contudo, quando se admite apenas a solução par ou ímpar, conforme o número quântico n_i , as degenerescências dos níveis de energia ficam bastante reduzidas. Porém, para um mesmo número de partículas existe uma variedade maior de níveis de energia para serem ocupados. Observando a tabela (3.1), pode-se notar que os níveis de energia determinados por números quânticos iguais só podem ser ocupados

por uma única partícula, como ocorre para o nível de energia $E_n = 3$, que tem números quânticos iguais a $n_x = n_y = n_z = 1$. Quando se tem dois números quânticos iguais e um diferente, independentemente de serem pares ou ímpares, os níveis de energia podem ser ocupados por três partículas, como ocorre para o estado com conjunto de números quânticos $n_x = n_y = 1$ e $n_z = 2$ e suas permutações ($n_x = n_y = 1$ e $n_z = 2$ e $n_x = n_y = 1$ e $n_z = 2$), que compõe o nível de energia $E_n = 6$. Nos casos onde se tem três números quânticos diferentes, o nível de energia correspondente é seis vezes degenerado, como acontece para o nível de energia $E_n = 14$, com números quânticos $n_x = 1$, $n_y = 2$ e $n_z = 3$ e suas permutações. Ainda existem níveis de energia que a degenerescência é influenciada por dois conjunto de números quânticos distintos, como acontece com o nível de energia de valor $E_n = 27$, que tem degenerescência igual a quatro, devido aos números quânticos $n_x = n_y = 1$ e $n_z = 5$ e suas permutações e ao conjunto de números quânticos $n_x = n_y = n_z = 3$.

Comparando a tabela (3.1) com a tabela (2.2) do capítulo anterior, onde já no primeiro nível de energia havia oito partículas e no segundo, vinte e quatro partículas, pode-se perceber que para um sistema no estado fundamental de energia, no modelo modificado ele atingirá níveis de energia muito mais altos que no modelo original. Como será discutido mais a frente, essa mudança na degenerescência dos níveis de energia trará alterações no comportamento do sistema no limite de altas densidades.

3.2.1 Alterações operacionais

Como foi apresentado, as alterações feitas no modelo consistiram basicamente em mudar a forma de como se constrói a função de onda do gás de Fermi. Inicialmente, para cada conjunto de números quânticos n_x , n_y e n_z era possível se construir oito soluções distintas, onde a maneira de se construir essas soluções no programa era como está ilustrado na figura (3.2).

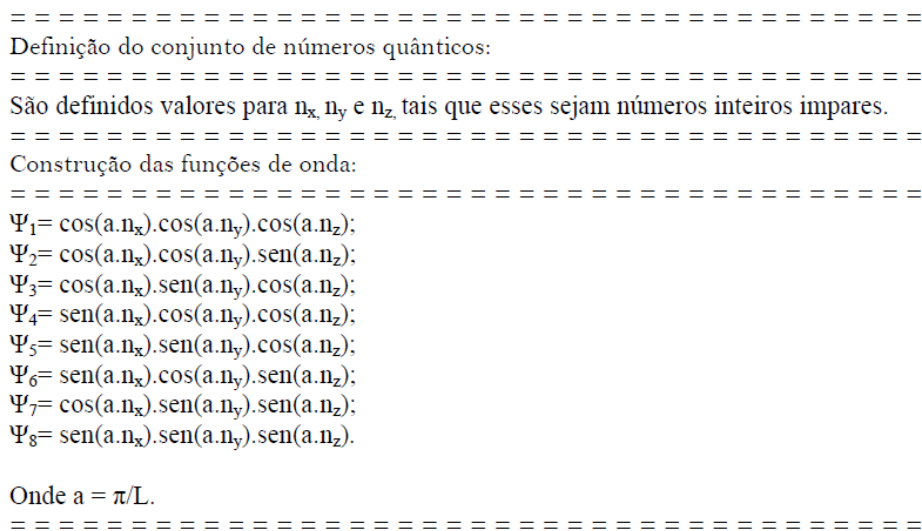


Figura 3.2: Diagrama esquemático de como é definida a função de onda do gás de Fermi no modelo original.

Contudo, na nova versão do modelo, onde apenas é admitida uma solução para um dado conjunto de números quânticos. Uma nova forma de se definir essa solução teve de ser implementada, sendo apresentada na figura (3.3).

```

=====
Definição do conjunto de números quânticos:
=====
São definidos valores para  $n_x, n_y$  e  $n_z$ , tais que esses sejam números inteiros quaisquer.
=====
Construção das funções de onda:
=====
Se  $n_x$  é ímpar,  $n_y$  é ímpar e  $n_z$  é ímpar,
então  $\Psi = \cos(a.n_x).\cos(a.n_y).\cos(a.n_z)$ .

Se  $n_x$  é ímpar,  $n_y$  é ímpar e  $n_z$  é par,
então  $\Psi = \cos(a.n_x).\cos(a.n_y).\sen(a.n_z)$ .

Se  $n_x$  é ímpar,  $n_y$  é par e  $n_z$  é ímpar,
então  $\Psi = \cos(a.n_x).\sen(a.n_y).\cos(a.n_z)$ .

Se  $n_x$  é par,  $n_y$  é ímpar e  $n_z$  é ímpar,
então  $\Psi = \sen(a.n_x).\cos(a.n_y).\cos(a.n_z)$ .

Se  $n_x$  é par,  $n_y$  é par e  $n_z$  é ímpar,
então  $\Psi = \sen(a.n_x).\sen(a.n_y).\cos(a.n_z)$ .

Se  $n_x$  é par,  $n_y$  é ímpar e  $n_z$  é par,
então  $\Psi = \sen(a.n_x).\cos(a.n_y).\sen(a.n_z)$ .

Se  $n_x$  é ímpar,  $n_y$  é par e  $n_z$  é par,
então  $\Psi = \cos(a.n_x).\sen(a.n_y).\sen(a.n_z)$ .

Se  $n_x$  é par,  $n_y$  é par e  $n_z$  é par
então  $\Psi = \sen(a.n_x).\sen(a.n_y).\sen(a.n_z)$ .

Onde  $a = \pi/L$ .
=====

```

Figura 3.3: Diagrama esquemático de como é definida a função de onda do gás de Fermi no modelo modificado.

Uma outra alteração que foi necessária se fazer na estrutura do programa diz respeito a forma como as partículas são distribuídas nos níveis de energia e o valor desses níveis. Originalmente, os passos para se realizar este processo, onde N é o número de partículas do sistema e E 's são os níveis de energia do sistema, eram como se segue no diagrama da figura (3.4-a). Porém no modelo modificado, não sendo mais possível alocar a mesma quantidade de partículas por nível de energia como ocorre na versão original, alterou-se a forma de como o programa escreve os níveis de energia do sistema, sendo os passos da versão modificada da forma como se é apresentada na figura (3.4-b).

=====
 Definição da distribuição de partículas nos níveis de energia e definição dos níveis de energia (modelo original).
 =====
 Se $N=0$, então $E_1=0$.

 Se $0 < N \leq 8$, então $E_1=3$.

 Se $8 < N \leq 32$, então $E_1=3$ e $E_2=11$.

 Se $32 < N \leq 56$, então $E_1=3$, $E_2=11$ e $E_3=19$.

 E assim por diante até completar o número de partículas N .
 =====

(a)

=====
 Definição da distribuição de partículas nos níveis de energia e definição dos níveis de energia (modelo modificado).
 =====
 Se $N=0$, então $E_1=0$.

 Se $N=1$, então $E_1=3$.

 Se $1 < N \leq 4$, então $E_1=3$ e $E_2=6$.

 Se $4 < N \leq 7$, então $E_1=3$, $E_2=6$ e $E_3=9$.

 Se $7 < N \leq 10$, então $E_1=3$, $E_2=6$, $E_3=9$ e $E_4=11$.

 E assim por diante até completar o número de partículas N .
 =====

(b)

Figura 3.4: (a) Diagrama esquemático de como se distribui as partículas nos níveis de energia e a definição dos níveis de energia para o modelo original. (b) Diagrama esquemático de como se distribui as partículas nos níveis de energia e a definição dos níveis de energia para o modelo modificado.

3.3 Resultados

Com o objetivo de se checar se existem alterações nos resultados apresentados pelo modelo *String-Flip* após as modificações realizadas na seção anterior, realizaram-se as mesmas simulações que geraram os resultados apresentados na seção (2.3.2) utilizando o modelo com modificações.

A probabilidade de se formar bárions e mésons em função da densidade de energia muda na nova versão do modelo, como é possível notar na figura (3.5). As simulações realizadas com o modelo modificado indicam que a probabilidade de se formar *clusters* de dois quarks no limite de baixas densidades é ligeiramente maior do que de se formar *clusters* de três quarks. Ainda, é possível observar que a medida que a densidade energia

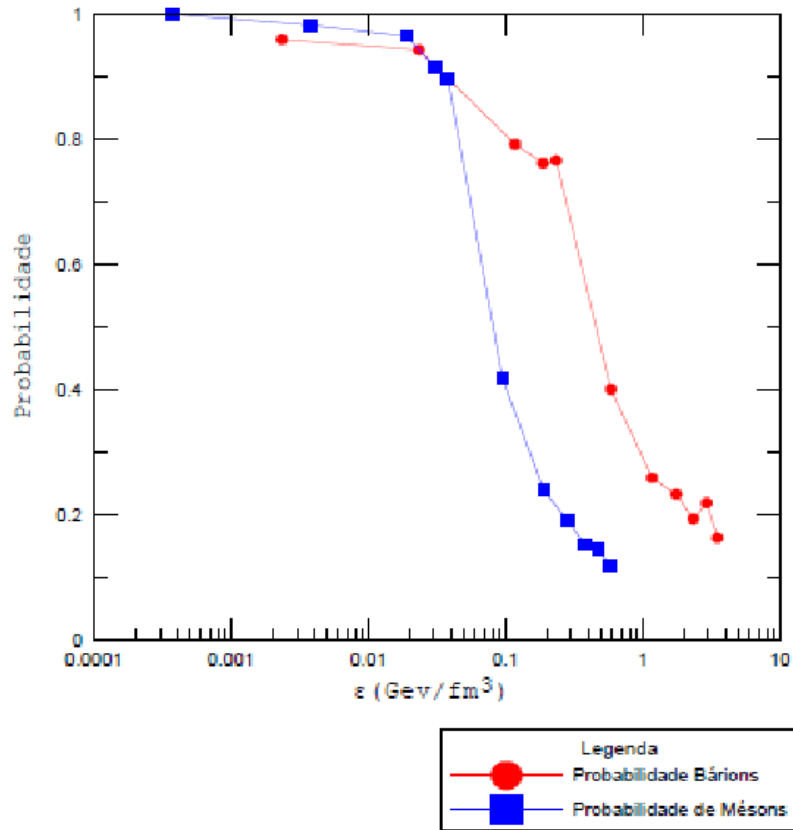


Figura 3.5: Probabilidades de se formarem bárions e mésons em função da densidade de energia para o modelo modificado.

aumenta, ambas probabilidades diminuem. Porém, a probabilidade de se formar mésons diminui muito mais rápido do que para bárions.

Na figura (3.6) é apresentado o comportamento do parâmetro variacional λ , já normalizado, em função da densidade de energia ϵ para bárions e mésons leves, contendo quark *strange* e contendo quark *charm*. São apresentados também os resultados obtidos com o modelo original, que já foram apresentados na seção 2.3.2, com objetivo de comparar os resultados.

Nas figuras (3.6-a), (3.6-c) e (3.6-e), onde é apresentado os resultados para bárions no modelo modificado, representado por quadrados azuis, a transição de fase ocorre de forma mais suave que no modelo original, representado por círculos vermelhos, embora ambas ocorram em uma mesma região. No limite de baixas densidades, o modelo modificado tende a um valor de λ ligeiramente menor do que para o modelo original. Após a transição de fase, o valor do parâmetro variacional diminui suavemente para ambos os casos. Contudo nessa região, nota-se que no modelo modificado o parâmetro variacional diminui de forma mais lenta do que na versão original. A energia de um gás de Fermi depende diretamente da energia de Fermi atingida por esse gás. Como discutido na seção anterior, no modelo modificado o sistema atinge níveis de energia mais altos do que no modelo

original, de modo que no limite de altas energias, onde o sistema se comporta como um gás de quarks livres, é esperado que o modelo modificado atinja valores de energia mais altos que o modelo original, o que pode justificar o comportamento das curvas da figura (3.6) após a transição de fase.

Já nas figuras (3.6-b), (3.6-d) e (3.6-f), compara-se o comportamento do modelo modificado e do modelo original no caso dos mésons. Ao contrário dos bárions, não é possível observar diferenças significativas entre o comportamento dos modelos na região de transição de fase. Nas regiões de limite, tanto de baixas densidades de energia quanto de altas densidade de energia, ambos modelos têm um comportamento similar. Contudo, apesar de menos evidente que no caso dos bárions, após a transição de fase o parâmetro variacional λ no modelo modificado é ligeiramente maior do que no modelo original para uma mesma densidade de energia.

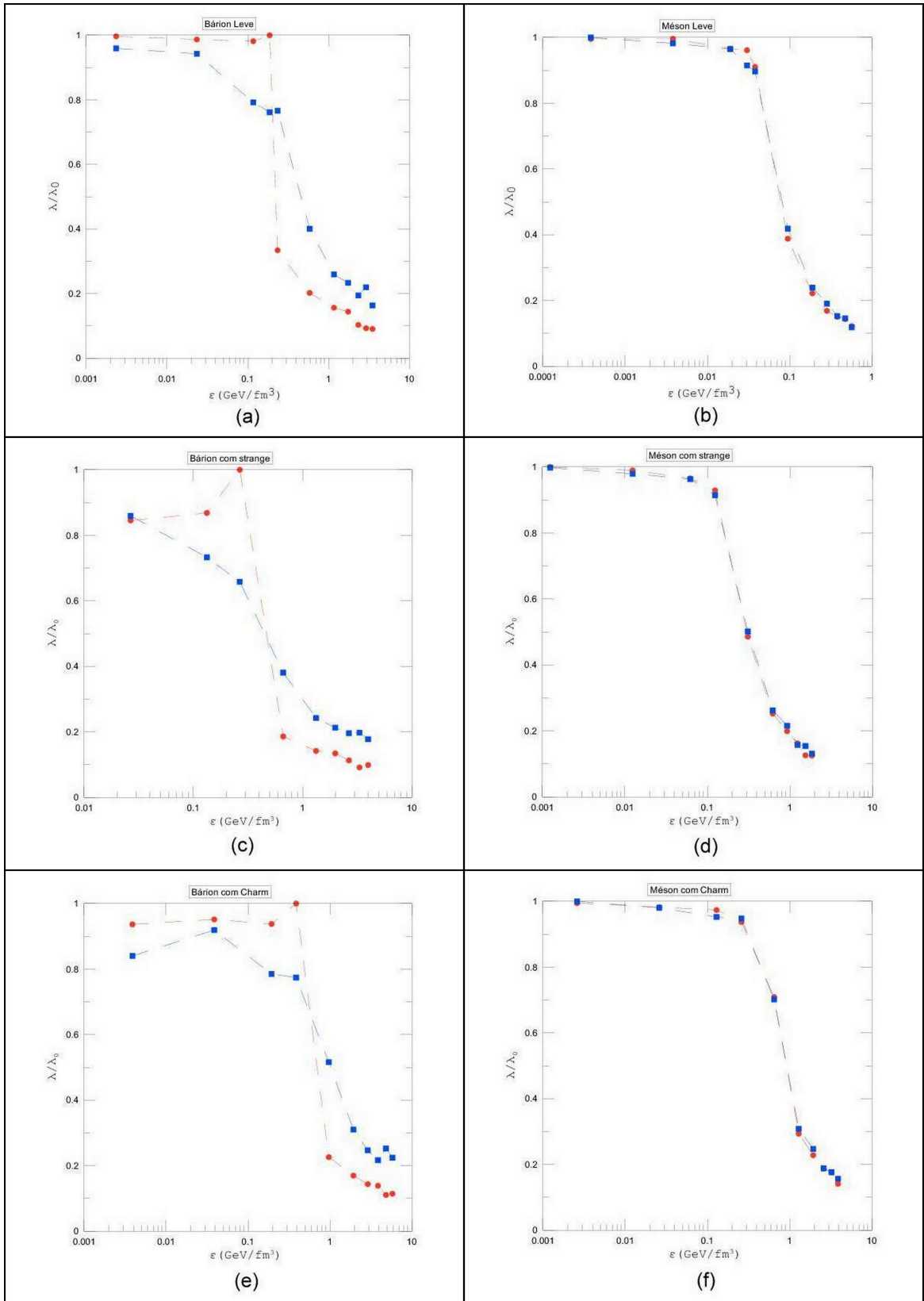


Figura 3.6: Parâmetro variacional normalizado em função da densidade de energia para um sistema de bárions e mésons leves, com quark *strange* e com quark *charm* para o modelo original (círculos vermelhos) e para o modelo modificado (quadrados azuis).

Capítulo 4

Conclusões e perspectivas

Esta dissertação de mestrado foi motivada por trabalhos anteriores, que desenvolveram o modelo *String-Flip* [9, 11, 13, 16, 17, 18]. Os estudos realizados permitiram-se propor uma alteração nas funções de onda do gás de Fermi empregadas pelo modelo. Na versão original, a função de onda para uma partícula livre em uma caixa tridimensional é tomada, como discutido no capítulo 2, por

$$\phi_{n_i}(\vec{X}) = \sin\left(\frac{n_1\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n_2\pi}{L}y\right) \sin\left(\frac{n_3\pi}{L}z\right) \quad (4.1)$$

e todas as permutações e trocas possíveis entre as funções seno e cosseno, onde L é a dimensão da caixa e n_i , com $i = 1, 2$ e 3 , são números quânticos. Com isto, existe uma degenerescência de 8 para cada conjunto de números quânticos vinda somente das trocas e permutações das funções seno e cosseno. Além disso, os números quânticos n_i são assumidos como ímpares para garantir a antissimetria da função de onda.

Porém, essa última suposição é desnecessária e inconsistente. É desnecessária por que a antissimetria da função de onda total está garantida por ser formada a partir de um determinante de Slater. Também é considerada inconsistente porque uma função de onda como a da equação (4.1) não satisfaz a condição de que a função de onda deve ser nula nas paredes da caixa.

Então, nesta dissertação, estudamos as consequências de supor que os números quânticos podem assumir valores pares, associados a funções senos, e valores ímpares, associados a funções cosseno. Isto tem, a priori, várias consequências:

1. A energia de Fermi do sistema é diferente, já que outros estados estão disponíveis;
2. A degenerescência da função de onda é, em geral, diferente para cada conjunto de números quânticos e não mais igual a oito, como no caso original;
3. O número de autoestados de energia disponíveis se duplica.

O passo seguinte, menos óbvio, foi verificar se as probabilidades de formação de bárions e mésons, em função da densidade, são modificadas pela mudança da função de onda. Para isso, foi realizado um conjunto de simulações, tanto com o modelo original, quanto com o modelo modificado, para se estudar as probabilidades de formação de prótons e pions, *hyperons* e *kaons* e bárions e mésons charmosos.

Os resultados desse estudo mostram que no modelo modificado, a probabilidade de se formar bárions, diferentemente do modelo original, não sofre mais uma queda abrupta na região de transição de fase, enquanto para mésons, ambos modelos se comportam de uma forma similar. Além disso, as simulações realizadas com o modelo modificado, indicam que a probabilidade de se formarem *clusters* de dois quarks no limite de baixas densidades é maior do que de se formarem *clusters* de três quarks. Por outro lado, a probabilidade de se formar esses *clusters* de dois quarks diminui mais rápido do que a de se formar *clusters* de três quarks com o aumento da densidade de energia.

Para se estudar o processo de formação de bárions e mésons em um sistema de forma mais realista, é interessante se reescrever o modelo de forma que o gás de Fermi contido na caixa possa se hadronizar formando *clusters* de duas ou três partículas no mesmo conjunto de simulações e não independentemente como ocorre nas atuais versões do modelo *String-Flip*. Uma possível forma de se solucionar esse problema seria estudando o comportamento da constante de mola κ do hamiltoniano de um hádron isolado em função da densidade ρ de forma a tentar determinar uma relação entre κ , ρ e a saturação da força forte no interior do *cluster*.

Um outro estudo que pode ser feito, e que pode ser interessante do ponto de vista da aplicabilidade do modelo, consiste em supor que os quarks dentro da caixa possuam uma distribuição de velocidades dependente da temperatura.

Com efeito, o modelo original propõe que a configuração de menor energia é encontrada mudando levemente a posição dos quarks e considerando-os estáticos para esse cálculo. Porém, é possível assumir que os quarks encontram-se em movimento com uma distribuição de velocidade tipo Boltzmann, com a consequente modificação no hamiltoniano e na função de onda do sistema, e a introdução de um parâmetro variacional adicional. Isto permitiria obter probabilidades de hadronização, que são ao mesmo tempo função da densidade e da temperatura.

Apêndice A

O gás ideal de Fermi

Este apêndice tem como objetivo realizar um breve estudo sobre o comportamento do gás ideal de Fermi. Para tanto, será feita uma rápida descrição dos gases quânticos e em seguida um estudo sobre o caso de interesse desse apêndice, o gás ideal de Fermi.

A.1 Gases ideais quânticos

Gases ideais quânticos são sistemas de partículas quânticas idênticas não interagentes, cujos hamiltonianos podem ser escritos de uma forma simples.

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{P_i^2}{2m}, \quad (\text{A.1})$$

onde $p_i^2 = \vec{p}_i \cdot \vec{p}_i$ e \vec{p}_i é o operador de momento da i -ésima partícula.

Sistemas de partículas idênticas podem ser de dois tipos: Um sistema de Bose ou um sistema de Fermi. A diferença entre esses dois sistemas se encontra em suas autofunções. No sistema de Bose, o conjunto completo de autofunções é o conjunto de autofunções de \mathcal{H} que são simétricas sob a troca de coordenadas de qualquer par de partículas. As partículas que compõem os sistemas de Bose ou sistemas bosônicos são denominadas bósons. Já no caso do sistema de Fermi, um conjunto completo de autofunções para esse sistema é a coleção completa das autofunções de \mathcal{H} que são antissimétricas sob a troca de coordenadas de qualquer par de partículas. As partículas que compõem um sistema de Fermi ou um sistema fermiônico são denominadas férmions.

Gases quânticos podem ser discutidos no ensemble microcanônico. Nesta proposta, é necessário se encontrar o número de estados $\Gamma(E)$ do sistema, seja ele fermiônico ou bosônico, com uma energia que varia entre E e $\Delta + E$.

Ao se fazer essa contagem, para se evitar complicações que não são necessárias nesse momento, as partículas são consideradas sem spin. Os autovalores de energia desse sistema não são nada mais do que a soma das energias de cada partícula do sistema, denominadas níveis. A energia de uma única partícula pode ser escrita como

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m}, \quad (\text{A.2})$$

onde $p \equiv |\vec{p}|$ e \vec{p} é o autovalor de momento de uma única partícula dado por

$$\vec{p} = \frac{2\pi\hbar}{L}\vec{n}, \quad (\text{A.3})$$

onde \vec{n} é um vetor cujas componentes podem assumir qualquer valor inteiro e L é dado por

$$L = V^{1/3}, \quad (\text{A.4})$$

onde V é o volume que o sistema ocupa. Para V muito grande ($V \rightarrow \infty$), \vec{p} , que assume valores discretos, pode ser aproximado como uma variável contínua, permitindo a aproximação

$$\sum_p \rightarrow \frac{V}{h^3} \int d^3p, \quad (\text{A.5})$$

onde h é a constante de Plank.

Pode-se então definir o estado do sistema especificando o conjunto de números de ocupação $\{n_{\vec{p}}\}$, onde $n_{\vec{p}}$ é o número de partículas com momento \vec{p} no estado. Essas considerações permitem que a energia E do sistema e o número de partículas N do sistema sejam definidos como

$$E = \sum_{\vec{p}} \epsilon_{\vec{p}} n_{\vec{p}}, \quad (\text{A.6})$$

$$N = \sum_{\vec{p}} n_{\vec{p}}. \quad (\text{A.7})$$

Os números de ocupação $\{n_{\vec{p}}\}$ diferem para um sistema bosônico e para um sistema fermiônico conforme se segue

$$n_{\vec{p}} = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots & (\text{para bósons}) \\ 0, 1 & (\text{para férmions}) \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

A condição imposta de que para sistemas fermiônicos, o número de ocupação de um estado nunca exceda a uma partícula, se deve ao fato que férmions obedecem ao princípio de exclusão de Pauli e será discutido com mais detalhes. Como citado acima, o que se interessa obter no momento é o número de estados $\Gamma(E)$ com energia E e incerteza Δ . A incerteza pode ser feita muito pequena a ponto de ser desprezada. Dessa forma, pode-se obter $\Gamma(E)$ como se segue: Como $V \rightarrow \infty$ a equação (A.2) irá formar um espectro contínuo. Esse espectro contínuo, contudo, pode ser dividido em grupos de níveis contendo respectivamente g_1, g_2, \dots níveis. Cada um desses grupos, por sua vez, formam células com uma energia média $\bar{\epsilon}_i$. Agora n_i , o número de ocupação da i -ésima célula, é a soma de todos $n_{\vec{p}}$ sobre todos os níveis na i -ésima célula. Por fim, pode-se definir $W\{n_i\}$ como o número de estados do sistema correspondendo ao conjunto de números de ocupação $\{n_i\}$. Agora o número de estados do sistema $\Gamma(E)$ pode ser escrito como

$$\Gamma(E) = \sum_{\{n_i\}} W\{n_i\}. \quad (\text{A.9})$$

As equações (A.7) e (A.8) podem ser escritas em função de n_i

$$E = \sum_i \epsilon_n n_i, \quad (\text{A.10})$$

$$N = \sum_i n_i. \quad (\text{A.11})$$

Então para se obter $W\{n_i\}$, tanto para um gás de Bose como para um gás de Fermi, é suficiente se obter w_i , o número de maneiras que as n_i partículas podem ser escritas na i -ésima célula (contendo g_i níveis). Este procedimento é válido tanto para sistemas bosônicos quanto para fermiônicos. Mas, como o interesse desse apêndice é o estudo do gás de Fermi, a partir desse momento a discussão será voltada para o sistema de Fermi.

A.2 Estudo do gás ideal de Fermi

A estatística de Fermi nada mais é do que as regras para se contar o número de estados. O número de partículas em cada uma das subcélulas g_i da i -ésima célula é 0 ou 1. Portanto, w_i é igual ao número de maneiras que n_i partículas podem ser colocadas nas n_i subcélulas

$$w_i = \binom{g_i}{n_i} = \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}, \quad (\text{A.12})$$

e dessa forma

$$W\{n_i\} = \prod_i w_i = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}. \quad (\text{A.13})$$

Até agora, toda a discussão se desenrolou no ensemble microcanônico. Contudo, é mais conveniente para a obtenção de alguns resultados se discutir o gás de Fermi no ensemble grande canônico. Nesse ensemble se considera a grande função de partição

$$\Xi(z, V, T) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N(V, T), \quad (\text{A.14})$$

onde $\beta = 1/kT$, sendo k a constante de Boltzmann e T a temperatura do sistema, z é a fugacidade e $Q_N(V, T)$ é a função de partição, dada por

$$Q_N(V, T) = \sum_{\{n_{\vec{p}}\}} g\{n_{\vec{p}}\} e^{-\beta\{n_{\vec{p}}\}}, \quad (\text{A.15})$$

com

$$E\{n_{\vec{p}}\} = \sum_{\vec{p}} \epsilon_{\vec{p}} n_{\vec{p}}. \quad (\text{A.16})$$

Para um gás de Fermi, o valor de $n_{\vec{p}}$ pode assumir apenas os valores, como já discutido acima, 0 ou 1, e o número de estados correspondentes a $\{n_{\vec{p}}\}$ é

$$g\{n_{\vec{p}}\} = 1, \quad (\text{A.17})$$

dessa forma, a equação (A.15) se torna

$$Q_N(V, T) = \sum_{\{n_{\vec{p}}\}} e^{-\beta \epsilon}. \quad (\text{A.18})$$

Substituindo (A.18) em (A.14), obtém-se

$$\Xi(z, V, T) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\substack{\{n_{\vec{p}}\} \\ \sum n_{\vec{p}}=N}} z^N e^{-\beta \sum \epsilon_{\vec{p}} n_{\vec{p}}}. \quad (\text{A.19})$$

Na equação (A.19), nota-se que existe uma soma sobre N , o número total de partículas do sistema, e também, é feito uma soma sobre o conjunto de números de ocupação n_1, n_2, \dots , com a restrição de que a soma de todos os números seja igual ao número total de partículas N do sistema. Esses dois somatórios podem ser escritos como uma soma sobre todos os números de ocupação do sistema

$$\Xi(z, V, T) = \sum_{n_0, n_1, \dots} z^N e^{-\beta(n_0 + n_1 + \dots)}, \quad (\text{A.20})$$

que agora se fatoriza, podendo ser escrito da forma

$$\begin{aligned} \Xi(z, V, T) &= \sum_{n_0} \sum_{n_1} \dots [(ze^{-\beta \epsilon_0})^{n_0} (ze^{-\beta \epsilon_1})^{n_1} \dots] = \left[\sum_{n_0} (ze^{-\beta \epsilon_0})^{n_0} \right] \left[\sum_{n_1} (ze^{-\beta \epsilon_1})^{n_1} \right] \dots \\ &= \prod_{\vec{p}} \left[\sum_n (ze^{-\beta \epsilon_{\vec{p}}})^n \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Como a soma sobre n é apenas de 0 a 1 para o gás de Fermi, a grande função de partição se torna,

$$\Xi(z, V, T) = \prod_{\vec{p}} (1 + ze^{-\beta \epsilon_{\vec{p}}}). \quad (\text{A.22})$$

Com a grande função de partição é possível escrever a equação de estado do gás de Fermi

$$\frac{PV}{kT} = \log \Xi(z, V, T) = \sum_{\vec{p}} \log(1 + ze^{-\beta \epsilon_{\vec{p}}}). \quad (\text{A.23})$$

Ainda, com auxílio da equação

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \log \Xi(z, V, T) = \sum_{\vec{p}} \frac{ze^{-\beta \epsilon_{\vec{p}}}}{1 + ze^{-\beta \epsilon_{\vec{p}}}}, \quad (\text{A.24})$$

pode-se obter o número de ocupação médio $\langle n_{\vec{p}} \rangle$, que é dado por

$$\begin{aligned} \langle n_{\vec{p}} \rangle &\equiv \frac{1}{\Xi} \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{\substack{\{n_{\vec{p}}\} \\ \sum n_{\vec{p}}=N}} n_{\vec{p}} e^{-\beta \sum \epsilon_{\vec{p}} n_{\vec{p}}} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_{\vec{p}}} \log \Xi \\ &= \frac{ze^{-\beta \epsilon_{\vec{p}}}}{1 + ze^{-\beta \epsilon_{\vec{p}}}}. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

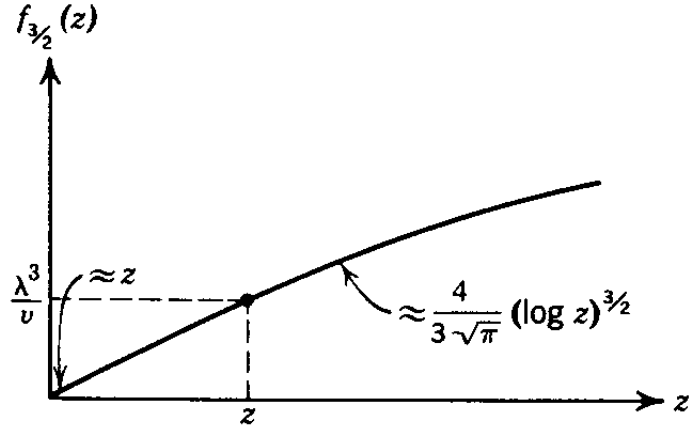


Figura A.1: A função $f_{3/2}(z)$ [29].

Agora, como discutido anteriormente, ao se fazer o limite $V \rightarrow \infty$, a soma sobre \vec{p} pode ser substituída por uma integral, conforme a equação (A.5). Fazendo $V \rightarrow \infty$ nas equações (A.23) e (A.24) obtém-se as equações de estado,

$$\begin{aligned} \frac{P}{kT} &= \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \log(1 + ze^{-\beta p^2/2m}), \\ \frac{N}{V} &= \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{1}{z^{-1}e^{\beta p^2/2m} + 1}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

As equações (A.26) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} \frac{P}{kT} &= \frac{1}{\lambda^3} f_{5/2}(z), \\ \frac{N}{V} &= \frac{1}{\lambda^3} f_{3/2}(z), \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

onde $\lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/mkT}$ é o comprimento de onda térmico e as funções

$$\begin{aligned} f_{5/2}(z) &\equiv \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx x^2 \log(1 + ze^{-x^2}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^{5/2}}, \\ f_{3/2}(z) &= z \frac{\partial}{\partial z} f_{5/2}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^{3/2}}, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

são funções padrões da forma

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{z^{-1}e^{x^2} + 1}, \quad 0 \leq z \leq \infty \quad (\text{A.29})$$

com $\Gamma(n)$ sendo a função Gama. Uma discussão mais detalhada dessas funções padrões na mecânica estatística pode ser encontrada na referência [31].

Para se obter a equação de estado (A.26) do gás ideal de Fermi, pode-se fazer um estudo do comportamento da fugacidade z através da segunda equação (A.27), que pode ser reescrita como

$$\frac{N\lambda^3}{V} = f_{3/2}(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{z^{-1}e^{x^2} + 1}. \quad (\text{A.30})$$

A função $f_{3/2}$ é uma função monotônica (estritamente crescente) de z . Para z pequeno se tem uma expansão em série de potência,

$$f_{3/2}(z) = z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}} - \frac{z^4}{4^{3/2}} + \dots \quad (\text{A.31})$$

Por outro lado, para valores de z muito grandes uma expansão assintótica é obtida pelo método de *Sommerfeld*. A aplicação desse método pode ser encontrada em livros de textos tais como as referências [29, 31]. Esse método diz que

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} [(\log z)^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-1/2} + \dots] + O(z^{-1}). \quad (\text{A.32})$$

O comportamento de $f_{3/2}(z)$ pode ser apresentado na figura (A.1). Pelas equações (A.30), (A.31) e (A.32) é possível se observar que z aumenta monotonicamente com o aumento da grandeza ($V\lambda^3/N$). Contudo, quando V/N é fixo, z aumenta monotonicamente com a diminuição da temperatura graças a dependência do comprimento de onda térmico λ com T .

A.2.1 Limite de altas temperaturas e baixas densidades

No limite de altas temperaturas e baixas densidades ($\lambda^3 N/V \ll 1$), a separação entre as partículas é muito maior do que o comprimento de onda térmico λ , de forma que os efeitos quânticos são desprezíveis. A partir das equações (A.27) e (A.31), pode-se escrever

$$\frac{\lambda^3 N}{V} = z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \dots, \quad (\text{A.33})$$

que quando colocada na forma

$$z = \frac{N\lambda^3}{V} + \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right) + \dots, \quad (\text{A.34})$$

é possível notar que quando $\lambda^3 \rightarrow 0$ ($T \rightarrow \infty$), o número de ocupação médio, equação (A.25), se reduz a forma

$$\langle n_{\vec{p}} \rangle \approx \frac{N\lambda^3}{V} e^{-\beta\epsilon_{\vec{p}}}. \quad (\text{A.35})$$

Esta é a forma do número de ocupação do gás de Maxwell-Boltzmann, o que está de acordo com o fato de que comportamento de um sistema de Fermi a altas temperaturas se aproxima de um sistema de Boltzmann. A equação de estado nesse limite se torna

$$\frac{PV}{NkT} = \frac{V}{N\lambda^3} \left(z - \frac{z^2}{2^{5/2}} + \dots \right) = 1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{V\lambda^3}{N} + \dots \quad (\text{A.36})$$

A.2.2 Limite de baixas temperaturas e altas densidades

Já no limite de baixas temperaturas e altas densidades ($\lambda^3 N/V \gg 1$), o comprimento de onda de De Broglie de uma partícula é muito maior que a separação média entre partículas.

Desta forma, efeitos quânticos, em especial o princípio de exclusão de Pauli, como será discutido abaixo, se tornam muito importantes.

Analisando o sistema quando $T \rightarrow 0$, as equações (A.30) e (A.32) fornecem que

$$\frac{N}{V} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{3/2} \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2}. \quad (\text{A.37})$$

A partir da equação (A.37), é possível escrever

$$z \approx e^{\beta\epsilon_F}, \quad (\text{A.38})$$

onde ϵ_F é chamado de energia de Fermi,

$$\epsilon_F \equiv \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6N\pi^2}{V} \right)^{2/3}. \quad (\text{A.39})$$

O número de ocupação médio $\langle n_{\vec{p}} \rangle$ nesse regime é

$$\langle n_{\vec{p}} \rangle \approx \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \epsilon_F)} + 1}. \quad (\text{A.40})$$

Analisando a equação (A.40), é possível notar que quando $\epsilon_{\vec{p}} < \epsilon_F$, o termo exponencial no denominador se torna muito pequeno ($e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \epsilon_F)} \rightarrow 0$), e o número de ocupação $\langle n_{\vec{p}} \rangle$ igual a 1. Por outro lado, se $\epsilon_{\vec{p}} > \epsilon_F$, o termo exponencial no denominador se torna muito grande ($e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \epsilon_F)} \rightarrow \infty$), e então $\langle n_{\vec{p}} \rangle$ é igual a 0. Resumindo,

$$\langle n_{\vec{p}} \rangle_{T=0} = \begin{cases} 1 & \text{se } \epsilon_{\vec{p}} < \epsilon_F \\ 0 & \text{se } \epsilon_{\vec{p}} > \epsilon_F \end{cases}. \quad (\text{A.41})$$

Esse resultado se deve ao princípio de exclusão de Pauli, que impede que mais de uma partícula ocupe o mesmo estado quântico, dessa forma, um estado pode ser ocupado por uma ou nenhuma partícula. Quando o sistema está no estado fundamental, as partículas ocupam os níveis de energia mais baixos possíveis, de forma que elas completem todos os níveis até que se alcance o nível da energia de Fermi.

Quando representado no espaço de momento, as partículas preenchem uma esfera de raio P_F . A superfície dessa esfera é chamada de superfície de Fermi e o raio P_F da esfera é o momento de Fermi.

Até agora, graus de liberdade como o spin não foram considerados. Contudo, esses graus de liberdade irão trazer degenerescências aos níveis de energia, que causarão alterações na forma como se distribuem as partículas nos níveis de energia, e consequentemente, vão alterar o nível de Fermi. Dessa forma, supondo que os níveis de energia são g-vezes degenerados, a condição necessária para se obter ϵ_F é

$$g \sum_p \langle n_p \rangle_{T=0} = N. \quad (\text{A.42})$$

Pelas condições impostas na equação (A.41), existem N estados com energia abaixo da energia de Fermi. Com a degenerescência se reduz o número de estados, e então, fazendo $\epsilon_F = p_F/2m$ e igualando com (A.39), obtém-se

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi}{3} p_F^3 = \frac{N}{gV}, \quad (\text{A.43})$$

permitindo que a energia de Fermi seja reescrita como

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2 N}{gV} \right)^{2/3}. \quad (\text{A.44})$$

Outra característica do gás de Fermi pode ser observada quando se faz uma expansão para o potencial químico a partir das equações (A.30) e (A.32),

$$\frac{kTV}{N} = kT \log z = \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right) + \dots \right]. \quad (\text{A.45})$$

O parâmetro da expansão é kT/ϵ_F . Se for definida como temperatura de Fermi T_F a grandeza como

$$T_F = \frac{\epsilon_F}{k}, \quad (\text{A.46})$$

o limite de baixas temperaturas e altas densidades será aquele que $T \ll T_F$. Nessa condição, as partículas buscam os estados de energia mais baixos possíveis e a degenerescência do sistema é máxima.

A energia interna do gás de Fermi no caso de baixas temperaturas e altas densidades está dada por

$$U = \sum_{\vec{p}} \epsilon_{\vec{p}} < n_{\vec{p}} >, \quad (\text{A.47})$$

onde $\epsilon_{\vec{p}} = p^2/2m$. No limite que $V \rightarrow \infty$ conforme a equação (A.5),

$$U = \frac{V}{h^3} \frac{4\pi}{2m} \int_0^\infty dp p^4 < n_{\vec{p}} >, \quad (\text{A.48})$$

substituindo na equação (A.48) o valor de $< n_{\vec{p}} >$,

$$< n_{\vec{p}} > \approx \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{p}} - \nu)} + 1}, \quad (\text{A.49})$$

e calculando essa integral por partes se obtém

$$U = \frac{\beta V}{20\pi^2 m^2 \hbar^3} \int_0^\infty dp \frac{p^6 e^{\beta\epsilon_{\vec{p}} - \nu}}{(e^{\beta\epsilon_{\vec{p}} - \nu} + 1)^2}. \quad (\text{A.50})$$

Essa integral pode ser resolvida através de uma expansão do fator p^6 sobre $p = p_F$ [29], sendo o resultado,

$$U = \frac{3}{5} N \epsilon_F \left[1 + \frac{5}{12} \pi^2 \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right]. \quad (\text{A.51})$$

O estado fundamental de um gás de Fermi é alcançado quando a temperatura vai a zero. Nesse limite, a energia interna do gás de Fermi não se aproxima de zero mas sim, de um valor finito que é determinado pelas energias de todos os estados ocupados em $T = 0$. A partir da equação (A.51), o valor da energia interna no estado fundamental será

$$U_0 = \frac{3}{5} \epsilon_F. \quad (\text{A.52})$$

Apêndice B

Conversão de unidades

Por conveniência, durante as simulações foram utilizadas unidades arbitrárias com k e m , onde k é a constante de mola no modelo e m é a massa dos quarks do sistema, iguais a 1. Contudo, para se atribuir valores físicos às simulações é necessário se fazer uma conversão de unidades. A conversão que se faz é dessas unidades arbitrárias adotadas para unidades naturais onde $\hbar = c = 1$.

Para expressar as unidades de distância em fm e de energia em GeV , é necessário se obter fatores que relacionem os dois sistemas de unidades. Para se obter um fator de conversão de unidades de distância, pode-se calcular os valores médios dos raios ao quadrado de mésons e bárions no modelo e compará-los com valores experimentais de valores médios de raios ao quadrado, encontrados nas referências [32, 33]. Para energias, pode-se relacionar o valor da energia por partícula no estado fundamental com os valores experimentais de massas já medidas, encontrados nas referências [33].

B.1 Conversão de unidades para mésons leves

O valor médio do raio ao quadrado de um méson pode ser dado por

$$\langle r^2 \rangle = \langle \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})^2 \rangle, \quad (\text{B.1})$$

onde $N = 2$.

Utilizando as equações (2.25), a equação (B.1) pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^2 (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})^2 = (\vec{r}_1 - \vec{R}_{CM})^2 + (\vec{r}_2 - \vec{R}_{CM})^2 = \frac{1}{2} \langle \vec{r} \rangle^2, \quad (\text{B.2})$$

onde $\vec{r}^2 \equiv (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2$.

No limite de baixas densidades de energia, utilizando a função de onda (2.31), é possível se calcular o valor esperado de $\langle r^2 \rangle$,

$$\langle r^2 \rangle = \int \Psi_{\mathcal{M}_0}^* \langle r^2 \rangle \Psi_{\mathcal{M}_0} d^3r$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left(\frac{\lambda_{\mathcal{M}_0}}{\pi} \right)^{3/4} e^{-\lambda_{\mathcal{B}_0} r^2 / 2} \frac{r^2}{2} \left(\frac{\lambda_{\mathcal{M}_0}}{\pi} \right)^{3/4} e^{-\lambda_{\mathcal{B}_0} r^2 / 2} d^3 r \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_{\mathcal{M}_0}}{\pi} \right)^{3/2} \int r^2 e^{(-\lambda_{\mathcal{M}_0} r^2)} d^3 r.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Como $d^3 r = 4\pi r^2 dr$, a equação (B.3) pode ser reescrita como

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{\lambda_{\mathcal{M}_0}}{\pi} \right)^{3/2} \int r^4 e^{-\lambda_{\mathcal{M}_0} r^2} dr. \tag{B.4}$$

Fazendo uso da fórmula

$$\int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\alpha^{5/2}}, \tag{B.5}$$

o valor do raio ao quadrado médio vale

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{2\lambda_{\mathcal{M}_0}}. \tag{B.6}$$

Pela equação (2.30), a equação (B.6) pode ser reescrita como

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3\hbar}{\sqrt{2m\kappa_{\mathcal{M}}}}. \tag{B.7}$$

Substituindo a equação (B.7) em (B.2), e fazendo $k_{\mathcal{M}} = \hbar = m = 1$, o valor médio do raio ao quadrado de um méson é

$$\langle r_{\mathcal{M}}^2 \rangle = \frac{3}{2\sqrt{2}} = 1,0607. \tag{B.8}$$

O valor médio do raio ao quadrado experimental do méson-pi, que pode ser usado para obter o fator de conversão de comprimento para mésons vale

$$\langle r_{\pi}^2 \rangle = 0,439 fm^2. \tag{B.9}$$

Com o valor calculado (B.8) e o valor experimental (B.9), o fator de conversão de comprimento $L_{\mathcal{M}}$ pode ser dado por

$$L_{\mathcal{M}} = \sqrt{\frac{\langle r_{\pi}^2 \rangle}{\langle r_{\mathcal{M}}^2 \rangle}} = 0,6433 fm. \tag{B.10}$$

Para se obter um fator de conversão de energia, pode-se comparar o valor da energia por partícula de um méson dado pela tabela (2.1) somado a massa por partícula do méson, o valor de energia por partícula $e_{\mathcal{M}}$ vale

$$e_{\mathcal{M}} = 1 + \frac{3}{2\sqrt{2}} = 1 + 1,0607 = 2,0607, \tag{B.11}$$

e o valor da massa do méson-pi vale,

$$\frac{m_{\pi}}{2} = 0,1396 GeV. \tag{B.12}$$

Com esses dois resultados, o fator de conversão para energia $E_{\mathcal{M}}$ é dado por

$$E_{\mathcal{M}} = \frac{m_{\pi}}{2} = 0,0340 \text{ GeV}. \quad (\text{B.13})$$

Por fim, pode-se escrever um fator de conversão de unidades para a densidade de energia utilizando os fatores obtidos para comprimento e energia como

$$d_{\mathcal{M}} = \frac{E_{\mathcal{M}}}{L_{\mathcal{M}}^3} (3) = 0,38 \text{ GeV}/fm^3, \quad (\text{B.14})$$

onde o fator 3 corresponde a degenerescência de cor dos quarks.

B.2 Conversão de unidades para bárions leves

Para se obter os fatores de conversão para bárions se procede de forma similar ao caso de mésons. Porém, os valores experimentais são tomados do próton.

O valor médio do raio ao quadrado de um bárion pode ser escrito como

$$\langle r^2 \rangle_{\mathcal{B}} = \langle \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})^2 \rangle, \quad (\text{B.15})$$

onde $N = 3$.

Utilizando as equações (2.33), a equação (B.15) se torna

$$\sum_{i=1}^3 (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})^2 = (\vec{r}_1 - \vec{R}_{CM})^2 + (\vec{r}_2 - \vec{R}_{CM})^2 + (\vec{r}_3 - \vec{R}_{CM})^2 = \langle \varepsilon_1^2 \rangle + \langle \varepsilon_2^2 \rangle. \quad (\text{B.16})$$

No limite de baixas densidades de energia, utilizando a função de onda (2.38), é possível se calcular o valores esperados $\langle \varepsilon_1^2 \rangle$ e $\langle \varepsilon_2^2 \rangle$,

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_1^2 \rangle &= \int \Psi_{\mathcal{B}_0}^* \langle \varepsilon_1^2 \rangle \Psi_{\mathcal{B}_0} d^3 \varepsilon_1 d^3 \varepsilon_2 \\ &= \int \left(\frac{3\lambda_{\mathcal{B}_0}}{\pi} \right)^{3/2} e^{[-3\lambda_{\mathcal{B}_0}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)]/2} \varepsilon_1^2 \left(\frac{3\lambda_{\mathcal{B}_0}}{\pi} \right)^{3/2} e^{[-3\lambda_{\mathcal{B}_0}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)]/2} d^3 \varepsilon_1 d^3 \varepsilon_2 \\ &= \left(\frac{3\lambda_{\mathcal{B}_0}}{\pi} \right)^3 (4\pi)^2 \int \varepsilon_1^2 e^{[-3\lambda_{\mathcal{B}_0}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)]} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

A equação (B.17) pode ser reescrita como

$$\langle \varepsilon_1^2 \rangle = \left(\frac{3\lambda_{\mathcal{B}_0}}{\pi} \right)^3 (4\pi)^2 \int \varepsilon_1^4 e^{-3\lambda_{\mathcal{B}_0}\varepsilon_1^2} \int \varepsilon_1^2 e^{-3\lambda_{\mathcal{B}_0}\varepsilon_2^2} d\varepsilon_2 d\varepsilon_1, \quad (\text{B.18})$$

fazendo uso da equação (B.5) e da fórmula

$$\int_0^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}}, \quad (\text{B.19})$$

o valor esperado de $\langle \varepsilon_1^2 \rangle$ se torna

$$\langle \varepsilon_1^2 \rangle = \frac{1}{2\lambda_{B_0}}. \quad (\text{B.20})$$

Fazendo o mesmo para o valor esperado $\langle \varepsilon_2^2 \rangle$, encontra-se o mesmo resultado. De forma que o valor esperado do raio ao quadrado médio de um bárion seja

$$\langle r_B^2 \rangle = \frac{1}{\lambda_{B_0}}, \quad (\text{B.21})$$

substituindo a equação (2.37) na equação (B.21), o valor esperado para o raio ao quadrado pode ser escrito como

$$\langle r_B^2 \rangle = \frac{3\hbar}{m\omega_B} = \frac{3\hbar}{\sqrt{3}m\kappa_B}, \quad (\text{B.22})$$

fazendo $k_B = m = \hbar = 1$, o valor médio do raio ao quadrado de um bárion é

$$\langle r_B^2 \rangle = \sqrt{3} = 1,7321. \quad (\text{B.23})$$

O valor experimental do raio ao quadrado médio do próton é

$$\langle r_p^2 \rangle = 0,875 fm. \quad (\text{B.24})$$

Portanto, o fator de conversão para distâncias L_B , vale

$$L_B = \sqrt{\frac{\langle r_p^2 \rangle}{\langle r_B^2 \rangle}} = 0,6648 fm. \quad (\text{B.25})$$

De maneira similar ao caso dos mésons, para se obter um fator de conversão para a energia, escreve-se o valor da energia por partícula no estado fundamental incluindo a massa de uma partícula, com $m = 1$, ou seja,

$$e_B = 1 + \sqrt{3} = 2,7321. \quad (\text{B.26})$$

Comparando esse resultado com a massa do próton,

$$m_p = 0,9383 GeV, \quad (\text{B.27})$$

pode-se obter o fator de conversão E_B para energia, que é dado por

$$E_B = \frac{m_p}{e_B} = 0,1145 GeV. \quad (\text{B.28})$$

Finalmente, pode-se obter o fator de conversão para densidade de energia,

$$d_B = \frac{E_B}{L_B^3} (3)(2) = 2,34 GeV/fm^3, \quad (\text{B.29})$$

onde o fator 3 corresponde a degenerescência de cor dos quarks e o fator 2 leva em consideração os antiquarks.

B.3 Fatores de conversão para hádrons com quark *strange* e com quark *charm*

Nas duas primeiras seções desse apêndice foram obtidos fatores de conversão para hádrons leves. Contudo, para simulações onde existem a formação de outras espécies de hádrons, os fatores de conversão devem ser alterados. Esses valores são obtidos de maneira similar ao caso de hádrons leves. Dessa forma, nesta seção apenas serão apresentados os valores utilizados e os resultados. Contudo, não se tem valores experimentais de raios para essas espécies de partículas. Por essa razão, as equações (B.10) e (B.25) são utilizadas para se obter os fatores de conversão para mésons e bárions, respectivamente.

B.3.1 Mésons contendo quark *strange*

Para se obter os fatores de conversão para esse tipo de partícula, pode-se usar o valor experimental da massa do méson K^0 ($d\bar{s}$),

$$m_{K^0} = 0,493677 GeV. \quad (B.30)$$

Nas simulações computacionais, a massa m_s do quark estranho foi adotada como sendo 1,6, essa alteração faz com que a energia $e_{\mathcal{M}_s}$ seja

$$e_{\mathcal{M}_s} = \frac{(1,6 + 1)}{2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} = 2,36, \quad (B.31)$$

onde no primeiro termo da soma é levado em consideração que os quarks que formam o méson têm massas diferentes. Dessa forma, o fator de conversão para energia vale

$$E_{\mathcal{M}_s} = \frac{m_{K^0}}{e_{\mathcal{M}_s}} = 0,11 GeV. \quad (B.32)$$

O valor do fator de conversão de densidade de energia vale

$$d_{\mathcal{M}_s} = \frac{E_{\mathcal{M}_s}}{L_{\mathcal{M}}^3}(3) = 1,24 GeV/fm^3. \quad (B.33)$$

B.3.2 Bárions contendo quark *strange*

Para bárions o valor da energia por partícula $e_{\mathcal{B}_s}$ é

$$e_{\mathcal{B}_s} = \frac{(1,6 + 2)}{3} + \sqrt{3} = 2,93. \quad (B.34)$$

Utilizando o valor da massa do bárion Λ (uds),

$$m_{\Lambda} = 1,115 GeV. \quad (B.35)$$

O fator de conversão para energia vale

$$E_{\mathcal{B}_s} = \frac{m_{\Lambda}}{e_{\mathcal{B}_s}} = 0,13 GeV. \quad (B.36)$$

O valor do fator de conversão de densidade de energia d_{B_s} é

$$d_{B_s} = \frac{E_{B_s}}{L_B^3}(3)(2) = 2,66\text{GeV}/\text{fm}^3. \quad (\text{B.37})$$

B.3.3 Mésons contendo quark *charm*

Para esse caso, o valor experimental adotado é a massa do méson D^+ ($c\bar{d}$),

$$m_{D^+} = 1,870\text{GeV}. \quad (\text{B.38})$$

Nas simulações, a massa m_c do quark *charm* foi adotada como sendo 5,0, então, a energia por partícula $e_{\mathcal{M}_s}$ vale

$$e_{\mathcal{M}_c} = \frac{(5+1)}{2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} = 4,06. \quad (\text{B.39})$$

Dessa forma, o fator de conversão para energia vale

$$E_{\mathcal{M}_c} = \frac{m_{D^+}}{e_{\mathcal{M}_c}} = 0,23\text{GeV}. \quad (\text{B.40})$$

O valor do fator de conversão de densidade de energia vale

$$d_{\mathcal{M}_c} = \frac{E_{\mathcal{M}_c}}{L_{\mathcal{M}}^3}(3) = 2,59\text{GeV}/\text{fm}^3. \quad (\text{B.41})$$

B.3.4 Bárions contendo quark *charm*

Para bárions o valor da energia e_{B_c} é

$$e_{B_c} = \frac{(5+2)}{3} + \sqrt{3} = 4,07. \quad (\text{B.42})$$

Utilizando o valor da massa do bárion Λ_c^+ (udc),

$$m_{\Lambda_c^+} = 2,28\text{GeV}. \quad (\text{B.43})$$

O fator de conversão para energia vale

$$E_{B_c} = \frac{m_{\Lambda_c^+}}{e_{B_c}} = 0,19\text{GeV}. \quad (\text{B.44})$$

O valor do fator de conversão de densidade de energia d_{B_c} é

$$d_{B_c} = \frac{E_{B_c}}{L_B^3}(3)(2) = 3,88\text{GeV}/\text{fm}^3. \quad (\text{B.45})$$

Referências Bibliográficas

- [1] C. Y. Wong. *Introduction to High-Energy Heavy-Ion Collisions*. World scientific Publishing, 1994.
- [2] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn e V. F. Weisskopf. New extended model of hadrons. *Phys Rev.* D9, 3471 (1974).
- [3] L.D. Landau e E. M. Lifshitz. *Estatistical Physics*, 3th ed., Pergamon Press, 1980.
- [4] INFN- Istituto Nazionale di Fizica Nucleare, LNF QGP Physics Directory . Disponível em: <http://www.lnf.infn.it/esperimenti/alice/QGP/qgp.php>. Acesso em: 24 de maio de 2012.
- [5] CERN- The European Organization for Nuclear Research, 1986: heavy-ion collisions begin. Disponível em: <http://public.web.cern.ch/public/en/about/History86-en.html>. Acesso em: 23 de maio de 2012.
- [6] L. P. Csernai. *Introduction to Relativistic Heavy Ion Collisions*. John Wiley & Sons, 1994.
- [7] J. D. Bjorken. Highly Relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region. *Phys Rev.* D27, 140 (1983).
- [8] J. Rafelski e J. Letessier, Strangeness and quark gluon plasma. *J Phys.* G30 (2004).
- [9] G. Toledo Sánchez e J. Piekarewicz. Modeling the Strangeness content of hadronic matter. *Phys Rev.* C65, 045208 (2002).
- [10] F. Lenz, J. T. Londergan, E. J. Moniz, R. Rosenfelder, M. Stigl e K. Yazaki. Quark confinement and hadronic interactions. *Ann. Phys.* (N.Y) 170, 65 (1986).
- [11] C. J. Horowitz, E. J. Moniz, e J. W. Negele. Hadron Structure in a simple model of quark / nuclear matter. *Phys. Rev.* D31, 1689 (1985).
- [12] P. J. S. Watson. Towards A Quark Model For Nuclear Matter. *Nuc. Phys.*, A494 (1989).
- [13] C. J. Horowitz e J. Piekarewicz. Quark Models of Nuclear Matter. *Nuc. Phys.* A536 (1992).
- [14] M. Creutz. *Quarks, Gluons and Lattices*. Cambridge University Press, 1986.

- [15] H.A. Taha. *Operations Research An Introduction*, 8th ed., Pearson Prentice Hall, 2007.
- [16] D. Morel e J. Piekarewicz. Strange Matter in the String-Flip model. *Phys. Rev C* 60, 065207 (1999).
- [17] C. J. Horowitz e J. Piekarewicz. Nuclear to quark-matter transition in the String-Flip model. *Nuc. Phys Rev. C* 44, 2753 (1991).
- [18] A. Ayala, M. Martínez, G. Paic e G. T. Sánchez. Dynamical quark recombination in ultrarelativistic heavy-ion collision and the proton-to-pion ratio. *Phys Rev. C* 77, 044901 (2008)
- [19] S. S. Adler *et al.* (PHENIX Collaboration). Identified charged particle spectra and yields in $Au + Au$ collisions at $\sqrt{S_{NN}} = 200 GeV$. *Phys. Rev. C* 69, 034909 (2004).
- [20] A. László e T. Schuster (NA49 Collaboration), High p_t spectra of identified particles produced in $Pb + Pb$ collisions at $158 GeV$ /nucleon beam energy. *Nucl. Phys. A* 774, 473 (2006).
- [21] I. Abelev *et al.* (STAR Collaboration), Energy dependence of π^\pm , p and \bar{p} transverse momentum spectra for $Au + Au$ collisions at $\sqrt{S_{NN}} = 62.4$ and $200 GeV$. *Phys. Lett. B* 655, 104 (2007).
- [22] J. Adams *et al.* (STAR Collaboration), Identified hadron spectra at large transverse momentum in $p + P$ and $d + Au$ collisions at $\sqrt{S_{NN}} = 200 GeV$. *Phys. Lett. B* 637, 161 (2006).
- [23] A. Ayala, E. Cuautle, J. Magnin e L. M. Montaño, Finite size effects on pion spectra in relativistic heavy-ion collisions. *Phys Lett. B* 634, 200 (2006).
- [24] A. Ayala, E. Cuautle, J. Magnin e L. M. Montaño, Proton and pion transverse spectra at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider from radial flow and finite size effects. *Phys Rev. C* 74, 064903 (2006).
- [25] C. Hwa e C. B. Yang. Scaling behavior at high p_T and the p/π ratio. *Phys Rev. C* 67, 034902 (2003).
- [26] R. J. Fries, B. Müller, C. Nonaka e S. A. Bass. Hadronization in Heavy-Ion Collisions: Recombination and Fragmentation of Partons. *Phys Rev. Lett* C90, 202303 (2003).
- [27] C.T. Cohen, B. Diu e F. Laloë. *Quantum Mechanics, V.I.* Jonh Wiley & sons, 1977.
- [28] R. Shankar. *Principle of Quantum Mechanics*, 2nd ed., Plenun Press, 1994.
- [29] K. Huang. *Statistical Mechanics*, John Wiley & Sons, 1987.
- [30] S. R. A. Salinas. *Introdução à Física Estatística*, 2nd ed., Edusp, 2008.

- [31] W. Greiner, L. Neise e H. Stöcker. *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Springer- Verlag New York, 1995.
- [32] NA7 collaboration. A mensurament of the space-like pion electromagnetic form factor. *Nucl. phys.* B277, 168 (1986).
- [33] K. Nakamura *et al.* (Particle Data Group), JP G37, 075021 (2010).