

Dissertação de Mestrado

Oscilações de Little Parks

Rodolpho Ribeiro Gomes

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rio de Janeiro, 2013

Oscilações de Little Parks

Rodolpho Ribeiro Gomes

Dissertação apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ciências Físicas.

Orientador: Itzhak Roditi

Rio de Janeiro
2013

Gomes, Rodolpho R.
Oscilações de Little Parks
59 páginas
Dissertação (Mestrado) - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Coordenação de Física Teórica.

1. Efeito Little-Parks
2. Sistema mesoscópico
3. Teoria de Ginzburg-Landau

I. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Coordenação de Física Teórica.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Itzhak Roditi - CBPF (Orientador)

Prof. Dr. Cesar Augusto Linhares da Fonseca Junior - IF/UERJ

Prof. Dr. Ivan dos Santos Oliveira Júnior - CBPF

Prof. Dr. Mauro Melchiades Doria - IF/UFRJ (Convidado Especial)

A Everaldo, por fornecer as condições iniciais para a determinação de minha trajetória na Física.

Agradecimentos

Agradeço ao professor Mauro Melchhiades Doria, por acreditar em minha capacidade e pelo apoio e incentivo determinantes para a continuidade do meu caminho na Física.

Ao professor Isaías G. de Oliveira, pelas discussões, sempre bem-humoradas, sobre os cálculos numéricos realizados neste trabalho.

Ao professor José Abdalla Helayël-Neto, por sua grande disposição para auxiliar aqueles que lhe procuram.

Aos professores Itzhak Roditi e Ivan dos Santos Oliveira Júnior, por possibilitarem a conclusão deste etapa de meu percurso.

Aos funcionários da biblioteca do CBPF e da secretaria da CFC, pelo sempre gentil e atencioso atendimento.

Aos professores do Pólo de Xistoquímica da UFRJ, por me concederem o tempo necessário para a realização das atividades exigidas pelo mestrado. E em particular, ao professor Marcus Vinicius de Araújo Fonseca e à Maria Cristina Labuto F. P. Pinto, pelo incentivo para continuar este caminho.

À Clarice Medeiros, por me ouvir falar repetidas vezes sobre as dificuldades encontradas e por me ajudar a ver que estas poderiam ser superadas.

Ao meu pai, Edilson, e minha mãe, Edna, por se esforçarem para me dar uma boa educação básica.

Aos amigos Luciano de Medeiros, Priscila de Medeiros, Rodrigo Pereira, Juliana Cammarota e Aline Martins, pelos momentos agradáveis que passamos juntos no período em que estive realizando este trabalho.

À Suelen, por ter sido minha companheira, e me dar amor, carinho e alegria ao longo desta jornada.

Resumo

Investigamos as oscilações de Little-Parks causadas por uma espira de corrente persistente posicionada sobre a borda superior de um cilindro supercondutor mesoscópico de paredes finas com uma altura finita. Para um cilindro curto as oscilações de Little-Parks são aproximadamente as mesmas do efeito padrão, enquanto há somente um fluxo magnético atravessando o cilindro. Para um cilindro alto a heterogeneidade do campo magnético faz diferentes fluxos magnéticos atravessarem o cilindro em diferentes alturas e nós mostramos aqui que isto produz dois regimes oscilatórios de Little-Parks de acordo com a corrente persistente da espira. Nós mostramos que estes dois regimes, e também a transição entre eles, são observáveis em medidas de corrente realizadas no cilindro supercondutor. Os dois regimes resultam de um comportamento diferente ao longo da altura, como se vê no parâmetro de ordem, numericamente obtido da teoria de Ginzburg-Landau através do método de elementos finitos.

Abstract

We investigate the Little-Parks oscillations caused by a persistent current loop set on the top edge of a mesoscopic superconducting thin-walled cylinder with a finite height. For a short cylinder the Little-Parks oscillations are approximately the same ones of the standard effect, as there is only one magnetic flux piercing the cylinder. For a tall cylinder the inhomogeneity of the magnetic field makes different magnetic fluxes pierce the cylinder at distinct heights and we show here that this produces two distinct Little-Parks oscillatory regimes according to the persistent current loop. We show that these two regimes, and also the transition between them, are observable in current measurements done in the superconducting cylinder. The two regimes stem from different behavior along the height, as seen in the order parameter, numerically obtained from the Ginzburg-Landau theory through the finite element method.

Lista de Figuras

2.1	Energia livre <i>versus</i> parâmetro de ordem	8
2.2	Oscilação da resistência elétrica	14
2.3	Cilindro de paredes finas	17
4.1	T <i>versus</i> μ - cilindro baixo	40
4.2	T <i>versus</i> μ - cilindro alto	41
4.3	Energia livre do cilindro baixo em $T = 0,8T_c$ e $T = 0,9T_c$	43
4.4	Corrente elétrica no cilindro baixo em $T = 0,8T_c$ e $T = 0,9T_c$	44
4.5	Energia livre do cilindro alto em $T = 0,8T_c$	46
4.6	Energia livre do cilindro alto em $T = 0,9T_c$	47
4.7	Corrente elétrica do cilindro alto em $T = 0,8T_c$ e $T = 0,9T_c$	48
4.8	Corrente elétrica do cilindro baixo em $T = 0,8T_c$	49
4.9	Corrente elétrica do cilindro alto em $T = 0,8T_c$	50
4.10	Características do cilindro baixo	52
4.11	Características do cilindro alto	54

Sumário

1	Introdução	1
2	O efeito Little-Parks	5
2.1	Descrição da supercondutividade através da Teoria de Ginzburg-Landau	5
2.2	Quantização do fluxo magnético e suas consequências	11
2.3	Observação do efeito Little-Parks	12
2.4	Caracterização do sistema considerado	17
2.5	Energia livre e corrente elétrica no cilindro de paredes finas	20
3	Análise do sistema em diferentes situações	27
3.1	Anel em campo magnético constante	27
3.2	Anel de paredes finas em campo magnético heterogêneo	31
3.3	Cilindro com altura finita - Análise Numérica	36
4	Resultados	39
4.1	Oscilações de Little-Parks na temperatura crítica	39
4.2	Oscilações de Little-Parks na energia livre e na corrente	42
5	Considerações Finais	55
	Referências Bibliográficas	57

Capítulo 1

Introdução

No ano de 2011 completou-se 100 anos desde a descoberta da supercondutividade pelo holandês H. Kamerlingh Onnes. Três anos antes dessa descoberta, Onnes foi o primeiro a liquefazer o gás hélio, o que lhe permitiu desenvolver a técnica para expor metais a temperaturas de apenas alguns kelvin. Em um de seus experimentos Onnes observou que a resistividade elétrica do mercúrio sofria uma queda abrupta para zero abaixo da temperatura de 4,2 K. Repetindo o experimento com outros metais ele percebeu que abaixo de certa temperatura T_c , chamada temperatura crítica, característica de cada material, o material passava para um novo estado, chamado de supercondutor pois a resistividade se anulava. O segundo fenômeno que caracteriza a supercondutividade é o efeito Meissner, descoberto pelos alemães W. Meissner e R. Ochsenfeld em 1933. Este efeito consiste na expulsão do campo magnético do interior de um determinado material quando este passa para o estado supercondutor. A explicação para a supercondutividade permaneceu em aberto até a década de 1950, quando V. L. Ginzburg e L. D. Landau propuseram uma teoria fenomenológica macroscópica que abrangia os supercondutores próximos de sua temperatura crítica, e posteriormente J. Bardeen, L. N. Cooper e J. R. Schrieffer formularam uma teoria microscópica que permitiu a compreensão do mecanismo gerador da supercondutividade convencional. Também neste

período, A. A. Abrikosov mostrou, utilizando o formalismo de Ginzburg-Landau, que os supercondutores podem ser divididos em dois grupos chamados de tipo I e tipo II. Os supercondutores são classificados desta forma devido ao diferente comportamento na presença de um campo magnético H . Os supercondutores do tipo I, ao serem submetidos a um campo magnético que vai sendo gradativamente intensificado, apresentam o efeito Meissner até que o campo alcance um valor característico, chamado de campo crítico $H = H_c$, quando o material passa, então, ao estado normal, sendo a diferença de energia entre o estado normal e o estado supercondutor igual a $H_c^2/8\pi$. Porém, dependendo da geometria do material, é possível que antes que o campo alcance este valor crítico $H < H_c$ o material apresente a coexistência de regiões supercondutoras e normais, sendo considerado no chamado estado intermediário. Já os supercondutores do tipo II, expulsam o campo magnético aplicado sobre eles somente enquanto a intensidade é menor do que um limite inferior $H_{c1} < H_c$. Aumentando-se a intensidade do campo, este penetra no material em filamentos no estado normal circundados por regiões supercondutoras (no chamado estado misto), se mantendo desta forma com uma menor energia até que o campo alcance o limite superior $H_{c2} > H_c$ quando o material passa ao estado normal, mas ainda sendo possível haver supercondutividade em uma fina camada na superfície do material enquanto o campo se mantiver menor do que o chamado campo crítico superficial H_{c3} . Os supercondutores do tipo II são, em geral, formados de compostos metálicos e ligas, e foram alvo de intensa pesquisa experimental na busca por novos materiais com maior temperatura crítica. Em 1986, G. Bednorz e K. A. Müller descobriram os chamados supercondutores de alta temperatura crítica, que são do tipo II, em que T_c é da ordem de 10^2 K. A explicação para o mecanismo que produz a supercondutividade nestes materiais ainda é uma questão em aberto, sendo objeto de pesquisa.

Nas últimas décadas testemunhamos um imenso progresso na microfabricação de sistemas supercondutores e magnéticos, e também nas técnicas de medida que nos permitiu

estudar, em particular, estruturas supercondutoras mesoscópicas [1]. A temperatura crítica de um cilindro supercondutor oscila de acordo com o campo magnético externo aplicado, como mostrado por Little e Parks (LP) em 1962 [2]. O efeito Little-Parks pode ser considerado como um precursor de recentes desenvolvimentos [3], devido a sua natureza eminentemente mesoscópica. O efeito prediz que para um cilindro de paredes finas com raio R , a temperatura crítica varia como $\Delta T_c = (\hbar^2/8mR^2)(\Phi/\Phi_0 - n)^2$, onde m é a massa do par de Cooper, Φ_0 é o quantum de fluxo magnético, $\Phi = H \pi R^2$ é o fluxo magnético aprisionado dentro do cilindro, e n descreve um número quântico. A variação de temperatura detectável dentro da escala experimental é de cerca de $\Delta T_c \sim 10^{-5}$ K, o que significa que o raio deve ser da escala mesoscópica $R \sim 1,0\mu\text{m}$. As oscilações de Little-Parks são detectadas pela medida de dois máximos consecutivos da temperatura, cada um ocorrendo para $\Delta T_c = 0$, quando o fluxo magnético total Φ , que é a soma do fluxo magnético externo penetrando uma dada superfície e do fluxo magnético produzido pela circulação das supercorrentes de blindagem ao longo da fronteira que delimita a superfície, soma $n\Phi_0$. Desde sua proposição inicial, o efeito Little-Parks tem sido medido por várias técnicas diferentes e em vários sistemas distintos, como um disco perfurado com buracos de tamanhos variados e em diferentes posições no disco [4], uma microestrutura modulada de um óxido supercondutor [5], um único anel de alumínio mesoscópico (medidas de susceptibilidade com um SQUID) [6], um arranjo de espiras de alumínio (medidas de calor específico) [7] e um único anel microscópico (sub-micron) de YBCO [8]. O efeito Little-Parks pode ser usado para demonstrar muitas características do estado supercondutor, como a interação entre dois parâmetros de ordem supercondutores [9], [10] e o estudo de materiais híbridos supercondutor/ferromagnético [11]. Para descrever o efeito em diversas situações ([12], [13], [14], [15]) é utilizada a teoria fenomenológica de Ginzburg-Landau.

A organização desta dissertação se dá de forma que na primeira seção do capítulo 2 realizamos uma breve descrição da teoria de Ginzburg-Landau comentando algumas

características importantes, profundamente analisadas em textos de referência ([16], [17], [18]), que serão consideradas ao longo do trabalho. Na seção seguinte, utilizando o formalismo introduzido, descrevemos como ocorre a quantização do fluxo magnético através de um buraco em um supercondutor. Na seção 2.3, comentamos o trabalho em que é apresentada a descoberta do efeito Little-Parks e mais alguns artigos selecionados em que é feita a observação do efeito Little-Parks por diferentes técnicas experimentais. Nas duas últimas seções definimos o modelo de estrutura supercondutora que abordamos neste trabalho, especificando os valores das principais grandezas para a viabilidade de realização experimental da análise aqui realizada e mostramos como a teoria de Ginzburg-Landau se aplica a este modelo, considerando as principais equações e aproximações utilizadas. No capítulo 3 consideramos o sistema definido anteriormente em 3 situações diferentes: o caso de um anel supercondutor em um campo magnético homogêneo, o caso de um cilindro com uma pequena altura em um campo magnético heterogêneo e o caso de maior interesse que consiste em um cilindro com uma altura sensível ao campo magnético heterogêneo. No capítulo 4 apresentamos os resultados obtidos em nossa pesquisa e que foram publicados em [19]. Dividimos os resultados entre os que foram obtidos com a abordagem linear e os que foram obtidos com o formalismo não-linear. No último capítulo apresentamos as conclusões finais e as perspectivas para o desenvolvimento deste trabalho.

Capítulo 2

O efeito Little-Parks

2.1 Descrição da supercondutividade através da Teoria de Ginzburg-Landau

A teoria BCS descreve a supercondutividade microscopicamente em excelente acordo com os dados experimentais nos casos em que se aplica, que são os casos onde o gap da energia entre o estado normal e o estado supercondutor é constante no espaço. Para os casos onde há uma heterogeneidade espacial no gap do supercondutor, como por exemplo, no tratamento do estado intermediário em supercondutores do tipo I ou no estado misto em supercondutores do tipo II, a abordagem mais adequada é a teoria macroscópica desenvolvida por Ginzburg e Landau em 1950. Esta teoria tem por base o tratamento de uma transição de fase descrita por um parâmetro de ordem, que consiste em uma grandeza característica do sistema considerado, que se altera quando este passa de um estado ordenado para um estado desordenado. Em sistemas magnéticos o parâmetro de ordem é normalmente associado à magnetização. Nos supercondutores o parâmetro de ordem é associado à uma pseudofunção de onda $\Psi(\vec{r})$ em que $|\Psi(\vec{r})|^2$ representa a densidade local dos elétrons supercondutores $n_s(\vec{r})$. Por ser fenomenológica, a teoria de GL não era bem aceita, até que em 1959, Gor'kov mostrou que a teoria

de GL pode ser derivada da teoria BCS no caso limite em que a temperatura é bem próxima da temperatura crítica T_c que é a temperatura em que ocorre a transição da fase supercondutora para a fase normal.

A teoria de GL parte do pressuposto de que se o parâmetro de ordem é suficientemente pequeno e varia lentamente no espaço, podemos expandir a densidade de energia livre \mathcal{F} em uma série de potências em $|\Psi(\vec{r})|^2$, da seguinte forma:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_n + \frac{1}{V} \int_V d\vec{r} \left\{ \frac{1}{2m} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \Psi \right|^2 + \alpha(T) |\Psi(\vec{r})|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi(\vec{r})|^4 + \frac{\hbar^2(\vec{r})}{8\pi} \right\}, \quad (2.1)$$

onde \mathcal{F}_n representa a densidade de energia no estado normal, \vec{A} é o potencial vetor que gera o campo magnético $\vec{h} = \nabla \times \vec{A}$, V é o volume do material, α e β são parâmetros fenomenológicos que variam para cada material, sendo β aproximadamente constante e $\alpha(T) = \alpha_0(T/T_c - 1)$, com α_0 uma constante positiva, m e q representam a massa e a carga elétrica dos portadores de carga, ou seja, dos pares de Cooper. Utilizando o método variacional, realizamos expansões no complexo conjugado do parâmetro de ordem $\Psi^* \rightarrow \Psi^* + \delta\Psi^*$ e no potencial vetor $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \delta\vec{A}$, onde $\delta\Psi^*$ e $\delta\vec{A}$ são infinitesimais, inserindo estas expansões na densidade de energia livre 2.1, simplificando e desprezando os termos de segunda ordem ou maiores em $\delta\Psi^*$ e $\delta\vec{A}$ obtemos um sistema de duas equações diferenciais acopladas para Ψ e \vec{A}

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi + \alpha \Psi(\vec{r}) + \beta |\Psi(\vec{r})|^2 \Psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{c}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \frac{q\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{q^2}{mc} \Psi^* \Psi \vec{A}. \quad (2.3)$$

A condição de contorno associada ao caso em que o supercondutor está imerso em

um meio isolante ou no vácuo é expressa pela equação abaixo:

$$\vec{n} \cdot \left[\left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \Psi \right]_{\Sigma} = 0, \quad (2.4)$$

onde \vec{n} representa o vetor normal em cada uma das superfícies do material, e Σ representa toda a superfície do material.

Para descrever o comportamento de um supercondutor em um dado campo magnético devemos resolver as equações 2.2 e 2.3 simultaneamente com as condições de contorno 2.4. Sendo necessário considerar os aspectos característicos de cada modelo, como geometria do material e campo magnético aplicado, por exemplo. Devido a não-linearidade das equações 2.2 e 2.3, que torna difícil obter uma solução analítica, em geral, são realizadas considerações sobre simetria no problema considerado e são utilizados métodos numéricos para obter soluções aproximadas, mas que descrevem consistentemente os problemas considerados.

Com o objetivo de obter uma maior compreensão do comportamento de um supercondutor consideramos o caso simples em que não há campo aplicado ($\vec{A}(\vec{r}) = 0$) e nem gradientes do parâmetro de ordem ($\nabla\Psi = 0$). A ausência de gradientes corresponde a uma região interna do supercondutor, longe da superfície, de modo que a densidade de elétrons supercondutores não varia com a posição $|\Psi(\vec{r})|^2 \equiv |\Psi|^2 = \text{constante}$. Neste caso, podemos realizar a integração direta da equação (2.1) e obter a densidade de energia livre do supercondutor

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_n + \alpha(T)|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4. \quad (2.5)$$

Nas condições estabelecidas acima, a equação 2.2 nos fornece o valor do parâmetro de ordem que minimiza a densidade de energia livre 2.5

$$\alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi = 0 \quad (2.6)$$

e a equação 2.3 tem todos os seus termos nulos. Neste caso a fase de Ψ é arbitrária e com isso podemos supor que Ψ é uma função real. Da equação 2.6 obtemos duas soluções, sendo uma dada por $\Psi = 0$ correspondente ao estado normal, e a segunda, válida para $T < T_c$ e conseqüentemente $\alpha < 0$, dada por $|\Psi|^2 = -\alpha/\beta$. Inserindo a dependência com a temperatura dos parâmetros α e β , obtemos

$$|\Psi|^2 = \frac{\alpha_0}{\beta} \left| \frac{T}{T_c} - 1 \right| \quad (2.7)$$

representando a variação da densidade de elétrons supercondutores com a temperatura.

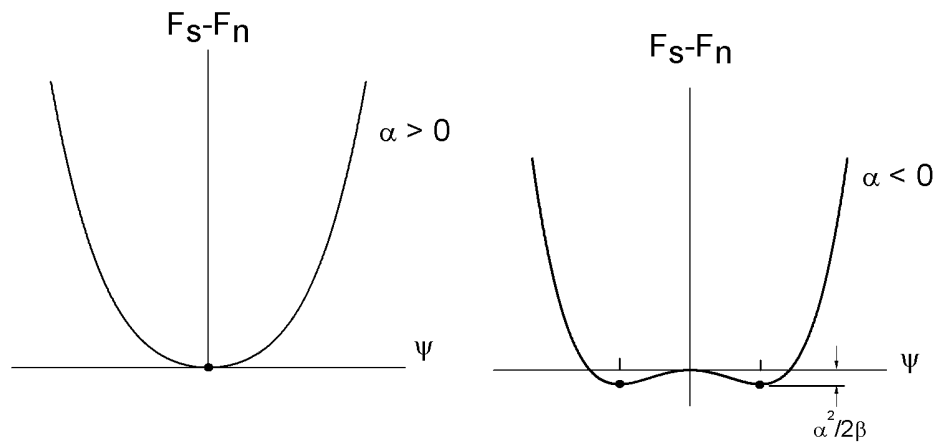


Figura 2.1: Energia livre em função do parâmetro de ordem na teoria de Ginzburg-Landau para $T > T_c(\alpha > 0)$ e $T < T_c(\alpha < 0)$. Os pontos indicam as posições de equilíbrio.

Substituindo a expressão obtida para Ψ na equação 2.5, obtemos um mínimo para

a densidade de energia livre

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_n - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_0^2}{\beta} \right) \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^2, \quad (2.8)$$

onde $\frac{1}{2}(\alpha^2/\beta)$ é chamado de energia de condensação dos elétrons supercondutores por unidade de volume, e corresponde a quantidade de energia liberada pelos elétrons no estado normal para passar ao estado supercondutor.

Considerando agora o caso em que há gradientes no supercondutor, devido a condições de contorno não-homogêneas, mas ainda sem campo magnético aplicado $\vec{A} = 0$. A segunda equação de Ginzburg-Landau 2.3 fica com a seguinte forma :

$$\Psi^* \nabla \Psi = \Psi \nabla \Psi^* \quad (2.9)$$

que significa que a fase do parâmetro de ordem não possui dependência espacial e Ψ pode ser tomado como real. A primeira equação de Ginzburg-Landau 2.2 com $\vec{A} = 0$ fornece uma equação diferencial para o parâmetro de ordem

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi = 0. \quad (2.10)$$

Se considerarmos a interface entre um material supercondutor e um material normal ou vácuo, e estabelecer a origem de uma das coordenadas espaciais, digamos x , nesta interface, temos que a região do espaço delimitada pelo semi-eixo positivo $x > 0$ fica preenchido pelo supercondutor e a região delimitada pelo semi-eixo negativo $x < 0$ fica preenchida pelo material normal. Sendo assim, Ψ é uma função de x e o operador gradiente ∇ possui apenas a componente x , e podemos escrever a equação 2.10 em uma dimensão como:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi = 0. \quad (2.11)$$

Utilizando o valor do parâmetro de ordem no interior do supercondutor $\Psi_\infty \equiv (|\alpha|/\beta)^{1/2}$, definimos o parâmetro de ordem normalizado f por $\Psi \equiv (|\alpha|/\beta)^{1/2} f = \Psi_\infty f$, que obedece a equação de Schrödinger não-linear

$$-\frac{\hbar^2}{2m|\alpha|} \frac{d^2 f}{dx^2} + f - f^3 = 0. \quad (2.12)$$

Definindo a variável adimensional η como $\eta \equiv x/\xi$, onde $\xi^2 \equiv \hbar^2/2m|\alpha|$, a equação 2.12 assume a forma adimensional

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + f - f^3 = 0. \quad (2.13)$$

Por substituição, pode-se verificar que a solução de 2.13 é dada por

$$f = \tanh \frac{\eta}{\sqrt{2}}, \quad (2.14)$$

ou em termos da variável considerada inicialmente Ψ

$$\Psi = \Psi_\infty \tanh \frac{x}{\sqrt{2}\xi} \quad (2.15)$$

com $\Psi \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$ e $\Psi \rightarrow \Psi_\infty$ quando $x \rightarrow \infty$. Assim, vemos que o parâmetro ξ , chamado de comprimento de coerência é um comprimento característico sobre o qual Ψ apresenta uma variação considerável. O parâmetro ξ é uma das duas escalas de comprimento fundamentais associadas à supercondutividade. O outro parâmetro é chamado de comprimento de penetração de London λ_L e, de maneira análoga, está associado à variação do campo magnético na interface entre um material no estado supercondutor e um material no estado normal ou o vácuo. O campo magnético ao penetrar na região supercondutora decai consideravelmente ao longo de uma distância λ_L . A razão entre estes dois comprimentos é chamada de parâmetro de Ginzburg-

Landau $\kappa = \lambda_L/\xi$ e estabelece a importante relação que classifica os supercondutores em duas classes. Os supercondutores que apresentam $\kappa < 1/\sqrt{2}$ são do tipo I, e aqueles que apresentam $\kappa > 1/\sqrt{2}$ são do tipo II.

2.2 Quantização do fluxo magnético e suas consequências

Sendo o parâmetro de ordem uma função complexa, podemos escrevê-lo como o produto de seu módulo por um fator de fase $\Psi = \psi e^{i\chi}$, onde definimos $\psi \equiv |\Psi|$. Sendo assim, o gradiente do parâmetro de ordem é dado por:

$$\nabla\Psi = i\Psi\nabla\chi + e^{i\chi}\nabla\psi \quad (2.16)$$

e a densidade de corrente elétrica total é dada por:

$$\vec{J} = \frac{\hbar q}{m}\psi^2\nabla\chi - \frac{q^2}{mc}\psi^2\vec{A} \quad (2.17)$$

Dividindo a equação 2.17 por $\hbar q\psi^2/m$ e efetuando uma integral de linha ao longo de um contorno fechado, obtemos:

$$\frac{mc}{q^2} \oint \frac{\vec{J}}{\psi^2} \cdot d\vec{l} = \frac{\hbar c}{q} \oint \nabla\chi \cdot d\vec{l} - \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (2.18)$$

Para que o parâmetro de ordem apresente o mesmo valor sempre que se percorra um percurso fechado voltando ao mesmo ponto devemos impor que a integral de linha da fase χ ao longo deste caminho deve ser um múltiplo de 2π , ou seja, $\oint \nabla\chi \cdot d\vec{l} = 2\pi n$, onde n é um número inteiro. Com isso a equação 2.18 pode ser escrita como:

$$\frac{mc}{q^2} \oint \frac{\vec{J}}{\psi^2} \cdot d\vec{l} + \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = n\Phi_0, \quad (2.19)$$

onde $\Phi_0 = \frac{\hbar q}{c}$ é o quantum de fluxo magnético. Se expressarmos a integral de linha para

\vec{A} em termos do fluxo de campo magnético através da superfície do contorno fechado determinado pelo percurso, obtemos: $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \Phi$. Desta forma a equação 2.17 fica com a seguinte expressão:

$$\frac{mc}{q^2} \oint \frac{\vec{J}}{\psi^2} \cdot d\vec{l} + \Phi = n\Phi_0. \quad (2.20)$$

Esta expressão é válida para todos os supercondutores, e pode ser aplicada no estado intermediário e no estado misto. A equação 2.20 mostra que o campo magnético externo gera correntes no interior do supercondutor de forma que estas correntes se ajustem de modo a somente permitir que o fluxo magnético total através da abertura seja sempre um múltiplo inteiro do quantum de fluxo.

O efeito Little-Parks demonstra esta quantização do fluxo magnético através de medidas da dependência da temperatura crítica T_c com o campo magnético para um cilindro supercondutor com as paredes finas imerso em um campo magnético constante aplicado axialmente.

2.3 Observação do efeito Little-Parks

A quantização do fluxo magnético foi observada experimentalmente em 1961 por B. S. Deaver e W. M. Fairbank [20] e simultaneamente por R. Doll e M. Näbauer [21], utilizando métodos diferentes. Um ano depois, W. A. Little e R. D. Parks [2] realizaram um experimento em que observaram que a dependência da temperatura crítica de um cilindro supercondutor com o campo magnético aplicado axialmente é periódica, em unidades de Φ_0 , com o fluxo magnético atravessando o cilindro. O efeito é explicado considerando-se que a teoria BCS prevê que a energia livre do estado supercondutor é periódica na unidade de fluxo, enquanto que a energia do estado normal é independente do fluxo. Assim, a temperatura crítica do supercondutor T_c , que é a temperatura na qual a energia do estado normal e a do estado supercondutor são iguais, é uma função

periódica do fluxo. A variação da temperatura de transição é calculada como sendo dada por $\Delta T_c = (\hbar^2/8mR^2)(\Phi/\Phi_0 - n)^2$, onde m é a massa do par de Cooper, Φ_0 é o fluxo fundamental, $\Phi = H \pi R^2$ é o fluxo magnético aprisionado dentro do cilindro, R é o raio do cilindro e n descreve um número quântico que corresponde a diferentes estados supercondutores associados a arranjos de emparelhamento entre os pares de Cooper. Neste experimento os autores produziram um filamento de cerca de $1 \mu m$ de diâmetro de material isolante. Este filamento foi fixado sobre uma abertura de $3mm \times 10mm$ em uma placa de vidro, que foi inserida em um evaporador de alto vácuo. Neste equipamento, é aquecido um material para se produzir um fluxo de vapor constante que se deposita sobre a superfície da amostra nele inserida. Sobre o filamento os autores evaporaram um substrato de ouro de cerca de 25 \AA de espessura, em uma pressão de $3 \times 10^{-6} mmHg$, que nesta espessura não possui uma distribuição uniforme, para servir de base para uma camada mais espessa (375 \AA) e eletricamente condutora de estanho. Obtiveram assim, um cilindro de estanho que foi montado em uma estrutura que foi inserida em um solenóide de cobre e imerso em hélio líquido. Eles mediram a resistência do cilindro de estanho passando uma corrente de cerca de $10 \mu A$ e medindo a queda do potencial com um microvoltímetro. A temperatura de transição foi medida em $T = 3,45 \pm 0,05 K$. Na figura abaixo mostramos uma fotografia publicada pelos autores em seu trabalho, mostrando a medida de resistência elétrica obtida em um osciloscópio. Podemos distinguir um conjunto de parábolas sobrepostas. Cada mínimo corresponde a um diferente estado caracterizado por um inteiro n , sendo o mínimo central relacionado à ausência de campo magnético $n = 0$ e os mínimos à esquerda e à direita correspondentes aos valores de campo magnético de -14 gauss e $+14$ gauss, respectivamente. Utilizando o valor medido, em um microscópio ótico, do diâmetro do filamento como sendo de $1,4 \pm 0,1 \mu m$, os autores obtiveram o valor de 13 ± 2 gauss para o campo correspondente a uma unidade de fluxo hc/q . Eles mediram a máxima variação da temperatura crítica ΔT_c como igual a $5 \cdot 10^{-4} K$, atribuindo a discrepância

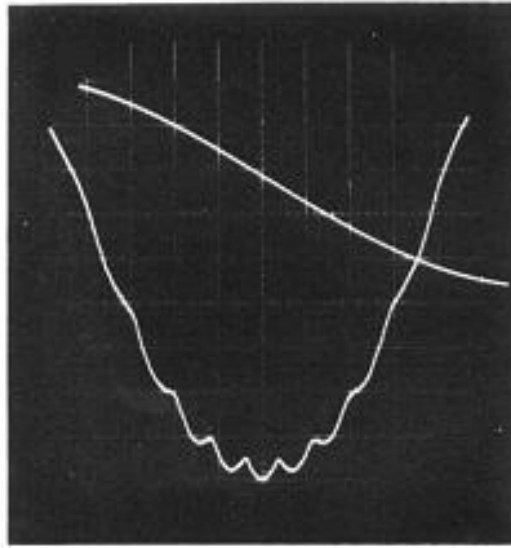


Figura 2.2: Figura extraída do artigo de Little e Parks em 1962. Nesta figura vemos na curva inferior: a variação da resistência elétrica de um cilindro de estanho em sua temperatura de transição como uma função do campo magnético aplicado, e na curva superior: a variação do campo magnético.

no resultado à diferença da massa efetiva do elétron. O experimento demonstra a periodicidade da energia livre em um supercondutor, prevista teoricamente, fornece evidência do emparelhamento de elétrons no estado supercondutor e estabelece uma maneira de determinar com precisão o valor do quantum de fluxo magnético através da medida da distância entre os mínimos das parábolas obtidas.

No período de realização do experimento de Little-Parks era possível produzir amostras com dimensões da ordem de microns e de medir temperaturas da ordem de $10^{-5}K$. Com o avanço da tecnologia é relativamente fácil criar e manipular estruturas com dimensões da ordem de nanômetros com grande precisão. A seguir comentamos alguns trabalhos estudando o efeito Little-Parks em diferentes situações e com diversas técnicas.

Em [6], os autores Zhang e Price estudam a susceptibilidade magnética de um anel mesoscópico de alumínio, com um susceptômetro SQUID (Superconducting Quantum

Interference Device), em temperaturas próxima da temperatura crítica. Eles observaram que abaixo de $T_c = 1,266K$ os resultados estavam em excelente acordo com a teoria de Ginzburg-Landau para a susceptibilidade, mas ligeiramente acima desta temperatura cerca de $25mK$ acima de T_c , quando a susceptibilidade era esperada ser dominada pelas flutuações térmicas, eles observaram um comportamento anômalo, com um sinal mais de 50 vezes maior que o esperado. O anel de alumínio é produzido por litografia por feixe de elétrons, que consiste na incidência de um feixe de elétrons sobre um filme fino de modo a expor determinadas regiões e formar a estrutura desejada, sobre um substrato de safira com a forma de um quadrado de $2mm$ de lado e espessura de $100\mu m$. O anel de alumínio tem as seguintes dimensões: espessura $s = 35 \pm 15nm$, largura $w = 530 \pm 50nm$ e raio médio $R = 950 \pm 50nm$ onde $R = (R_{int} + R_{ext})/2$. O substrato é montado em um susceptômetro e os dados são tomados a partir de um amplificador Lock-In, sendo a susceptibilidade proporcional a derivada da corrente elétrica circulando no anel em relação ao fluxo aplicado. O amplificador Lock-In é um equipamento que fornece na saída um sinal elétrico de corrente contínua proporcional ao sinal de corrente alternada de entrada, permitindo medidas de sinais de baixa amplitude e com grande ruído. Para isso, o equipamento busca no sinal de entrada a componente com a mesma frequência e fase de um sinal de referência estabelecido pelo operador. Desta forma é possível obter medidas muito precisas.

Em um trabalho, publicado em 2005 [7], Bourgeois et al. relatam a primeira evidência experimental de comportamento térmico não-trivial de uma espira supercondutora mesoscópica. Eles realizam medidas de calor específico em um conjunto de milhares de espiras de alumínio não interagentes entre si com uma precisão de $\sim 20fJ/K$. Eles observam múltiplas transições de fase entre estados com diferentes números de vórtices magnéticos com o aumento do campo magnético aplicado. Estas transições são caracterizadas por descontinuidades do calor específico. Utilizando litografia por feixe de elétrons, eles constroem uma amostra com 450 mil espiras quadradas de alumínio

idênticas com medidas de $2\mu m$ de lado, com largura da espira $w = 230nm$ e espessura $d = 40nm$, e com uma separação entre cada espira de $2\mu m$. Além das espiras, na amostra há ainda um aquecedor e um termômetro. O conjunto é resfriado abaixo da temperatura crítica em um criostato de $He3$ e o calor específico é medido por calorimetria ac, que consiste em fornecer uma potência alternada ao aquecedor, e desta forma produzir oscilações na temperatura do conjunto da amostra e termômetro. Os autores observaram uma descontinuidade no calor específico em $1,2 \pm 0,02K$ correspondendo à transição supercondutora, e para temperatura abaixo deste valor, eles mediram o calor específico em função do campo magnético aplicado com pequenos saltos relacionados a entrada de um, dois ou três vórtices, dependendo da faixa de temperatura.

Bluhm et al. publicaram um trabalho em 2006 [9] onde estudam a resposta magnética de anéis mesoscópicos de alumínio, com estrutura de camadas, em seu estado supercondutor através de um modelo de Ginzburg-Landau com dois parâmetros de ordem. Os autores caracterizaram 40 diferentes anéis com 8 larguras w entre $45nm$ e $370nm$ e raios $0,5$, $0,8$, $1,2$ e $2\mu m$ e espessura de $40nm$. Os anéis foram formados por evaporação por feixe de elétrons sobre um substrato de óxido de alumínio. Para formar a estrutura de camadas, durante o processo de confecção dos anéis a taxa de deposição foi consideravelmente diminuída por um intervalo de 10 minutos e após este período de tempo novamente foi aumentada. Com esta interrupção eles obtiveram duas camadas supercondutoras com uma barreira de tunelamento de óxido de alumínio entre as camadas. Para medir a corrente elétrica gerada nos anéis devido a variação do fluxo magnético Φ_a aplicado eles utilizaram um sensor SQUID com uma espira sobre cada anel, enquanto o fluxo era variado harmonicamente com uma frequência de poucos Hz. Para os anéis com $w \leq 120nm$ não foi observado nenhum efeito de dois parâmetros de ordem, sendo obtidas, para temperatura próxima de T_c curvas características de transições entre estados com diferentes vorticidades, como obtidas no efeito Little-Parks. Analisando os resultados para anéis com maior largura eles consideraram que há um

acoplamento do tipo Josephson entre as camadas de alumínio que passam a ser descritas por parâmetros de ordem com vorticidades e com temperaturas críticas diferentes entre si.

Estes são alguns trabalhos onde as oscilações dos valores de algumas propriedades dos materiais provocadas pelo efeito Little-Parks foram estudadas ou utilizadas para caracterizar novos efeitos observados em estruturas com dimensões mesoscópicas. Nos trabalhos citados o campo magnético aplicado é uniforme, sendo possível utilizar a teoria de Ginzburg-Landau em uma abordagem simplificada e tendo-se obtido bom acordo com os resultados experimentais.

2.4 Caracterização do sistema considerado



Figura 2.3: Nesta figura visualiza-se a espira de corrente persistente (raio $a = 5,0\xi_0$) posicionada $0,5\xi_0$ sobre o cilindro supercondutor de paredes finas (raio $R = 10,0\xi_0$). Duas alturas são tratadas aqui, correspondendo a um cilindro baixo ($Z_0 = 2,0\xi_0$) e a um cilindro alto ($Z_0 = 10,0\xi_0$).

Nesta dissertação, nós investigamos o efeito Little-Parks em um cilindro oco com paredes finas com uma altura finita produzido pelo campo magnético heterogêneo de uma espira de corrente persistente posicionada acima do cilindro. Este campo mag-

nético externo é similar ao de um momento de dipolo magnético alinhado com o eixo principal do cilindro de paredes finas. No efeito Little-Parks padrão a altura do cilindro não desempenha nenhum papel porque o campo magnético externo é constante e orientado ao longo do eixo principal. Entretanto na presente situação a altura desempenha um papel relevante [11]. Nós relatamos aqui novas características devido à distribuição heterogênea de supercorrentes no cilindro, no qual em sua borda superior há um fluxo magnético mais intenso do que em sua base. Nosso quadro teórico é desenvolvido em um regime em que a corrente persistente circulando na espira é variada e a resposta do cilindro de paredes finas é observada. A corrente persistente de uma espira de um anel mesoscópico metálico (não-supercondutor) foi observada há muito tempo [22], e em princípio, pode ser utilizada para a realização experimental do sistema apresentado. Uma corrente persistente criada por um anel mesoscópico supercondutor é uma outra maneira de realizar o presente sistema. Neste caso o sistema é composto de dois supercondutores, por exemplo, Nb e Al, o primeiro usado para a espira de corrente persistente e o último para o cilindro de paredes finas. Desde que a temperatura crítica do nióbio ($T_c = 9.25$ K) é 7.8 vezes maior do que a do alumínio ($T_c = 1.18$ K) [23], as oscilações de Little-Parks observadas no cilindro estão próximas da transição para o estado normal do alumínio, que corresponde a uma faixa de temperatura muito baixa para a espira de corrente de nióbio. Portanto o anel de nióbio gera um campo magnético estável e de intensidade constante, cujo valor é varrido continuamente de zero até seu valor máximo através da variação da corrente crítica do anel de nióbio. Seja a e R os raios da espira de corrente externa e do cilindro de paredes finas, respectivamente, como mostrado na Fig. 2.3. Nós estamos mais interessados aqui nos efeitos criados pela heterogeneidade do campo, e por essas razões nos concentraremos no caso em que $R > a$. O momento magnético da espira de corrente persistente é dado por $\mu = I_{espira} \pi a^2$, mas note que o cilindro de paredes finas também define uma escala dada por $\mu_0 = \Phi_0 \xi_0 / 2\pi$, onde ξ_0 é o comprimento de coerência, à temperatura nula, do supercondutor que compõe o

cilindro de paredes finas. Nós estudamos as oscilações de Little-Parks varrendo a razão μ/μ_0 até o seu valor máximo μ_c/μ_0 . Então é de fundamental importância determinar o máximo momento magnético atingido na espira de corrente, $\mu_c = I_c \pi a^2$, I_c sendo a corrente crítica do nióbio. De acordo com Sebastien Michotte et al. [24] para $T = 1,5K$ a corrente crítica no nióbio é $I_c = 2000 \mu A$ para um fio com $75nm$ de largura. Portanto um anel com um raio $a = 0,5 \mu m$ alcança um momento magnético máximo $\mu_c = 1,5 \times 10^{-16} A.m^2$. Para determinar a unidade do momento magnético μ_0 do cilindro de paredes finas é suficiente conhecer o comprimento de coerência, a temperatura nula, do alumínio. Anéis de alumínio mesoscópicos tem sido estudados extensivamente na literatura, tal como em Florian R. Ong et al. [7] e Hendrik Bluhm et al. [9]. Os dados ajustados em ambos os casos nos leva aos valores de ξ_0 igual a 150 e 70nm, respectivamente. Aqui nós consideramos $\xi_0 = 100 nm$, o que dá $\mu_0 = 3,2 \times 10^{-23} A.m^2$. Em síntese nós encontramos que a razão máxima entre os momentos magnéticos é $\mu_c/\mu_0 = 3 \times 10^6$. Portanto a corrente circulando na espira externa pode ser varrida em cerca de seis ordens de magnitude no nosso sistema sugerido. Note que nossos cálculos teóricos não dependem desta realização específica que é somente um sugestão de configuração experimental para o sistema.

A descrição do presente sistema requer dois outros comprimentos, a distância da espira de corrente ao centro do cilindro de paredes finas z_1 , e a altura do cilindro $Z_0 = 2z_0$, z_0 sendo a distância da borda ao seu centro. Por todo este trabalho a distância entre a espira de corrente e a borda superior do cilindro é mantida constante e igual a metade do comprimento de coerência, então $z_1 = 0,5\xi_0 + z_0$. Nossa análise é restrita ao cilindro de paredes finas, o que significa que sua largura é menor do que o comprimento de coerência $w < \xi_0$ e portanto somente duas coordenadas são necessárias para determinar um ponto no cilindro ($\rho = R, \varphi, |z| \leq z_0$) em coordenadas cilíndricas com a origem no centro do cilindro. O parâmetro de ordem dentro do cilindro é expresso por sua fase ϕ e amplitude f , tal que $\Psi = f(z) \exp(i\phi(\varphi, z))$. A bem

conhecida condição de periodicidade do parâmetro de ordem implica que $\Psi(\varphi + 2\pi) = \Psi(\varphi)$ e isto significa que o parâmetro de ordem deve ser o mesmo ao longo do eixo z : $\phi = L\varphi$, onde L é um inteiro a ser associado com o momento angular do estado de vórtice aprisionado no cilindro. Por isso, o parâmetro de ordem é considerado como tendo a forma geral $\Psi(z, \varphi) = f(z) \exp(iL\varphi)$. O campo magnético dipolar decresce com o inverso da distância da espira de corrente, logo sendo forte no topo e fraco na base, e isto fará a amplitude fortemente dependente de z . Embora a corrente na espira externa sempre faça o cilindro sentir um campo magnético dipolar, sua heterogeneidade é somente notável no caso em que o cilindro de paredes finas é suficientemente alto. Por esta razão, aqui nós estudamos numericamente dois exemplos de cilindros, um baixo ($Z_0 = 2,0\xi_0$) e um alto ($Z_0 = 10,0\xi_0$). O primeiro basicamente nos dá oscilações de Little-Parks padrão e o último compreende novos fenômenos porque as bordas do topo e da base do cilindro são atravessadas por fluxos magnéticos muito diferentes. Nós resolvemos a equação de Ginzburg-Landau não-linear para o cilindro de paredes finas através do método de elementos finitos (softwares COMSOL e MATLAB) e verificamos que nosso procedimento numérico é correto no limite do cilindro pequeno, desde que neste caso, nós resolvemos a teoria analiticamente. Isto nos permite confiar em nossos resultados numéricos para o cilindro alto.

2.5 Energia livre e corrente elétrica no cilindro de paredes finas

A teoria de Ginzburg-Landau descreve o supercondutor próximo de sua temperatura crítica T_c . Como consideramos que o comprimento de penetração de London é muito maior que a altura do cilindro, podemos seguramente ignorar o campo magnético de blindagem em nossos cálculos. Por isso a energia livre é simplesmente a soma dos

termos envolvendo o parâmetro de ordem:

$$\mathcal{F} = \int_{\Omega} dv \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left| \left(\vec{\nabla} - \frac{2\pi i}{\Phi_0} \vec{A} \right) \Psi \right|^2 + \alpha(T) |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 \right], \quad (2.21)$$

onde $\alpha(T) \equiv \alpha_0 \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right)$, portanto $\alpha(T) \leq 0$ para manter o estado supercondutor, e β é uma constante. O volume do cilindro de paredes finas é $\Omega \equiv 2\pi R w Z_0$ e o elemento de volume adimensional é $dv \equiv d^3x/\Omega$. A partir do princípio variacional obtemos a equação de Ginzburg-Landau que determina o parâmetro de ordem que minimiza a energia livre:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\vec{\nabla} - \frac{2\pi i}{\Phi_0} \vec{A} \right)^2 \Psi = -\alpha(T) \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi. \quad (2.22)$$

A espira de corrente persistente tem a localização de seu centro nas coordenadas $(0,0,z_1)$, seu momento magnético é $\mu = I_{espira} \pi a^2$, I_{espira} sendo a corrente de circulação. O potencial vetor descrevendo o campo no espaço é dado por $\vec{A}(\rho,z) = A_{\varphi}(\rho,z) \hat{\varphi}$ [25],

$$\begin{aligned} A_{\varphi}(\rho,z) &\equiv \frac{\mu \rho}{[\rho^2 + a^2 + (z - z_1)^2]^{3/2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+1)!!}{2^{2n} n! (n+1)!} \left(\frac{a \rho}{\rho^2 + a^2 + (z - z_1)^2} \right)^{2n} = \\ &= \frac{\mu \rho}{[\rho^2 + a^2 + (z - z_1)^2]^{3/2}} \left\{ 1 + \frac{15}{8} q^2 + \frac{315}{64} q^4 + \dots \right\}, \\ q &= \frac{a \rho}{\rho^2 + a^2 + (z - z_1)^2}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

A condição de paredes finas restringe a coordenada radial a $\rho = R$, e assim, basta usar a expressão,

$$A_\varphi(R, z) = \frac{\mu}{R^2} \eta(z), \quad \text{onde} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \eta(z) \equiv & \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2 + \left(\frac{z-z_1}{R}\right)^2\right]^{3/2}} \left(1 + 1,8750p^2 + 4,9219p^4 + 14,6631p^6 + \right. \\ & + 46,7386p^8 + 155,4058p^{10} + 531,8949p^{12} + 1,8593 \cdot 10^3 p^{14} + 6,6042 \cdot 10^3 p^{16} + \\ & \left. + 2,3757 \cdot 10^4 p^{18} + 8,6335 \cdot 10^4 p^{20} + \dots\right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$p = \frac{\frac{a}{R}}{1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2 + \left(\frac{z-z_1}{R}\right)^2}. \quad (2.26)$$

O termo $c_{2n} p^{2n}$ desta expansão em série tem o coeficiente c_{2n} crescendo com n , como mostrado acima, que deve ser superado por p^{2n} a fim de alcançar convergência. Por exemplo, no presente caso de interesse, $R = 10,0\xi_0$, $a = 5,0\xi_0$, e nós tomamos o topo da borda do cilindro, $z - z_1 = -0,5\xi_0$ para obter que $p = 0,3992$. Precisão da ordem 10^{-3} é somente alcançada próximo do termo $n = 10$ quando $c_{20} = 8,6335 \cdot 10^4$ vezes $p^{20} = 1,05 \cdot 10^{-8}$ nos dá $c_{20} p^{20} = 9,0651 \cdot 10^{-4}$.

É interessante calcular o fluxo magnético que atravessa o anel resultando da interseção do cilindro de paredes finas com o plano z :

$$\begin{aligned} \Phi(\mu, z) & \equiv \oint_z d\vec{l} \cdot \vec{A}(R, z) = \\ & = 2\pi R A_\varphi(R, z) = \frac{2\pi\mu}{R} \eta(z) \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\frac{\Phi(\mu, z)}{\Phi_0} = \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\xi_0}{R} \eta(z) \quad (2.28)$$

a equação(2.28) mostra que a razão entre os momentos magnéticos, μ/μ_0 , junto com os parâmetros geométricos, definem a razão entre o fluxo magnético no plano z e o fluxo fundamental. A fim de obter informações sobre esta expansão em série, vamos analisá-la no caso tratado aqui, a saber, o raio entre a espira de corrente e o raio do cilindro de paredes finas, é igual a $a/R = 0,5$. Suponha um ponto na superfície do cilindro de

paredes finas próximo de seu topo, tal que $(z - z_1)/R \approx 0$. Neste caso nós temos que $p^2 \approx 0,16$ e $1 + \frac{15}{8}p^2 + \frac{315}{64}p^4 + \dots \approx 1 + 0,30 + 0,12 + \dots$. Nós aprendemos que os termos da série contribuem neste exemplo, embora eles não adicionem mudanças qualitativas significantes se ao invés nós tivéssemos considerado o limite de dipolo pontual $a \rightarrow 0$. Assim, neste limite todas as correções em potências de $(a/R)^2$ não existem e o campo é como o de um dipolo magnético pontual, $\vec{\mu} = \mu\hat{z}$ dado por $\vec{A} = \vec{\mu} \times \vec{r}/|\vec{r}|^3$ onde $\vec{r} = R\hat{\rho} + (z - z_1)\hat{z}$ cai na superfície do cilindro de paredes finas.

Nós escrevemos o parâmetro de ordem em termos de sua amplitude f e fase $\phi = L\varphi$ para obter a seguinte expressão para a energia cinética em termos da geometria, do momento angular L e do potencial vetor A_φ :

$$G \equiv \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\Omega} dv \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left[L - \frac{\Phi(\mu, z)}{\Phi_0} \right]^2 f^2 \right\}. \quad (2.29)$$

Então a densidade de energia livre torna-se,

$$\mathcal{F} = G + \int_{\Omega} dv \left[\alpha(T) f^2 + \frac{\beta}{2} f^4 \right]. \quad (2.30)$$

Nós também escrevemos a densidade de supercorrente, $\vec{J} \equiv \frac{q\hbar}{m} \Im \left[\Psi^* \left(\vec{\nabla} - \frac{2\pi i}{\Phi_0} \vec{A} \right) \Psi \right]$, em termos da decomposição da amplitude e da fase usando simetria cilíndrica:

$$\vec{J} = \frac{q\hbar}{mR} [f(z)]^2 \left[L - \frac{\Phi(\mu, z)}{\Phi_0} \right] \hat{\varphi}. \quad (2.31)$$

Houve muitos métodos propostos para calcular a corrente do efeito Little-Parks [26], [27]. Em nossos cálculos numéricos a corrente circulante no cilindro de paredes finas é simplesmente obtida como uma integração da densidade de corrente, \vec{J} , ao longo da seção reta do cilindro. De acordo com a condição de cilindro de paredes finas $w \sim \xi_0$,

e então ,

$$\begin{aligned}
 I &= w \int_{-z_0}^{z_0} dz \vec{J} \cdot \hat{\varphi} = \\
 &= I_0 \int_{-z_0}^{z_0} \frac{dz}{Z_0} \left[\frac{f(z)}{\sqrt{\alpha_0/\beta}} \right]^2 \left[L - \frac{\Phi(\mu, z)}{\Phi_0} \right],
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

onde $I_0 \equiv (q\hbar Z_0 w \alpha_0)/(m\beta R)$. As oscilações ocorrem próxima da temperatura crítica, onde o parâmetro de ordem é fraco, e portanto, a versão linear da equação (2.22), com o termo cúbico ignorado, pode ser usada. Então há uma equação do tipo Schrödinger para a amplitude do parâmetro de ordem $f(z)$, uma vez que o parâmetro de ordem é tomado como $\Psi(z, \varphi) = f(z) \exp(iL\varphi)$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + V(z) \right] f(z) = -\alpha(T) f(z), \tag{2.33}$$

onde o potencial é dado por

$$V(z) = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left[L - \frac{\Phi(\mu, z)}{\Phi_0} \right]^2 \tag{2.34}$$

e as condições de contorno nas bordas do cilindro de paredes finas são $df(z)/dz|_{(z=\pm z_0)} = 0$, o qual é automaticamente satisfeita no limite de f constante. Vamos considerar o limite mal definido, mas instrutivo, de f independente de z , de tal modo que $d^2 f(z)/dz^2 \approx 0$. Logo a equação acima define uma condição sob a simples hipótese que há um f não-nulo: $V(z) + \alpha(T) = 0$ ou igualmente, $T/T_c = 1 - (\xi_0/R)^2 [L - \Phi(\mu, z)/\Phi_0]^2$. Isto define a temperatura de Little-Parks, que é uma função do fluxo que atravessa o cilindro de paredes finas ao longo do plano z . No entanto, porque $\Phi(\mu, z)$ é dependente de z , a razão encontrada T/T_c está em contradição com o argumento original. De fato, a amplitude f independente de z é somente possível para um cilindro de pare-

des finas muito curto, e isto nos permite tomar $z = 0$, o que significa o plano médio. Nós escolhemos expressar a razão acima T/T_c em termos do comprimento de coerência $\xi_0 \equiv \sqrt{\hbar^2/2m\alpha_0}$ a $T = 0$. A razão adimensional $\Phi(\mu, z)/\Phi_0$ pode ser escrita em termos das razões R/ξ_0 , a/R , e $(z - z_1)/R$, e a razão do momento magnético adimensional μ/μ_0 onde μ_0 foi previamente definida. Esta abordagem simples das oscilações de Little-Parks é melhorada nas próximas sessões tratando-se a dependência em z no problema. O cilindro de paredes finas na presença de um campo heterogêneo produzido por uma espira de corrente persistente faz a amplitude dependente na altura em $f(z)$. Neste caso nós também resolvemos a equação do tipo Schrödinger para determinar a amplitude $f(z)$.

Capítulo 3

Análise do sistema em diferentes situações

3.1 Anel em campo magnético constante

Para o caso limite em que consideramos um cilindro que possui altura Z e espessura w menores que o raio médio R ($Z, w \ll R$) e até a ordem de poucos comprimentos de coerência podemos considerar que o parâmetro de ordem é aproximadamente constante no interior do anel, e assim podemos escrever a energia livre, em unidades adimensionais, para um campo magnético externo constante, cujo potencial vetor é $\vec{A} = H\rho/2\hat{\phi}$:

$$\frac{F}{2} \equiv f^2 \int_{\Omega} \frac{dV}{V} \left(\frac{L}{\rho} - \frac{H\rho}{2} \right)^2 - f^2 + \frac{1}{2}f^4 = -(1-G)f^2 + \frac{1}{2}f^4, \quad (3.1)$$

onde G é uma integral que depende da geometria do material sendo dada por :

$$G \equiv \int_{\Omega} \frac{dV}{V} \left(\frac{L}{\rho} - \frac{H\rho}{2} \right)^2. \quad (3.2)$$

Extremizando a energia livre com relação ao módulo do parâmetro de ordem f calculamos o valor de f que minimiza a energia livre, e encontramos: $f^2 = 1 - G$. Com

este valor a energia livre F pode ser escrita como: $F = -(1 - G)^2$, ou seja, depende apenas das características geométricas do material e do campo magnético H aplicado. Esta informação está contida em G , que calculamos como:

$$G = \frac{1}{V} \int_0^Z dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_{R-\frac{w}{2}}^{R+\frac{w}{2}} d\rho \left(\frac{L^2}{\rho} + \frac{H^2}{4} \rho^3 \right) - HL \int_{\Omega} \frac{dV}{V}. \quad (3.3)$$

Podemos simplificar 3.3, obtendo:

$$G = \frac{2\pi Z}{V} \int_{R(1-\epsilon)}^{R(1+\epsilon)} d\rho \left(\frac{L^2}{\rho} + \frac{H^2}{4} \rho^3 \right) - HL, \quad (3.4)$$

onde $\epsilon \equiv \frac{w}{2R}$ e $V \equiv 2\pi R w Z$. Ao efetuar a integral contida em 3.4, simplificamos para:

$$G = \frac{L^2}{wR} \ln\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right) + \left(\frac{HR}{2}\right)^2 (1+\epsilon^2) - HL. \quad (3.5)$$

O fluxo magnético produzido pelo campo constante atravessando a região do anel pode ser definido como: $\Phi \equiv \pi R^2 H$, e o fluxo reduzido, que é definido como o fluxo magnético atravessando a anel dividido pelo fluxo fundamental, é dado por : $\phi \equiv \frac{\Phi}{\Phi_0}$. Vemos que o campo magnético se relaciona com o fluxo por: $H = \frac{2\phi}{R^2}$. Aqui H e R são adimensionais. Desta forma, obtemos uma expressão para a integral G :

$$G = \frac{L^2}{wR} \ln\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right) + \frac{1+\epsilon^2}{R^2} \phi^2 - \frac{2L}{R^2} \phi. \quad (3.6)$$

Realizando a expansão do termo contendo o logaritmo no caso em que $\epsilon \ll 1$, obtemos a seguinte aproximação:

$$\ln\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right) = 2\epsilon + \frac{2}{3}\epsilon^3. \quad (3.7)$$

Inserindo esta aproximação em 3.6 obtemos:

$$G = \frac{1}{R^2} \left[(L - \phi)^2 + \left(\frac{L^2}{3} + \phi^2 \right) \left(\frac{w}{2R} \right)^2 \right]. \quad (3.8)$$

Utilizando a expressão 3.8 obtida para a integral G podemos calcular a energia livre para o nosso sistema:

$$F = - \left\{ 1 - \frac{1}{R^2} \left[(L - \phi)^2 + \left(\frac{L^2}{3} + \phi^2 \right) \left(\frac{w}{2R} \right)^2 \right] \right\}^2. \quad (3.9)$$

Neste ponto, desejamos obter expressões para grandezas que são, de fato, medidas em experimentos que utilizam supercondutores com dimensões mesoscópicas para comparação entre o comportamento previsto e o observado nestes experimentos. É também necessário conhecer o alcance da validade de nossas aproximações. Calculamos a corrente elétrica, que originada pelo fluxo atravessando o anel percorre a circunferência, para realizar esta comparação. Recorremos à termodinâmica para obter uma expressão para a corrente, obtendo esta expressão a partir da derivada da energia livre em relação ao fluxo magnético: $I = -\frac{\partial F}{\partial \Phi}$.

Para ajustar o cálculo ao nosso desenvolvimento com unidades adimensionais utilizamos as seguintes relações: $F = F_0 F'$ e $\Phi = \Phi_0 \phi$. E obtemos: $\frac{\partial}{\partial \Phi} = \frac{1}{\Phi_0} \frac{\partial}{\partial \phi}$. Com isso a corrente elétrica é obtida por: $I = -\frac{F_0}{\Phi_0} \frac{\partial F'}{\partial \phi}$. A expressão da corrente elétrica em função dos parâmetros geométricos e do fluxo é dada por

$$I = \frac{F_0}{\Phi_0} \frac{4}{R^2} \left\{ L - \left[1 + \left(\frac{w}{2R} \right)^2 \right] \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{R^2} \left[(L - \phi)^2 + \left(\frac{L^2}{3} + \phi^2 \right) \left(\frac{w}{2R} \right)^2 \right] \right\}. \quad (3.10)$$

Uma maneira alternativa de calcular a corrente elétrica é através da integração da densidade de corrente através da seção reta do anel $I = \int \vec{J}_s \cdot d\vec{S}$. Sendo esta a maneira que utilizamos para realizar os cálculos numericamente. A densidade de

corrente supercondutora é dada por:

$$\vec{J}_s \equiv \frac{q\hbar}{2mi}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{q^2}{mc}|\Psi|^2\vec{A}. \quad (3.11)$$

Neste modelo de anel em campo constante a densidade de corrente 3.11 se simplifica para:

$$\vec{J}_s = \frac{q\hbar}{m}f^2\left(\frac{L}{\rho} - \frac{\pi H}{\Phi_0}\rho\right)\hat{\varphi}. \quad (3.12)$$

Que podemos reescrever como:

$$\vec{J}_s = \frac{-\alpha q\hbar f^2}{\beta m \xi} \left[L - \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \phi \right] \hat{\varphi}. \quad (3.13)$$

A integral que fornece a corrente elétrica é dada por:

$$I = \frac{-\alpha q\hbar \xi Z}{\beta m} f^2 \int_0^Z dz \int_{R(1-\epsilon)}^{R(1+\epsilon)} \frac{d\rho}{\rho} \left[L - \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \phi \right]. \quad (3.14)$$

Efetuando o cálculo de 3.14 obtemos:

$$I = \frac{-\alpha q\hbar \xi Z}{\beta m} f^2 \left[L \cdot \ln\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right) - 2\epsilon\phi \right]. \quad (3.15)$$

Ao inserir a aproximação para o logaritmo mostrada em 3.7, simplificamos 3.15 para:

$$I = \frac{4I_0}{R^2} \left\{ L \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{w}{2R}\right)^2 \right] - \phi \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{R^2} \left[(L - \phi)^2 + \left(\frac{L^2}{3} + \phi^2\right) \left(\frac{w}{2R}\right)^2 \right] \right\}, \quad (3.16)$$

onde definimos: $I_0 \equiv \frac{F_0}{\Phi_0} = \frac{-\alpha q\hbar \xi w Z R}{4\beta m}$. Verificamos, desta maneira, que no limite em que $\epsilon^2 \rightarrow 0$, as duas expressões para a corrente, ou seja, a obtida a partir da definição termodinâmica e a obtida através da integração da densidade de corrente se tornam

equivalentes:

$$I = \frac{4I_0}{R^2}(L - \phi) \left[1 - \frac{1}{R^2}(L - \phi)^2 \right]. \quad (3.17)$$

Nesta seção estabelecemos as condições em que a abordagem numérica fornece os resultados que podem ser encontrados analiticamente na situação mais simples possível, nos permitindo utilizar a mesma abordagem nas situações mais complexas consideradas adiante.

3.2 Anel de paredes finas em campo magnético heterogêneo

Um cilindro de paredes finas tal que a amplitude do parâmetro de ordem f é constante ao longo da direção z , e portanto $\partial f / \partial z = 0$, nós denominamos anel. A validade do tratamento de anel é restrita a alturas de algumas poucas unidades de comprimentos de coerência, o que significa que a razão z_0 / ξ_0 não pode ser muito grande. No limite de anel, tudo que é necessário para determinar o parâmetro de ordem, a energia livre e a corrente elétrica é calcular as integrais,

$$g(\mu) \equiv \int_{-z_0}^{z_0} \frac{dz}{Z_0} \left[L - \frac{\Phi(\mu, z)}{\Phi_0} \right]^2 \quad \text{e} \quad (3.18)$$

$$g'(\mu) \equiv \int_{-z_0}^{z_0} \frac{dz}{Z_0} \left[L - \frac{\Phi(\mu, z)}{\Phi_0} \right]. \quad (3.19)$$

Com as definições destas integrais podemos escrever a energia cinética em uma forma bastante compacta: $G = \alpha_0 \left(\frac{\xi_0}{R} \right)^2 g f^2$ e a corrente elétrica: $I = \frac{q\hbar}{m} \frac{wZ_0}{R} f^2 g'$. Com isso a densidade de energia livre é dada pela seguinte expressão:

$$\mathcal{F} = \left[\alpha_0 \left(\frac{\xi_0}{R} \right)^2 g + \alpha(T) \right] f^2 + \frac{\beta}{2} f^4, \quad (3.20)$$

cuja minimização determina o parâmetro de ordem e seu mínimo:

$$f^2 = -\frac{1}{\beta} \left[\alpha_0 \left(\frac{\xi_0}{R} \right)^2 g + \alpha(T) \right] \quad (3.21)$$

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{\beta} \left[\alpha_0 \left(\frac{\xi_0}{R} \right)^2 g + \alpha(T) \right]^2 . \quad (3.22)$$

Note que desde que $g > 0$ e que a equação acima determina que $\alpha_0 \left(\frac{\xi_0}{R} \right)^2 g + \alpha(T) \leq 0$ porque $f_0^2 > 0$ então há uma temperatura vinculada por $\alpha(T) \leq -\alpha_0 \left(\frac{\xi_0}{R} \right)^2 g$. O vínculo superior define a temperatura de Little-Parks, que corresponde ao desaparecimento do parâmetro de ordem, de maneira que o supercondutor alcança o estado normal para a temperatura que depende de g e do parâmetro α , de acordo com a equação acima. Portanto as oscilações de Little-Parks obtidas a partir da teoria não-linear no caso de f constante são expressas em termos das integrais g e g' . As correspondentes energia livre, temperatura crítica e corrente elétrica são definidas como segue:

$$\mathcal{F}(\mu, T) = -\mathcal{F}_0 \left[\frac{T - T_c(\mu)}{T_c} \right]^2 \quad (3.23)$$

$$\frac{T_c(\mu)}{T_c} = 1 - \left(\frac{\xi_0}{R} \right)^2 g(\mu) \quad (3.24)$$

$$I(\mu, T) = -I_0 \left[\frac{T - T_c(\mu)}{T_c} \right] g'(\mu) . \quad (3.25)$$

As integrais $g(\mu)$ e $g'(\mu)$ podem ser expressas em termos das seguintes expressões:

$$\langle L \rangle \equiv \int_{-z_0}^{z_0} \frac{dz}{Z_0} \frac{\Phi(\mu, z)}{\Phi_0} \quad e \quad (3.26)$$

$$\langle L^2 \rangle \equiv \int_{-z_0}^{z_0} \frac{dz}{Z_0} \left(\frac{\Phi(\mu, z)}{\Phi_0} \right)^2 , \quad (3.27)$$

tal que, as duas integrais podem ser escritas como,

$$\langle L \rangle = \frac{\mu}{\mu_0} I_1, \quad I_1 \equiv \frac{\xi_0}{R} \int_{-z_0}^{z_0} \frac{dz}{Z_0} \eta(z) \quad \text{e} \quad (3.28)$$

$$\langle L^2 \rangle = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 I_2, \quad I_2 \equiv \left(\frac{\xi_0}{R}\right)^2 \int_{-z_0}^{z_0} \frac{dz}{Z_0} [\eta(z)]^2. \quad (3.29)$$

Tomando que $\left(\frac{\xi_0}{R}\right)^2 \int_{-z_0}^{z_0} \frac{dz}{Z_0} [\eta(z) - \frac{R}{\xi_0} I_1]^2 \geq 0$, nós obtemos que

$$I_2 - I_1^2 \geq 0. \quad (3.30)$$

A seguir, mostramos três importantes características das oscilações de Little-Parks com relação ao momento magnético μ que podem ser expressas em termos das funções acima $g(\mu)$ e $g'(\mu)$, escritas da seguinte maneira:

$$g(\mu) = L^2 - 2L \frac{\mu}{\mu_0} I_1 + \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 I_2 \quad \text{e} \quad (3.31)$$

$$g'(\mu) = L - \frac{\mu}{\mu_0} I_1. \quad (3.32)$$

Estas três características são válidas para todas as temperaturas, e por esta razão assumimos que $T \neq T_c(\mu)$. Elas são associadas a três momentos magnéticos especiais, μ_f , μ_c e μ_t , definidos como:

- 1) *O mínimo da energia livre.* De acordo com (3.23), $\partial\mathcal{F}/\partial\mu = 0$ estabelece a mesma condição como a do mínimo da temperatura crítica em função do momento magnético, $\partial T_c(\mu)/\partial\mu = 0$, que se resume para $\partial g(\mu)/\partial\mu = 0$. Isto define o momento magnético μ_f .

$$\frac{\mu_f}{\mu_0} = L \frac{I_1}{I_2} \quad (3.33)$$

2) *A anulação da corrente.* De acordo com (3.25) a condição $I(\mu) = 0$ acontece para $g'(\mu) = 0$. Isto define o momento magnético μ_c :

$$\frac{\mu_c}{\mu_0} = L \frac{1}{I_1} \quad (3.34)$$

3) *A máxima temperatura de Little-Parks.* De acordo com 3.24

$$\frac{\mu_t}{\mu_0} = L \frac{I_1}{I_2} \left(1 \pm \nu \sqrt{\frac{I_2}{I_1^2} - 1} \right) \quad (3.35)$$

Então nós provamos que a temperatura de Little-Parks nunca alcança a temperatura crítica T_c , a menos para o anel de altura zero, onde $\Phi_0(\mu, z) = \Phi_0(\mu, 0)$ ($I_2 = I_1^2$). Note que

$$\frac{\mu_c}{\mu_f} = \frac{I_2}{I_1^2} \geq 1, \quad (3.36)$$

o que significa a corrente no cilindro de paredes finas sempre se anula depois da energia livre alcançar seu mínimo ($\mu_c \geq \mu_f$) com o aumento da corrente na espira. Um outro importante aspecto para considerar é que os três momentos magnéticos especiais definidos por (3.33), (3.34) e (3.35), são independentes da temperatura. Isto significa que a distância entre dois momentos magnéticos consecutivos L e $L + 1$, ou mínimos da energia livre ou zeros da corrente são independentes da temperatura e iguais a I_1/I_2 e $1/I_1$, respectivamente. Para um cilindro muito baixo, definido para ter a altura comparável com o comprimento de coerência, $Z_0 \leq \xi_0$, as integrais I_1 e I_2 são facilmente calculadas, desde que é suficiente tomar os integrandos ao centro do anel, $z \approx 0$, para obter que $I_1 \approx \eta(0)$, e $I_2 \approx \eta(0)^2$. As três condições, o mínimo da energia livre, a anulação da corrente e a máxima temperatura de Little-Parks realizam-se no mesmo ponto $\mu/\mu_0 = L/I_1$ porque $I_1^2 = I_2$. Utilizando as expressões que definem as integrais I_1 e I_2 e usando a definição de fluxo magnético (2.27) no plano do centro do anel nós

obtemos para a densidade de energia livre, temperatura crítica e corrente elétrica as seguintes expressões:

$$\mathcal{F}(\mu, T) = -\mathcal{F}_0 \left[\frac{T - T_c(\mu)}{T_c} \right]^2 \quad (3.37)$$

$$\frac{T_c(\mu)}{T_c} \equiv 1 - \left(\frac{\xi_0}{R} \right)^2 \left[L - \frac{\Phi(\mu, 0)}{\Phi_0} \right]^2 \quad (3.38)$$

$$I(\mu, T) = -I_0 \left[\frac{T - T_c(\mu)}{T_c} \right] \left[L - \frac{\Phi(\mu, 0)}{\Phi_0} \right], \quad (3.39)$$

onde nós usamos o parâmetro associado com a energia livre $\mathcal{F}_0 \equiv \alpha_0^2/\beta$, e com a corrente I_0 . Note que a temperatura de Little-Parks acima foi obtida anteriormente usando uma abordagem linear. O caso acima é o efeito Little-Parks padrão, válido para um campo externo aplicado constante e altura arbitrária. Para mostrar como a altura do cilindro afeta as oscilações de Little-Parks, nós discutimos abaixo a aproximação em que f é ainda constante, mas as integrais g e g' devem ser integradas ao longo do eixo z . Nós obtemos uma visão analítica deste problema considerando que a espira de corrente é muito pequena se comparada com o cilindro de paredes finas, $a/R \ll 1$, tal que somente o primeiro termo da expansão em série dado em (2.24) é suficiente para descrever o campo magnético externo a

$$\eta(z) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{z-z_1}{R} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (3.40)$$

Este potencial vetor é introduzido em (3.18) e (3.19) para obter

$$I_1 = \frac{\xi_0}{Z_0} \left\{ \frac{\left(\frac{z_0 - z_1}{R} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{z_0 - z_1}{R} \right)^2}} + \frac{\left(\frac{z_0 + z_1}{R} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{z_0 + z_1}{R} \right)^2}} \right\} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}
 I_2 = & \frac{\xi_0^2}{Z_0 R} \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{\left(\frac{z_0 - z_1}{R}\right)}{\left(1 + \left(\frac{z_0 - z_1}{R}\right)^2\right)^2} + \frac{\left(\frac{z_0 + z_1}{R}\right)}{\left(1 + \left(\frac{z_0 + z_1}{R}\right)^2\right)^2} \right] + \frac{3}{8} \left[\frac{\left(\frac{z_0 - z_1}{R}\right)}{1 + \left(\frac{z_0 - z_1}{R}\right)^2} + \frac{\left(\frac{z_0 + z_1}{R}\right)}{1 + \left(\frac{z_0 + z_1}{R}\right)^2} \right] \right\} + \\
 & + \frac{3}{8} \left[\arctan\left(\frac{z_0 - z_1}{R}\right) + \arctan\left(\frac{z_0 + z_1}{R}\right) \right] \}. \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

Estas integrais são expandidas numa série de Taylor em potências de $(z_0/R)^2$, que é um parâmetro pequeno, desde que a aproximação de f constante é boa somente para um cilindro pequeno. Nós obtemos para as integrais I_1 e I_2 os seguintes valores mantendo contribuições de ordem mais baixa $(z_0/R)^2$ e descartando as mais altas

$$\begin{aligned}
 I_1 = & \frac{\xi_0}{R} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{z_1}{R}\right)^2\right]^{3/2}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{1 - 4\left(\frac{z_1}{R}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{z_1}{R}\right)^2\right]^2} \left(\frac{z_0}{R}\right)^2 \right\} \\
 I_2 = & \left(\frac{\xi_0}{R}\right)^2 \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{z_1}{R}\right)^2\right]^3} \left\{ 1 - \frac{1 - 7\left(\frac{z_1}{R}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{z_1}{R}\right)^2\right]^2} \left(\frac{z_0}{R}\right)^2 \right\}. \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

Podemos notar que as equações acima satisfazem a desigualdade dada na expressão (3.30),

$$I_2 - I_1^2 = 3 \frac{\left(\frac{\xi_0}{R}\right)^2 \left(\frac{z_0}{R}\right)^2 \left(\frac{z_1}{R}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{z_1}{R}\right)^2\right]^5}. \quad (3.44)$$

Como um exemplo vamos considerar o cilindro pequeno com raio $R = 10,0\xi_0$, metade da altura $z_0 = 1,0\xi_0$ e a espira de corrente acima de seu topo em $z_1 = 1,5\xi_0$. Portanto $I_2 - I_1^2 \sim \left(\frac{\xi_0}{R}\right)^2 \left(\frac{z_0}{R}\right)^2 \left(\frac{z_1}{R}\right)^2 \sim 10^{-6}$. A distância entre dois mínimos consecutivos da energia livre é $9,51\mu_0$ e entre dois zeros consecutivos da corrente é $9,52\mu_0$.

3.3 Cilindro com altura finita - Análise Numérica

Nós obtemos soluções numéricas da equação de Ginzburg-Landau não-linear abaixo,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + V(z) \right] f(z) = -\alpha(T) f(z) + \beta f(z)^3. \quad (3.45)$$

resolvendo-a através do método de elementos finitos (softwares COMSOL e MATLAB).

Para obter as soluções numéricas da (3.45) nós a reescrevemos em quantidades adimensionais, representadas por uma barra sobre a variável correspondente: $\bar{f} = \sqrt{\beta/\alpha(T)}f$, $\bar{z} = z/\xi(T)$, onde $\xi(T) = \xi_0/\sqrt{1-T/T_c}$, e $\bar{V} = V/\alpha(T)$. A dependência explícita da temperatura desaparece de (3.45) que torna-se,

$$\left[-\frac{d^2}{d\bar{z}^2} + \bar{V}(\bar{z})\right]\bar{f}(\bar{z}) = -\bar{f}(\bar{z}) + \bar{f}(\bar{z})^3. \quad (3.46)$$

Na prática isto significa que todos os comprimentos são medidos em unidades de $\xi(T)$, o comprimento de coerência dependente da temperatura, e então, razões entre dois comprimentos tornam-se independentes da temperatura. Por exemplo, a função η , definida por (2.25), é independente da temperatura, $\eta(\bar{z}) = \eta(z)$, já que ela depende somente de razões. A versão adimensional do potencial, definida por (2.34), torna-se dependente da temperatura e é dado por,

$$\bar{V}(\bar{z}) = \frac{1}{\bar{R}(T)^2} \left[L - \bar{\mu}(T) \frac{\eta(\bar{z})}{\bar{R}(T)} \right]^2. \quad (3.47)$$

onde $\bar{R}(T) = R/\xi(T)$, $\bar{\mu}(T) = \mu/\mu_0(T)$ e $\mu_0(T) = \Phi_0\xi(T)/2\pi$. Note que o produto $\mu_0(T)\bar{R}(T) = \Phi_0R/2\pi$ é independente da temperatura. Como o raio, a altura do cilindro encolhe para zero quando T alcança T_c : $\bar{z}_0 = z_0/\xi(T)$.

A energia livre, a densidade de corrente e a corrente, obtidas de (2.21), (2.31), e (2.32), respectivamente, pela inserção de $f(z)$, determinada por (3.45), são também reescritas em variáveis adimensionais. A corrente é dada por

$$\bar{I} = \int_{-\bar{z}_0}^{\bar{z}_0} \frac{d\bar{z}}{\bar{Z}_0} \bar{f}(\bar{z})^2 \left[L - \bar{\mu}(T) \frac{\eta(\bar{z})}{\bar{R}(T)} \right] \quad (3.48)$$

onde $\bar{I} = I/I_0(T)$, $I_0(T) \equiv (q\hbar\bar{Z}_0w\alpha(T))/(m\beta\bar{R})$. A energia livre em unidades reduzi-

das torna-se,

$$\bar{F} = 2 \int_{-\bar{z}_0}^{\bar{z}_0} \frac{d\bar{z}}{\bar{Z}_0} \left\{ \left[\frac{d\bar{f}(\bar{z})}{d\bar{z}} \right]^2 + [\bar{V}(\bar{z}) - 1] \bar{f}(\bar{z})^2 + \frac{1}{2} \bar{f}(\bar{z})^4 \right\}, \quad (3.49)$$

onde $\bar{F} = F/F_0(T)$, $F_0(T) \equiv \alpha(T)^2/2\beta$.

Concentramo-nos em realizar o estudo numérico em dois cilindros de paredes finas, ambos com o mesmo raio $R = 10,0\xi_0$ na presença da mesma espira de corrente com raio $a = 5,0\xi_0$, posicionada a $0,5\xi_0$ acima da borda superior. Os dois cilindros diferem somente pela altura, considerada como $Z_0 = 2,0\xi_0$ e $Z_0 = 10,0\xi_0$, tal que $z_1 = 1,5\xi_0$ e $5,5\xi_0$, respectivamente. Nós aplicamos o mesmo método numérico para ambos, mas para o cilindro baixo é esperado que tenha a amplitude f quase independente de z e seja aproximadamente descrito pelo limite analítico do anel considerado anteriormente. Por outro lado o cilindro alto, $Z_0 = 10,0\xi_0$, pode somente ser descrito pelo tratamento inteiramente numérico desde que a amplitude varia ao longo da altura do cilindro. Todos os gráficos de energias livre e corrente são em termos do momento magnético em $T = 0$, $\mu/\mu_0(0)$, a fim de ter uma escala independente de temperatura. Note que $\mu_0(T) = \Phi_0\xi(T)/2\pi$ e nós estamos tomando seu valor a temperatura nula como nossa escala de momento magnético.

Capítulo 4

Resultados

4.1 Oscilações de Little-Parks na temperatura crítica

As figuras (4.1) e (4.2) mostram os gráficos, derivados da teoria linear, da temperatura de Little-Parks versus momento magnético. A razão $T_c(\mu)/T_c$ é calculada para o autovvalor mais baixo de (2.33) e (2.34) para determinados valores de L e $\mu/\mu_0(0)$. Estas linhas para L definem a linha de fronteira que separa o estado supercondutor do estado normal no gráfico. Os dois cilindros mostram curvas $T_c(\mu)/T_c$ versus $\mu/\mu_0(0)$ muito distintas, como mostrado nas figuras (4.1) e (4.2).

A figura (4.1) cobre a faixa de 0 a 200 $\mu/\mu_0(0)$, que contém as 21 primeiras linhas associadas a valores distintos de L do cilindro com $Z_0 = 2\xi_0$. Note a forma parabólica das linhas para L e sua distribuição espacial quase homogênea. A distância entre dois máximos consecutivos, das linhas para L e $L+1$, é descrita pela fórmula $\Delta\mu/\mu_0(0) \approx 9,5$. Note que aumentando-se o momento magnético a razão $T_c(\mu)/T_c$ torna-se menor do que um, indicando que a altura do cilindro importa neste caso, e nossas considerações teóricas desenvolvidas no limite de anel se aplica para esta situação e é determinada por (3.38). A razão $T_c(\mu)/T_c$ alcança o valor igual a um somente no caso em que há um fluxo magnético simples atravessando o anel, isto é, no caso em que a altura do cilindro

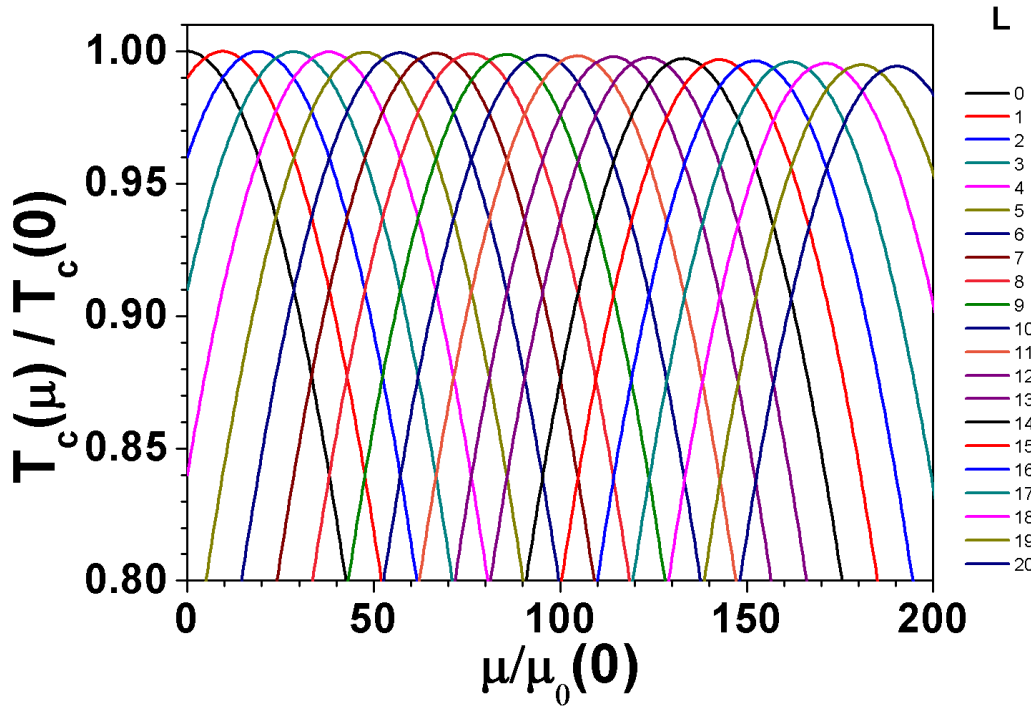


Figura 4.1: A temperatura de Little-Parks $T_c(\mu)$ versus o momento magnético μ é mostrada aqui para o cilindro baixo (altura $Z_0 = 2,0\xi_0$). As curvas para L , se estendendo de 0 a 20, são obtidas da teoria linear (2.33) e descrevem os estados de momento angular aprisionados no cilindro.

é quase nula ou de um campo magnético constante em um cilindro de altura arbitrária.

A figura 4.2 mostra uma estrutura muito mais rica para as linhas correspondentes a diferentes L s do cilindro com $R = 10\xi_0$, devido a heterogeneidade do campo magnético que resulta em distintos fluxos magnéticos atravessando o cilindro, cada um para um diferente plano de interseção z . Note a presença de uma linha de fronteira interna e uma externa(verdadeira). Para entender o gráfico para $R = 10\xi_0$, nós selecionamos algumas poucas linhas para L , mostradas como linhas grossas para fins de melhor visualização: $L = 5, 12, 20$ e 41 . A linha $L = 12$ é um caso chave por causa de sua estrutura com picos duplos com um mínimo local entre eles, uma característica comum para muitas linhas. O primeiro pico é estreito e alto, enquanto o segundo é largo e baixo e ocorre

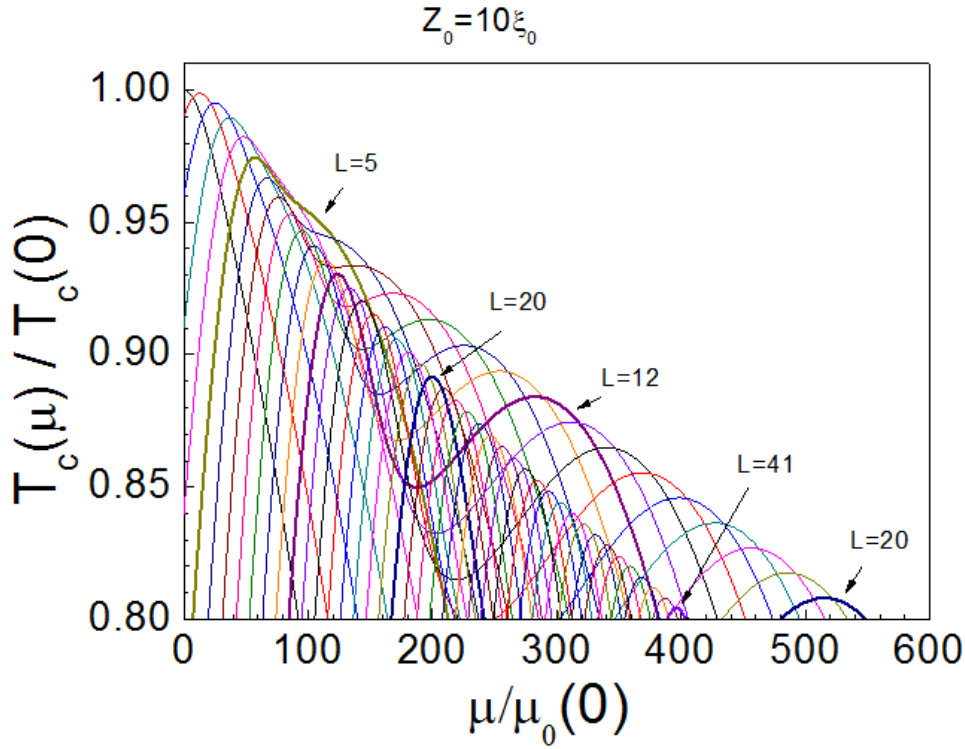


Figura 4.2: A temperatura de Little-Parks $T_c(\mu)$ versus o momento magnético μ é mostrada aqui para o cilindro alto (altura $Z_0 = 10,0\xi_0$). As curvas para L , se estendendo de 0 a 41, são obtidas da teoria linear (2.33) e descrevem os estados de momento angular aprisionados no cilindro. Algumas poucas cruvas são seleccionadas como linhas grossas e suas propriedades serão discutidas no texto.

para momentos magnéticos maiores do que os do primeiro pico. As pontas dos picos estreito e largo da linha para $L = 20$ situam-se ainda dentro da faixa de temperatura mostrada no gráfico, $T_c(\mu)/T_c$ de 0,8 a 1,0. A linha grossa para $L = 5$ mostra o início do segundo pico, não mostrado nas linhas para L menores, que somente tem um pico simples. As linhas para $L = 5$ e 6 podem ser consideradas como linhas de transição para o início do aparecimento do segundo pico e a linha para $L = 7$ é a linha crítica porque o segundo pico está claramente estabelecido para linhas $L = 8$ e seguintes. A curva para $L = 41$ corresponde ao valor mais alto de L neste gráfico e ocorre ao redor de $\mu/\mu_0(0) = 400$ definindo a extremidade de uma linha interna de transição dentro

da região supercondutora. O primeiro pico (estreito) contribui para a verdadeira linha de fronteira somente até $L = 4$ então submerge e forma uma linha de fronteira interna para altos valores de L . Portanto esta linha de fronteira interna é a curva tangente para o máximo dos primeiros picos. Por seu lado, o segundo (largo) pico só contribui para a verdadeira linha de fronteira entre os estados normal e supercondutores para as linhas correspondentes aos valores de $L = 5$ a $L = 20$. Para fins de argumentação nós incluímos as linhas para $L = 5, 6$ e 7 neste grupo, embora o segundo pico esteja somente em um nível embrionário. Em conclusão a linha de fronteira entre o estado supercondutor e normal tem menos momentos angulares para cilindros altos, desde que $L = 20$ é o máximo valor possível alcançado em $\mu/\mu_0 = 510$, enquanto que para o cilindro baixo $L = 20$ é alcançado para $\mu/\mu_0 = 200$.

4.2 Oscilações de Little-Parks na energia livre e na corrente

A teoria não-linear foi usada para obter os próximos gráficos, o que significa que a (3.46) é resolvida numericamente por meio do método de elementos finitos, e depois a energia livre e corrente são calculadas a partir de (3.49) e (3.48), respectivamente. No tratamento adimensional a temperatura T é introduzida pelo ajuste do raio e da altura, dados por $\bar{R}(T)$ e $\bar{Z}_0(T)$, respectivamente.

A figura 4.3 mostra várias curvas de energia livre para distintos L s do cilindro com $Z_0 = 2,0\xi_0$ para as duas temperaturas $T/T_c = 0,8$ e $0,9$. O mínimo de cada curva para L é também um mínimo para a energia livre. Estes mínimos são igualmente espaçados e dois consecutivos associados a curvas para L e $L + 1$ são separados por $\Delta\mu/\mu_0(0) \approx 9,5$ em acordo com nossa análise teórica que prediz $\Delta\mu/\mu_0(0) = I_1/I_2$, concordando com (3.33). Esta posição é independente da temperatura e a figura 4.3 tem uma linha tracejada para indicar que para as duas temperaturas o mínimo está no mesmo valor

de momento magnético.

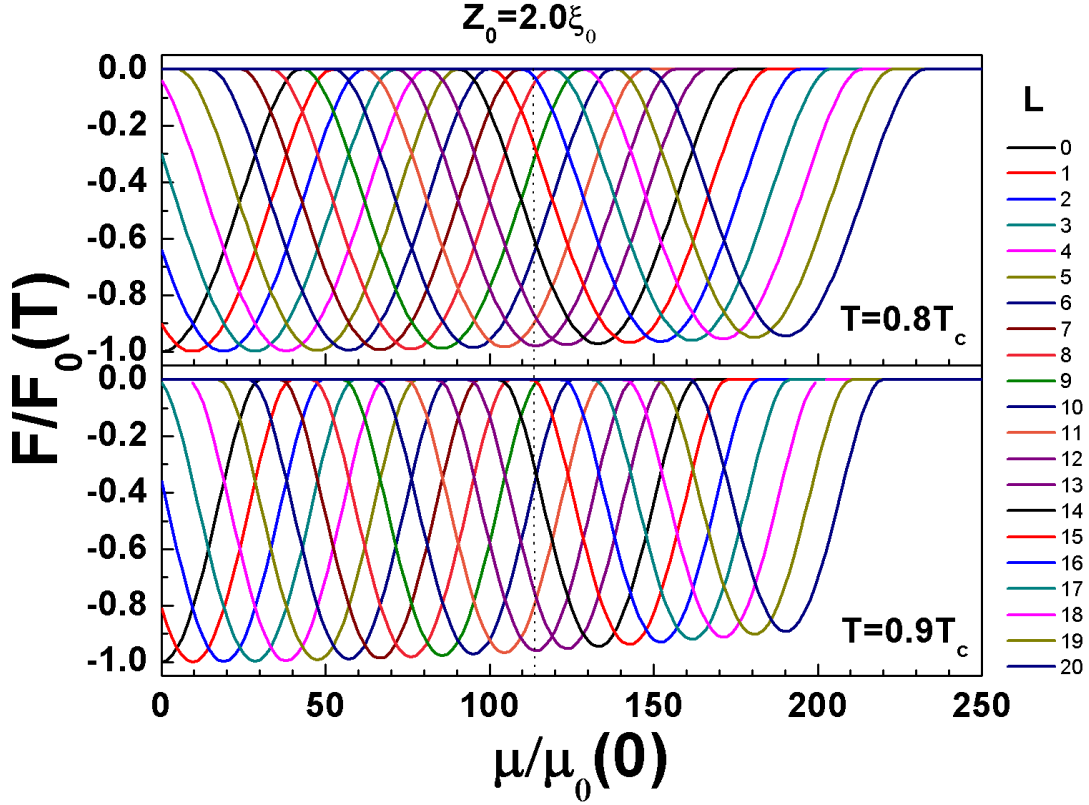


Figura 4.3: A energia livre para o cilindro baixo (altura $Z_0 = 2,0\xi_0$) é mostrada aqui para duas temperaturas $T = 0,8T_c$ e $T = 0,9T_c$. As curvas de energia livre para L , estendendo-se entre 0 e 20, são mostradas versus o momento magnético μ da espira de corrente persistente. Uma linha tracejada indica que a posição do mínimo é aproximadamente a mesma para as duas temperaturas.

A figura 4.4 mostra a anulação da corrente de cada curva para L para as duas temperaturas $T/T_c = 0,8$ e $0,9$. Verifica-se que os zeros são igualmente espaçados, $\Delta\mu/\mu_0(0) \approx 9,5$, também em concordância com nossa análise teórica que prediz $\Delta\mu/\mu_0(0) = 1/I_1$, concordando com (3.34). A linha vertical tracejada é um guia para mostrar que a corrente se anula no mesmo momento magnético independentemente da temperatura.

A figura 4.5 mostra a energia livre do cilindro alto ($Z_0 = 10,0\xi_0$) para a temperatura $T/T_c = 0,8$. Diferentemente do caso para o cilindro baixo, aqui o mínimo da curva para

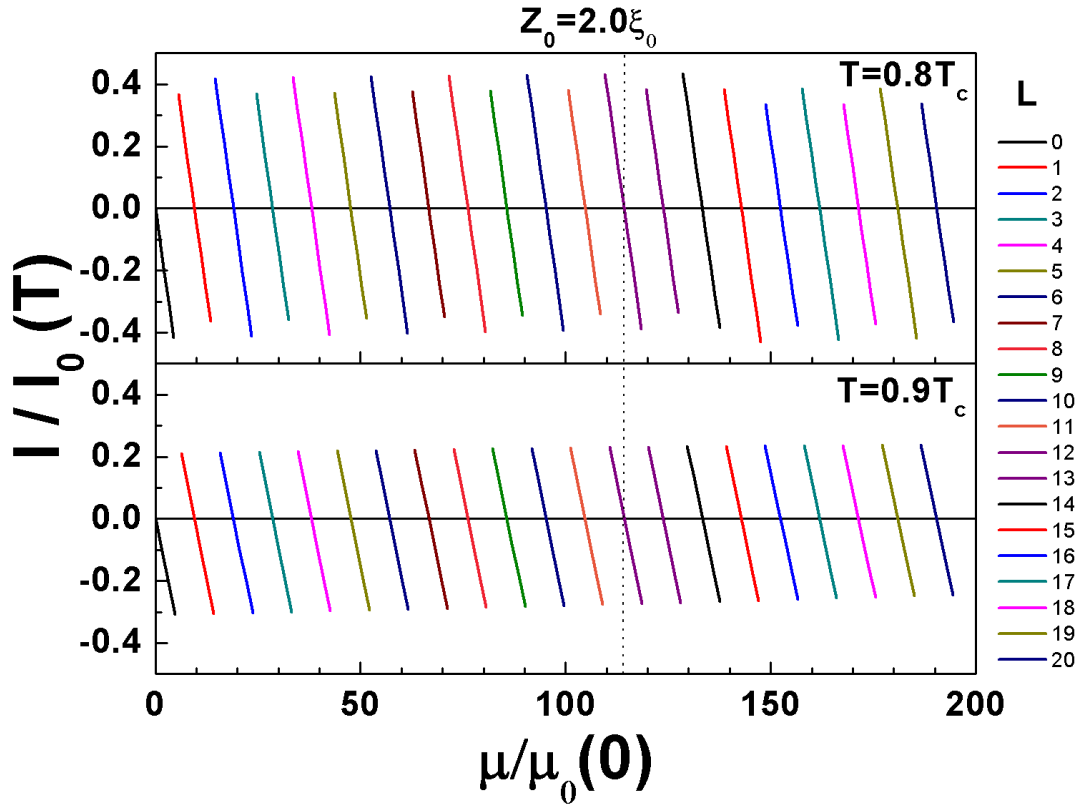


Figura 4.4: A corrente circulando no cilindro baixo (altura $Z_0 = 2,0\xi_0$) é mostrada aqui para duas temperaturas $T = 0,8T_c$ e $T = 0,9T_c$. Curvas de corrente para L , estendendo-se de 0 a 20, são mostradas versus o momento magnético μ da espira de corrente persistente. Uma linha tracejada vertical indica que a anulação da corrente é aproximadamente a mesma para as duas temperaturas.

L não é um mínimo da energia livre, a menos aproximadamente para as primeiras curvas, $L = 0$ a 4. As curvas para L sofrem uma transição na forma quando vão de L pequeno para L grande. Para entender esta transição nós selecionamos as linhas para $L = 3$ e 12, também mostradas no inset, como curvas representativas de cada lado da transição. Enquanto a curva para $L = 3$ tem um mínimo simples, $L = 12$ tem uma forma de poço duplo com dois mínimos em $\mu/\mu_0(0) \approx 130$ e 270, o primeiro sendo o menor em energia livre. Todavia o segundo poço é mais importante do que o primeiro porque ele define o verdadeiro mínimo da energia livre em $\mu/\mu_0(0) \approx 270$. O primeiro

mínimo tem outros estados competindo com energias menores, a mais baixa sendo do estado para $L = 7$, que é mostrado como uma linha grossa para ajudar na visualização. O estado com $L = 7$ é um estado crítico já que define o início da estrutura de poço duplo. Esta estrutura de poço duplo não é uma característica presente em todas as curvas, as primeiras simplesmente não a tem. Em conclusão a energia livre claramente mostra dois tipos, forma de poço simples e duplo, que dominam os regimes de pequenos e grandes momentos magnéticos, respectivamente. Este comportamento é também visto na temperatura $T/T_c = 0,9$, como mostrado na figura 4.6. Lá a curva para $L = 5$ é a curva crítica, e nós mostramos também como linhas grossas, $L = 3$ e $L = 8$, para mostrar a transição de um poço simples para o duplo.

A figura 4.7 mostra que o cilindro com $Z_0 = 10,0\xi_0$ apresenta novas características quando comparado com o problema de Little-Parks padrão. A corrente da curva de transição que separa o comportamento de poço simples (L baixo) para poço duplo (L alto) apresenta comportamento não-usual. Ambos limites são caracterizados por inclinações distintas, e independentemente disto ambas regiões de poço simples e duplo são similares. Esta estrutura de duas inclinações é vista para ambas as temperaturas $T/T_c = 0,8$ e $0,9$. A curva de transição ocorre para $L = 7$ e 5 , respectivamente e mostra um padrão de corrente não-usual próximo de seu zero.

Os zeros da corrente e os mínimos da energia livre coincidem para o efeito Little-Parks padrão, mas a heterogeneidade do campo externo faz com que ocorram para valores distintos do momento magnético, como mostrado aqui. Por esta razão nós mostramos a energia livre para uma dada temperatura ($T = 0,8T_c$) junto com linhas retas verticais associadas com os zeros da corrente. A figura 4.8 mostra para o cilindro com $Z_0 = 2,0\xi_0$ que estas linhas retas verticais caem muito próximas dos mínimos da energia livre em concordância com nossas previsões teóricas derivadas do limite de anel. Nós selecionamos uns poucos valores de momentos magnéticos (linhas vermelhas verticais tracejadas) neste gráfico para análise mais adiante, dados por $\mu/\mu_0 = 9,62$,

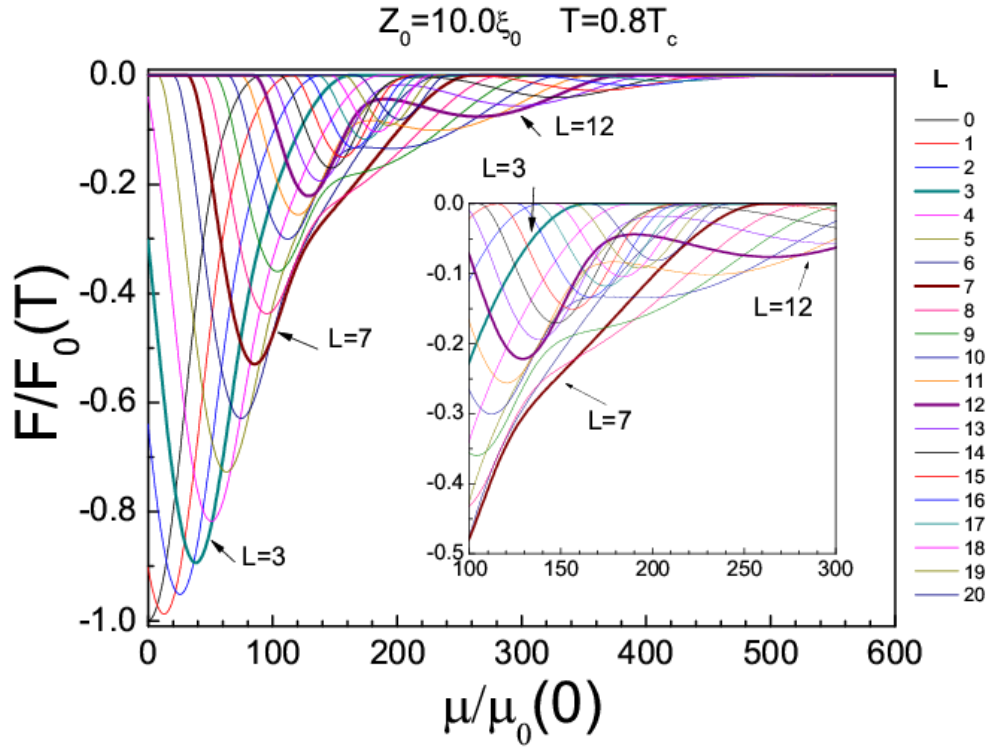


Figura 4.5: A energia livre do cilindro alto (altura $Z_0 = 10,0\xi_0$) é mostrada aqui para a temperatura $T = 0,8T_c$. Curvas de energia livre para L , estendendo-se de 0 a 20, são mostradas versus o momento magnético μ da espira de corrente persistente. Alguns estados para L são destacados como linhas grossas para exemplificar os três regimes existentes: poço simples ($L = 3$), transição ($L = 7$), e poço duplo ($L = 12$). O inset ajuda a visualizar o regime de transição.

66,64, 114,04, e 190,29, cujos mínimos de energia livre correspondem às curvas para $L = 1, 7, 12$, e 20. Curiosamente estas linhas verticais interceptam os pontos correspondentes à interseção das curvas de energia livre para $L - 1$ e $L + 1$. Nós iremos fornecer uma explicação para este fato abaixo. A distância entre linhas verticais consecutivas está em concordância com nossa predição teórica $\Delta\mu_c/\mu_0(0) \approx 9,5$. Nós observamos que a interseção entre as linhas verticais e os pontos de encontro de duas curvas de energia é geral, sendo válido também para o cilindro com $Z_0 = 10,0\xi_0$, como mostrado na figura 4.9. Curiosamente para o cilindro alto as linhas verticais claramente formam dois grupos, um para baixos e um para altos momentos magnéticos com um espaçamento

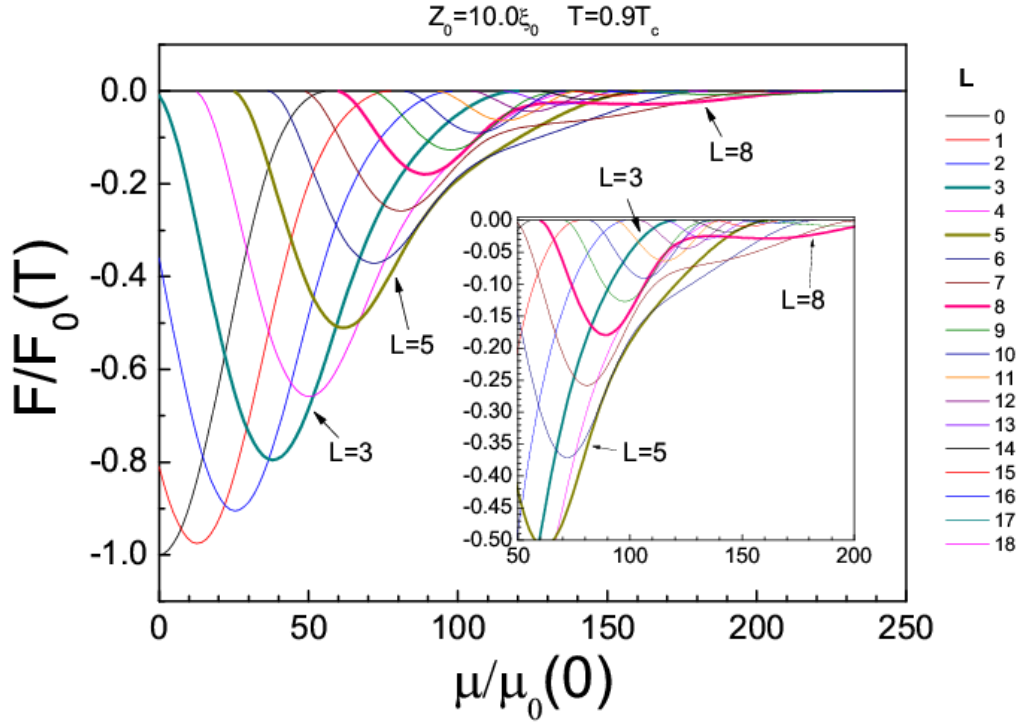


Figura 4.6: A energia livre do cilindro alto (altura $Z_0 = 10,0\xi_0$) é mostrada aqui para a temperatura $T = 0,9T_c$. Curvas de energia livre para L , estendendo-se de 0 a 18, são mostradas versus o momento magnético μ da espira de corrente persistente. Alguns estados para L são destacados como linhas grossas para exemplificar os três regimes existentes: poço simples ($L = 3$), transição ($L = 5$), e poço duplo ($L = 8$). O inset ajuda a visualizar o regime de transição.

entre eles, localizado na curva para $L = 7$. Os dois grupos apresentam nítida separação entre as linhas verticais consecutivas com um comportamento muito distinto em relação aos mínimos de energia livre. As linhas verticais da figura 4.9 dividem-se em dois conjuntos de acordo com sua separação. Para baixos valores de momentos magnéticos (até $L = 5$) a distância entre duas curvas consecutivas é $\Delta\mu/\mu_0(0) \approx 14,7$. Portanto, há uma região de transição ($L = 6,7,8$), e para $L > 9$ as curvas de energia livre são dominadas pelo segundo poço. Nesta região, a distância entre as linhas é dada por $\Delta\mu/\mu_0(0) \approx 30,1$. Comparação entre os cilindros alto e baixo mostram que para momentos magnéticos baixos seus comportamentos são semelhantes, mas não para o

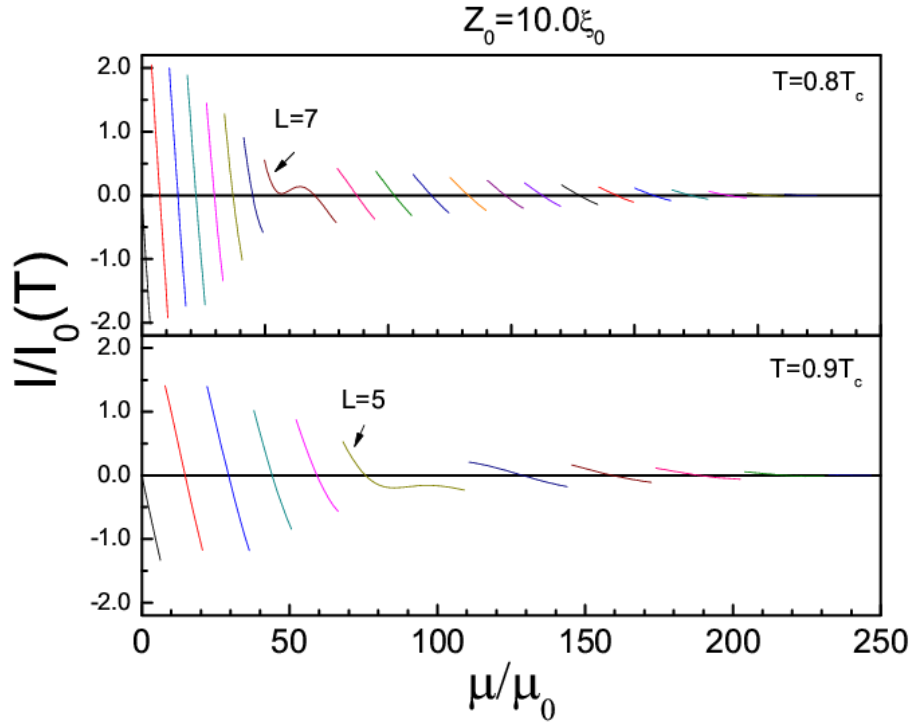


Figura 4.7: A corrente circulando no cilindro alto (altura $Z_0 = 10,0\xi_0$) é mostrada aqui para duas temperaturas $T = 0,8T_c$ e $T = 0,9T_c$. Curvas de corrente para determinada faixa de L , são mostradas versus o momento magnético μ da espira de corrente persistente para os valores de L das figuras (4.5) e (4.6). Os regimes de poço simples e duplo refletem em linhas de corrente com diferentes inclinações e os dois regimes são separados por uma linha de transição, $L = 7$ para $T = 0,8T_c$, e $L = 5$ para $T = 0,9T_c$, respectivamente.

regime de altos momentos magnéticos por causa da forma de poço duplo das curvas para L do cilindro alto. Os zeros da corrente estão distantes dos mínimos da energia livre e ainda coincidem com o cruzamento das curvas de energia livre para $L - 1$ e $L + 1$. Neste caso nós selecionamos também uns poucos valores de momento magnético (linhas vermelhas tracejadas) para análise mais adiante: $\mu/\mu_0 = 12,75, 85,64, 129,02$, e $264,97$. Elas são rotuladas 1, 6, 7, e 11 porque elas caem dentro do regime onde estas curvas para L fornecem os mínimos da energia.

No limite de anel (cilindro muito baixo) é fácil de verificar que o ponto de cruzamento

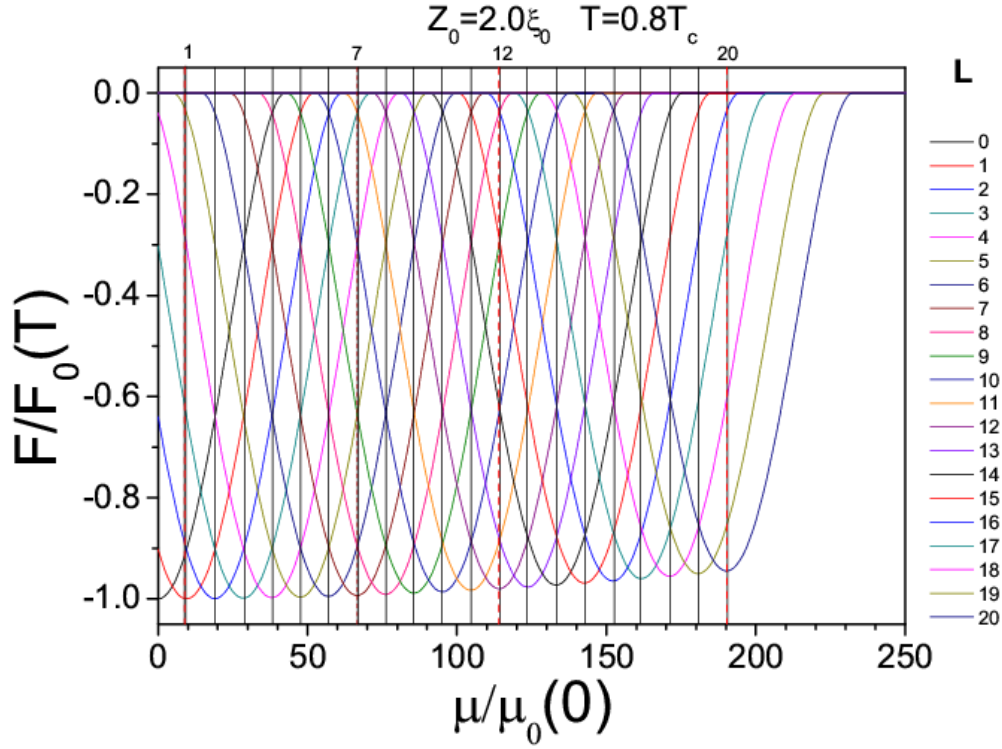


Figura 4.8: Linhas verticais associadas com a anulação da corrente são construídas junto com a energia livre para o cilindro baixo (altura $Z_0 = 2,0\xi_0$) para a temperatura $T = 0,8T_c$. Estados para L , estendendo-se de 0 a 20, são considerados aqui. Os valores de μ iguais a 9,62, 66,64, 114,04 e 190,29, rotulados como (1), (7), (12) e (20), respectivamente, são destacados como linhas tracejadas verticais na cor vermelha e são selecionadas para análise posterior na figura (4.10).

entre quaisquer duas curvas $L-1$ e $L+1$ de energia livre acontece no valor de momento magnético de anulação da corrente de estado L . No limite de anel a amplitude f é constante e as energias livres \mathcal{F}_{L-1} e \mathcal{F}_{L+1} para os estados $L-1$ e $L+1$, respectivamente, são dados por,

$$\mathcal{F}_{L-1} = -\frac{1}{\beta} \left[\alpha_0 \left(\frac{\xi_0}{R} \right)^2 g_{L-1} + \alpha(T) \right]^2 \quad \text{e} \quad (4.1)$$

$$\mathcal{F}_{L+1} = -\frac{1}{\beta} \left[\alpha_0 \left(\frac{\xi_0}{R} \right)^2 g_{L+1} + \alpha(T) \right]^2 \quad (4.2)$$

concordando com (3.22). A seguir consideramos que $\mathcal{F}_{L-1} = \mathcal{F}_{L+1}$ para obter que

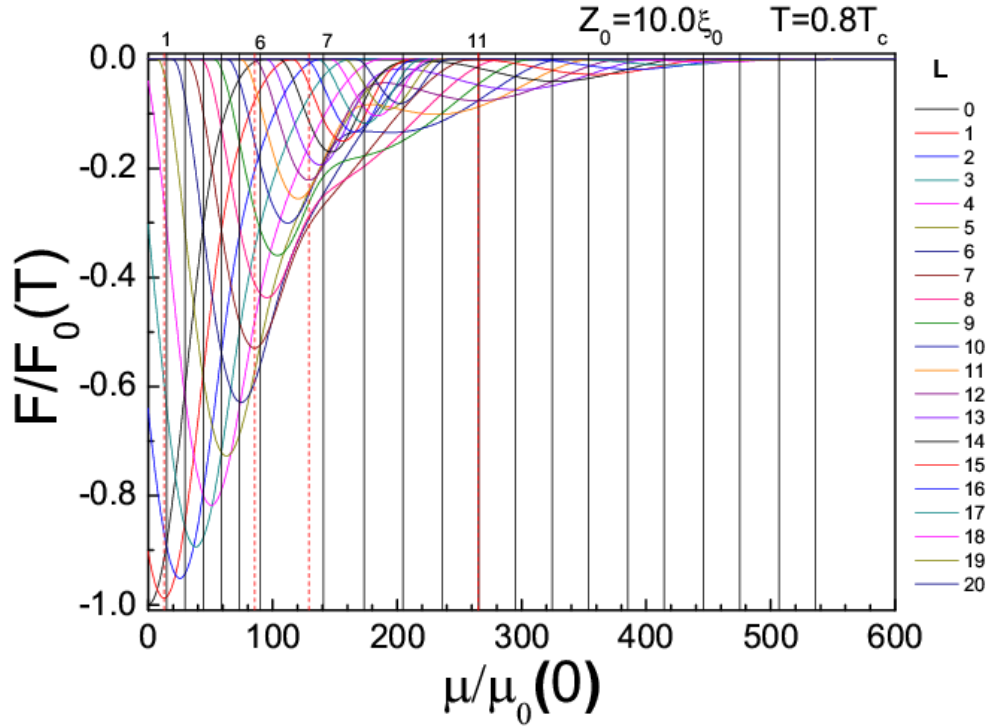


Figura 4.9: Linhas verticais associadas com a anulação da corrente são construídas junto com a energia livre para o cilindro alto (altura $Z_0 = 10,0\xi_0$) para a temperatura $T = 0,8T_c$. Estados para L , estendendo-se de 0 a 20, são considerados aqui. Os valores de μ iguais a 12,75, 85,64, 129,02 e 264,97, rotulados como (1), (6), (7) e (11), respectivamente, são destacados como linhas tracejadas verticais na cor vermelha e são selecionadas para análise posterior na figura(4.11).

$g_{L-1}(\mu^*) = g_{L+1}(\mu^*)$, que nos dá,

$$\int_{-z_0}^{z_0} \frac{dz}{Z_0} \left\{ \left[L - 1 - \frac{\Phi(\mu^*, z)}{\Phi_0} \right]^2 - \left[L + 1 - \frac{\Phi(\mu^*, z)}{\Phi_0} \right]^2 \right\} = 0 \quad (4.3)$$

que uma vez simplificado torna-se

$$\int_{-z_0}^{z_0} \frac{dz}{Z_0} \left[L - \frac{\Phi(\mu^*, z)}{\Phi_0} \right] = 0 . \quad (4.4)$$

Inserindo a definição de fluxo magnético $\Phi(\mu^*, z)$ (2.27), e expressando o resultado como

uma função da integral I_1 , previamente definida, nós obtemos que,

$$\frac{\mu^*}{\mu_0} = L \frac{1}{I_1}. \quad (4.5)$$

Isto mostra que para amplitude constante f temos $\mu^* = \mu_c$, concordando com (3.34). Nós salientamos que nosso estudo numérico evidencia que esta propriedade também é mantida para o cilindro alto onde a amplitude f não é mais constante.

Para obter mais conhecimento sobre a estrutura do estado supercondutor ao longo da altura do cilindro, nós produzimos gráficos em unidades reduzidas para a densidade de corrente $J(z)$, para a densidade de elétrons supercondutores $|\psi(z)|^2$ e para o potencial $V(z)$ como uma função de z . Note que a espira de corrente, que é a fonte do campo magnético heterogêneo, está localizada na região positiva do eixo z , $0,5\xi_0$ acima da borda superior. A figura 4.10 mostra estes gráficos para o cilindro com $Z_0 = 2,0\xi_0$ nos valores de momento magnético (1), (7), (12), e (20). Todos os estados L possíveis cruzando as linhas verticais, como mostrado na figura 4.8, estão nos gráficos de $J(z)$, $|\psi(z)|^2$ e $V(z)$. Para entender a informação dada por estes gráficos nós começamos a discussão dos gráficos de $J(z)$. Porque estes valores de momento magnético são muito próximos dos zeros da corrente nós tomamos esta propriedade para afirmar que os mínimos da energia livre procuram ser tais que suas $J(z)$ integradas ao longo do eixo z resultam em uma corrente nula. A figura 4.10(1a) mostra que somente a curva para $L = 1$ qualifica-se para ser um mínimo da energia livre desde que somente ele cruza o eixo z , portanto nos dando uma corrente positiva para $z < 0$ e negativa para $z > 0$. Concordando com este critério todos as outras curvas para L podem ser descartadas como elas não podem ser estados de corrente nula desde que elas não cruzam o eixo L . Este raciocínio também fornece a regra para selecionar o mínimo da energia livre nas figuras 4.10(2a), (3a) e (4a). O presente critério univocamente seleciona os estados $L = 7, 12, e 20$ entre os outros mostrados nestas figuras, respectivamente, como os

únicos mínimos de energia livre possíveis porque somente eles adaptam-se aos estados de corrente nula. Para o cilindro baixo a densidade supercondutora $|\psi(z)|^2$, e o potencial $V(z)$ também fornecem características capazes de definir univocamente a seleção das curvas para L . Para os estados de mínima energia livre a densidade é quase constante concordando com figuras 4.10(1b), (2b), (3b), e (4b). Semelhantemente o potencial aproxima-se de zero para estes estados como visto nas figuras 4.10(1c), (2c), (3c), e (4c).

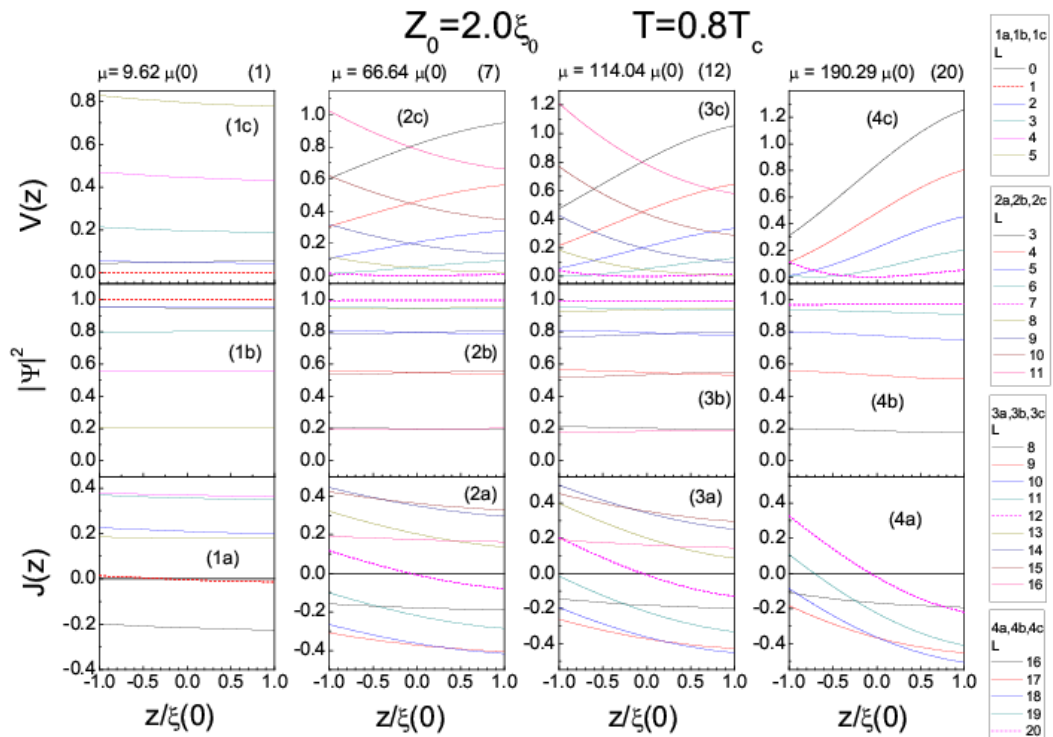


Figura 4.10: A densidade de corrente J , a densidade de pares de Cooper $|\psi|^2$ e o potencial V da equação linear (3.47), ao longo da altura do cilindro são mostrados aqui para o cilindro baixo (altura $Z_0 = 2,0\xi_0$) na temperatura $T = 0,8T_c$. Os valores de μ , selecionados na figura(4.8), e iguais a 9,62, 66,64, 114,04 e 190,29, rotulados como (1), (7), (12) e (20), são considerados para este propósito. A espira de corrente persistente está localizada na posição $1,5\xi_0$. As curvas de L e suas figuras correspondentes são também listadas aqui.

A figura 4.11 mostra estes gráficos para o cilindro com $Z_0 = 10,0\xi_0$ nos valores de momento magnéticos selecionados (1), (6), (7) e (11). A figura 4.11(1a) mostra que no regime de baixos momentos magnéticos o estado L associado com o mínimo da energia livre pode ser judiciosamente selecionado pela condição de corrente nula e é o estado $L = 1$. O mesmo não se mantém para os valores de momentos magnéticos intermediários (6) e (7) onde muitas linhas qualificam-se, ao menos à precisão de olho nu, o que significa que muitas linhas cruzam o eixo z próximo do centro do cilindro possuindo corrente positiva para $z < 0$ e negativa para $z > 0$. Para o limite de alto momento magnético a situação é similar apesar de a corrente anular-se próximo da borda superior do cilindro, $z \approx 5$, por causa da proximidade do forte campo magnético da espira. As mudanças dramáticas que o estado supercondutor sofre pelo aumento do momento magnético são testemunhados na densidade supercondutora $|\psi(z)|^2$, e no potencial $V(z)$. As figuras 4.11(1b), (2b), (3b), e (4b) mostram que a densidade é concentrada principalmente na borda superior do cilindro para $\mu/\mu_0 = 12,75$ que cai no regime de baixo momento magnético. Para os valores intermediários de $\mu/\mu_0 = 85,64$ e $129,02$, nós achamos estados L concentrados em ambas as extremidades até finalmente encontrar que no regime de alto momento magnético, representado por $\mu/\mu_0 = 264,97$, a densidade é concentrada sobretudo na borda inferior. De fato, as figuras 4.11(1c), (2c), (3c), e (4c) mostram que o potencial sofre mudanças dramáticas do regime de baixo para alto momento magnético. No primeiro caso ($\mu/\mu_0 = 85,64$) ele sofre leves alterações de uma extremidade para a outra quando varia de 0 para 1 em unidades reduzidas, enquanto que para o último caso ($\mu/\mu_0 = 264,97$) ele varia de 0 até 23, sendo muito intenso no topo. Estes gráficos explicam as razões para o regime com dois comportamentos distintos apresentados nas oscilações de Little-Parks próxima da espira de corrente.

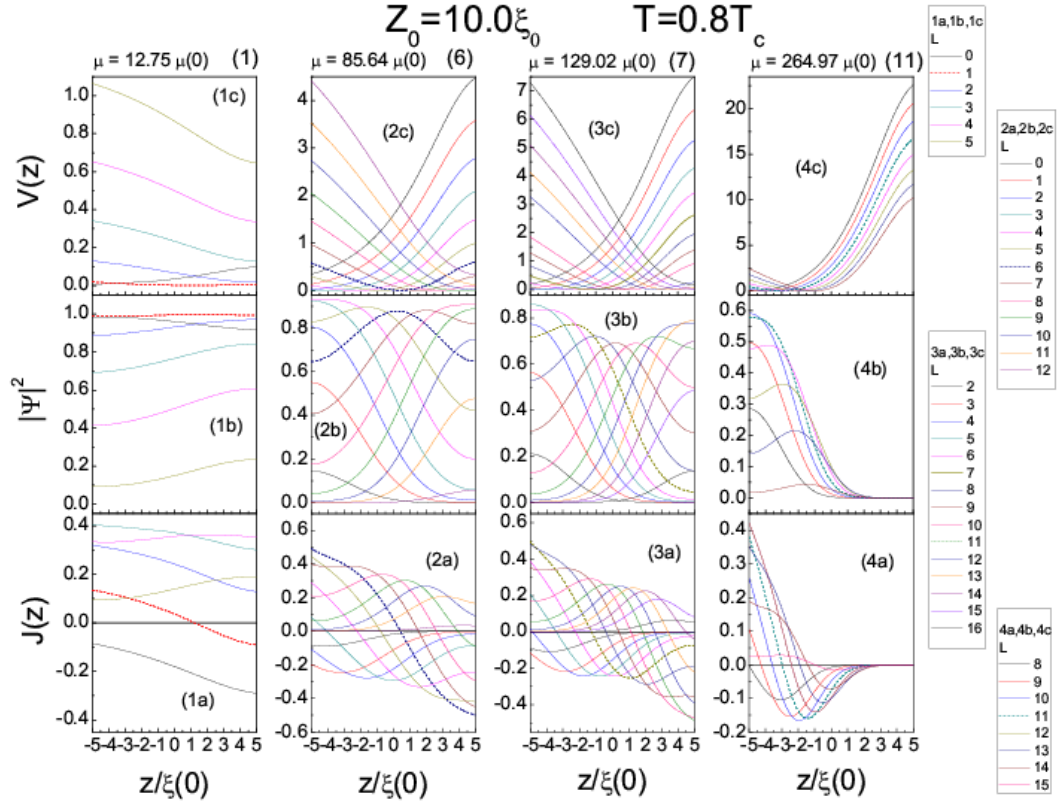


Figura 4.11: A densidade de corrente J , a densidade de pares de Cooper $|\psi|^2$ e o potencial V da equação linear (3.47), ao longo da altura do cilindro são mostrados aqui para o cilindro alto (altura $Z_0 = 10,0\xi_0$) na temperatura $T = 0,8T_c$. Os valores de μ , selecionados na figura(4.9), e iguais a 12,75, 85,64, 129,02 e 264,97, rotulados como (1), (6), (7) e (11), são considerados para este propósito. A espira de corrente persistente está localizada na posição $5,5\xi_0$. As curvas de L e suas figuras correspondentes são também listadas aqui.

Capítulo 5

Considerações Finais

Nós estudamos um cilindro supercondutor de paredes finas com uma espira de corrente persistente posicionada em seu topo. Nós encontramos que a heterogeneidade do campo magnético produzido pela espira traz novas características às oscilações de Little-Parks no cilindro. Para melhor mostrar estas características nós consideramos um cilindro baixo e um alto, tal que a amplitude do parâmetro de ordem possa ser pensada como aproximadamente constante no primeiro caso, mas não no último caso. Nós também obtivemos aqui uma descrição analítica das oscilações de Little-Parks no cilindro baixo que nos dá três momentos magnéticos especiais, definidos pelas (3.33), (3.34) e (3.35), associados com o mínimo da energia livre, a anulação da corrente, e a máxima temperatura alcançada. A partir disto, nós mostramos que a corrente no cilindro de paredes finas sempre se anula em um momento magnético (ou em um valor da corrente persistente da espira) maior do que aquele do mínimo da energia livre ($\mu_c \geq \mu_f$). Com relação ao cilindro alto, nós encontramos novas características quando comparadas ao problema de Little-Parks padrão, que é resumido na figura 4.7. O cilindro alto possui dois regimes, visualizados nos gráficos de energia livre, o de poço simples (L pequeno) e o de poço duplo (L grande), que refletem-se em distintas inclinações no gráfico de corrente versus momento magnético. Os dois regimes de inclinação são separados por

uma linha L de transição que não encaixa-se em nenhum deles. Estes dois regimes e a transição entre eles poderiam ser observáveis em medidas da corrente elétrica circulando no cilindro, por exemplo. Neste trabalho pudemos obter uma maior compreensão do efeito de campos magnéticos heterogêneos em um sistema supercondutor mesoscópico através da análise de características básicas do sistema. A consideração da dependência radial do parâmetro de ordem em um cilindro com paredes grossas é a extensão natural do presente sistema, e pode ser estudado a partir das equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo. O efeito das flutuações supercondutoras nas propriedades de transporte e termodinâmicas do presente sistema [28] também pode ser objeto de estudo na continuidade deste trabalho.

Referências Bibliográficas

- [1] Moshchalkov, V. V., Gielen, L., Dhalle, M., Haesendonck, C. V., and Bruynseraede, Y. *Nature* **361** (1993).
- [2] Little, W. A. and Parks, R. D. *Phys. Rev. Lett.* **9**, 9–12 Jul (1962).
- [3] Moshchalkov, V. V., Gielen, L., Strunk, C., Jonckheere, R., Qiu, X., Haesendonck, C. V., and Bruynseraede, Y. *Nature* **373**, 319 (1995).
- [4] Morelle, M., Golubović, D. S., and Moshchalkov, V. V. *Phys. Rev. B* **70**, 144528 Oct (2004).
- [5] Gammel, P. L., Polakos, P. A., Rice, C. E., Harriott, L. R., and Bishop, D. J. *Phys. Rev. B* **41**, 2593–2596 Feb (1990).
- [6] Zhang, X. and Price, J. C. *Phys. Rev. B* **55**, 3128–3140 Feb (1997).
- [7] Bourgeois, O., Skipetrov, S. E., Ong, F., and Chaussy, J. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 057007 Feb (2005).
- [8] Carillo, F., Papari, G., Stornaiuolo, D., Born, D., Montemurro, D., Pingue, P., Beltram, F., and Tafuri, F. *Phys. Rev. B* **81**, 054505 Feb (2010).
- [9] Bluhm, H., Koshnick, N. C., Huber, M. E., and Moler, K. A. *Phys. Rev. Lett.* **97**, 237002 Dec (2006).

- [10] Erin, Y. S., Kuplevakhski, S. V., and Omelyanchuk, A. N. *Low Temp. Phys.* **34**, 891 (2008).
- [11] Aladyshkin, A. Y., Ryzhov, D. A., Samokhvalov, A. V., Savinov, D. A., Mel'nikov, A. S., and Moshchalkov, V. V. *Phys. Rev. B* **75**, 184519 May (2007).
- [12] Berger, J. and Rubinstein, J. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 320–322 Jul (1995).
- [13] Benoist, R. and Zwerger, W. *Z. Phys. B* **103**, 377 (1997).
- [14] Bruyndoncx, V., Van Look, L., Verschuere, M., and Moshchalkov, V. V. *Phys. Rev. B* **60**, 10468–10476 Oct (1999).
- [15] Zha, G. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems* **84**, 459–466 (2011). 10.1140/epjb/e2011-20574-2.
- [16] Poole Jr., C. P., Farach, H. A., Creswick, R. J., and Prozorov, R. *Superconductivity*. Academic Press, 2nd ed., (2007).
- [17] Tinkham, M. *Introduction to Superconductivity*. MacGraw-Hill Inc., 2nd ed., (1996).
- [18] de Gennes, P. G. *Superconductivity of Metals and Alloys*. Westview Press, (1999).
- [19] Gomes, R. R., de Oliveira, I. G., and Doria, M. M. *Phys. Rev. B* **85**, 144512 Apr (2012).
- [20] Deaver, B. S. and Fairbank, W. M. *Phys. Rev. Lett.* **7**, 43–46 Jul (1961).
- [21] Doll, R. and Näbauer, M. *Phys. Rev. Lett.* **7**, 51–52 Jul (1961).
- [22] Lévy, L. P., Dolan, G., Dunsmuir, J., and Bouchiat, H. *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2074–2077 Apr (1990).

- [23] Orlando, T. P. and Delin, K. A. *Foundations of Applied Superconductivity*. Addison-Wesley, Reading, MA, (1991).
- [24] Michotte, S., Lucot, D., and Mailly, D. *Phys. Rev. B* **81**, 100503 Mar (2010).
- [25] Selvaggi, J. P. *Multipole Analysis of Circular Cylindrical Magnetic Systems*. Ph.D.thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, NY, USA, (2005).
- [26] von Oppen, F. and Riedel, E. K. *Phys. Rev. B* **46**, 3203–3206 Aug (1992).
- [27] Conduit, G. J. and Meir, Y. *Phys. Rev. B* **84**, 064513 Aug (2011).
- [28] Schwiete, G. and Oreg, Y. *Phys. Rev. B* **82**, 214514 Dec (2010).