

**CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Aluno: CARLOS EDUARDO LOPES DUCAP**

**Orientador: Prof. Dr. JOSÉ MARTINS SALIM**

**ESTABILIDADE DE MODELOS DE  
UNIVERSO MAGNÉTICO**

**Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação do CBPF  
como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em  
Física.**

**RIO DE JANEIRO, 31 DE JULHO DE 2014.**

A todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para que eu me tornasse o que sou hoje.

# Agradecimentos

A verdadeira gratidão não pode, e nem deveria, ser expressa em palavras. Agradecer é demonstrar em atitudes que o esforço e a dedicação daqueles que lhe apoiaram não foram em vão. Essas atitudes tornam-se mais árduas quando nota-se que o mundo atual carece de alguns elementos básicos de formação de caráter, como Honra, Coragem, Lealdade, Sabedoria, Compaixão e outros. Desta forma, a melhor maneira de expressar minha gratidão neste trabalho de pesquisa seria por meio desta mesma redação. No entanto, seria deselegante não citar algumas pessoas que ao longo deste percurso me auxiliaram.

Ao professor José Martins Salim, que mais do que um orientador, revelou-se um Mestre. Espero que nossa relação perdure.

À Família, na figura de meus pais, pela educação que me deram, pelas oportunidades que me proporcionaram, pelo que me ensinaram e também pelo que não me ensinaram, me garantindo a chance de cometer erros e me fortalecer, pois não existe crescimento sem adversidade.

À Minha querida irmã, companheira de risadas e lágrimas, brigas e momentos de serenidade, que mesmo sendo mais jovem do que eu já foi capaz de me orientar em diversos momentos.

A meus outros entes queridos que sempre me apoiaram, em especial minha avó Regina, que me estimulou a estudar desde pequeno e minha prima Ju-

liana, minha amiga e companheira durante meus primeiros anos de vida e que até hoje me faz rir com sua forma irreverente de ser.

Aos Amigos. Citar aqui todos os amigos que contribuíram para a minha formação me faria prolongar demasiadamente este texto. Escolhi alguns que atuaram recentemente e de forma mais direta para representar os outros. Tânia Cristiane Hermínio, pelo apoio que me deu em um momento de tristeza. Angelah Mattos e Antônio Domingues, amigos com mais estrada que me aconselharam da melhor forma possível quando a eles recorri. Cinthya Blois e Rodrigo Rodrigues pelas horas de estudo, e gargalhadas que passamos juntos. Aline Araújo, pelas discussões que travamos acerca de modelos de Universo Magnético. Anna Paula Bacalhau, pelas dicas de referências e ajuda no tratamento dos sistemas dinâmicos. Vanessa Pacheco, pela revisão que fez da Dissertação.

Aqueles que não foram citados, por favor, não se sintam desmerecidos. Sei reconhecer o valor de cada um em minha formação.

Ao CNPq, pelo financiamento.

# Sumário

Agradecimentos . . . . .	i
Sumário . . . . .	iii
Convenções . . . . .	vi
Resumo . . . . .	vii
Abstract . . . . .	viii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Eletrodinâmica Não Linear como Fonte da Geometria</b>	<b>4</b>
2.1 Tensor Energia-Momento de uma Teoria Não Linear . . . . .	6
2.2 Propriedades de um Fluido . . . . .	9
2.3 Procedimento da Média de Tolman-Ehrenfest . . . . .	10
2.4 Universo Magnético . . . . .	12
<b>3 Cosmologia em FLRW: Universo Magnético e Tri-Curvatura Espacial</b>	<b>13</b>
<b>4 Estabilidade em um Modelo de Universo Magnético</b>	<b>19</b>
4.1 A Questão da estabilidade . . . . .	20
4.2 Sistemas Dinâmicos . . . . .	23
4.2.1 Sistemas Lineares em duas Dimensões . . . . .	23
4.2.2 Sistemas Não Lineares Autônomos . . . . .	33
4.2.3 Sistema Dinâmico para um Universo Magnético . . . . .	35

<b>5</b>	<b>Lagrangeanas Fonte</b>	<b>36</b>
5.1	A Teoria de Euler-Heisenberg . . . . .	37
5.1.1	A Lagrangeana de Euler-Heisenberg como fonte da Cosmologia . . . . .	39
5.1.2	Análise da Estabilidade do Modelo gerado a partir de EH . . . . .	46
5.1.3	Sistema Dinâmico e Espaço de Fase do modelo gerado a partir de EH . . . . .	49
5.1.4	A Interpretação de Dois Fluidos . . . . .	55
5.2	Forma Exponencial da Eletrodinâmica Não Linear (ENE) . . . . .	57
5.2.1	ENE como fonte da Cosmologia . . . . .	58
5.2.2	Análise da Estabilidade do Modelo gerado a partir da ENE . . . . .	63
5.2.3	Sistema Dinâmico e Espaço de Fase do Modelo gerado a partir da ENE . . . . .	64
5.3	Forma Logarítmica da Eletrodinâmica Não Linear (LNE) . . . . .	67
5.3.1	LNE como fonte da Cosmologia . . . . .	68
5.3.2	Análise da Estabilidade do Modelo gerado a partir da LNE . . . . .	71
5.3.3	Sistema Dinâmico e Espaço de Fase do Modelo gerado a partir da LNE . . . . .	72
5.4	A Teoria de Born-Infeld Estendida (BIE) . . . . .	75
5.4.1	BIE como fonte da Cosmologia . . . . .	78
5.4.2	Análise da Estabilidade do Modelo gerado a partir de BIE . . . . .	84
5.4.3	Sistema Dinâmico e Espaço de Fase do Modelo gerado a partir de BIE . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Acoplamento Não Mínimo com a Eletrodinâmica Linear</b>	<b>89</b>
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>93</b>

<i>Sumário</i>	v
----------------	---

<b>Apêndices</b>	<b>95</b>
------------------	-----------

Apêndice A . . . . .	95
----------------------	----

Apêndice B . . . . .	97
----------------------	----

Apêndice C . . . . .	100
----------------------	-----

Apêndice D . . . . .	103
----------------------	-----

<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>108</b>
-----------------------------------	------------

# Convenções

- Assinatura da métrica:  $(+, -, -, -)$
- Letras gregas [ex:  $\alpha, \beta$ ], quando utilizadas como índices, assumem os valores de 0 a 3.
- Letras latinas [ex:  $i, j$ ], quando utilizadas como índices, assumem os valores de 1 a 3.
- O índice 0 representa a coordenada temporal.
- Os índices 1, 2 e 3 representam coordenadas espaciais.
- Parênteses em índices indicam simetrização. [ex:  $T_{(\mu\nu)} \Rightarrow T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ ]
- Colchetes em índices indicam antissimetrização. [ex:  $F_{[\mu\nu]} \Rightarrow F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ ]
- A Convenção de Einstein para somatórios:  $V^\mu V_\mu = \sum_{\mu=0}^3 V^\mu V_\mu$
- ”,” em equações representa derivada parcial. [ex:  $V_{\mu,\nu} = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu}$ ]
- O Tensor de Curvatura:  $R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\beta,\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\beta} + \Gamma^\alpha_{\nu\gamma}\Gamma^\gamma_{\beta\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma_{\nu\mu}$
- O Tensor de Ricci:  $g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = R_{\mu\nu}$
- O Escalar de Curvatura:  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$

# Resumo

Esse trabalho apresenta um cenário proposto com o intuito de evitar a singularidade cosmológica dos modelos de Universo homogêneo e isotrópico, o Universo Magnético. Este resulta do acoplamento mínimo entre a eletrodinâmica não linear e o campo gravitacional. As motivações para o tratamento da eletrodinâmica não linear como fonte da curvatura espacial são esclarecidas ao longo do trabalho. Uma análise da estabilidade dos modelos através de um critério já bem estabelecido na literatura é realizada de forma crítica, bem como a evolução dos sistemas físicos gerados no espaço de fase. O acoplamento não mínimo da eletrodinâmica linear com o campo gravitacional também é brevemente discutido. As conclusões retomam a discussão da estabilidade e levantam questionamentos sobre este procedimento como critério de discriminação entre modelos propostos.

# Abstract

In this work is presented a scenario proposed with the goal of avoiding the cosmological singularity in homogeneous and isotropic models for the Universe, called Magnetic Universe. This rises from the minimal coupling between nonlinear electrodynamics and the gravitational field. The motivations for the treatment of nonlinear electrodynamics as a source for spacial curvature are clarified throughout the work. A review of the stability of the models using an already well stated criterion is performed in a more critical way, as the physical systems evolution in the phase space. The non minimal coupling between linear electrodynamics and the gravitational field is also briefly discussed. The conclusions bring back the discussion concerning stability and rise some questions about this procedure as a criterion for distinguish good and bad models.



# Capítulo 1

## Introdução

Em 1915, na tentativa ampliar a recém formulada Teoria da Relatividade Restrita, incluindo nesta processos acelerados, A. Einstein construiu uma nova teoria da gravitação, a Teoria da Relatividade Geral (R.G.). Após a confirmação de sua validade para processos nos quais o campo gravitacional é fraco, a extensão natural seria encontrar uma solução cosmológica para a teoria. Vários cenários foram idealizados [1] no sentido de tentar descrever o comportamento do Universo como uma totalidade.

Contudo, as primeiras soluções da R.G. continham um aspecto desconcertante para uma teoria física: a presença de uma singularidade no espaço-tempo que poderia ser alcançada em um tempo finito. De fato, entre 1960 e 1970, Hawking, Penrose e Geroch demonstraram [2] que tais singularidades eram resultados inevitáveis de uma grande classe de teorias da gravitação, uma vez admitidas certas condições plausíveis fisicamente, como a positividade da energia e certos pressupostos acerca de causalidade. Uma extensa análise desses resultados é feita em [3].

A fim de transpassar o problema da singularidade inicial, várias propostas foram feitas gerando modelos isentos dela. Neste trabalho, o mecanismo utilizado para evitar a singularidade foi o acoplamento mínimo com a eletrodinâmica não linear. Uma análise do acoplamento não mínimo com a curvatura também é brevemente realizada.

Em um cenário onde a curvatura é muito intensa e a densidade de energia e a temperatura muito altas, o fluido pode ser compreendido como um plasma composto basicamente de prótons e elétrons. Tal configuração gera campos elétricos e magnéticos em todas as direções que, quando somados em larga escala, podem ser considerados nulos. O plasma também pode ser considerado como um condutor perfeito, uma vez que o livre caminho médio das partículas é muito maior do que a distância necessária para que haja interação. Essa corrente livre é suficiente para atuar como uma "blindagem" para o campo elétrico e por esse motivo, segundo a lei de Ohm, o quadrado do campo elétrico também pode ser considerado nulo nas proximidades da singularidade, restando apenas o quadrado do campo magnético, cujo fluxo se mantém constante, e que é a única fonte dos modelos considerados nesta dissertação, razão pela qual são chamados Universos Magnéticos (U.M.).

O referido mecanismo foi escolhido devido também ao fato de que a eletrodinâmica não linear propõe soluções para questões remanescentes da eletrodinâmica clássica, como a da singularidade do campo elétrico no ponto onde se encontra uma carga pontual, além de fornecer explicações para a criação de pares de partículas, o que também pode ser explicado com um acoplamento não mínimo com a eletrodinâmica de Maxwell. As motivações para a eletrodinâmica não linear advêm, principalmente, de processos quânticos nos quais, por razões da própria mecânica quântica, os campos elétrico e magnético não podem ser medidos simultaneamente e, por esse motivo, o escalar  $F$  nunca se anula, como é mostrado no Apêndice A.

Este trabalho segue a seguinte sequência: no Capítulo 2 é feita uma apresentação do fluido cósmico gerado a partir de uma Lagrangeana eletromagnética qualquer, e suas propriedades definidas de forma genérica. É assumido o procedimento das médias de Tolman-Ehrenfest para que, então, as propriedades remanescentes do fluido assumam formas gerais que possam ser adaptadas posteriormente para cada caso estudado.

No Capítulo 3 é apresentada a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) e as equações resultantes de sua implementação nas equações de Einstein da R.G. São definidas também as possibilidades de tri-curvatura para que seja factível a botenção de um *bounce* em algum momento nos modelos.

No Capítulo 4 é feita uma apresentação da questão que se coloca sobre o quadrado da velocidade de propagação do som em um fluido, bem como um estudo introdutório sobre sistemas dinâmicos e sua aplicação aos modelos discutidos.

No Capítulo 5 são analisados quatro modelos a partir de Lagrangianas eletromagnéticas, sua eficácia em remover a singularidade cosmológica e sua estabilidade. Os resultados inéditos também são apresentados neste capítulo.

Finalmente, no Capítulo 6 é discutido o acoplamento não mínimo e justifica-se porque este tipo de acoplamento não se sustenta perante a proposta das Lagrangianas não lineares acopladas minimamente com a gravitação.

As conclusões apresentam questionamentos a respeito da eficácia dos procedimentos considerados, principalmente os que determinam a estabilidade dos modelos, para caracterizá-los como uma boa representação do Universo primordial.

## Capítulo 2

# Eletrodinâmica Não Linear como Fonte da Geometria

Não há dúvida de que o sucesso da eletrodinâmica de Maxwell está ligado a sua linearidade. A extrapolação desta característica para todo o Universo constitui uma hipótese de trabalho aceitável e seu resultado é mostrado no Apêndice B. Entretanto, seria ingênuo esperar que o Universo fosse descrito apenas com essas extrapolações. De fato, o estudo da cosmologia vem mostrando que essas generalizações deveriam passar por um exame crítico e que teorias não lineares devem ser examinadas e suas previsões confrontadas com observações no contexto cosmológico [4].

Um exemplo notável está ligado ao tratamento dado por Euler e Heisenberg [5], os quais exibiram essa não linearidade em processos quânticos que resultaram em um tipo de polarização do vácuo relacionado à criação de pares virtuais de partículas e anti-partículas quando o campo elétrico atinge seu valor máximo. Essa teoria será analisada em um contexto cosmológico na seção 5.1.

De forma independente, em 1930, Born e Infeld [6] desenvolveram um modelo de teoria não linear que tinha como objetivo tratar a questão da singularidade do elétron e que, devido à elegância de sua estrutura formal, serve ainda hoje como paradigma de teorias de calibre associadas a diferentes cam-

pos vetoriais, os quais desempenham um papel fundamental nas teorias de partículas elementares de altas energias. A teoria de Born-Infeld é tratada no cenário cosmológico no Apêndice C e uma extensão dela, proposta em [7], é apresentada como fonte para a cosmologia na seção 5.4. Além dessas, outras duas teorias não lineares são analisadas como fonte da cosmologia no Capítulo 5, a *Exponential form of nonlinear electrodynamics* (ENE) e a *Logarithmic form of nonlinear electrodynamics* (LNE). Suas motivações estão descritas no início de cada seção.

## 2.1 Tensor Energia-Momento de uma Teoria Não Linear

As teorias Eletromagnéticas podem ser construídas a partir dos dois escalares  $F$  e  $G$ , estes, por sua vez, construídos com o tensor de Faraday ( $F_{\mu\nu}$ ) e seu dual ( $\tilde{F}_{\mu\nu}$ ) a partir dos campos elétrico ( $\vec{E}$ ) e magnético ( $\vec{B}$ ),

$$\mathcal{L} : \mathcal{L}(F, G) \quad / \quad F = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \text{e} \quad G = F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta},$$

com  $\eta^{\mu\nu\alpha\beta} = -\frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}$

Assim, é possível construir uma ação partindo de uma lagrangeana eletromagnética qualquer,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(F, G).$$

Utilizando o princípio da ação mínima:

$$\delta S = \delta \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(F, G) = 0,$$

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(F, G) &= \int d^4x (\delta \sqrt{-g}) \mathcal{L}(F, G) + \sqrt{-g} (\delta \mathcal{L}(F, G)) \\ &= \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\rho\sigma} \delta g_{\rho\sigma} \mathcal{L}(F, G) + \sqrt{-g} (\mathcal{L}_F \delta F + \mathcal{L}_G \delta G) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{g^{\rho\sigma}}{2} \delta g_{\rho\sigma} \mathcal{L}(F, G) + \mathcal{L}_F \delta F + \mathcal{L}_G \delta G \right]. \end{aligned}$$

A variação dos escalares fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta F &= \delta(F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}) = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta(F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}) + 2F^{\rho\alpha} F_{\alpha}{}^{\sigma} \delta g_{\rho\sigma}, \\ \delta G &= \delta(F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}) = \frac{\eta^{\mu\nu\alpha\beta}}{2} \delta(F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}) - \frac{\eta^{\mu\nu\alpha\beta}}{2} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \delta g_{\rho\sigma}. \end{aligned}$$

Desta forma obtém-se a partir do princípio da ação mínima a expressão:

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{g^{\rho\sigma}}{2} \mathcal{L}(F, G) + 2\mathcal{L}_F F^{\rho\alpha} F_{\alpha}{}^{\rho} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_G G g^{\rho\sigma} \right) \delta g_{\rho\sigma} \\ + \int d^4x \sqrt{-g} \left( \mathcal{L}_F g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + \mathcal{L}_G \frac{\eta^{\mu\nu\alpha\beta}}{2} \right) \delta(F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}) = 0 \end{aligned}$$

Tomando a variação com relação a métrica, obtém-se uma expressão para o tensor energia-momento como função da lagrangeana eletromagnética e suas derivadas com relação aos escalares  $F$  e  $G$ ,

$$T_{\mu\nu} = -4\mathcal{L}_F F_{\mu}{}^{\alpha} F_{\alpha\nu} + (\mathcal{L}_G G - \mathcal{L}(F, G))g_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

$$\text{com } \mathcal{L}_F = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_G = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G}.$$

Utilizando agora a definição de  $F_{\mu\nu}$  em termos das projeções dos campos elétrico e magnético apresentadas em [4],

$$F_{\mu\nu} = E_{\mu}V_{\nu} - E_{\nu}V_{\mu} + \eta_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} V_{\alpha}B_{\beta}. \quad (2.2)$$

Cuja relação dual é obtida substituindo  $E_{\mu}$  por  $B_{\mu}$  e  $B_{\mu}$  por  $-E_{\mu}$  e assume a seguinte forma:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = B_{\mu}V_{\nu} - B_{\nu}V_{\mu} - \eta_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} V_{\alpha}E_{\beta} \quad (2.3)$$

As equações (2.2) e (2.3) fornecem para os escalares as expressões explícitas em termos de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ :

$$F = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2),$$

$$G = \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -4\vec{E} \cdot \vec{B},$$

e utilizando a equação (2.2) é possível calcular o primeiro termo da equação (2.1).

$$F_{\mu}{}^{\alpha}F_{\alpha\nu} = g_{\mu\beta}F^{\beta\alpha}F_{\alpha\nu} = E^2V_{\mu}V_{\nu} - E_{\mu}E_{\nu} + Q_{(\mu}V_{\nu)} + B^2V_{\mu}V_{\nu} - B_{\mu}B_{\nu} - B^2g_{\mu\nu},$$

em que

$$Q_{\mu} = \eta_{\mu\alpha\rho\sigma}E^{\alpha}V^{\rho}B^{\sigma}.$$

Tem-se, então, a expressão final para o tensor energia momento.

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & -4\mathcal{L}_F[E^2V_{\mu}V_{\nu} - E_{\mu}E_{\nu} + Q_{(\mu}V_{\nu)} + B^2V_{\mu}V_{\nu} - B_{\mu}B_{\nu} - B^2g_{\mu\nu}] \\ & +(\mathcal{L}_G G - \mathcal{L}(F, G))g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

E seu traço:

$$T = T_{\mu}^{\mu} = -8\mathcal{L}_F[E^2 - B^2] - 4(\mathcal{L}(F, G) - \mathcal{L}_G G).$$

A partir da equação (2.4) é possível determinar as propriedades físicas do fluido decompondo o tensor  $T_{\mu\nu}$  em suas partes irreduzíveis. Isso será feito na próxima seção.

## 2.2 Propriedades de um Fluido

A Teoria da Relatividade Especial mostra como obter as propriedades de um fluido a partir de seu tensor energia-momento. A densidade de energia ( $\rho$ ), a pressão ( $p$ ), o fluxo de calor ( $q^\mu$ ) e a pressão anisotrópica ( $\pi_{\mu\nu}$ ) são obtidos através de projeções na quadri-velocidade do fluxo do fluido  $V^\mu$  ou no espaço ortogonal a este, por meio do projetor  $h^{\mu\nu} = (g^{\mu\nu} - V^\mu V^\nu)$ .

A densidade de energia é obtida projetando  $T_{\mu\nu}$  duas vezes na quadri-velocidade,

$$\rho = T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = -4\mathcal{L}_F E^2 + (\mathcal{L}_G G - \mathcal{L}(F, G)).$$

A pressão é obtida através da projeção de  $T_{\mu\nu}$  no espaço ortogonal ao observador,

$$p = -\frac{1}{3} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = -\frac{4}{3} \mathcal{L}_F (2B^2 - E^2) + (\mathcal{L}(F, G) - \mathcal{L}_G G).$$

O fluxo de calor é definido como a projeção de  $T_{\mu\nu}$  na quadri-velocidade e, posteriormente, no seu espaço ortogonal ou vice-versa,

$$q_\mu = T_{\alpha\beta} V^\beta h^\alpha{}_\mu = -4\mathcal{L}_F Q_\mu.$$

Por último, a pressão anisotrópica é obtida por uma dupla projeção de  $T_{\mu\nu}$  no espaço ortogonal ao observador subtraído o seu traço,

$$\pi_{\mu\nu} = T_{\alpha\beta} h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu + p h_{\mu\nu} = 4\mathcal{L}_F E_\mu E_\nu + \frac{4}{3} \mathcal{L}_F E^2 h_{\mu\nu} + 4\mathcal{L}_F B_\mu B_\nu + \frac{4}{3} \mathcal{L}_F B^2 h_{\mu\nu}.$$

Vale notar que ao tomar o traço de  $\pi_{\mu\nu}$ , verifica-se que este é identicamente nulo, como previsto pela relatividade:

$$\pi = \pi^\mu{}_\mu = -4\mathcal{L}_F E^2 + 4\mathcal{L}_F E^2 - 4\mathcal{L}_F B^2 + 4\mathcal{L}_F B^2 = 0.$$

## 2.3 Procedimento da Média de Tolman-Ehrenfest

Neste trabalho considera-se que, no universo primordial, o fluido cósmico encontrava-se em equilíbrio térmico a altas temperaturas. Assim, os campos elétrico e magnético distribuíam-se de forma homogênea e isotrópica, podendo ser tratados como nulos em média. Tal configuração pode ser representada por uma cavidade com uma geometria descrita pelo modelo de FLRW. Adota-se, então, o procedimento da média desenvolvido por Tolman e Ehrenfest [8], uma vez que o espaço é tri-dimensional e não há mudança no sistema de coordenadas [9].

$$\bar{X} \doteq \lim_{v \rightarrow v_0} \frac{1}{v} \int X \sqrt{-h} d^3x^i,$$

em que  $h = \det h_{\mu\nu}$ .

Utilizando esta definição, os campos elétrico e magnético assumem, em média, os seguintes valores:

$$\begin{aligned} E_\mu = (0, E_i) \quad \rightarrow \quad \overline{E_\mu} = \overline{E_i} = 0 \quad & B_\mu = (0, B_i) \quad \rightarrow \quad \overline{B_\mu} = \overline{B_i} = 0 \\ E_\mu B_\nu = (0, E_i)(0, B_j) = E_i B_j \quad \rightarrow \quad \overline{E_\mu B_\nu} = \overline{E_i B_j} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$E_\mu E_\nu = (0, E_i)(0, E_j) = E_i E_j \quad \rightarrow \quad \overline{E_\mu E_\nu} = \overline{E_i E_j} = -\frac{1}{3} E^2 g_{ij} \quad (2.6)$$

$$B_\mu B_\nu = (0, B_i)(0, B_j) = B_i B_j \quad \rightarrow \quad \overline{B_\mu B_\nu} = \overline{B_i B_j} = -\frac{1}{3} B^2 g_{ij} \quad (2.7)$$

Consequência imediata é que o escalar  $G$ , em média, é identicamente nulo e as Lagrangeanas passam a depender apenas do escalar  $F$ . E, portanto as propriedades do fluido, agora, assumem as seguintes expressões:

$$\bar{\rho} = -4\overline{\mathcal{L}_F} E^2 - \overline{\mathcal{L}(F)}, \quad (2.8)$$

$$\bar{p} = \frac{4}{3}\overline{\mathcal{L}_F}(E^2 - 2B^2) + \overline{\mathcal{L}(F)}, \quad (2.9)$$

$$\bar{q}_\mu = 0,$$

$$\overline{\pi_{\mu\nu}} = 0.$$

Como não há fluxo de calor e pressão anisotrópica, o fluido cósmico assume a forma de um fluido perfeito

$$\begin{aligned} \overline{T_{\mu\nu}} &= (\overline{\rho} + \overline{p})V_\mu V_\nu - \overline{p}g_{\mu\nu} \\ &= -4\overline{\mathcal{L}_F} \left[ \frac{2}{3}(E^2 + B^2)V_\mu V_\nu + \frac{1}{3}(E^2 - 2B^2)g_{\mu\nu} \right] - \overline{\mathcal{L}(F)}g_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

cujo traço é

$$\overline{T} = \overline{T^\mu{}_\mu} = \overline{\rho} - 3\overline{p} = 8\overline{\mathcal{L}_F}(B^2 - E^2) - 4\overline{\mathcal{L}(F)}.$$

É possível também, a partir das equações (2.8) e (2.9), tentar obter uma equação de estado geral, que valha para qualquer Lagrangeana

$$\overline{\mathcal{L}(F)} = -(\overline{\rho} + 4\overline{\mathcal{L}_F}E^2),$$

$$\overline{p} = -\overline{\rho} + \Xi(E, B) \tag{2.10}$$

na qual,

$$\Xi(E, B) = -\frac{8}{3}\overline{\mathcal{L}_F}(B^2 + E^2).$$

## 2.4 Universo Magnético

Neste trabalho considera-se também que, nas épocas remotas do universo, o fluido cósmico se comportava como um plasma e portanto, em média, o valor de  $E^2$  também se anula [10]. Assim, as relações que determinam as propriedades remanescentes do fluido, densidade de energia e pressão, tornam-se mais simples bem como a expressão do tensor energia-momento,

$$\bar{\rho} = -\overline{\mathcal{L}(F)}, \quad (2.11)$$

$$\bar{p} = -\frac{4}{3}\overline{\mathcal{L}_F F} + \overline{\mathcal{L}(F)}, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \overline{T_{\mu\nu}} &= (\bar{\rho} + \bar{p})V_\mu V_\nu - \bar{p}g_{\mu\nu} \\ &= -4\overline{\mathcal{L}_F} \left[ \frac{1}{3}FV_\mu V_\nu - \frac{1}{3}Fg_{\mu\nu} \right] - \overline{\mathcal{L}(F)}g_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

$$\overline{T} = \bar{\rho} - 3\bar{p} = 4\overline{\mathcal{L}_F F} - 4\overline{\mathcal{L}(F)}.$$

Esses tipos de modelos são denominados Modelos de Universo Magnético e seu estudo é recorrente na literatura devido, principalmente, a sua eficácia no que concerne a remoção da singularidade cosmológica, prevista nos teoremas de singularidade, dos modelos baseados em espaços-tempo homogêneos e isotrópicos.

## Capítulo 3

# Cosmologia em FLRW: Universo Magnético e Tri-Curvatura Espacial

A proposta da RG é que a matéria e a energia curvam o espaço-tempo, que qualquer corpo material ou forma de energia determinará a geometria do espaço-tempo à sua volta. Essa afirmação é sintetizada em um conjunto de equações tensoriais conhecidas como equações de Einstein. Nessas equações, mostradas abaixo, cada componente geométrica estará relacionada a uma propriedade do conteúdo material ou energético que está presente naquela região,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

na qual o lado esquerdo se refere à geometria e o lado direito ao conteúdo de matéria e energia presentes no espaço.

Serão tratados modelos determinados pela métrica de FLRW cujo elemento de linha é:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{a(t)^2}{(1 + \varepsilon r^2/4)^2} [dr^2 + r^2 d\Omega^2],$$

no qual  $a(t)$  é o fator de escala, que mede a taxa de expansão do universo, e  $\varepsilon$  determina o tipo de geometria que o universo possui em larga escala, e pode assumir os valores -1 no caso de a geometria em larga escala ser hiperbólica, 0 no caso de ser plana e +1 no caso de ser esférica. Com tal métrica, tem-se apenas duas equações de campo relevantes, completamente independentes:

$$G_{00} = kT_{00} = k\rho \quad \text{e} \quad G_{ii} = kT_{ii} = -pg_{ii}.$$

As outras duas são identicamente nulas, dado que a métrica é diagonal e os observadores são tipo tempo e estão normalizados:

$$G_{(0i)} = kT_{(0i)} = 0 \quad \text{e} \quad G_{(ij)} = kT_{(ij)} = 0.$$

Calculando as componentes do tensor de Ricci e o escalar de curvatura, chega-se aos seguintes resultados:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ii} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{\varepsilon}{a^2}\right)g_{ii},$$

$$R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{a^2}\right).$$

Assim, as equações de Einstein fornecem duas equações que relacionam o fator de escala  $a$ , sua taxa de variação  $\dot{a}$  e a sua derivada segunda  $\ddot{a}$  com a densidade de energia e a pressão que, utilizando as equações (2.8) e (2.9), são escritas em termos da Lagrangeana e de sua derivada:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{a^2} = \frac{1}{3}k\rho = \frac{k}{3}\left(-4\overline{\mathcal{L}_F}E^2 - \overline{\mathcal{L}(F)}\right), \quad (3.2)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{a^2} = -kp = -k\left(\frac{4}{3}\overline{\mathcal{L}_F}(E^2 - 2B^2) + \overline{\mathcal{L}(F)}\right). \quad (3.3)$$

Pela substituição de (3.2) em (3.3) surge uma relação mais direta entre  $\ddot{a}$  e as propriedades  $\rho$  e  $p$ , que também pode ser expressa como função da Lagrangeana e de sua derivada:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{k}{6}(\rho + 3p) = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{k}{3}\left(\overline{\mathcal{L}(F)} - 4\overline{\mathcal{L}_F}B^2\right) = 0. \quad (3.4)$$

Outra equação sumamente importante é a que representa a lei de conservação da energia para um observador

$$T^{\mu\nu}{}_{||\nu}V_\mu = \dot{\bar{\rho}} + 3(\bar{\rho} + \bar{p})\frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (3.5)$$

A partir de (2.8) e (2.9) obtem-se  $\dot{\bar{\rho}}$  e  $\bar{\rho} + \bar{p}$ .

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\rho}} &= -4(\overline{\mathcal{L}_{FF}}\dot{F}E^2 + 2\overline{\mathcal{L}_F}\dot{E}E) - \overline{\mathcal{L}_F}\dot{F}, \\ \bar{\rho} + \bar{p} &= -\frac{8}{3}\overline{\mathcal{L}_F}(B^2 + E^2). \end{aligned}$$

Logo, no caso de uma Lagrangeana que dependa tanto de  $\vec{E}$  como de  $\vec{B}$ , a equação (3.5) se torna:

$$T^{\mu\nu}{}_{||\nu}V_\mu = -4(\overline{\mathcal{L}_{FF}}\dot{F}E^2 + 2\overline{\mathcal{L}_F}\dot{E}E) - \overline{\mathcal{L}_F}\dot{F} - 8\overline{\mathcal{L}_F}(B^2 + E^2)\frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (3.6)$$

No caso de modelos de Universo Magnético, as equações (3.2), (3.3) e (3.6) assumem a forma:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{a^2} = \frac{1}{3}k\rho = -\frac{k}{3}\overline{\mathcal{L}(F)}, \quad (3.7)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{a^2} = -kp = k\left(\frac{4}{3}\overline{\mathcal{L}_FF} - \overline{\mathcal{L}}\right), \quad (3.8)$$

$$\frac{\dot{F}}{F} = -4\frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.9)$$

A equação (3.9) fornece um resultado independente da Lagrangeana escolhida. O único pressuposto é que o invariante  $F$  depende apenas de  $B^2$

$$F(a) = \frac{F_0}{a^4} \quad \text{ou} \quad B(a) = \frac{B_0}{a^2}, \quad (3.10)$$

onde  $F_0$  e  $B_0$  são constantes de integração e podem funcionar como parâmetros livres nos modelos que serão estudados no Capítulo 5.

Analisando a equação (3.2) é possível perceber que se faz necessária uma investigação a respeito da influência da positividade de  $\varepsilon$  sobre os valores de densidade de energia a fim de mantê-la positiva. Como  $\varepsilon$  pode assumir três valores distintos, deve-se verificar cada caso discriminadamente.

- Caso  $\varepsilon = 0$ . A equação (3.2) lê-se:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}k\rho.$$

Como  $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$  é sempre positivo ou nulo, então  $\rho$  será sempre positiva ou nula, mas nunca será negativa, satisfazendo a condição fraca de energia.

- Caso  $\varepsilon = +1$ . A equação (3.2) lê-se:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{3}k\rho.$$

A densidade de energia mantém-se sempre positiva, mesmo quando  $a$  possuir extremos, uma vez que o termo  $\frac{1}{a^2}$  é sempre positivo, anulando-se apenas quando  $a \rightarrow \infty$ , o que só pode ocorrer no remoto passado ou no longínquo futuro.

- Caso  $\varepsilon = -1$ . A equação (3.2) lê-se:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{3}k\rho.$$

Para que  $\rho$  seja positiva  $\dot{a} < -1$  ou  $\dot{a} > 1$ , o que significa que neste caso  $a$  não possui extremos. Visto de outra forma, para que a possibilidade de extremos de  $a$  ocorra, então  $\rho$  deveria assumir valores negativos durante algum estágio da evolução do modelo.

A equação (3.4) fornece o vínculo que se estabelece entre  $\rho$  e  $p$ , uma vez que  $\rho$  é sempre positiva e  $\ddot{a}$  pode ser positiva, negativa ou nula,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{k}{6}(\rho + 3p).$$

- No caso de  $\ddot{a} > 0$ , é obtida a relação:

$$p < -\frac{1}{3}\rho.$$

Como  $\rho$  é sempre positiva ou nula, então a pressão é sempre negativa ou nula, satisfazendo a condição forte de energia

$$\rho \geq p.$$

- No caso de  $\ddot{a} = 0$ , é obtida a relação:

$$p = -\frac{1}{3}\rho.$$

Novamente a pressão pode assumir apenas valores negativos ou anular-se.

- No caso de  $\ddot{a} < 0$ , é obtida a relação:

$$p > -\frac{1}{3}\rho.$$

Portanto, a pressão pode assumir valores positivos e negativos, e também anular-se.

O caso que mais interessa para este trabalho é aquele no qual  $\ddot{a} > 0$ , uma vez que queremos evitar a singularidade cosmológica do universo primordial através do mecanismo de *bounce*, no qual  $\dot{a} = 0$  e  $\ddot{a} > 0$ .

## Capítulo 4

# Estabilidade em um Modelo de Universo Magnético

Nesse capítulo será apresentada a questão da estabilidade de um sistema físico a partir da definição da velocidade de propagação do som em um fluido, em particular para modelos cosmológicos de Universo Magnético. Na segunda seção será feito um breve resumo sobre sistemas dinâmicos, utilizados na tentativa de compreender as regiões instáveis como zonas de transição para os atratores que estão presentes nos modelos analisados.

## 4.1 A Questão da estabilidade

Um dos indicativos mais simples para averiguar a estabilidade de um modelo cosmológico é a verificação dos limites da velocidade do som [11]. O limite inferior é definido como aquele que mantém os valores da velocidade do som reais, enquanto que o limite superior é a velocidade da luz garantindo que o princípio de causalidade não é violado.

Muitos trabalhos são feitos adotando o segundo critério. Contudo, existem divergências quanto a sua validade, uma vez que nele a causalidade está associada a um cone de luz. A princípio, não existe nenhum impedimento para que outros tipos de “cones” sejam definidos, como “cones de som”. Se estas outras possibilidades forem adotadas, não há violação do princípio de causalidade quando a velocidade do som torna-se maior do que a da luz.

O critério considerado neste trabalho, no qual a velocidade do som deve ser sempre real, foi também utilizado em [12]. Na mecânica, a velocidade do som é definida como a velocidade com que uma onda de pressão se propaga em um meio que possui uma determinada densidade, ou simplesmente pela taxa de variação da pressão com a densidade  $\frac{dp}{d\rho}$ . Isso sugere que, uma vez conhecida a equação de estado,  $p = p(\rho)$ , do meio, a velocidade do som é obtida com o cálculo de sua derivada primeira. Aqui serão feitas críticas a respeito da utilização irrestrita desse critério, evidenciando que o mesmo vale apenas como indicador de dificuldades decorrentes da interpretação simplista da equação de estado, a qual deve considerar outras variáveis termodinâmicas.

No Universo primordial, o fluido tem sido considerado como fluido perfeito, o qual, em geral, possui equação de estado  $p = p(\rho, s)$ , em que  $s$  é a entropia do fluido. Contudo, ao se considerar processos adiabáticos, nos quais se conservam a entropia e o número de partículas, a equação de estado para um fluido perfeito é  $p = \omega\rho$ . Aqui  $\omega$  será interpretado como o quadrado da velocidade de propagação do som no fluido, e deve ser constante ou variar pouco.

É possível calcular  $\frac{dp}{d\rho} = \omega$  e obter a velocidade do som para um determinado fluido. Usando as equações (2.11) e (2.12), surge uma relação para  $\omega$  dependendo de uma Lagrangiana genérica. O procedimento é derivar  $\rho$  e  $p$  com relação ao tempo e depois multiplicar  $\frac{dp}{dt}$  pela inversa de  $\frac{d\rho}{dt}$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{3}(\mathcal{L}_F + 4\mathcal{L}_{FF}F)\dot{F} \quad (4.1)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\mathcal{L}_F\dot{F}. \quad (4.2)$$

Então a equação para a velocidade do som fica:

$$\frac{dp}{d\rho} = c_s^2 = \frac{1}{3} \left( 1 + 4 \frac{\mathcal{L}_{FF}F}{\mathcal{L}_F} \right), \quad (4.3)$$

que deve ser sempre positiva.

A equação (4.3) será utilizada para verificar a estabilidade dos modelos gerados com as diferentes Lagrangeanas. Serão determinadas as regiões de estabilidade e instabilidade de cada caso averiguado.

É possível, e de fato ocorrerá, encontrar casos onde  $c_s^2$  se torna negativa para valores finitos da densidade de energia e da pressão, evidenciando que a definição para  $c_s^2$  utilizada não é inteiramente consistente. Quando isso ocorrer, duas possibilidades serão apresentadas para contornar a instabilidade:

- No caso de Lagrangeanas polinomiais, considerar cada termo da Lagrangeana como representando um fluido que não interage com os demais e possui densidade de energia e pressão bem determinados e relacionados por uma equação de estado do tipo  $p = \omega\rho$ .

- Será usado o gráfico gerado a partir do sistema dinâmico construído com a Lagrangiana para determinar se essas regiões de instabilidade são apenas regiões de passagem do sistema físico e se este converge para algum atrator localizado em uma região estável. Caso positivo considera-se, e isso já foi feito por outros autores em outros casos<sup>1</sup>, que o modelo pode ser uma boa representação do Universo primordial dentro desse cenário.

---

<sup>1</sup>Apêndice D.

## 4.2 Sistemas Dinâmicos

De uma forma simplificada [13], um sistema dinâmico  $n$ -dimensional pode ser entendido como um fluxo contínuo de  $n$  variáveis em um espaço  $n$ -dimensional caracterizado por um sistema de equações diferenciais relacionando essas variáveis. As soluções analíticas desses sistemas são, em geral, difíceis de se obter, uma vez que a maioria dos sistemas de interesse é não linear. Nesses casos, o procedimento usual é determinar os pontos críticos do sistema, anulando o lado esquerdo de todas as suas equações simultaneamente, e então, fazer a linearização do sistema em torno dos pontos críticos até a primeira ordem, com o objetivo de determinar a natureza dos mesmos.

### 4.2.1 Sistemas Lineares em duas Dimensões

Um sistema de duas equações lineares dependentes de duas incógnitas é dito bi-dimensional ou planar, uma vez que a dinâmica descrita por ele pode ser representada por um gráfico em um espaço de fase plano. Sistemas assim, em geral, apresentam-se da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + By = f(x, y) \\ \dot{y} = Cx + Dy = g(x, y) \end{cases} \quad (4.4)$$

Esse sistema é simples de resolver fazendo uso dos métodos tradicionais de resolução de EDO's por meio da equação característica. O estudo dos autovalores da matriz dos coeficientes fornece condições simples para caracterizar os pontos críticos. Reescrevendo o sistema na forma matricial, a leitura torna-se mais direta.

$$\dot{\vec{X}} = J\vec{X} \quad (4.5)$$

onde

$$\dot{\vec{X}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad e \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Admitindo uma solução do tipo  $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{x}_0$ , o problema se reduz ao encontro dos valores de  $\lambda$ , autovalores da matriz  $J$ . Tem-se, então,  $(J - \lambda I)\vec{x} = 0$ , onde  $I$  é a matriz identidade e  $\vec{x}_0$  são os autovetores de  $J$ .

Encontram-se os autovalores a partir da equação

$$\det(J - \lambda I) = 0, \quad (4.6)$$

que resulta em

$$(A - \lambda)(D - \lambda) - BC = 0.$$

Dependendo dos valores de A, B, C, e D tem-se sistemas diferentes e, portanto, soluções diferentes com pontos críticos de naturezas diferentes. No caso mais geral, a equação (4.6) resulta em dois valores para  $\lambda$ , que determinam a classificação do ponto crítico a partir do qual esse autovalor foi obtido na linearização. O número de casos diferentes gerados pelas inúmeras combinações possíveis de autovalores cresce com a dimensão do sistema. No caso bidimensional, as possibilidades são listadas a seguir [14].

**Nó Hiperbólico Estável**

O ponto crítico é um nó hiperbólico estável quando:  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  e possuem valores tais que:  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

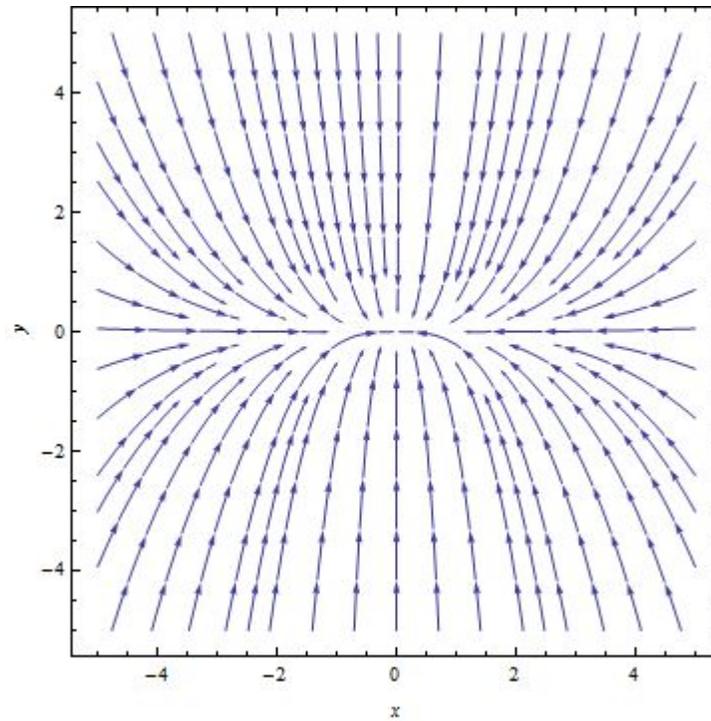


Figura 4.1: Gráfico no espaço de fase para um nó estável. As linhas de fluxo convergem assintoticamente para o ponto crítico.

**Nó Hiperbólico Instável**

O ponto crítico é um nó hiperbólico instável quando  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  e possuem valores tais que:  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

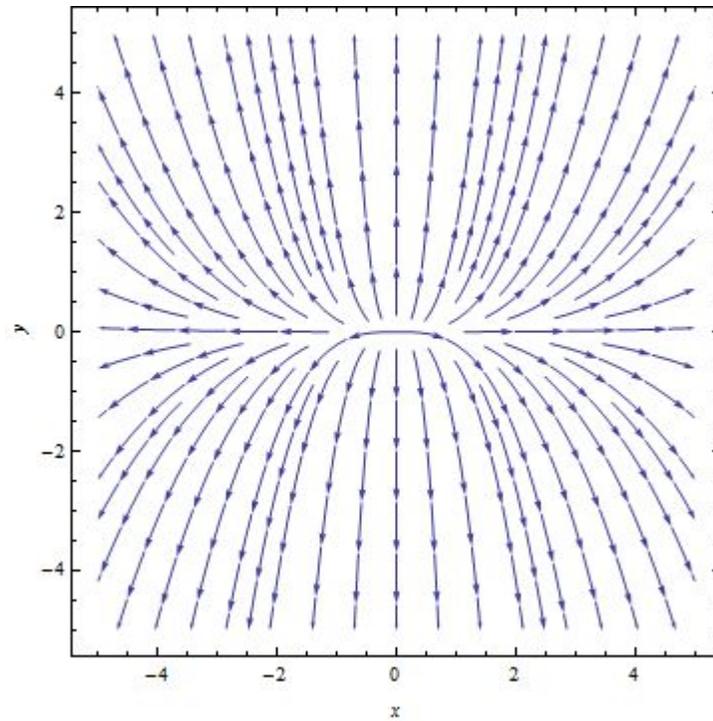


Figura 4.2: Gráfico no espaço de fase para um nó instável. As linhas de fluxo divergem a partir do ponto crítico.

**Nó Hiperbólico Impróprio**

O ponto crítico é um nó hiperbólico impróprio estável quando  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  e possuem valores tais que:  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

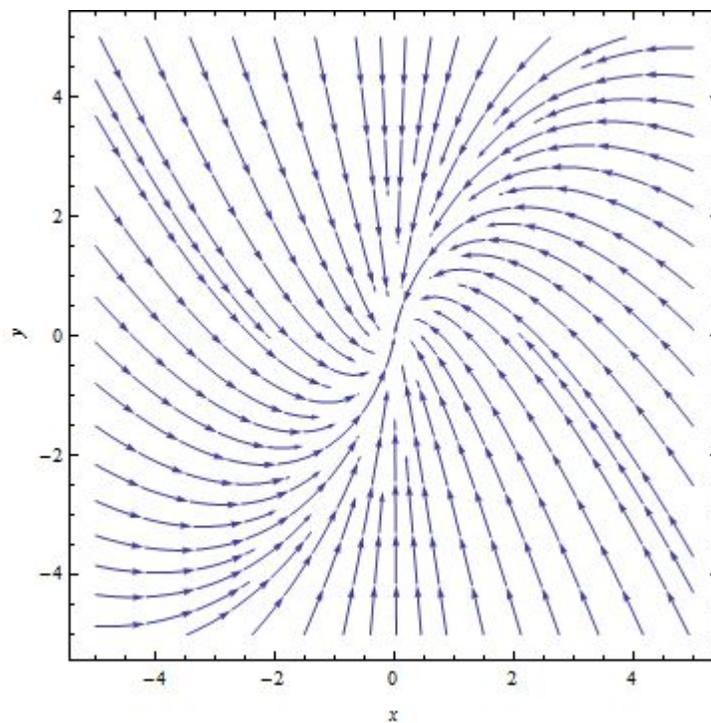


Figura 4.3: Gráfico no espaço de fase para um nó hiperbólico impróprio estável. As linhas de fluxo convergem assintoticamente para o ponto crítico.

O ponto crítico é um nó hiperbólico impróprio instável quando  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  e possuem valores tais que:  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

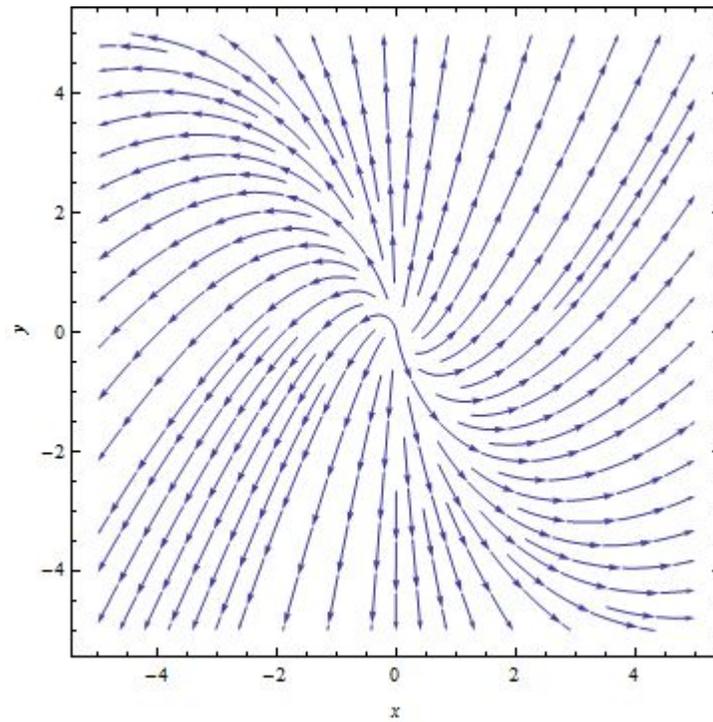


Figura 4.4: Gráfico no espaço de fase para um nó hiperbólico impróprio instável. As linhas de fluxo divergem a partir do ponto crítico.

**Sela Hiperbólico Instável**

O ponto crítico é um ponto de sela hiperbólico quando  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  e possuem valores tais que:  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$

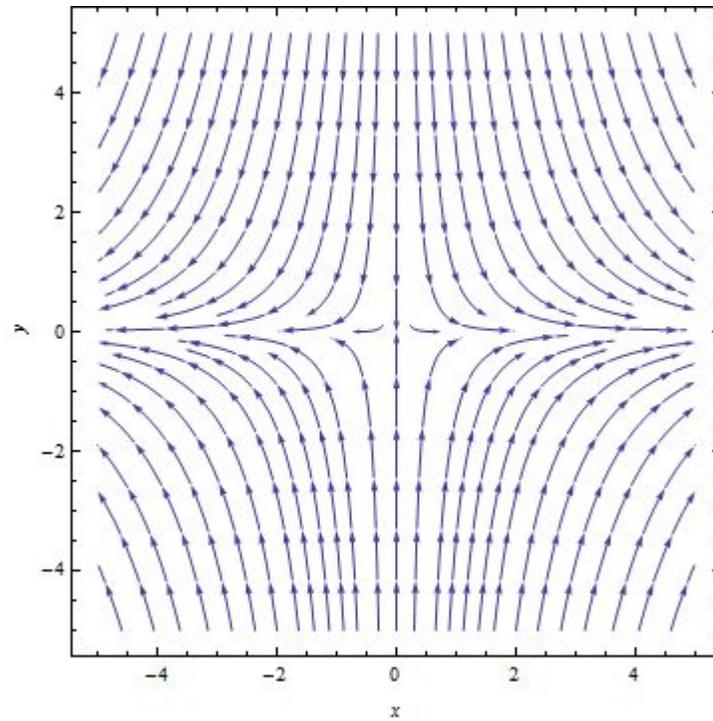


Figura 4.5: Gráfico no espaço de fase para uma sela hiperbólica.

**Foco Hiperbólico Estável**

O ponto crítico é um foco hiperbólico estável quando  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , e possuem valores tais que:  $\lambda_1 = \lambda_2^* = \alpha + i\beta$  com  $\alpha < 0$

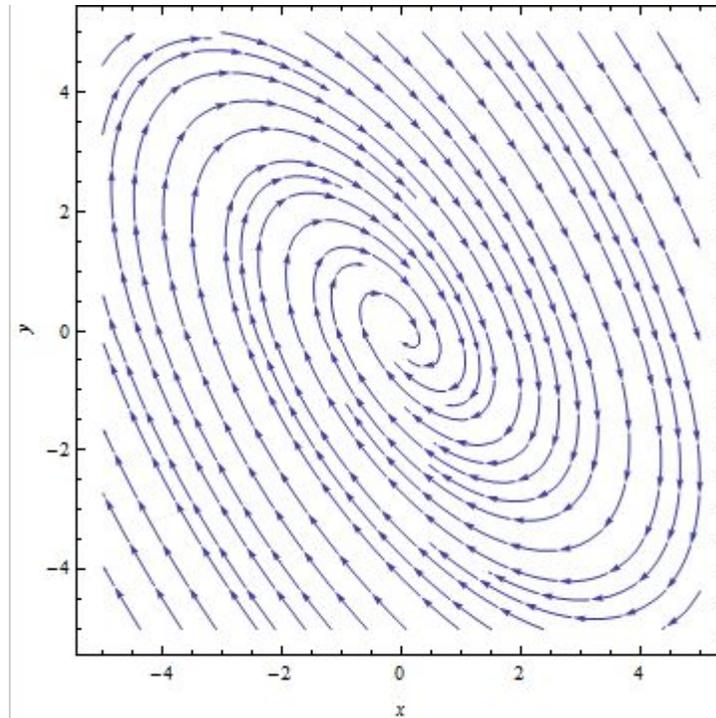


Figura 4.6: Gráfico no espaço de fase para um foco hiperbólico estável. As linhas de fluxo convergem assintoticamente para o ponto crítico.

**Foco Hiperbólico Instável**

O ponto crítico é um foco hiperbólico instável quando  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , e possuem valores tais que:  $\lambda_1 = \lambda_2^* = \alpha + i\beta$  com  $\alpha > 0$

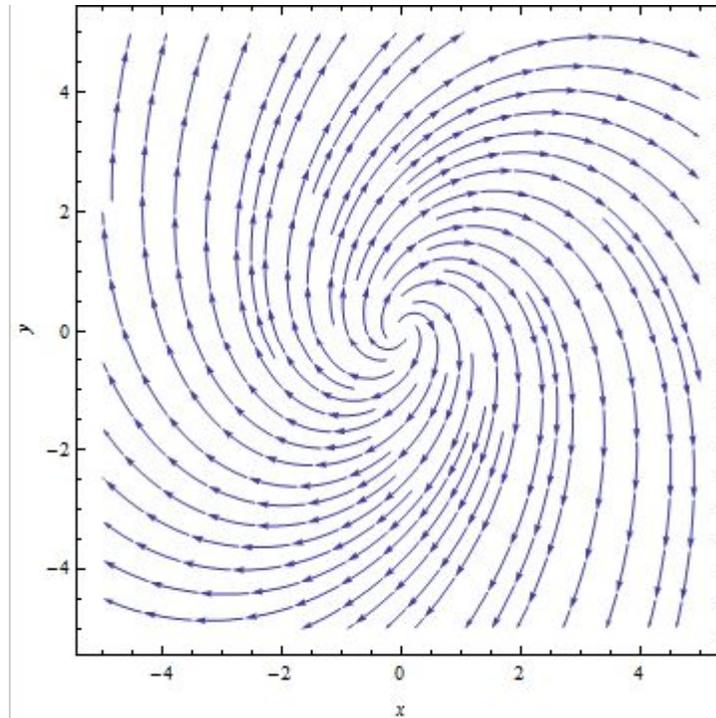


Figura 4.7: Gráfico no espaço de fase para um foco hiperbólico instável. As linhas de fluxo divergem a partir do ponto crítico.

### Centro Elíptico

O ponto crítico é um centro elíptico quando  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , e possuem valores tais que:  $\lambda_1 = \lambda_2^* = i\beta$

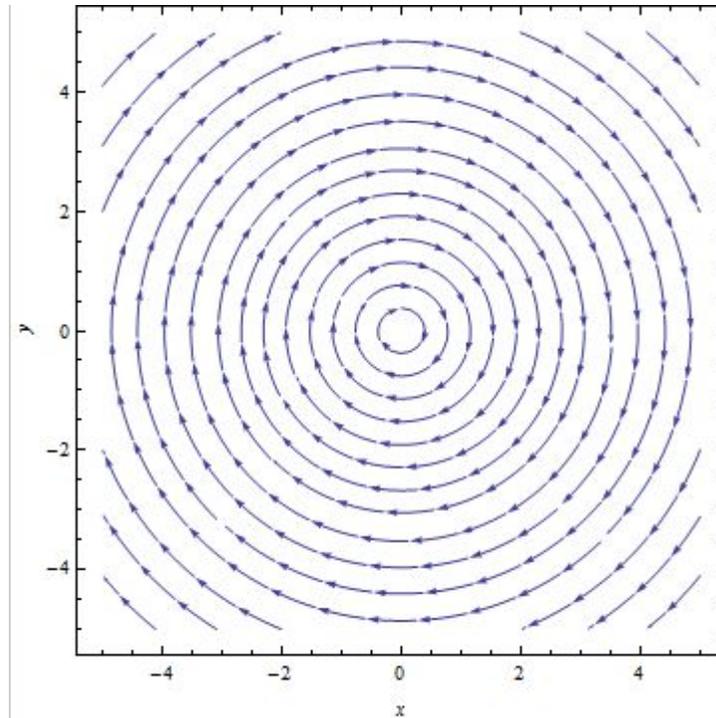


Figura 4.8: Gráfico no espaço de fase para um centro elíptico. As linhas de fluxo realizam movimentos periódicos em torno do ponto crítico.

### 4.2.2 Sistemas Não Lineares Autônomos

Um sistema não linear autônomo é um sistema cujas equações não dependem explicitamente do tempo e pelo menos uma delas é não linear. Em geral, pode-se representá-lo da seguinte forma,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (4.7)$$

Os pontos críticos são novamente os que fazem  $f(x, y) = g(x, y) = 0$ . Para estudar o comportamento desse sistema nas imediações dos pontos críticos, faz-se uma linearização do mesmo expandindo suas funções em série de Taylor em torno dos pontos críticos até a primeira ordem. Para os sistemas investigados neste trabalho é suficiente o estudo de sistemas bi-dimensionais.

Em geral, sistemas não lineares podem possuir mais de um ponto crítico, cada um deles possuindo um tipo distinto de comportamento. Desta forma, o procedimento de linearização será repetido para cada ponto encontrado a fim de determinar seu comportamento. Entretanto, existem condições a serem satisfeitas para que os resultados obtidos a partir da linearização possam de fato representar o sistema não linear original como enunciado pelo Teorema de Hartman [13].

#### Teorema de Hartman

Se a matriz jacobiana obtida a partir da linearização em torno de um ponto crítico não possui auto-valores nulos ou puramente imaginários, então há uma vizinhança em torno desse ponto para qual o espaço de fase do sistema não linear se assemelha qualitativamente ao comportamento do sistema linearizado.

Embora este teorema garanta a equivalência qualitativa entre o sistema original e o sistema linearizado para os pontos críticos hiperbólicos, ele não garante a validade deste processo de linearização para o caso dos centros elípticos. Para esses casos, se as equações do sistema que está sendo analisado forem analíticas, então uma extensão do Teorema de Poincaré-Lyapunov, realizada na referência [15], garante a equivalência entre os dois espaços de fase.

Os casos em que  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ , degenerados elípticos, também não são contemplados pelo Teorema de Hartman. Para eles, é necessário fazer a análise do espaço de fase gerado.

Na literatura é comum que estes pontos de comportamento mais curioso representem bifurcações que podem ser de diferentes tipos. Os dois necessários para este trabalho estão enumerados abaixo<sup>2</sup>:

1. *Bifurcação Sela-Nó*: Ocorre quando o ponto crítico está sobre uma curva que apresenta comportamentos distintos dependendo da região do espaço de fase que se analisa. Observando a partir do ponto, verifica-se que um ramo da curva apresenta comportamento estável e o outro ramo apresenta comportamento instável.
2. *Bifurcação de Dobra Cíclica*: Nessa bifurcação coexistem dois ciclos limites de estabilidades diferentes. No ponto crítico, os ciclos colidem para, em seguida, cada trajetória afastar-se da vizinhança imediata.

---

<sup>2</sup>O leitor interessado pode obter mais detalhes sobre os outros tipos de bifurcação na ref. [14].

### 4.2.3 Sistema Dinâmico para um Universo Magnético

Para montar um sistema dinâmico que possua fácil resolução será definida a quantidade  $\theta$ , conhecida como fator de expansão, e sua primeira derivada temporal,

$$\theta = 3\frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.8)$$

$$\dot{\theta} = 3 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right]. \quad (4.9)$$

Com essas definições e as equações (3.4), (3.7) e (3.9), é obtido o sistema

$$\begin{cases} \dot{F} = -\frac{4}{3}F\theta \\ \dot{\theta} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \frac{k}{2}(2\mathcal{L} - 4\mathcal{L}_F F). \end{cases} \quad (4.10)$$

Nesse sistema não fica explícita a curvatura da tri-seção espacial, porém é possível construir um outro sistema para o caso específico de curvatura nula:

$$\begin{cases} \dot{F} = -\frac{4}{3}F\theta \\ \dot{\theta} = 2k\mathcal{L}_F F \end{cases} \quad (4.11)$$

Quando forem encontrados pontos críticos do tipo  $(F_0, \theta_0) = (0, \theta_0)$ , e o caráter destes não puder ser determinado por linearização, resultando em autovalores nulos, será feita uma análise puramente qualitativa do espaço de fase considerando valores de  $F$  negativos que, embora não façam parte da solução física para um U.M., são uma solução matemática para o sistema dinâmico e podem contribuir para a determinação do caráter de tais pontos.

# Capítulo 5

## Lagrangeanas Fonte

Neste capítulo serão apresentadas quatro soluções cosmológicas baseadas na métrica de FLRW, cada uma delas tendo como fonte uma Lagrangiana da eletrodinâmica não linear construída com o propósito de lidar com problemas remanescentes da teoria linear de Maxwell.

A primeira Lagrangeana, baseada na teoria de Euler e Heisenberg, já foi usada como fonte para um modelo cosmológico em [17] e sua estabilidade contestada em [12]. Uma alternativa para avaliar a estabilidade foi proposta em [22]. Aqui, estas soluções serão revistas e novas perspectivas de como encarar a questão da estabilidade discutidas. Em seguida, serão analisadas pela primeira vez as teorias ENE e LNE como fontes para modelos com *bounce* e sua estabilidade também será discutida. Por fim, a teoria BIE, proposta como fonte para a cosmologia em [7], e também contestada em [12], será revisitada e, assim como em EH, a definição que leva à constatação de instabilidades no modelo será questionada. Os sistemas dinâmicos são utilizados para detectar atratores que possam tirar os modelos de sua região instável, como feito em [32], e os gráficos no espaço de fase  $\theta \times F$  gerados ilustram a evolução dos modelos, desde seu passado remoto, até seu futuro.

## 5.1 A Teoria de Euler-Heisenberg

A eletrodinâmica quântica é caracterizada por notável invariância de calibre e relativística. Contudo, certos cálculos, mesmo quando realizados através de métodos convencionais, podem produzir resultados que não apresentam estas características devido, principalmente, à existência de divergências que são inerentes a essa classe de teorias, as teorias de campo. Tais dificuldades envolvendo invariância relativística podem ser evitadas pelo emprego de formulações da teoria, que são explicitamente invariantes sob transformações de coordenadas, e por meio da manutenção dessa propriedade durante o desenvolvimento dos cálculos. É evidente que os problemas de invariância de calibre desaparecem quando métodos de solução que envolvem apenas quantidades invariantes de calibre são adotados. As equações de movimento que envolvem apenas campos eletromagnéticos proveem a invariância de calibre desejada.

De acordo com a teoria de Dirac para o pósitron, um campo eletromagnético tende a criar pares de partículas, o que leva a uma mudança nas equações de Maxwell no vácuo. O fato de a radiação eletromagnética poder ser transformada em matéria e vice-versa faz surgirem novos aspectos fundamentais em eletrodinâmica quântica. Uma das mais importantes consequências é que, mesmo no vácuo, as equações de Maxwell devem ser estendidas ou até mesmo completamente substituídas por fórmulas mais complicadas.

Em geral, não é possível separar processos no vácuo daqueles que envolvem matéria, visto que campos eletromagnéticos podem criá-la se tiverem intensidade suficiente para fazê-lo. E mesmo no caso de não serem tão intensos a ponto de criar matéria, eles podem, devido à possibilidade de criação de pares virtuais, polarizar o vácuo, o que também requer uma modificação nas equações de Maxwell.

As diferenças de uma nova teoria para a de Maxwell serão pequenas enquanto os valores de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  forem pequenos se comparados àqueles medidos a uma distância de  $\sqrt{137} \frac{e^2}{mc^2}$  do ponto onde se encontra a carga. Mas mesmo no caso em que o campo magnético excede o valor medido nas imediações do ponto onde se encontra a carga, os termos adicionais ao termo de Maxwell permanecerão pequenos quando comparados com o original. Pode-se, então, entender esses novos termos como perturbações que ocorrem no estado de vácuo do campo original livre (auto-interação do vácuo). Tais alterações são sempre encontradas quando calculadas as contribuições de ordens superiores para a densidade de energia, o que surge a partir de uma transição virtual de um estado inicial para outro final e seu retorno para o estado inicial. Cada termo na expansão da densidade de energia em potências de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  pode ser corretamente associado com um processo de espalhamento cuja seção de choque é determinada a partir do termo associado. Por exemplo, a seção de choque do espalhamento Compton pode ser calculada através de um cálculo de perturbação até a segunda ordem. Já os termos de quarta ordem correspondem ao espalhamento luz-luz. E os termos de sexta ordem determinam a seção de choque de um processo onde três fótons são espalhados um pelo outro.

A despeito da questão de até onde é fisicamente aceitável negligenciar os termos de ordem superior, o resultado de cada termo concorda com o cálculo direto do respectivo processo de espalhamento correspondente na teoria quântica de campos.

### 5.1.1 A Lagrangeana de Euler-Heisenberg como fonte da Cosmologia

Nessa seção expõe-se o modelo cosmológico construído por Novello et al. em [17]. A Lagrangeana é invariante de calibre e covariante local, e depende dos escalares  $F$  e  $G$  até a segunda ordem. Esta modificação deve ser relevante quando os campos atingem grande magnitude, como ocorre no Universo primordial. Os teoremas de singularidade são transcendidos pela aparição de uma alta, porém finita, pressão negativa nas fases primordiais da geometria de FLRW.

A Lagrangeana para esta teoria e sua derivada se escrevem:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F + \alpha F^2 + \beta G^2 \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}_F = -\frac{1}{4} + 2\alpha F$$

em que  $\alpha \approx 0.26634 \cdot 10^{-22} \frac{m s^2}{kg}$  está relacionado com o tempo de decaimento dos pares de partículas gerados em cada processo de espalhamento citado, de acordo com [16]. Considerando o procedimento da média de Tolman-Ehrenfest nas expressões acima, chega-se aos resultados:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}B^2(1 - 8\alpha B^2) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_F = -\frac{1}{4} + 4\alpha B^2$$

Assim, as grandezas densidade de energia e pressão se escrevem:

$$\rho = \frac{1}{2}B^2(1 - 8\alpha B^2) \tag{5.1}$$

e

$$p = \frac{1}{6}B^2(1 - 40\alpha B^2) = \frac{1}{3}\rho - \frac{16}{3}\alpha B^4. \tag{5.2}$$

Lembrando que o invariante  $F$  depende apenas de  $B$ , vale a relação geral (3.10)

$$B = \frac{B_0}{a^2}.$$

Substituindo (5.1) e (5.2) em (3.4), encontra-se que para que  $\dot{a}(0) = 0$  corresponda a um mínimo então  $\alpha > \frac{a^4(0)}{24B_0^2}$ . E, substituindo (5.1) e (3.10) em (3.7), obtém-se

$$\dot{a}^2 = \frac{kB_0^2}{6a^2} \left( 1 - 8\alpha \frac{B_0^2}{a^4} \right) - \varepsilon. \quad (5.3)$$

No caso  $\varepsilon = 0$ :

$$\text{para que } \dot{a}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{a^4(0)}{8B_0^2} > \frac{a^4(0)}{24B_0^2}.$$

É possível encontrar uma solução analítica para  $a(t)$

$$a^2(t) = B_0 \sqrt{\frac{2}{3}(kt^2 + 12\alpha)}. \quad (5.4)$$

É notório que em  $t = 0$  o fator de escala assume valor não nulo.

$$a^2(0) = B_0 \sqrt{8\alpha}.$$

Assim, o valor mínimo para o fator de escala fica determinado pelo parâmetro  $B_0$ , único parâmetro livre da teoria. Substituindo (5.4) em (3.10) e substituindo o resultado em (5.1), encontra-se a seguinte expressão para a densidade como função do tempo:

$$\rho(t) = \frac{3}{4} \frac{kt^2}{(kt^2 + 12\alpha)^2}. \quad (5.5)$$

Utilizando (5.5), verifica-se se há pontos críticos para a densidade e, a partir dessa constatação, é possível determinar em que instantes de tempo, nomeado tempo crítico ( $t_c$ ), tem-se essa densidade crítica:

$$\dot{\rho}(t) = 0 \rightarrow t_c = \pm \sqrt{\frac{12\alpha}{k}}.$$

É possível, então, calcular o valor de todas as grandezas relevantes neste momento  $t_c$ :

$$\rho_c = \rho(t_c) = \frac{1}{64\alpha},$$

$$B(t_c) = \frac{1}{16\alpha}.$$

Definindo agora algumas novas grandezas, todas adimensionais, a análise se torna mais simples. São elas  $\tau = \frac{t}{t_c}$ ,  $a_{rel} = \frac{a(t)}{a(0)}$  e  $\rho_{rel} = \frac{\rho}{\rho_c}$ .

$$a_{rel}^2 = \sqrt{\tau^2 + 1},$$

$$\rho_{rel} = 4 \frac{\tau^2}{(\tau^2 + 1)^2},$$

$$\frac{p}{\rho_c} = \frac{4}{3} \frac{\tau^2 - 4}{(\tau^2 + 1)^2},$$

Com elas, plotam-se gráficos que ajudarão a representar o comportamento das grandezas  $a$ ,  $\rho$  e  $p$ .

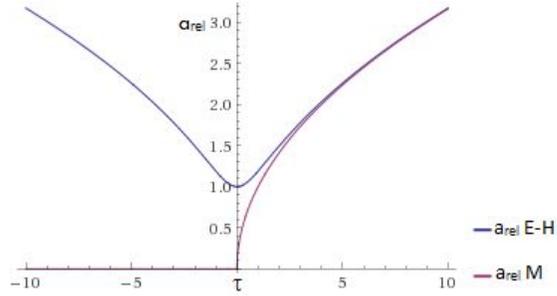


Figura 5.1: Gráfico  $a_{rel}$  x  $\tau$ : A curva que possui um mínimo,  $a_{rel}E - H$ , se refere à lagrangeana de Euler-Heisenberg. A curva que colapsa em  $\tau = 0$ ,  $a_{rel}M$ , se refere à solução obtida no caso de Maxwell (Apêndice B) com  $c_1 = B_0\sqrt{8\alpha}$ .

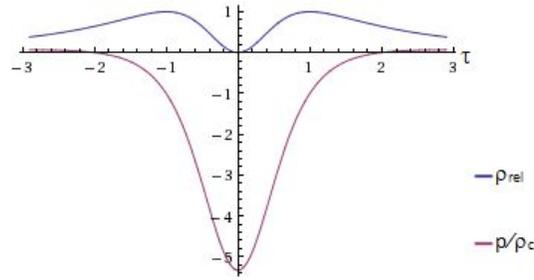


Figura 5.2: Gráfico  $\rho_{rel}$  x  $\tau$  e  $\frac{p}{\rho_c}$  x  $\tau$ : A densidade vale zero em  $t = 0$ , possui dois pontos de máximo e depois tende a zero no limite  $t \rightarrow \pm\infty$ . A relação  $\frac{p}{\rho_c}$  assume valores negativos em torno do *bounce* ( $-2 < \tau < 2$ ), depois se torna positiva, mas rapidamente diminui e tende a zero para  $t \rightarrow \pm\infty$ .

A seguir, a análise dos casos de geometria hiperbólica e esférica.

$$\varepsilon = -1$$

$$\text{Para que } \dot{a}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{a^4(0)}{8B_0^2} \left( 1 + \frac{6a^2(0)}{kB_0^2} \right) > \frac{a^4(0)}{24B_0^2}$$

é sempre verdade, pois  $a^2(0) > 0$ .

$$\varepsilon = +1$$

$$\text{Para que } \dot{a}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{a^4(0)}{8B_0^2} \left( 1 - \frac{6a^2(0)}{kB_0^2} \right)$$

$$\alpha > \frac{a^4(0)}{24B_0^2} \quad \Leftrightarrow \quad a^2(0) < \frac{kB_0^2}{6}$$

A equação (5.3) pode ser integrada:

$$t = \pm \int_{a_0}^{a(t)} \frac{dz}{\sqrt{\frac{kB_0^2}{6z^2} - \frac{8\alpha kB_0^4}{6z^6} - \varepsilon}}, \quad (5.6)$$

$$t = \pm \int_{a_0}^{a(t)} \frac{xdx}{\sqrt{kB_0^2x^2 - 8\alpha kB_0^4 - 6\varepsilon x^3}}.$$

E sua solução é expressa em termo das integrais elípticas de primeira e segunda espécies:

$$t = \pm \left[ \frac{(x_1 - x_3)\mathcal{E}\left(\arcsin \sqrt{\frac{z-x_1}{x_2-x_1}}, \sqrt{\frac{x_1-x_2}{x_1-x_3}}\right) + x_3\mathcal{F}\left(\arcsin \sqrt{\frac{z-x_1}{x_2-x_1}}, \sqrt{\frac{x_1-x_2}{x_1-x_3}}\right)}{\sqrt{x_3-x_1}} \right]_{z=a_0}^{z=a^2(t)},$$

$$\mathcal{F}(x, l) \doteq \int_0^{\sin x} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-l^2z^2)}},$$

$$\mathcal{E}(x, l) \doteq \int_0^{\sin x} \frac{\sqrt{1-l^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}} dz,$$

na qual  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são as raízes do polinômio  $6\varepsilon x^3 - kB_0^2 x^2 + 8\alpha k B_0^4 = 0$ , que para  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $kB_0^2 = 12$  e  $\alpha B_0^4 = 1.25 \cdot 10^{-4}$  são:

$$x_1 = \mp 0.0313776, \quad x_2 = \pm 0.0318778, \quad x_3 = \pm 1.9995$$

O gráfico referente à equação (5.6) está na próxima página. As curvas de interesse são aquelas nas quais  $\alpha > 0$  e a conclusão é que, utilizando a teoria de Euler-Heisenberg, encontra-se um *bounce* para qualquer uma das tri-curvaturas.

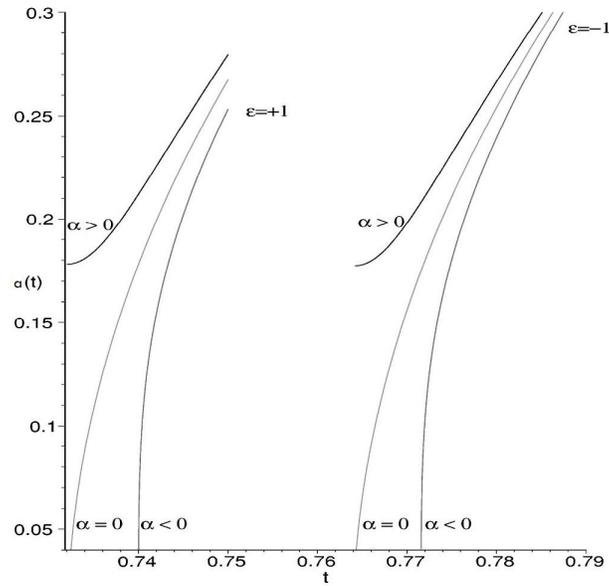


Figura 5.3: Gráfico retirado do artigo "Nonlinear electrodynamics and FRW cosmology", V. A. De Lorenci, R. Klippert, M. Novello e J. M. Salim, PHYSICAL REVIEW D, VOLUME 65, 063501. Nele é tomado  $a(1) = 1$ ,  $kB_0^2 = 12$  e  $\alpha B_0^2 = (0; \pm 1.25 \times 10^{-4})$ .

### 5.1.2 Análise da Estabilidade do Modelo gerado a partir de EH

A estabilidade do modelo será verificada utilizando a equação (4.3), que nesse caso torna-se:

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{32\alpha F}{8\alpha F - 1} \right].$$

É possível ver que  $c_s^2$  assume valores menores que zero para  $\frac{1}{40\alpha} < F < \frac{1}{8\alpha}$ . Além disso, o valor  $F = \frac{1}{8\alpha}$  produz uma divergência na velocidade do som.

No caso de  $\varepsilon = 0$ , o domínio de  $F$  vai de 0 a  $\frac{1}{4\alpha}$ ,

$$Dom(F) = \left\{ 0 < \frac{1}{40\alpha} < \frac{1}{8\alpha} < \frac{1}{4\alpha} \right\}.$$

O gráfico abaixo ilustra o comportamento de  $c_s^2$  com o crescimento de  $F$ .

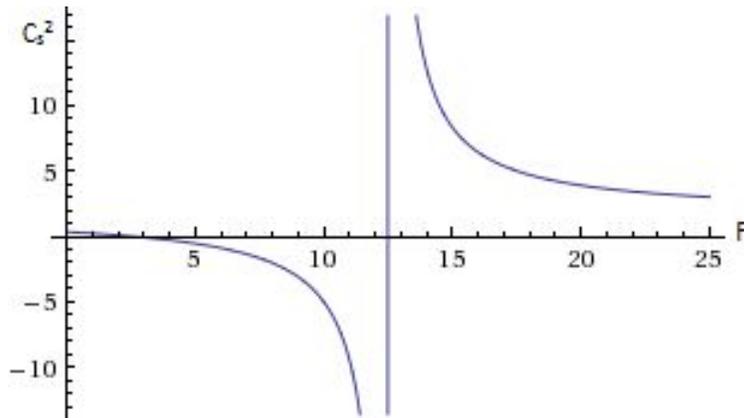


Figura 5.4: Gráfico  $c_s^2$  x  $F$ : Foi adotado o valor  $\alpha = 0.01$ .

No caso de  $\varepsilon = +1$ , o domínio de  $F$  vai de 0 a  $\frac{0.95}{4\alpha}$ <sup>1</sup>.

$$\text{Dom}(F) = \left\{ 0 < \frac{1}{40\alpha} < \frac{1}{8\alpha} < \frac{0.95}{4\alpha} \right\}$$

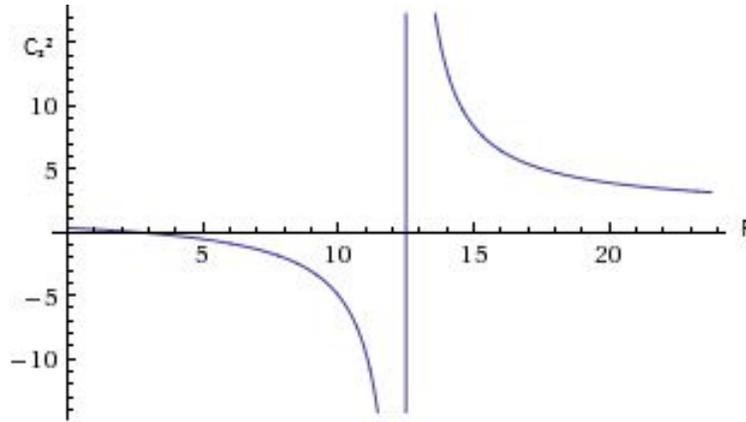


Figura 5.5: Gráfico  $c_s^2$  x  $F$ : Foi adotado o valor  $\alpha = 0.01$ .

Logo, toda a região de instabilidade, onde  $c_s^2 < 0$ , está presente no modelo, independentemente do fato de a tri-curvatura ser nula ou positiva.

O eixo que surge quando  $c_s^2 \rightarrow \pm\infty$  está sobre o valor de  $F$ , para o qual  $\dot{\rho} = 0$ . Isso sugere que talvez a definição da velocidade do som deva ser revista, uma vez que  $\frac{dp}{d\rho} = \frac{dp}{dt} \frac{dt}{d\rho} \rightarrow \infty$ .

Em [18] é mostrado que, em geral, a expressão para  $c_s^2$  pode depender de  $\rho$  e  $s$ , uma vez que a variação da pressão pode ser escrita como:

$$dp = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho ds,$$

e a expressão (4.3) é o caso particular de um processo adiabático. Em [19, 20] fica claro que a introdução da entropia soluciona essa divergência. Um exemplo de processo não adiabático é realizado também em [21], na página 249.

<sup>1</sup> Valor calculado utilizando  $a(0) = 0.18$  e  $\alpha B_0^2 = 1.25 \times 10^{-4}$

Há ainda um outro problema com a definição de  $c_s^2$  dada em (4.3): essa definição pressupõe que  $c_s^2$  é constante ou varia muito pouco, o que não é garantido no entorno de  $F = \frac{1}{8\alpha}$ , já que este é o ponto para o qual  $\rho$  é máxima e, portanto, a geometria se torna muito irregular. Nesse ponto onde  $c_s^2$  diverge, a densidade de energia assume seu valor máximo,  $\rho_c$ , e a pressão assume o valor  $p = -\rho_c$ . Com isso, o escalar de curvatura e todas as componentes não nulas do tensor de Ricci assumem valores finitos negativos:  $R = -4k\rho_c$ ,  $R_{00} = -k\rho_c$  e  $R_{ii} = -k\rho_c g_{ii}$ . Isso permite concluir que essa divergência não é de fato uma consequência física do problema, mas talvez oriunda de alguma definição inapropriada, como a da velocidade do som ou a equação de estado utilizada.

### 5.1.3 Sistema Dinâmico e Espaço de Fase do modelo gerado a partir de EH

Pode-se estudar o comportamento do modelo no espaço de fase, utilizando os sistemas descritos no Capítulo 4, à procura de pontos críticos que possam retirá-lo da zona instável.

Para esta Lagrangeana, o sistema (4.11) escreve-se:

$$\begin{cases} \dot{F} = -\frac{4}{3}F\theta \\ \dot{\theta} = -\frac{k}{2}F + 4k\alpha F^2. \end{cases} \quad (5.7)$$

Os pontos críticos são:  $(F_0, \theta_0) = (0, 0)$  e  $(F_1, \theta_1) = (\frac{1}{8\alpha}, 0)$ .

Linearizando em torno de  $(0, 0)$ , obtém-se o jacobiano e pode-se classificar este ponto crítico,

$$\begin{cases} \underline{\dot{F}} = 0 \\ \underline{\dot{\theta}} = -\frac{1}{2}kF \end{cases} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando os autovalores, obtém-se  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , o que significa, neste caso, que a linearização não é um bom procedimento. Para estudar o comportamento do sistema em torno de  $(0, 0)$  será necessário utilizar um gráfico no espaço de fase que contenha valores negativos de  $F$ .

O gráfico gerado:

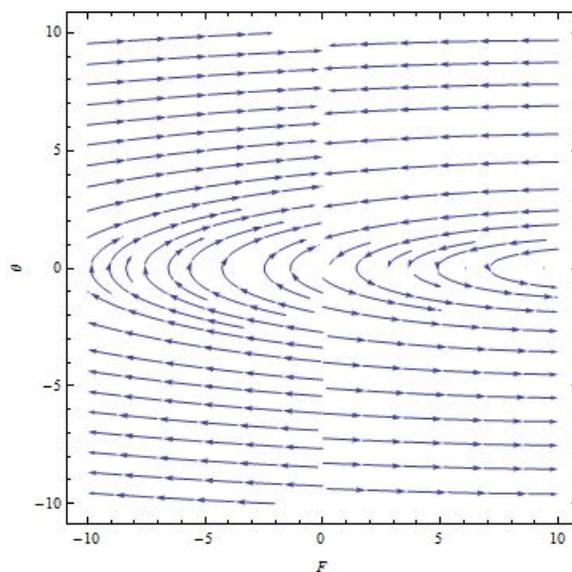


Figura 5.6: Gráfico no espaço de fase  $\theta \times F$  contendo valores negativos de  $F$ .

A análise qualitativa do gráfico mostra que o ponto crítico  $(0,0)$  é uma bifurcação sela-nó, pois em  $F = 0$  tem-se um eixo que apresenta comportamento estável para  $\theta > 0$  e instável para  $\theta < 0$ . Contudo os valores de  $F$  negativos nunca são alcançados em um modelo de U.M., uma vez que o próprio valor  $F = 0$  nunca é atingido.

Linearizando agora em torno de  $\left(\frac{1}{8\alpha}, 0\right)$ , surge um novo jacobiano, e esse ponto crítico pode ser também classificado,

$$\begin{cases} \dot{F} = -\frac{1}{6\alpha}\theta \\ \dot{\theta} = \frac{1}{2}kF \end{cases} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6\alpha} \\ \frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando os autovalores, obtém-se  $\lambda_1 = \lambda_2^* = i\sqrt{\frac{1}{12\alpha}}$ . Portanto  $\left(\frac{1}{8\alpha}, 0\right)$  é um ponto de centro.

O gráfico abaixo mostra o espaço de fase do sistema (5.7).

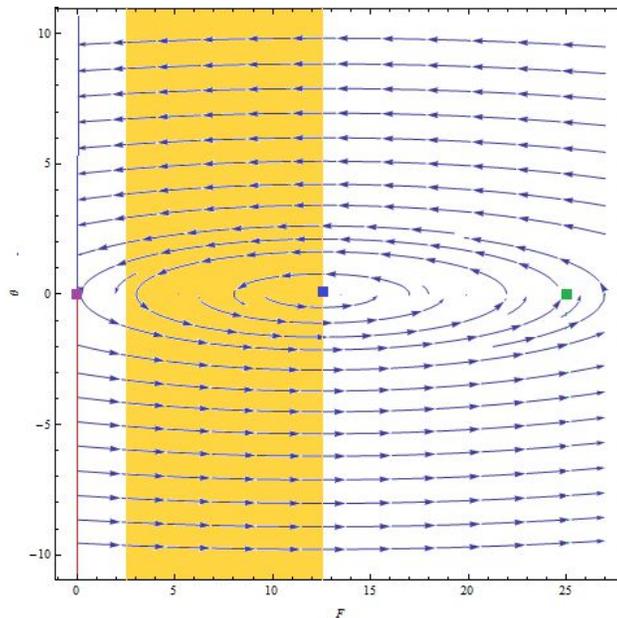


Figura 5.7: Espaço de Fase  $\theta$  x  $F$ : A faixa em laranja marca a região onde  $c_s^2 < 0$ . O ponto de centro estável está marcado em azul, o ponto de bifurcação em roxo e o *bounce* em verde. As linhas azul e vermelha denotam o comportamento estável e instável do eixo  $F = 0$  para valores positivos e negativos de  $\theta$  respectivamente. Foram adotados os valores  $k = 1$  e  $\alpha = 0.01$ .

No caso  $\varepsilon = +1$ , o sistema fica:

$$\begin{cases} \dot{F} = -\frac{4}{3}F\theta \\ \dot{\theta} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \frac{k}{2}\left(\frac{1}{2}F - 6\alpha F^2\right). \end{cases} \quad (5.8)$$

Os pontos críticos são:  $(F_0, \theta_0) = (0, 0)$  e  $(F_1, \theta_1) = \left(\frac{1}{12\alpha}, 0\right)$ .

Linearizando em torno de  $(0, 0)$ , os autovalores novamente são nulos. Novamente, é necessário analisar um espaço de fase que contenha valores negativos de  $F$  para determinar o caráter do ponto crítico.

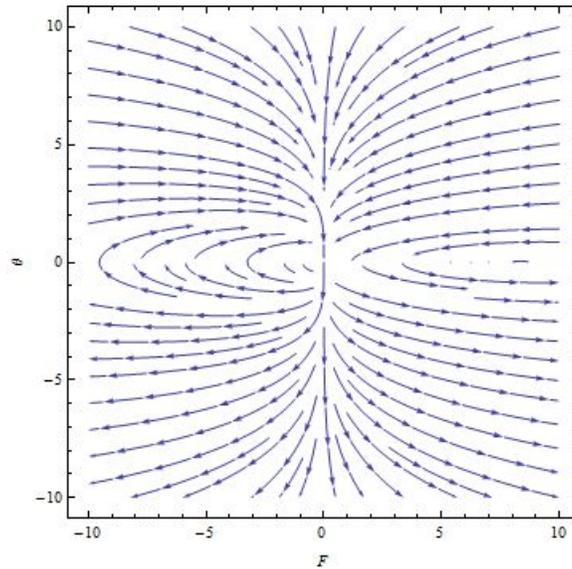


Figura 5.8: Gráfico para o sistema  $\theta \times F$  contendo valores negativos de  $F$ .

A análise qualitativa deste gráfico próximo ao ponto crítico revela que, de acordo com a descrição feita no Capítulo 4, o ponto  $(F_0, \theta_0) = (0, 0)$  constitui uma bifurcação de dobra cíclica. Porém os valores de  $F$  negativos nunca são alcançados em um modelo de U.M., dado que o próprio valor  $F = 0$  nunca é atingido.

Linearizando em torno de  $(\frac{1}{12\alpha}, 0)$ , obtém-se o sistema e o jacobiano abaixo,

$$\begin{cases} \underline{\dot{F}} = -\frac{1}{9\alpha}\underline{\theta} \\ \underline{\dot{\theta}} = \frac{1}{4}k\underline{F} \end{cases} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{9\alpha} \\ \frac{k}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores são  $\lambda_1 = \lambda_2^* = i\sqrt{\frac{1}{36\alpha}}$ ; logo,  $(\frac{1}{12\alpha}, 0)$  é um ponto de centro.

Tanto no sistema (5.7), quanto no sistema (5.8), as equações são funções analíticas valendo, portanto, a extensão do teorema de Poincaré-Lyapunov, o qual garante, para centros elípticos, a equivalência entre espaços de fase de sistemas linearizados e espaços gerados com o sistema original.

O gráfico no espaço de fase para o sistema (5.8) é mostrado abaixo:

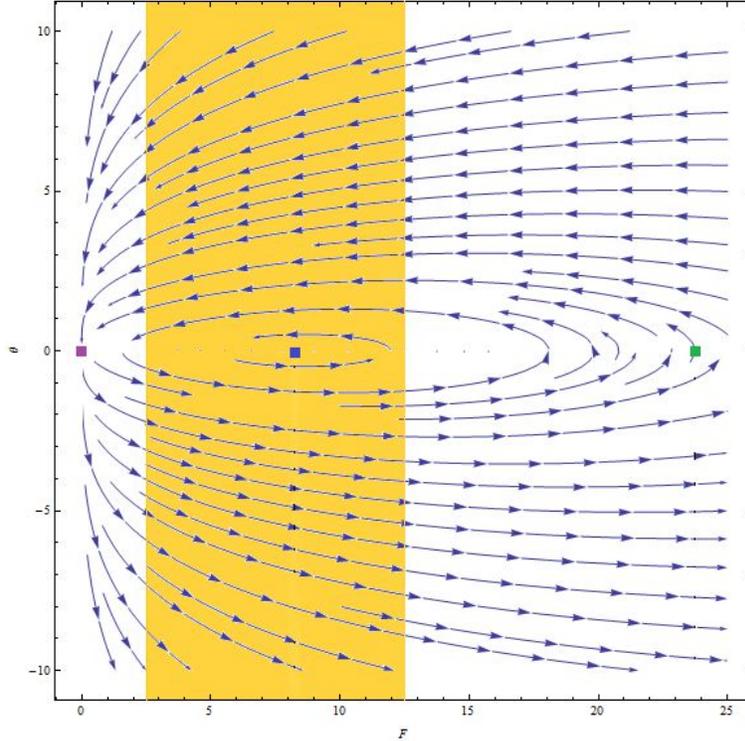


Figura 5.9: Espaço de Fase  $\theta \times F$ : A faixa em laranja marca a região onde  $c_s^2 < 0$ . O ponto de centro estável está marcado em azul, o ponto de bifurcação em roxo e o *bounce* em verde. Foram adotados os valores  $k = 1$  e  $\alpha = 0.01$ .

Observando os gráficos (5.7) e (5.9) nota-se que em ambos os casos o *bounce* ocorre em uma região estável do modelo, o que não era esperado. Ademais, a região de instabilidade corresponde a uma era de evolução do Universo em que nenhum comportamento dessa forma é esperado. Entretanto, isso não ameaça o comportamento da região na qual deve valer a eletrodinâmica clássica, uma vez que o valor  $F = \frac{1}{40\alpha}$  ainda é muito maior do que os campos eletromagnéticos clássicos em razão do valor real de  $\alpha$ .

### 5.1.4 A Interpretação de Dois Fluidos

Uma outra forma de tentar transpassar o problema da instabilidade é tratar o fluido que gera esse modelo como dois fluidos não interagentes os quais possuem, cada um, sua região de domínio, como é feito em [22].

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4}F + \alpha F^2 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = \frac{1}{4}F \quad \rho_2 = -\alpha F^2$$

Pode-se notar que  $\rho_2 < 0$ , mas como a densidade de energia total permanece positiva dentro do domínio de  $F$ , então isso não é, de fato, um problema para o modelo,

$$\rho_T = \frac{1}{4}F - \alpha F^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad F < \frac{1}{4\alpha}.$$

A pressão também pode ser decomposta em duas pressões relacionadas a fluidos diferentes

$$p_1 = \frac{1}{12}F \quad p_2 = -\frac{5}{3}\alpha F^2.$$

Nota-se que  $p_1$  é positiva, enquanto que  $p_2$  é negativa. Quando o termo quadrático, o qual representa a correção não linear à teoria de Maxwell, dominar as pressões serão negativas. A partir disso, é possível calcular o valor limítrofe de  $F$ , no qual ocorre a mudança de domínio do cenário não linear para o linear,

$$p_T = \frac{1}{12}F - \frac{5}{3}\alpha F^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F = \frac{0.2}{4\alpha}.$$

E finalmente, usando essa análise de dois fluidos para o cálculo da velocidade do som, obtêm-se resultados bem diferentes:

$$c_{s1}^2 = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad c_{s2}^2 = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{8\alpha F}{2\alpha F} \right) = \frac{5}{3}.$$

A tabela abaixo mostra, resumidamente, os resultados obtidos a partir da interpretação de dois fluidos.

Table 5.1: Dois Fluidos

Fluido1	Fluido2
$\rho_1 = \frac{1}{4}F$	$\rho_2 = -\alpha F^2$
$p_1 = \frac{1}{12}F = \frac{1}{3}\rho_1$	$p_2 = -\frac{5}{3}\alpha F^2 = \frac{5}{3}\rho_2$
$c_{s1}^2 = \frac{1}{3}$	$c_{s2}^2 = \frac{5}{3}$
Domina quando $F < \frac{0.2}{4\alpha}$	Domina quando $F > \frac{0.2}{4\alpha}$

## 5.2 Forma Exponencial da Eletrodinâmica Não Linear (ENE)

A ENE pode ser compreendida como uma extensão da teoria de Euler-Heisenberg, uma soma sobre todos os termos de  $F$ :

$$\mathcal{L}_{ENE} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N c_i F^i - c_0.$$

Desta forma, tal teoria contém todas as ordens do escalar  $F$ . Uma consideração se faz necessária nesse ponto: os escalares  $F$  e  $G$ , cujas potências aparecem na teoria de Euler-Heisenberg, referem-se a diferentes modos de polarização dos fótons que são emitidos ou absorvidos no momento do espalhamento. O escalar  $F$ , definido como proporcional a  $(B^2 - E^2)$ , carrega a informação dos fótons polarizados paralelamente, enquanto que o escalar  $G$ , definido como proporcional a  $(\vec{B} \cdot \vec{E})$ , carrega a informação dos fótons polarizados perpendicularmente [16]. Uma vez que o escalar  $G$  não aparece devido à isotropia do modelo de FLRW, matematicamente obtida utilizando o procedimento das médias de Tolman-Ehrenfest, o mesmo ocorre com os modos de polarização perpendiculares. A informação sobre esses modos de polarização do fóton é perdida ao considerarmos os campos em média.

Entretanto, essa teoria ainda pode ser uma boa fonte para um modelo tipo U.M., pois ela contém todos os modos de polarização paralelos de todos os espalhamentos possíveis em teoria quântica de campos. Além disso, a teoria de Born-Infeld, quando expandida até a segunda ordem, é indistinguível da ENE, podendo inclusive ser estabelecida uma relação entre as constantes das duas teorias. Isso faz com que a ENE seja considerada também uma teoria tipo Born-Infeld, como é dito em [23].

### 5.2.1 ENE como fonte da Cosmologia

A Lagrangeana correspondente à teoria ENE pode assumir a forma

$$\mathcal{L} = \gamma^2 \left( \exp \left( -\frac{F}{4\gamma^2} \right) - 1 \right), \quad (5.9)$$

em que  $\gamma^2$  é o limite superior para o campo elétrico, proveniente da teoria de Born-Infeld (Apêndice C), cuja discussão é feita na seção 5.4.

Assim  $\rho$  e  $p$  são dados por:

$$\rho = \gamma^2 \left( 1 - \exp \left( -\frac{F}{4\gamma^2} \right) \right) \quad (5.10)$$

$$p = \frac{1}{3} F \exp \left( -\frac{F}{4\gamma^2} \right) - \rho \quad (5.11)$$

As curvas que expressam  $\rho$  e  $p$  em função de  $F$  são mostradas no gráfico abaixo:

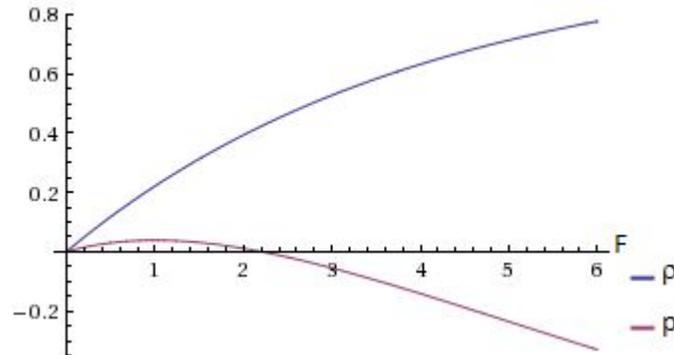


Figura 5.10: Gráfico  $\rho$  e  $p$  x  $F$ : Adotou-se o valor ilustrativo  $\gamma^2 = 1$

Substituindo (5.10) na equação (3.7), o resultado é:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\gamma^2 k}{3} \left(1 - \exp\left(-\frac{F}{4\gamma^2}\right)\right) - \frac{\varepsilon}{a^2}.$$

Quando  $\varepsilon = 0$ , não há valores extremos para  $a$ . Isso pode ser verificado tendo em conta as expressões que seguem,

$$\dot{a}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exp\left(-\frac{F(0)}{4\gamma^2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad F(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a(0) \rightarrow \infty.$$

Um procedimento muito comum para fazer com que o fator de escala possua um ponto extremo, de uma forma que preserve o domínio das grandezas físicas, é introduzir uma constante cosmológica na teoria original. Essa constante funciona como uma energia de fundo que está sempre presente no modelo e que, a princípio, não varia no tempo. Desta forma, o caso  $\varepsilon = 0$  ainda pode trazer alguma solução que contenha um mínimo para  $a$  se for utilizada a Teoria da Relatividade Geral com constante cosmológica ( $\Lambda$ ).

A teoria com a constante escreve-se:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}.$$

Com essa nova expressão, um termo extra é acrescentado às equações de campo.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} = \frac{k}{3}\rho \quad (5.12)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{k}{6}(\rho + 3p) - \frac{\Lambda}{3}. \quad (5.13)$$

Com  $\varepsilon = 0$ , a equação (5.12) fica:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\Lambda}{3} = \frac{k\gamma^2}{3} \left(1 - \exp\left(-\frac{F}{4\gamma^2}\right)\right),$$

para que  $\dot{a}(0) = 0$ ,

$$1 - \frac{\Lambda}{k\gamma^2} = \exp\left(-\frac{F(0)}{4\gamma^2}\right) \quad \Rightarrow \quad F(0) = -4\gamma^2 \ln\left(1 - \frac{\Lambda}{k\gamma^2}\right).$$

Como  $F(0)$  é um valor positivo finito, então:

$$F(0) = -4\gamma^2 \ln\left(1 - \frac{\Lambda}{k\gamma^2}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Lambda}{k\gamma^2} > 0$$

e

$$F(0) = -4\gamma^2 \ln\left(1 - \frac{\Lambda}{k\gamma^2}\right) < N \quad \Rightarrow \quad \frac{\Lambda}{k\gamma^2} < 1 - \exp\left(\frac{-N}{4\gamma^2}\right).$$

Onde pode-se determinar o maior valor possível de  $\Lambda$  calculando o limite da expressão acima quando  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{-N}{4\gamma^2}\right) = 0,$$

o que resulta em um domínio de valores para  $\Lambda$  que permitem a existência de um extremo para  $a$

$$0 < \frac{\Lambda}{k\gamma^2} < 1.$$

Resta ainda verificar quais as condições que  $\Lambda$  deve satisfazer para que esse extremo de  $a$  seja ponto de mínimo ou de máximo. Essas condições podem ser obtidas a partir da equação (5.13):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{3} \left[ -\Lambda - k \left( \gamma^2 \exp \left( -\frac{F}{4\gamma^2} \right) - \gamma^2 + \frac{1}{2} \exp \left( -\frac{F}{4\gamma^2} \right) F \right) \right].$$

Para que esse ponto seja um mínimo:

$$\frac{\ddot{a}}{a}(0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \left( 1 - \frac{\Lambda}{k\gamma^2} \right) \ln \left( 1 - \frac{\Lambda}{4\gamma^2} \right) > 0.$$

Então duas situações são possíveis: os dois termos que se multiplicam no lado esquerdo da equação são positivos ou negativos.

Se os dois termos forem positivos,

$$\begin{cases} \ln \left( 1 - \frac{\Lambda}{4\gamma^2} \right) > 0 & \Rightarrow \quad \frac{\Lambda}{k\gamma^2} < 0 \\ e \\ \left( 1 - \frac{\Lambda}{k\gamma^2} \right) > 0 & \Rightarrow \quad \frac{\Lambda}{k\gamma^2} < 1. \end{cases}$$

a primeira solução já contém a segunda. Logo, nesse caso,  $\Lambda < 0$ , que está fora do domínio que foi determinado.

A segunda situação possível é se os dois termos forem negativos.

$$\begin{cases} \ln \left( 1 - \frac{\Lambda}{4\gamma^2} \right) < 0 & \Rightarrow \quad \frac{\Lambda}{k\gamma^2} > 0 \\ e \\ \left( 1 - \frac{\Lambda}{k\gamma^2} \right) < 0 & \Rightarrow \quad \frac{\Lambda}{k\gamma^2} > 1. \end{cases}$$

Neste caso ocorre o contrário do caso anterior: a segunda solução é que contém a primeira. Portanto, nesse caso,  $\Lambda > 1$ , que também está fora do domínio que foi determinado.

Logo, para este modelo, a inclusão da constante cosmológica no caso  $\varepsilon = 0$  não resultou em um *bounce*. O único caso, então, cuja estabilidade deve ser analisada é o caso  $\varepsilon = +1$ .

Retomando a teoria original, sem o acréscimo da constante cosmológica, o caso  $\varepsilon = +1$  retorna uma solução na qual é possível que haja um extremo para  $a$ . Assim, a análise do modelo com a constante cosmológica se torna desnecessária para os objetivos deste trabalho. Pressupondo que o extremo existe, chega-se a uma expressão que determina  $a(0)$  implicitamente,

$$\dot{a}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2(0) = \frac{3}{\gamma^2 k} \left[ \frac{\exp\left(\frac{F(0)}{4\gamma^2}\right)}{\exp\left(\frac{F(0)}{4\gamma^2}\right) - 1} \right] > 0.$$

A positividade é garantida pelo fato de que, em um U.M.,  $F$  é sempre positivo.

Impondo-se a positividade da equação (3.4), é encontrado o valor mínimo de  $F$  para o qual esse extremo é um mínimo e, portanto, a ocorrência de *bounce* é garantida,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{k}{3} \left[ \gamma^2 - \left( \gamma^2 + \frac{F}{2} \right) \exp\left(-\frac{F}{4\gamma^2}\right) \right] > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{\gamma^2} > 5.0257248.$$

Este valor será utilizado como valor de corte inferior para o modelo, uma vez que quaisquer valores de  $F$  abaixo dele não resultam em modelos com *bounce*.

### 5.2.2 Análise da Estabilidade do Modelo gerado a partir da ENE

Partindo da Lagrangeana, pode-se calcular suas derivadas:

$$\mathcal{L}_F = -\frac{1}{4} \exp\left(-\frac{F}{4\gamma^2}\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_{FF} = \frac{1}{16\gamma^2} \exp\left(-\frac{F}{4\gamma^2}\right).$$

Utilizando a equação (4.3), descobre-se a região de instabilidade desse modelo

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{F}{\gamma^2}\right)$$

Portanto, valores de  $F$  superiores a  $\gamma^2$  corresponderão à fase instável do modelo, como é mostrado no gráfico abaixo:

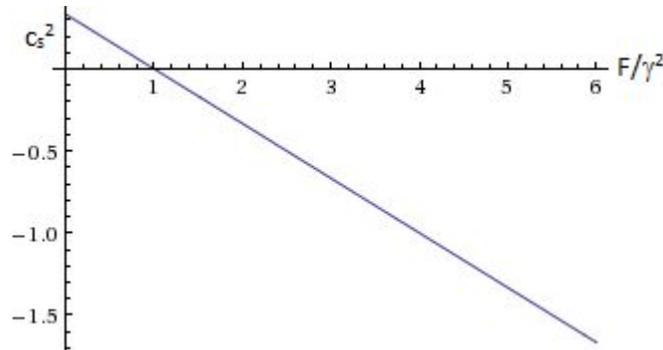


Figura 5.11: Gráfico  $c_s^2 \times \frac{F}{\gamma^2}$ .

A velocidade do som decresce linearmente com  $F$  e não há nenhum valor de  $F$  que gere um *bounce* e que faça  $c_s^2 \geq -1$ . Todavia, a análise do espaço de fase gerado para o caso  $\varepsilon = +1$ , que será feita na próxima seção, mostra que as soluções, mesmo após passarem um longo período na região instável, convergem para uma região estável.

### 5.2.3 Sistema Dinâmico e Espaço de Fase do Modelo gerado a partir da ENE

Para a análise da dinâmica desse modelo será utilizado apenas o sistema (4.10), uma vez que para  $\varepsilon = 0$  não há *bounce*. Com a Lagrangeana da teoria ENE o sistema assume a forma:

$$\begin{cases} \dot{F} = -\frac{4}{3}F\theta \\ \dot{\theta} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \frac{k}{2} \left[ 2\gamma^2 \left( \exp\left(-\frac{F}{4\gamma^2}\right) - 1 \right) + \exp\left(-\frac{F}{4\gamma^2}\right) F \right]. \end{cases} \quad (5.14)$$

Os pontos críticos são:  $(F_0, \theta_0) = (0, 0)$  e  $(F_1, \theta_1) \approx (5.0257\gamma^2, 0)$ .

Linearizando em torno de  $(0, 0)$ , os autovalores novamente são nulos. Para esta Lagrangeana, o gráfico no espaço de fase contendo valores negativos de  $F$  é:

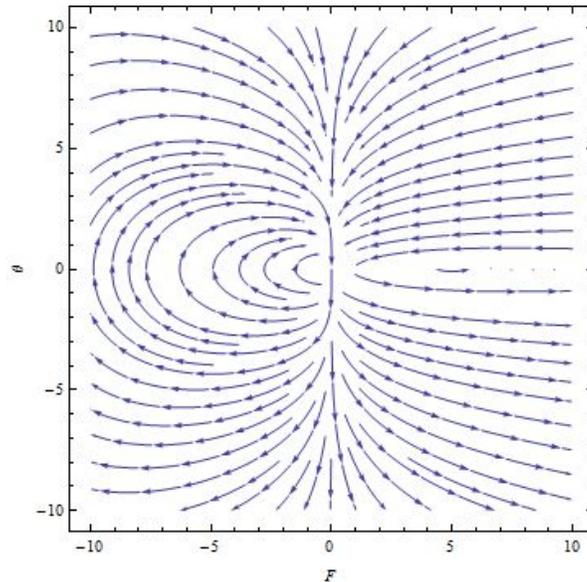


Figura 5.12: Gráfico do espaço de fase  $\theta$  x  $F$  mostrando valores de  $F$  negativos.

A análise qualitativa deste gráfico próximo ao ponto crítico mostra que, de acordo com a descrição feita no Capítulo 4, o ponto  $(F_0, \theta_0) = (0, 0)$  é uma bifurcação de dobra cíclica. Contudo, os valores de  $F$  negativos nunca são alcançados em um modelo de U.M., uma vez que o próprio valor  $F = 0$  nunca é atingido.

Linearizando em torno de  $(5.0257\gamma^2, 0)$ , obtém-se o sistema e o jacobiano abaixo,

$$\begin{cases} \underline{\dot{F}} \approx -6.70094\gamma^2\underline{\theta} \\ \underline{\dot{\theta}} \approx 0.10766k\underline{F} \end{cases} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & -6.70094\gamma^2 \\ 0.10766k & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando os autovalores, obtém-se  $\lambda_1 = \lambda_2^* \approx i\sqrt{0.7214k\gamma^2}$ , então  $(5.0257\gamma^2, 0)$  é um ponto de centro.

As equações que compõem o sistema (5.14) são funções analíticas valendo, portanto, a extensão do teorema de Poincaré-Lyapunov, o qual garante, para centros elípticos, a equivalência entre espaços de fase de sistemas linearizados e espaços gerados com o sistema original.

O gráfico no espaço de fase para o sistema (5.14) é mostrado na próxima página. Nele é possível perceber que o *bounce* ocorre em uma região instável do modelo, o que é esperado. Existe um ponto de centro que garante o retorno para a região estável. A região que possui valores do campo correspondentes à eletrodinâmica clássica é estável, visto que o valor real de  $\gamma^2$  é muito maior do que o adotado na construção do gráfico.

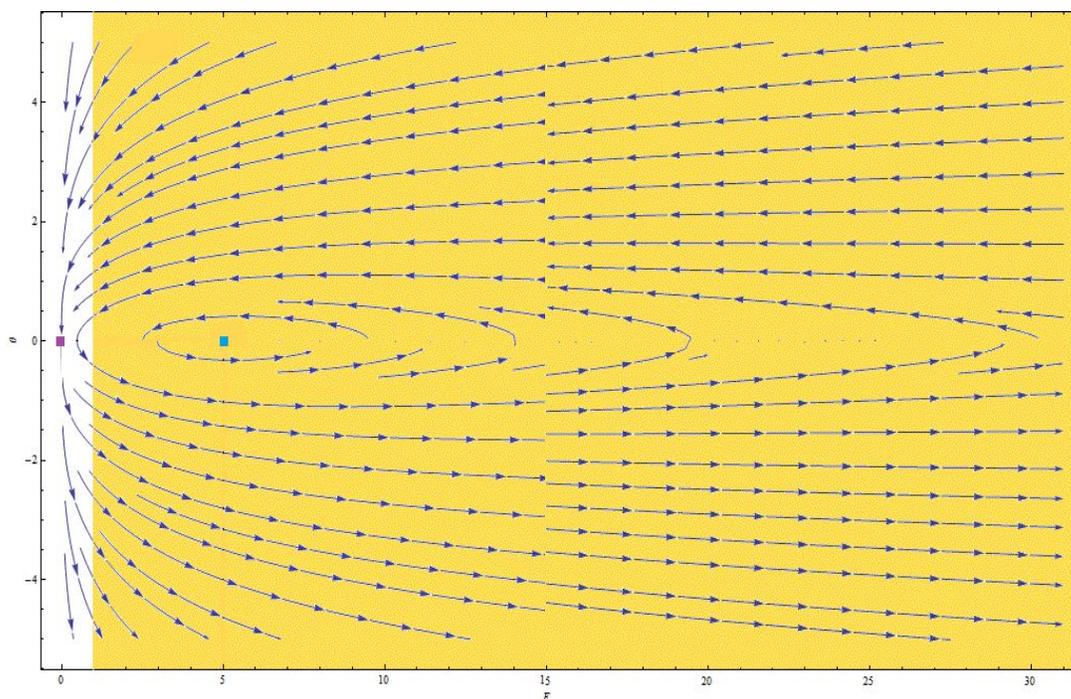


Figura 5.13: Espaço de Fase  $\theta \times F$ : A parte em laranja corresponde à região onde  $c_s^2 < 0$ . O ponto de centro estável está marcado em azul e o ponto de bifurcação em roxo. Foram adotados os valores  $k = \gamma^2 = 1$ .

Seria possível também fazer uma interpretação de dois fluidos para a ENE ao se expandir a lagrangeana em potências de  $F$ . Em [3] foi mostrado que termos de ordem par geram modelos com *bounce* e termos de ordem ímpar geram modelos singulares. De qualquer forma, esse procedimento traria um resultado aproximado independente da ordem tomada, uma vez que, devido ao truncamento, todas as ordens superiores seriam desconsideradas.

### 5.3 Forma Logarítmica da Eletrodinâmica Não Linear (LNE)

A Teoria da Relatividade Geral possui algumas características indesejáveis a qualquer teoria física. Como já foi destacado na introdução, tanto a relatividade geral quanto a eletrodinâmica de Maxwell possuem singularidades. Pelo lado da gravitação, é difícil aceitar uma teoria na qual o próprio espaço-tempo rui em algum ponto e onde o tensor de Riemann pode divergir em uma singularidade que pode ser atingida por uma curva tipo tempo. Pelo lado da eletrodinâmica, existe o problema das cargas pontuais. Nas proximidades de uma carga pontual, não só o tensor de Faraday diverge, mas também o tensor energia-momento.

Em alguns de seus trabalhos, Altshuler considerou a eletrodinâmica não linear como um possível mecanismo para a inflação e desenvolveu um esquema para construir teorias de campo não singulares usando multiplicadores de Lagrange [24]. Este método foi invocado mais tarde para criar a “*hipótese da curvatura limitada*” em teorias cosmológicas [25, 26, 27].

A LNE, que está contida na classe de teorias contruídas por Altshuler, particularmente, é um bom exemplo para ilustrar que certas teorias de campo não lineares podem satisfazer a hipótese da curvatura limitada também para campos de calibre [28].

As teorias de Euler-Heisenberg e Born-Infeld quando expandida até a segunda ordem, desconsiderando o escalar  $G$ , podem ser identificadas com a expansão da LNE até a segunda ordem. Com isso, é possível assossiar a constante desta teoria com as daquelas e, então, assim como a ENE, a LNE também é conhecida como uma teoria tipo Born-Infeld [23].

### 5.3.1 LNE como fonte da Cosmologia

A Lagrangeana que representa a LNE pode ser escrita como se segue:

$$\mathcal{L} = -2\gamma^2 \ln \left( 1 + \frac{F}{8\gamma^2} \right).$$

A densidade de energia e a pressão leem-se,

$$\rho = 2\gamma^2 \ln \left( 1 + \frac{F}{8\gamma^2} \right), \quad (5.15)$$

$$p = \frac{8\gamma^2 F}{3(8\gamma^2 + F)} - 2\gamma^2 \ln \left( 1 + \frac{F}{8\gamma^2} \right). \quad (5.16)$$

Seu comportamento em função de  $F$  está representado no gráfico abaixo:

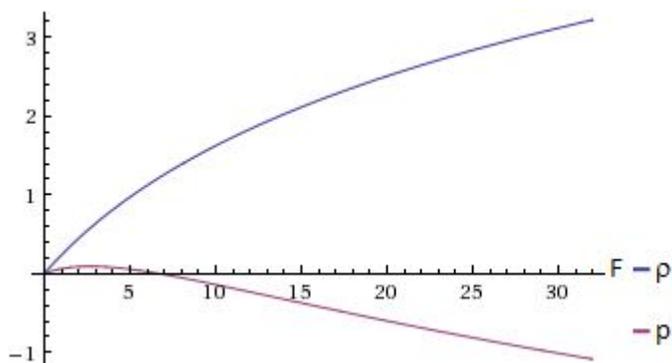


Figura 5.14: Gráfico  $\rho$  e  $p$  x  $F$ : Adotou-se o valor ilustrativo  $\gamma^2 = 1$ .

A equação (3.7) fornece a condição para que seja possível um extremo para  $a$ . Nesse caso tem-se:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{2}{3}k\gamma^2 \ln\left(1 + \frac{F}{8\gamma^2}\right) - \frac{\varepsilon}{a^2}.$$

Para tri-curvatura nula, não há extremo para o fator de escala, como é explicitado a seguir:

$$\dot{a}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{F(0)}{8\gamma^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad F(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a(0) \rightarrow \infty.$$

Para tri-curvatura positiva é possível que exista um extremo para  $a$ ,

$$\dot{a}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2(0) = \frac{3}{2k\gamma^2} \left[ \ln\left(1 + \frac{F(0)}{8\gamma^2}\right) \right]^{-1} > 0.$$

em que  $a(0)$  está determinado implicitamente e a positividade é garantida pelo fato de que, em um U.M.,  $F$  é sempre positivo.

Utilizando agora a equação (3.4), pode-se verificar em que condições esse extremo é um mínimo:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{k}{3} \left[ 2\gamma^2 \left( \ln\left(1 + \frac{F}{8\gamma^2}\right) - \frac{2F}{8\gamma^2 + F} \right) \right] > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{\gamma^2} > 31.372429.$$

Este resultado, obtido durante a realização do trabalho, é uma condição necessária para que  $\dot{a}(0) = 0$  corresponda a um mínimo.

Da mesma maneira que foi feito na seção anterior, será verificado se o termo extra da constante cosmológica traz um *bounce* para este modelo no caso  $\varepsilon = 0$ .

Com  $\varepsilon = 0$  e a Lagrangeana LNE, a equação (5.12) se torna

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\Lambda}{3} = \frac{2k\gamma^2}{3} \ln\left(1 + \frac{F}{8\gamma^2}\right).$$

para que  $\dot{a}(0) = 0$

$$\frac{\Lambda}{2k\gamma^2} = \ln\left(1 + \frac{F(0)}{8\gamma^2}\right) \quad \Rightarrow \quad F(0) = 8\gamma^2 \left[ \exp\left(\frac{\Lambda}{2k\gamma^2}\right) - 1 \right].$$

Como  $F(0)$  é sempre positivo finito, então

$$F(0) = 8\gamma^2 \left[ \exp\left(\frac{\Lambda}{2k\gamma^2}\right) - 1 \right] > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Lambda}{k\gamma^2} > 0$$

e

$$F(0) = 8\gamma^2 \left[ \exp\left(\frac{\Lambda}{2k\gamma^2}\right) - 1 \right] < N \quad \Rightarrow \quad \frac{\Lambda}{2k\gamma^2} < \ln\left(1 + \frac{N}{8\gamma^2}\right).$$

Como  $N$  está fora do domínio de  $F$ , pode-se determinar o maior valor possível de  $\Lambda$  calculando-se o limite da expressão acima quando  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{N}{8\gamma^2}\right) \rightarrow \infty.$$

O resultado, desse modo, gera apenas uma condição para que  $\Lambda$  permita a existência de um extremo para  $a$ ,

$$\frac{\Lambda}{2k\gamma^2} > 0.$$

Resta ainda verificar quais as condições que  $\Lambda$  deve satisfazer para que esse extremo de  $a$  seja ponto de mínimo ou de máximo. Essas condições podem ser obtidas a partir da equação (5.13):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{3} \left[ -\Lambda - k \left( -2\gamma^2 \ln\left(1 + \frac{F}{8\gamma^2}\right) + \frac{4\gamma^2 F}{8\gamma^2 + F} \right) \right].$$

Para que esse ponto seja um mínimo:

$$\frac{\ddot{a}}{a}(0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\left[ \exp\left(\frac{\Lambda}{2k\gamma^2}\right) - 1 \right]}{\exp\left(\frac{\Lambda}{2k\gamma^2}\right)} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Lambda}{2k\gamma^2} < 0.$$

A condição de mínimo contradiz a condição estabelecida para a existência de ponto crítico, o que significa que este ponto, se existir, não será mínimo e, logo, não há como gerar um *bounce* para o caso  $\varepsilon = 0$  dessa forma. O único caso, então, cuja estabilidade deve ser analisada é o caso  $\varepsilon = +1$ .

### 5.3.2 Análise da Estabilidade do Modelo gerado a partir da LNE

Partindo da Lagrangeana, pode-se calcular suas derivadas,

$$\mathcal{L}_F = -\frac{1}{4} \left( \frac{8\gamma^2}{8\gamma^2 + F} \right) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_{FF} = \frac{1}{4} \left( \frac{8\gamma^2}{(8\gamma^2 + F)^2} \right).$$

Usando a equação (4.3), descobre-se a região de instabilidade desse modelo

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{4F}{8\gamma^2 + F} \right).$$

O modelo é instável para valores de  $F$  superiores a  $\frac{8}{3}\gamma^2$ , o que está ilustrado no gráfico abaixo.

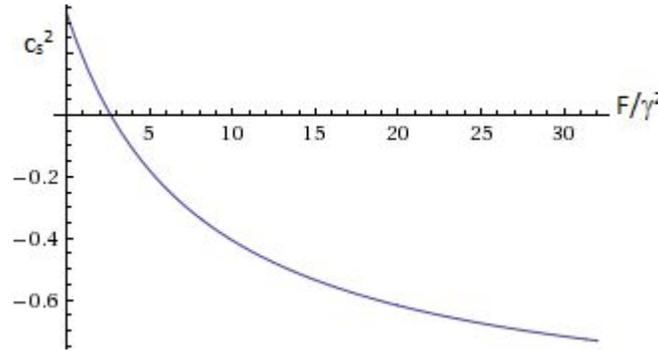


Figura 5.15: Gráfico  $c_s^2 \times \frac{F}{\gamma^2}$ .

Apesar de possuir valores negativos para  $c_s^2$ , estes nunca são iguais a  $-1$ , o que ocorre no modelo inflacionário (Apêndice D). De fato, para a LNE,  $c_s^2 \rightarrow -1$  quando  $F \rightarrow \infty$ . Essa Lagrangeana também poderia ser expandida em série de potências de  $F$  e truncada em algum termo par a fim de gerar um modelo com *bounce* que pudesse receber o tratamento de fluidos não interagentes. Contudo, assim como no caso da ENE, essa solução seria aproximada devido à desconsideração dos termos de mais alta ordem.

### 5.3.3 Sistema Dinâmico e Espaço de Fase do Modelo gerado a partir da LNE

Para a análise da dinâmica desse modelo será utilizado apenas o sistema (4.10), uma vez que para  $\varepsilon = 0$  não há *bounce*. Com a lagrangeana da teoria LNE, o sistema assume a forma:

$$\begin{cases} \dot{F} = -\frac{4}{3}F\theta \\ \dot{\theta} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \frac{k}{2} \left[ -4\gamma^2 \ln \left( 1 + \frac{F}{8\gamma^2} \right) + \frac{8\gamma^2 F}{8\gamma^2 + F} \right]. \end{cases} \quad (5.17)$$

Os pontos críticos são:  $(F_0, \theta_0) = (0, 0)$  e  $(F_1, \theta_1) \approx (31.372\gamma^2, 0)$ .

Linearizando em torno de  $(0, 0)$ , os autovalores novamente são nulos. Para essa Lagrangeana, o gráfico no espaço de fase que mostra valores negativos de  $F$  é o seguinte:

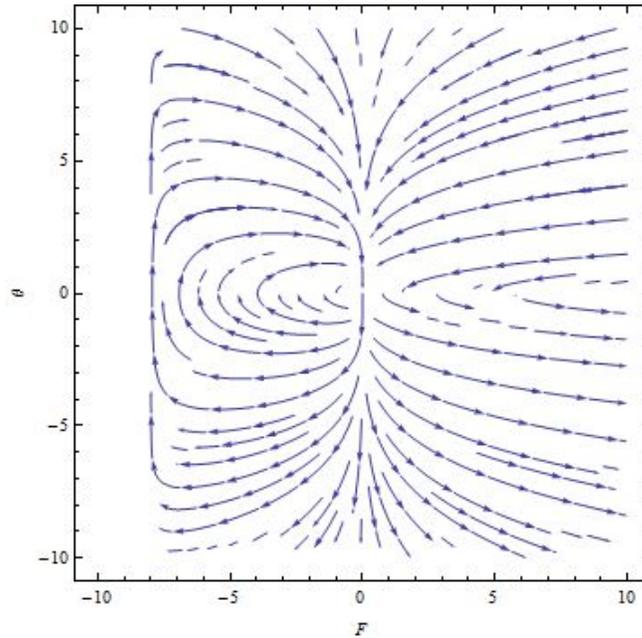


Figura 5.16: Gráfico para o sistema  $\theta \times F$  mostrando valores negativos de  $F$ .

A análise qualitativa desse gráfico próximo ao ponto crítico mostra que, de acordo com a descrição feita no Capítulo 4, o ponto crítico  $(F_0, \theta_0) = (0, 0)$  é uma bifurcação de dobra cíclica. Todavia, os valores de  $F$  negativos nunca são alcançados em um modelo de U.M., dado que o próprio valor  $F = 0$  nunca é atingido.

Linearizando em torno de  $(31.372\gamma^2, 0)$ , obtém-se o sistema e o jacobiano abaixo,

$$\begin{cases} \underline{\dot{F}} \approx -41.8294\gamma^2\underline{\theta} \\ \underline{\dot{\theta}} \approx 0.030154k\underline{F} \end{cases} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & -41.8294\gamma^2 \\ 0.030154k & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando os autovalores obtêm-se  $\lambda_1 = \lambda_2^* \approx i\sqrt{1.261323k\gamma^2}$ . Assim  $(31.372\gamma^2, 0)$  é um ponto de centro.

As equações que compõem o sistema (5.17) são funções analíticas. Vale, então, a extensão do teorema de Poincaré-Lyapunov que garante, para centros elípticos, a equivalência entre espaços de fase de sistemas linearizados e espaços gerados com o sistema original.

O gráfico no espaço de fase para o sistema (5.17) é mostrado abaixo:

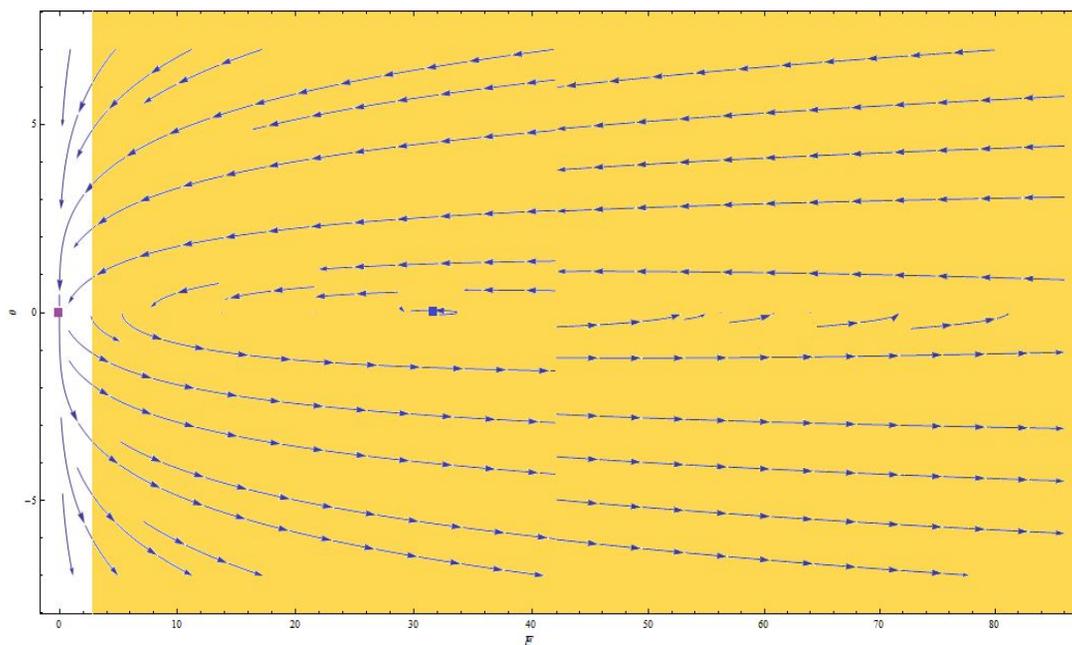


Figura 5.17: Espaço de Fase  $\theta \times F$ : A parte em laranja corresponde à região onde  $c_s^2 < 0$ . O ponto de centro estável está marcado em azul e o ponto de bifurcação em roxo. Foram adotados os valores  $k = \gamma^2 = 1$ .

Da mesma forma que no modelo gerado com a ENE, neste modelo o *bounce* ocorre na região instável e a constante  $\gamma^2$  é grande o suficiente para que os valores do campo na teoria linear correspondam a uma região estável do modelo. Existe um ponto de centro que garante o retorno do modelo para a zona estável, convergindo assintoticamente para o ponto de origem que, apesar de ser uma bifurcação, é o ponto final da dinâmica.

## 5.4 A Teoria de Born-Infeld Estendida (BIE)

A teoria desenvolvida por M. Born e L. Infeld [6] tinha o audacioso objetivo de resolver alguns problemas da eletrodinâmica clássica como, por exemplo, o problema da divergência do campo elétrico no ponto onde se encontra uma carga pontual. Eles consideraram, primeiramente, que a relação entre a matéria e o campo eletromagnético poderia ser interpretada partindo de duas perspectivas. A primeira, chamada perspectiva unitária, supõe que a única entidade física é o campo eletromagnético. As partículas são consideradas singularidades do campo e a massa é entendida como parte da energia do campo. A segunda perspectiva, perspectiva dual, considera campos e partículas como dois agentes essencialmente diferentes. As partículas são as fontes do campo, são afetadas pelo campo, mas não são parte dele. Sua propriedade característica é a massa, a medida de sua inércia.

A segunda perspectiva, mais utilizada pelos físicos, é sustentada por três importantes fatos:

1. A falha de qualquer tentativa em desenvolver uma teoria unitária;
2. O resultado da teoria da relatividade restrita, de que a dependência da massa com a velocidade pode ser obtida a partir de uma lei de transformação, não sendo, portanto, de forma alguma característica exclusiva da massa eletromagnética;
3. O grande sucesso da mecânica quântica baseada na perspectiva dual. Os métodos desenvolvidos foram aplicados à eletrodinâmica para gerar uma eletrodinâmica quântica.

Contudo, existiam indicações de que algumas soluções da eletrodinâmica quântica apresentavam dificuldades consideráveis relacionadas, principalmente, ao fato de que a energia de auto-interação de uma carga pontual é infinita. Em todos os casos existiam evidências de que a teoria de Dirac funcionava enquanto os comprimentos de onda fossem grandes comparados ao

“raio do elétron”, mas que falhava para campos com comprimentos de onda menores. As leis do eletromagnetismo deveriam, então, ser modificadas, e as leis quânticas adaptadas às novas equações de onda, para a construção de uma nova teoria do eletromagnetismo e um novo método de tratamento para a mecânica quântica. Born e Infeld propuseram uma teoria clássica que garantia o princípio da finitude, o qual postula que uma teoria satisfatória deveria evitar que quantidades físicas divergissem. No caso do eletromagnetismo, o campo elétrico deveria obedecer a uma lei que não divergisse, quando no interior do elétron, atingindo um valor máximo para  $r = 0$ , e a lei do inverso do quadrado, quando fora. A Lagrangeana resultante do trabalho de Born e Infeld, conhecida como Lagrangeana de Born-Infeld (B.I.), tem a seguinte expressão<sup>2</sup>:

$$\mathcal{L} = \gamma^2 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{F}{2\gamma^2} - \frac{G^2}{16\gamma^4}} \right),$$

na qual  $\gamma^2 = \frac{e^2}{r_0^4} \approx 0.04071 \cdot 10^{22} \frac{C^2}{m^4}$  é o limite superior para o campo elétrico, sendo  $e$  a carga elementar e  $r_0$  o raio clássico do elétron.<sup>3</sup>

Além de solucionar esse problema, a teoria de Born-Infeld combina as duas perspectivas que podem ser adotadas sobre o campo. Cargas pontuais e densidades de carga livres no espaço são equivalentes, de forma que a questão sobre qual seria a forma correta de descrever o elétron perde o significado, confirmando a ideia advinda da mecânica quântica de que duas abordagens aparentemente contraditórias em uma descrição macroscópica podem ser compatíveis em uma descrição da microfísica.

---

<sup>2</sup>A definição apresentada aqui diverge da apresentada no trabalho original de Born e Infeld devido à diferença entre as definições utilizadas para a Lagrangeana de Maxwell.

<sup>3</sup>Valor aproximado calculado a partir dos valores da carga elementar e do raio clássico do elétron que constam no *PARTICLE PHYSICS BOOKLET* de julho de 2012. A saber,  $e = 1.602176565(35) \times 10^{-19}C$ ,  $r_0 = 2.8179403267(27) \times 10^{-15}m$ .

Ao utilizar a Lagrangeana de Born-Infeld (B.I.) como fonte para métrica de FLRW, não é possível gerar um modelo cosmológico regular, pois há uma singularidade independente da tri-curvatura da sessão espacial.<sup>4</sup> Além disso, a teoria de B.I. obtém um limite superior para o campo elétrico, mas não faz considerações sobre o campo magnético, o que é necessário quando se quer estudar modelos de U.M.. Tal constatação traz a necessidade de uma generalização desta teoria, de forma que possa ser obtido um valor máximo para o campo em qualquer circunstância, limitando o escalar  $F = 2(B^2 - E^2)$ . As questões quânticas, embora relevantes, não serão alvo de tratamento neste trabalho.

---

<sup>4</sup>No apêndice C é feita a análise da Lagrangeana proposta por Born e Infeld quando esta desempenha o papel de fonte para a curvatura em um modelo de FLRW.

### 5.4.1 BIE como fonte da Cosmologia

O modelo realizado em [7] apresenta a Lagrangiana estendida e os resultados quando esta é usada como fonte da métrica de FLRW. Considerando que esta é uma descrição de um modelo de U.M. onde  $\langle E^2 \rangle = \langle \vec{E} \rangle = 0$ , o escalar  $G$  não é levado em conta. Nesse caso, a lagrangeana se torna:

$$\mathcal{L} = -\gamma^2 \sqrt{W} \quad \text{com} \quad W = 1 + \frac{F}{2\gamma^2} - \mu^2 F^2.$$

A teoria de B.I. é recuperada escolhendo  $\mu^2 = 0$ , enquanto a teoria linear é obtida no limite quando  $F \ll \gamma^2$ . O termo extra adicionado à teoria original de B.I. produz uma correção tipo Euler-Heisenberg.

Sabendo que  $W$  deve ser sempre positivo, encontramos os valores máximo e mínimo que  $F$  pode atingir.

$$F_- = \frac{1 - \sqrt{1 + 16\mu^2\gamma^4}}{4\mu^2\gamma^2} \quad \text{e} \quad F_+ = \frac{1 + \sqrt{1 + 16\mu^2\gamma^4}}{4\mu^2\gamma^2}$$

dos quais  $F_- < 0$ , está fora do domínio de  $F$ , uma vez que em um U.M. ele é sempre positivo e  $F_+$  corresponde ao valor máximo que o campo magnético pode atingir:

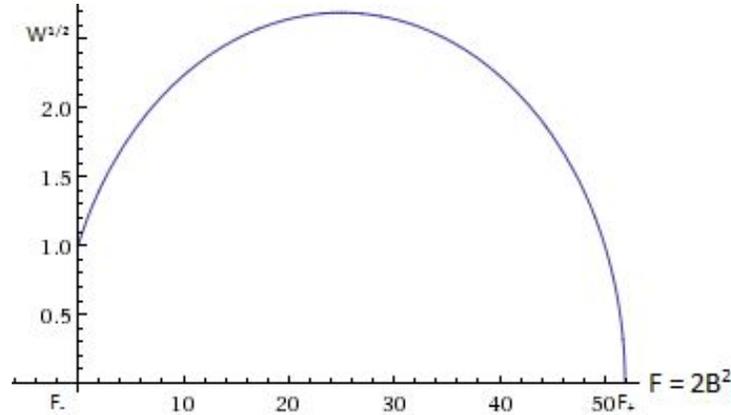


Figura 5.18: Gráfico  $\sqrt{W}$  x  $F = 2B^2$ : O valor  $F_-$  é negativo e está fora do domínio de  $F$ . Foram adotados os valores ilustrativos  $\gamma^2 = 1$  e  $\mu^2 = 0.01$ .

Em um U.M. valem as equações (2.11) e (2.12), que neste caso leem-se:

$$\rho = \gamma^2 \sqrt{W} \quad (5.18)$$

e

$$p = -\rho + \frac{\gamma^2 F(1 - 4\mu^2 \gamma^2 F)}{3\rho}, \quad (5.19)$$

cujos gráficos em função de  $F$  são:

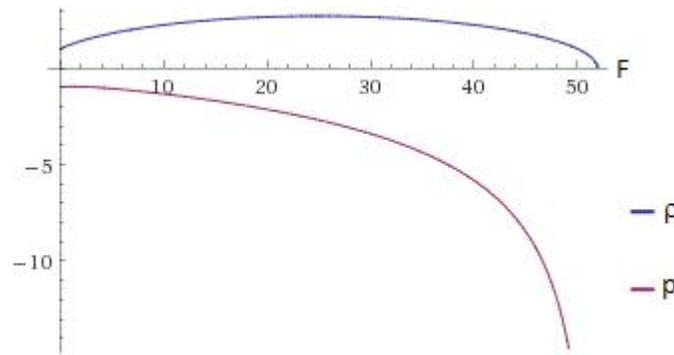


Figura 5.19: Gráfico  $\rho$  e  $p$  x  $F$ : Foram adotados os valores ilustrativos  $\gamma^2 = 1$  e  $\mu^2 = 0.01$ .

Destas equações, pode-se determinar um valor crítico para  $F$ , ( $F_c$ ), a partir do qual a quantidade  $\rho + p$  se torna positiva. Para valores inferiores, ela é negativa, e neste exato valor se anula. Assim, de acordo com a equação (3.5), este também é o valor para o qual a densidade de energia atinge seu máximo ( $\dot{\rho} = 0$ ).

$$\rho + p = \frac{\gamma^2 F(1 - 4\mu^2 \gamma^2 F)}{3\rho} = 0,$$

que resulta no valor de  $F$ :

$$F_c = \frac{1}{4\mu^2 \gamma^2} \quad (5.20)$$

Por ser o valor para o qual  $\rho$  é máxima,  $F_c$  limita o domínio da densidade de energia

$$0 < \rho < \gamma^2 \sqrt{1 + \frac{1}{16\mu^2\gamma^4}}.$$

Utilizando a equação (3.2), é possível encontrar o valor de  $F$  quando  $\dot{a} = 0$ ,

$$\dot{a}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\varepsilon}{a^2(0)} = \frac{k\gamma^2}{3} \sqrt{W}.$$

Para  $\varepsilon = 0$  tem-se  $W(F(0)) = 0$  que retorna o valor,

$$F(0) = F_+.$$

Para  $\varepsilon = +1$ :

$$W(F(0)) = \frac{9}{a^4(0)k^2\gamma^2},$$

e com isso o valor de  $F$  no bounce é

$$F(0) = F_b = \frac{M + \sqrt{M^2 + 16\mu^2\gamma^4}}{4\mu^2\gamma^2}, \quad (5.21)$$

no qual

$$M = \left(1 - \frac{9}{B_0^2 k^2 \gamma^2}\right).$$

E, nesse caso, o valor mínimo de  $\rho$  não será zero, uma vez que o termo de tri-curvatura está presente. Deve-se calcular o valor de  $\rho$  para  $F = 0$ , pois esse será o momento de mínima condensação.

Para  $F = 0$ , ou  $W = 1$ ,  $\rho$  atinge o valor  $\gamma^2$ . Entretanto existe um outro valor de  $F$  que faz  $W = 1$ . Esse valor será chamado  $F_n$

$$W = 1 + \frac{F}{2\gamma^2} - \mu^2 F^2 = 1,$$

a solução não trivial dessa equação é

$$F_n = \frac{1}{2\mu^2\gamma^2} = 2F_c. \quad (5.22)$$

A partir desses resultados, pode-se ordenar os valores de  $F$ . Verifica-se, em primeiro lugar, por (5.21), que  $F_c < F_b$ , já que este deve ser o maior valor possível de  $F$ . Com isso, pode-se obter um limite inferior para o parâmetro  $B_0$ ,

$$B_0^2 > \frac{18}{k^2\gamma^2(1 + 16\mu^2\gamma^4)}.$$

A princípio,  $\rho$  pode assumir qualquer valor não nulo inferior a  $\rho_c$ . Entretanto é conveniente limitá-la para que não assuma valores menores do que  $\gamma^2$ , a fim de tornar possível a eliminação da constante presente neste modelo, que é dominante para valores pequenos de  $F$  e que pode ser associada com a constante cosmológica. Esse resultado, mostrado a seguir, é mais um ponto forte deste modelo.

Fazendo uma pequena modificação na Lagrangeana,

$$\mathcal{L} = -\gamma^2(\sqrt{W} - 1).$$

Ao impor a positividade da densidade de energia, encontra-se o resultado que se segue,

$$\rho = \gamma^2(\sqrt{W} - 1) > 0 \quad \Rightarrow \quad W > 1 \quad \Rightarrow \quad F < F_n.$$

Assim, é possível retirar a constante cosmológica assumindo que o valor  $F_b$ , o maior possível para  $F$ , está abaixo de  $F_n$ , e desta forma garantir a positividade da densidade de energia ao longo de todo o modelo.

Então, fazendo  $F_b < F_n$ , obtém-se um limite superior para o parâmetro  $B_0$ ,

$$B_0^2 < \frac{9}{4\mu^2\gamma^6 k^2}.$$

Uma observação que não fica clara em [7] e que é feita aqui é que, a partir dos valores limites obtidos para o parâmetro  $B_0$ , os domínios de  $F$  e  $\rho$  irão depender da tricurvatura espacial  $\varepsilon$ .

No caso plano ( $\varepsilon = 0$ ):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{k}{3}\rho = \frac{k}{3}\gamma^2 \sqrt{1 + \frac{F}{2\gamma^2} - \mu^2 F^2},$$

$$0 < F \leq F_+ \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \rho \leq \gamma^2 \sqrt{1 + \frac{1}{16\mu^2\gamma^4}}.$$

O valor mínimo da densidade de energia é obtido quando o campo atinge seu valor máximo  $F_+$ , enquanto que o valor máximo é obtido para  $F = F_c$ .

No caso esférico ( $\varepsilon = +1$ ):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{1}{a^2} = \frac{k}{3}\rho = \frac{k}{3}\gamma^2 \sqrt{1 + \frac{F}{2\gamma^2} - \mu^2 F^2},$$

$$0 < F \leq F_b \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 < \rho \leq \gamma^2 \sqrt{1 + \frac{1}{16\mu^2\gamma^4}}.$$

O valor mínimo da densidade de energia corresponde ao valor assintótico dos campos  $F = 0$ , enquanto que o valor máximo continua sendo correspondente ao valor  $F = F_c$ .

O caso  $\varepsilon = 0$ , além de apresentar resultados não convencionais para o comportamento da densidade de energia, possui uma desvantagem suficiente para desqualificá-lo como um bom modelo cosmológico para o universo primordial. A pressão, o escalar de curvatura e todas as componentes não nulas do tensor de Ricci divergem quando a densidade de energia se anula, o que ocorre justamente para o valor dos campos que seria necessário para a existência de um *bounce* no modelo. Essas singularidades também reduzem o domínio de  $F$ , dado que o valor  $F_+$  deve estar agora fora dele.

Resta verificar se o ponto extremo de  $a$  é máximo ou mínimo.

A equação (3.4), para esta Lagrangeana, lê-se:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{k}{6} \left( \frac{2\gamma^4 W - \gamma^2 F (1 - 4\mu^2 \gamma^2 F)}{\gamma^2 \sqrt{W}} \right).$$

Para que o extremo de  $a$  seja ponto de mínimo, é necessário que  $\ddot{a} > 0$ , que neste caso leva ao resultado

$$F > -\frac{1}{\mu^2},$$

que é sempre verdade, pois  $F$  é sempre positivo. Esse resultado mostra que o modelo sempre retorna um valor mínimo para o fator de escala  $e$ , portanto, pode-se dizer que gera um *bounce*.

### 5.4.2 Análise da Estabilidade do Modelo gerado a partir de BIE

Um dos indicativos da estailidade desse modelo é obtido da expressão para a velocidade do som. Calculando as derivadas da lagrangeana com relação a  $F$ , pode-se encontrar as seguintes expressões:

$$\mathcal{L} = -\gamma^2 \sqrt{W} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_F = -\frac{\gamma^2}{2\sqrt{W}} \left( \frac{1}{2\gamma^2} - 2\mu^2 F \right),$$

$$\mathcal{L}_{FF} = \frac{1}{\sqrt{W}} \left[ \frac{(1 - 4\mu^2 \gamma^2 F)^2}{16W\gamma^2} + \mu^2 \gamma^2 \right].$$

Com elas, obter a expressão para a velocidade do som a partir da equação (4.3) é um exercício fácil,

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{(1 + 16\mu^2 \gamma^4) F}{W\gamma^2(1 - 4\mu^2 \gamma^2 F)} \right).$$

O domínio de  $F$  é dado e então é possível obter os valores para  $c_s^2$  para cada valor de  $F$

$$0 < F_c < F_b < F_n < F_+,$$

$$c_s^2(F \rightarrow 0) = \frac{1}{3} \quad c_s^2(F \rightarrow F_c^-) \rightarrow -\infty \quad c_s^2(F \rightarrow F_c^+) \rightarrow +\infty,$$

$$c_s^2(F \rightarrow F_b) = \frac{1}{3} \left( 1 + 2 \frac{1 + 16\mu^2 \gamma^4}{(M - 1) \left( 1 - M - \sqrt{M^2 + 16\mu^2 \gamma^2} \right)} \right),$$

$$c_s^2(F \rightarrow F_n) = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1 + 16\mu^2 \gamma^4}{2\mu^2 \gamma^4} \right) \quad c_s^2(F \rightarrow F_+) \rightarrow \infty.$$

Também pode-se calcular o valor de  $F$  para o qual  $c_s^2 = 0$ . Esse valor, denominado  $F_r$ , será a raiz positiva, dentro do domínio de  $F$ , da equação  $8\mu^4\gamma^4 F^3 - 6\mu^2\gamma^2 F^2 - (1 + 40\mu^2\gamma^4) F + 2\gamma^2 = 0$ .

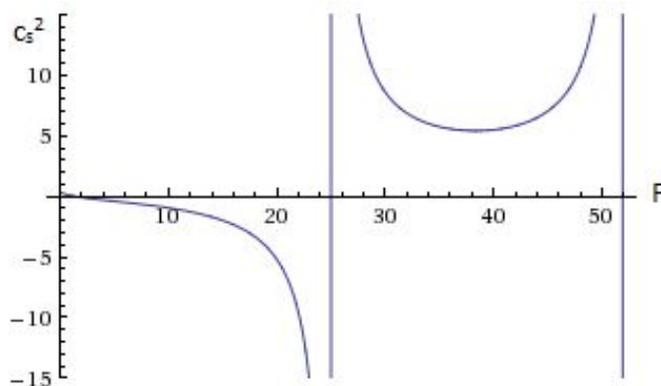


Figura 5.20: Gráfico  $c_s^2$  x  $F$ : Foram adotados os valores ilustrativos  $\gamma^2 = 1$  e  $\mu^2 = 0.01$ .

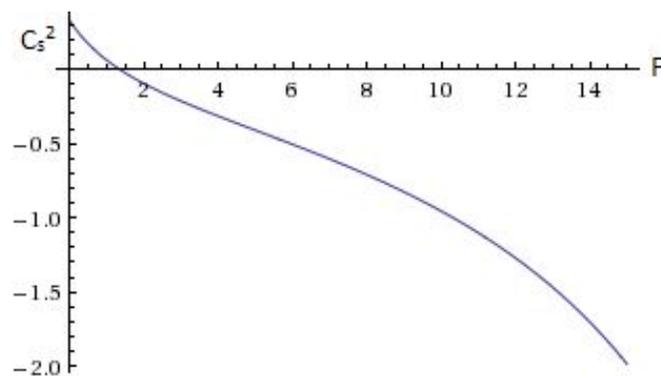


Figura 5.21: Gráfico  $c_s^2$  x  $F$  aumentado: Foram adotados os valores ilustrativos  $\gamma^2 = 1$  e  $\mu^2 = 0.01$ . Para esses valores  $F_r \approx 1.4$ .

O intervalo  $(F_r, F_c]$  possui valores de  $c_s^2$  negativos, o que indica instabilidade do modelo nessa região,  $F_b \in (F_c, F_n)$  e a região clássica,  $c_s^2 = \frac{1}{3}$ , é estável como mostra a figura (5.21).

Assim como para a Lagrangeana de Euler-Heisenberg, neste caso também surge um eixo quando  $F$  assume o valor para o qual  $\dot{\rho} = 0$ . Nesse ponto, onde  $c_s^2$  diverge, a densidade de energia assume seu valor máximo,  $\rho_c$ , e a pressão assume o valor  $p = -\rho_c$ . Com isso o escalar de curvatura e todas as componentes não nulas do tensor de Ricci assumem valores finitos negativos:  $R = -4k\rho_c$ ,  $R_{00} = -k\rho_c$  e  $R_{ii} = -k\rho_c g_{ii}$ . Tal constatação permite concluir que essa divergência não é de fato uma consequência física do problema, mas talvez oriunda de alguma definição inapropriada.

### 5.4.3 Sistema Dinâmico e Espaço de Fase do Modelo gerado a partir de BIE

O único caso de interesse é o que possui tricurvatura positiva, e, por essa razão, será usado o sistema (4.10),

$$\begin{cases} \dot{F} = -\frac{4}{3}F\theta \\ \dot{\theta} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \frac{k}{2} \left[ -2\gamma^2\sqrt{W} + F\frac{(1-4\gamma^2\mu^2F)}{\sqrt{W}} \right]. \end{cases} \quad (5.23)$$

Os pontos críticos são:  $(F_1, \theta_1) = (0, \sqrt{3k\gamma^2})$  e  $(F_2, \theta_2) = (0, -\sqrt{3k\gamma^2})$ .

Fazendo a linearização em torno de  $(F_1, \theta_1)$ , o sistema e seu jacobiano tornam-se:

$$\begin{cases} \underline{\dot{F}} = -\frac{4}{3}\sqrt{3k\gamma^2}\underline{F} \\ \underline{\dot{\theta}} = -\frac{1}{4}k\underline{F} - \frac{2}{3}\sqrt{3k\gamma^2}\underline{\theta} \end{cases} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}\sqrt{3k\gamma^2} & 0 \\ -\frac{1}{4}k & -\frac{2}{3}\sqrt{3k\gamma^2} \end{pmatrix}$$

Os autovalores, portanto, são  $\lambda_1 = 2\lambda_2 = -\frac{4}{3}\sqrt{3k\gamma^2}$ , e, de acordo com as definições apresentadas no Capítulo 4, esse ponto é um nó assintoticamente estável.

Para a linearização em torno de  $(F_2, \theta_2)$ , o sistema e seu respectivo jacobiano são:

$$\begin{cases} \dot{F} = \frac{4}{3}\sqrt{3k\gamma^2}F \\ \dot{\theta} = -\frac{1}{4}kF + \frac{2}{3}\sqrt{3k\gamma^2}\theta \end{cases} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\sqrt{3k\gamma^2} & 0 \\ -\frac{1}{4}k & \frac{2}{3}\sqrt{3k\gamma^2} \end{pmatrix}$$

Os autovalores são  $\lambda_1 = 2\lambda_2 = \frac{4}{3}\sqrt{3k\gamma^2}$ , e, então, esse ponto é classificado como nó instável.

O gráfico do espaço de fase do sistema (5.23) é mostrado abaixo.

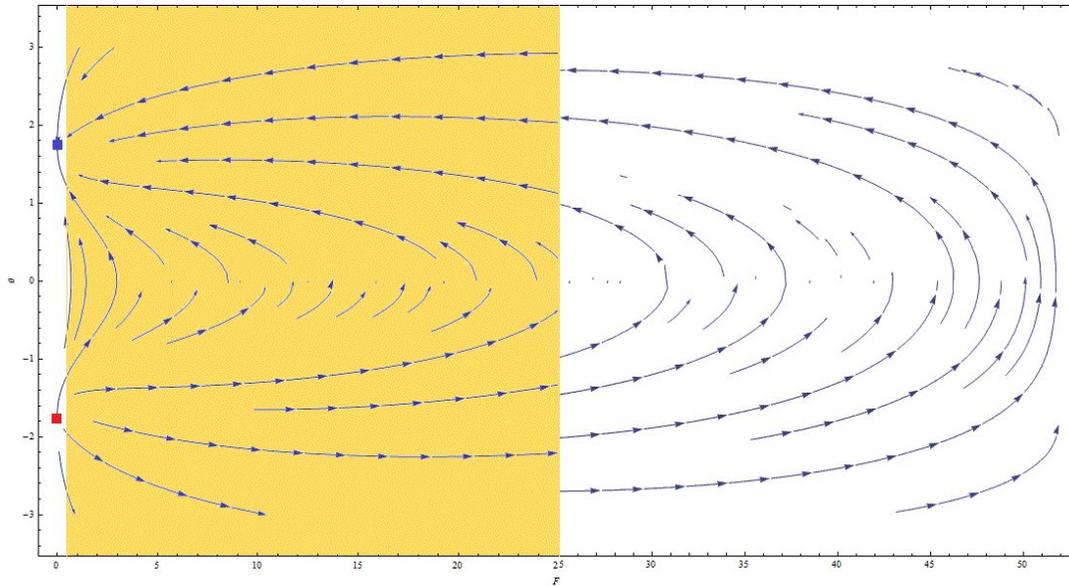


Figura 5.22: Espaço de Fase  $\theta \times F$ : A parte em laranja corresponde à região onde  $c_s^2 < 0$ . Os pontos críticos estão marcados em azul, nó estável, e vermelho, nó instável.

## Capítulo 6

# Acoplamento Não Mínimo com a Eletrodinâmica Linear

Uma outra proposta de construção de uma interação não linear da gravitação com a eletrodinâmica é via acoplamento não mínimo. Este difere do acoplamento mínimo pelo fato de que nele, além da métrica, a curvatura aparece explicitamente na equação de movimento do sistema acoplado. Já no acoplamento mínimo, os modelos são levados do espaço-tempo de Minkowski ao espaço curvo por simples substituição da métrica plana por uma métrica curva, e as derivadas simples que atuavam no espaço plano por derivadas covariantes.

O único campo macroscópico que é acessível experimentalmente é o campo eletromagnético, e é através de sua observação que obtemos cada vez maiores conhecimentos sobre o Universo. O fato de termos um campo observável, cuja interação com o campo gravitacional é fundamental para todas as observações cosmológicas, faz com que este campo seja o candidato natural para estudar sua interação não mínima com a gravitação.

Em [29] são apresentadas muitas possibilidades de fazer a gravitação e o eletromagnetismo interagirem de forma não mínima. Neste capítulo são mostradas Lagrangeanas destas teorias não mínimas lineares na curvatura e quadráticas no campo  $A_\mu$  ou no tensor  $F_{\mu\nu}$ . Com elas, podem ser construídos sete invariantes,

$$\mathcal{L}_1 = \lambda_1 R A_\mu A^\mu, \quad (6.1)$$

$$\mathcal{L}_2 = \lambda_2 R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu, \quad (6.2)$$

$$\mathcal{L}_3 = \lambda_3 R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (6.3)$$

$$\mathcal{L}_4 = \lambda_4 R F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (6.4)$$

$$\mathcal{L}_5 = \lambda_5 R_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu, \quad (6.5)$$

$$\mathcal{L}_6 = \lambda_6 R_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}, \quad (6.6)$$

$$\mathcal{L}_7 = \lambda_7 R_{\alpha\beta\mu\nu} \tilde{F}^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}. \quad (6.7)$$

As duas primeiras, formadas com o potencial vetor, descrevem teorias que não são invariantes de calibre.  $\mathcal{L}_4$  e  $\mathcal{L}_7$  envolvem a operação dual, e portanto, o tensor de Levi-Civita que se transforma como um pseudo tensor sob transformações de paridade. Logo estas duas teorias não conservam a paridade, e são então descartadas. Restam as Lagrangeanas  $\mathcal{L}_3$ ,  $\mathcal{L}_5$  e  $\mathcal{L}_6$ . Todavia, a única Lagrangeana cujo princípio de acoplamento é independente das propriedades específicas do campo é  $\mathcal{L}_3$ .

As Lagrangeanas  $\mathcal{L}_3$  a  $\mathcal{L}_7$  não são fonte e soluções cosmológicas homogêneas e isotrópicas, uma vez que um campo eletromagnético não nulo define uma direção espacial privilegiada.

Uma ação pode ser escrita somando os termos de Einstein-Hilbert, Maxwell e uma ação de interação não mínima construída a partir de uma das Lagrangeanas restantes,

$$S = S_E + S_{Max} + S_{int}.$$

A ação total será:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{k} R - \frac{1}{4} F + \mathcal{L}_{int} \right]. \quad (6.8)$$

Calculando a variação com relação a métrica, obtém-se a expressão para uma teoria acoplada,

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}^{(0)} + kT_{\mu\nu}^{(int)}, \quad (6.9)$$

na qual

$$T_{\mu\nu}^{(0)} = F_{\mu\alpha} F^\alpha{}_\nu + \frac{1}{4} F g_{\mu\nu},$$

é o tensor energia momento da teoria linear e

$$T_{\mu\nu}^{(int)},$$

é o tensor gerado com uma das Lagrangeanas de interação.

Esses tensores gerados a partir das Lagrangeanas de interação não mínima carregam a constante  $\lambda_i$  que, para as Lagrangeanas  $\mathcal{L}_3$  a  $\mathcal{L}_7$ , possui dimensão de comprimento ao quadrado. A única constante com dimensão de comprimento que pode ser gerada a partir de quantidades puramente eletromagnéticas e gravitacionais é o comprimento de Planck,

$$\ell_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.61620 \cdot 10^{-35} m. \quad (6.10)$$

A hipótese de  $\lambda_i$  ser tomada como o quadrado do comprimento de Planck é bem aceitável dentro do domínio físico dos modelos tratados para um Universo primordial que não atinge a escala de Planck. Desta forma,

$$\lambda_i = \ell_{pl}^2 \sim 10^{-70} m^2.$$

Desconsiderando as unidades, a ordem de grandeza dessa constante de acoplamento é bem menor do que as constantes  $\alpha$  e  $\gamma^2$  que aparecem nas teorias não lineares do eletromagnetismo. Tal fato permite a conclusão de que modelos gerados a partir de um acoplamento mínimo da gravitação com o eletromagnetismo têm uma vantagem sobre os modelos gerados com acoplamentos não mínimos, visto que, graças ao valor da constante  $\lambda_i$ , estes se tornam rapidamente desprezíveis. Ou, por um outro ponto de vista, nos modelos de acoplamento mínimo a singularidade é evitada, gerando um *bounce*, antes de a contribuição dos termos de acoplamento não mínimo se tornar significativa.

# Capítulo 7

## Conclusões

Neste trabalho foram estudados alguns modelos de Universo Magnético já conhecidos na literatura e foram obtidos modelos novos com teorias não lineares da eletrodinâmica que até então não tinham sido consideradas como fonte de modelos cosmológicos. Todos eles possuem *bounce* quando a tri-curvatura espacial é positiva. Nestes casos, a eficácia em evitar a singularidade do Universo primordial é revisitada nos casos de EH e BIE e verificada pela primeira vez nos casos ENE e LNE. Além disso, foi feita uma análise mais profunda da questão da estabilidade nesses modelos.

A questão que se coloca a respeito da estabilidade desses modelos é discutida desde sua definição, em geral utilizada como parâmetro de classificação do modelo enquanto boa ou má representação do Universo, até o espaço de fase gerado por cada modelo, no qual é mostrado que regiões instáveis evoluem para atratores estáveis.

O tratamento utilizado em [12] para analisar a estabilidade das perturbações da pressão do fluido é restrito ao caso adiabático. Entretanto nos exemplos tratados nesse trabalho, a variável  $\frac{\partial p}{\partial \rho}$  não pode ser interpretada como a velocidade de grupo do fluido. Isto já se torna evidente no caso da Lagrangeana de Euler-Heisenberg, na qual é utilizada a interpretação de dois fluidos não interagentes para descrever  $\rho$  e  $p$ . No caso de plasmas, esse fato é também bem conhecido [30].

No caso mais geral de um fluido, as referências [19, 20] demonstram que um modo puramente adiabático como o que foi utilizado aqui, baseado em [12], para determinar  $c_s^2$ , é inconsistente para analisar situações de *bounce* ou que violam a condição de energia nula. Esse fato decorre de que os modos perturbativos de entropia não podem ser desprezados. Mais que isso, a divergência dos modos adiabáticos é compensada pela inclusão da perturbação da entropia. Assim, a determinação da equação de estado para a pressão e uma descrição mais consistente do fluido incluindo a entropia se faz necessária para que a estabilidade dos modelos possa ser efetivamente analisada.

O estudo do acoplamento não mínimo da eletrodinâmica linear com a gravitação mostra que este tipo de acoplamento não se sustenta perante o acoplamento mínimo com a eletrodinâmica não linear devido à ordem de grandeza das constantes de acoplamento. O tratamento não mínimo requer uma interação mais direta com a gravitação, o que reduz muito sua potência competitiva com relação às teorias não lineares.

Uma outra questão, não abordada no trabalho, porém de grande importância, carece de uma melhor explicação: a conjectura de que apenas o campo magnético sobrevive no plasma deve ser revista, visto que o mesmo não é de fato um condutor ideal, especialmente para pequenos comprimentos de onda. Nesses casos, o campo magnético não seria a única fonte dos modelos, o que alteraria drasticamente as soluções, pois uma conjectura sobre os campos, como a que foi feita no Apêndice C, deveria ser considerada.

# Apêndices

## Apêndice A: Relações de Comutação entre os campos Elétrico e Magnético

As relações de comutação entre componentes dos campos elétrico e magnético em pontos distintos, descritas em [31] são:

$$\begin{aligned} [B_i(x'), B_j(x)] &= \left( \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x'_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) iD(x' - x), \\ [E_i(x'), B_j(x)] &= \left( -\frac{\partial}{\partial x'_0} \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) iD(x' - x), \\ [E_i(x'), E_j(x)] &= \left( \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x'_0 \partial x_0} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_j} \right) iD(x' - x), \end{aligned}$$

A distribuição  $D(x' - x)$  é dada em termos de uma outra,  $\Delta(x' - x)$ , que corresponde ao caso com massa  $m \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \Delta(x' - x) &= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \left( e^{-ik \cdot (x' - x)} - e^{ik \cdot (x' - x)} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \begin{cases} J_0(m\sqrt{t^2 - r^2}), & t > r \\ 0, & -r < t < r \\ -J_0(m\sqrt{t^2 - r^2}), & r > t \end{cases}, \\ \omega_k &= \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad k \cdot (x' - x) = k_\mu (x' - x)^\mu, \\ r &= |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \quad t = x'_0 - x_0, \end{aligned}$$

onde  $J_0$  é a função de Bessel de ordem zero. Em termos de  $\Delta(x' - x)$ ,  $D(x' - x)$  é dada pelo seu limite quando  $m \rightarrow 0$ :

$$D(x' - x) = -\lim_{m \rightarrow 0} \Delta(x' - x) = \frac{1}{4\pi r} (\delta(r - t) - \delta(r + t)).$$

Assim, uma vez que se conheça o valor do campo magnético em um ponto, é impossível determinar o valor do campo elétrico em qualquer ponto que seja. Isso faz com que o valor do invariante  $F$ , que é dado por  $F = 2(B^2 - E^2)$ , nunca possa ser nulo, independentemente do observador que está fazendo a medida.

## Apêndice B: A Eletrodinâmica de Maxwell como fonte da Cosmologia

A título de verificação será feito o tratamento da Lagrangeana de Maxwell como fonte para a métrica de FLRW.

A Lagrangeana de Maxwell, que depende apenas de  $F$ , e sua primeira derivada,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F = -\frac{1}{2}(B^2 - E^2) \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}_F = -\frac{1}{4}.$$

A partir dela, usando (2.8) e (2.9), surgem as equações para a densidade e a pressão,

$$\rho = \frac{1}{2}(B^2 + E^2),$$

$$p = \frac{1}{6}(B^2 + E^2).$$

E, a partir delas, a já conhecida equação de estado,

$$p = \frac{1}{3}\rho.$$

Substituindo-a em (3.5), obtém-se a relação da densidade com o fator de escala,

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-4},$$

na qual  $\rho_0$  é constante de integração.

Substituindo de novo a equação de estado, agora em (3.4), obtém-se a relação entre  $\ddot{a}$  e  $a$ , e pode-se notar que se há ponto extremo em algum caso, ele será ponto de máximo,

$$\ddot{a} = \frac{-k\rho_0}{3}a^{-3} < 0.$$

Resta agora verificar para qual valor de  $\varepsilon$  é possível encontrar esse ponto de máximo usando a equação (3.2).

Quando  $\varepsilon = 0$ :

$$\text{Para que } \dot{a}(0) = 0 \Rightarrow \rho_0 = 0,$$

o que é inconsistente.

$\varepsilon = -1$ :

$$\text{Para que } \dot{a}(0) = 0 \Rightarrow \rho_0 = -\frac{3}{ka^2(0)} < 0,$$

igualmente inconsistente.

$\varepsilon = +1$ :

$$\text{Para que } \dot{a}(0) = 0 \Rightarrow \rho_0 = \frac{3}{ka^2(0)},$$

que é um resultado razoável.

Neste caso, é possível obter solução analítica para  $a(t)$ . Substituindo as relações de  $\rho$  e  $p$  nas equações (3.2) e (3.4) e realizando duas integrações, obtém-se o resultado abaixo:

$$a(t) = \sqrt{c_1^2 t - \varepsilon t^2},$$

no qual  $c_1$  é constante de integração a ser ajustada.

A seguir estão os gráficos que ilustram a evolução do fator de escala com o tempo para cada valor de  $\varepsilon$ .

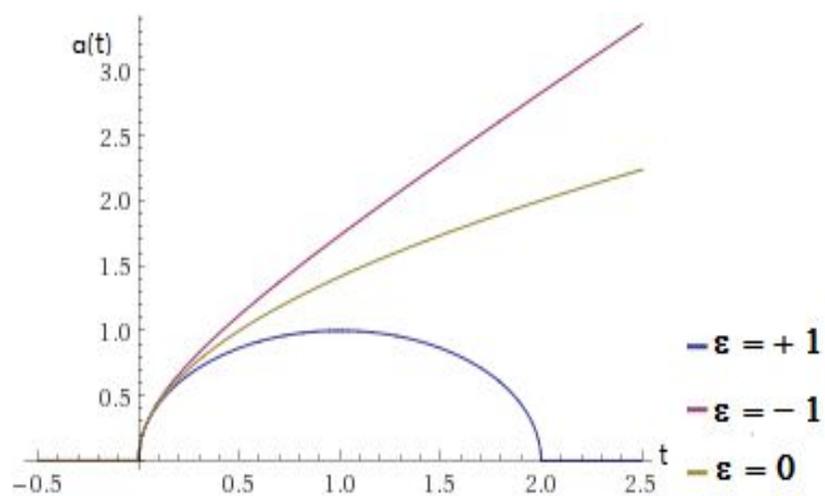


Figura 7.1: Gráfico  $a(t)$  x  $t$  para a lagrangeana de Maxwell;  $c_1 = \sqrt{2}$

Portanto, usando a Lagrangeana de Maxwell, a singularidade inicial é inevitável.

## Apêndice C: A Teoria de Born-Infeld como fonte da Cosmologia

A Lagrangeana de Born-Infeld se escreve

$$\mathcal{L} = \gamma^2(1 - \sqrt{U}),$$

na qual

$$U \equiv 1 + \frac{F}{2\gamma^2} - \frac{G^2}{16\gamma^4}.$$

Esta Lagrangiana não é polinomial. No entanto, é possível tratá-la como tal, uma vez que sua série de Taylor, até a segunda ordem, é indistinguível da Lagrangeana de Euler-Heisenberg. A série de Taylor para funções de duas variáveis se escreve:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-m} \partial y^m}(x_0, y_0) (x - x_0)^{n-m} (y - y_0)^m \right].$$

No caso, a função a ser expandida é a própria lagrangeana e as variáveis,  $F$  e  $G$ , serão tomadas em torno de zero,

$$f = \mathcal{L}; \quad x = F; \quad y = G; \quad x_0 = F_0 = 0; \quad y_0 = G_0 = 0;$$

Assim,

$$U(F_0, G_0) = 1; \quad \mathcal{L}(F_0, G_0) = 0.$$

Calcular as derivadas de primeira e segunda ordem é um exercício fácil.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F}(F_0, G_0) = -\frac{1}{4}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G}(F_0, G_0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial G \partial F}(F_0, G_0) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial F \partial G}(F_0, G_0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial F^2}(F_0, G_0) = \frac{1}{16\gamma^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial G^2}(F_0, G_0) = \frac{1}{16\gamma^2}.$$

Então a Lagrangeana expandida se torna:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F + \frac{F^2}{32\gamma^2} + \frac{G^2}{32\gamma^2} + \mathcal{O}(F^3, G^3).$$

Ao associar esta expansão com a Lagrangeana de Euler-Heisenberg, pode-se estabelecer uma relação entre a constante  $\gamma$  dessa teoria, que representa o limite superior do campo elétrico, com a constante  $\alpha$ , da outra, que se relaciona com o tempo de decaimento de uma partícula em fótons,

$$\alpha = \frac{1}{32\gamma^2}.$$

Fazendo  $E^2 \propto B^2$  segundo a relação abaixo:

$$E^2 = \sigma^2 B^2 \quad \rightarrow \quad F = 2(1 - \sigma^2)B^2,$$

na qual  $\sigma^2 < 1$ . Com isso, e já utilizando o procedimento da média, as equações (2.8) e (2.9) determinam as expressões para a densidade e para a pressão nesse caso:

$$\rho = -4\mathcal{L}_F E^2 - \mathcal{L}(F) = \frac{F}{2\sqrt{U}} \frac{1}{(1 - \sigma^2)},$$

$$p = \frac{4}{3}\mathcal{L}_F(E^2 - 2B^2) + \mathcal{L}(F) = -\frac{F}{6\sqrt{U}} \frac{(1 - 2\sigma^2)}{(1 - \sigma^2)} = \frac{1}{3}(2\sigma^2 - 1)\rho.$$

E utilizando a equação (3.6) e as relações abaixo:

$$E\dot{E} = \sigma^2 B\dot{B}, \quad \dot{F} = 4B\dot{B}(1 - \sigma^2),$$

chega-se a relação entre  $F$  e  $\dot{a}$ ,

$$\frac{\dot{F}}{F} \left( 1 + \frac{2\sigma^2}{(1 + \sigma^2)} \frac{\mathcal{L}_{FF}}{F} \mathcal{L}_F \right) = -4 \frac{\dot{a}}{a},$$

que para a Lagrangeana de Born-Infeld se torna:

$$\frac{\dot{F}}{F} \left( 1 - \frac{\sigma^2}{(1 + \sigma^2)} \frac{F}{(2\gamma^2 + F)} \right) = -4 \frac{\dot{a}}{a},$$

cuja solução é:

$$a^4(F) = F_0 \left( \frac{(2\gamma^2 + F)^{\frac{\sigma^2}{(1+\sigma^2)}}}{F} \right).$$

O ponto extremo, quando houver algum, será ponto de máximo, visto que  $\ddot{a}$  é dado por.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{k\sigma^2}{3}\rho < 0.$$

Usando a equação (3.2):

Para  $\varepsilon = 0$

$$a^2(0)\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 0,$$

que é um resultado inconsistente, pois  $F$  se anula assintoticamente.

Para  $\varepsilon = -1$

$$\rho = -\frac{3}{ka^2(0)} < 0,$$

igualmente inconsistente, pois a densidade de energia deve ser sempre positiva.

Para  $\varepsilon = +1$

$$\rho = \frac{3}{ka^2(0)} \quad \rightarrow \quad a(0) = \frac{1}{B(0)} \sqrt{\frac{3\sqrt{U(0)}}{k}},$$

seria possível, mas como  $\ddot{a} < 0$ , então com a teoria de Born-Infeld não é possível conseguir um *bounce*.

## Apêndice D: Inflação com Campo Escalar

Neste apêndice discute-se a estabilidade de um modelo simples de campo escalar proposto em [32], o inflaton, que determina como ocorre a evolução da inflação dentro do modelo cosmológico inflacionário. Para ele,  $c_s^2$  atinge valores negativos nos dois regimes aqui discutidos. Todavia o modelo é utilizado para descrever a inflação. Este campo clássico homogêneo possui como características uma densidade e uma pressão,

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad \text{e} \quad p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi).$$

A equação de estado, portanto, lê-se:

$$p = -\rho + \dot{\phi}^2.$$

Esta equação de estado difere da do fluido perfeito unicamente pelo termo cinético. No entanto é requerido, para ocorrência da inflação, que ele seja desprezível se comparado ao potencial  $V(\phi)$ . Levando esse ponto em conta, a equação de estado torna-se a equação do estado de vácuo  $p \approx -\rho$ .

Utilizando as equações de  $\rho$  e  $p$  e o mesmo procedimento do Capítulo 4, chega-se a equação para a velocidade do som nesse caso:

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{\ddot{\phi} - \frac{dV}{d\phi}}{\ddot{\phi} + \frac{dV}{d\phi}}.$$

E utilizando a equação (3.2), obtém-se:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{k}{3} \left( \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) - \frac{\varepsilon}{a^2}}.$$

Com isso e a equação (3.5), chega-se em:

$$\ddot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} + 3\dot{\phi}\sqrt{\frac{k}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right)} - \frac{\varepsilon}{a^2} = 0.$$

A fim de simplificar os cálculos, será utilizado o potencial não nulo mais simples possível, o caso em que a variação do campo depende apenas dele mesmo e a situação de tri-curvatura plana,

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad \varepsilon = 0, \quad \dot{\phi} = \dot{\phi}(\phi), \quad \ddot{\phi} = \dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi}.$$

Fazendo estas simplificações:

$$\ddot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} + 3\dot{\phi}\sqrt{\frac{k}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right)} = 0,$$

→

$$\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = -3\sqrt{\frac{k}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right)} - \frac{m^2\phi}{\dot{\phi}}.$$

O comportamento dessa solução pode ser estudado utilizando o gráfico no espaço de fase  $\dot{\phi}$  x  $\phi$  que consta no final deste Apêndice.

Serão analisados dois casos limite, o ultra-rígido e o inflacionário.

No caso Ultra-rígido, vale  $|\dot{\phi}| \gg m\phi$ , e com isso a solução para  $\dot{\phi}$  é obtida da forma:

$$\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = -3\dot{\phi}\sqrt{\frac{k}{6}} \Rightarrow \frac{d\dot{\phi}}{\dot{\phi}} = -3\sqrt{\frac{k}{6}}d\phi \Rightarrow \dot{\phi}(\phi) = C_0 \exp\left(-3\sqrt{\frac{k}{6}}\phi\right).$$

Integrando, chega-se ao resultado pra  $\phi(t)$ ,

$$\phi(t) = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{k}} \ln(C'_0 t + C'_2).$$

Com este resultado, calculam-se  $\dot{\phi}(t)$  e  $\ddot{\phi}(t)$ ,

$$\dot{\phi}(t) = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{k}} \frac{C_0}{C_0 t + C_2} \Rightarrow \ddot{\phi}(t) = -\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{k}} C_0^2 \frac{1}{(C_0 t + C_2)^2}.$$

E a equação para a velocidade do som neste caso,

$$\frac{dp}{d\rho} = -\frac{(C_0 t + C_2)^2 m^2 \ln(C'_0 t + C'_2) + C_0^2}{(C_0 t + C_2)^2 m^2 \ln(C'_0 t + C'_2) - C_0^2}.$$

Escolhendo  $C_0 = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{k}}$  e  $C_2 = 0$ ,

$$\frac{dp}{d\rho} = -\frac{t^2 m^2 \ln t + 1}{t^2 m^2 \ln t - 1}.$$

O modelo será estável na região do atrator independentemente do valor de  $m^2$ , como indica a figura abaixo.

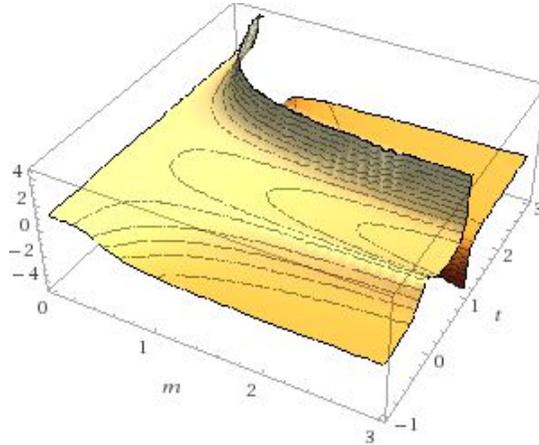


Figura 7.2: Gráfico  $c_s^2$  x  $m$  x  $t$ : A região onde  $c_s^2 > 0$  varia um pouco dependendo da massa do campo. Entretanto, para os valores de  $t$  nessa região vale o pressuposto  $|\dot{\phi}| \gg m\phi$  e a solução de atrator permanece consistente.

A solução inflacionária ocorre para  $|\phi| \gg 1 \rightarrow \frac{d\dot{\phi}}{d\phi} \approx 0$ , o que resulta em:

$$-3 \sqrt{\frac{k}{3} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} m^2 \right)} \phi = \frac{m^2 \phi}{\dot{\phi}}.$$

E finalmente,

$$-3 \sqrt{\frac{k}{6}} = \frac{m}{\dot{\phi}} \Rightarrow \phi(t) = \phi_i - \frac{m\sqrt{6}}{3\sqrt{k}}(t - t_i) = \frac{m\sqrt{6}}{3\sqrt{k}}(t_f - t) \Rightarrow \ddot{\phi} = 0.$$

Então, nessa fase a velocidade do som atinge um valor constante negativo:

$$c_s^2 = \frac{\ddot{\phi} - m^2 \phi}{\ddot{\phi} + m^2 \phi} = -1.$$

Isso mostra que, neste modelo, o período de inflação é instável quando o quadrado da velocidade do som, definido da forma como foi no Capítulo 4, é tomado como critério para determinar a estabilidade de um modelo. Contudo, ele não é rejeitado, pois a solução converge para um atrator que retira o modelo da região instável.

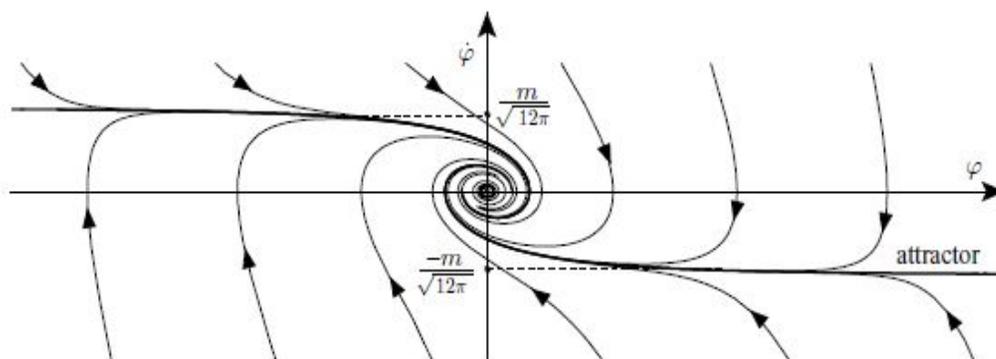


Figura 7.3: Espaço de Fase  $\dot{\phi} \times \phi$ : Gráfico retirado da referência [32], página 237, sem prévia autorização do autor.

Neste gráfico, existe um atrator para o qual as soluções convergem.

# Referências Bibliográficas

1. M. Novello, *Cosmologia*, LIVRARIA DA FÍSICA, **1 ed.**, 2010.
2. S. W. Hawking, *The occurrence of singularities in cosmology. III. Causality and singularities*, PROC. R. SOC. LOND. A **300**, (1967).
3. G. B. dos Santos, *Cosmologia dominada pela eletrodinâmica semi-clássica*, DISSERTAÇÃO DE MESTRADO, (2008).
4. M. Novello e E. Goulart, *Eletrodinâmica não linear causalidade e efeitos cosmológicos*, LIVRARIA DA FÍSICA **1 ed.**, (2010).
5. W. Heisenberg e H. Euler, *Consequences of Dirac's theory of the positron*, ZEITSCHRIFT PHYS. **98**, 714 (1936)<sup>1</sup>, arXiv:physics/0605038v1 [physics.hist-ph] (2006).<sup>2</sup>
6. M. Born e L. Infeld, *Foundations of the new field theory*, PROC. ROY. SOC. LON. A **144**, 425, (1934).
7. M. Novello, J. M. Salim e A. N. Araújo, *Extended Born-Infeld theory and the bouncing magnetic universe*, PHYS. REV. D **85**, 023528 (2012).
8. R. C. Tolman e P. Ehrenfest, *Temperature equilibrium in a static gravitational field*, PHYSICAL REVIEW **36**, (1930).

---

<sup>1</sup>Artigo original em Alemão.

<sup>2</sup>Referência utilizada.

9. M. Gasperini, G. Marozzi e G. Veneziano, *A covariant and gauge invariant formulation of the "backreaction"*, JOURNAL OF COSMOLOGY AND ASTROPARTICLE PHYSICS 02 (2010) 009; 03 (2009) 011.
10. N. S. Medeiros, *Campos magnéticos de larga escala num universo não singular*, TESE DE DOUTORADO, (2011).
11. G. F. R. Ellis, R. Maartens e M. A. H. MacCallum, *Causality and the speed of sound*, arXiv:gr-qc/0703121v2 (2007).
12. R. G. Salcedo, T. Gonzales e I. Quiros, *No compelling cosmological models come out of magnetic universes which are based in nonlinear electrodynamics*, PHYSICAL REVIEW D **89**, 084047 (2014).
13. A. P. R. Bacalhau, *Dinâmica cosmológica para modelos de interação não-lineares do setor escuro*, DISSERTAÇÃO DE MESTRADO, (2012).
14. N. Fiedler-Ferrara, C. P. C. do Prado, *Caos: uma introdução*, EDITORA EDGARD BLCHER LTDA., (1994).
15. M. Villarini, *Smooth linearization of centers*, ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE **9**, 565 (2000).
16. J. Schwinger, *On gauge invariance and vacuum polarization*, PHYS. REV. **82**, 664 (1951).
17. V. A. De Lorenci, R. Klippert, M. Novello e J. M. Salim, *Nonlinear electrodynamics and FRW cosmology*, PHYSICAL REVIEW D **65**, 063501 (2002).
18. M. Novello, N. P. Neto, S. E. P. Bergliaffa et. al., *Programa mínimo de cosmologia*, EDITORA JAUÁ, (2010).
19. P. Peter, N. P. Neto e D. A. Gonzales, *Adiabatic and entropy perturbations propagation in a bouncing universe*, arXiv:hep-th/0306005v4 (2003).

20. P. Peter e N. P. Neto, *Has the universe always expandede?*, PHYS. REV. D **65**, 023513 (2001).
21. L. D. Landau e E. M. Lifshitz *Course of theoretical physics volume 6: Fluid mechanics*, PERGAMON PRESS, (1959).
22. M. Novello e J. M. Salim, *The stability of a bouncing Universe*, arXiv:hep-th/0305254v2 (2003).
23. S. H. Hendi, *Asymptotic Reissner-Nordstrm black holes*, ANNALS OF PHYSICS **333**, 282 (2013).
24. B. L. Altshuler, *An alternative way to inflation and the possibility of anti-inflation*, CLASS. QUANT. GRAV. **7**, 189 (1990).
25. V. Mukhanov e R. Brandenberger, *A nonsingular universe*, PHYS. REV. LETT. **68**, 1969 (1993).
26. V. Mukhanov, R. Brandenberger e A. Sornborger, *A cosmological theory without singularities*, PHYS. REV. D **48**, 1629 (1993).
27. R. Moessner e M. Trodden, *Singularity-free two dimensional cosmologies*, PHYS. REV. D, **51**, 2801 (1995).
28. H. H. Soleng, *Charged black points in general relativity coupled to the logarithmic  $U(1)$  gauge theory*, PHYS. REV. D **52**, 6178 (1995).
29. S. D. Jorda, *Os diversos modos de acoplamento não-mínimo entre eletromagnetismo e gravitação: suas propriedades gerais e suas consequências para a propagação da radiação eletromagnética*, DISSERTAÇÃO DE MESTRADO, (1988).
30. M. S. Morris e K. S. Thorne, *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity*, AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS **56** (5), 395 (1988).

31. J. D. Bjorken e S. D. Drell, *Relativistic quantum fields*, MCGRAW-HILL COLLEGE **1ed.**, 80 e 389 (1965).
32. V. Mukhanov, *Physical foundations of cosmology*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS **1ed.**, 235 (2005).