

**CBPF**

---

**Centro Brasileiro de  
Pesquisas Físicas**

Dissertação de Mestrado

**Investigando o Momento de Dipolo Elétrico do Elétron Além do  
Modelo-Padrão**

**Yuri Müller Plumm Gomes**

Rio de Janeiro, Julho de 2015

# Agradecimentos

Aos meus pais, Marco e Dorian, e a minha irmã, Lisiane, pelo apoio incondicional que me deram para que eu chegasse até aqui.

Ao Professor Helayël, por ter me acolhido enquanto orientado e confiado em mim para contribuir com o querido PVNC. Também como um exemplo de docente que se preocupa com o próximo e que está sempre disposto a ajudar.

A minha família, em especial minhas avós Dalila e Dóra, pelo apoio e preocupação. Aos meus grandes amigos, André, Fernando, Felipe, Gustavo, Helienai, Hamilton, Igor, Leandro, Leonel, Luiz Henrique, Michael e Rene, pelas inúmeras histórias juntos. Um agradecimento especial à minha grande amiga Pollyana, por ter mudado a minha concepção do mundo e das pessoas. Aos meus colegas de sala, que tive o prazer de conhecer quando cheguei ao Rio de Janeiro, Célio, Fábio, Gregório, Pedro, e a todos os outros tantos colegas do CBPF, muito obrigado pela companhia, troca de idéias e risadas. Um agradecimento especial para o Luís, por ter tomado a frente das nossas obrigações na APG enquanto eu estava atarefado com esta dissertação.

Aos Professores Alexandre Tadeu, Daniel e Winder, de Viçosa, por terem acreditado em mim na graduação quando nem eu acreditava. Sem vocês eu não estaria aqui.

Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, que me propiciou as condições necessárias para que este trabalho pudesse ser realizado.

Ao CNPq e à FAPERJ, pelo apoio Financeiro.

# Resumo

Nesta dissertação, propomos uma investigação exploratória preliminar e de caráter fundamental sobre o momento de dipolo elétrico (EDM) do elétron. Inicialmente, o estudo direciona-se na busca de uma possível contribuição ao EDM advinda da interação entre o elétron e a geometria do espaço-tempo com constante cosmológica. Ainda na busca de alguma pista sobre o EDM do elétron, determinamos e discutimos os campos de radiação de uma partícula acelerada em um espaço de Minkowski em 1+2 D. Finalmente, analisamos os efeitos de uma possível não-linearidade, esta descrita pela eletrodinâmica de Born-Infeld, como uma origem viável para a assimetria da distribuição de carga do elétron.

**Palavras-Chave:** Momento de dipolo elétrico; Relatividade Geral; Constante cosmológica; Eletrodinâmica de Born-Infeld.

**Áreas do conhecimento:** Teoria de Campos; Gravitação.

# Abstract

A preliminar investigation of a more fundamental nature is pursued in this Master Dissertation to tackle the issue of the electron's electric dipole moment (EDM). At a first stage, we address ourselves towards a possible relation between the electron's EDM and the space-time geometry with a tiny non-trivial cosmological constant. Still in this direction, we attain and discuss the radiation field of an accelerated charge in a 1+2 D Minkowski space. We conclude our exploitations by seeking a possible connection between the electron's EDM and non-linear electromagnetic effects, as described by Born-Infeld electrodynamics. We actually consider that non-linearity could yield some asymmetry on the electron's charge distribution.

**Key-words:** Electric dipole moment; General Relativity; Cosmological constant; Born-Infeld electrodynamics.

# Sumário

Agradecimentos . . . . .	i
Resumo . . . . .	ii
Abstract . . . . .	iii
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Formalismo da Relatividade Geral</b>	<b>6</b>
1.1 Difeomorfismos e derivada covariante . . . . .	6
1.2 Geodésicas . . . . .	10
1.3 O tensor de curvatura de Riemann . . . . .	10
1.4 Princípio Variacional para a equação de Einstein . . . . .	12
1.5 Soluções esfericamente simétricas e espaço DS/ADS . . . . .	13
1.6 Eletrodinâmica e Relatividade Geral . . . . .	14
1.6.1 Como definir univocamente o campo elétrico em $F^{\mu\nu}$ . . . . .	16
<b>2 Cargas Aceleradas e Radiação</b>	<b>18</b>
2.1 Motivações . . . . .	18
2.2 Transformação de Rindler em 2+1 D . . . . .	19
2.3 Auto-funções do operador diferencial . . . . .	21
2.4 Mudança de coordenadas para o referencial inercial . . . . .	22
<b>3 Eletrodinâmica de Born-Infeld</b>	<b>24</b>
3.1 Soluções de BI com simetria axial . . . . .	26
3.2 Campos para uma partícula pontual carregada e com momento de dipolo magnético não nulo . . . . .	28
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>34</b>
<b>A Solução da Equação Diferencial Parcial</b>	<b>37</b>
<b>B Solução Para Os Campos E e B</b>	<b>39</b>

# Introdução

Uma partícula estável, elementar ou composta, não pode ter momento de dipolo elétrico (EDM) a menos que tanto a invariância sob reversão temporal (T) e sob paridade (P) sejam violadas. Isso ocorre por que o valor esperado para o EDM  $\vec{d} = \int d^3x \vec{x} \rho(\vec{x})$  de um estado estacionário da partícula é proporcional ao spin da partícula, e o spin é ímpar sob T e par sob P [1].

Se a invariância sob CPT se mantém, a afirmação acima implica que um valor não nulo para o EDM requer a violação tanto de CP quanto de T. Como CPT é conhecido por ser uma boa simetria para modelos de violação de CP, podemos nos referir tanto a violação de T, quanto de CP.[1]

O EDM de uma partícula é definido por um de seus fatores de forma eletromagnéticos. Em particular, para uma partícula de spin 1/2, os fatores de forma são decompostos a partir dos elementos da matriz da corrente eletromagnética  $J_\mu$ , ou seja

$$\langle f(p') | J_\mu(0) | f(p) \rangle = \bar{u}(p') \Gamma_\mu(q) u(p) \quad (1)$$

onde

$$\Gamma_\mu(q) = F_1(q^2) \gamma_\mu + F_2(q^2) i \sigma_{\mu\nu} q^\nu / 2m \quad (2)$$

$$+ F_A(q^2) (\gamma_\mu \gamma_5 q^2 - 2m \gamma_5 q_\mu) \quad (3)$$

$$+ F_3(q^2) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 q^\nu / 2m \quad (4)$$

com  $q = p' - p$  e  $m$  a massa da partícula  $f$  [1]. O EDM neste caso é dado por:

$$d_f = -F_3(0) / 2m \quad (5)$$

que corresponde a interação efetiva  $\mathcal{L}_f = -\frac{i}{2} d_f \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi F^{\mu\nu} \quad (\Delta)$ , que se reduz a  $L_I = -H_I = d_f \vec{\sigma} \cdot \vec{E}$  no limite não-relativístico. Em teorias renormalizáveis de violação de CP, a interação  $(\Delta)$  inverte a quiralidade de férmions e não é invariante sob a simetria eletrofraca  $SU(2)_L$ . Assim, conseqüentemente, um valor de  $d_f$  diferente de zero requer além da violação de CP, a quebra da simetria eletrofraca, na qual em uma teoria de calibre, deve ocorrer espontaneamente. A inversão da quiralidade que é necessária para se obter um resultado diferente de zero vem do termo de massa dos férmions. O termo de massa pode (mas não é necessário) surgir da quebra espontânea da simetria eletrofraca [1].

Nas teorias de calibre a invariância por CP pode ser violada espontaneamente ou pode ser quebrada explicitamente, por exemplo, em uma teoria contendo termos de acoplamento entre campos escalares que não sejam invariantes sob CP. Segundo o modelo de Kobayashi-Maskawa [2], devido a sensibilidade dos experimentos atuais, não somente os EDM's dos léptons, mas também dos bárions, devem ser pequenos demais para serem observados em um futuro próximo.[1]

Portanto, se algum valor de EDM para uma partícula puder ser estabelecido com os níveis atuais de sensibilidade, será evidência de uma nova interação que viole CP. Experimentalmente podemos procurar por um EDM permanente de uma partícula colocando-a em um campo externo  $\vec{E}$  e olhando para o deslocamento  $\Delta U$  linear em  $\vec{E}$  para a energia de interação entre a partícula e o campo externo. Em um limite de campo fraco,

$$\Delta U = a_i E_i + b_{ij} E_i E_j + \dots \quad (6)$$

onde o termo linear em  $\vec{E}$  é a assinatura de um EDM permanente[1]. O termo quadrático em  $\vec{E}$  é uma contribuição de um EDM induzido que não tem ligação com violação de CP.

Quanto às pesquisas experimentais, muito esforço tem sido despendido para medir o EDM do nêutron. O grupo de Leningrado obteve  $d_n = (-1, 4 \pm 0, 6) \times 10^{-25} e \cdot cm$ , enquanto que o grupo de Grenoble relatou na mesma época  $d_n = (-0, 3 \pm 0, 5) \times 10^{-25} e \cdot cm$  [1]. Esses valores produziram o limite superior  $|d_n| < 1, 2 \times 10^{-25} e \cdot cm$ .

O mais estreito limite superior para o EDM do elétron foram e estão sendo deduzidos dos resultados nulos das pesquisas em EDM's atômicos. Contudo, isso presume que a contribuição para o respectivo  $d_e$  não fora acidentalmente cancelado por outra contribuição da violação de T. Pesquisas anteriores, por exemplo, para o EDM de Hg, resultaram em limites superiores para  $|d_e| \approx 2 \times 10^{-24} e \cdot cm$ . Recentemente um experimento procurando por violação de T em fluoreto de Tálcio obteve  $d_e = (-1, 4 \pm 2, 4) \times 10^{-25} e \cdot cm$ . Um experimento com o EDM do Tl obteve um valor de  $d_e = (-2, 7 \pm 8, 3) \times 10^{-27} e \cdot cm$ , a precisão do experimento em Tl é da ordem de  $\delta d_e = (10^{-27}) e \cdot cm$ . Para efeito de comparação, a precisão do momento magnético anômalo do elétron  $\frac{g-2}{2} = \frac{F_2(0)}{e}$  é  $\delta(\frac{F_2(0)}{e}) = 2 \times 10^{-22} e \cdot cm$ , isto é, será pelo menos cerca de 5 ordens de grandeza mais preciso que o momento magnético anômalo do elétron. Em 2014, um artigo publicado na Science [3] mostra que em um experimento com moléculas polares de monóxido de tório mostram o menor e mais preciso valor medido para o EDM

$$d_e = (-2.1 \pm 3.7 \pm 2.5) \times 10^{-29} e \cdot cm \quad (7)$$

que corresponde ao um limite superior de  $|d_e| < 8.7 \times 10^{-29} e \cdot cm$ . Deveremos levar em conta a sensibilidade dos experimentos atuais ao analisar quaisquer modelos sobre o EDM do elétron.[1]

Partindo então de que, no modelo padrão (SM), calculos radiativos contribuem para um  $d_e \approx 10^{-38} e \cdot \text{cm}$ , estamos diante de uma questão fundamental e que pode ser uma oportunidade de se investigar a QED no sentido de alguma física além do modelo padrão. O resultado de 2014 [3] nos indica que, em escalas da ordem de  $10^{-29} \text{ cm}$ , ou seja, apenas 4 ordens de grandeza da escala de Planck, efeitos quânticos da gravitação podem começar a ser sentidos, podendo, ou não, contribuir para uma assimetria da distribuição de cargas do elétron  $e$ , com isso, uma contribuição para o EDM.

Com essas ideias em mente, esta dissertação visa uma proposta com caráter de originalidade: uma investigação exploratória, em duas frentes, sobre uma possível descrição mais fundamental para o EDM do elétron. Pretendemos coletar elementos para se chegar a um cenário que permita analisar o EDM do elétron além do SM. Assim, partimos de duas premissas para iniciar essa análise. A primeira é de que as distâncias da faixa de  $10^{-29} \text{ cm}$ , deve-se poder perceber alguma interação do elétron com propriedades geométricas do espaço-tempo, que adotamos possuir contante cosmológica não-nula. A segunda premissa é que nessa região de distâncias, efeitos não lineares eletromagnéticos devem contribuir, já que nesta escala, estamos em regiões com campos elétricos da ordem do chamado “corte de Schwinger”  $\epsilon = \frac{m_e^2 c^3}{e \hbar} \approx 1,3 \times 10^{18} \text{ N/C}$ , quando a não linearidade se torna revelante. Ou seja, a questão em aberto que pretendemos investigar consiste em adotar a Eletrodinâmica não-linear de Born-Infeld e a Eletrodinâmica de Maxwell em um background gravitacional com presença de uma constante cosmológica e verificar como a interação entre as linhas do campo magnético produzidas pelo momento de dipolo magnético do elétron interferem na distribuição da carga do próprio elétron.

A ideia principal para a formulação da teoria de Born-Infeld para o eletromagnetismo é que a energia eletromagnética na teoria de Maxwell violaria o princípio de finitude, que postula que uma teoria satisfatória deve evitar ter suas quantidades físicas com valores divergentes. Aplicando esse postulado a velocidade por exemplo, teremos a energia cinética  $K = \frac{1}{2}mv^2$ . Assumindo este princípio faz todo o sentido a generalização obtida pela relatividade restrita,  $K = mc^2(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}})$ . Aplicando a mesma condição do espaço-tempo chega-se a teoria de Einstein da Relatividade Geral. Assumindo a validade desse princípio para o eletromagnetismo, deveríamos generalizar a teoria de Maxwell, representada pela conhecida densidade de lagrangeana [4]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(E^2 - B^2), \quad (8)$$

por algo do tipo:

$$\mathcal{L} \approx b^2 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{b^2}(E^2 - B^2)} - 1 \right) \quad (9)$$

Como veremos, assumindo a validade desta generalização podemos ter resultados interessantes, como por exemplo a finitude da energia eletromagnética de uma carga puntiforme [4].

Esta dissertação é dividida em 3 capítulos. No primeiro capítulo é feita uma introdução à Relatividade Geral (RG), além de uma introdução da Eletrodinâmica de Maxwell acoplado à gravitação. Mostramos sucintamente como a gravitação, mais especificamente, como a constante cosmológica modifica o campo elétrico de Coulomb, e sua respectiva interpretação como a polarização e magnetização do vácuo. Além disso discutimos como a RG original, contruída por Einstein, não contribui para o EDM, pois trata-se de uma teoria que não viola CP.

No capítulo 2 abrimos um adendo à ideia central da dissertação. Utilizamos o formalismo introduzido no capítulo anterior para abordar a questão da eletrodinâmica de Maxwell em 1+2 dimensões. Iniciamos a análise em relação a força de radiação em uma carga acelerada, utilizando-se do fato que um referencial acelerado e um referencial que sofre ação de um campo gravitacional são localmente equivalentes.

No capítulo 3, faremos uma breve introdução à eletrodinâmica de Born-Infeld, e a partir dela iniciamos uma análise dos campos eletromagnéticos do elétron, com carga  $e$  e momento de dipolo magnético intrínseco  $\vec{\mu}$ . De maneira análoga ao capítulo 1, analisamos as modificações utilizando a interpretação de polarizações e magnetizações do vácuo.

Ao final, apresentamos as nossas considerações conclusivas e perspectivas. Seguem-se dois apêndices: no apêndice A, são fornecidos detalhes a respeito de uma importante equação diferencial parcial referente a resultados do Capítulo 2. Em seguida, no apêndice B, são trabalhados as expressões para os campos elétrico e magnético na situação que consideramos na formulação de Born-Infeld para a eletrodinâmica não-linear.

# Notações e Convenções

- O sistema SI é utilizado nas principais equações. Em equações onde as unidades não prejudiquem a compreensão, unidades naturais serão utilizadas, assim, por exemplo,  $h = c = 1$ .
- Índices gregos  $\mu, \nu, \beta$ , assumem valores 0, 1, 2, 3. Já índices latinos, como  $i, j, k$ , assumem os valores 1, 2, 3. A convenção de Einstein é utilizada. Índices contraindidos em um mesmo termo devem ser somados, salvo quando explicitado o contrário.
- $x$  é padrão para as coordenadas espaço-temporais em 3+1 dimensões  $x^\mu = (t, \vec{r}) = (t, x, y, z)$  e os operadores diferenciais são  $\partial_\mu = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$  e  $\partial^\mu = (\partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z)$  com  $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \dots$  etc.

# Capítulo 1

## Formalismo da Relatividade Geral

A relatividade geral (RG), como formulada por Einstein, é a primeira teoria puramente geométrica da gravitação, na qual a dinâmica da matéria é descrita pela geometria do espaço e, de maneira inversa, a geometria também é determinada pela matéria, de forma que a noção de espaço absoluto da mecânica Newtoniana é definitivamente descartada.

Na relatividade restrita a noção de velocidade é um conceito relativo, por que todos os referenciais inerciais são fisicamente equivalentes. Na RG as acelerações perdem o sentido absoluto, referenciais inerciais não tem um papel privilegiado, e todos os observadores são fisicamente equivalentes, inclusive aqueles em um referencial acelerado.

Neste sentido a RG é a generalização da Relatividade Restrita. De um ponto de vista matemático, essa equivalência geral entre sistemas de coordenadas implica em uma troca do espaço-tempo de Minkowski por uma variedade riemannianna mais geral, na qual tem uma curvatura não necessariamente nula diretamente relacionada com a presença de um campo gravitacional. Neste sentido temos uma descrição geométrica, ou uma geometrização da interação gravitacional. Tal descrição, como pode ser visto em [5], não acomoda a chamada torção, que é representada pela componente anti-simétrica da conexão. A teoria mais simples que acomoda tal estrutura é chamada de teoria de Einstein-Cartan [5]. Como veremos, a versão geométrica da gravitação será suficiente para iniciar a abordagem dos nossos problemas.

### 1.1 Difeomorfismos e derivada covariante

A relatividade geral parte do conceito de difeomorfismos, ou seja, isomorfismos sob variedades difeomorfizáveis. Pode-se representar este difeomorfismo da seguinte forma. Seja uma variedade  $M$  com uma carta de coordenadas  $x^\mu$ , considerando uma transformação de coordenadas  $x'^\mu = f^\mu(x)$  [6]. Com isso

temos que, infinitesimalmente:

$$dx^\mu \rightarrow dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (1.1)$$

Chamamos, por convenção, de vetores contravariantes objetos do tipo  $V^\mu$ , que, sob transformações de coordenadas, seguem a regra de transformação [6]:

$$V^\mu \rightarrow V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \quad (1.2)$$

Se  $\phi$  é uma função escalar, logo seu gradiente  $\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \phi$  se transforma da seguinte maneira [6]:

$$\partial_\mu \phi \rightarrow \partial'_\mu \phi = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \phi \quad (1.3)$$

Um vetor covariante  $V_\mu$  segue a mesma regra de transformação, ou seja:

$$V_\mu \rightarrow V'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V_\nu \quad (1.4)$$

A partir de tais definições acima, podemos generalizar para um tensor qualquer a lei de transformação [6]:

$$T^{\mu \dots}_{\nu \dots} \rightarrow T'^{\mu \dots}_{\nu \dots} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \dots \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \dots T^{\beta \dots}_{\alpha \dots} \quad (1.5)$$

**Derivada Covariante:** De maneira geral, em um sistema de coordenadas curvilíneo o objeto  $dV^\mu$  não é um vetor contravariante[6]:

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \rightarrow dV'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dV^\nu + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} dx^\alpha V^\nu \neq dV^\mu \quad (1.6)$$

Para transformações de coordenadas do tipo  $x'^\mu = ax^\mu + b$  (transformações lineares, como translações, boosts, transformações de escala)  $dV'^\mu$  se transformaria como um genuíno vetor. Uma maneira de definir um operador diferencial covariante é a partir da definição do transporte paralelo em coordenadas curvilineas. Se  $A^\mu$  são as componentes do vetor A em  $x^\mu$ , e  $A^\mu + dA^\mu$  são as componentes de A em  $x^\mu + dx^\mu$ . O transporte paralelo de A entre  $x^\mu$  e  $x^\mu + dx^\mu$  produz uma variação  $\delta A^\mu$ . Como a diferença entre vetores deve ser feita no mesmo ponto do espaço-tempo, devemos transportar um vetor para a posição do outro, assim a diferença entre os dois vetores é tal que [6]:

$$DA^\mu = dA^\mu - \delta A^\mu \quad (1.7)$$

Assumindo que  $\delta A^\mu$  seja dependente da distância infinitesimal  $dx^\mu$ , e também linear em  $A^\mu$ , então:

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\beta dx^\alpha \quad (1.8)$$

Onde  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$  é chamada conexão Afim [6]. Com essa definição temos que:

$$DA^\mu = dA^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\beta dx^\alpha. \quad (1.9)$$

Como podemos ver,  $DA^\mu$  se transformará como um genuíno vetor,

$$(DA)'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dA^\nu + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} A^\beta dx^\alpha + \Gamma'^\mu_{\alpha\beta} A'^\beta dx^\alpha \quad (1.10)$$

se a conexão afim se transformar da seguinte forma:

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\rho_{\sigma\tau} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \quad (1.11)$$

Vemos então, que a conexão não é um tensor. Com isso podemos definir agora a derivada covariante [6]:

$$\nabla_\sigma A^\mu = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{DA^\mu}{dx^\sigma} = \partial_\sigma A^\mu + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} A^\alpha \quad (1.12)$$

**Definição:** O tensor métrico é definido da seguinte forma: O intervalo infinitesimal  $ds$  de um espaço métrico é definido como [6]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.13)$$

O tensor  $g_{\mu\nu}$  é chamado de tensor métrico ou métrica. A partir da métrica podemos formar objetos escalares sob difeomorfismos, como mostrado a seguir [6]:

$$A^2 = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \quad (1.14)$$

É fácil ver que este objeto é realmente um escalar:

$$A'^2 = g'_{\mu\nu} A'^\mu A'^\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} A^\rho A^\sigma = \delta^\alpha_\rho \delta^\beta_\sigma g_{\alpha\beta} A^\rho A^\sigma = A^2 \quad (1.15)$$

Com essa definição podemos escrever objetos covariantes a partir de sua versão contravariante, e vice-versa:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \leftrightarrow A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (1.16)$$

Onde o tensor  $g^{\mu\nu}$  é tal que respeita a seguinte equação [6]:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\beta} = \delta^\mu_\beta \quad (1.17)$$

Utilizando a métrica podemos escrever a derivada contravariante, como se segue [6]:

$$\nabla^\sigma A^\mu = g^{\sigma\nu} \nabla_\nu A^\mu \quad (1.18)$$

Sabendo que objetos de caráter escalar, por definição, são invariantes sob transformações de coordenadas. Podemos então escrever:

$$\delta A^2 = 0 \rightarrow \delta A^\mu A_\mu + A^\mu \delta A_\mu = A^\mu \delta A_\mu - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A_\mu A^\beta dx^\alpha = A^\beta (\delta A_\beta - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A_\mu dx^\alpha) = 0 \quad (1.19)$$

Ou seja, usando o mesmo raciocínio para a derivada covariante de um vetor contravariante, a derivada covariante de um vetor covariante é dado por:

$$\nabla_{\sigma} A_{\mu} = \partial_{\sigma} A_{\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} A_{\alpha} \quad (1.20)$$

Com isso temos, como exemplo, derivadas covariante de tensores de rank 2 (usando do fato que um tensor pode ser escrito como o produto de tensores, ou seja,  $\delta T^{\mu\nu} = \delta(A^{\mu} B^{\nu})$ ) [6]:

$$\nabla_{\beta} T^{\mu\nu} = \partial_{\beta} T^{\mu\nu} + \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha} T^{\mu\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} T^{\alpha\nu} \quad (1.21)$$

$$\nabla_{\beta} T^{\mu}_{\nu} = \partial_{\beta} T^{\mu}_{\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} T^{\mu}_{\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} T^{\alpha}_{\nu} \quad (1.22)$$

$$\nabla_{\beta} T_{\mu\nu} = \partial_{\beta} T_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} T_{\mu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} T_{\alpha\nu} \quad (1.23)$$

Podemos derivar a expressão explícita da conexão afim da seguinte forma, partindo do fato de que  $DA_{\mu} = \nabla_{\sigma} A_{\mu} dx^{\sigma} = g_{\mu\nu} DA^{\nu}$ . Admitindo essa igualdade válida chegamos a conclusão que:

$$\nabla_{\sigma} g_{\mu\nu} = 0 \quad (1.24)$$

(Afirmamos com isso que a variedade em questão é compatível com uma definição consistente de distâncias, dado que implica na invariância do elemento de linha. A definição acima é chamada de postulado de metricidade). Com a definição acima e, permutando os índices de  $\nabla_{\sigma} g_{\mu\nu} = 0$  e somando como mostrado a seguir, teremos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} - \nabla_{\mu} g_{\nu\alpha} - \nabla_{\nu} g_{\alpha\mu} &= \\ \frac{1}{2}(\partial_{\alpha} g_{\mu\nu} - \partial_{\mu} g_{\nu\alpha} - \partial_{\nu} g_{\alpha\mu}) &+ \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} + \Gamma^{\beta}_{\nu\mu}) - \frac{1}{2}g_{\mu\beta}(\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}) + \frac{1}{2}g_{\beta\nu}(\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}) = 0 \end{aligned}$$

Na relatividade geral, a conexão afim, em geral, é simétrica nos índices inferiores, e por isso, a parte antisimétrica se anula, nos permitindo escrever a conexão da seguinte maneira:

$$\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_{\nu} g_{\alpha\mu} + \partial_{\mu} g_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}) \quad (1.25)$$

Note que, sob uma transformação geral de coordenadas, a conexão afim se transforma da seguinte maneira :

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\sigma\tau} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \quad (1.26)$$

Ou seja, se transforma exatamente como deveria para manter a equação (1.10) covariante.

## 1.2 Geodésicas

A geodésica é uma generalização de uma “linha reta” para espaços curvos. Ela pode ser definida como a curva cujos vetores tangentes permanecem paralelos durante todo o percurso. Em espaços métricos pode ser definida como o caminho mais curto entre dois pontos. Com esta segunda definição a equação da geodésica é consequência do seguinte princípio variacional [7]:

$$\delta \int ds = \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = 0 \quad (1.27)$$

Ou seja, a geodésica é a equação que é solução da extremização acima. Parametrizando  $x^\mu$  como  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$  podemos reescrever a equação acima:

$$\delta \int ds = \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda = \delta \int L(x, \frac{dx}{d\lambda}) d\lambda \quad (1.28)$$

Pelo princípio variacional encontramos a seguinte equação para partículas massivas :

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \frac{1}{2} g^{\kappa\alpha} (\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (1.29)$$

Como podemos ver, na Relatividade Geral, onde a torção é nula, a equação da geodésica pode ser simplificada, e chegamos ao seguinte resultado [7]:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (1.30)$$

## 1.3 O tensor de curvatura de Riemann

Segundo Ohaniann [6], quando tomamos derivadas covariantes de um campo tensorial, devemos ter cuidado com a ordem em que aplicamos as derivadas. Supondo que apliquemos duas derivadas covariantes em um campo vetorial  $A_\beta$ , ou seja:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A_\beta \neq \nabla_\nu \nabla_\mu A_\beta \quad (1.31)$$

Explicitando uma das derivadas temos:

$$\nabla_\nu \nabla_\mu A_\beta = \partial_\nu (\nabla_\mu A_\beta) - \Gamma^\kappa_{\nu\beta} (\nabla_\mu A_\kappa) - \Gamma^\kappa_{\mu\nu} (\nabla_\kappa A_\beta) \quad (1.32)$$

Com isso podemos achar a expressão para a diferença entre a aplicação das derivadas com as ordens trocadas:

$$\begin{aligned} \nabla_\nu \nabla_\mu A_\beta - \nabla_\mu \nabla_\nu A_\beta &= \partial_\nu (\nabla_\mu A_\beta) - \partial_\mu (\nabla_\nu A_\beta) + \Gamma^\kappa_{\mu\beta} (\nabla_\nu A_\kappa) - \Gamma^\kappa_{\nu\beta} (\nabla_\mu A_\kappa) - (\Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\nu\mu}) (\nabla_\kappa A_\beta) \\ &= \partial_\nu (\partial_\mu A_\beta - \Gamma^\kappa_{\mu\beta} A_\kappa) - \partial_\mu (\partial_\nu A_\beta - \Gamma^\kappa_{\nu\beta} A_\kappa) + \Gamma^\kappa_{\mu\beta} (\partial_\nu A_\kappa - \Gamma^\alpha_{\nu\kappa} A_\alpha) - \Gamma^\kappa_{\nu\beta} (\partial_\mu A_\kappa - \Gamma^\alpha_{\mu\kappa} A_\alpha) \\ &\quad - (\Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\nu\mu}) (\nabla_\kappa A_\beta) \\ &= (\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\kappa_{\nu\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\beta} \Gamma^\alpha_{\nu\kappa}) A_\alpha \end{aligned} \quad (1.33)$$

Podemos reescrever a equação anterior da seguinte forma [6],[7]:

$$[\nabla_\nu, \nabla_\mu]A_\beta = R^\alpha_{\beta\mu\nu}A_\alpha \quad (1.34)$$

Onde:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\kappa_{\nu\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\beta}\Gamma^\alpha_{\nu\kappa} \quad (1.35)$$

O tensor de curvatura  $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$  é um tensor de Rank-4. Ele é chamado de tensor de curvatura de Riemann. Podemos escreve-lo como um puro tensor covariante:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\sigma}R^\sigma_{\beta\mu\nu} \quad (1.36)$$

Algumas propriedades importantes do tensor de Riemann seguem abaixo [6],[7]:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} \quad (1.37)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} \quad (1.38)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (1.39)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0 \quad (1.40)$$

Além das identidades algébricas, o tensor de Riemann obedece a seguinte identidade diferencial [6]:

$$\nabla_\alpha R^\sigma_{\beta\mu\nu} + \nabla_\mu R^\sigma_{\beta\nu\alpha} + \nabla_\nu R^\sigma_{\beta\alpha\mu} = 0 \quad (1.41)$$

Com a contração do primeiro e último índices do tensor  $R^\sigma_{\beta\mu\nu}$  obtemos o tensor de Ricci, que é simétrico em seu índices [6],[7]:

$$R^\alpha_{\beta\mu\alpha} = R_{\beta\mu} = R_{\mu\beta} \quad (1.42)$$

Contraindo os índices do tensor de Ricci obtemos o escalar de Ricci, ou escalar de curvatura  $R$  [6],[7]:

$$R = g^{\mu\beta}R_{\mu\beta} = R^\alpha_{\beta\alpha} \quad (1.43)$$

Podemos chegar a uma equação que nos será útil adiante. Contraindo a equação (1.40) da seguinte maneira:

$$\frac{1}{2}\delta^\nu_\sigma g^{\beta\alpha}(\nabla_\alpha R^\sigma_{\beta\mu\nu} + \nabla_\mu R^\sigma_{\beta\nu\alpha} + \nabla_\nu R^\sigma_{\beta\alpha\mu}) = \nabla_\sigma(R^\sigma_\mu - \frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu R) = 0 \quad (1.44)$$

As equações (1.40) e (1.43) são conhecidas como identidades de Bianchi. Costuma-se chamar de Tensor de Einstein o tensor  $G^\sigma_\mu = R^\sigma_\mu - \frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu R$  e com isso [6],[7]:

$$\nabla_\sigma G^\sigma_\mu = 0 \quad (1.45)$$

## 1.4 Princípio Variacional para a equação de Einstein

Segundo Weber [7] um campo gravitacional é equivalente, em uma pequena região, a um referencial acelerado. Uma métrica Riemanniana, portanto, deve dar uma descrição correta do campo gravitacional. Como vimos, o quadrado do elemento de linha é dado por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.46)$$

O tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  deve, portanto, conter informações sobre o campo gravitacional, e essa identificação vem do princípio de equivalência, que é o mais importante aspecto introduzido pela Relatividade Geral. Deve então haver alguma equação diferencial para a métrica que a relaciona com a distribuição de matéria-energia. Em outras palavras, Devemos recuperar, a baixas densidades de energia/matéria a teoria de Newton para a gravitação [7]:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho_m \quad (1.47)$$

Começaremos, de forma bem geral, com a seguinte ação em um espaço 4 dimensional:

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{\mathcal{K}} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_{mat} \right\} \quad (1.48)$$

Onde  $\Lambda$  é conhecida como constante cosmológica e  $\mathcal{K} = 8\pi G$ . Tirando as equações para  $g_{\mu\nu}$  obtemos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}\Lambda = \mathcal{K} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = \mathcal{K} T_{\mu\nu} \quad (1.49)$$

Onde  $T_{\mu\nu}$  representa o tensor energia-momento da distribuição de matéria no espaço em questão. Pelas equações (1.24) e (1.45) temos que:

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0 \quad (1.50)$$

Ou seja, o tensor energia-momento representa uma quantidade conservada, agora no contexto da RG. Em um espaço onde a distribuição de matéria não é relevante, podemos simplificar a equação acima e chegamos ao seguinte resultado [6],[7]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}\Lambda = 0 \quad (1.51)$$

De fato, a equação acima recupera a equação de Newton no limite não-relativístico, como pode ser visto com detalhes em [6], [7]. Agora podemos procurar soluções para um espaço com constante cosmológica diferente de zero.

## 1.5 Soluções esféricamente simétricas e espaço DS/ADS

Para exemplificar as mudanças das equações do eletromagnetismo sob um background gravitacional mostraremos o caso onde temos uma curvatura constante no espaço. Analogamente a suposição feita por Schwarzschild, onde encontrou a famosa métrica associada aos buracos negros, utiliza-se da premissa da simetria esférica do nosso problema. Portanto, teremos uma métrica do tipo [6],[8]:

$$-ds^2 = -f_0(r)dt^2 + f_1(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.52)$$

Fazendo, para ajudar a visualização do problema,  $f_0(r) = \exp \nu(r)$  e  $f_1(r) = \exp \lambda(r)$ , temos a seguinte métrica:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left( \exp(\nu(r)), -\exp(-\lambda(r)), -r^2, -r^2 \sin^2 \theta \right) \quad (1.53)$$

Fixamos as funções  $\nu$  e  $\lambda$  a partir das equações de Einstein com constante cosmológica  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}\Lambda = 0$  e chegamos ao sistema de equações diferenciais [6], [7]:

$$R^0_0 - \frac{1}{2}\delta^0_0 R = \exp(-\lambda) \left( \frac{(1-r\lambda')}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = \Lambda \quad (1.54)$$

$$R^1_1 - \frac{1}{2}\delta^1_1 R = \exp(-\lambda) \left( \frac{(1+r\nu')}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = \Lambda \quad (1.55)$$

$$R^2_2 - \frac{1}{2}R\delta^2_2 = \frac{1}{2} \exp(-\lambda) \left( \nu'' + \frac{1}{2}(\nu')^2 + \frac{1}{r}(\nu - \lambda)' - \frac{1}{2}\nu'\lambda' \right) = \Lambda \quad (1.56)$$

No caso estático a componente 33 é idêntica a componente 22 e todas as outras se anulam. Somando (1.54) e (1.55) chegamos a seguinte equação diferencial:

$$(1 + \Lambda r^2) \exp \lambda - 1 + r\lambda' = 0 \quad (1.57)$$

A solução geral para a equação nos leva ao seguinte resultado:

$$f_1(r) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\Lambda}{3}r^2 + \frac{C}{r}\right)} \quad (1.58)$$

Substituindo a solução na equação (1.55) obtemos:

$$f_0(r) = b \left(1 + \frac{\Lambda}{3}r^2 + \frac{C}{r}\right) \quad (1.59)$$

Onde  $b$  e  $C$  são constantes arbitrárias. Em geral, se faz  $b = 1$ , já que ela implicaria em uma mudança de escala facilmente absorvida pela coordenada  $r$ . Podemos com isso escrever ( $C = -2GM$ ):

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{2GM}{r}\right)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.60)$$

Essa métrica é conhecida como métrica de De-Sitter Schwarzschild[6],[7], [8]. Se  $\Lambda$  for positivo chamamos o espaço de tipo De-Sitter(DS), se for negativo chamamos de espaço de anti De-Sitter (ADS) [8]. Com essa métrica temos algumas simplificações aos tensores de Riemann, Ricci e ao escalar de curvatura, como mostrado a seguir:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\Lambda}{6}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) \quad (1.61)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{2}g_{\mu\nu} \quad (1.62)$$

$$R = -2\Lambda \quad (1.63)$$

No limite Newtoniano, temos que  $g_{00} \approx 1 + 2V(r)$ , onde  $V(r)$  é o potencial Newtoniano. Logo, nesse contexto o potencial gravitacional pode ser expresso aproximadamente por [8]:

$$V(r) \approx -\frac{GM}{r} + \frac{\Lambda r^2}{6} \quad (1.64)$$

Como vemos acima, a constante cosmológica positiva (negativa) gera uma correção do tipo de um oscilador harmônico (invertido)[8]. A este potencial temos uma força correspondente, que é calculada a partir do gradiente do potencial:

$$\vec{F} = -m\nabla V(r) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} - \frac{m\Lambda r}{3}\hat{r} \quad (1.65)$$

A força devido a constante cosmológica no caso AdS ( $\Lambda < 0$ ) aponta para a direção oposta a força de Newton e é vista como uma força anti-gravidade. Note que essa força é proporcional a  $r$ , ou seja, se torna importante somente em largas escalas. Implicação direta disso é que desvios nas orbitas dos planetas e nos níveis de energia de átomos são sutis. Porém, como sabemos, medidas advindas da física atômica são muito precisas, de modo que ainda há esperança para que esses efeitos sejam mensurados experimentalmente [8].

## 1.6 Eletrodinâmica e Relatividade Geral

No espaço-tempo de Minkowski (1+3), o campo eletromagnético é descrito pela seguinte densidade de Lagrangeana [9]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (1.66)$$

Onde  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ . O tensor energia-momento derivado desta densidade de lagrangeana, simetrizado pelo mecanismo de Belifante, é [9]:

$$\Theta^{\mu\nu} = [F^{\mu\alpha}F_\alpha^\nu - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}] \quad (1.67)$$

que é conservado, ou seja,  $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$ . Na presença de gravitação, a densidade de lagrangeana agora é escrita da seguinte maneira [9]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\sqrt{-g}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (1.68)$$

Consequentemente, o tensor energia momento é modificado, assumindo a seguinte forma [9]:

$$\Theta^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} = [F^{\mu\alpha}F^\nu_\alpha - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}] \quad (1.69)$$

Observe que continua sendo um tensor simétrico e desta vez é uma grandeza covariantemente conservada, ou seja,  $\nabla_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$  [9]. A partir da densidade de lagrangeana podemos achar a equação de movimento para o tensor de campo  $F$  [10].

$$(I) \quad \nabla_\beta F^{\beta\alpha} = j^\alpha \quad (1.70)$$

$$(II) \quad \nabla^\gamma F^{\beta\alpha} + \nabla^\beta F^{\alpha\gamma} + \nabla^\alpha F^{\beta\gamma} = 0 \quad (1.71)$$

Lembrando que o tensor  $F$  é um tensor antisimétrico, podemos reescrever (I) da seguinte forma [7]:

$$\nabla_\beta F^{\beta\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta(\sqrt{-g}F^{\beta\alpha}) \quad (1.72)$$

Podemos separar então a equação acima em componentes temporais e espaciais:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i(\sqrt{-g}F^{i0}) = j^0 \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_0(\sqrt{-g}F^{0j}) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i(\sqrt{-g}F^{ij}) = j^j \quad (1.73)$$

Veja que as equações acima são uma generalização das equações de Maxwell com fonte [10]. Abrindo agora em componentes a equação (II) temos:

$$\varepsilon_{ijk}\nabla^i F^{jk} = 0 \quad ; \quad \nabla^0 F^{ij} + \nabla^i F^{j0} - \nabla^j F^{i0} = 0 \quad (1.74)$$

Mais uma vez, as equações acima generalizam as equações de Maxwell, porém desta vez as sem fontes. Observe que, a partir do tensor energia momento podemos definir a força de Lorentz generalizada.

$$\begin{aligned} f^\nu = \nabla_\mu \Theta^{\mu\nu} &= \nabla_\mu [F^{\mu\alpha}F^\nu_\alpha - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}] \\ &= \nabla_\mu (F^{\mu\alpha})F^\nu_\alpha + \nabla_\mu (F^{\nu\alpha})F^\mu_\alpha - \frac{1}{2}\nabla^\nu (F^{\mu\alpha})F_{\mu\alpha} \\ &= F^\nu_\alpha J^\alpha + \frac{1}{2}(\nabla^\mu F^{\nu\alpha} + \nabla^\nu F^{\alpha\mu} + \nabla^\alpha F^{\mu\nu})F_{\mu\alpha} \\ &= F^\nu_\alpha J^\alpha \end{aligned} \quad (1.75)$$

Onde usamos (I), (II) e a antisimetria de  $F$  para simplificar e chegar ao resultado acima. Esta expressão será importante para definirmos a força de reação, por exemplo.

### 1.6.1 Como definir univocamente o campo elétrico em $F^{\mu\nu}$

Segundo [7], a ação para uma partícula carregada de carga  $e$  é dada por:

$$S = -m \int ds + e \int A_\mu dx^\mu \quad (1.76)$$

Extremizando esta ação chegamos ao seguinte resultado para a geodésica da partícula carregada:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = \frac{e}{m} F^\alpha_\beta \frac{dx^\beta}{ds} = \frac{f^\alpha}{m} \quad (1.77)$$

Para um referencial onde a partícula esteja em repouso, temos que a sua 4-velocidade é dada por  $u^\alpha = \frac{\delta_0^\alpha}{\sqrt{g_{00}}}$ , visto que  $u^\alpha u_\alpha = 1$ , com isso temos que, nesse referencial, a componente da força  $f^\alpha$  não nula é somente a componente espacial e tem a seguinte forma:

$$f^i = \frac{e}{\sqrt{g_{00}}} F^i_0 \quad (1.78)$$

Definindo agora o campo elétrico como a densidade de força por unidade de carga  $f/e$ , então teremos a seguinte identificação entre as componentes de  $F$  e as componentes do campo elétrico  $\vec{E}$ :

$$(\vec{E})^i = \frac{f^i}{e} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} F^i_0 \quad (1.79)$$

Para um referencial onde a partícula adquira uma velocidade  $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$  constante, teremos assim:

$$\frac{f^\alpha}{e} = (g_{00} + \sum_i g_{ii} (v^i)^2)^{-1/2} (F^\alpha_0 + F^\alpha_j v^j) \quad (1.80)$$

A equação acima é a generalização da força de Lorentz. Podemos definir o campo  $\vec{B}$  a partir do dual do tensor  $F$ , que em 1+3 D é escrito como  $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ , logo:

$$(\vec{B})^i = \tilde{F}^i_0 = \frac{g_{00}}{2\sqrt{-g}} \epsilon^{ijk} F_{jk} \quad , \quad \epsilon^{123} = 1 \quad (1.81)$$

Como vimos na sessão anterior, as equações e Maxwell acopladas a Relatividade Geral tem a seguinte equação de movimento:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\beta (\sqrt{-g} F^{\beta\alpha}) = j^\alpha \quad (1.82)$$

Pela equação da métrica de um espaço tipo DS/ADS temos que  $\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta$ , que simplifica a equação acima, chegando ao resultado:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\beta ((r^2 \sin \theta) F^{\beta\alpha}) = j^\alpha \quad (1.83)$$

Como vimos a métrica de um espaço tipo DS/ADS pode ser escrita de forma a ser uma matriz diagonal. Partindo disso e abrindo as equações em componentes, escrevendo em função do tensor  $F_i^j$ , que representam os verdadeiros campos elétricos e magnéticos, temos:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_i ((r^2 \sin \theta) F^{i0}) = j^0 \quad (1.84)$$

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_0 ((r^2 \sin \theta) F^{0j}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_i ((r^2 \sin \theta) F^{ij}) = j^j \quad (1.85)$$

Já as equações de campo sem fontes adquirem a seguinte forma:

$$\varepsilon_{ijk} \nabla^i F^{jk} = 0 \quad ; \quad \nabla^0 F^{ij} + \nabla^i F^{j0} - \nabla^j F^{i0} = 0 \quad (1.86)$$

Partindo da equação (1.83) vemos imediatamente que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad ; \quad D^i = F^{i0} \quad (1.87)$$

A solução para o elétron em repouso é  $\vec{D} = \frac{e}{4\pi r^2} \hat{r}$ . Assim, temos a identificação  $D^i = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} E^i$ . Portanto, o campo elétrico de uma carga pontual e repouso tem a seguinte forma:

$$\vec{E} = q \sqrt{\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)} \frac{\hat{r}}{r^2} \approx \frac{q}{r^2} \hat{r} - \frac{q\Lambda}{6} \hat{r} + O(\Lambda^2) \quad (1.88)$$

Onde omitimos a contribuição de  $2GM$  por ser extremamente pequena. Como podemos ver, a constante cosmológica introduz, a pequenas distâncias um campo elétrico constante como correção para o campo Coulombiano. Essa correção pode ser interpretada como uma polarização do vácuo em torno do elétron, já que  $\vec{P} = \vec{D} - \frac{1}{4\pi} \vec{E}$  [12]. Porém pela simetria radial apresentada a polarização total será nula, já que:

$$\vec{d} = \int d^3x \vec{P} = \frac{q}{4\pi} \int dr \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\Lambda r^2}{3}}\right) \int d\Omega \hat{r}(\theta, \phi) = 0 \quad (1.89)$$

onde usamos  $\int \hat{r} d\Omega = 0$ . Utilizando-se do fato que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \rho_b$ , onde  $\rho_b$  é a densidade de carga gerada pela polarização [12], teremos:

$$\rho_b \approx -\frac{q\Lambda}{12\pi r} + O(\Lambda^2) \quad (1.90)$$

Como podemos ver, a gravitação, mais especificamente a constante cosmológica, introduz densidade de cargas e polarizações em torno do elétron, porém essa configuração não contribui para o EDM do elétron pois esse modelo não viola CP.

## Capítulo 2

# Cargas Aceleradas e Radiação

### 2.1 Motivações

Estamos procurando compreender a possível assimetria na distribuição de carga interna do elétron. Em 1951, Dirac publicou um interessante trabalho chamado “ A New Classical Theory of Electrons” [13], no qual todo o esforço é verificar se é possível se propor uma estrutura mais fundamental para o elétron a partir da relação entre a sua carga e sua massa. Nesta direção, uma possível pista para se compreender a questão possa vir de um espaço de dimensão mais baixa, (1+2) D, onde mesmo em uma teoria linear, a evidência do suporte da função de Green dentro do cone de luz, possa contribuir para uma melhor compreensão de uma possível estrutura interna do elétron e da relação entre massa e carga. Há muito tempo é sabido que o campo de uma partícula carregada em repouso no espaço de Minkowski (1+3) cai como  $1/r^2$ , em uma coordenatização esférica. O campo de uma carga, se movendo com uma velocidade contante, pode ser obtido a partir de uma transformação de Lorentz, também cai proporcional a  $1/r^2$ . De modo completamente distinto se comportam os campos quando a partícula é acelerada. Os campos agora têm uma componente que cai com  $1/r$ , componente esta que costuma receber o nome de campo de radiação. Com os campos proporcionais a  $1/r$ , o respectivo vetor de Poynting cai como  $1/r^2$ , implicando que uma quantidade finita e fixa de momento atravessa a carga esférica que circunda a partícula à grandes distâncias. Com isso, os campos de radiação ganham extrema importância, pois o contínuo fluxo de energia vindo da partícula carregada acelerada, a longa distância, resultará em uma força de amortecimento, ou força de reação à radiação [14]. Foi Dirac quem quantificou essa força para (1+3) D, e sua expressão pode ser vista em [15].

Já no eletromagnetismo em (1+2) dimensões temos diferenças gritantes. Como podemos ver em [16],[17], o campo de uma partícula carregada em repouso é proporcional a  $1/r$ . Devido ao comportamento do propagador, que tem suporte em todo cone de luz, diferentemente do caso 4-dimensional. Deve-se tratar o problema com cautela, devido a divergências que aparecem alimentadas pelo reverbe-

rar do propagador. Com efeito, métodos analógicos aos utilizados no caso 4 dimensões espaço-temporais falham em definir os campos com precisão.

A análise que utilizaremos, cuja inspiração vem a analogia com o método encontrado em [14], é baseada na premissa que, partindo do formalismo da Relatividade Geral, as equações de Maxwell não são somente covariantes sob transformações de Lorentz mas também podem ser escritas de forma covariante sob transformações gerais de coordenadas, ou difeomorfismos. Dado uma carga se movendo em uma trajetória arbitrária, sempre será possível construir um sistema de coordenadas próprio para essa partícula. Neste referencial (não-inercial), a carga está em repouso em todos os tempos, porém a métrica do background não será Minkowskiana e, em geral, dependente do tempo. Desta forma, o problema se resume a um problema estacionário em um background gravitacional não-trivial.

Sabemos que essas soluções devem se transformar para as soluções padrão descrevendo a carga na sua respectiva trajetória quando analisadas de um referencial inercial. Ou seja, vamos tirar proveito do fato que a dependência temporal e da não-trivialidade da métrica no referencial próprio tem que refletir, pela própria consistência da relatividade geral, a exata dependência espacial e temporal do campo de radiação. Mais do que isso, a partícula deve sentir a força de reação no seu referencial próprio, devido ao background gravitacional [14].

## 2.2 Transformação de Rindler em 2+1 D

Para uma partícula em movimento uniformemente acelerado, temos uma seguinte parametrização da trajetória da partícula [14]:

$$t = \frac{1}{g} \sinh(g\tau) ; x = \frac{1}{g} \cosh(g\tau) ; y = y \quad (2.1)$$

Com isso, vemos facilmente que a trajetória obedece a equação de uma hipérbole:

$$x^2 - t^2 = \left(\frac{1}{g}\right)^2 \quad (2.2)$$

Podemos construir um sistema de coordenadas comóvel com a partícula, com o auxílio do diagrama da figura 2.1, vemos as seguintes regiões A e B, que terão coordenatizações distintas:

- na região A ( $\xi > 0$ ), temos as coordenadas:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2\xi}{g}} \sinh(g\tau) \\ x &= \sqrt{\frac{2\xi}{g}} \cosh(g\tau) \\ y &= y \end{aligned} \quad (2.3)$$

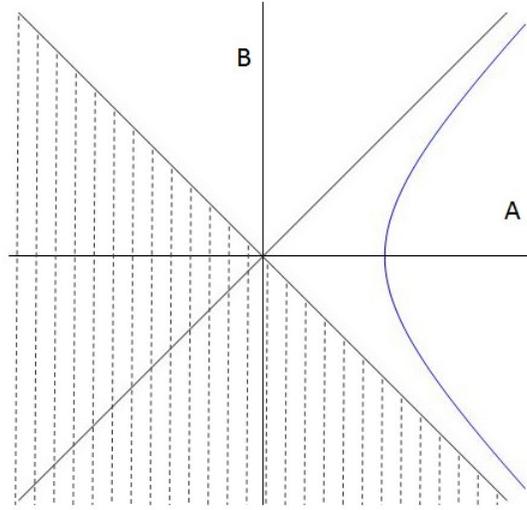


Figura 2.1: Diagrama mostrando as regiões A e B, além da trajetória da partícula (azul).

- na região B ( $\xi < 0$ ), temos as coordenadas:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{-2\xi}{g}} \cosh(g\tau) \\ x &= \sqrt{\frac{-2\xi}{g}} \sinh(g\tau) \\ y &= y \end{aligned} \quad (2.4)$$

Portanto, a transformação de coordenadas do referencial coacelerado, ou seja, o referencial da partícula, e o referencial inercial é o seguinte:

- na região A ( $\xi > 0$ ), temos as coordenadas:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{g}{2}(x^2 - t^2) \\ \tau &= \operatorname{arctanh}\left(\frac{t}{x}\right) \\ y &= y \end{aligned} \quad (2.5)$$

- na região B ( $\xi < 0$ ), temos as coordenadas:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{g}{2}(x^2 - t^2) \\ \tau &= \operatorname{arctanh}\left(\frac{x}{t}\right) \\ y &= y \end{aligned} \quad (2.6)$$

Apesar de termos duas regiões de coordenatização distintas, tanto em A quanto em B temos definida a mesma métrica:

$$ds^2 = 2g\xi d\tau^2 - \frac{1}{2g\xi} d\xi^2 - dy^2; \quad (2.7)$$

Com essa métrica, ou, em outras palavras, nesse referencial não inercial, temos a seguinte equação para os campos eletromagnéticos (Note que não adicionamos o termo topológico de Chern-Simons [16], já que não contribuiria para a força na partícula):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu; (\sqrt{-g} = 1) \quad (2.8)$$

Neste referencial proposto, a carga está em repouso, e já que a métrica depende apenas de coordenadas espaciais, o problema se resume a um problema estático. Assim:

$$\begin{aligned} \partial_\xi F^{\xi 0} + \partial_y F^{y0} &= q\delta(\xi - \xi_0)\delta(y) \\ \partial_\xi(g^{\xi\xi}g^{00}\partial_\xi A_0) + \partial_y(g^{yy}g^{00}\partial_y A_0) &= q\delta(\xi - \xi_0)\delta(y) \\ (\partial_\xi^2 + \frac{1}{2g\xi}\partial_y^2)A_0(\xi, y) &= -q\delta(\xi - \xi_0)\delta(y) \end{aligned} \quad (2.9)$$

### 2.3 Auto-funções do operador diferencial

Partindo a equação diferencial (2.9) podemos analisar a seguinte equação de auto-valor:

$$\mathcal{D}\psi_\lambda = (\partial_\xi^2 + \frac{1}{2g\xi}\partial_y^2)\psi_\lambda = \lambda^2\psi_\lambda \quad (2.10)$$

É fácil mostrar que  $\mathcal{D}$  é um operador auto-adjunto. Se pudermos escrever a solução geral de  $\mathcal{D}A_0(\xi, y) = q\delta(\xi - \xi_0)\delta(y)$  em termos das funções base do operador achamos a solução geral para o problema, ou seja:

$$A_0(\xi, y) = \sum_\lambda A_\lambda\psi_\lambda \quad (2.11)$$

Se determinarmos as constantes  $A_\lambda$  chegamos à  $A_0$ . De fato, podemos, como se segue:

$$\mathcal{D}A_0 = \sum_\lambda A_\lambda\mathcal{D}\psi_\lambda = \sum_\lambda \lambda^2 A_\lambda\psi_\lambda = -q\delta(\xi - \xi_0)\delta(y) \quad (2.12)$$

Usando do fato de que, devido ao operador ser auto-adjunto, suas auto-funções são ortogonais entre si, ou seja,

$$\int dy d\xi \psi_\lambda(\xi, y)\psi_{\lambda'}(\xi, y)r(\xi, y) = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (2.13)$$

onde,  $r(\xi, y)$  é a função peso característico do operador diferencial. Com isso, podemos identificar diretamente os  $A_\lambda$  e chegamos a seguinte solução para (2.9):

$$A_0(\xi, y) = q \sum_\lambda \left( \frac{\psi_\lambda(\xi_0, 0)r(\xi_0, 0)}{\lambda^2} \right) \psi_\lambda(\xi, y) \quad (2.14)$$

Usando o método da separação de variáveis podemos achar a solução geral para  $\psi_\lambda$ , como se segue:

$$\psi_\lambda = \sum_s (a_s \exp sy + b_s \exp -sy)(c_s M_{\alpha, 1/2}(2\lambda\xi) + d_s W_{\alpha, 1/2}(2\lambda\xi)) \quad (2.15)$$

Onde,  $M$  e  $W$  são as funções de Whittaker [18],[19],  $\alpha = s^2/(2g\lambda)$  e  $a, b, c$  e  $d$  são constantes arbitrárias. Podemos analisar, agora que temos a solução geral, o comportamento das funções de Whittaker para  $\xi \rightarrow 0$  e  $\xi \rightarrow \infty$  [19]:

Função	$M_{\alpha,1/2}(x)$	$M'_{\alpha,1/2}(x)$	$W_{\alpha,1/2}(x)$	$W'_{\alpha,1/2}(x)$
próximo à origem	$x$	1	$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + O(x \ln x)$	$\frac{\ln(x)}{\Gamma(-\alpha)} + O(x^0)$
no infinito	$\frac{\exp(x/2)}{x^\alpha \Gamma(1-\alpha)}$	$\frac{\exp(x/2)}{2x^\alpha \Gamma(1-\alpha)}$	$x^\alpha \exp(-x/2)$	$\frac{-x^\alpha \exp(-x/2)}{2}$

## 2.4 Mudança de coordenadas para o referencial inercial

Dado um tensor em um referencial coacelerado, como o referencial descrito na primeira seção desse capítulo, e uma transformação entre o referencial inercial e o referencial coacelerado, podemos encontrar os tensores no referencial inercial. Sinalizaremos os tensores que estão descritos no referencial inercial como  $\tilde{T}$ . Por exemplo, temos, no referencial acelerado, que a força de Lorentz é dada por:

$$f^\alpha = eF^\alpha_\beta u^\beta = eF^\alpha_0 u^0 \quad (u^i = 0) \quad (2.16)$$

Nesse referencial, temos um sistema estático. Deste fato temos a seguinte condição:

$$u^\alpha u_\alpha = 1 = g_{00}(u^0)^2 \rightarrow u^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \quad (2.17)$$

Logo temos que neste referencial não inercial:

$$f^\alpha = \frac{e}{\sqrt{g_{00}}} F^\alpha_0 \quad (2.18)$$

Ou seja, apenas as componentes  $f^\xi$  e  $f^y$  são diferentes de zero. Agora que temos a forma do 4-vetor da força de Lorentz no referencial coacelerado, podemos transformá-la para o referencial inercial. As coordenadas  $x'$  e  $x$  são respectivamente  $x'^\alpha = (t, x, y)$  e  $x^\alpha = (\tau, \xi, y)$ . Assim:

$$\tilde{f}^\beta = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} f^\alpha \quad (2.19)$$

Usando as equações para as transformações de coordenadas entre os referenciais (2.5 e 2.6) chegamos ao resultado que as componentes da força de Lorentz no referencial inercial são as seguintes:

$$\tilde{f}^0 = \frac{t}{g(x^2 - t^2)} f^\xi(x, y, t) \quad , \text{ na região A e na região B} \quad (2.20)$$

$$\tilde{f}^x = \frac{x}{g(x^2 - t^2)} f^\xi(x, y, t) \quad , \text{ em A e em B} \quad (2.21)$$

$$\tilde{f}^y = f^y(x, y, t) \quad , \text{ em A e em B} \quad (2.22)$$

Como visto em (1.78) temos que, como  $f^\alpha = \frac{e}{\sqrt{g_{00}}} F^\alpha_0$  e escolhemos um gauge tal que somente a componente  $A_0$  é não nula, reescrevemos  $f$  da seguinte forma (sem soma em  $\alpha$ ):

$$f^\alpha = \frac{e}{\sqrt{g_{00}}} \partial^\alpha A_0 = \frac{e}{\sqrt{g_{00}}} g^{\alpha\alpha} \partial_\alpha A_0 \quad (2.23)$$

Com isso, finalmente chegamos à expressão onde conseguimos relacionar a força de Lorentz com o potencial elétrico que é solução da equação diferencial (2.9):

$$\tilde{f}^0 = -\frac{et}{\sqrt{x^2 - t^2}} (\partial_\xi A_0) \quad , \text{ na região A e na região B} \quad (2.24)$$

$$\tilde{f}^x = -\frac{ex}{\sqrt{x^2 - t^2}} (\partial_\xi A_0) \quad , \text{ em A e em B} \quad (2.25)$$

$$\tilde{f}^y = -\frac{e}{g\sqrt{x^2 - t^2}} (\partial_y A_0) \quad , \text{ em A e em B} \quad (2.26)$$

Temos que os campos  $\tilde{A}^\beta$  no referencial inercial serão  $\tilde{A}^\beta = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} A^\alpha$ , logo:

$$\tilde{A}^0 = gx A_0 \quad (2.27)$$

$$\tilde{A}^x = gt A_0 \quad (2.28)$$

$$\tilde{A}^y = 0 \quad (2.29)$$

Podemos escrever as componentes do tensor  $\tilde{F}^{\alpha\beta}$ , usando o mesmo formalismo utilizado anteriormente, e chegamos ao seguinte resultado:

$$\tilde{F}^x_0 = \pm 2g^2(x^2 - t^2) F^\xi_0 \quad (2.30)$$

$$\tilde{F}^y_0 = +gx F^y_0 \quad (2.31)$$

$$\tilde{F}^x_y = +gt F^0_y \quad (2.32)$$

Note que, o único elemento que ainda é necessário a investigação mais aprofundada é  $A_0(\xi, y)$ , pois com ele chegamos a todos os campos para o referencial não inercial. Porém, a equação (2.14) e (2.15) são gerais demais para que possamos tirar alguma informação do problema proposto. O que falta exatamente são condições de contorno corretas para termos uma solução única. Lembrando que em um sistema em repouso, o potencial elétrico tem o comportamento  $\approx \ln r$ , logo, a escolha de campos tendendo a zero no infinito não seriam uma boa escolha pois excluiríamos parte importante da solução. Outra complicação imediata é vinda do fato de que o sistema não é limitado. Com isso a soma sob os parâmetros se tornam integrais em  $s$  e em  $\lambda$ . Mas note que  $\lambda$  está presente no índice das funções de Whittaker, logo, a integral traz consigo uma grande dificuldade. Uma outra maneira de resolver a EDP seria resolve-la como  $\mathcal{D}\psi_\lambda = 0$ , para todo  $\xi \neq \xi_0$  e  $y \neq 0$  e acertar a continuidade e descontinuidades dos potenciais e campos, respectivamente. Porém esse método não se mostrou simplificador, pois também aparecem integrais bem complicadas. Com estas informações, o próximo passo para continuar a abordagem deste problema será achar a solução da EDP que tenham significado físico para tentar extrair alguma informação sobre a força de radiação que uma partícula acelerada sente em um espaço de 2+1 dimensões.

## Capítulo 3

# Eletrodinâmica de Born-Infeld

Em meados da década de 30, a relação entre matéria e o campo eletromagnético era interpretado a partir de dois pontos de vista. O primeiro é chamado de ponto de vista unitário, onde a única entidade física era o campo eletromagnético. As partículas que constituem a matéria eram considerados apenas singularidades do campo e sua massa era definida a partir da energia contida nos campos, a chamada massa eletromagnética. O segundo ponto de vista, chamado de dualístico, parte de que partículas e campos são essencialmente distintos. As partículas seriam as fontes para os campos, seriam afetadas pelos campos mas não fariam parte deles. A característica própria dela seria sua inércia, mensurada pela constante chamada massa inercial.[4]

De maneira geral a comunidade científica adotou o segundo ponto de vista, e os principais motivos foram, a falha em se desenvolver uma teoria “unitária” (não confundir com o conceito de unitariedade da teoria de campos atual). Teorias criadas por Heaviside, Lorentz e outros eram falhas em explicar a coesão e estabilidade do elétron, além das dificuldades em generalizar as equações de Maxwell em teorias não-lineares, como por exemplo, a teoria de Mie, onde suas soluções dependiam explicitamente do valor do potencial [4]. Também temos, nessa época, o sucesso da relatividade, que apontava contra a existência de uma massa advinda somente da energia eletromagnética, já que as transformações de Lorentz modificariam a massa eletromagnética e inercial de forma distinta. Em terceiro temos o grande sucesso da mecânica quântica, que é baseada fundamentalmente no ponto de vista da dualidade onda partícula. Isso fez com que a ideia de massa eletromagnética e teorias “unitárias” fossem deixadas de lado. Porém, as conclusões dos resultados obtidos da mecânica quântica, que muitas vezes fogem ao senso comum, e a dúvida na validade das equações de Dirac, recém formuladas, em escalas da ordem do “raio do elétron”  $r_0 \approx \frac{e^2}{mc^2}$ , alimentaram a construção de um nova teoria da eletrodinâmica que se propunha a duas novas linhas de pensamento, uma em relação a uma nova teoria do Eletromagnetismo, e outra em um novo método de abordagem da mecânica quântica. Como veremos, essa teoria do eletromagnetismo foi proposta em [4], mas até hoje não se compreendeu uma forma convincente de quantizá-la.

Born-Infeld, no seu artigo original [4], ao tentar propor uma teoria do eletromagnetismo válida em distâncias próximas ao raio do elétron  $\frac{e^2}{mc^2}$  parte de princípios bem gerais. Eles partem de um postulado, de que a ação da teoria deveria ser invariante sob transformações de coordenadas, ou seja, independente da escolha de um sistema de coordenadas. Partindo de um campo tensorial  $a_{\mu\nu}$ , onde não é assumido nenhuma simetria inicial é definido a lagrangeana da seguinte forma:

$$\mathcal{L} \propto \sqrt{-\det a_{\mu\nu}} \quad (3.1)$$

Como o tensor  $a_{\mu\nu}$  pode ser separado em sua parte simétrica e anti-simétrica:

$$a_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + f_{\mu\nu} \quad , \quad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad , \quad f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu} \quad (3.2)$$

A visão original da eletrodinâmica de Born-Infeld (BI) quando definida do espaço de Minkowski (1+3) D e sua lagrangeana respeitando as seguintes condições, deveria reproduzir a eletrodinâmica de Maxwell, para campos de menor magnitude, e no caso eletrostático existiriam limite superior para o valor absoluto do campo elétrico, implicando numa energia eletrostática finita [4]. A teoria fará assim analogia direta com a relatividade especial, onde há o limite para as velocidades das partículas, a velocidade da luz. Com isso a lagrangeana mais geral que respeita, além das condições anteriormente explicitadas, a invariância de Poincaré e a invariância de Gauge, é, em um “background” gravitacional tipo Minkowski [4]:

$$\mathcal{L} = b^2 \sqrt{1 - \frac{2S}{b^2} - \frac{P^2}{b^4}} - b^2 \quad (3.3)$$

Onde  $b$  é uma constante, cujo significado ficará claro mais adiante,  $S = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(E^2 - B^2)$  e  $P = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \vec{E} \cdot \vec{B}$ , os invariantes sob transformações de Lorentz já bem conhecidos do eletromagnetismo de Maxwell. Podemos reescrever então a equação acima de forma compacta, e que, com a devida generalização para uma variedade arbitrária toma a moderna forma a seguir [4]:

$$\mathcal{L} = b^2 \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + \frac{1}{b}F_{\mu\nu})} - b^2 \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} + A_\mu J^\mu \quad (3.4)$$

A lagrangeana acima, com as devidas manipulações para obtermos as equações de Maxwell na faixa de energia apropriada, tem a mesma forma de (3.1), com  $f_{\mu\nu} = \frac{1}{b}F_{\mu\nu}$  e  $g_{\mu\nu}$  sendo o tensor métrico. Segundo a interpretação vinda da teoria de cordas, governa a dinâmica de uma D-Brana [21]. Com isto podemos encontrar as equações de movimento da teoria, como se segue:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta F_{\mu\nu}}) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\frac{\sqrt{-g}(F^{\mu\nu} - \frac{1}{b^2}(\vec{E} \cdot \vec{B})\tilde{F}^{\mu\nu})}{\sqrt{1 - \frac{(E^2 - B^2)}{b^2} - \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}{b^4}}}\right) = J^\nu \quad (3.5)$$

Podemos, para uma melhor interpretação da equação acima, definir o seguinte Tensor:

$$G^{\mu\nu} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta F_{\mu\nu}} \quad (3.6)$$

Com isso a equação de movimento é simplificada e toma a seguinte forma:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}G^{\mu\nu}\right) = J^\nu \quad (3.7)$$

Com a ajuda do Tensor  $G$ , podemos dar uma interpretação para a equação de movimento. O tensor  $G$ , por ser um tensor antisimétrico assim como  $F$ , carrega consigo os seguintes vetores:

$$G^{0i} = (\vec{D})_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(E^2 - B^2)}{b^2} - \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}{b^4}}} (\vec{E} + \frac{1}{b^2}(\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{B})_i \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}G^{jk} = (\vec{H})_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(E^2 - B^2)}{b^2} - \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}{b^4}}} (\vec{B} - \frac{1}{b^2}(\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{E})_i \quad (3.9)$$

A partir da definição dos campos auxiliares acima, nas chamadas relações constitutivas, temos a interpretação imediata de que na eletrodinâmica de BI o vácuo sofre polarização e magnetização devido a não linearidade da teoria [4],[21]. Com isso, temos as seguintes equações que governam a eletrodinâmica de BI.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (3.10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \partial_t \vec{D} + \vec{j} \quad (3.11)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.12)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad (3.13)$$

Segundo Vellozo [21], podemos inverter as equações de  $\vec{D}(\vec{E}, \vec{B})$  e  $\vec{H}(\vec{E}, \vec{B})$  para equações de  $\vec{E}(\vec{B}, \vec{D})$  e  $\vec{H}(\vec{B}, \vec{D})$  chegando ao seguinte resultado:

$$\vec{E} = \frac{1}{R} \left( \left(1 + \frac{B^2}{b^2}\right) \vec{D} - \frac{(\vec{D} \cdot \vec{B})}{b^2} \vec{B} \right) \quad (3.14)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{R} \left( \left(1 + \frac{D^2}{b^2}\right) \vec{B} - \frac{(\vec{D} \cdot \vec{B})}{b^2} \vec{D} \right) \quad (3.15)$$

Onde  $R = \sqrt{\left(1 + \frac{B^2}{b^2}\right)\left(1 + \frac{D^2}{b^2}\right) - \frac{(\vec{D} \cdot \vec{B})^2}{b^4}}$ . Interessante notar a dualidade presente nas equações acima na troca de  $\vec{B} \rightarrow \vec{D}$  e  $\vec{H} \rightarrow \vec{E}$ .

### 3.1 Soluções de BI com simetria axial

Com as considerações anteriores podemos agora procurar as soluções de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  a partir de uma fonte como o elétron, por exemplo. Sabendo da natureza das propriedades do elétron, adotamos uma simetria axial no problema, ou seja, de maneira geral teremos uma fonte que produza um campo  $H$ , tal que  $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$ , ou seja, em coordenadas esféricas:

$$\vec{H}(r, \theta) = H_r(r, \theta)\hat{r} + H_\theta(r, \theta)\hat{\theta} \quad (3.16)$$

Com isso esperamos que essa simetria seja respeitada também pelo campo B, de forma que:

$$\vec{B}(r, \theta) = B_r(r, \theta)\hat{r} + B_\theta(r, \theta)\hat{\theta} \quad (3.17)$$

De fato, como mostrado no Apêndice B, a não linearidade da teoria não gera uma componente azimutal para B no caso que iremos tratar. Agora, para o campo D, esperamos uma simetria esférica completa, já que analizaremos uma carga pontual. Logo  $\vec{D} = D(r)\hat{r}$ , mantendo a generalidade na dependência em r. Assim, implementando essa simetria nas equações para E e H chegamos á:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{R}\left(1 + \frac{B_\theta^2}{b^2}\right)Dr & ; & \quad E_\theta = -\frac{1}{R}\frac{B_r B_\theta}{b^2}Dr \\ H_r &= \frac{1}{R}Br & ; & \quad H_\theta = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{D_r^2}{b^2}\right)B_\theta \end{aligned} \quad (3.18)$$

Onde agora, para simplificar,  $R = \sqrt{\left(1 + \frac{(B_r^2 + B_\theta^2)}{b^2}\right)\left(1 + \frac{D_r^2}{b^2}\right) - \frac{(D_r B_r)^2}{b^4}}$ . Graças a simetria axial podemos agora inverter as equações, achando  $\vec{E}(\vec{H}, \vec{D})$  e  $\vec{B}(\vec{H}, \vec{D})$ , chegando ao resultado abaixo:

$$E_r = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{H_r^2}{b^2} + \frac{H_\theta^2}{(b^2 + D_r^2)}\right)}}{\sqrt{1 + \frac{D_r^2}{b^2}}} \left(1 + \frac{1}{b^2} \frac{(1 + \frac{D_r^2}{b^2})H_\theta^2}{\left(1 - \left(\frac{H_r^2}{b^2} + \frac{H_\theta^2}{(b^2 + D_r^2)}\right)\right)}\right)Dr \quad (3.19)$$

A componente polar do campo elétrico é:

$$E_\theta = \frac{1}{b^2} \frac{H_\theta H_r}{\sqrt{1 - \left(\frac{H_r^2}{b^2} + \frac{H_\theta^2}{(b^2 + D_r^2)}\right)}} \frac{D_r}{\sqrt{1 + \frac{D_r^2}{b^2}}} \quad (3.20)$$

Para o campo B temos agora:

$$B_r = \frac{\sqrt{1 + \frac{D_r^2}{b^2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{H_r^2}{b^2} + \frac{H_\theta^2}{(b^2 + D_r^2)}\right)}} H_r \quad (3.21)$$

$$B_\theta = \frac{H_\theta}{\sqrt{1 + \frac{D_r^2}{b^2}} \sqrt{1 - \left(\frac{H_r^2}{b^2} + \frac{H_\theta^2}{(b^2 + D_r^2)}\right)}} \quad (3.22)$$

Note que se assumissemos que nosso problema tivesse simetria esférica, não veríamos a componente  $E_\theta$ . Podemos interpretar o resultado acima da seguinte maneira. Apesar da simetria da fonte introduza uma simetria esférica para o campo D, ela não se mantém para o campo elétrico. Como podemos ver, as componentes do campo H quebram essa simetria, e devido a não linearidade da eletrodinâmica de BI o campo elétrico percebe essa quebra, refletido na componente polar de E não nula.

### 3.2 Campos para uma partícula pontual carregada e com momento de dipolo magnético não nulo

Agora com o resultado podemos focar no caso que exemplificamos. Temos assim uma carga pontual, na origem do nosso sistema de coordenadas, com momento de dipolo magnético não nulo:

$$\vec{D} = \frac{\alpha}{r^2} \hat{r} \quad ; \quad \vec{H} = \frac{\beta}{r^3} (3(\hat{z} \cdot \hat{r})\hat{r} - \hat{z}) = \frac{\beta}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (3.23)$$

Como resultado, os campos E e B serão:

$$E_r(r, \theta) = \alpha \frac{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{r^6 b^2} \left( 4 \cos^2 \theta + \frac{r^4 \sin^2 \theta}{(r^4 + \frac{\alpha^2}{b^2})} \right)}}{\sqrt{r^4 + \frac{\alpha^2}{b^2}}} \left( 1 + \frac{\beta^2 \sin^2 \theta (r^4 + \frac{\alpha^2}{b^2})}{b^2 (r^{10} - \frac{\beta^2 r^4}{b^2} (4 \cos^2 \theta + \frac{r^4 \sin^2 \theta}{(r^4 + \frac{\alpha^2}{b^2})})} \right) \quad (3.24)$$

$$E_\theta(r, \theta) = \frac{2q\beta^2}{b^2 r^3 (\sqrt{r^4 + \frac{\alpha^2}{b^2}})} \frac{1}{\sqrt{r^6 - \frac{\beta^2}{b^2} (4 \cos^2 \theta + \frac{r^4 \sin^2 \theta}{(r^4 + \frac{\alpha^2}{b^2})}}} \quad (3.25)$$

Agora, com o resultado acima podemos avaliar o significado do parâmetro b. Se fizermos  $\beta = 0$ , ou seja, no caso de uma partícula com momento de dipolo magnético nulo, obtemos a seguinte expressão:

$$E_r(r) = \frac{q}{\sqrt{r^4 + \frac{q^2}{b^2}}} \quad ; \quad E_\theta = 0 \quad (3.26)$$

Note que  $E_r(r=0) = b$ , ou seja, é o valor de E na origem. Mais do que isso, é o valor máximo que o campo elétrico pode assumir.

Expandindo o campo elétrico em potências de  $1/r$  temos que:

$$E_r(r, \theta) = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{2\alpha^3}{b^2 r^6} - \frac{\alpha\beta^2(3 + 5 \cos 2\theta)}{b^2 r^8} + O(b^{-4}) \quad (3.27)$$

$$E_\theta(r, \theta) = -\frac{\alpha\beta^2 \sin 2\theta}{b^2 r^8} + O(b^{-4}) \quad (3.28)$$

Para o campo B temos seguinte expansão:

$$B_r(r, \theta) = \frac{2\beta \cos \theta}{r^3} + \frac{\alpha^2 \beta \cos \theta}{b^2 r^7} + \frac{\beta^3 (13 \cos \theta + 3 \cos 3\theta)}{4b^2 r^9} + O(b^{-4}) \quad (3.29)$$

$$B_\theta(r, \theta) = \frac{\beta \sin \theta}{r^3} - \frac{\alpha^2 \beta \sin \theta}{2b^2 r^7} + \frac{\beta^3 (5 + 3 \cos 2\theta) \sin \theta}{4b^2 r^9} + O(b^{-4}) \quad (3.30)$$

Note que, na primeira aproximação (já que  $\alpha \gg \beta$ ) onde temos  $\vec{E}(\vec{r}) \approx (\frac{\alpha}{r^2} - \frac{2\alpha^3}{b^2 r^6})\hat{r}$ , temos um campo que depende somente do módulo de  $r$ . Assim ele tem rotacional nulo e pode ser escrito como gradiente de um potencial  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ . Com isso temos um potencial elétrico  $\Phi$  como se segue (Figura 3.1):

$$\Phi(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha^3}{10b^2 r^5} \quad (3.31)$$

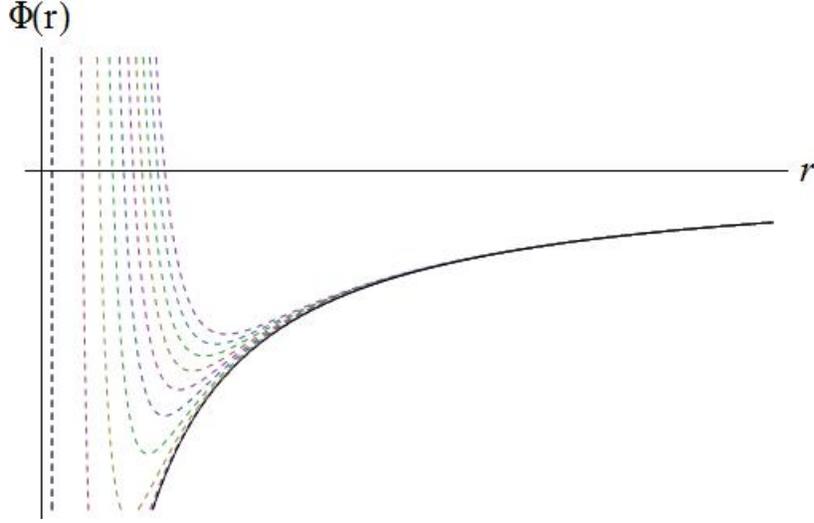


Figura 3.1: Gráfico representando o potencial de Coulomb (preto) e a correção (3.31) para vários valores de  $b$  (tracejado).

Comparando com a expansão em multipolos de um sistema com simetria azimutal temos que:

$$\Phi(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int d^3x' (r')^l P_l(\cos \theta') \rho(\vec{r}') \quad (3.32)$$

Ou seja:

$$\int d^3x' (r')^l P_l(\cos \theta') \rho(\vec{r}') = 0, \text{ se } l \neq 0, 4 \quad (3.33)$$

$$\int d^3x' \rho(\vec{r}') = q \quad (3.34)$$

$$\int d(\cos \theta') d\phi' r'^2 dr' (r')^4 P_4(\cos \theta') \rho(\vec{r}') = \frac{\alpha^3}{10b^2} \quad (3.35)$$

Com isso, podemos dizer que a polarização do vácuo gera uma configuração de cargas em torno do elétron, onde não sabemos sua distribuição radial, porém sabemos, dado a ortogonalidade dos polinômios de Legendre, que será, pelo menos, proporcional à  $P_4(\cos \theta')$  (Figura 3.2).

Podemos ver que, apesar de termos uma polarização que poderia nos dar uma contribuição para o dipolo elétrico, essa polarização quando integrada nos deixa uma contribuição nula.

$$\delta \vec{d}_e = \int d^3x \vec{P} = -\frac{2\alpha^3}{b^2} \int \frac{r^2 dr}{r^6} \int \hat{r}(\theta, \phi) d(\cos \theta) d\phi = 0 \quad (3.36)$$

Onde usamos que,  $\int \hat{r}(\theta, \phi) d\Omega = 0$ . Assim, temos que o dipolo elétrico do elétron não sofre correção a esta ordem de perturbação.

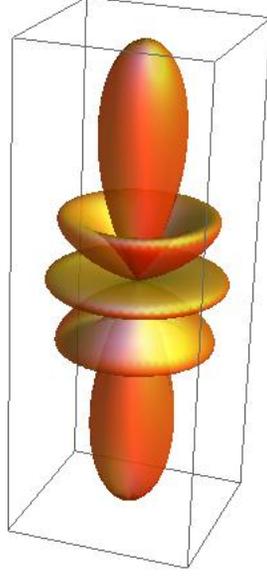


Figura 3.2: *Figura ilustrativa representando a polarização do vácuo em torno do elétron.*

Agora, de forma analoga, Como  $\vec{M} = \frac{1}{4\pi}\vec{B} - \vec{H}$  temos que a correção de menor ordem que podemos encontrar para o dipolo magnético será:

$$\begin{aligned}
\delta\vec{\mu} &= \int d^3x \vec{M} = \\
&= \int d^3x \left[ \left( \frac{\alpha^2\beta \cos\theta}{b^2 r^7} + \frac{\beta^3(13 \cos\theta + 3 \cos 3\theta)}{4b^2 r^9} \right) \hat{r} + \left( -\frac{\alpha^2\beta \sin\theta}{2b^2 r^7} + \frac{\beta^3(5 + 3 \cos 2\theta) \sin\theta}{4b^2 r^9} \right) \hat{\theta} \right] \\
&= \frac{8\pi\beta}{15b^2} \hat{z} \int_{r_0}^{\infty} dr \frac{5\alpha^2 r^2 + 3\beta^2}{r^7} \\
&= \frac{2\pi\beta}{15b^2} \frac{(5r_0^2\alpha^2 + 2\beta^2)}{r_0^6} \hat{z}
\end{aligned}$$

Onde  $r_0$  é o raio mínimo onde a aproximação da série em  $b^2$  continua válida. Note que tivemos que adicionar essa constante para contornarmos a divergência. Além disso, essa divergência nos indica que para campos elétricos nas regiões muito próximas do elétron as aproximações possam não ser suficientes para explicar todo o fenômeno. Podemos então escrever o momento de dipolo magnético efetivo do elétron, que é a soma do momento de dipolo intrínseco,  $\mu_s = \frac{g_s}{2}\mu_b$ , onde  $g_s$  é o fator giromagnético do elétron e  $\mu_b$  é o magneton de bohr, com a correção devido a magnetização do vácuo ( $\beta = \mu_s$ ):

$$\vec{\mu}_{efetivo} \approx \mu_s \hat{z} \left( 1 + \frac{1}{30b^2} \frac{(5r_0^2\alpha^2 + 2(\frac{\mu_b}{4\pi})^2)}{r_0^6} \right) \quad (3.37)$$

Lembrando que, a partir de resultados obtidos a partir da teoria quântica de campos [28], podemos escrever o fator giromagnético e, conseqüentemente, o momento de dipolo magnético anômalo do elétron, usando do fato que  $g_s/2 = 1 + a_s$ , onde  $a_s$  representa as correções advindas do modelo padrão, podemos

então adicionar esta informação ao resultado acima e teremos com isso:

$$\mu_{efetivo} \approx \mu_b \left[ 1 + a_s + \frac{1}{30b^2} \frac{(5r_0^2\alpha^2 + 2(\frac{\mu_b}{4\pi})^2)}{r_0^6} \right] \quad (3.38)$$

Com esse resultado podemos fazer algumas estimativas. Como o raio clássico do elétron é da ordem de  $10^{-4}eV^{-1}$ , o setor magnético da eq. (3.38) domina a correção do momento de dipolo magnético do elétron. com isso concluímos que há uma relação entre o parametro b e o raio  $r_0$  do elétron. Sabendo que o desvio experimental  $\delta a_s < 10^{-9}$  [28] podemos fazer as seguintes estimativas. <sup>1</sup>

- Se  $b \approx 10^{18}T \rightarrow r_0 \approx 10^{-10}eV^{-1}$
- Se  $r_0 \approx 10^{-20}eV^{-1} \rightarrow b \approx 10^{54}T$

Assim, devido a relação entre o parâmetro b e o raio  $r_0$ , se o elétron for pontual ( $r_0 \rightarrow 0$ ),  $b \rightarrow \infty$ , consequentemente a contribuição de BI se reduz a zero.

Como podemos ver, a eletrodinâmica de BI não contribui, pelo menos na primeira ordem em  $b^{-2}$  para o dipolo elétrico de nenhuma partícula carregada de carga q e com momento de dipolo magnético intrínseco  $\mu$ . Porém, devidos aos efeitos da não-linearidade, a interpretação das correções como polarizações e magnetizações do vácuo geram uma quebra da simetria esférica das distribuições de carga em torno do elétron (figura 3.2) e uma correção para o fator giromagnético anômalo do elétron.

---

<sup>1</sup> $1eV^{-1} \approx 2 \times 10^{-9}cm$

# Conclusão e Perspectivas

Como vimos, o EDM do elétron se mostra um bom candidato para o estudo de uma física além do modelo padrão. As polarizações e magnetizações induzidas como no caso da constante cosmológica podem gerar correções para quantidades físicas, sem a necessidade de quantizarmos a teoria utilizada. Essa é uma característica interessante, visto que, tanto a gravitação quanto o eletromagnetismo de BI não tem ainda um formas consistentes de quantização. Apesar das correções achadas, não encontramos correções para o EDM do elétron, já que a Relatividade de Einstein não viola CP.

Aproveitando o conhecimento adquirido no estudo do eletromagnetismo em conjunto com a gravitação, foi analisado no capítulo 2 como os campos eletromagnéticos de uma partícula carregada em um espaço 1+2 D, e como resultados chegamos a solução geral para os campos  $\vec{E}$  e  $B$  gerados pela partícula.

Na eletrodinâmica e Born-Infeld, vimos que a não linearidade da teoria gera campos eletromagnéticos muito diferentes dos campos gerados pelas fontes, e expandindo as soluções em potências de  $r$ , podemos interpretar os desvios novamente como polarizações e magnetizações do vácuo. A análise nos mostra que o momento de dipolo magnético intrínseco do elétron induz uma distribuição de cargas com uma simetria distinta da esférica. Porém, apesar desta distribuição de cargas a quantidade de carga total não é modificada. Temos também que a não linearidade da teoria induz uma correção para o momento de dipolo magnético intrínseco do elétron.

Os trabalhos apresentados nesta dissertação são a primeira etapa para uma investigação mais profunda e ampla na relação entre carga elétrica, massa e spin, o que nos permitiria compreender definitivamente as causas do aparecimento do EDM do elétron.

Como perspectiva para a continuação do trabalho apresentado nesta dissertação temos a implementação de teorias da gravitação com quebra da simetria CP. Esperamos que com essa nova característica introduzida efeitos no EDM apareçam como uma assimetria na polarização induzida e que, diferentemente da polarização induzida pela constante cosmológica ( $\vec{P} = \frac{q\Lambda}{24\pi} \hat{r}$ ), não se anule quando integrada em todo o volume. Outra possível hipótese a ser investigada é o formalismo da gravitação por vielbien, onde a torção possa também ter um papel importante, podendo até introduzir a quebra de CP [26].

Também, gostaríamos de analisar que a torção do espaço-tempo (logo considerando a possibilidade de espaço-tempo com torção), mesmo que pequena em escala microscópica, não deva ser negligenciada a nível microscópico, sobretudo a distâncias na escala de  $10^{-29}$  cm. O acoplamento do spin do elétron com a torção induz uma precessão e esta pode ser o elemento-chave para assimetria da distribuição de carga do elétron em torno do seu spin. Pretendemos assim, iniciar uma linha de estudos nesta frente: Torção e sua contribuição ao EDM do elétron.

Em relação ao trabalho feito no caso do elétron em 1+2 D , a principal idéia é particularizar a solução para as devidas condições de contorno. Para que, com as soluções, analisemos a potência irradiada pela carga e a força de radiação sentida pela carga. Visto que, o método utilizado não utiliza-se explicitamente dos propagadores, a interpretação utilizada por Dirac [15], dos campos retardados e avançados, não parece, pelo menos a princípio, de grande ajuda. Assim, deve-se procurar uma outra interpretação para a força de radiação. Outra possibilidade seria introduzir o termo de topológico Chern-Simons e analisar as mudanças obtidas.

A procura de métodos para estimar o valor da constante presente na teoria de BI, a partir da comparação com os resultados da física de altas energias, além da procura de generalizações da teoria de BI que violem CP, também são idéias para continuação do trabalho.

# Referências Bibliográficas

- [1] BERNREUTHER, Werner; SUZUKI, Mahiko. “The electric dipole moment of the electron”. *Reviews of Modern Physics*, v. 63, n. 2, p. 313, 1991.
- [2] WOLFENSTEIN, Lincoln. “Parametrization of the Kobayashi-Maskawa matrix”. *Physical Review Letters*, v. 51, n. 21, p. 1945, 1983.
- [3] Baron, Jacob, et al. ”Order of magnitude smaller limit on the electric dipole moment of the electron.” *Science* 343.6168 (2014): 269-272.
- [4] BORN, Max; INFELD, Leopold. “Foundations of the new field theory”. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, p. 425-451, 1934.
- [5] DE SABBATA, Venzo; GASPERINI, Maurizio. “Introduction to gravitation”. World scientific, 1985.
- [6] OHANIAN, Hans C.; RUFFINI, Remo. “Gravitation and spacetime”. Cambridge University Press, 2013.
- [7] WEBER, Joseph. “General Relativity and gravitational waves”. Courier Corporation, 2004.
- [8] MARTIN, Jerome. “Everything you always wanted to know about the cosmological constant problem (but were afraid to ask)”. *Comptes Rendus Physique*, v. 13, n. 6, p. 566-665, 2012.
- [9] ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. G. “An introduction to General Relativity”. Instituto de Física Teórica, UNESP, Sao Paulo , 2010.
- [10] REDKÓV, V. M.; TOKAREVSKAYA, N. G.; SPIX, George J. “Maxwell equations in Riemannian space-time”, geometrical modeling of medias. *Proc. of XIII Ann. Sem. Nonlinear Phenomena in Complex Systems. Minsk*, p. 207-228, 2006.
- [11] HUANG, Qing-Guo; LI, Miao; SONG, Wei. “Weak gravity conjecture in the asymptotical dS and AdS background”. *Journal of High Energy Physics*, v. 2006, n. 10, p. 059, 2006.
- [12] JACKSON, John David; JACKSON, John D. “Classical electrodynamics”. New York etc.: Wiley, 1962.

- [13] DIRAC, Paul Adrien Maurice. “A new classical theory of electrons”. In: Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society, 1951. p. 291-296.
- [14] PADMANABHAN, T. “Radiation from a charged particle and radiation reaction”. Phys. Rev. D, v. 57, n. physics/9710036, p. 7241, 1997.
- [15] DIRAC, Paul AM. “Classical theory of radiating electrons”. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, p. 148-169, 1938.
- [16] MOURA-MELO, Winder A.; HELAYËL-NETO, J. A. “Huyghens principle, Planck law: peculiarities in the behavior of planar photons”. Physics Letters A, v. 293, n. 5, p. 216-222, 2002.
- [17] MOURA-MELO, Winder A.; HELAYËL-NETO, J. A. “Remarks on Dirac-like monopoles’, Maxwell and Maxwell-Chern-Simons electrodynamics in  $D= 2+ 1$  dimensions”. Physical Review D, v. 63, n. 6, p. 065013, 2001.
- [18] ABRAMOWITZ, Milton et al. “Handbook of mathematical functions”. Applied Mathematics Series, v. 55, p. 62, 1966.
- [19] BUCHHOLZ, Herbert. “The confluent hypergeometric function: with special emphasis on its applications”. Springer Science & Business Media, 2013.
- [20] SHURYAK, Edward; YEE, Ho-Ung; ZAHED, Ismail. “Self-force and synchrotron radiation in odd space-time dimensions”. Physical Review D, v. 85, n. 10, p. 104007, 2012.
- [21] DE OLIVEIRA VELLOZO, Sergio. “Uma Discussão sobre o Spin e a Estabilidade da Carga Elétrica na Eletrodinâmica de Born-Infeld”, 2009
- [22] KOGUT, J. B.; SINCLAIR, D. K. “Quantization and simulation of Born-Infeld nonlinear electrodynamics on a lattice”. Physical Review D, v. 73, n. 11, p. 114508, 2006.
- [23] WANG, Cong. “Born-Infeld Action and Its Applications”. 2013.
- [24] DITTRICH, Walter; GIES, Holger. “Vacuum birefringence in strong magnetic fields”. 1998.
- [25] ARFKEN, George B. “Mathematical methods for physicists”. Academic press, 2013.
- [26] FREIDEL, Laurent; MINIC, Djordje; TAKEUCHI, Tatsu. “Quantum gravity, torsion, parity violation, and all that”. Physical Review D, v. 72, n. 10, p. 104002, 2005.
- [27] YAMANAKA, Nodoka. “Sfermion loop contribution to the two-loop level fermion electric dipole moment in R-parity violating supersymmetric models”. Physical Review D, v. 86, n. 7, p. 075029, 2012.

- [28] AOYAMA, Tatsumi et al. Tenth-order electron anomalous magnetic moment: Contribution of diagrams without closed lepton loops. *Physical Review D*, v. 91, n. 3, p. 033006, 2015.

## Apêndice A

# Solução da Equação Diferencial Parcial

Para acharmos as soluções da equação diferencial parcial :

$$(\partial_\xi^2 + \frac{1}{2g\xi}\partial_y^2)\psi_\lambda = \lambda^2\psi_\lambda \quad (\text{A.1})$$

Usaremos a técnica de separação de variáveis [25]. Com isso admitiremos que a solução será do tipo  $\psi_\lambda(\xi, y) = \Omega(\xi)U(y)$ , logo, substituindo na equação diferencial teremos:

$$\begin{aligned} (\partial_\xi^2 + \frac{1}{2g\xi}\partial_y^2)\Omega(\xi)U(y) &= \lambda^2\Omega(\xi)U(y) \\ U(y)\partial_\xi^2\Omega(\xi) + \frac{\Omega(\xi)}{2g\xi}\partial_y^2U(y) &= \lambda^2\Omega(\xi)U(y) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Dividindo ambos os lados por  $\Omega(\xi)U(y)$  teremos:

$$\frac{\partial_\xi^2\Omega(\xi)}{\Omega(\xi)} + \frac{1}{2g\xi U(y)}\partial_y^2U(y) - \lambda^2 = 0$$

Separando o que depende de  $\xi$  do lado esquerdo e o que depende de  $y$  do lado direito teremos:

$$2g\xi\left(\frac{\partial_\xi^2\Omega(\xi)}{\Omega(\xi)} - \lambda^2\right) = -\frac{\partial_y^2U(y)}{U(y)} = -s^2 \quad (\text{A.3})$$

Veja que  $s$  é uma constante arbitrária, já que separamos as dependências em  $\xi$  e  $y$ . Assim conseguimos duas equações diferenciais ordinárias:

$$\partial_\xi^2\Omega(\xi)\left(\frac{s^2}{2g\xi} - \lambda^2\right)\Omega(\xi) = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\partial_y^2U(y) - s^2U(y) = 0 \quad (\text{A.5})$$

É fácil ver que  $U(y)$  tem a seguinte solução:

$$U(y) = a \exp(sy) + b \exp(-sy) \quad (\text{A.6})$$

Este resultado aponta na direção de uma transformada de Laplace na componente  $y$ . Finalmente, temos as soluções para as equações diferenciais para  $\Omega(\xi)$  [19]:

$$\Omega(\xi) = c M_{\alpha,1/2}(2\lambda\xi) + d W_{\alpha,1/2}(2\lambda\xi) \quad (\text{A.7})$$

Onde  $\alpha = s^2/(2g\lambda)$ . Com isso temos que a solução geral para a EDP será:

$$\psi_\lambda = \sum_s (a_s \exp sy + b_s \exp -sy) (c_s M_{\alpha,1/2}(2\lambda\xi) + d_s W_{\alpha,1/2}(2\lambda\xi)) \quad (\text{A.8})$$

## Apêndice B

# Solução Para Os Campos E e B

Partindo dos resultados de Vellozo:

$$\vec{E} = \frac{1}{R} \left( \left(1 + \frac{B^2}{b^2}\right) \vec{D} - \frac{(\vec{D} \cdot \vec{B})}{b^2} \vec{B} \right) \quad (\text{B.1})$$

$$\vec{H} = \frac{1}{R} \left( \left(1 + \frac{D^2}{b^2}\right) \vec{B} - \frac{(\vec{D} \cdot \vec{B})}{b^2} \vec{D} \right) \quad (\text{B.2})$$

Com  $R = \sqrt{\left(1 + \frac{B^2}{b^2}\right)\left(1 + \frac{D^2}{b^2}\right) - \frac{(\vec{D} \cdot \vec{B})^2}{b^4}}$ . Para o caso de um campo  $\vec{D} = D_r \hat{r}$  teremos então que as componentes do campo E serão:

$$E_r = \left[1 + \frac{(B_\theta^2 + B_\phi^2)}{b^2}\right] \frac{D_r}{R} \quad (\text{B.3})$$

$$E_\theta = -\left[\frac{1}{b^2} \frac{D_r B_r B_\theta}{R}\right] \quad (\text{B.4})$$

$$E_\phi = -\left[\frac{1}{b^2} \frac{D_r B_r B_\theta}{R}\right] \quad (\text{B.5})$$

E as componentes do campo H serão:

$$H_r = \frac{B_r}{R} \quad (\text{B.6})$$

$$H_\theta = \left[1 + \frac{D_r^2}{b^2}\right] \frac{B_\theta}{R} \quad (\text{B.7})$$

$$H_\phi = \left[1 + \frac{D_r^2}{b^2}\right] \frac{B_\phi}{R} \quad (\text{B.8})$$

Onde  $R = \sqrt{\left(1 + \frac{B^2}{b^2}\right)\left(1 + \frac{D_r^2}{b^2}\right) - \frac{(D_r B_r)^2}{b^4}} = \sqrt{1 + \frac{B^2}{b^2} + \frac{D_r^2}{b^2} + \frac{(B_\theta^2 + B_\phi^2) D_r^2}{b^4}}$ .

Agora, como temos as componenes de B em função de H e de R substituimos na equação de R da

seguinte forma:

$$\begin{aligned}
R^2 &= 1 + \frac{B^2}{b^2} + \frac{D_r^2}{b^2} + \frac{(B_\theta^2 + B_\phi^2)D_r^2}{b^4} \\
&= 1 + \frac{D_r^2}{b^2} + \frac{B_r^2}{b^2} + \left(1 + \frac{D_r^2}{b^2}\right) \frac{(B_\theta^2 + B_\phi^2)}{b^2} \\
&= 1 + \frac{D_r^2}{b^2} + R^2 \frac{H_r^2}{b^2} + R^2 \frac{(H_\theta^2 + H_\phi^2)}{b^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{D_r^2}{b^2}\right)} \\
&= 1 + \frac{D_r^2}{b^2} + \frac{R^2}{b^2} \left[ H_r^2 + \frac{(H_\theta^2 + H_\phi^2)}{\left(1 + \frac{D_r^2}{b^2}\right)} \right]
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$R = \sqrt{\frac{1 + \frac{D_r^2}{b^2}}{\left[ H_r^2 + \frac{(H_\theta^2 + H_\phi^2)}{\left(1 + \frac{D_r^2}{b^2}\right)} \right]}} \quad (\text{B.9})$$

Com isso teremos, para o campo E:

$$E_r = \left[ 1 + R^2 \frac{(H_\theta^2 + H_\phi^2)}{b^2} \right] \frac{D_r}{R} \quad (\text{B.10})$$

$$E_\theta = - \left[ \frac{RD_r}{b^2} \frac{H_r H_\theta}{\left(1 + \frac{D_r^2}{b^2}\right)} \right] \quad (\text{B.11})$$

$$E_\phi = - \left[ \frac{RD_r}{b^2} \frac{H_r H_\phi}{\left(1 + \frac{D_r^2}{b^2}\right)} \right] \quad (\text{B.12})$$

Para o campo B temos:

$$B_r = RH_r \quad (\text{B.13})$$

$$B_\theta = \frac{RH_\theta}{\left(1 + \frac{D_r^2}{b^2}\right)} \quad (\text{B.14})$$

$$B_\phi = \frac{RH_\phi}{\left(1 + \frac{D_r^2}{b^2}\right)} \quad (\text{B.15})$$