

**CBPF**

---

**Centro Brasileiro de  
Pesquisas Físicas**

Dissertação de Mestrado

**A Oscilação de Neutrinos**

**e**

**A Massa de Majorana**

*Gregório Rabelo Moreira da Silva*

Rio de Janeiro, 9 de Maio de 2016



# Resumo

Neutrinos ocupam uma posição singular na estrutura teórica e na fenomenologia do Modelo Padrão da Física de Partículas Elementares. Propostos na década de 30 do séc. XX como partículas sem massa afim de salvaguardar o princípio da conservação de energia no decaimento beta, tornaram-se posteriormente atores importantes na interação eletrofraca, sendo classificados juntos com os léptons carregados associados das reações, em três famílias distintas. O estudo experimental detalhado dessas partículas geradas em processos nucleares na atmosfera, no núcleo do Sol ou em feixes de aceleradores mostrou o desaparecimento de partículas da família original ou o surgimento de partículas de famílias diferentes. Portanto, a dinâmica dos estados quânticos dos neutrinos é não-trivial, o que indica que estes podem ter um tempo próprio, e portanto um referencial de repouso e uma massa não nula. A evolução espaço-temporal de cada um dos estados de massa do neutrino se dá de maneira independente, e os estados de interação eletrofraca passam a ser uma superposição desses estados de massa, com os coeficientes sendo parâmetros da matriz PKMNS, análoga à matriz CKM do setor hadrônico. O grande sucesso do Modelo Padrão, tendo o bóson de Higgs como ingrediente fundamental para a geração da massa de todas as partículas, exceto o neutrino, e as sólidas evidências através dos experimentos de oscilação de que estes tem massa não nula, indicam que a própria natureza da massa do neutrino pode ser muito diversa da já conhecida. Tendo carga elétrica nula, isso ainda sugere que o neutrino possa ser um campo autoconjugado de carga, o chamado férmion de Majorana.

**Palavras-Chave:** Oscilação de Neutrinos, Massa de Majorana, Mecanismo See-Saw.

**Áreas do conhecimento:** Física de Partículas Elementares.

# Abstract

Neutrinos hold a unique position in the theoretical framework and phenomenology of the Standard Model of Particle Physics. They were proposed in the 1930s as massless particles to restore the law of conservation of energy in beta decay, later becoming important players in the electroweak interaction, classified along with their associated charged leptons into three distinct families. The detailed experimental study of these particles, produced either in the atmosphere, the core of the Sun or in accelerator beams showed a disappearance of particles of the original family, or appearance of particles of other families. Therefore, the neutrino quantum state dynamics is non-trivial, indicating they can have a proper time, a rest frame and non-zero mass. The spacetime evolution of each of the neutrino mass eigenstates is independent, and the electroweak interaction states are quantum superpositions of these mass states, the coefficients being cast as parameters of the PMNS matrix, similar to the CKM matrix of the hadronic sector. The great success of the Standard Model, with the Higgs boson as a fundamental ingredient for the generation of all but the neutrinos masses, and the solid evidences given by the oscillation experiments that they are indeed massive indicate the very nature of the neutrino mass could be different from what is already known about other masses. Possessing no electric charge, the neutrino might as well be a charge self-conjugate field, the so-called Majorana fermion.

**Keywords:** Neutrino Oscillations, Majorana Mass, See-Saw Mechanism.

**Areas of Knowledge:** Elementary Particle Physics.

# Agradecimentos

Agora que estou chegando ao final do mestrado para ser avaliado e escrevo esses agradecimentos, é difícil acreditar que as palavras possam fazer jus à tudo e todos que eu gostaria que fizessem. Clichê que seja, sei das minhas limitações com elas; e hoje, dada a minha história como a vejo, tudo me parece providencial, das escolhas que fiz quando adolescente aos percalços e desvios de trajetória dos últimos cinco anos. Minha missão nessa seção seria portanto agradecer a todas as pessoas que passaram na minha vida, pois mesmo aquelas cuja interação comigo foi pequena contribuíram para que eu estivesse aqui.

Estamos montados nessa nave que é o tempo, não somos objetiva e nem subjetivamente os mesmos que éramos há um instante atrás, que dirá na adolescência. No entanto guardamos nisso que chamamos de memória com muita vivacidade certas experiências e certas pessoas. As que nos marcam profundamente, chamamos especiais. Gostaria de vivenciá-las todas novamente apenas para expressar minha mais profunda e colorida gratidão. A missão é portanto impossível, mas farei o possível nesse espaço que me é dado:

Obrigado, Professor Arthur Maciel, por tudo que me ofereceu como físico e educador de ciência, e pela referência que é para o Brasil (que eu acredito que vai achar que é exagero mas não é). Hoje estou certo de que não poderia ter escolhido melhor orientador. A sua preocupação com a formação de seus alunos, o profundo conhecimento que possui, a impressionante humildade e serenidade me fazem te ver como uma mistura única de sábio e grande mestre com eterno e jovem estudante. Que privilégio ter aulas particulares semanais com um dos melhores cientistas do Brasil! Levarei comigo tudo que consigo carregar. Minha mais sincera gratidão.

Obrigado, Professor Helayël, pelo seu estupendo e incansável trabalho como formador de uma escola de pensamento em física no Brasil, pelas suas incontáveis aulas –um dos maiores tesouros do CBPF– e pela imensa humanidade. Obrigado pela "física de rua", pelos pães e quitutes compartilhados na Sala Dirac. E se hoje enxergo melhor como diminuir o espaço entre o modo de fazer/pensar física dos profissionais e a física da sala de aula, é também porque tenho você como exemplo.

Obrigado, Professor Gilvan, pelos ensinamentos em física de partículas, pela disponibilidade e pela atenção. Sua preocupação em esclarecer o que quer que eu precisasse, a despeito da minha distância, foram preponderantes.

Obrigado, Professor Tião, por compartilhar tamanho conhecimento com os alunos, pela sinceridade, pela preocupação com a formação e a atenção dada nas avaliações. Como seria bom se todo professor tivesse uma "componente Tião"!

Você é certamente minha referência em muita coisa relacionada à física teórica. Foi responsável em extinguir o preconceito e a acender de maneira definitiva em mim o interesse pela área, que é tão fascinante.

Obrigado a todos os integrantes e ilustres visitantes da Sala Dirac, a primeira e única, do CBPF. Todos os meus colegas de mestrado, mesmo aqueles que só via de vez em quando: Célio, Yuri, Fábio, André, Pedro, Gustavo, Judismar, Cañeda, Laís, Luís, Cristofher, Arthur Scardua. Repito as palavras que uma vez disse: retornei para o CBPF e encontrei um ambiente fraterno, humilde e produtivo; muito diferente e melhor do que qualquer expectativa que pudesse ter. A sensação agora é de realização pessoal e profissional, de estar entre os meus. Tomo sem a menor cerimônia parte da felicidade que cada um sempre expressou, pois sei que bons sentimentos, ao serem compartilhados, multiplicam-se, não são subtraídos. Obrigado a cada um pela grande humanidade. Aprendo além da física com vocês.

Obrigado à toda equipe do CBPF: Ricardo e Zélia, e em especial a Bete, por todas as questões burocráticas resolvidas de maneira tão eficiente, prestativa e amigável.

Obrigado Dona Edna, pela simpatia impressionante, por cuidar do nosso ambiente de trabalho de maneira tão atenciosa, de maneira que nenhum de nós seria capaz, pelos cafés, bons dias e elogios.

Obrigado, professores inesquecíveis do CEFET: Aridio, Alvarez, Bittencourt e Joel, por terem me apresentado à física, ao CBPF, e terem me dado a alfabetização inicial em ciência e tecnologia. Por demonstrarem tamanha paixão a esse campo que hoje descubro como muito humano.

Obrigado aos amigos e amigas, os de sempre e os daqui de fora, que estiveram comigo ao longo desses dois anos. Passou voando! Aos Brothas e aos Tcholas, todos sabem quem são, a lista é grande. Pelos momentos juntos, pelos shows inesquecíveis de jazz, rock e metal, viagens, drinks, jogos e comida boa. Não poderia desejar qualquer amizade diferente. Desnecessário dizer, nossa amizade é pra vida toda, e já sabemos que a distância não é sequer obstáculo.

Obrigado Wallace Hetmanek, por tudo que trabalhamos lá em 2012. Pode parecer longe, mas os efeitos se fazem muito presentes. Quão valoroso é descobrir que sementes plantadas ainda naquela época ainda brotam de maneira nova e surpreendente hoje, de modo que penso: "Nossa, era sobre isso que o Wallace falava!". A maneira como experimento a vida hoje é diferente graças também a você.

A maior e mais importante expressão de gratidão: Obrigado Mãe, Pai, Carol e Flora, por tudo. Por me ajudarem quando eu precisava estudar, por aturarem meu mau humor, por todo o suporte que nos damos com nossas dificuldades, por todos os conselhos. Me perdoem a distância e a falta de atenção. Estamos num momento tão bom, e quero que continue assim, mesmo com eventuais distâncias

físicas. Obrigado por todo o sacrifício que fizeram ao longo da vida e que só hoje, já um pouco mais maduro, consigo começar a perceber, e é impressionante. Obrigado por serem a minha família, obrigado por terem me trazido à existência e à vida que tenho hoje. Isso inclui a Carol e a Flora, eu sinceramente acredito que seria uma pessoa muito mais burra se eu não tivesse as irmãs que tenho. Eu amo vocês!

Obrigado ao povo brasileiro que, através do CNPq, financiou o meu estudo durante esses dois anos.

“Diante da vastidão do tempo e da imensidão do universo, é um imenso prazer para mim dividir um planeta e uma época com vocês!”



*Dedico esse trabalho às queridas e aos queridos do lado de lá:*

*Tia Maria Augusta, que fazia um pavê delicioso;*

*Tio Aldo, que gostava de Matemática;*

*Dona Alzira, Matriarca Inigualável.*

*E ao companheiro Luiz Augusto Cabral de Moraes:*

*AQUELE QUE GOSTA DO QUE FAZ VAI MAIS LONGE.*



# Conteúdo

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Relatividade Especial</b>                      | <b>1</b>  |
| 1.1      | Transformações de Lorentz . . . . .               | 1         |
| 1.1.1    | Propriedades das Transformações . . . . .         | 4         |
| 1.2      | O Grupo de Lorentz . . . . .                      | 6         |
| 1.3      | Cinemática Relativística . . . . .                | 9         |
| 1.4      | O Elemento de Volume . . . . .                    | 10        |
| <b>2</b> | <b>Mecânica Quântica Relativística</b>            | <b>11</b> |
| 2.1      | Espinores . . . . .                               | 11        |
| 2.2      | Férmions de Dirac . . . . .                       | 13        |
| 2.2.1    | A Equação de Dirac . . . . .                      | 14        |
| 2.2.2    | Invariância Relativística da Equação . . . . .    | 15        |
| 2.2.3    | Propriedades das Matrizes $\gamma^\mu$ . . . . .  | 16        |
| 2.3      | Férmions de Weyl . . . . .                        | 18        |
| 2.3.1    | A Representação de Weyl . . . . .                 | 18        |
| 2.3.2    | A Equação de Weyl . . . . .                       | 22        |
| 2.4      | Soluções das Equações de Dirac . . . . .          | 22        |
| 2.5      | Helicidade e Quiralidade . . . . .                | 24        |
| <b>3</b> | <b>Oscilação de Neutrinos</b>                     | <b>29</b> |
| 3.1      | O Contexto do Modelo Padrão . . . . .             | 29        |
| 3.2      | Neutrinos Solares . . . . .                       | 31        |
| 3.2.1    | Os Experimentos Sno e Kamiokande . . . . .        | 32        |
| 3.3      | Descrição da Oscilação de Neutrinos . . . . .     | 34        |
| 3.3.1    | Caso Geral . . . . .                              | 36        |
| 3.3.2    | Observações Sobre os Resultados . . . . .         | 38        |
| 3.3.3    | Generalidades sobre a Matriz de Mistura . . . . . | 40        |
| 3.3.4    | Caso Particular de Dois Sabores . . . . .         | 41        |
| 3.3.5    | O Experimento KamLAND . . . . .                   | 43        |
| 3.4      | Neutrinos Atmosféricos . . . . .                  | 43        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>4</b> | <b>O Neutrino de Majorana</b>                  | <b>49</b> |
| 4.1      | A Massa de Dirac . . . . .                     | 49        |
| 4.2      | A Representação de Majorana . . . . .          | 53        |
| 4.3      | A Massa de Majorana . . . . .                  | 55        |
| 4.3.1    | As Fases de Majorana . . . . .                 | 56        |
| 4.4      | O Mecanismo Seesaw . . . . .                   | 57        |
| 4.5      | Medidas Diretas da Massa do Neutrino . . . . . | 60        |
| <b>5</b> | <b>Conclusão e Perspectivas</b>                | <b>65</b> |
| 5.1      | Experimentos Atuais e Futuros . . . . .        | 66        |
| 5.1.1    | O Experimento DUNE . . . . .                   | 66        |
|          | <b>Bibliografia</b>                            | <b>69</b> |

# Capítulo 1

## Relatividade Especial

 PRIMEIRO capítulo será dedicado ao estudo inicial das noções teóricas da Relatividade Especial que serão a base de desenvolvimentos posteriores. Inicia-se com as simetrias relativísticas, formuladas a partir das transformações lineares que relacionam quadrivetores observados em diferentes referenciais inerciais, que leva à teoria do grupo de Lorentz.

Sendo essas simetrias contínuas, podem ser sintetizadas nas chamadas álgebras de Lie, e isso nos permite obter representações de diferentes dimensões desse grupo. O interesse maior será nas representações de spin  $\frac{1}{2}$ , com elementos de duas componentes, que chamam-se de 2-espinores, que possuem a partir de primeiros princípios um número quântico semi-inteiro relacionados a rotações no espaço em que são gerados. Assim, quando diz-se que o spin é o momento angular intrínseco de uma partícula, a referência é ao fato de que a partir das propriedades fundamentais do espaço-tempo, surpreendentemente consegue-se extrair uma grandeza física que guarda propriedades de simetria equivalentes à do momento angular clássico, que no entanto não estão ligadas tão diretamente às rotações no espaço tridimensional.

### 1.1 Transformações de Lorentz

O estudo das simetrias das partículas em regime relativístico pode ter como um de seus pontos de partida o grupo de Lorentz, que contém todas as transformações do espaço-tempo de Minkowski – o arcabouço teórico da pletora de fenômenos físicos onde a gravidade pode ser ignorada. As leis cinemáticas da relatividade especial, a eletrodinâmica clássica de Maxwell e a teoria dos férmions de Dirac são todas teorias invariantes sob transformações de Lorentz. Assim, o grupo de Lorentz expressa simetrias fundamentais de muitas das leis da Natureza.

O chamado espaço-tempo de Minkowski surge naturalmente como consequência

dos postulados da relatividade especial de Einstein [1], que em linguagem moderna são:

1. *As leis físicas são as mesmas em todos os referenciais inerciais.*
2. *O módulo da velocidade da luz no vácuo, denotado pela letra  $c$ , é o mesmo em todas as direções e em todos os referenciais inerciais, sendo independente dos movimentos da fonte luminosa.*

Esses enunciados aparentemente simples tem consequências profundas, como veremos. Considere dois sistemas de referência  $S$  e  $S'$  com movimento retilíneo relativo de velocidade  $v$  na direção  $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}'$ . Se um evento luminoso é percebido nos dois referenciais, do postulado (2) decorre que a propagação da frente de onda luminosa em  $S$  e  $S'$  se faz em intervalos relativisticamente invariantes, iguais nos dois referenciais. Isto é,

$$c = \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = \frac{\sqrt{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}}{dt} = c' = \frac{\sqrt{d\mathbf{x}' \cdot d\mathbf{x}'}}{dt'}, \quad (1.1)$$

onde  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) = x^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + x^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + x^3 \hat{\mathbf{e}}_3$  denota o vetor posição e  $d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (d\mathbf{x})^2$  a norma quadrada euclideana. Assim, podemos convenientemente construir a relação

$$\boxed{(cdt)^2 - (d\mathbf{x})^2 = (cdt')^2 - (d\mathbf{x}')^2}. \quad (1.2)$$

Esse é o chamado intervalo relativisticamente invariante. A igualdade se anula nos dois referenciais quando o intervalo se refere à propagação da luz, mas em geral podem tomar valores maiores ou menores que zero, caso se refiram a outros tipos de evento. Para ver isso, antes introduz-se dois conceitos. O primeiro é a notação *covariante*, onde define-se o quadrivetor posição *contravariante* como:

$$x^\mu = (ct; \mathbf{x}) = (x^0; \mathbf{x}) = (x^0; x^1, x^2, x^3), \quad (1.3)$$

onde, ao associar a componente temporal  $x^0$  ao vetor euclideano  $\mathbf{x}$ , compomos um *quadrivetor*  $x^\mu$ . Com essa notação, o intervalo invariante se escreve simplesmente como

$$dx^\mu dx_\mu = (dx^0)^2 - (d\mathbf{x})^2 \quad (1.4)$$

e de maneira mais geral, o produto escalar invariante para um vetor  $a^\mu$  qualquer como  $a^\mu a_\mu$ . O vetor  $a_\mu = (a^0; -\mathbf{a})$  é chamado *covariante* e se obtém trocando o sinal das componentes espaciais do quadrivetor covariante original. Essa troca é feita de maneira conveniente introduzindo o *tensor da métrica de Minkowski*

$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ , que é finalmente a assinatura de que está se trabalhando no espaço-tempo da relatividade restrita:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Fazemos então  $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$  e  $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$  e portanto  $a_\mu a^\mu = a^\mu a_\mu = g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu$  e:

$$\boxed{g^{\mu\tau} g_{\tau\nu} = \delta^\mu_\nu}, \quad (1.6)$$

revelando simplesmente que o produto matricial de duas métricas é a matriz identidade.

O segundo conceito são as *transformações de Lorentz*, que decorrem de maneira direta dos postulados (1) e (2). Mais especificamente, as transformações procuradas devem garantir que:

1. um movimento retilíneo e uniforme em relação a  $S$  assim seja em  $S'$ ,
2. para  $v = 0$  a transformação se reduza à identidade
3. sejam lineares.

Assim,

$$\boxed{\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1), \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0), \\ x'^2 &= x^2, \\ x'^3 &= x^3, \end{aligned}} \quad (1.7)$$

são as transformações procuradas. Aqui,  $\beta = v/c$  e  $\gamma = 1/(1 - \beta^2)^{1/2}$ . Essas relações traduzem para o observador no referencial  $S'$  as coordenadas espaço-temporais de um quadri-vector medido no referencial  $S$ . De posse das transformações, é possível montar a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

e a transformação de Lorentz se escreve de maneira compacta como:

$$\boxed{x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu}, \quad (1.9)$$

onde  $\Lambda$  indica a matriz das transformações de Lorentz. A escolha específica da direção  $x^1$ , assim como o sinal dos termos  $\gamma\beta$  não implicará restrições de generalidade posteriores, como teremos a oportunidade de verificar.

### 1.1.1 Propriedades das Transformações

Uma série de propriedades decorrem das relações (1.6) e (1.9), e mostraremos algumas delas aqui.

#### Propriedade 1

*Pseudo-ortogonalidade:*

$$\Lambda^\mu{}_\tau \Lambda^\nu{}_\sigma g_{\mu\nu} = g_{\tau\sigma} \quad (1.10)$$

Observando a condição básica de que um escalar é o mesmo em todos os referenciais,

$$a_\tau a^\tau = a'_\mu a'^\mu, \quad (1.11)$$

teremos, com a escolha certa para a notação dos índices:

$$\begin{aligned} a'^\mu a'_\mu &= a'^\mu g_{\mu\nu} a'^\nu = \Lambda^\mu{}_\tau a^\tau g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma a^\sigma = \\ &= (\Lambda^\mu{}_\tau g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma) a^\tau a^\sigma = a^\tau a_\tau = g_{\tau\sigma} a^\tau a^\sigma. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Essa é a relação de pseudo-ortogonalidade do espaço de Minkowski, que se reduz à ortogonalidade euclideana se a métrica for a identidade.

#### Propriedade 2

*Existência da inversa:*

$$x'^\nu \longrightarrow x^\nu = \Lambda_\mu{}^\nu x'^\mu, \quad (1.13)$$

onde

$$\Lambda_\mu{}^\nu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \quad (1.14)$$

satisfaz a seguinte identidade:

$$\Lambda_\mu{}^\nu \Lambda^\mu{}_\lambda = \delta^\nu{}_\lambda. \quad (1.15)$$

De (1.6) e (1.10) também teremos:

$$g^{\alpha\tau} g_{\tau\sigma} = \delta^\alpha_\sigma = g^{\alpha\tau} g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\tau \Lambda^\nu_\sigma. \quad (1.16)$$

E a contração de índices leva à (1.15), que define a transformação inversa  $\Lambda^{-1}$ , isto é, a tradução para o observador no referencial  $S'$  das coordenadas espaço-temporais de um quadri vetor no referencial  $S$ , uma vez que a aplicação de uma transformação de Lorentz seguida de sua inversa é a identidade (identificada como  $\delta^\nu_\lambda$ ).

Por sua vez, os vetores covariantes (índice inferior) se transformam como

$$\boxed{x_\mu \longrightarrow x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu}, \quad (1.17)$$

fato que decorre diretamente da definição do vetor covariante e das relações (1.6), (1.10) e (1.15). Note que, apesar de em (1.13) e em (1.17) termos a mesma matriz  $\Lambda_\mu^\nu$  as transformações tem significados físicos diferentes; em especial (1.17) não se refere a uma transformação inversa, ainda especificando transformações  $S \longrightarrow S'$ , e do ponto de vista tensorial, as contrações são feitas com índices diferentes de  $\Lambda$ .

### Propriedade 3

*Transformação das derivadas:*

$$\partial'_\mu = \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu \quad (1.18)$$

*De maneira análoga mostra-se que*

$$\partial'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \partial^\nu \quad (1.19)$$

Nota-se que de acordo com as (1.9) e (1.13) têm-se

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu_\nu \quad \text{e} \quad \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu^\nu, \quad (1.20)$$

de modo que para uma função escalar qualquer  $F(x)$ , vista no referencial  $S'$  como  $F'(x')$  têm-se:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} F'(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} F(x) = \Lambda_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} F(x) \quad (1.21)$$

Portanto, de acordo com (1.17) o operador gradiente  $\frac{\partial}{\partial x^\nu}$  deve se transformar como um quadri vetor covariante. Adota-se então um índice inferior:  $\frac{\partial}{\partial x^\nu} \longrightarrow \partial_\nu$  e a transformação se escreverá como em (1.18) e (1.19). Como consequência:

$$\partial_\mu F \equiv \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} F; \nabla F \right) \quad \text{e} \quad \partial_\mu \partial^\mu F \equiv \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} F - \nabla^2 F \right), \quad (1.22)$$

Através da métrica  $g^{\mu\nu}$  obtém-se  $\partial^\mu F$  trocando o sinal da componente espacial de  $\partial_\mu F$ .

## 1.2 O Grupo de Lorentz

O grupo de todas as transformações (1.7) é chamado de grupo de Lorentz, sendo aquelas a chamada representação vetorial. Será visto que a partir delas, pode-se definir uma relação de comutação entre os geradores da transformação do grupo, que permitirá definir outras representações.

Repare que a expressão  $\gamma = 1/(1 - \beta^2)^{1/2}$  esconde uma relação tipicamente hiperbólica. Com efeito, se definirmos

$$\beta \equiv \tanh \vartheta \quad (1.23)$$

obtém-se facilmente, com auxílio das identidades hiperbólicas já conhecidas, as parametrizações

$$\gamma = \cosh \vartheta \quad \text{e} \quad \gamma\beta = \sinh \vartheta. \quad (1.24)$$

Desse modo, a matriz da transformação de Lorentz  $\Lambda$  acima pode ser reescrita como:

$$\Lambda(\vartheta_1) = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta_1 & -\sinh \vartheta_1 & 0 & 0 \\ -\sinh \vartheta_1 & \cosh \vartheta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

O índice 1 indica que a velocidade está na direção  $x^1$ . Desse modo pode-se enxergar a passagem para um referencial  $S'$  em movimento como uma rotação em torno do eixo  $(t, x) = (x^0, x^1)$  por um ângulo puramente imaginário  $i\vartheta$ . Essa é uma transformação *passiva*, onde muda-se o sistema de coordenadas. Se quisermos descrever uma transformação *ativa* deve-se eliminar o sinal negativo dos senos. A essa rotação ativa peculiar, que dá-se o nome de *boost* no eixo  $x$ , juntam-se as rotações euclidianas usuais nos eixos espaciais. Por exemplo, uma rotação ativa de  $\phi$  em torno de  $x^3$ , que mistura as componentes  $(x^1, x^2)$  do setor espacial, se escreve:

$$\Lambda(\phi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_3 & -\sin \phi_3 & 0 \\ 0 & \sin \phi_3 & \cos \phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

e um *boost* no eixo  $z$  (aqui chamado de  $x^3$ ) como:

$$\Lambda(\vartheta_3) = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta_3 & 0 & 0 & \sinh \vartheta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \vartheta_3 & 0 & 0 & \cosh \vartheta_3 \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

De maneira geral, ao estudar representações para o grupo de Lorentz, faz-se uma transformação infinitesimal

$$\lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \frac{i}{2}\omega^\mu{}_\nu + \dots \quad (1.28)$$

e o termo  $\omega^\mu{}_\nu$  é a contração do parâmetro da transformação e seu gerador, na forma:

$$\omega^\mu{}_\nu = (\omega^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu. \quad (1.29)$$

É direto ver que  $\omega^{\mu\nu} = \omega^\mu{}_\lambda g^{\lambda\nu}$  e  $\omega_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} \omega^\lambda{}_\nu$  são totalmente antissimétricos. De fato, a partir da (1.10):

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \left( \delta^\mu{}_\rho + \frac{i}{2}\omega^\mu{}_\rho + \dots \right) \left( \delta^\nu{}_\sigma + \frac{i}{2}\omega^\nu{}_\sigma + \dots \right) \quad (1.30)$$

$$= g_{\rho\sigma} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma} + \frac{i}{2}\omega_{\sigma\rho} + \dots \quad (1.31)$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho}}. \quad (1.32)$$

Na aproximação em primeira ordem dos parâmetros envolvido, a matriz  $\omega^\mu{}_\nu$  será:

$$\omega^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 \\ \vartheta_1 & 0 & -\phi^3 & \phi^2 \\ \vartheta_2 & \phi^3 & 0 & -\phi^1 \\ \vartheta_3 & -\phi^2 & \phi^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Uma matriz  $4 \times 4$  totalmente antissimétrica possui seis parâmetros independentes, e portanto seis geradores. Três estão relacionados aos *boosts* e três às rotações. Define-se os geradores de boosts como:

$$K^i \equiv M^{0i}, \quad (1.34)$$

e seus parâmetros serão

$$\vartheta^i = \omega^{0i}. \quad (1.35)$$

Para as rotações, têm-se:

$$J^i \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} M^{jk}, \quad (1.36)$$

e seus parâmetros também estão contraídos com o tensor de Levi-Civita:

$$\phi^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\omega^{jk}. \quad (1.37)$$

Os geradores das (1.26) e (1.27) do exemplo serão, respectivamente,

$$J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

e

$$K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

É possível mostrar que as relações de comutação para os geradores serão:

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk}J^k, \quad (1.40)$$

$$[J^i, K^j] = i\epsilon^{ijk}K^k \quad e \quad (1.41)$$

$$[K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk}J^k \quad (1.42)$$

Contrariamente às rotações, portanto, os *boosts* não formam separadamente uma álgebra de Lie, e portanto um grupo. Somente quando tomados juntos a álgebra se fecha, e o grupo que engloba todas as seis transformações é o grupo de Lorentz.

Ao compor  $N$  transformações infinitesimais idênticas e sucessivas, têm-se, com  $N\omega = \Omega$ :

$$\Lambda^\mu{}_\nu = (\lambda^\mu{}_\nu)^N = \left[ \delta^\mu{}_\nu + \left( \frac{i}{2N}\Omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma} \right)^\mu{}_\nu \right]^N \quad (1.43)$$

e essa transformação, ao tomarmos o limite  $N \rightarrow \infty$ , e ao lembrar da bem conhecida relação exponencial

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n, \quad (1.44)$$

será escrita como:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \left[ \exp \left( \frac{i}{2}M^{\rho\sigma}\Omega_{\rho\sigma} \right) \right]^\mu{}_\nu. \quad (1.45)$$

Observando as equações de (1.34) a (1.37) e lembrando que  $\epsilon^{ijk}\epsilon^{ilm} = \delta^{lj}\delta^{mk} - \delta^{lk}\delta^{jm}$  pode-se expressar as transformações (1.45) de maneira compacta como:

$$\mathbf{\Lambda} = e^{-i(\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\phi} - i\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\vartheta})}. \quad (1.46)$$

onde subentende-se a contração de índices na notação do produto escalar.

## 1.3 Cinemática Relativística

Será usado quando não houver a possibilidade de confusão,  $c = 1$  e  $\hbar = 1$ , além da notação mais simples  $p \cdot p$  para o produto invariante  $p^\mu p_\mu$ . De considerações puramente cinemáticas [31, 32] pode-se deduzir a bem conhecida relação de dispersão, obedecida por qualquer partícula sujeita às restrições impostas pelo espaço-tempo da relatividade:

$$\boxed{E^2 = p^2 + m^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{p^\mu p_\mu = m^2}. \quad (1.47)$$

Onde  $p^\mu$ , dito quadrimomento, será:

$$p^\mu = (E/c; \mathbf{p}) = (p^0; \mathbf{p}). \quad (1.48)$$

Além disso, a partir das transformações de Lorentz (1.7) pode-se definir tempo e velocidade próprios e o quadrimomento de uma partícula, respectivamente, como:

$$\tau = \frac{t}{\gamma}, \quad (1.49)$$

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (1.50)$$

$$p^\mu = mv^\mu. \quad (1.51)$$

Dessas definições decorre que:

$$v^\mu = (v^0; \mathbf{v}) = \gamma(c; \mathbf{v}) \quad (1.52)$$

$$\Rightarrow v^\mu v_\mu = c^2 = 1. \quad (1.53)$$

Uma vez que  $p^0 = E/c = \gamma mc$  pode-se fazer também  $\gamma = E/mc^2$ , ou de maneira mais simples ( $c = 1$ ):

$$\boxed{\gamma = \frac{E}{m}} \quad (1.54)$$

que é um modo viável de estimar o fator de Lorentz no referencial do laboratório para uma partícula num experimento qualquer.

Um invariante de especial interesse será o da forma  $p^\mu x_\mu$ , correspondendo à fase de uma onda. No referencial de repouso da partícula, ele se escreverá:

$$p' \cdot x' = m\tau \quad (1.55)$$

Se considerarmos que essa partícula se propaga no eixo  $z$  no referencial do laboratório, têm-se, de acordo com (1.13):

$$p \cdot x = Et - pz \quad (1.56)$$

Tomando nota do caso particular em que  $E \gg m$  na (1.47) escreve-se:

$$p \simeq E - \frac{m^2}{2E} \quad (1.57)$$

$$\Rightarrow p \cdot x = E(t - z) + \frac{m^2 z}{2E} \quad (1.58)$$

## 1.4 O Elemento de Volume

O tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita de posto 4 é definido da seguinte maneira:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \begin{cases} +1, & \text{se } \mu\nu\rho\sigma \text{ for permutação par dos índices } 0123; \\ -1, & \text{se } \mu\nu\rho\sigma \text{ for permutação ímpar dos índices } 0123; \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases} \quad (1.59)$$

Esse tensor auxilia na compreensão da invariância de Lorentz quando tratando de integrações quadridimensionais. Define-se:

$$A^\mu = (cdt; 0, 0, 0) \quad (1.60)$$

$$B^\mu = (0; x, 0, 0) \quad (1.61)$$

$$C^\mu = (0; 0, y, 0) \quad (1.62)$$

$$D^\mu = (0; 0, 0, z) \quad (1.63)$$

Então o elemento de volume quadridimensional

$$d^4x \equiv \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^\mu B^\nu C^\rho D^\sigma \quad (1.64)$$

é um invariante de Lorentz, uma vez que não contém índices livres. Decorre então que objetos da forma  $\int d^4x F(x)$ , onde  $F(x)$  é uma função escalar, também serão invariantes, como é o caso da integral de ação.

## Capítulo 2

# Mecânica Quântica Relativística

 MECÂNICA quântica relativística é uma formulação da teoria quântica aplicável à partículas que se propagam a qualquer velocidade, incluindo aquelas próximas, ou iguais à velocidade da luz. O ponto chave dessa estrutura é a equação de Dirac, uma equação diferencial matricial para férmions, partículas de spins  $\frac{1}{2}$ , formulada de maneira totalmente covariante. Ela descreve naturalmente a existência de antimatéria, do spin do elétron, o momento magnético, a estrutura fina e a dinâmica de partículas carregadas na presença de campos elétricos e magnéticos. O neutrino pode ser descrito por versões levemente modificadas dessa equação.

### 2.1 Espinores

Uma transformação de Lorentz mais geral pode ser escrita como em (1.46). Essa transformação pode ser aplicada a escalares, vetores ou tensores ao tomarmos uma representação apropriada para os geradores  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{K}$ , sujeitos às importantes relações de comutação. A seção 1.2 contém exemplos de como representar a transformação para o caso dos quadrivetores. Consideremos agora a seguinte combinação de geradores:

$$\mathbf{J}_{\pm} = \frac{1}{2} (\mathbf{J} \pm i\mathbf{K}) . \quad (2.1)$$

É possível mostrar que

$$[J_{\pm}^i, J_{\pm}^j] = i\epsilon^{ijk} J_{\pm}^k , \quad (2.2)$$

e também que:

$$[\mathbf{J}_{\pm}, \mathbf{J}_{\mp}] = 0. \quad (2.3)$$

Já é sabido que essa álgebra é satisfeita pelas bem conhecidas matrizes de Pauli, do grupo  $SU(2)$ . Representações de  $SU(2)$  são familiares pelos grupos de

rotação. Cada representação é denotada pelo spin, que pode ter valores inteiros ou semi-inteiros.

Desse modo, os geradores  $\mathbf{J}_{\pm}$  agora tem cada um sua álgebra de Lie portanto devem gerar *boosts* e rotações para representações bidimensionais distintas (porém de alguma forma relacionadas) do grupo de Lorentz. Dizemos que o grupo de Lorentz  $SO(1,3)$  é localmente isomórfico a  $SU(2) \otimes SU(2)$ .

As matrizes de Pauli se escrevem

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

As representações do grupo serão designadas por  $(j_+, j_-)$ , onde  $j_{\pm} = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ . A representação mais simples é a  $(0,0)$ , corresponde a um campo escalar. As representações não triviais mais simples são as  $(\frac{1}{2}, 0)$  e  $(0, \frac{1}{2})$ , que correspondem aos espinores de Weyl esquerdos e direitos, respectivamente.

Considerando a possibilidade de um dos (2.1) nulos, concluímos:

$$\mathbf{J}_{\pm} = 0 \Rightarrow \mathbf{K} = \pm i\mathbf{J} \quad (2.5)$$

Isso nos indica, junto com o fato de que  $\mathbf{J}_{\pm}$  é representado pelas  $\boldsymbol{\sigma}/2$ , que poderemos escrever de uma vez:

$$\mathbf{J} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \quad \text{e} \quad \mathbf{K} = \pm \frac{i\boldsymbol{\sigma}}{2}. \quad (2.6)$$

Portanto, para os mesmos parâmetros, essas representações se distinguem pelo sentido da velocidade com que se deslocam os *boosts*. Assim, denominaremos as representações cujo conjunto de transformações são os  $\mathbf{J}$  e os  $\mathbf{K}$ . Se o gerador  $\mathbf{K}$  se escreve  $+i\boldsymbol{\sigma}/2$  ( $-i\boldsymbol{\sigma}/2$ ), teremos 2-espinores esquerdos (direitos), e sua notação em termos de uma matriz coluna de duas componentes será  $\xi$  ( $\eta$ ). As transformações gerais de Lorentz aplicadas aos 2-espinores serão, ignorando as dependências espaço-temporais, e portanto só considerando os graus de liberdade espinoriais:

$$D(\Lambda)\xi = D_L(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\vartheta})\xi = e^{-\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \cdot (i\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\vartheta})}\xi \quad (2.7)$$

e

$$D(\Lambda)\eta = D_R(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\vartheta})\eta = e^{-\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \cdot (i\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\vartheta})}\eta \quad (2.8)$$

Por exemplo, um boost na direção  $z$  positiva será:

$$D_L(\vartheta_3)\xi = e^{-\frac{1}{2}\sigma^3\vartheta_3}\xi \quad \text{ou} \quad D_R(\vartheta_3)\eta = e^{+\frac{1}{2}\sigma^3\vartheta_3}\eta. \quad (2.9)$$

Para ver de maneira cinematicamente mais explícita, façamos os 2-espinores  $\xi$  e  $\eta$  com entradas complexas quaisquer  $(a, b)$  e  $(c, d)$  e a transformações como:

$$e^{\pm \frac{1}{2} \sigma^3 \vartheta_3} = \mathbb{1} \pm \frac{\sigma^3 \vartheta_3}{2} + \frac{1}{2!} \left( \frac{\sigma^3 \vartheta_3}{2} \right)^2 \pm \dots \quad (2.10)$$

$$= \mathbb{1} \cosh \left( \frac{\vartheta_3}{2} \right) \pm \sigma^3 \sinh \left( \frac{\vartheta_3}{2} \right) \quad (2.11)$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(\vartheta_3/2) \pm \sinh(\vartheta_3/2) & 0 \\ 0 & \cosh(\vartheta_3/2) \mp \sinh(\vartheta_3/2) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Se é verdade que:

$$e^{\pm u/2} = \sqrt{\cosh u \pm \sinh u} \quad (2.13)$$

$$\cosh \vartheta_3 = \gamma = E/m \quad (2.14)$$

$$\sinh \vartheta_3 = \beta\gamma = p/m \quad (2.15)$$

então o  $z$ -boost será facilmente visto como

$$D_{L,R}(\vartheta_3) = \begin{pmatrix} \sqrt{E \mp p} & 0 \\ 0 & \sqrt{E \pm p} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

onde o sinal superior (inferior) se refere à transformação do espinor esquerdo (direito). Fazendo essas transformações atuarem nos espinores, transformando-os de objetos do referencial  $S'$  para o referencial  $S$ , escreveremos:

$$\xi' = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longrightarrow \xi = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} a\sqrt{E-p} \\ b\sqrt{E+p} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

e

$$\eta' = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \longrightarrow \eta = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} c\sqrt{E+p} \\ d\sqrt{E-p} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

mostrando também que  $\sqrt{m}$  pode ser um fator de normalização conveniente a posteriori. Para uma partícula se propagando no eixo  $z$  negativo, os sinais  $\pm$  dentro da raiz são trocados.

## 2.2 Férmions de Dirac

O físico inglês P. A. M. Dirac desenvolveu em 1928 a equação que leva seu nome [33]. Essa equação de onda relativística descreve de maneira geral todas as partículas conhecidas de spin  $\frac{1}{2}$ , os férmions, sendo a primeira a ser formulada de maneira covariante. As funções de onda da teoria de Dirac são elementos de quatro componentes, chamados 4-espinores, que podem ser compostos a partir de duas representações de spin  $\frac{1}{2}$  do grupo de Lorentz.

### 2.2.1 A Equação de Dirac

Dirac, ao investigar possíveis soluções para a função de onda do elétron sujeito a interações eletromagnéticas, um problema intrinsecamente relativístico, procurou uma equação de onda *linear* em todas as derivadas. Uma forma de propor isso é:

$$(\alpha^0 p_0 + \alpha^1 p_1 + \alpha^2 p_2 + \alpha^3 p_3 + m)\psi = (\alpha^\mu p_\mu - m)\psi = 0. \quad (2.19)$$

Onde o operador  $(\alpha^\mu p_\mu - m)$  satisfaz, junto com um outro operador  $(\beta^\nu p_\nu + m)$  a (1.47):

$$(\alpha^\mu p_\mu - m)(\beta^\nu p_\nu + m) = p^\mu p_\mu - m^2, \quad (2.20)$$

sendo os coeficientes  $\alpha^\mu$  e  $\beta^\nu$  a serem determinados para que a (1.47) seja verdadeira. Desenvolvendo o lado esquerdo da equação e comparando os coeficientes dos produtos  $p^\mu p_\nu$  com o lado direito, observando atentamente as contrações de índices iguais, chegamos a:

$$\alpha^\mu \beta^\nu + \alpha^\nu \beta^\mu = 0, (\mu \neq \nu) \quad (2.21)$$

$$\alpha^\mu \beta^\nu + \alpha^\nu \beta^\mu = -1, (\mu = \nu = 1, 2, 3) \quad (2.22)$$

$$\alpha^\mu \beta^\nu + \alpha^\nu \beta^\mu = 1, (\mu = \nu = 0) \quad (2.23)$$

$$\alpha^\mu = \beta^\mu \quad (2.24)$$

Essas relações podem ser satisfeitas por matrizes de dimensão específica. Na notação usual, fazemos  $\alpha^\mu \rightarrow \gamma^\mu$  e resumimos essas relações na chamada *álgebra de Clifford*:

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}} \quad (2.25)$$

onde as chaves indicam a anticomutação das matrizes  $\gamma^\mu$ . A equação de Dirac se escreve, com a prescrição usual  $p_\mu \rightarrow i\partial_\mu$  da seguinte forma:

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0} \quad (2.26)$$

Onde, ao comparar com a equação de autovalores  $H\psi = E\psi$  e observar a propriedade (2.41), podemos estabelecer a hamiltoniana de Dirac como:

$$H = \gamma^0(\gamma^k p_k - m) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.27)$$

Para que a equação (2.26) seja satisfeita,  $\psi$  deve ser portanto uma matriz coluna de  $d$  componentes, onde  $d$  é a dimensão da representação das matrizes  $\gamma^\mu$  em questão. Investigaremos as propriedades das matrizes  $\gamma^\mu$  sem nos atermos a uma determinada representação. Isso nos permitirá obter relações muito gerais

que nos auxiliarão no próximo capítulo, onde trabalharemos com representações específicas. Estaremos mais interessados em representações de dimensão  $d = 4$ , e veremos que as propriedades de transformação de  $\psi$  guardam relação com as das representações  $\frac{1}{2}$  do grupo de Lorentz, donde se justifica o nome 4-espinor para o objeto  $\psi$ .

### 2.2.2 Invariância Relativística da Equação

A obtenção da equação (2.26) a partir da relação (1.47) não garante a priori que ela seja relativisticamente covariante. Para que isso seja verdade deve-se estudar a maneira pela qual a equação se transforma em diferentes referenciais. Se a equação deve ser válida em qualquer referencial inercial, devem existir transformações  $D(\Lambda)$  que levam de um referencial a outra para essa representação, associadas às transformações  $\Lambda$  da representação quadrivetorial.

Para ver de que modo a equação de Dirac se comporta sobre transformações de Lorentz, primeiro impomos que a equação é a mesma nos dois referenciais:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi' = 0. \quad (2.28)$$

Supomos que existe uma matriz  $D(\Lambda)$  que ao atuar em  $\psi$  cumpre esse papel. Cada transformação  $\Lambda$  do espaço-tempo corresponde a uma transformação  $D(\Lambda)$  no espaço de Dirac. Uma vez que  $\partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu$ , teremos, ao aplicar essas relações e multiplicar à esquerda por  $D^{-1}(\Lambda)$ :

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi' = D^{-1}(\Lambda)(i\gamma^\mu \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu - m)D(\Lambda)\psi. \quad (2.29)$$

Assim, comparando com (2.28):

$$D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu \Lambda_\mu{}^\nu D(\Lambda) = \gamma^\nu. \quad (2.30)$$

Sabendo que  $\Lambda_\mu{}^\nu$  é a inversa de  $\Lambda^\mu{}_\nu$ , obtemos com a ajuda de (1.15) :

$$D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu. \quad (2.31)$$

Nesse ponto, vamos fazer a transformação  $D(\Lambda)$ , que atua no espaço das  $\gamma$ , e  $\Lambda^\mu{}_\nu$ , que atua no espaço dos quadrivetores, ambas infinitesimais. As duas transformações são parametrizadas pelo mesmo  $\omega$ , no entanto, chamaremos os geradores da representação 4-espinorial de  $S^{\rho\sigma}$ . Assim:

$$D(\Lambda) = 1 + \frac{1}{2}S^{\rho\sigma}\omega_{\rho\sigma}, \quad (2.32)$$

$$D^{-1}(\Lambda) = 1 - \frac{1}{2}S^{\rho\sigma}\omega_{\rho\sigma}, \quad (2.33)$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu. \quad (2.34)$$

A (2.33) garante que a composição  $D^{-1}(\Lambda)D(\Lambda)$  será a identidade ignorando termos de segunda ordem ou superiores. Decorrerá então de (2.31) e das (2.32), (2.33) e (2.34) que:

$$\frac{1}{2} [S^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] \omega_{\rho\sigma} = \omega^\mu{}_\nu \gamma^\nu \quad (2.35)$$

O lado direito da equação, ao lembrar da antissimetria de  $\omega$  e manipulando os índices contraídos, pode ser convenientemente escrito como

$$\omega^\mu{}_\nu \gamma^\nu = g^{\mu\rho} \omega_{\rho\sigma} \gamma^\sigma = \frac{1}{2} (g^{\mu\rho} \gamma^\sigma - g^{\mu\sigma} \gamma^\rho) \omega_{\rho\sigma}, \quad (2.36)$$

e assim teremos:

$$[S^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] = g^{\mu\rho} \gamma^\sigma - g^{\mu\sigma} \gamma^\rho. \quad (2.37)$$

Os índices  $\rho\sigma$  de  $S$  foram escolhidos de antemão em vista de um resultado facilmente verificável a partir da álgebra de Clifford (2.25), a saber:

$$S^{\rho\sigma} \equiv \left[ \frac{\gamma^\rho}{2}, \frac{\gamma^\sigma}{2} \right] \quad (2.38)$$

com efeito satisfazem a (2.37), sendo assim os geradores do grupo de Lorentz para a representação em questão. Novamente compondo  $N$  transformações infinitesimais e tomando o limite  $N \rightarrow \infty$  chegaremos finalmente a:

$$D(\Lambda) = \exp \left( \frac{1}{2} S^{\rho\sigma} \Omega_{\rho\sigma} \right) \quad (2.39)$$

que são as transformações de Lorentz gerais para 4-espinores de Dirac. De maneira análoga aos quadrivetores os  $S^{0i}$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ) geram boosts para os espinores na direção  $i$  e os  $S^{ij}$  são os geradores de rotação.

### 2.2.3 Propriedades das Matrizes $\gamma^\mu$

De posse da métrica (1.5) e da álgebra de Clifford (2.25) podemos facilmente estabelecer algumas relações básicas das matrizes  $\gamma$ :

#### Propriedade 1

$\gamma^0$  é hermiteana e unitária e  $\gamma^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) são anti-hermiteanas e anti-unitárias. Podemos sintetizar essas propriedades na forma:

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (2.40)$$

De fato, note preliminarmente que de acordo com (2.25):

$$(\gamma^0)^2 = \mathbb{1} \quad \text{e} \quad (\gamma^k)^2 = -\mathbb{1}, \quad (2.41)$$

em que deve ser claro que  $\mathbb{1}$  é tratado como a identidade  $4 \times 4$ . Assim, uma vez que a (2.27) deve ser hermiteana, devemos impor

$$\gamma^0 \gamma^k = (\gamma^0 \gamma^k)^\dagger = (\gamma^k)^\dagger (\gamma^0)^\dagger \quad \text{e} \quad \gamma^0 = (\gamma^0)^\dagger \quad (2.42)$$

Para que a álgebra de Clifford continue válida é necessário, portanto, que as  $\gamma^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) obedeam  $(\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k$ . A mesma restrição nos leva à (2.40).

### Propriedade 2

*Se  $\gamma^\mu$  é uma representação que satisfaz (2.25) e (2.40) e  $U$  é uma matriz unitária de mesma dimensão dessa representação, então a transformação unitária dada por*

$$\tilde{\gamma}^\mu = U \gamma^\mu U^\dagger \quad (2.43)$$

*levará a uma representação  $\tilde{\gamma}^\mu$  que também satisfaz (2.25) e (2.40).*

A demonstração é direta utilizando a (2.25).

### Propriedade 3

*Se  $\gamma^\mu$  e  $\tilde{\gamma}^\mu$  são duas representações que satisfazem (2.25) e (2.40), então existe uma matriz unitária  $U$  tal que a transformação (2.43) leva de uma representação à outra.*

A demonstração dessa propriedade de modo geral é não-trivial [2] e pode ser achada em [3]. Algumas outras matrizes serão de grande utilidade e as definiremos agora independente de representações:

### A Matriz Quiral

*É denotada por  $\gamma^5$  e se escreve:*

$$\gamma^5 \equiv \frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (2.44)$$

*Os projetores quirais esquerdos e direitos serão:*

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \quad e \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5). \quad (2.45)$$

É fácil verificar que:

$$(\gamma^5)^2 = \mathbb{1} \quad e \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5. \quad (2.46)$$

Além disso,

$$(P_L)^2 = (P_R)^2 = 1 \quad e \quad P_L P_R = P_R P_L = 0. \quad (2.47)$$

A transformação

$$P_R \psi = \psi_R \quad \text{ou} \quad P_L \psi = \psi_L, \quad (2.48)$$

nos dará a componente quiral esquerda ou direita de qualquer espinor, em qualquer representação. Na representação quiral, vista a seguir, essa operação é convenientemente simples, como o nome sugere.

## 2.3 Férmions de Weyl

Quando Dirac formulou sua equação – objeto de estudo da seção 2.2 – tinha em vista a descrição do elétron, um férmion com carga elétrica e massa. Um dos triunfos de sua teoria foi a previsão da existência das antipartículas, na época dele ainda não observadas. No ano seguinte à publicação de seu artigo, H. Weyl mostrou [4, 5] que para um férmion sem massa, uma equação mais simples seria suficiente, envolvendo somente duas componentes. Sua equação serviu então para descrever o neutrino, proposto por W. Pauli em 1930 [6, 7] a fim de manter a conservação de energia do decaimento  $\beta$ , pois da análise desse decaimento aparentemente essas partículas deveriam ter massa nula e spin  $\frac{1}{2}$  [11]. Hoje entende-se que a partícula de Dirac, que historicamente surgiu antes, pode ser composta a partir desses elementos mais simples.

### 2.3.1 A Representação de Weyl

Uma representação particular das matrizes  $\gamma$ , também chamada de representação quiral, é:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

onde

$$\sigma^\mu \equiv (\mathbb{1}; \sigma^k) \quad \text{e} \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (\mathbb{1}; -\sigma^k). \quad (2.50)$$

O índice  $k = 1, 2, 3$  corre sobre as dimensões espaciais. Mais explicitamente, para referência futura, em blocos  $2 \times 2$  ela será:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Em blocos  $4 \times 4$  escreveremos:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.52)$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Além disso, temos a matriz:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

A equação de Dirac se escreve nessa representação em blocos  $2 \times 2$ :

$$\begin{pmatrix} m & i\partial_0 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \\ i\partial_0 - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0. \quad (2.55)$$

De forma separada teremos:

$$\sigma^\mu \partial_\mu \eta = m \xi \quad \text{ou} \quad \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi = m \eta. \quad (2.56)$$

Podemos ainda definir:

$$\psi_L \equiv \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \psi_R \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

afim de manter a covariância manifesta da equação, escrevendo  $\psi = \psi_L + \psi_R$ , e as matrizes de Dirac serão em blocos  $2 \times 2$  na forma:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = m\psi_R \quad \text{e} \quad i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R = m\psi_L. \quad (2.58)$$

A (2.49) é a representação de Weyl e as (2.58) são a equação de Dirac nessa representação. Observe que nela a massa  $m$  é o parâmetro que acopla as duas equações. A notação  $(\xi, \eta)$  não é acidental, uma vez que as transformações de Lorentz para o bispinor nessa representação são compostas pelas transformações das representações irredutíveis esquerda  $\xi \in (\frac{1}{2}, 0)$  e direita  $\eta \in (0, \frac{1}{2})$  vistas no capítulo anterior. Com efeito, podemos rapidamente verificar que os geradores de *boosts* e rotações são

$$K^k = S^{0k} = \left[ \frac{\gamma^0}{2}, \frac{\gamma^k}{2} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

e

$$J^k = \epsilon_{ijk} S^{ij} = \epsilon_{ijk} \left[ \frac{\gamma^i}{2}, \frac{\gamma^j}{2} \right] = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Compondo as transformações (2.39), somos levados a:

$$D(\Lambda) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\sigma}{2} \cdot (\phi + i\vartheta)} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\sigma}{2} \cdot (\phi - i\vartheta)} \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

Onde, de fato, o bloco superior corresponde às transformações (2.7) para as representações irredutíveis  $(\frac{1}{2}, 0)$  e o bloco inferior às (2.8) para as representações irredutíveis  $(0, \frac{1}{2})$ , com os geradores dados pelas (2.1). Por ser diagonal vemos que a representação escolhida (2.49) é redutível.

Apesar da redutibilidade da representação, teremos a oportunidade de ver que a equação de movimento (2.58) que governa a evolução temporal de cada um dos espinores  $\xi$  e  $\eta$  não é separável em primeira ordem das derivadas. Ao observar a (2.58), vemos que o parâmetro que acopla as duas representações é a massa. Assim, uma partícula com massa é uma composição de duas representações específicas do grupo de Lorentz. Ainda que preparássemos uma partícula num estado puramente esquerdo ou direito, a massa, através da evolução temporal, trataria inevitavelmente de torná-la uma mistura das duas componentes.

Definimos ainda a transformação de paridade:

### A Matriz de Paridade

*É denotada por  $\mathcal{P}$  e definida pela propriedade:*

$$\mathcal{P}\psi_{L,R} = \psi_{R,L} \quad (2.62)$$

Das (2.57) decorre que na representação de Weyl:

$$\mathcal{P} = \gamma^0. \quad (2.63)$$

A próxima matriz é definida a partir da observação de que as matrizes  $-(\gamma^\mu)^\star$ , onde  $\star$  indica a conjugação complexa, também satisfazem a (2.25), e que na representação de Weyl a matriz  $\gamma^2$  é a única puramente complexa:

### A Matriz de Conjugação de Carga

É denotada por  $\mathcal{C}$  e definida pela propriedade:

$$\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C} \equiv -(\gamma^\mu)^T, \quad (2.64)$$

onde  $T$  indica transposição de matriz. Por inspeção, na representação de Weyl ela será escrita de maneira conveniente, a menos de uma fase complexa, como:

$$\mathcal{C} = -i\gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

onde

$$\epsilon \equiv i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

O espinor conjugado de carga será definido como:

$$\psi^c = \gamma^0\mathcal{C}\psi^\star = -\mathcal{C}(\bar{\psi})^T. \quad (2.67)$$

A matriz  $\mathcal{C}$  é hermiteana, unitária e totalmente antissimétrica, propriedades que podem ser concluídas a despeito de representações particulares, a partir das propriedades (2.40) e (2.64). Outras relações importantes são as do espinor conjugado de carga:

$$(\psi^c)^c = \psi \quad \text{e} \quad \overline{\psi^c} = \psi^T\mathcal{C}^\dagger. \quad (2.68)$$

Um 4-espinor genérico  $(\xi, \eta)$  na representação de Weyl terá seu conjugado de carga escrito como:

$$\psi^c = \begin{pmatrix} -\epsilon\eta^\star \\ \epsilon\xi^\star \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

É imediato ver que, se  $\psi^c = (\psi_L)^c + (\psi_R)^c$  como na (2.57), então :

$$P_R(\psi_L)^c = (\psi_L)^c \quad \text{e} \quad P_L(\psi_R)^c = (\psi_R)^c. \quad (2.70)$$

Isso nos diz que os graus de liberdade do espinor conjugado de carga tem a helicidade invertida em relação ao original.

A operação de conjugação de carga é um invariante de Lorentz. Isto é, todos os referenciais concordam com a transformação, de modo que:

$$\psi \longrightarrow D(\Lambda)\psi \quad (2.71)$$

$$\mathcal{C}\bar{\psi}^T \longrightarrow D(\Lambda)\mathcal{C}\bar{\psi}^T. \quad (2.72)$$

A demonstração se baseia no fato de que  $\mathcal{C}D^*(\Lambda) = D(\Lambda)\mathcal{C}$ , tendo em vista a propriedade (2.64) aplicada aos geradores  $S^{\mu\nu}$  que compõem as  $D(\Lambda)$ .

### 2.3.2 A Equação de Weyl

Ao impor a condição  $m = 0$  na equação de Dirac vista anteriormente teremos:

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi = 0 \quad \text{ou} \quad \sigma^\mu \partial_\mu \eta = 0. \quad (2.73)$$

Essas são as equações de Weyl. A evolução temporal dos espinores não está mais ligada pela massa e assim cada uma das (2.73) pode descrever partículas distintas. Dentro do Modelo Padrão, os neutrinos são descritos pela equação para  $\xi$ . As duas equações não são exatamente distintas. Para ver isso, consideremos o conjugado hermiteano da segunda, notando que as matrizes  $\sigma^\mu$  são hermiteana e que, se  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^\dagger$  então  $\nabla^\dagger = -\nabla$ :

$$i(\sigma^0 \partial_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\eta^\dagger = 0 \quad (2.74)$$

Isso equivale à primeira equação para o espinor direito conjugado. Assim, o conjugado hermiteano de um 2-espinor de Weyl direito é um esquerdo e vice versa. Um 4-espinor de Dirac pode então ser composto de dois espinores, um esquerdo e outro direito, pela representação soma direta  $(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)$ .

## 2.4 Soluções das Equações de Dirac

Tradicionalmente as soluções da equação de Dirac se dividem em "energia positiva" e "energia negativa", uma vez que se uma partícula com quadrimomento  $(E; \mathbf{p})$  é solução, uma outra partícula com  $(-E; \mathbf{p})$  também será. Explicitando essa distinção:

$$\Psi(x) = u(p)e^{-ip \cdot x} \quad \text{ou} \quad \Upsilon(x) = v(p)e^{+ip \cdot x} \quad (2.75)$$

onde  $u(p)$  e  $v(p)$  são espinores no espaço dos momenta  $p$ . Fazendo:

$$u(p) = \begin{pmatrix} u_L(p) \\ u_R(p) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v(p) = \begin{pmatrix} v_L(p) \\ v_R(p) \end{pmatrix}. \quad (2.76)$$

Seremos levados então a:

$$(\not{p} - m)u(p) = 0 \quad \text{ou} \quad (\not{p} + m)v(p) = 0. \quad (2.77)$$

onde  $\not{p}$  é a notação de Feynman para  $\gamma^\mu p_\mu$ . Se estamos no referencial de repouso  $S'$  da partícula, seu quadrimomento é  $p'^\mu = (m; \mathbf{0}) = (p^0; \mathbf{0})$  e a solução conterá funções dos momenta na forma

$$u'(p^0) = \begin{pmatrix} u'_L(p^0) \\ u'_R(p^0) \end{pmatrix} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}. \quad (2.78)$$

Esse fato facilmente é constatado ao verificar a forma da equação de Dirac na representação de Weyl nessas condições, a saber:

$$\begin{pmatrix} -m & m \\ m & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_L(p^0) \\ u'_R(p^0) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.79)$$

Analogamente para o campo da antipartícula  $v(p)$  teremos no seu referencial  $S'$ :

$$v'(p^0) = \begin{pmatrix} v'_L(p^0) \\ v'_R(p^0) \end{pmatrix} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \theta \\ -\theta \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

E as soluções completas se escreverão:

$$\Psi'(x'^\mu) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} e^{-im\tau} \quad \text{ou} \quad \Upsilon'(x'^\mu) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \theta \\ -\theta \end{pmatrix} e^{+im\tau} \quad (2.81)$$

para partícula e antipartícula respectivamente, onde  $\mu$  e  $\theta$  são 2-espinores de Weyl com componentes complexas  $(a, b)$  e  $(c, d)$ . Fazendo a transformação  $S' \rightarrow S$ , deixando a partícula se propagar no eixo  $z$ , de acordo com as (1.56), (2.17), (2.18), teremos:

$$\Psi(x^\mu) = \begin{pmatrix} a\sqrt{E-p} \\ b\sqrt{E+p} \\ a\sqrt{E+p} \\ b\sqrt{E-p} \end{pmatrix} e^{-i(Et-pz)} \quad \text{ou} \quad \Upsilon(x^\mu) = \begin{pmatrix} c\sqrt{E-p} \\ d\sqrt{E+p} \\ -c\sqrt{E+p} \\ -d\sqrt{E-p} \end{pmatrix} e^{+i(Et-pz)} \quad (2.82)$$

De modo a fazer uma conexão direta entre o spin e as várias componentes de um 4-espinor (espinor de Dirac), consideremos primeiro o fato de que a matriz para os geradores de rotação se escrevem, de acordo com a (2.60) como:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

Esse deve ser o operador de spin que atua nos espinores de Dirac. Em particular, para a componente  $z$ , ele será escrito como:

$$S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

Portanto, na base de autoestados de  $S_z$ , as matrizes colunas do espinor para a partícula em (2.82) terão sua primeira e terceira componente correspondentes ao estado  $\uparrow$  e a segunda e quarta ao estado  $\downarrow$ . Assim, as matrizes coluna do espinor de Dirac serão para a partícula, por exemplo:

$$u(p; s = \uparrow) = \begin{pmatrix} \sqrt{E-p} \\ 0 \\ \sqrt{E+p} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad u(p; s = \downarrow) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E+p} \\ 0 \\ \sqrt{E-p} \end{pmatrix}, \quad (2.85)$$

Enquanto para a antipartícula teremos

$$v(p; s = \uparrow) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E+p} \\ 0 \\ -\sqrt{E-p} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad v(p; s = \downarrow) = \begin{pmatrix} \sqrt{E-p} \\ 0 \\ -\sqrt{E+p} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

Note que as componentes para os spins são trocados para antipartículas. Essa justificativa se deve à interpretação física que damos aos graus de liberdade da antipartícula em comparação com os da partícula, baseada na forma particular da transformação  $\mathcal{CP}$  na representação de Weyl.

## 2.5 Helicidade e Quiralidade

Considere  $S$  o referencial do laboratório,  $S'$  o referencial de repouso da partícula e  $S''$  o conjunto de todos os outros referenciais inerciais possíveis. O operador de helicidade nos dá a componente do spin na direção do movimento da partícula, e se escreve num determinado referencial  $S$  como:

$$h = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{p} \quad (2.87)$$

Assim, as equações (2.85) descrevem partículas com helicidade  $+1/2$  e  $-1/2$ , respectivamente. A helicidade não é um invariante de Lorentz para partículas com massa. Isso se deve ao fato de que sempre existe um referencial  $S''$  para o qual

a velocidade da partícula tem sentido oposto ao do referencial  $S$ , e para o qual o spin permanece o mesmo, e portanto a helicidade tem o sinal trocado. Note ainda que a helicidade não está bem definida para uma partícula em repouso, devido ao módulo do 3-momento  $p$  no denominador ser nulo nesse referencial  $S'$  da partícula.

Para uma partícula sem massa, por outro lado, não falaremos de helicidade mas de quiralidade, esta sim invariante de Lorentz, uma vez que não há referencial de repouso  $S'$  para esta partícula e é impossível aplicar um *boost* para um referencial  $S''$  em que o sentido do 3-momento seja trocado em relação a  $S$ . Para ver isso, note que a helicidade para uma partícula sem massa se escreverá:

$$h = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E} \quad (2.88)$$

e as equações de Weyl, que descreve partículas de spin 1/2 sem massa nos darão:

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi = E\xi + (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi = 0; \quad (2.89)$$

$$\sigma^\mu \partial_\mu \eta = E\eta - (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\eta = 0. \quad (2.90)$$

E o operador de helicidade terá autovalores:

$$h\xi = -\xi \quad \text{e} \quad h\eta = +\eta. \quad (2.91)$$

Concluimos então que  $\psi_L$  e  $\psi_R$  são autoestados de helicidade da equação de Dirac para o caso particular de massa  $m = 0$ , a equação de Weyl, e que portanto uma transformação de Lorentz própria não poderá transformar um 4-espinor  $\psi_L$  em  $\psi_R$  e vice-versa. A helicidade para o 4-espinor de Dirac será escrita como:

$$h = \frac{\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}}{p} = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.92)$$

e podemos descrever uma partícula de massa nula ( $p = E$ ) e quiralidade positiva como:

$$\Psi(m = 0; s = \uparrow; z^+) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2E} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iE(t-z)} \quad (2.93)$$

$$\Psi(m = 0; s = \downarrow; z^-) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2E} \end{pmatrix} e^{-iE(t+z)} \quad (2.94)$$

Isto é, sendo o spin paralelo ao 3-momento, ele contém somente componentes direitas das representações de Weyl. Analogamente, as soluções de quiralidade

negativa, lembrando sempre dos sinais trocados para a transformação de *boost* no início do capítulo:

$$\Psi(m = 0; s = \downarrow; z^+) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2E} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iE(t-z)} \quad (2.95)$$

$$\Psi(m = 0; s = \uparrow; z^-) = \begin{pmatrix} \sqrt{2E} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iE(t+z)} \quad (2.96)$$

descreverão spins anti-paralelos ao 3-momento, a primeira (segunda) solução descrevendo uma partícula de massa nula se propagando no sentido positivo (negativo) do eixo  $z$ , ambas contendo somente a componente esquerda das representações de Weyl.

Uma partícula com massa  $m \neq 0$  será descrita por um 4-espinor de Dirac que é uma mistura de quiralidades esquerda e direita, no entanto com uma helicidade que depende do referencial. Com efeito, considerando novamente as soluções completas, podemos inferir de uma vez o efeito da introdução de uma massa muito pequena nos espinores de Dirac. A partir da (1.56) conclui-se que:

$$\frac{\sqrt{E-p}}{\sqrt{E+p}} \simeq \frac{m}{2E} \quad (m \ll E) \quad (2.97)$$

e portanto, multiplicando as soluções (2.85) por um fator comum  $1/\sqrt{E+p} \rightarrow 1/\sqrt{2E}$ , e além disso tomando nota da fase da onda nesse caso, dada pela (1.58), obtemos

$$\Psi(m \ll E; s = \uparrow; z^-) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m/2E \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iE(t+z) + i\frac{m^2 z}{2E}} \quad (2.98)$$

$$\Psi(m \ll E; s = \downarrow; z^+) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ m/2E \end{pmatrix} e^{-iE(t-z) - i\frac{m^2 z}{2E}} \quad (2.99)$$

que descrevem partículas de massa muito pequena de helicidade esquerda e as

$$\Psi(m \ll E; s = \uparrow; z^+) = \begin{pmatrix} m/2E \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iE(t-z) - i\frac{m^2 z}{2E}} \quad (2.100)$$

$$\Psi(m \ll E; s = \downarrow; z^-) = \begin{pmatrix} 0 \\ m/2E \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-iE(t+z) + i\frac{m^2 z}{2E}} \quad (2.101)$$

para partículas de massa muito pequena e helicidade direita.

Os casos de massa nula ou muito pequena para as antipartículas correm de maneira inteiramente análoga ao caso da partícula. Feynman e Stueckelberg [30] propuseram resolver o problema da antipartícula reinterprestando o pósitron como um elétron de energia negativa viajando para o passado, de modo que  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  e  $\mathbf{S} \rightarrow -\mathbf{S}$ . De acordo com essa interpretação, a função de onda seria dada por  $\Upsilon(x)$  na (2.75), levando a uma troca de sinal nos autovalores desses operadores e à correta interpretação em termos da (2.86). Assim, as soluções para antipartículas serão as seguintes:

$$\Upsilon(m = 0; s = \uparrow; z^+) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2E} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+iE(t-z)} \quad (2.102)$$

$$\Upsilon(m = 0; s = \downarrow; z^-) = \begin{pmatrix} \sqrt{2E} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iE(t+z)} \quad (2.103)$$

descrevem antipartículas de massa nula e quiralidade positiva, enquanto:

$$\Upsilon(m = 0; s = \uparrow; z^-) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2E} \end{pmatrix} e^{+iE(t+z)} \quad (2.104)$$

$$\Upsilon(m = 0; s = \downarrow; z^+) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2E} \\ 0 \end{pmatrix} e^{+iE(t-z)} \quad (2.105)$$

descrevem antipartículas de massa nula e quiralidade negativa. Para o caso  $m \ll E$ , multiplicando por  $(2E)^{-\frac{1}{2}}$ , teremos:

$$\Upsilon(m \ll E; s = \uparrow; z^-) = \begin{pmatrix} 0 \\ m/2E \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{+iE(t+z) - i\frac{m^2 z}{2E}} \quad (2.106)$$

$$\Upsilon(m \ll E; s = \downarrow; z^+) = \begin{pmatrix} m/2E \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+iE(t-z) + i\frac{m^2 z}{2E}} \quad (2.107)$$

que descrevem antipartículas de massa muito pequena de helicidade esquerda e as

$$\Upsilon(m \ll E; s = \uparrow; z^+) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -m/2E \end{pmatrix} e^{+iE(t-z) + i\frac{m^2 z}{2E}} \quad (2.108)$$

$$\Upsilon(m \ll E; s = \downarrow; z^-) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -m/2E \\ 0 \end{pmatrix} e^{+iE(t+z) - i\frac{m^2 z}{2E}} \quad (2.109)$$

descrevem antipartículas de massa muito pequena e helicidade direita.

Dentro da representação quiral, portanto, podemos ver facilmente que adição de uma massa pequena a um espinor que teria somente componentes esquerdas (direitas) gera uma pequena componente direita (esquerda), de ordem  $m/E$ . Embora esse resultado tenha sido obtido explicitamente na representação de Weyl, ele continua válido a despeito da escolha da representação, e isso pode ser demonstrado utilizando os operadores de projeção definidos em (2.45).

## Capítulo 3

# Oscilação de Neutrinos

 NEUTRINO como é conhecido é uma partícula que interage fracamente, representado nos diagramas de Feynman como uma linha fermiônica entrando ou emergindo de um vértice dos bósons  $Z^0$  ou  $W^\pm$ . Assim, o estado quântico de produção ou aniquilação do neutrino é definido por essa interação, com os bósons atuando como filtros polarizadores para uma determinada quiralidade, que é, portanto, uma propriedade da interação eletrofraca.

Em mecânica quântica é possível que os estados de interação não sejam idênticos aos estados com massa bem definida, os chamados autoestados de massa ou estados de propagação. O vértice da interação deve conservar energia e momento, no entanto a massa do neutrino não é resolvida experimentalmente: não existe um filtro de massa para essa partícula. Desse modo, o neutrino, se possui  $m \neq 0$ , é uma superposição coerente de estados de massa, e essa propriedade gera consequências observáveis na fenomenologia da partícula.

### 3.1 O Contexto do Modelo Padrão

O entendimento atual dos constituintes da matéria baseia-se na identificação de um conjunto de partículas de spin  $\frac{1}{2}$ , os quarks e léptons, que interagem entre si através de partículas mediadoras, os bósons de gauge. Um componente fundamental desse cenário é o bóson de Higgs, um grau de liberdade presente na lagrangeana que promove a "quebra espontânea" da simetria de gauge  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  e com um significado físico evidente após fixação do gauge unitário. Os léptons (elétron, múon e tau mais seus respectivos neutrinos) se apresentam em dubletos da forma

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \quad (3.1)$$

onde  $L$  denota que os 4-espinores são compostos somente de suas partes esquerdas. As partes direitas se escrevem

$$e_R, \quad \mu_R, \quad \tau_R, \quad (3.2)$$

e são singletos de  $SU(2)_L$ . As partículas no dubleto transitam de um estado a outro pela troca de um bóson  $W_\mu^\pm$  de carga elétrica elementar, constituindo uma corrente fraca carregada. Uma mudança de sabor de uma partícula, do ponto de vista do Modelo Padrão, implica a mudança de sua carga elétrica e de sua massa. Logo depois da descoberta da violação de paridade, foi proposta uma estrutura  $V - A$  para a corrente que descreve tais interações, na forma:

$$j^\mu = \bar{e}\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\nu + \text{HC}. \quad (3.3)$$

Essa estrutura de corrente axial menos vetorial é fundamental para o Modelo Padrão. Com efeito, considere o fato de que os operadores hermiteanos de projeção  $P_L$  e  $P_R$  são idempotentes:

$$j^\mu = 2\bar{e}\gamma^\mu P_L\nu = 2\bar{e}\gamma^\mu(P_L)^2\nu \quad (3.4)$$

$$= 2e^\dagger\gamma^0\gamma^\mu P_L\nu_L = 2e^\dagger P_L\gamma^0\gamma^\mu\nu_L \quad (3.5)$$

$$= 2\bar{e}_L\gamma^\mu\nu_L. \quad (3.6)$$

Para ver a importância disso, é necessário observar a discussão da seção 2.5 e a ação dos projetores  $P_{L,R}$  nos 4-espinores de Dirac. Sendo estes da forma

$$P_L = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

podemos ver que somente a componente esquerda dos férmions participa da interação fraca carregada. Dada a forma das soluções para os espinores  $u$  que descrevem partículas, dadas nas equações (2.82) a (2.86), concluímos que componentes de helicidade direita dos férmions são suprimidos nos elementos de matriz por um fator  $\sim m/E$ . Tendo em vista que o operador de helicidade  $h$  é pseudoescalar, esse tratamento desigual para as componentes direitas e esquerdas dos férmions está ligada diretamente à violação da paridade do setor eletrofraco e contida na estrutura de corrente  $V - A$ . Para as antipartículas, vale o oposto: a supressão se dá nas componentes esquerdas.

Na proposta original de Pauli [9], o neutrino teria a massa da mesma ordem do elétron. Depois da descoberta da violação de paridade por Wu *et al* [10], foi proposto que esta poderia ser explicada por um neutrino com  $m = 0$ , descrito por uma das equações de Weyl, uma vez que nesse caso lhe faltariam as componentes superiores ou inferiores. O experimento de Goldhaber *et al* [11] determinou que a

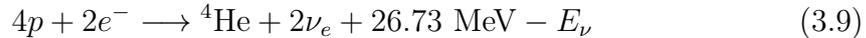
helicidade dos neutrinos emitidos era, dentro dos erros experimentais, totalmente esquerda. Assim, a razão da violação de paridade na Natureza estava explicada. Conforme discutido nas próximas seções, essa explicação tornou-se incompatível com os resultados experimentais das últimas décadas, ainda que o neutrino possa ser um dos principais atores desse fenômeno. A massa nula do neutrino é essencial na estrutura do Modelo Padrão.

## 3.2 Neutrinos Solares

A observação de neutrinos solares se baseia fundamentalmente nas teorias de estrutura e evolução estelar, que são a base do chamado Modelo Solar Padrão. Os cálculos mais elaborados desse modelo foram feitos por Bahcall *et al* [8]. O Sol como uma fonte bem definida de neutrinos torna-se uma grande oportunidade para o estudo das propriedades destes, que são produzidos por reações de fusão nuclear, nos chamados ciclos próton-próton (PP) ou CNO. O efeito combinado dessas cadeias de reações pode ser resumido por:



Os pósitrons se aniquilam com os elétrons, e portanto, ao considerar a geração de energia térmica pelo Sol, uma expressão importante é:



onde  $E_\nu$  é a energia carregada pelos neutrinos na reação, com um valor médio de 0.6 MeV. O espectro dos neutrinos solares previsto pela modelagem BPS08(GS) é dado na figura 3.1. Um experimento pioneiro para a detecção de neutrinos solares foi o de Homestake [12], feito por Davis *et al* na década de 60. Utilizando o método de conversão de  ${}^{37}\text{Cl}$  em  ${}^{37}\text{Ar}$  proposto por Pontecorvo [13], ele explorou a absorção dos neutrinos pelo núcleo dos átomos de cloro e sua consequente conversão em átomos de argônio:



cujos limiar de energia é 814 keV. O elétron ejetado do núcleo não tem energia suficiente para ser detectado, então a medida do fluxo de neutrinos se dá pela contagem dos átomos de argônio. Tendo uma meia vida  $\tau_{1/2} = 34.8$  dias, após uma exposição de cerca de  $3\tau_{1/2}$  eles eram extraídos quimicamente de um grande reservatório de 600 toneladas de percloroetileno revestidos por uma camada protetora de água e colocados num contador proporcional de baixo ruído de fundo (*background*), onde sua curva de decaimento exponencial era determinada. Assim, a partir da quantidade de argônio presente na amostra extraída era possível

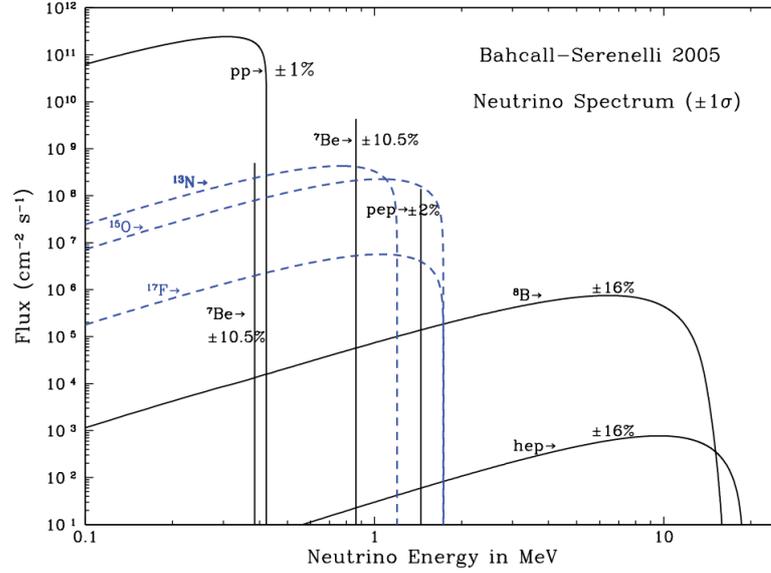


Figura 3.1: O espectro de neutrinos solares previsto pelo modelo BS05(OP) [8]. Os fluxos são dados em unidades de  $\text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{MeV}^{-1}$  para o espectro contínuo. Os números associados aos fluxos acompanham os erros teóricos para estes.

determinar a quantidade de neutrinos que interagem com o reservatório. Experimentos posteriores com gálio (GALLEX e GNO em Gran Sasso, Itália e SAGE na Rússia) utilizaram a reação



cujos *threshold* é de 233 keV, mais baixo e portanto com detecção mais eficiente.

### 3.2.1 Os Experimentos Sno e Kamiokande

Não existindo, no entanto, informação direcional sobre a fonte dos neutrinos interagentes, era impossível determinar com experimentos radioquímicos que os neutrinos de fato eram solares. Esse problema foi resolvido em 1987, pelo experimento KAMIOKANDE no Japão. Nele, a observação dos neutrinos solares se deu em tempo real, pela reação de espalhamento



de elétrons da molécula de água em um grande detector de radiação Cherenkov. Esse experimento forneceu informação direcional sobre o elétron detectado, o que otimizou a separação clara entre o sinal do neutrino e o *background*. O KAMIOKANDE foi o primeiro experimento a dar informação direcional sobre os neutrinos detectados, mostrando que o Sol era de fato a fonte dessas partículas.

Com um *threshold* de detecção de 7 MeV, atualmente reduzido para 5 MeV no SUPER-K, os experimentos observavam, de acordo com a fig. 3.1, somente os neutrinos da faixa do  $^8\text{B}$ . A reação de espalhamento (3.12) é sensível a todos os tipos de neutrino, no entanto para  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$ , a sensibilidade é cerca de 15% daquela para  $\nu_e$ . Isso se deve ao fato de que suas seções de choque são [15]:

$$\sigma(\nu_{\mu,\tau} e \longrightarrow \nu_{\mu,\tau} e) = \frac{G_F^2 m_e E_\nu}{2\pi} \left[ \frac{L_e^2 + R_e^2}{3} \right] \quad (3.13)$$

$$\sigma(\nu_e e \longrightarrow \nu_e e) = \frac{G_F^2 m_e E_\nu}{2\pi} \left[ (L_e^2 + 2)^2 + \frac{R_e^2}{3} \right] \quad (3.14)$$

onde os acoplamentos  $L_e$  e  $R_e$  são:

$$L_e = 2 \sin^2 \theta_W - 1 \simeq -\frac{1}{2} \quad (3.15)$$

$$R_e = 2 \sin^2 \theta_W \simeq \frac{1}{2} \quad (3.16)$$

e  $\theta_W$  é o ângulo de Weinberg.

Desde o início das experiências com neutrinos solares, era claro que o fluxo observado era significativamente menor que o previsto pelos modelos de evolução solar. Esse déficit ficou conhecido como "o problema do neutrino solar". A eliminação da hipótese de um modelo solar inadequado em favor da oscilação dos neutrinos requer uma combinação de muitas medidas para demonstrar que os  $\nu_e$  estão de fato presentes como  $\nu_\mu$  ou  $\nu_\tau$ , e, conforme será visto adiante, a reconstrução de um sinal que reproduza de alguma forma a (3.33) ou a (3.37) [15, 18].

Os neutrinos solares, a despeito de seu sabor, não são energéticos o suficientes para iniciar as reações  $\nu \longrightarrow \mu$  ou  $\tau$ , mas um meio indireto foi fornecido pelo Observatório de Neutrinos de Sudbury (SNO), no Canadá, que dispunha de um detector Cherenkov com água pesada. Tendo o dêuteron no lugar do hidrogênio, essa molécula como alvo permite distinguir três tipos diferentes de interações fracas, sensíveis a diferentes misturas ponderadas dos fluxos de  $\nu_e, \nu_\mu$  e  $\nu_\tau$ . Além da (3.12), cuja sigla será denotada por ES (*elastic scattering*), o experimento SNO detectava a dissociação por corrente carregada (CC):

$$\nu_e + d \longrightarrow e^- + p + p, \quad (3.17)$$

que se dá pela troca de um bóson  $W$  e é sensível somente a neutrinos eletrônicos. A dissociação por corrente neutra (NC):

$$\nu_\alpha + d \longrightarrow \nu_\alpha + p + n, \quad (3.18)$$

se dá pela troca de um bóson  $Z$  e é sensível ao fluxo total de neutrinos  $\phi_{e+\mu+\tau}$ .

Na última década, os experimentos com neutrinos solares conquistaram resultados notáveis. Eles indicam que o fluxo total concorda com o modelo solar, no entanto apenas 30% dos neutrinos chegam do Sol como  $\nu_e$ . Valores não nulos de  $\phi_\mu$  e  $\phi_\tau$  constituem forte evidência de que neutrinos eletrônicos são de algum modo transformados em outros sabores durante sua propagação. Em 2001, o resultado inicial das medidas CC do SNO com a alta estatística do KAMIOKANDE forneceu evidências diretas para a mudança de sabor. Mais tarde, as medidas de NC do SNO fortaleceram ainda mais essas conclusões.

O *threshold* da reação NC é 2.2 MeV. Em D<sub>2</sub>O pura, a assinatura desse processo é a captura do nêutron no deutério, e a conseqüente emissão de um raio  $\gamma$  de 6.25 MeV. Nesse caso, a captura tinha baixa eficiência pois a energia depositada era próxima ao limiar de 5 MeV da reação. Afim de melhorar a eficiência e a energia dos raios  $\gamma$ , 2 toneladas de NaCl foram dissolvidos na água pesada numa segunda fase do experimento [17] e uma bateria de contadores de nêutrons provenientes de <sup>3</sup>He foi instalada para uma terceira tomada de dados. Esses contadores neutrônicos forneceram uma medida NC independente, com uma sistemática diferente daquela adotada na segunda fase, portanto aumentando a confiabilidade desse canal. Em 2006, após completar a aquisição e análise de dados, o grupo do SNO apresentou seus resultados [16].

As medidas combinadas dos experimentos SNO e KAMIOKANDE são mostradas na fig 3.2. A partir da etapa do experimento onde foi adicionado o NaCl concluiu-se que:

$$\phi_{\text{SNO}}^{\text{CC}} = (1.68 \pm 0.15) \times 10^6 / \text{cm}^2 \cdot \text{s} \quad (3.19)$$

$$\phi_{\text{SNO}}^{\text{ES}} = (2.35 \pm 0.37) \times 10^6 / \text{cm}^2 \cdot \text{s} \quad (3.20)$$

$$\phi_{\text{SNO}}^{\text{NC}} = (4.94 \pm 0.59) \times 10^6 / \text{cm}^2 \cdot \text{s}. \quad (3.21)$$

Conclui-se, portanto, que o fluxo total de neutrinos do tipo  $\mu$  e  $\tau$  é cerca de três vezes maior que o fluxo de  $\nu_e$ . Se o Sol produz somente neutrinos eletrônicos, a única conclusão é que os neutrinos que chegam à Terra sofrem algum processo de mudança de sabor. Além disso, o Modelo Solar Padrão encontra boa concordância com a medida do fluxo de corrente neutra, que é independente do sabor.

### 3.3 Descrição da Oscilação de Neutrinos

Os experimentos com neutrinos solares vistos na seção anterior forneceram evidências substanciais para a existência da oscilação e mistura de neutrinos, isto é, transições entre os diferentes sabores  $\nu_e, \nu_\mu$  e  $\nu_\tau$ , causadas pela massa não nula da superposição (mistura) de estados de propagação  $\nu_k$ , com  $k = 1, 2, 3 \dots$  que compõem cada um dos estados de interação  $e, \mu$  e  $\tau$ .

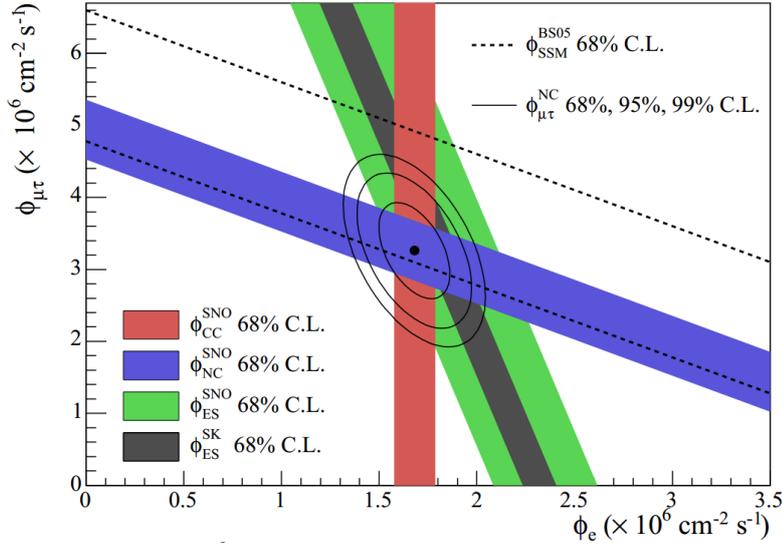


Figura 3.2: Medidas combinadas dos fluxos de neutrinos solares medidos pelos experimentos SNO e KAMIOKANDE. As bandas representam o intervalo de  $1\sigma$ , e as linhas pontilhadas a previsão do Modelo Solar. Os contornos ovais mostram a probabilidade conjunta das medidas nos intervalos de  $1\sigma$  a  $3\sigma$ .

A noção do sabor do neutrino vem da dinâmica: por exemplo, o neutrino (antineutrino) eletrônico  $\nu_e$  ( $\bar{\nu}_e$ ) é aquele produzido com um pósitron  $e^+$  (elétron  $e^-$ ) ou que produz um elétron  $e^-$  (pósitron  $e^+$ ) num processo de corrente carregada. Dentre os três tipos possíveis de neutrinos ou antineutrinos, nenhum deles é idêntico ao outro. Desse modo, de acordo com a precisão atual, os estados quânticos que os descrevem devem ser ortogonais:

$$\langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{ou} \quad \langle \nu_j | \nu_k \rangle = \delta_{jk}, \quad (3.22)$$

onde  $\alpha, \beta = e, \mu, \tau$  e, possivelmente,  $j, k = 1, 2, 3$ .

Se o neutrino tem uma massa não nula, o estado  $|\nu_\alpha\rangle$  de cada um é uma superposição, cf. (2.82) a (2.86), de autoestados de helicidades positivas e negativas. Para o neutrino (antineutrino), a componente direita  $\nu_R$  (esquerda  $\bar{\nu}_L$ ) é suprimida por um fator  $m/E$ . Junto com o campo leptônico esquerdo  $\ell_{\alpha,L}$  ele forma o duplete de  $SU(2)$ . Na ausência de massa, a cada conjunto  $\nu_\alpha$  e  $\ell_\alpha$  pode ser atribuída uma carga unitária, e portanto a conservação do número leptônico é preservada inclusive entre famílias. Isso será demonstrado mais adiante.

Atualmente não existem evidências de estados de neutrinos (antineutrinos) relativísticos de helicidade predominantemente direita (esquerda). Se estes existem, sua interação com a matéria conhecida deve ser muito mais tênue do que a interação fraca já conhecida, isto é, esses neutrinos devem ser "estéreis" ou "inertes" com

relação às interações do Modelo Padrão. Desse modo,  $\nu_R$  e  $\bar{\nu}_L$  devem ser singletos de  $SU_L(2)$ , não se acoplando aos bósons  $W^\pm$  ou  $Z^0$ . Esses campos estéreis, se existirem, podem representar um papel fundamental em muitas questões abertas atualmente, tais como:

1. a física fundamental por trás da massa dos neutrinos,
2. a enorme disparidade que os dados sugerem existir entre a massa dos neutrinos detectáveis e dos léptons carregados e
3. a atual assimetria entre matéria e antimatéria observada no Universo, através de uma possível violação de CP no setor leptônico.

### 3.3.1 Caso Geral

O neutrino é produzido num estado inicial de interação e sua propagação se dá através de um autoestado de massa:

$$|\nu_\alpha(0)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k(0)\rangle \quad (3.23)$$

Aqui,  $U_{\alpha k}^*$  são os elementos da matriz PKMNS, a matriz de mistura unitária  $3 \times 3$  que conecta os estados de interação com os de propagação. Em vista da (3.22) teremos:

$$\sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{e} \quad \sum_\alpha U_{\alpha j}^* U_{\alpha k} = \delta_{jk}. \quad (3.24)$$

O propagador atua em cada estado  $|\nu_k(0)\rangle$  e se escreve, em vista da pequena massa do neutrino, utilizando a (1.58):

$$\mathcal{D}_k(t; L) = e^{ip \cdot x} = e^{iE(t-L) + im_k^2 \frac{L}{2E}} \quad (3.25)$$

A probabilidade do neutrino de sabor  $\alpha$  ser medido com um sabor  $\beta$  será designada por  $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)$ , e será simplesmente a norma quadrada do elemento de matriz que conecta o estado inicial  $|\nu_\alpha(0)\rangle$  do neutrino com o estado propagado  $|\nu_\beta(t; L)\rangle$ , onde  $L$  é o comprimento de propagação, chamado também de linha de base (*baseline*):

$$\begin{aligned} |\nu_\beta(t; L)\rangle &= \sum_k \mathcal{D}_k(t; L) U_{\beta k}^* |\nu_k(0)\rangle = \sum_k U_{\beta k}^* e^{i\phi_k} |\nu_k(0)\rangle \\ &= \sum_k \sum_\gamma U_{\beta k}^* U_{k\gamma} e^{i\phi_k} |\nu_\gamma(0)\rangle, \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde  $\gamma = e, \mu, \tau$ . Tomando o módulo quadrado da amplitude, chegaremos a:

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta) &= |\langle \nu_\beta(t; L) | \nu_\alpha(0) \rangle|^2 = \sum_j \sum_k U_{\beta j}^* U_{\alpha j} U_{\beta k} U_{\alpha k}^* e^{i(\phi_j - \phi_k)} \\ &= \left( \sum_j |U_{\alpha j}|^2 |U_{\beta j}|^2 \right) + 2\text{Re} \sum_{j>k} \{U_{\alpha j}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\beta k}^* e^{i\Delta\phi_{jk}}\}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde

$$\Delta\phi_{jk} = (m_j^2 - m_k^2) \frac{L}{2E} = \Delta m_{jk}^2 \frac{L}{2E} \equiv \frac{L}{L_{jk}}. \quad (3.28)$$

Nesse ponto, elevando ao quadrado as relações de unitariedade (3.24) e notando a relação

$$|z_1 + z_2 + z_3|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + 2\text{Re}\{z_1 z_2^* + z_1 z_3^* + z_2 z_3^*\} \quad (3.29)$$

obteremos a igualdade

$$\sum_j |U_{\alpha j}|^2 |U_{\beta j}|^2 = \delta_{\alpha\beta} - 2 \sum_{j>k} \text{Re}\{U_{\alpha j}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\beta k}^*\}. \quad (3.30)$$

Utilizando as fórmulas

$$2 \sin^2 \left( \frac{\Delta\phi_{jk}}{2} \right) = 1 - \cos(\Delta\phi_{jk}) \quad (3.31)$$

$$\text{Re}\{w_1 w_2^*\} = \text{Re}\{w_1\} \text{Re}\{w_2\} + \text{Im}\{w_1\} \text{Im}\{w_2\}, \quad (3.32)$$

e aplicando a (3.30) na (3.27) teremos:

*Probabilidade de oscilação geral para neutrinos:*

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j>k} \text{Re}\{U_{\alpha j}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\beta k}^*\} \sin^2 \left( \Delta m_{jk}^2 \frac{L}{4E} \right) \\ &\quad + 2 \sum_{j>k} \text{Im}\{U_{\alpha j}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\beta k}^*\} \sin \left( \Delta m_{jk}^2 \frac{L}{2E} \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Para o caso  $\alpha \neq \beta$  temos as probabilidades de transição, e um experimento projetado para medi-la é aquele em que há o aparecimento de espécies diferentes de neutrinos. Já para o caso  $\alpha = \beta$  a (3.33) nos dá a probabilidade de sobrevivência da espécie de neutrino, e os experimentos são ditos de desaparecimento. Nesse

último caso, uma vez que os produtos quárticos em (3.30) são totalmente reais, a probabilidade toma uma forma mais simples:

$$P(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\alpha) = 1 - 4 \sum_{j>k} |U_{\alpha j}|^2 |U_{\alpha k}|^2 \sin^2 \left( \Delta m_{jk}^2 \frac{L}{4E} \right). \quad (3.34)$$

Essas são as probabilidades para os neutrinos, e estão associadas à detecção de um lépton nos detectores da linha de base ou a um antilépton no momento de sua produção. Para o caso de antineutrinos, a probabilidade  $P(\bar{\nu}_\alpha \longrightarrow \bar{\nu}_\beta)$  pode ser determinada a partir da (3.33), notando que os processos estão ligados por uma transformação CPT:

$$P(\bar{\nu}_\alpha \longrightarrow \bar{\nu}_\beta) = P(\nu_\beta \longrightarrow \nu_\alpha). \quad (3.35)$$

Mas da (3.33), por inspeção:

$$P(\nu_\beta \longrightarrow \nu_\alpha; U) = P(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta; U^*), \quad (3.36)$$

o que equivale a mudar o sinal da parte imaginária na (3.33). Assim,

*Probabilidade de oscilação geral para antineutrinos:*

$$P(\bar{\nu}_\alpha \longrightarrow \bar{\nu}_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j>k} \text{Re}\{U_{\alpha j}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\beta k}^*\} \sin^2 \left( \Delta m_{jk}^2 \frac{L}{4E} \right) - 2 \sum_{j>k} \text{Im}\{U_{\alpha j}^* U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\beta k}^*\} \sin \left( \Delta m_{jk}^2 \frac{L}{2E} \right). \quad (3.37)$$

Dessas expressões vemos que se a matriz  $U$  contém elementos imaginários,  $P(\bar{\nu}_\alpha \longrightarrow \bar{\nu}_\beta)$  e  $P(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta)$  podem ser diferentes em geral. Uma vez que obtém-se uma probabilidade pela transformação CP da outra, a ocasião de  $P(\bar{\nu}_\alpha \longrightarrow \bar{\nu}_\beta) \neq P(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta)$  configuraria uma violação de CP no setor dos léptons, algo não observado com solidez até agora [18].

### 3.3.2 Observações Sobre os Resultados

Algumas outras observações dignas de nota sobre os resultados obtidos na subseção anterior são os seguintes:

1. Se todos os  $\Delta m_{jk} = 0$ , então  $P(\bar{\nu}_\alpha \longrightarrow \bar{\nu}_\beta) = P(\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\alpha) = \delta_{\alpha\beta}$ , o que está de acordo com a idéia de que se os neutrinos tem massa, então eles oscilam. Embora as equações (3.33) e (3.37) sejam para neutrinos se propagando no vácuo, não levando em consideração a interação destes com a

matéria, esse efeito pode ser eliminado por argumentos de teoria de perturbação e subtraídos do fluxo medido total [18, 19]. Resultados obtidos pelo experimento KAMLAND e SUPER-KAMIOKANDE [18] sugerem que a dependência do fluxo de aparecimento ou desaparecimento de fato é função de  $L/E$ , que, a menos de constantes  $c$  e  $\hbar$  é o tempo próprio do neutrino, grandeza não existente para partículas sem massa, e portanto a oscilação seria resultado da simples evolução temporal da partícula.

2. Incluindo as constantes  $c$  e  $\hbar$  nas (3.33) e (3.37) teremos:

$$\Delta m_{jk}^2 \frac{c^3 L}{4\hbar E} = 1.27 \Delta m_{jk}^2 [\text{eV}^2] \frac{L[\text{km}]}{E[\text{GeV}]}, \quad (3.38)$$

e deve ser possível observar a oscilação se a função  $\sin^2(1.27 \Delta m^2 L/E)$  tiver seu argumento  $\lesssim 2\pi$ . Assim, por exemplo, um experimento com  $L \sim 10^3$  km e  $E \sim 1$  GeV é capaz de medir diferenças quadradas de massa com cerca de  $10^{-3}$  GeV<sup>2</sup> de sensibilidade.

3. É imediato ver nas (3.33) e (3.37) que as probabilidades dependem das diferenças quadradas entre as massas dos autoestados  $j, k = 1, 2, 3 \dots$ . Isso quer dizer que os experimentos de oscilação de neutrinos podem detectar o padrão do espectro de massa, mas não o quão acima do zero esse padrão está. Além disso, como será visto, os experimentos ainda não foram capazes de medir as fases de violação de CP no setor leptônico. Isto é, ainda não existe informação sobre as partes imaginárias das (3.33) e (3.37), e portanto sobre o sinal dos  $\Delta m_{jk}$ , uma vez que a função  $\sin^2(\Delta\phi_{jk})$  é par. Esse é o problema da "hierarquia" do espectro da massa de neutrinos: ele pode conter dois de três estados muito próximos, de acordo com as (3.51), no entanto não se sabe se esse dubleto é mais ou menos massivo que o terceiro estado.
4. A mudança de sabor não altera o fluxo total de neutrinos, sendo este meramente redistribuído em proporções diferentes das espécies  $e, \mu$  e  $\tau$ . De fato, das (3.22) e (3.24), segue que:

$$\sum_{\beta} P(\nu_{\alpha} \longrightarrow \nu_{\beta}) = \sum_{\beta} P(\bar{\nu}_{\alpha} \longrightarrow \bar{\nu}_{\beta}) = 1, \quad (3.39)$$

onde a soma em  $\beta$  é feita sob todos os sabores. A equação mostra simplesmente que a probabilidade de um neutrino de certo tipo oscilar em algum outro mais a probabilidade de não oscilar é a unidade. No entanto, pode existir a possibilidade de que algum dos sabores  $\beta$  que o neutrino irá oscilar seja estéril, o que significa que ele não participa normalmente das interações fracas e portanto não seria detectável. Assim, sendo bem conhecido o

fluxo total de neutrinos emitidos de uma fonte conhecida e os recebidos num detector distante, um experimento que compare esses fluxos pode testar a hipótese dos neutrinos estéreis, por exemplo estabelecendo limites inferiores para suas massas.

### 3.3.3 Generalidades sobre a Matriz de Mistura

Uma matriz  $U$  complexa  $N \times N$  contém em geral  $2N^2$  parâmetros reais livres. Impondo a condição de unitariedade  $U^\dagger U = \mathbb{1}$ , isso nos dá  $N^2$  relações de vínculos entre esses parâmetros, e restarão  $2N^2 - N^2 = N^2$  parâmetros livres. Convencionaremos dividi-los em:

$$\frac{N(N-1)}{2} \text{ ângulos} \quad \text{e} \quad \frac{N(N+1)}{2} \text{ fases.} \quad (3.40)$$

Assim, por exemplo, uma matriz de mistura de dimensão  $3 \times 3$ , considerando o cenário padrão de três autoestados de massa do neutrino, terá 3 ângulos de mistura e 6 fases. No entanto nem todas as fases são fisicamente observáveis, uma vez que seus efeitos se manifestam fenomenologicamente através das correntes carregadas, tanto no caso do setor hadrônico, com a matriz CKM do Modelo Padrão quanto no setor leptônico com a matriz PKMNS. Mais especificamente, podemos eliminar algumas dessas fases por uma simples redefinição de campos. Note que a corrente para o caso das três famílias se escreve, já com a mistura dada pela (3.23), e de acordo com a (3.3), como se segue:

$$j_\alpha^\mu = \sum_k \bar{\ell}_\alpha \gamma^\mu U_{\alpha k}^* \nu_k, \quad (3.41)$$

de modo que fatorando duas fases em particular dos campos transformados na forma

$$\nu_k \longrightarrow e^{iK} \nu_k \quad \text{e} \quad \ell_\alpha \longrightarrow e^{iA} \ell_\alpha, \quad (3.42)$$

onde, afim de sobrecarregar ao mínimo a notação,  $A = E, M, T$  será a fase arbitrária do campo do lépton  $\alpha = e, \mu, \tau$  e  $K = K_1, K_2, K_3$  será a fase do estado de massa  $k = 1, 2, 3$  do neutrino, ambos também correndo sobre os respectivos índices  $\alpha$  e  $k$ . Obteremos então:

$$j'^\mu = \sum_{\alpha, A} \sum_{k, K} e^{-iA} \bar{\ell}_\alpha \gamma^\mu U_{\alpha k}^* e^{iK} \nu_k, \quad (3.43)$$

e então poderíamos a princípio eliminar todas as fases da matriz  $U$ , uma vez que os índices  $k$  e  $\alpha$  são 6 ao todo. No entanto, a corrente é sempre a mesma a menos

de uma rotação em  $U(1)$  responsável pela conservação do número leptônico. Isto é, fatoramos duas fases quaisquer do termo, por exemplo,  $M$  e  $K_3$ :

$$j'^{\mu} = \underbrace{e^{i(M-K_3)}}_{1 \text{ fase}} \sum \underbrace{e^{-i(A-M)}}_{N-1 \text{ fases}} \bar{\ell}_{\alpha} \gamma^{\mu} U_{\alpha k}^* \underbrace{e^{i(K-K_3)}}_{N-1 \text{ fases}} \nu_k. \quad (3.44)$$

Essa observação sugere que teremos, para o caso  $N = 3$ , um total de  $2N - 1 = 5$  fases elimináveis na matriz de mistura, restando somente 1 fase observável, sendo ela a suposta responsável pela violação de CP no setor de léptons.

Uma parametrização possível é estabelecida utilizando os ângulos de Euler [19]:

$$U_{PMNS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

onde  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$  e  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ , além de  $e^{\pm i\delta}$  ser a fase de violação de CP. Note que  $\theta_{ij} \in [0, \pi/2]$  e  $\delta \in [0, 2\pi]$ . Essa matriz é equivalente a

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta} & -c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{-i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{-i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Assim, observa-se que os parâmetros essenciais para a descrição da oscilação de neutrinos são os ângulos de mistura  $\theta_{ij}$ , as massas  $m_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , e da fase de Dirac  $\delta$ . Isso resulta em ao menos sete parâmetros adicionais no cenário de um Modelo Padrão minimamente estendido.

### 3.3.4 Caso Particular de Dois Sabores

No caso  $N = 2$ , de acordo com (3.40), não há nenhuma fase observável e somente um parâmetro. Para a transição  $e \rightarrow \mu$ , chamaremos esse parâmetro de ângulo solar. Essa simplificação descreve a situação onde uma das componentes da oscilação é rápida o suficiente para ser tomada uma probabilidade média, ou lenta o suficiente para que seu termo seja praticamente constante, de modo que os dados da oscilação podem ser explicados convenientemente assumindo somente duas famílias. A matriz  $U$  se escreverá:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

de modo que teremos:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |\nu_e\rangle = |\nu_1\rangle \cos \theta + |\nu_2\rangle \sin \theta \\ |\nu_{\mu}\rangle = |\nu_2\rangle \cos \theta - |\nu_1\rangle \sin \theta \end{cases} \quad (3.48)$$

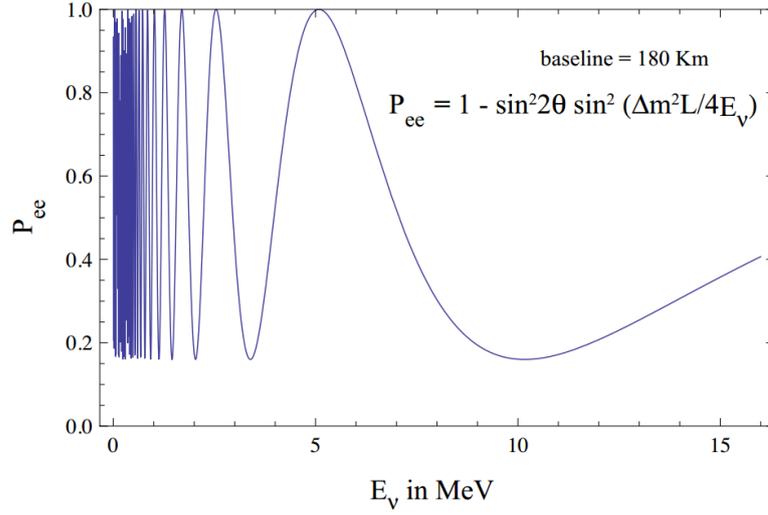


Figura 3.3: A probabilidade de sobrevivência de  $\nu_e$  ou  $\bar{\nu}_e$  em função da energia, de acordo com (3.50), com parâmetros  $L = 180$  km,  $\Delta m^2 = 7 \times 10^{-5} \text{eV}^2$  e  $\sin^2 2\theta = 0.84$ , tirado de [20].

Assim, a (3.33), a probabilidade de conversão de um neutrino eletrônico em um muônico, se reduz a:

$$P(\nu_e \longrightarrow \nu_\mu) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \Delta m^2 \frac{L}{4E} \right), \quad (3.49)$$

enquanto a probabilidade de sobrevivência do neutrino eletrônico, é, naturalmente:

$$P(\nu_e \longrightarrow \nu_e) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \Delta m^2 \frac{L}{4E} \right). \quad (3.50)$$

A dependência da probabilidade com a energia é mostrada na Fig. 3.3, para um *baseline* de 180 km. Outra aproximação é motivada pelos dados experimentais, que sugerem  $|\Delta m_{31}^2| \gg |\Delta m_{21}^2|$ :

$$\begin{aligned} |\Delta m_{21}^2| &\simeq 7.5 \times 10^{-5} \text{ eV}^2 \\ |\Delta m_{31}^2| &\simeq 2.5 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \\ |\Delta m_{21}^2| / |\Delta m_{31}^2| &\simeq 0.03 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Desse modo, considerando os parâmetros de propagação tais que:

$$\left| \Delta m_{31}^2 \right| \frac{L}{2E} \gtrsim 1 \quad \text{e} \quad \left| \Delta m_{21}^2 \right| \frac{L}{2E} \ll 1 \quad (3.52)$$

(isto é, oscilações muito rápidas ou muito lentas), o efeito da oscilação entre os estados de massa  $\nu_1$  e  $\nu_3$  será muito mais frequente que entre  $\nu_1$  e  $\nu_2$ , e o efeito da segunda será reduzido a  $\exp i(|\Delta m_{21}^2|L/2E) \simeq 1$ . Considerando a chance de sobrevivência da espécie eletrônica de neutrino chegamos, de acordo com a (3.33) a:

$$\begin{aligned} P(\nu_e \longrightarrow \nu_e) &= P(\bar{\nu}_e \longrightarrow \bar{\nu}_e) \\ &\simeq 1 - 2|U_{e3}|^2(1 - |U_{e3}|^2) \left(1 - \cos \frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}\right). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Essa equação descreve com boa precisão a oscilação de neutrinos de reatores, com  $L \sim 1$  km para um cenário com 3 sabores.

### 3.3.5 O Experimento KamLAND

O Experimento KAMLAND foi o primeiro a observar a periodicidade característica de uma possível oscilação em função da massa dos antineutrinos. A reação



era identificada a partir da detecção em coincidência entre um pósitron e um raio  $\gamma$  de 2.2 MeV da captura do nêutron por um próton nuclear num reservatório de 1 quilotonelada de líquido ultrapuro. O *threshold* da reação é 2.6 MeV. Com um *baseline* de 180 km, isso resulta em uma sensibilidade de até  $10^{-5} \text{ eV}^2$  para  $\Delta m^2$ . Os primeiros resultados foram publicados em dezembro de 2002 [22]. A razão entre o número de eventos esperados (assumindo nenhuma oscilação) subtraídos do *background* e os eventos observados foi:

$$\frac{N_{\text{obs}} - N_{\text{BG}}}{N_{\text{esp}}} = 0.61 \pm 0.13, \quad (3.55)$$

mostrando clara evidência do desaparecimento de neutrinos.

## 3.4 Neutrinos Atmosféricos

As propriedades de oscilação também podem ser estudadas em neutrinos que são produzidos por colisões de raios cósmicos. Comparando-se o fluxo daqueles que viajam no interior da Terra ( $L \sim 10^4$  km) e são detectados após emergirem da crosta terrestre logo abaixo do detector e aqueles gerados na região da atmosfera acima do detector ( $L \sim 10$  km). Neutrinos desse tipo de fonte são produzidos pelo decaimento do pión e do káon produzidos nas camadas superiores da atmosfera pelas reações nucleares primárias com raios cósmicos, e podem interagir com grandes detectores subterrâneos especialmente desenhados para isso.

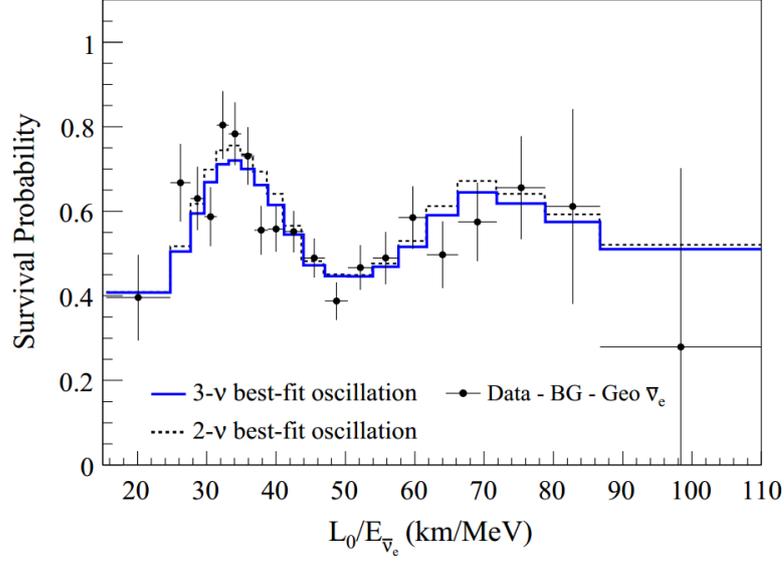


Figura 3.4: Razão entre o espectro de neutrinos (subtraído de *background* e geoneutrinos) observados pelo experimento KAMLAND pelo espectro previsto sem oscilações, em função de  $L/E$ , com  $L = 180$  km [21].

Uma estimativa simples para o fluxo esperado pode ser feita a partir do decaimento do pión em múon, e posteriormente deste em elétron (ou pósitron):

$$\pi^\pm \longrightarrow \mu^\pm + \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu), \quad (3.56)$$

$$\mu^\pm \longrightarrow e^\pm + \nu_e (\bar{\nu}_e) + \bar{\nu}_\mu (\nu_\mu), \quad (3.57)$$

de modo que cada pión produz após esse decaimento dois léptons neutros da família do múon e um do elétron. Assim:

$$\Phi(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu) : \Phi(\nu_e + \bar{\nu}_e) \simeq 2 : 1. \quad (3.58)$$

Cálculos mais precisos podem ser encontrados em [23]. A primeira evidência da oscilação de neutrinos atmosféricos veio da colaboração SUPER- KAMIOKANDE em 1998 [24]. Nesse experimento, os neutrinos e antineutrinos não podiam ser discriminados, pois a detecção no reservatório de líquido se dava por radiação Cherenkov, que não mede a carga elétrica do estado final dos léptons. A distribuição dos eventos tipo  $\mu$  em função do ângulo de zênite mostraram um déficit claro comparado ao esperado do cenário onde não há oscilações. Na fig. 3.5,  $\cos \Theta = +1$  ( $-1$ ) corresponde ao sentido "para baixo" ("para cima"), sendo ainda dividido em dois grupos: sub-GeV, com energias menores que 1.33 GeV, e multi-GeV, com energias maiores que esta. As linhas pontilhadas são histogramas mostrando o resultado esperado via Monte Carlo. Se o fluxo de neutrinos atmosféricos produzidos não

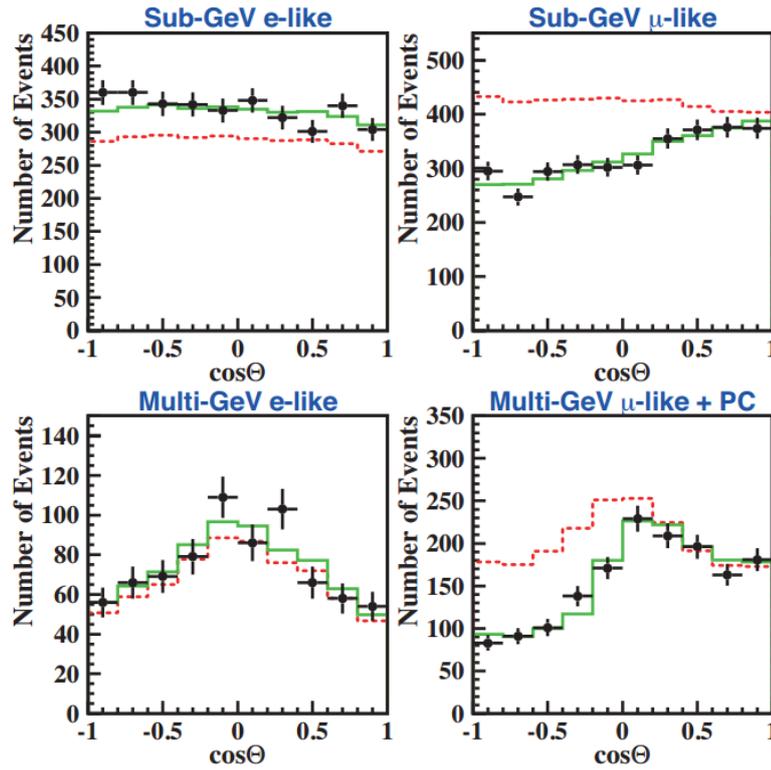


Figura 3.5: A distribuição em função do ângulo de zênite para os eventos totalmente contidos do tipo elétron e múon com energias menores (sub-GeV) e maiores (multi-GeV) que 1.33 GeV. Os histogramas pontilhados mostram os eventos Monte-Carlo para um cenário sem oscilação, e os histogramas sólidos são o melhor ajuste para oscilações do tipo  $\nu_\mu \longleftrightarrow \nu_\tau$ . Retirado de [18], original em [51].

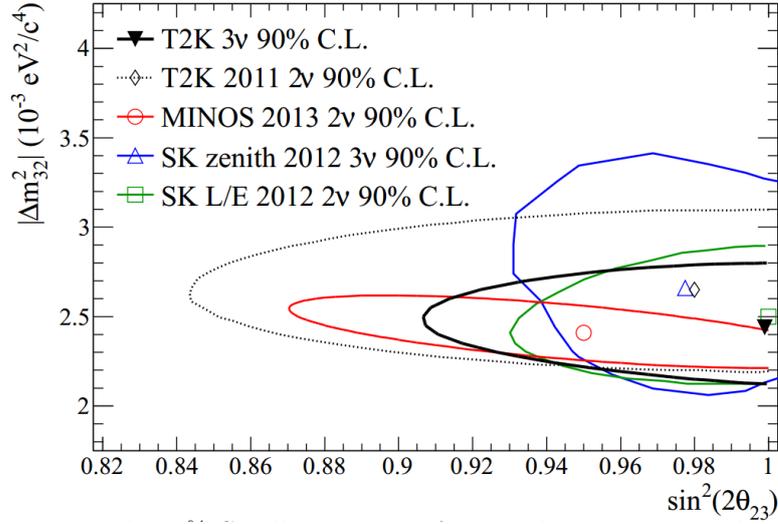


Figura 3.6: As regiões com 90% de confiança para o desaparecimento de  $\nu_\mu$  dos experimentos T2K, SUPER-K, e MINOS [26].

se modifica devido à distância total de propagação, a distribuição em função do ângulo de zênite deveria mostrar boa concordância com as simulações, o que não ocorre: os eventos do tipo  $\mu$  mostram grande desvio do resultado esperado. Por outro lado, o fluxo esperado de eventos tipo  $e$  (elétron) é consistente com as simulações. Assim, o desaparecimento dos neutrinos muônicos detectado sugere que estes podem ter oscilado em outros sabores que não neutrinos do tipo elétron, por exemplo  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ . Como no SUPER-K os neutrinos detectados estavam por volta de 1 a 10 GeV, isso resulta em um  $\Delta m^2 \sim 10^{-3}$  ou  $10^{-4}$  eV<sup>2</sup>.

Embora o SK-I tenha sugerido que o desaparecimento se dá por oscilação para neutrinos tauônicos, outros cenários (como decaimento de neutrinos ou descoerência quântica) não podem ser eliminados pela mera distribuição em função do ângulo de zênite. Embora simulações posteriores via rede neural do SK tenham sugerido com ainda mais firmeza a oscilação  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ , um dos experimentos que demonstrou com maior clareza que a oscilação se dá pela existência da massa dos neutrinos e não por outro fenômeno, foi o MINOS, nos EUA. O MINOS foi o segundo experimento de oscilação utilizando aceleradores, com detectores próximos e distantes, esse último um calorímetro de 5.4 kton. Realizado no Fermilab com um feixe de prótons de 120 GeV, tinha como *baseline*  $L = 735$  km. A energia do feixe podia ser variada mudando a posição relativa do alvo em relação à região do campo magnético e a corrente que gerava esse campo.

O MINOS apresentou seus primeiros resultados em 2005 [25], e todos os seus dados favorecem claramente a hipótese de desaparecimento dos  $\nu_\mu$ . Os modelos alternativos para explicar os dados, como decaimento de neutrinos e descoerência

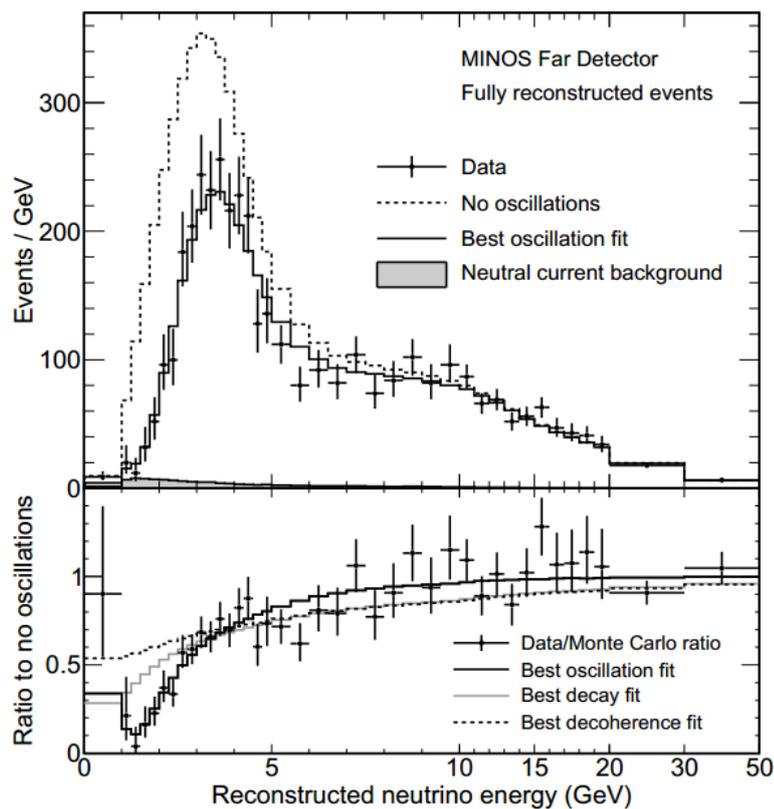


Figura 3.7: O gráfico superior mostra o espectro de energia dos eventos totalmente reconstruídos do detector distante do MINOS classificados como interações de corrente carregada. O gráfico inferior mostra a razão dos dados subtraídos do *background* pela hipótese de não oscilação. O melhor ajuste para a oscilação  $\nu_\mu \longleftrightarrow \nu_\tau$ , bem como para os modelos alternativos (decaimento de neutrinos e descoerência quântica), é mostrado.

quântica, são desfavorecidos por  $7\sigma$  e  $9\sigma$ , respectivamente, como mostra a fig. 3.7.

Este e outros experimentos, como o T2K, reportaram resultados mais precisos em 2014. Os parâmetros  $L, E$  de cada um dos experimentos de neutrinos atmosféricos é diferente, e portanto cada um possui intervalos de confiança e valores médios diferentes para as medidas  $\Delta m_{32}^2$  e  $\sin^2 \theta_{23}$ . Os resultados combinados são mostrados na fig. 3.6.

## Capítulo 4

# O Neutrino de Majorana

**N**O início do século XXI, a descoberta da oscilação dos neutrinos estabeleceu que estes podem ter massa e, portanto, não seriam descritos pela equação de Weyl. No entanto, um experimento de oscilação de neutrinos não é capaz de inferir a natureza da massa dessas partículas, uma vez que detecta somente as diferenças do quadrado dessa grandeza, e não seu valor absoluto.

A possibilidade do neutrino ser sua própria antipartícula levou E. Majorana a descobrir uma representação das matrizes  $\gamma$  cujos elementos são imaginários puros [27], compondo assim um subconjunto das soluções da equação de Dirac composto de bispinores totalmente reais – ou autoconjugados de carga.

Nesse capítulo serão investigadas as propriedades dessa representação e como ela se relaciona com os resultados obtidos no capítulo anterior, e como descrever a chamada massa de Majorana. Antes, será feita uma breve revisão do mecanismo que dá origem à massa do Modelo Padrão.

### 4.1 A Massa de Dirac

O Modelo Padrão é uma teoria quiral. Isso quer dizer que suas interações se manifestam pela teoria através das componentes de quiralidade bem definida das partículas. O fato de que o neutrino no Modelo Padrão teria massa nula não surgiu exatamente a partir da observação direta de sua massa, mas a partir das leis já conhecidas de conservação de momento angular e energia, conforme [11] apud [15], pág. 184. Um experimento clássico [11] demonstrou que a helicidade de neutrinos eletrônicos é predominantemente negativa. A reação estudada foi:



onde o átomo de európio tem momento angular total  $J = 0$  e o átomo de samário  $J = 1$ . Ao determinar a polarização do raio  $\gamma$  e invocando a conservação do

momento angular, a helicidade dos neutrinos foi determinada. Além disso, os experimentos sugerem que a massa do neutrino é suficientemente pequena para não poder ser determinada por restrições cinemáticas, como a partir do espectro do decaimento  $\beta$  [18]. Assim, idealmente, os neutrinos teriam massa nula.

Sendo a massa uma grandeza escalar, seu termo na lagrangeana de Dirac pode ser escrito como:

$$\mathcal{L} \supset -m\overline{\psi}_L\psi_R + \text{HC}, \quad (4.2)$$

explicitando as componentes quirais esquerda e direita. O papel de cada uma dessas partes de um espinor dentro da teoria eletrofraca é diferente. Mais precisamente, se transformam de maneiras distintas sobre a simetria  $SU(2)_L \otimes U(1)$ , o que faz com o que o objeto (4.2) tenha números quânticos não nulos: um termo de massa viola a invariância de gauge da teoria. A parte  $\psi_R$  é um singleto de  $SU(2)_L$ , e não toma parte nas transições de isospin.

Nesse contexto surge o mecanismo de Higgs, um ingrediente fundamental para gerar a massa das partículas no Modelo Padrão preservando a invariância de calibre. Dentro da simetria  $SU(2)_L$ , este é um dubleto composto de uma parte carregada  $\phi^+$  e outra neutra  $\phi^0$ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

A bem-conhecida relação de Gell-Mann e Nishijima:

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}, \quad (4.4)$$

onde  $Q$  é a carga elétrica,  $Y$  a hipercarga e  $T_3$  a terceira componente do isospin, sugere que o campo de Higgs  $\Phi$  terá  $Y_\Phi = +1$ . Uma descrição detalhada pode ser encontrada em [15]. Aqui será descrito somente que, após a quebra espontânea da simetria, o campo  $\Phi$  adquire um valor esperado de vácuo (VEV) na forma:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Sendo o vácuo eletricamente neutro, o campo deve retornar um autovalor nulo para a carga elétrica, no entanto responde de maneira não trivial às transformações dos geradores das simetrias  $T_3$  e  $Y$ . Podemos assim formar um escalar de Lorentz e um singleto de  $SU(2)_L \otimes U(1)$  na forma:

$$\mathcal{L} \supset -y[\overline{r}(\Phi^\dagger L) + (\overline{L}\Phi)r], \quad (4.6)$$

onde

$$L = \begin{pmatrix} \nu \\ \ell \end{pmatrix}_L \quad (4.7)$$

é o dubleto e  $r$  o singleto de  $SU(2)_L$ . No desenvolvimento deve estar claro que letras maiúsculas (minúsculas) como  $L$  e  $\Phi$  ( $n$  e  $r$ ) se referem a representações dubleto (singleto) de isospin fraco. Após o campo de Higgs adquirir um VEV  $\neq 0$  o termo de massa será da forma:

$$\mathcal{L} \supset -\frac{yv}{\sqrt{2}} \bar{r}\ell + \text{HC}, \quad (4.8)$$

concedendo assim somente ao lépton carregado uma massa

$$m_\ell = \frac{yv}{\sqrt{2}}, \quad (4.9)$$

mostrando que o VEV na forma (4.5) é essencial para que os neutrinos não adquiram massa. A extensão para as três famílias de léptons é imediata, ao somarmos os três termos de massa numa lagrangeana compacta:

$$\mathcal{L} \supset -y_{\alpha\alpha}(\bar{L}_\alpha\Phi)r_\alpha + \text{HC}, \quad (4.10)$$

onde  $\alpha = e, \mu, \tau$ , obtendo assim diferentes massas a partir do acoplamento  $y_{\alpha\alpha}$  que é diagonal. Isso equivale a dizer que os estados de interação dos léptons carregados correspondem aos seus estados de propagação.

Pode-se tentar acomodar uma massa para o neutrino dentro do Modelo Padrão pela simples adição de um campo direito  $n$  para o neutrino, que por construção leva a:

$$\mathcal{L} \supset -w[\bar{n}(\tilde{\Phi}^\dagger L) + (\bar{L}\tilde{\Phi})n] \longrightarrow -m_D[\bar{\nu}n + \bar{n}\nu], \quad (4.11)$$

onde  $w$  é uma nova constante de acoplamento. Para as três famílias escreve-se, não considerando ainda a oscilação de sabores, uma lagrangeana análoga àquela para o setor hadrônico:

$$\mathcal{L} \supset -w_{\alpha\alpha}(\bar{L}_\alpha\tilde{\Phi})n_\alpha + \text{HC}. \quad (4.12)$$

Aqui,  $\tilde{\Phi} = i\sigma_2\Phi^*$  é um campo conjugado ao Higgs. Essa proposta concede ao neutrino da família  $\alpha$  uma massa na forma

$$(m_D)_\alpha = \frac{w_{\alpha\alpha}v}{\sqrt{2}} \quad (4.13)$$

onde o subscrito  $D$  indica uma massa de Dirac. Essa prescrição preserva os números quânticos aditivos da teoria, como o número leptônico. Se o neutrino tem uma massa  $\lesssim$  eV, a constante de acoplamento deve ser cerca de  $\sim 10^{-11}$ , tendo em vista o VEV de algumas centenas de GeV. No entanto, além da pequena constante de acoplamento em relação à do elétron e dos outros férmions, ocupando uma posição dissonante das outras no Modelo, existe uma outra motivação para considerar uma proposta diferente da apresentada: o campo  $n$  pode ser um singlete de todas as interações conhecidas. Sendo o mecanismo de Higgs um ingrediente fundamental dessas interações, é possível então que outro mecanismo seja o responsável pela massa do neutrino.

A extensão para acomodar a mistura entre sabores é feita com os termos de massa escritos com os correspondentes estados de propagação  $\nu_i$  de acordo com (3.23):

$$\mathcal{L} \supset -m_i n_i \bar{\nu}_i + \text{HC}. \quad (4.14)$$

No contexto de uma teoria interagente, no entanto, deve-se escrever uma lagrangeana com estados de interação. Tomando como exemplo a corrente do elétron para um cenário de oscilação  $e \longleftrightarrow \mu$ , ignorando a terceira família, teríamos que modificá-la adicionando um análogo ao ângulo de Cabibbo do setor hadrônico. Conforme (3.48), portanto:

$$j_e^\mu = \frac{1}{2} g \bar{e} \gamma^\mu \nu_e \longrightarrow j_e^{\prime\mu} = g \bar{e} \gamma^\mu \nu_1 \cos \theta + g \bar{e} \gamma^\mu \nu_2 \sin \theta, \quad (4.15)$$

onde deve ser claro que os espinores de Weyl acima são todos esquerdos (a estrutura  $V-A$  da corrente está implícita). De maneira geral, considerando todas as famílias, de acordo com a (3.23):

$$j^{\prime\mu} = \sum_\alpha g \bar{\ell}_\alpha \gamma^\mu U_{\alpha i} \nu_i. \quad (4.16)$$

Levando essa proposta para os termos de massa, escrevemos:

$$\mathcal{L} \supset -\bar{n}_i M_{ij} U_{j\alpha}^\dagger \nu_\alpha + \text{HC}, \quad (4.17)$$

onde  $M_{ij} = m_i \delta_{ij}$  representa uma matriz diagonal onde organiza-se os valores de massa  $m_i, i = 1, 2, 3$  dos neutrinos. Repare que o campo esquerdo  $n_i$  também deve ser transformado da base de propagação  $i = 1, 2, 3$  para a base de interação  $\alpha = e, \mu, \tau$ . A prescrição usual é impor a diagonalização da matriz  $M$  com uma transformação "biunitária" [15, 19] onde  $A^\dagger A = B^\dagger B = \mathbb{1}$ :

$$M_{ij} = m_i \delta_{ij} = B_{ik}^\dagger W_{kl} A_{l\alpha} \quad (4.18)$$

e então pode-se escrever os termos de massa a partir dos estados de interação como:

$$\mathcal{L} \supset -\bar{n}_i B_{ik}^\dagger W_{kl} A_{l\alpha} \nu_\alpha + \text{HC}. \quad (4.19)$$

Assim, os acoplamentos de Yukawa  $y_{\alpha\alpha}$  e  $w_{\alpha\alpha}$  dão lugar a matrizes de acoplamento  $Y$  e  $W$  de dimensão possivelmente igual ao número de famílias e que podem admitir elementos fora da diagonal  $y_{\alpha\beta}$  e  $w_{\alpha\beta}$ .

## 4.2 A Representação de Majorana

Observando a forma da equação de Dirac, podemos tentar estabelecer uma condição para obter soluções para campos reais. Se todos os elementos das matrizes  $\gamma$  são puramente imaginários, então a equação de Dirac admite soluções reais nessa representação. A representação para a qual isso ocorre foi determinada por E. Majorana [27], e vem a ser, em blocos  $2 \times 2$ :

$$\tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Em dimensão  $4 \times 4$  escreve-se:

$$\tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad (4.21)$$

$$\tilde{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

A matriz  $\gamma^5$  será:

$$\tilde{\gamma}^5 = \begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Nessa representação, devem existir soluções que satisfaçam a condição:

$$\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}^*, \quad (4.24)$$

e deve ser possível achar uma transformação unitária que leve da representação de Majorana para qualquer outra, ou seja,

$$\Psi = U\tilde{\Psi}, \quad (4.25)$$

e assim a condição de realidade se escreve de maneira totalmente geral como:

$$U^\dagger \psi = (U^\dagger \psi)^* \quad (4.26)$$

$$\Rightarrow \psi = UU^T \psi^*, \quad (4.27)$$

que é a chamada condição de Majorana. Da unitariedade de  $U$  decorre que  $UU^T$  também é unitária. A matriz que transforma da representação quirial para a de Majorana se escreve como:

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sigma^2 & -i(1 - \sigma^2) \\ i(1 - \sigma^2) & 1 + \sigma^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & -i & 1 \\ i & 1 & -1 & 1 \\ i & -1 & 1 & -i \\ 1 & i & i & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Por inspeção, a transformação de  $UU^T$  nas matrizes  $\gamma^\mu$  é:

$$(UU^T)^\dagger \gamma_\mu (UU^T) = (U \tilde{\gamma}_\mu^* U^\dagger)^T. \quad (4.29)$$

Como as  $\tilde{\gamma}_\mu$  são totalmente complexas, teremos  $\tilde{\gamma}_\mu^* = -\tilde{\gamma}_\mu$ , e portanto:

$$(UU^T)^\dagger \gamma_\mu (UU^T) = -\gamma_\mu^T. \quad (4.30)$$

Comparando (4.30) com a (2.64), têm-se:

$$UU^T = \gamma^0 \mathcal{C} \quad (4.31)$$

relacionando a representação de Majorana com a conjugação de carga. Pode-se usar a (4.31) como a definição da conjugação de carga, que passa a independe da representação utilizada. De acordo com a (2.67), um espinor de Majorana (numa representação qualquer) é aquele que quando transformado para a representação de Majorana apresenta componentes totalmente reais. Ele se obtém pela restrição:

$$\psi = \psi^c, \quad (4.32)$$

que na representação de Weyl denotaremos, explicitamente, de acordo com (2.67) e (2.69) da seguinte maneira:

$$\chi = \begin{pmatrix} \xi \\ \epsilon \xi^* \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \omega = \begin{pmatrix} -\epsilon \eta^* \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

conforme construamos o espinor de Majorana com as componentes esquerdas ou direitas de um espinor de Weyl. O 4-espinor  $\chi$  ( $\omega$ ) é portanto um campo autoconjugado construído com as partes direita (esquerda) do 4-espinor de Dirac massivo

$\psi = (\xi, \eta)$ . Da discussão que resulta em (2.72), conclui-se que a condição de Majorana é um invariante de Lorentz: todos os referenciais concordam sobre o fato dos campos serem autoconjugados de carga. Decorre ainda das (2.57) e (2.69) que podemos definir:

$$\chi = \chi_L + \chi_L^c \quad \text{e} \quad \omega = \omega_R^c + \omega_R, \quad (4.34)$$

onde deve ser claro que a operação de conjugação de carga se dá após a projeção da quiralidade, isto é:

$$\psi_L^c = (\psi_L)^c = (\psi^c)_R \quad \text{e} \quad \psi_R^c = (\psi_R)^c = (\psi^c)_L. \quad (4.35)$$

A equação de Dirac para um férmion de Majorana na representação quiral se escreve:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = m\psi_L^c. \quad (4.36)$$

### 4.3 A Massa de Majorana

A massa de Dirac conecta partes esquerdas e direitas de um único campo  $\psi$ , cf. (4.2). Assim, desconsiderando a mistura por  $U$ , a chamada matriz PKMNS, o auto-estado de massa é simplesmente

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad (4.37)$$

de modo que

$$\mathcal{L} \supset -m_D \overline{\psi}_L \psi_R + \text{HC} \quad (4.38)$$

é o termo de massa e  $m_D$  é a massa de Dirac vista na seção anterior. Uma massa de Majorana conecta componentes esquerdas e direitas de campos autoconjugados. Na notação da (4.34), teremos como lagrangeana de massa (invariante de Lorentz) mais geral possível escrita a partir dos estados de interação a seguinte:

$$\mathcal{L} \supset -\frac{m_L}{2} \overline{\nu}_L^c \nu_L - \frac{m_R}{2} \overline{n}_R^c n_R - m_D \overline{n}_R \nu_L + \text{HC}. \quad (4.39)$$

onde  $n_R$  é singleto de todas as interações do Modelo Padrão e  $\nu_L$  é um iso-dubleto (cuja outra componente é  $e_L$ ) com  $I_3 = 1/2$  e  $Y = -1$ . Deve-se usar um fator  $\frac{1}{2}$  nesses termos de massa a fim de evitar uma dupla contagem ao expressar de maneira implícita o conjugado hermiteano. As massas  $m_{L,R}$  são as chamadas massas de Majorana. Repara-se que o primeiro termo em (4.39) viola as interações eletrofracas: os números quânticos do termo de massa esquerdo não tem soma nula.

Assim, poderia-se fazer  $m_L = 0$ . No entanto, esse termo será mantido para que o caso mais geral seja estudado.

Sem a covariância manifesta, utilizando somente espinores de duas componentes, pode-se escrever as massas de Majorana de acordo com (4.33) como:

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{2}m_L\xi^T\epsilon\xi - \frac{1}{2}m_R\eta^T\epsilon\eta + \text{HC}, \quad (4.40)$$

de modo que é possível ver que, mesmo sendo a massa de Majorana algo menos familiar que a massa de Dirac, é um objeto formado a partir de somente um espinor de Weyl, e portanto de dois graus de liberdade. Assim, a massa de Majorana é o mais simples termo de massa para um férmion, apesar de ser mais restrigente: se  $\xi$  ou  $\eta$  carregam uma carga de simetria intacta local ou global  $U(1)$ , uma massa de Majorana viola essa simetria.

De maneira mais geral, considere termos de massa onde  $\xi$  ou  $\eta$  transformam-se como uma representação de uma simetria  $U$ :

$$\eta^T\epsilon\eta \longrightarrow \eta^T U^T \epsilon U \eta = \eta^T \epsilon U^T U \eta. \quad (4.41)$$

onde usou-se o fato de que  $\epsilon$  e  $U$  agem em espaços diferentes. O termo é invariante somente se  $U^T U = 1$ , que é verdade somente se a transformação unitária for também ortogonal (uma rotação real), isto é  $U^* = U$ . Fisicamente, um férmion de Majorana é sua própria antipartícula, pois esta deve possuir cargas opostas às da partícula.

### 4.3.1 As Fases de Majorana

Se o neutrino é uma partícula de Majorana, decorre da discussão da seção anterior e da (3.44) que a matriz  $U_{PMNS}$  contém  $(n - 1)$  fases adicionais em comparação ao cenário do neutrino de Dirac, pois os campos de Majorana não podem absorver fases unitárias. Nesse caso,  $U$  pode ser escrita na forma:

$$U = VP \quad (4.42)$$

onde a matriz  $V$  contém as  $N(N + 1)/2 - (2N - 1) = (N - 1)(N - 2)/2$  fases de Dirac e a matriz  $P$  é uma matriz diagonal com as  $(N - 1)$  fases adicionais de Majorana  $e^{i\frac{\alpha_{jk}}{2}}$ . No caso de  $N = 3$  gerações de léptons, têm-se:

$$P = \text{diag}(1, e^{i\frac{\alpha_{21}}{2}}, e^{i\frac{\alpha_{31}}{2}}), \quad (4.43)$$

para um total de uma fase de Dirac e duas de Majorana. Mesmo no caso de uma mistura de somente dois neutrinos, uma fase de Majorana ainda é possível, em contraste com nenhuma fase de Dirac. No caso de invariância de CP fixando  $e^{2i\delta} = 1$ , têm-se as fases de Majorana como  $e^{i\alpha_{jk}} = \pm 1$ . Essas fases adicionais serão importantes no estudo do decaimento beta duplo sem neutrinos como será demonstrado adiante.

## 4.4 O Mecanismo Seesaw

Um modelo simples para entender a disparidade da massa do neutrino em comparação com a de todos os outros férmions, incluindo os quarks, é o mecanismo seesaw. Existem várias classes de modelos, cada um estendendo o Modelo Padrão de maneira diferente. O modelo tradicional inclui campos fermiônicos de Majorana diretos inertes perante as interações eletrofracas e a existência de uma escala de massa muito alta.

A lagrangeana (4.39) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\overline{\nu_L^c} \ \overline{n_R}) \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ n_R^c \end{pmatrix} + \text{HC}, \quad (4.44)$$

onde

$$M' = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

é a matriz com os parâmetros reais das massas. A diagonalização de  $M'$  é imediata:

$$\begin{aligned} M &= S^T M' S \\ &= \begin{pmatrix} \cos \rho & -\sin \rho \\ \sin \rho & \cos \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \rho & \sin \rho \\ -\sin \rho & \cos \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda'_- & 0 \\ 0 & \lambda'_+ \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde  $\rho = m_D/(m_L + m_R)$ . Os autovalores serão:

$$\lambda'_\pm = \frac{1}{2} \left[ (m_L + m_R) \pm \sqrt{(m_L + m_R)^2 + 4m_D^2} \right], \quad (4.47)$$

que podem ser melhores escritos como:

$$\frac{\lambda'_\pm}{m_L + m_R} = \lambda_\pm = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + 4\rho^2} \right) \quad (4.48)$$

O caso particular de maior interesse nesse cenário é aquele que preserva todas as simetrias do Modelo Padrão, quando  $m_L = 0$ ,  $m_R \gg m_D$ . Nesse caso, o parâmetro  $\rho$  é aproximadamente:

$$\rho = m_D/m_R \ll 1, \quad (4.49)$$

e os autovalores são aproximados para:

$$\lambda_\pm \simeq \frac{1}{2} [1 \pm (1 + 2\rho^2)] \Rightarrow \begin{cases} \lambda_+ = 1 + \rho^2 \\ \lambda_- = -\rho^2, \end{cases} \quad (4.50)$$

onde a diagonalização fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_D^2/m_R & 0 \\ 0 & m_R \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\rho^2), \quad (4.51)$$

mostrando que para termos um autovalor  $\lambda'_- = -m_D^2/m_R$  real, o parâmetro  $m_D$  deveria ser imaginário puro. Isso pode ser contornado com a diagonalização  $M = Z^T M' Z$ , onde:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

é uma matriz que satisfaz:

$$Z^T Z \neq Z^\dagger Z, \quad (4.53)$$

$$Z^\dagger Z = \mathbb{1} + \mathcal{O}(\rho^2). \quad (4.54)$$

agindo como uma transformação meramente ortogonal de modo a garantir  $-m_D^2/m_R \longrightarrow -i^2 m_D^2/m_R > 0$ . Escreveremos os autovalores como

$$m_1 = \frac{m_D^2}{m_R} \quad \text{e} \quad m_2 = m_R. \quad (4.55)$$

A fim de determinar os autoestados de massa, percebe-se que a lagrangeana será:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \supset & -\frac{1}{2} (\overline{\nu_L^c}, \overline{n_R}) (Z^T)^{-1} Z^T \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} Z Z^{-1} \begin{pmatrix} \nu_L \\ n_R^c \end{pmatrix} \\ & -\frac{1}{2} (\overline{\nu_L}, \overline{n_R^c}) Z Z^{-1} \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} (Z^T)^{-1} Z^T \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ n_R \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

onde a segunda linha é o hermiteano conjugado da primeira. Pode-se combinar as duas linhas em uma só, a fim de obter:

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{2} \left[ Z^{-1} \begin{pmatrix} \overline{\nu_L^c} \\ \overline{n_R} \end{pmatrix} + Z^T \begin{pmatrix} \overline{\nu_L} \\ \overline{n_R^c} \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \left[ Z^{-1} \begin{pmatrix} \nu_L \\ n_R^c \end{pmatrix} + Z^T \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ n_R \end{pmatrix} \right]. \quad (4.57)$$

Assim, os campos que correspondem a autoestados de massa são:

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ Z^{-1} \begin{pmatrix} \nu_L \\ n_R^c \end{pmatrix} + Z^T \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ n_R \end{pmatrix} \right], \quad (4.58)$$

onde, desenvolvendo as matrizes  $Z$  podemos finalmente chegar a:

$$\nu_1 = \frac{i}{\sqrt{2}} [\nu_L^c - \nu_L + \rho(n_R^c - n_R)] \quad (4.59)$$

$$\nu_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} [\rho(\nu_L^c + \nu_L) + n_R^c + n_R]. \quad (4.60)$$

É imediato ver que tratam-se de campos autoconjugados, isto é,  $\nu_1 = \nu_1^c$  e  $\nu_2 = \nu_2^c$ , pois para todo campo espinorial que os compõem têm-se  $(\psi^c)^c = \psi$ , e a conjugação de carga troca o sinal da unidade imaginária. Além disso, os dois campos possuem componentes esquerdas e direitas, descrevendo portando espinores com massa  $m \neq 0$ . No entanto, comparando com as soluções da equação de Dirac obtidas em (2.85) e (2.86), o fator de supressão é  $\rho$  e não age sobre as componentes esquerdas ou direitas, mas sim sobre as componentes do campo do Modelo Padrão  $\nu$  ou sobre as do campo estéril  $n$ .

A lagrangeana será, finalmente:

$$\mathcal{L} \supset - \sum_{i=1}^2 m_i \bar{\nu}_i \nu_i, \quad (4.61)$$

com dois termos de massa de Majorana desacoplados. Os estados  $\nu_1$  e  $\nu_2$  são dois estados físicos de propagação independentes.

A extensão para as três (ou  $N$ ) famílias de léptons se faz elevando as massas  $m_D, m_L, m_R$  a matrizes  $\mathcal{M}_D, \mathcal{M}_L, \mathcal{M}_R$  de dimensão  $3 \times 3$ , e os campos  $\nu_L$  e  $n_R$  a vetores de dimensão 3 no espaço de massa:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_L & \mathcal{M}_D^T \\ \mathcal{M}_D & \mathcal{M}_R \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\nu}_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_R = \begin{pmatrix} n_{eR} \\ n_{\mu R} \\ n_{\tau R} \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

de modo que a lagrangeana:

$$\mathcal{L} \supset - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{n}}_R^c \mathcal{M} \boldsymbol{\nu}_L \quad (4.63)$$

será diagonalizada a fim de obter os termos de massa na forma:

$$\mathcal{L} \supset \sum_{i=1}^{2N} m_i \bar{\nu}_i \nu_i. \quad (4.64)$$

Neutrinos de Dirac-Majorana são casos especiais da prescrição apresentada, sendo ainda auto-conjugados de carga. Isso pode ser visto mais facilmente no caso de uma única família, onde a matriz de massa será:

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.65)$$

e o parâmetro (não aproximado) será  $\rho = \pi/4$ , levando a  $m_1 = m_2 = m_D$ , com a

diagonalização:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Z^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ Z^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (4.66)$$

obtendo a partir da (4.58) aos autoestados:

$$\nu_1 = \frac{i}{\sqrt{2}} (\nu_L - \nu_L^c + n_R - n_R^c), \quad (4.67)$$

$$\nu_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\nu_L + \nu_L^c + n_R + n_R^c). \quad (4.68)$$

## 4.5 Medidas Diretas da Massa do Neutrino

Tentativas de medir a massa do neutrino diretamente em geral envolvem decaimentos bem conhecidos de partículas que podem emitir radiação beta. O método usual é medir a massa do neutrino do elétron a partir da reação:



Utilizando-se da conservação de momento e energia das partículas existentes antes e depois do decaimento, a princípio seria possível determinar a massa do neutrino ejetado. Esta seria simplesmente o resultado do balanço:

$$Q = c^2(m_{Z,A} - m_{Z+1,A} - m_e - m_\nu), \quad (4.70)$$

onde  $(Z, A)$  indica um nuclídeo com  $Z$  prótons e  $A$  núcleons. Uma vez que a massa do neutrino é muito pequena, experimentos desse tipo devem ser muito sensíveis. Qualquer erro sistemático tem o potencial de ser interpretado como uma massa não nula. A teoria de perturbação feita inicialmente por Fermi [6] descreve a taxa de decaimento em função da energia do elétron emitido no decaimento, a menos de normalização, pela equação:

$$\frac{dN}{dE_e} = p(E + m_e)(E_0 - E) \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2} F(E_e) \Theta(E_0 - E - m_\nu) \quad (4.71)$$

onde  $m_e(m_\nu)$  é a massa do elétron (neutrino do elétron),  $E_e(E_0)$  é a energia (energia máxima) do elétron permitida pela cinemática do decaimento. A função de Fermi  $F(E_e)$  e leva em conta a interação eletromagnética do sistema. A função degrau  $\Theta$  impõe a conservação de energia. Uma massa não nula do neutrino tem o efeito de

mudar a inclinação da curva espectral e também a energia máxima para o elétron. A partir dessas diferenças é possível medir de maneira direta a massa do neutrino.

Uma das melhores alternativas para um experimento que vise detectar os elétrons do fim do espectro é utilizar amostras gasosas, combinando uma baixa densidade (e portanto menor chance de perda de energia por espalhamento) com um grande número de possíveis decaimentos. Um material possível é o trítio gasoso, que decai como:



Um experimento desse tipo é o KATRIN, que utiliza um espectrômetro MAC-E (uma grande câmara com um gradiente de campo elétrico e magnético). Quando o decaimento  $\beta$  ocorre, o elétron emitido é guiado ao longo do potencial retardante logo após o solenóide. Esse potencial só não é capaz de frear somente os elétrons mais energéticos. Aquelas partículas com energia suficiente para vencer a barreira são então guiados pelos campos para o detector à direita. Esse experimento visa medir a massa do neutrino do elétron através do decaimento  $\beta$  usual com precisão de  $5\sigma$  nos próximos anos, caso essa seja até 0.35 eV. Do contrario, ele poderá impor um limite superior de 0.2 eV.

Experimentos do tipo no entanto ainda não são capazes de avançar a compreensão da natureza da massa do neutrino [18]. Estabelecer se os estados de propagação  $\nu_i$  dos neutrinos são férmions de Dirac ou Majorana é de suma importância para a compreensão da mistura de neutrinos e das interações fundamentais por trás do fenômeno. Os neutrinos serão partículas de Dirac, não auto-conjugadas, se conservarem algum número aditivo de léptons, como  $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ . Além disso, o mecanismo See-Saw visto na seção anterior prevê neutrinos de Majorana.

O decaimento beta duplo sem neutrinos ( $\beta\beta 0\nu$ ) é uma transição nuclear rara que viola a simetria do número leptônico por duas unidades, que pode ocorrer se o neutrino for uma partícula de Majorana. Um núcleo inicial  $(Z, A)$  decai para  $(Z + 2, A)$  emitindo dois elétrons no processo. Elementos favoritos para a detecção dessa transição são aqueles com  $Z$  e  $A$  pares, cuja energia de ligação é maior que a do nuclídeo  $(Z + 1, A)$  e menor que a de  $(Z + 2, A)$ .

Atualmente, um experimento que detecte esse decaimento daria evidência definitiva sobre a existência do neutrino de Majorana, além de lançar luz sobre a escala absoluta das massas. Existem somente alguns poucos isótopos que decaem dessa maneira. O processo é de quarta ordem  $\sim (G_F \cos \theta_C)^{-4}$  nos parâmetros do Modelo Padrão, portanto extremamente raro.

Considerando a mistura de neutrinos, a corrente do Modelo Padrão para as transições eletrônicas fracas é da forma:

$$j_e^\mu = \sum_k \bar{\nu}_{kL} U_{ek}^* \gamma^\mu e_L. \quad (4.73)$$

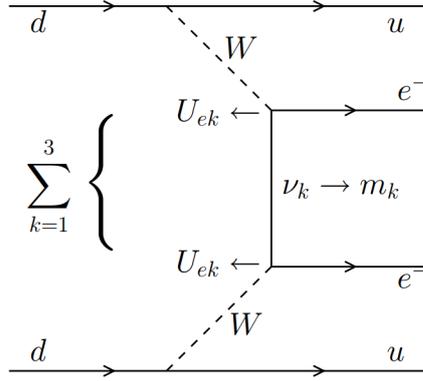


Figura 4.1: Diagrama de Feynman em nível de árvore para um processo de decaimento beta duplo sem neutrinos no cenário de mistura de três neutrinos massivos. Figura retirada de [19].

O neutrino se propaga entre os vértices da interação fraca como uma superposição de autoestados de massa de Majorana. Como não há distinção entre partícula e antipartícula, nesse caso cada vértice, portanto, de acordo com a (4.73), contribui com um fator  $U_{ek}$ , levando a um fator  $U_{ek}^2 \neq |U_{ek}|^2$  na amplitude do processo. Do ponto de vista dos diagramas de Feynman isso leva a juntar duas linhas fermiônicas com direções opostas, algo não permitido dentro das interações do Modelo Padrão (veja fig. 4.1). A amplitude será ainda suprimida por um fator  $m_k/E_{\nu_e}$  em função da componente de quiralidade esquerda do neutrino, de acordo com as (2.97) e (4.36), uma vez que é essa componente que interage com o bóson  $W^\pm$ . Assim, a amplitude do processo em questão poderá ser escrita como:

$$A_{\beta\beta 0\nu} = \langle m_{ee} \rangle M, \quad (4.74)$$

onde

$$\begin{aligned} |\langle m_{ee} \rangle| &= \left| \sum_k m_k U_{ek}^2 \right| \\ &= \left| (m_1 c_{12}^2 + m_2 s_{12}^2 e^{i\alpha_{21}} c_{13}^2 + m_3 s_{13}^2 e^{i(\alpha_{31} - 2\delta)}) \right| \end{aligned} \quad (4.75)$$

é a massa efetiva de Majorana do decaimento  $\beta\beta 0\nu$ . Essa massa pode ser expressa a partir dos parâmetros  $\Delta m_{jk}^2$  e  $\sin \theta_{jk}$  já conhecidos dos experimentos de oscilação, junto com suas incertezas. Assim,  $|\langle m_{ee} \rangle|$  será uma função do menor autovalor do espectro de massa dos neutrinos,  $\min(m_k)$ , das fases de Dirac e Majorana, e do tipo de espectro (normal ou invertido). Para o espectro normal, isto é,  $m_1 < m_2 < m_3$  têm-se:

$$|\langle m_{ee} \rangle| \simeq \left| \sqrt{\Delta m_{21}^2 s_{12}^2 c_{13}^2} + \sqrt{\Delta m_{31}^2 s_{13}^2} e^{i(\alpha_{31} - \alpha_{21} - 2\delta)} \right|, \quad (4.76)$$

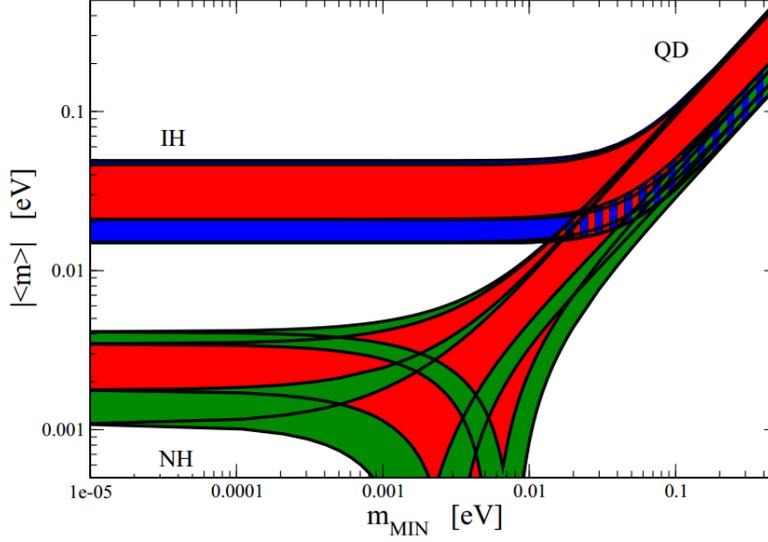


Figura 4.2: A massa de Majorana efetiva  $|\langle m_{ee} \rangle|$ , incluindo incerteza de  $2\sigma$ , como função de  $\min(m_k)$ . A figura é construída usando essa incerteza e as medidas dos parâmetros dos experimentos de oscilação, e as fases são variados no intervalo  $[0, \pi]$ . A cor vermelha indica regiões onde existe violação de CP, enquanto nas regiões verdes e azuis correspondem a  $\alpha_{21}$  ou  $\alpha_{31}$ , respectivamente, conservando CP. Uma medida de  $|\langle m_{ee} \rangle| < 10^{-2}$  eV pode estabelecer conclusivamente que o espectro das massas é do tipo normal. Retirado de [52].

enquanto para o espectro invertido ( $m_3 < m_2 < m_1$ ) será:

$$|\langle m_{ee} \rangle| \simeq \sqrt{\Delta m_{23}^2 + m_3^2} \left(1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \frac{\alpha_{21}}{2}\right)^{1/2}, \quad (4.77)$$

onde foi usado o fato de que  $\sin^2 \theta_{13} \ll \cos 2\theta_{12}$ . A massa efetiva em função da menor massa do espectro é mostrada na fig. 4.2. Experimentos que medem os elétrons mais energéticos do decaimento beta do trítio impõem um limite superior para a massa do neutrino [28]:

$$m_{\bar{\nu}_e} < 2 \text{ eV}, \quad (4.78)$$

enquanto medidas cosmológicas obtidas pela colaboração PLANCK [29] resultam num limite:

$$\sum_k m_k < 0.66 \text{ eV}. \quad (4.79)$$



## Capítulo 5

# Conclusão e Perspectivas

 PÓS o grande progresso obtido no estudo da oscilação de neutrinos, uma melhor compreensão do padrão do espectro de massa e de mistura, de sua origem e o papel, se existente, da violação de CP no setor leptônico requerem um longo programa de pesquisa. Alguns dos problemas a serem desvendados são:

1. Determinar o sinal de  $\Delta m_{\text{atm}}^2$  e o tipo de espectro (normal ou invertido) dos neutrinos;
2. Avançar na compreensão da natureza da massa do neutrino, quer seja Dirac ou Majorana, e se ele possui ambas, em que proporção;
3. Melhorar a medida do pequeno ângulo  $\theta_{13}$ . Junto com a fase de Dirac  $\delta$ , esse ângulo determina a magnitude da violação de CP do setor leptônico;
4. Compreender a partir de primeiros princípios o mecanismo que gera a massa dos neutrinos e a não-conservação do número leptônico em cada geração de léptons individualmente. Isso inclui compreender melhor a origem do padrão da mistura, que do ponto de vista de uma teoria de calibre pode estar relacionado à uma nova simetria do setor de léptons.

A conferência NOW 2014 resumiu com grau de confiança de  $3\sigma$  a magnitude dos parâmetros da matriz PMNS, conforme [44], que contém também o resumo de muitos outros resultados:

$$|U| = \begin{pmatrix} 0.801 \longleftrightarrow 0.845 & 0.514 \longleftrightarrow 0.580 & 0.137 \longleftrightarrow 0.158 \\ 0.225 \longleftrightarrow 0.517 & 0.441 \longleftrightarrow 0.669 & 0.614 \longleftrightarrow 0.793 \\ 0.246 \longleftrightarrow 0.529 & 0.464 \longleftrightarrow 0.713 & 0.590 \longleftrightarrow 0.776 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

## 5.1 Experimentos Atuais e Futuros

Medidas de precisão de  $\theta_{13}$  estão sendo tomados pelos experimentos Daya Bay, Reno e Double-Chooz. Decorre das medidas já realizadas uma pequena sugestão de que a fase de Dirac tem um valor  $\delta \simeq 3\pi/2$ , com valores CP-conservativos de  $[0, \pi]$  sendo desfavorecidos em até  $2\sigma$  para o caso de espectro normal [45]. Para o espectro invertido, no entanto, o valor de  $\delta = \pi$  está a somente  $1\sigma$  de  $\delta = 3\pi/2$ . A medida não nula de  $\theta_{13}$  encoraja o estudo da violação de CP com feixes de neutrinos de alta intensidade, como nos experimentos T2K e NOVA.

### 5.1.1 O Experimento DUNE

O DUNE, durante um curto período chamado de LBNE (*Long Baseline Neutrino Experiment*), é um experimento futuro de feixe de neutrinos gerados no Fermilab, em Batavia, IL, que contém um detector próximo, propagando-se por 1300 km até o detector distante em uma mina em Dakota do Sul. A documentação extensamente detalhada pode ser encontrada em [46–50]. A colaboração planeja um estudo minucioso da mistura de neutrinos, pretende resolver o problema da hierarquia do espectro e bucar pela violação de CP no setor dos léptons. O projeto do detector e a intensidade do feixe permitirão acessar com sensibilidade superior (alguns com precisão de até  $5\sigma$ ):

- A medida do ângulo de mistura  $\theta_{13}$  e as diferenças entre as oscilações  $\nu_\mu \longleftrightarrow \nu_e$  e  $\bar{\nu}_\mu \longleftrightarrow \bar{\nu}_e$ .
- O parâmetro  $\sin^2 2\theta_{23}$ , que é  $> 0.95$  com 90% de grau de confiança, o que equivale a  $\theta_{23} \simeq 45^\circ$ . O DUNE pretende ser o primeiro experimento a acessar o octante do ângulo, isto é, estabelecer se  $\theta_{23}$  é maior, menor, ou exatamente  $45^\circ$ .

Além da física fundamental de neutrinos, o DUNE pretende:

- Procurar pelo decaimento do próton, adquirindo uma substancial melhora nos limites atuais do tempo de vida dessa partícula, em vários candidatos, como por exemplo  $p \rightarrow K^+ + \bar{\nu}$ .
- Detecção e medida do fluxo de neutrinos provenientes do colapso de uma supernova dentro da Via Láctea, se o evento ocorrer no tempo de operação do experimento.

Objetivos secundários incluem medidas de parâmetros de neutrinos atmosféricos, possíveis com os detectores projetados, interações de geoneutrinos e de neutrinos cósmicos de médias energias.

Os primeiros protótipos já estão em testes, e a operação plena do DUNE está prevista para 2025. A continuidade do experimento após 2035 será ditada pelas oportunidades de nova física que o experimento proporcionará.



# Bibliografia

- [1] A. Einstein, “On the electrodynamics of moving bodies,” *Annalen der Physik* **17** no. 10, (1905) 891–921.
- [2] P. B. Pal, “Representation independent manipulations with Dirac spinors,” [arXiv:0703214](#) [physics.ed-ph].
- [3] S. S. Schweber and H. Feshbach, “An introduction to relativistic quantum field theory,” *American Journal of Physics* **30** no. 8, (1962) 610–610.
- [4] P. B. Pal, “Dirac, Majorana and Weyl fermions,” *Am. J. Phys.* **79** (2011) 485–498, [arXiv:1006.1718](#) [hep-ph].
- [5] H. Weyl, “Electron and gravitation,” *Z. Phys.* **56** (1929) 330–352.
- [6] A. C. Bertulani and H. Schechter, *Introdução à Física Nuclear*. UFRJ, Rio de Janeiro, 2007.
- [7] E. Fermi, “An attempt of a theory of beta radiation. 1,” *Z. phys* **88** no. 161, (1934) 10.
- [8] J. N. Bahcall, A. M. Serenelli, and S. Basu, “New solar opacities, abundances, helioseismology, and neutrino fluxes,” *Astrophys. J.* **621** (2005) L85–L88, [arXiv:astro-ph/0412440](#) [astro-ph].
- [9] L. M. Brown, “Idea of the neutrino,” *Phys. Today;(United States)* **31** no. 9, (1978) .
- [10] C.-S. Wu, E. Ambler, R. Hayward, D. Hoppes, and R. P. Hudson, “Experimental test of parity conservation in beta decay,” *Physical review* **105** no. 4, (1957) 1413.
- [11] M. Goldhaber, L. Grodzins, and A. Sunyar, “Helicity of neutrinos,” *Physical Review* **109** no. 3, (1958) 1015.

- [12] R. Davis Jr, D. S. Harmer, and K. C. Hoffman, “Search for neutrinos from the sun,” *Physical Review Letters* **20** no. 21, (1968) 1205.
- [13] B. Pontecorvo, “Report pd-205,” *Chalk River Laboratory* (1946) .
- [14] K. S. Hirata, T. Kajita, *et al.*, “Observation of  $\bar{\nu}_e$  solar neutrinos in the kamiokande-ii detector,” *Physical Review Letters* **63** no. 1, (1989) 16.
- [15] C. Quigg, *Gauge theories of the strong, weak, and electromagnetic interactions*. Princeton University Press, 2013.
- [16] **SNO Collaboration** Collaboration, B. Aharmim *et al.*, “Combined analysis of all three phases of solar neutrino data from the sudbury neutrino observatory,” *Phys. Rev. C* **88** (Aug, 2013) 025501.
- [17] B. Aharmim *et al.*, “Electron energy spectra, fluxes, and day-night asymmetries of  $\bar{\nu}_e$  solar neutrinos from measurements with nacl dissolved in the heavy-water detector at the sudbury neutrino observatory,” *Physical Review C* **72** no. 5, (2005) 055502.
- [18] K. A. Olive, P. D. Group, *et al.*, “Review of particle physics,” *Chinese Physics C* **38** no. 9, (2014) 090001.
- [19] C. Giunti and C. W. Kim, *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics*. OUP Oxford, 2007.
- [20] S. Goswami, A. Bandyopadhyay, and S. Choubey, “Global analysis of neutrino oscillation,” *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements* **143** (2005) 121–128.
- [21] A. Gando *et al.*, “Constraints on  $\theta_{13}$  from a three-flavor oscillation analysis of reactor antineutrinos at kamland,” *Physical Review D* **83** no. 5, (2011) 052002.
- [22] K. Eguchi *et al.*, “First results from kamland: evidence for reactor antineutrino disappearance,” *Physical Review Letters* **90** no. 2, (2003) 021802.
- [23] M. Honda, T. Kajita, K. Kasahara, and S. Midorikawa, “New calculation of the atmospheric neutrino flux in a three-dimensional scheme,” *Physical Review D* **70** no. 4, (2004) 043008.
- [24] Y. Fukuda *et al.*, “Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos,” *Physical Review Letters* **81** no. 8, (1998) 1562.

- [25] D. G. Michael *et al.*, “Observation of muon neutrino disappearance with the minos detectors in the numi neutrino beam,” *Physical Review Letters* **97** no. 19, (2006) 191801.
- [26] K. Abe *et al.*, “Measurement of neutrino oscillation parameters from muon neutrino disappearance with an off-axis beam,” *Physical review letters* **111** no. 21, (2013) 211803.
- [27] E. Majorana, “Theory of the symmetry of electrons and positrons,” *Nuovo Cim* **14** no. 171, (1937) 50.
- [28] V. Aseev, A. Belesev, A. Berlev, E. Geraskin, A. Golubev, N. Likhovid, V. Lobashev, A. Nozik, V. Pantuev, V. Parfenov, *et al.*, “Upper limit on the electron antineutrino mass from the troitsk experiment,” *Physical Review D* **84** no. 11, (2011) 112003.
- [29] **Planck** Collaboration, P. A. R. Ade *et al.*, “Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters,” *Astron. Astrophys.* **571** (2014) A16, [arXiv:1303.5076](https://arxiv.org/abs/1303.5076) [[astro-ph](https://arxiv.org/archive/astro).CO].
- [30] R. Feynman, *The Reason for Antiparticles: The 1986 Dirac Memorial Lecture*. Cambridge: Slone JE, 1986.
- [31] H. M. Nussenzveig, *Curso de física básica: ótica, relatividade, física quântica*. Edgard Blucher, 1998.
- [32] D. Griffiths, *Introduction to elementary particles*. John Wiley & Sons, 2008.
- [33] P. A. M. Dirac, “The quantum theory of the electron,” in *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 117, pp. 610–624, The Royal Society. 1928.
- [34] B. Kayser, “Neutrino mass, mixing, and flavor change,” [arXiv:hep-ph/0211134](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0211134) [[hep-ph](https://arxiv.org/archive/hep)].
- [35] S. P. Martin, “Phenomenology of particle physics,” <http://www.niu.edu/spmartin/phys686/ppp.pdf>.
- [36] G. Drexlin, V. Hannen, S. Mertens, and C. Weinheimer, “Current direct neutrino mass experiments,” *Adv. High Energy Phys.* **2013** (2013) 293986, [arXiv:1307.0101](https://arxiv.org/abs/1307.0101) [[physics.ins-det](https://arxiv.org/archive/physics)].
- [37] H. E. Haber, “Massless majorana and weyl fermions cannot be distinguished,” <http://scipp.ucsc.edu/haber/webpage/majnu.pdf>.

- [38] S. Willenbrock, “Symmetries of the standard model,” in *Physics in D  $\geq 4$ . Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute in elementary particle physics, TASI 2004, Boulder, USA, June 6-July 2, 2004*, pp. 3–38. 2004. arXiv:hep-ph/0410370 [hep-ph].
- [39] F. T. Avignone, III, S. R. Elliott, and J. Engel, “Double Beta Decay, Majorana Neutrinos, and Neutrino Mass,” *Rev. Mod. Phys.* **80** (2008) 481–516, arXiv:0708.1033 [nucl-ex].
- [40] S. F. King, A. Merle, S. Morisi, Y. Shimizu, and M. Tanimoto, “Neutrino Mass and Mixing: from Theory to Experiment,” *New J. Phys.* **16** (2014) 045018, arXiv:1402.4271 [hep-ph].
- [41] B. Kayser, “Neutrino physics,” *eConf C040802* (2004) L004, arXiv:hep-ph/0506165 [hep-ph].
- [42] B. Kayser, “Neutrino Oscillation Phenomenology,” in *Neutrinos in particle physics, astrophysics and cosmology. Proceedings, 61st Scottish Universities Summer School in Physics, SUSSP61, St. Andrews, UK, August 8-23, 2006*, pp. 51–64. 2008. arXiv:0804.1121 [hep-ph].
- [43] R. N. Mohapatra, “Physics of neutrino mass,” *eConf C040802* (2004) L011, arXiv:hep-ph/0411131 [hep-ph]. [New J. Phys.6,82(2004)].
- [44] M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni, and T. Schwetz, “Updated fit to three neutrino mixing: status of leptonic CP violation,” *JHEP* **11** (2014) 052, arXiv:1409.5439 [hep-ph].
- [45] F. Capozzi, G. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, D. Montanino, and A. Palazzo, “Status of three-neutrino oscillation parameters, circa 2013,” *Physical Review D* **89** no. 9, (2014) 093018.
- [46] **LBNE** Collaboration, C. Adams *et al.*, “The Long-Baseline Neutrino Experiment: Exploring Fundamental Symmetries of the Universe,” 2013. arXiv:1307.7335 [hep-ex].
- [47] **DUNE** Collaboration, R. Acciarri *et al.*, “Long-Baseline Neutrino Facility (LBNF) and Deep Underground Neutrino Experiment (DUNE) Conceptual Design Report Volume 1: The LBNF and DUNE Projects,” arXiv:1601.05471 [physics.ins-det].
- [48] **DUNE** Collaboration, R. Acciarri *et al.*, “Long-Baseline Neutrino Facility (LBNF) and Deep Underground Neutrino Experiment (DUNE) Conceptual Design Report Volume 2: The Physics Program for DUNE at LBNF,” arXiv:1512.06148 [physics.ins-det].

- [49] **DUNE** Collaboration, J. Strait *et al.*, “Long-Baseline Neutrino Facility (LBNF) and Deep Underground Neutrino Experiment (DUNE) Conceptual Design Report Volume 3: Long-Baseline Neutrino Facility for DUNE June 24, 2015,” [arXiv:1601.05823](#) [[physics.ins-det](#)].
- [50] **DUNE** Collaboration, R. Acciarri *et al.*, “Long-Baseline Neutrino Facility (LBNF) and Deep Underground Neutrino Experiment (DUNE) Conceptual Design Report, Volume 4 The DUNE Detectors at LBNF,” [arXiv:1601.02984](#) [[physics.ins-det](#)].
- [51] **Super-Kamiokande** Collaboration, Y. Fukuda *et al.*, “Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos,” *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 1562–1567, [arXiv:hep-ex/9807003](#) [[hep-ex](#)].
- [52] A. Dueck, W. Rodejohann, and K. Zuber, “Neutrinoless Double Beta Decay, the Inverted Hierarchy and Precision Determination of  $\theta_{12}$ ,” *Phys. Rev.* **D83** (2011) 113010, [arXiv:1103.4152](#) [[hep-ph](#)].