

Tese de Mestrado

**Teorias de Yang-Mills: Uma
Abordagem Emergente da
Auto-Interação e a Questão da Massa
para Bósons Vetoriais e Tensoriais**

Felipe Almeida Gomes Ferreira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, Março de 2013

Aos meus familiares

Agradecimentos

- Agradeço inicialmente aos meus pais Alberto Ferreira e Sheila Ferreira por todo o amor, carinho e apoio financeiro que me deram durante toda essa fase da minha vida.
- Ao meu professor orientador José Abdalla Helayël-Neto, por ter me orientado sempre pensando no meu desenvolvimento científico, além de seus belos cursos e aulas que sempre teve o maior prazer em planejar. Agradeço especialmente ao Prof. Sebastião Alves Dias por seus excelentes cursos e sua grande preocupação com a formação de jovens campistas. Ao Prof. Antonio José Accioly por contribuir para o fortalecimento do Grupo de Teoria Quântica de Campos do LAFEX. Também agradeço ao Professor Ivan dos Santos Oliveira Júnior pela constante preocupação com os pós-graduandos do CBPF.
- Ao Professor Henrique Boschi Filho pelo grandioso incentivo e orientação durante minha fase de iniciação científica na UFRJ.
- Aos meus irmãos Marcio, Alexandre, Rogério, Marcelo e Ingrid pelo carinho e companheirismo fraterno. E aos meus demais parentes familiares pela especial torcida de meu sucesso na carreira.
- Aos meus colegas do CBPF pela agradável parceria: Leonardo Ospedal, Felipe Tolentino, Ramaton Ramos, Rodrigo Turcati, Jefferson Moraes, Mauricio Ribeiro, Máx Jáuregui, Esley Escatena, Edgar Marcelino, Enrique John, Cristofher Zuniga, Ricardo Spagnuolo, entre outros.
- A todos os funcionários do CBPF, especialmente ao José Ricardo e à Elisabete de Souza da CFC e à Cristiana Oliveira da CFC pela prontidão para a solução de vários problemas.
- À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Desde sua concepção, as teorias de Yang-Mills foram adotadas para descrever os processos fenomenológicos mais fundamentais da Natureza. Podem ser usadas para a formulação de teorias de gauge para campos mediadores não-massivos, tanto de spin-1 quanto de spin-2 ou, até mesmo, de spin- $\frac{3}{2}$. Para reduzir o alcance das interações de gauge, é necessário que os bósons de gauge adquiram massa, o que pode ser realizado através da quebra espontânea de simetria. Neste trabalho, desenvolveremos a teoria de Yang-Mills como uma teoria de auto-interação dos bósons de gauge de forma consistente com os aspectos fundamentais da unitariedade e da renormalizabilidade, onde as simetrias naturais das interações de gauge emergem da geometria do espaço-tempo através de seu correspondente grupo de simetria e suas representações irredutíveis de dimensão finita. Veremos como os bósons de gauge adquirem massa através da quebra espontânea de simetria de gauge, tanto para o setor de spin-1 quanto para o setor de spin-2, onde testaremos se um mecanismo equivalente ao de Brout-Englert-Higgs pode ser aplicado à gravitação para gerar uma teoria de campos de spin-2 massiva, sem afetar a unitariedade do modelo. Em conexão com a discussão da massa, mostraremos como um modelo- σ não-linear pode ser gerado para descrever o setor de bósons vetoriais massivos longitudinalmente polarizados

Abstract

Yang-Mills theories were proposed some decades ago and they were adopted, ever since, to describe the most elementary phenomena connected to the fundamental interactions of Nature. They set up a quite universal description and they can be used in connection with spin-1, spin-2 and even spin- $\frac{3}{2}$ force carriers.

The problem with the range of the interactions can be solved up with the help of specific mechanisms, such as the spontaneous symmetry breaking. The main purpose of this Dissertation is to present a non-usual approach to Yang-Mills in that the whole idea of self-interactions emerges from the space-time symmetry group. The discussion of mass is carried out and, in connection with that, we can see an equivalence between a Yang-Mills model and a connected non-linear σ -model. The problem of mass generation is also applied to the spin-2 case and we discuss how a massive gravity theory may come out.

Sumário

1	Introdução	1
2	Spin-1 e Spin-0 em Auto-Interação	4
2.1	Introdução	4
2.2	Teoria de Gauge Abeliãna	5
2.3	Auto-Interação para Campos de Spin-1 e Massa 0	8
2.4	Interação de Campos de Yang-Mills com a Matéria	12
2.5	Modelo- σ Não-Linear	16
2.6	Conclusões	20
3	Aspectos da Quebra Espontânea de Simetria	21
3.1	Introdução	21
3.2	Teorema de Goldstone	21
3.3	Quebra Espontânea de Simetria de Gauge Abeliãna	24
3.3.1	Simetria Global: O Setor de Goldstone	24
3.3.2	Simetria Local: O Setor de Higgs	27
3.4	Quebra Espontânea de Simetria de Gauge não-Abeliãna: $SU(2) \times U(1)$	32
3.5	Conclusões	42
4	Geração de Massa no Setor de Spin-2	43
4.1	Introdução	43
4.2	Gravitação de Einstein-Hilbert Linearizada	43
4.3	O Modelo de Higgs Gravitacional	49
4.4	Conclusões	52
5	Considerações Finais e Perspectivas Futuras	54

Capítulo 1

Introdução

As teorias de gauge representam uma grande espécie de formulação teórica muito bem escolhida para tratar dos problemas físicos que envolvem processos de interações fundamentais, tanto na fase em que a simetria é exata quanto na fase em que ela é quebrada. Elas compensaram tanto para a construção da QED, quanto para a construção da teoria que unifica as interações eletromagnética e fraca, quanto para a construção do modelo padrão e também para a construção da gravitação. E ainda há muitos problemas em aberto que possam ser bem esclarecidos com o uso de formulações de teorias de gauge.

Em 1956, quando Yang e Lee prevêm teoricamente a violação de paridade na interação fraca [1], como foi comprovada experimentalmente um ano depois em 1957 [2, 3, 4], isso abriu as portas para o trabalho de Yang e Mills em 1954 [5], já que naquela época a melhor teoria aceita para descrever a interação forte era a teoria de Yukawa, uma teoria que usava mésons massivos já conhecidos (objetos escalares) como mediadores das interações entre prótons e nêutrons. Quando Yang e Mills propuseram a teoria $SU(2)$ para o spin isotópico forte, os mediadores da interação passaram a ser objetos de spin-1 e massa nula. Com a violação da paridade, Salam, associando a massa nula do neutrino à invariância quiral [6], introduziu a chamada “simetria quiral”, uma simetria que elege partículas de spin-1 como mediadores de interações fundamentais ao invés de partículas de spin-0. A partir de então, os objetos de spin-1 passaram a ser os ingredientes fundamentais como mediadores das interações do modelo padrão, dando privilégio à Teoria de Yang-Mills [7]-[18].

Com o formalismo teórico de Yang-Mills é possível desenvolver teorias de gauge tanto para objetos de spin-1, quanto para objetos de spin-0 quanto para objetos de spin-2, sendo tudo uma escolha do espaço-tempo em que a teoria vá atuar e determinar quais são as representações de Lorentz nesse referido espaço-tempo correspondentes a cada espécie de campos que participam das interações. Por exemplo, a QED, a QCD e a teoria eletrofraca podem ser vistas como umas teorias de Yang-Mills para bósons vetoriais como mediadores das interações, enquanto o modelo- σ não-linear pode ser visto como uma formulação de Yang-Mills para spin-0 e a gravitação pode ser vista como uma teoria de Yang-Mills para spin-2.

Para o caso de spin semi-inteiro, a SUSY pode ser vista como uma teoria de gauge para spin- $\frac{3}{2}$, construída pela representação de Rarita-Schwinger $(\frac{1}{2}, 1) \oplus (1, \frac{1}{2})$ do grupo de Lorentz

e eliminando o $\text{spin}-\frac{1}{2}$ dessa representação com o uso da supersimetria local.

Mas como a teoria de gauge não-Abeliana proposta por C.N. Yang e R.L. Mills em 1954 foi inicialmente construída com campos de gauge de massa nula, estava próxima da QED mas só que com alcance infinito. Então, para compatibilizá-la com a física das interações fortes e fracas era necessário reduzir o seu alcance e gerar uma escala de massas para os bósons vetoriais, o que foi um problema que Yang e Mills deixaram em aberto após sua notável contribuição.

Esse problema, que esteve em aberto durante vários anos do século passado, começou a ser bem solucionado com o desenvolvimento de mecanismos de quebra espontânea de simetria, quando Anderson em 1958 [19] percebe o ainda desconhecido mecanismo de Higgs, chamando a atenção para o fato de que os bósons de Goldstone desaparecem no modelo-BCS devido ao fato da interação Coulombiana ser de longo alcance e, em 1963, ele nota o aparecimento de um gap de massa dos fótons [20]. Isso implicou no sucesso de Higgs, Salam e Weinberg em desenvolverem esses mesmos conhecimentos também em física de partículas elementares no domínio de altas energias, quando Higgs desenvolveu seu notável mecanismo de quebra espontânea de simetria e Salam, Glashow e Weinberg o usaram para criar a sua famosa teoria eletrofraca [5][19] [21]-[36].

Mas, diferentemente da interação eletrofraca, o alcance finito (restrito a escalas na faixa de 1 fm) das interações fortes não é justificado mediante geração de massa por quebra espontânea de simetria. Realmente, a simetria $SU(3)$ de cor da QCD permanece exata. O Higgs não tem número quântico de cor e, portanto, não se acopla aos glúons. Estes permanecem com massa nula e o alcance restrito das interações fortes é justificado através do mecanismo de confinamento dos quarks e glúons.

Quando o mecanismo de Higgs para partículas de $\text{spin}-1$ foi publicado no período 1964-1966, ele foi implementado com sucesso em muitas teorias. Então, nos anos 1970, surgiu a questão de como um mecanismo desses pode ser aplicado à gravitação, onde a simetria a ser quebrada é a invariância sob transformações gerais de coordenadas?

O objetivo central desta dissertação é procurar seguir para campos tensoriais de $\text{spin}-2$ os mesmos procedimentos aplicados em teorias de gauge de $\text{spin}-1$ que foram usados na construção do modelo padrão, para ver se o mecanismo de Higgs consegue ser bem aplicado num limite de baixa energia de gravitação onde o alcance é bem curto e, com isso, possa gerar um modelo de gravitação massiva.

Mas, diferentemente do trabalho original de Yang-Mills, construiremos no capítulo 2 uma teoria de gauge para $\text{spin} 1$ em auto-interação, com a simetria de gauge sendo obtida pela geometria do espaço-tempo ao qual pertence a representação do campo de gauge. Usaremos essa formulação porque com ela pode-se construir teorias de gauge de $\text{spin}-0$ e $\text{spin}-2$, além de coincidir com a antiga teoria de Yang-Mills. Esta abordagem é essencialmente aquela apresentada na Tese de Doutorado de Ronald Shaw [14], orientado pelo professor Abdus Salam. Também no capítulo 2, mostraremos como construir uma teoria de Yang-Mills para campos de $\text{spin}-0$ que representam o setor longitudinal de bósons vetoriais massivos.

No capítulo 3, representamos como é que os processos de quebra espontânea de simetria podem gerar massa para os bósons vetoriais, tanto para teoria de gauge Abelianas $U(1)$ quanto para o caso não-Abeliano $SU(2) \times U(1)$. Também provaremos a validade do Teorema de Goldstone e veremos como ele foi útil para a criação do mecanismo de Higgs.

Por fim, no capítulo 4, primeiro usaremos a aproximação do campo fraco para analisar o propagador do gráviton. Em seguida, testaremos como o mecanismo de Higgs pode ser aplicado em teorias de campos de spin-2, sem afetar a unitariedade do modelo, e veremos se é um mecanismo útil ou não para a descrição de uma gravitação massiva.

Outro fato que implicou num interesse maior desse trabalho foi a possibilidade de produção e detecção de grávitons massivos na escala de energia do LHC (*Large Hadron Collider*) e do ILC (*International Linear Collider*) [37], além de sinais de decaimentos de grávitons nessa escala de energia.

Nesta dissertação há um esforço grande para que todos os problemas tratados sejam esclarecidos detalhadamente em cada capítulo, de modo que não achamos necessário introduzir-se apêndices para auxílio à leitura.

Capítulo 2

Spin-1 e Spin-0 em Auto-Interação

2.1 Introdução

A simetria de gauge é uma simetria cuja origem vem da geometria do espaço-tempo em que o sistema atua. O objetivo deste capítulo é investigarmos se campos bosônicos de spin-1 podem ou não auto-interagir e, caso possam, investiguemos como construir as simetrias internas de conservação a partir da discussão geométrica de quem serão os campos mediadores da interação.

Ao invés de partir de transformações de fase, passando de global para local e verificar os campos que devem ser acrescentados para deixar a ação invariante como Yang e Mills fizeram em seu trabalho [5], seguiremos a questão que Salam deixou para Shaw em 1954 [14], a qual é: será que podemos construir uma teoria de objetos de spin-1 em auto-interação compatível com a renormalizabilidade e a unitariedade? Também, partiremos de aspectos ainda mais fundamentais, como a geometria do espaço-tempo, de onde obteremos a simetria de gauge para as representações vetorial e escalar de Lorentz.

Essencialmente, o ingrediente fundamental para a construção de uma teoria de gauge auto-interagente é, além de criar termos de interação de campos de gauge com a matéria (derivada covariante), como introduzir de forma consistente um vértice de auto-interação para campos com os quais estamos trabalhando, dando em teorias que sejam renormalizáveis e unitárias. Já sabemos que campos escalares podem ter auto-interação $(\frac{\lambda}{4}(\varphi^*\varphi)^2)$, enquanto que a auto-interação de campos fermiônicos é proibitiva do ponto-de-vista da renormalizabilidade. No início da década de 50, Salam solucionou o problema do overlapping de divergências da QED escalar e mostrou que teorias que tratam de partículas fermiônicas e escalares carregadas com interação de campos de gauge dariam em teorias renormalizáveis.

E para campos vetoriais, será que podemos introduzir um termo de auto-interação para objetos de spin-1 de forma consistente, dando em teorias que sejam renormalizáveis e unitárias? Para responder a esta pergunta, ao invés de trabalhar com transformações de fase, passando de global para local e seguir um procedimento de deixar o Lagrangeano invariante, partiremos da geometria do espaço-tempo em que o sistema atua, neste caso o de Minkowski, procuraremos construir um modelo mais geral de campos de spin-1 que possam estar em auto-interação e, com isso, saber como é que os campos de diferentes representações podem interagir entre si na natureza.

2.2 Teoria de Gauge Abelianiana

Começemos tratando de um sistema puramente concentrado em campos de gauge, sem a presença de matéria. A simetria de gauge é uma simetria de origem geométrica do espaço-tempo em que o sistema atua, de modo que o próprio espaço-tempo se responsabiliza em determinar como deve ser a simetria interna da interação do campo de gauge com a matéria na presença de partículas fermiônicas. Neste caso, queremos descrever a transformação de gauge de campos de spin-1 e massa nula. Para isto, usemos o campo vetorial A^μ , cujas partes longitudinal e transversal são dadas, respectivamente, por:

$$A_\mu^L = \left(\frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) A^\nu$$

$$A_\mu^T = \left(\delta_\mu^\nu - \frac{\partial_\mu \partial^\nu}{\square} \right) A_\nu,$$

onde a parte longitudinal é o setor que carrega o spin 0 e a parte transversal é o setor que carrega o spin 1 do campo vetorial A^μ , o qual pertence à representação $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ do grupo de Lorentz.

Mas já que queremos descrever uma partícula de spin-1 e massa nula, então devemos desacoplar o setor A_μ^L do campo vetorial A_μ . Para isso, teremos, no espaço dos momenta $k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right)$:

$$k^2 = 0, \quad \left(\omega = |\vec{k}|c \right)$$

$$\square A_\mu^T = 0$$

$$\square \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right) A_\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 0$$

$$\partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0.$$

Sendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, temos também como outra equação $\partial_\mu F_{\nu\kappa} + \partial_\nu F_{\kappa\mu} + \partial_\kappa F_{\mu\nu} = 0$ ou $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$, onde $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ é o tensor dual de $F_{\mu\nu}$.

Portanto, para uma partícula livre de spin-1 e massa nula, temos que as equações de campo são:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0,$$

o que é uma consequência imediata da simetria de gauge.

Mas, se quiséssemos descrever a interação de gauge como sendo mediada por uma partícula de spin-0, massa nula e com a mesma relação de dispersão $k^2=0$, teríamos

$$\square A_\mu^L = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu (\partial_\nu A^\nu) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \Phi = 0,$$

onde $\Phi = \partial_\mu A^\mu$ é o setor escalar de spin-0 da parte longitudinal de A^μ . Esta equação não apresenta caráter de radiação, pois ela indica que $\Phi = \Phi_o$ seja independente da posição e do tempo, o que fará com que não haja propagação de ondas. Com isso, notemos que para descrever interações de gauge mediadas por um campo vetorial A_μ , deve-se usar o setor transversal A_μ^T ao invés do setor longitudinal A_μ^L . Sendo assim, o mediador será uma partícula de massa nula e de puro spin-1.

Pela equação de campo $\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0$, notemos que há uma simetria de gauge para os objetos vetoriais pertencentes à representação $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ do grupo de Lorentz

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(t, \vec{x}),$$

a qual é proveniente do espaço de Minkowski $M^{1,3}$. Essa simetria de gauge deixa o tensor field-strength invariante:

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu},$$

onde α é um escalar arbitrário.

Como α é um escalar arbitrário, então ele pode ser escolhido para eliminar o divergente de A_μ :

$$\partial_\mu A'^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad A_\mu^L = 0,$$

o que é consequência do fato de que a simetria de gauge veio do setor de spin-1 de A_μ .

Quanto às transformações das partes transversal e longitudinal, temos:

$$A_\mu^T = \left(\delta_\mu^\nu - \frac{\partial_\mu \partial^\nu}{\square} \right) (A_\nu + \partial_\nu \alpha) = A_\mu^T \quad \Rightarrow \quad A_\mu^T = A_\mu^T$$

$$A_\mu^L = \left(\frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) (A^\nu + \partial^\nu \alpha) = A_\mu^L + \partial_\mu \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \square \alpha = -\partial_\nu A^\nu.$$

Portanto, temos que o escalar α não afeta o spin-1 e pode ser escolhido para dar conta do spin zero.

Como será que essa simetria respeitada pelo fóton é sentida pela matéria quando houver interação fermiônica? Um sistema com interação entre o fóton e a matéria fermiônica é bem descrito pelo Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi - e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi} i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \Psi - m \bar{\Psi} \Psi.$$

Deve-se preservar a simetria de gauge do setor de Maxwell $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x)$. Suponhamos que o setor fermiônico sofra uma transformação linear para deixar o Lagrangeano invariante:

$$\Psi' = U\Psi \qquad \bar{\Psi}' = \bar{\Psi}U^\dagger$$

$$\bar{\Psi}'\Psi' = \bar{\Psi}U^\dagger U\Psi = \bar{\Psi}\Psi \quad \Rightarrow \quad U^\dagger U = 1.$$

Se o termo $(\partial_\mu + ieA_\mu)\Psi$ sofrer a mesma transformação de Ψ , então o Lagrangeano permanecerá invariante.

$$[(\partial_\mu + ieA_\mu)\Psi]' = U(\partial_\mu + ieA_\mu)\Psi$$

$$U\partial_\mu\Psi + (\partial_\mu U)\Psi + ieA_\mu U\Psi + ie(\partial_\mu\alpha)U\Psi = U\partial_\mu\Psi + ieA_\mu U\Psi$$

$$(\partial_\mu U)\Psi = -ie(\partial_\mu\alpha)U\Psi \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial_\mu U}{U} = -ie\partial_\mu\alpha$$

$$U = e^{-ie\alpha(x)}$$

$$\Psi' = e^{-ie\alpha(x)}\Psi.$$

Então, a matéria sente a transformação de gauge do fóton como uma transformação de fase local, mantendo o sistema invariante sob transformações do grupo $U(1)$. Como foi levantado por Salam no início da década de 50 [38], ao se construir um modelo de spin-1 com auto-interação e com a propriedade de ser renormalizável, o que pede auto-interação no máximo quártica, automaticamente surge uma formulação com simetria local. Então a simetria local aparece como bônus da simetria de gauge, e não como um dado de partida para a construção do modelo.

Na verdade, a origem de tudo é o espaço-tempo em que o sistema atua, a partir de onde se obtém representações para o setor de gauge e para o setor de matéria. E a partir de então se começa o estudo pela simetria de gauge, já que é ela que é responsável pela interação da teoria, e depois se determina como é que a matéria sente essa simetria.

2.3 Auto-Interação para Campos de Spin-1 e Massa 0

Para introduzir auto-interação, montemos um multiplete de campos de spin-1 e massa nula

$$A^{\mu i}, \quad i = (1, \dots, N).$$

Como estes campos possuem a mesma massa e são diferentes componentes de um único multiplete, então há uma degenerescência entre eles ao qual deva estar associada alguma simetria global.

Procuraremos obter um Lagrangeano de interação entre esses campos a partir do Lagrangeano livre,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu}^i \mathcal{F}^{\mu\nu i} + \mathcal{L}_{int}(A^{\mu i}).$$

Estando os campos acoplados em um multiplete com simetria global, então supõe-se que haja um grupo contínuo de simetria tipo Lie:

$$A_i'^{\mu} = R_{ij} A_j^{\mu},$$

onde

$$R_{ij} = (e^{i\omega_a G_a})_{ij} = \delta_{ij} + i\omega_a (G_a)_{ij} + O(\omega^2)$$

$$A_i'^{\mu} = A_i^{\mu} + i\omega_a (G_a)_{ij} A_j^{\mu} \quad \Rightarrow \quad \delta A_i^{\mu} = i\omega_a (G_a)_{ij} A_j^{\mu}.$$

Partindo do Lagrangeano livre

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu}^i \mathcal{F}^{\mu\nu i},$$

obtém-se pelo Princípio Variacional:

$$\delta S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \mathcal{F}^{\mu\nu i} \delta \mathcal{F}_{\mu\nu}^i \right] = 0$$

$$\int d^4x \left[-\frac{1}{2} \mathcal{F}^{\mu\nu i} \delta (\partial_{\mu} A_{\nu}^i - \partial_{\nu} A_{\mu}^i) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \int d^4x [\partial_{\mu} \mathcal{F}^{\mu\nu i}] \delta A_{\nu}^i = 0$$

$$\partial_{\mu} \mathcal{F}^{\mu\nu i} = 0.$$

Variando o Lagrangeano e utilizando a equação de campo acima, obtém-se como corrente de Noether j_a^{μ} deste sistema:

$$\delta \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \mathcal{F}^{\mu\nu i} \delta \mathcal{F}_{\mu\nu}^i = -\frac{1}{2} \mathcal{F}^{\mu\nu i} (\partial_{\mu} \delta A_{\nu}^i - \partial_{\nu} \delta A_{\mu}^i) = -\mathcal{F}^{\mu\nu i} \partial_{\mu} \delta A_{\nu}^i = -\partial_{\mu} (\mathcal{F}^{\mu\nu i} \delta A_{\nu}^i)$$

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(-i\omega_a \mathcal{F}_i^{\mu\nu} (G_a)_{ij} A_{\nu j} \right)$$

$$j_a^\mu = -i\mathcal{F}_i^{\mu\nu} (G_a)_{ij} A_{\nu j}.$$

Então, o Lagrangeano com auto-interação de fótons acoplados fica:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^i \mathcal{F}^{\mu\nu i} - l A_{\mu i} j_a^\mu(A),$$

onde l é a constante de acoplamento da auto-interação.

Este método é conhecido como método de Noether, um método que permite construir interações a partir da teoria livre e que já se tornou muito bem popularizado na supersimetria e na supergravidade.

Mas ainda há um problema. A corrente carrega um índice de gerador do grupo de simetria, enquanto que o campo carrega um índice interno à representação. Então a única situação em que se pode construir auto-interação de spin-1 é necessariamente aquela em que $i = a$, ou seja, a representação em que o número de campos do multiplete $A^{\mu i}$ é igual ao número de geradores do grupo, a chamada “Representação Adjunta”.

Nesta representação, os geradores são dados por:

$$(G_a)_{bc} = -if_{abc},$$

onde f_{abc} é a constante de estrutura do grupo $SU(N)$: $[G_a, G_b] = if_{abc}G_c$. Com isso, a corrente de auto-interação será:

$$j_a^\mu = -i\mathcal{F}_b^{\mu\nu} (G_a)_{bc} A_{\nu c} = -f_{abc}\mathcal{F}_b^{\mu\nu} A_{\nu c}.$$

Dessa forma, o Lagrangeano que descreve a auto-interação de bósons vetoriais não-massivos de spin-1 será:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu a} \mathcal{F}_a^{\mu\nu} + lf_{abc}A_{\mu a}\mathcal{F}_b^{\mu\nu} A_{\nu c}.$$

Como a simetria global é o ponto de partida para a obtenção deste resultado, então nota-se que ela não é perdida ao se introduzir a auto-interação. Por isso, é necessário rever o Teorema de Noether, já que o termo novo obtido pelo método de Noether também depende das derivadas do campo A_a^μ .

Com $\mathcal{L} = \mathcal{L}^0 + \mathcal{L}^1$ e $\delta A_{kd} = -f_{dbe}\omega_b A_{ke}$, obtém-se pelo Teorema de Noether:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\lambda \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda A_{kd})} \delta A_{kd} \right) = \partial_\lambda \left(\frac{\partial\mathcal{L}^0}{\partial(\partial_\lambda A_{kd})} \delta A_{kd} \right) + \partial_\lambda \left(\frac{\partial\mathcal{L}^1}{\partial(\partial_\lambda A_{kd})} \delta A_{kd} \right)$$

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\lambda \left(-\mathcal{F}_d^{\lambda k} f_{dbe}\omega_b A_{ke} + 2lf_{dac}f_{dbe}\omega_b A_a^\lambda A_c^k A_{ke} \right).$$

Isso dá a corrente abaixo:

$$j_b^{\mu(1)} = -\mathcal{F}_a^{\mu\nu} f_{abc} A_{\nu c} + 2l f_{abc} f_{ade} A_d^\mu A_e^\nu A_{\nu c},$$

e faz com que o Lagrangeano de auto-interação seja

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu a} \mathcal{F}_a^{\mu\nu} - l' A_{\mu b} j_b^{\mu(1)} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu a} \mathcal{F}_a^{\mu\nu} + l' f_{abc} \mathcal{F}_a^{\mu\nu} A_{\mu b} A_{\nu c} - 2l' l f_{abc} f_{ade} A_{\mu b} A_d^\mu A_e^\nu A_{\nu c}.$$

Agora, como o novo termo obtido desta vez não depende das derivadas de $A_{\mu a}$, então, procedendo novamente com o Teorema de Noether, obter-se-á a mesma corrente: $j_a^{\mu(2)} = j_a^{\mu(1)}$. Portanto, a obtenção da corrente de auto-interação acaba aqui. Utilizando os valores $l' = \frac{1}{2}g$ e $l = \frac{1}{4}g$ para as constantes de acoplamento l' e l , o Lagrangeano poderá ser finalmente escrito da forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu a} F_a^{\mu\nu},$$

onde agora

$$F_{\mu\nu a} \equiv \partial_\mu A_{\nu a} - \partial_\nu A_{\mu a} - g f_{abc} A_{\mu b} A_{\nu c},$$

é o field strength que atua na representação adjunta do grupo sob a qual o Lagrangeano é invariante, com constante de acoplamento g para a auto-interação dos campos.

Convencionalmente, adota-se a notação de campo

$$A_\mu \equiv A_{\mu a} G_a$$

pois, seguindo a construção de uma teoria de gauge não-Abeliana, o campo fundamental da teoria (o campo de gauge) toma valores na álgebra do grupo de simetria ao qual está associado. Nesta convenção, o field strength de campos de spin-1 será:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig [A_\mu, A_\nu].$$

Antes de introduzir o setor de matéria, construiremos uma teoria de gauge não-Abeliana usando apenas os campos de Yang-Mills, extraindo ao máximo a estrutura não-Abeliana dos campos, para depois incluirmos a interação com a matéria e as constantes de acoplamento.

Por definição, seja

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig A_\mu$$

o operador derivada covariante desta teoria de gauge, o qual deve ser usado para atuar em campos que estejam numa representação arbitrária. Com este operador obtém-se o mesmo tensor de intensidade de campos pela definição:

$$F_{\mu\nu} \equiv -\frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu] = F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig [A_\mu, A_\nu].$$

Mas quando estivermos trabalhando com campos pertencentes à representação adjunta, a derivada covariante assumirá a forma:

$$\nabla_\mu \equiv \partial_\mu + ig [A_\mu, \cdot].$$

Partindo do Lagrangeano que descreve a propagação de campos não-Abelianos auto-interagentes

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4N} \text{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}),$$

obtem-se pelo Princípio Variacional a equação de campo desse sistema:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + ig [A_\mu, F^{\mu\nu}] = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$

Esta equação nos informa que, como havíamos notado, para descrever a auto-interação de campos vetoriais de spin-1 é necessário que eles estejam atuando na representação adjunta do grupo de simetria do sistema.

Pela estrutura do tensor $F_{\mu\nu}$ e pelo uso da identidade de Jacobi, chega-se à identidade de Bianchi deste sistema:

$$\nabla_\mu F_{\nu k} + \nabla_\nu F_{k\mu} + \nabla_k F_{\mu\nu} = 0.$$

Portanto, concluímos que as equações de campo de Yang-Mills são

$$\begin{cases} \nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0 \\ \nabla_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $F_{\nu k}$, usando a identidade de Bianchi e notando que o operador ∇_μ respeita a regra do produto de Leibniz, chega-se à equação da conservação de energia e de momento dos campos:

$$\nabla_\mu \left(F^{\mu\nu} F_{\nu k} + \frac{1}{4} \delta_k^\mu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla_\mu \Theta^\mu_k = 0,$$

onde

$$\Theta^\mu_k = F_a^{\mu\nu} F_{\nu ka} + \frac{1}{4} \delta_k^\mu F_a^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta a}$$

é o tensor energia-momento dos campos de Yang-Mills.

Definindo os campos elétrico e magnético, respectivamente, por

$$\begin{aligned} E_a^i &= -F_a^{oi} & B_a^i &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_a^{jk} \\ \vec{E}_a &= -\vec{\nabla} A_a^0 - \frac{\partial \vec{A}_a}{\partial t} + gf_{abc} A_b^0 \vec{A}_c & \vec{B}_a &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_a - \frac{1}{2} g (\vec{A}_b \times \vec{A}_c) \end{aligned}$$

e abrindo as componentes do tensor energia-momento, obtemos:

$$\Theta^{00} = \frac{1}{8} \left(\vec{E}_a \cdot \vec{E}_a + \vec{B}_a \cdot \vec{B}_a \right),$$

que é a densidade de energia dos campos não-Abelianos;

$$\Theta^{i0} = -\frac{1}{4} \left(\vec{E}_a \times \vec{B}_a \right),$$

a qual é a densidade de momento dos campos;

$$\Theta^{ij} = \frac{1}{4} \left(E_a^i E_a^j + B_a^i B_a^j + \frac{\delta_{ij}}{2} \left(\vec{E}_a \cdot \vec{E}_a + \vec{B}_a \cdot \vec{B}_a \right) \right)$$

o qual é o stress tensor dos campos não-Abelianos.

Abrindo as equações de campo de Yang-Mills em termos dos campos elétrico E_a^i e magnético B_a^i , podemos obter as equações tipo-Maxwell não-Abelianas no vácuo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_a + gf_{abc} \left(\vec{A}_b \cdot \vec{E}_c \right) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_a + gf_{abc} \vec{A}_b \cdot \vec{B}_c = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_a - gf_{abc} A_b^0 \vec{B}_c - gf_{abc} \left(\vec{A}_b \times \vec{E}_c \right) = -\frac{\partial \vec{B}_a}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_a + gf_{abc} A_b^0 \vec{E}_c - gf_{abc} \left(\vec{A}_b \times \vec{B}_c \right) = \frac{\partial \vec{E}_a}{\partial t}.$$

De acordo com as equações dos divergentes de \vec{E}_a e de \vec{B}_a , notemos que o campo bosônico atua como fonte para a criação dos campos elétrico e magnético não-Abelianos, sem a presença da matéria fermiônica. Ou seja, para o caso do campo magnético, podemos concluir que os campos bosônicos que auto-interagem entre si são capazes de criar um monopólo magnético sem a presença de férmions, diferentemente da eletrodinâmica de Maxwell. Mas, nesta teoria, como os campos elétrico e magnético não são invariantes de gauge, então eles não possuem nenhum significado físico.

2.4 Interação de Campos de Yang-Mills com a Matéria

Suponhamos que temos um conjunto de campos fermiônicos de matéria Ψ_i (com $i = 1, \dots, N$) que estejam numa certa representação irredutível de um grupo $SU(N)$, não necessariamente a representação adjunta. Nessa representação, sua transformação de calibre será:

$$\Psi'_i = S_{ij} \Psi_j, \quad \text{onde } S = e^{i\omega_a G_a}.$$

Começaremos descrevendo um sistema de campos fermiônicos com simetria global, a partir do qual chegaremos num outro sistema com simetria local. A matéria fermiônica fundamental é descrita pelo Lagrangeano de Dirac

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_i i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_i$$

que, ao possuir invariância global, implica em $S^\dagger S = 1$. Ou seja, o sistema é invariante sob transformações do grupo $SU(N)$.

Pelo Teorema de Noether, obtemos a seguinte corrente fermiônica para este sistema:

$$\Psi'_i = (e^{i\omega_a G_a})_{ij} \Psi_j \quad \Rightarrow \quad \delta\Psi_i = i\omega_a (G_a)_{ij} \Psi_j$$

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_i)} \delta\Psi_i \right) = -\omega_a \partial_\mu \left(\bar{\Psi}_i \gamma^\mu (G_a)_{ij} \Psi_j \right) = -\omega_a \partial_\mu J_a^{\mu(ferm)} = 0$$

$$J_a^{\mu(ferm)} = \bar{\Psi}_i \gamma^\mu (G_a)_{ij} \Psi_j.$$

Ao introduzirmos o campo de gauge $A_{\mu a}$, o qual se acopla com a matéria pela constante de acoplamento e , teremos

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_i i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_i - e A_{\mu a} J_a^{\mu(ferm)}$$

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_i i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_i - e \bar{\Psi}_i \gamma^\mu A_{\mu a} (G_a)_{ij} \Psi_j = \bar{\Psi}_i i\gamma^\mu \left(\partial_\mu \delta_{ij} + ie A_{\mu a} (G_a)_{ij} \right) \Psi_j$$

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_i i\gamma^\mu (\partial_\mu + ie A_\mu)_{ij} \Psi_j$$

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_i i\gamma^\mu D_\mu \Psi.$$

Então, para que o Lagrangeano permaneça invariante, é necessário que o termo $D_\mu \Psi$ sofra a mesma transformação de Ψ :

$$(D_\mu \Psi)' = S D_\mu \Psi \quad \text{ou} \quad D'_\mu = S D_\mu S^{-1}$$

$$\partial_\mu \Psi' + ie A'_\mu \Psi' = S \partial_\mu \Psi + ie S A_\mu \Psi$$

$$S\partial_\mu\Psi + (\partial_\mu S)\Psi + ieA'_\mu S\Psi = S\partial_\mu\Psi + ieSA_\mu\Psi$$

$$A'_\mu = SA_\mu S^{-1} + \frac{i}{e}(\partial_\mu S)S^{-1}.$$

Como resultado final, o Lagrangeano para a interação de campos de Yang-Mills com a matéria será:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu a}F_a^{\mu\nu} + \bar{\Psi}i\gamma^\mu D_\mu\Psi.$$

Portanto, como indicado pela parte não-homogênea da transformação de gauge do campo A_μ , a simetria de Yang-Mills se tornou local, mesmo começando de forma global. Isso mostra que a teoria de Yang-Mills, a qual se trata de uma teoria de gauge de partículas de spin-1 em auto-interação, foi construída inicialmente pela simetria global mas ainda persistiu em simetria local. Como no caso Abeliano, a simetria local aparece como bônus da teoria e não como um ponto de partida. Ela é útil no papel de filtrar o spin-0, deixando passar apenas o spin-1 do campo de gauge.

Ao inserirmos essa transformação de gauge do campo A_μ no tensor field strength $F_{\mu\nu}$, notaremos que ele se transforma homogeneamente:

$$F'_{\mu\nu} = SF_{\mu\nu}S^{-1}.$$

Agora vamos estudar um sistema onde hajam campos de Yang-Mills interagindo com correntes de matéria de espécie desconhecida. Neste sistema, a simetria de gauge determina como as correntes de matéria devem se transformar. O Lagrangeano é dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4N}\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) - A_\mu J_m^\mu,$$

de modo que a equação dos campos de Yang-Mills obtida pelo Princípio Variacional passa a ser

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + ig[A_\mu, F^{\mu\nu}] = J_m^\nu \quad \Rightarrow \quad \nabla_\mu F^{\mu\nu} = J_m^\nu.$$

Realizando uma transformação de gauge nessa equação de campo e, com o uso das transformações de gauge de A_μ e $F_{\mu\nu}$, concluiremos que a corrente de matéria sente a transformação de gauge da forma

$$J_m'^\mu = SJ_m^\mu S^{-1} \quad \text{ou} \quad J_m'^\mu = (J_m^\mu)_a SG_a S^{-1},$$

ou seja, é uma corrente covariante que atua na representação adjunta do grupo SU(N). A equação de campo $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = J_m^\nu$ não permanece invariante após uma transformação de gauge, porém ela mantém a sua mesma forma

$$\nabla'_\mu F'^{\mu\nu} = J_m^\nu,$$

ou seja, esta equação de Yang-Mills também é uma equação covariante.

Diferentemente da eletrodinâmica Abeliãna de Maxwell, a qual possui como corrente eletromagnética uma corrente constituída apenas de f ermions eletricamente carregados, a corrente de mat eria de Yang-Mills não   conservada

$$\partial_\mu J_m^\mu \neq 0,$$

pois os campos de Yang-Mills têm carga associada   simetria do sistema. Mas já que a corrente de mat eria   uma corrente covariante que atua na representação adjunta, então aplicando o operador ∇_μ na equação de Yang-Mills e usando a identidade de Bianchi, chega-se   conclusão de que ela   uma corrente conservada no sentido covariante

$$\nabla_\nu \nabla_\mu F'^{\mu\nu} = \nabla_\nu J_m^\nu = 0.$$

Essa equação   válida mesmo após a realização de transformações de gauge

$$\nabla'_\nu \nabla'_\mu F'^{\mu\nu} = \nabla'_\nu J_m^\nu = 0.$$

Escrevendo a equação de Yang-Mills da forma

$$\partial_\mu F'^{\mu\nu} = J_m^\nu - ig [A_\mu, F'^{\mu\nu}],$$

juntando a corrente dos portadores de carga com a corrente de auto-interação dos campos de gauge, agora sim notemos que aparecerá uma grandeza conservada

$$\partial_\mu F'^{\mu\nu} = J_{YM}^\nu \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu J_{YM}^\nu = 0,$$

onde

$$J_{YM}^\nu = J_m^\nu - ig [A_\mu, F'^{\mu\nu}],$$

  a corrente total de Yang-Mills que cont m a carga da mat eria e a carga acumulada nos campos de gauge auto-interagentes. Essa corrente continua sendo conservada no sentido estrito em qualquer sistema de calibre

$$\partial_\mu F'^{\mu\nu} = J_{YM}^\nu \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu J_{YM}^\nu = 0,$$

mas não   uma corrente covariante. Em teorias de gauge não-Abelianas geralmente aparecem dois tipos de correntes: uma covariante sob as transformações de gauge e outra conservada no sentido estrito.

A realização de uma transformação de gauge mexe na parte longitudinal dos campos de Yang-Mills e isso acaba alterando a carga dos setores de gauge, já que os campos de calibre não-Abelianos são carregados. Ou seja,   como se a realização de uma transformação de gauge inserisse objetos longitudinais carregados numa configuração de campos de Yang-Mills puramente transversal, alterando a sua carga sem mexer no cont do de spin da mat eria.   por isso que, dentre as duas correntes que aparecem numa teoria de gauge não-Abeliãna, aquela que   covariante sob as transformações de gauge não   estritamente conservada, enquanto que aquela que   estritamente conservada não   covariante.

2.5 Modelo- σ Não-Linear

Da mesma forma que construímos uma teoria de gauge para bósons vetoriais de spin-1 auto-interagentes, veremos agora como construir um modelo análogo que trata apenas de campos de spin-0 que representam o setor longitudinal de A_μ , conhecido como modelo- σ não-linear [39]-[43]. Este modelo pode ser muito útil em diversas aplicações, como a descrição de materiais ferromagnéticos [44] [45], o efeito hall quântico [46], a descrição da dinâmica da parte longitudinal de um bóson vetorial massivo após uma quebra espontânea de simetria [47], e muito mais.

Pela simetria de gauge, o sistema pode partir de uma configuração inicial em que $A_\mu = 0$, o que fará com que o campo de gauge sofra a seguinte transformação segundo Yang-Mills

$$A'_\mu = -\frac{i}{g} S \partial_\mu S^{-1},$$

de tal forma que

$$F_{\mu\nu}(A'_\mu) = F_{\mu\nu} \left(-\frac{i}{g} S \partial_\mu S^{-1} \right) = 0,$$

ou seja, não há o setor transversal de gauge.

Todo grupo de Lie está associado a uma variedade de grupo chamada “group manifold” que contém os seus parâmetros distribuídos em uma certa forma geométrica, ou seja, associado a um grupo de Lie sempre há um espaço curvo com o qual se possa relacionar os seus parâmetros com os pontos da variedade. Como, por exemplo, os parâmetros do grupo SU(2) estão numa tri-esfera. Em cada ponto do espaço-tempo de Minkowski, podemos realizar transformações gerais de coordenadas na variedade-alvo do modelo- σ , sem transformar as coordenadas espaço-temporais.

Vamos realizar a seguinte transformação de coordenadas

$$\omega_a \rightarrow \xi_m(\omega) \qquad d\xi^m = \frac{\partial \xi^m}{\partial \omega^a} d\omega^a,$$

onde ω_a e ξ_m representam, respectivamente, as coordenadas cartesianas e curvilíneas genéricas da variedade do grupo. O elemento de linha pode ser escrito da forma

$$ds^2 = g_{mn} d\xi^m d\xi^n = g_{mn} \frac{\partial \xi^m}{\partial \omega^a} \frac{\partial \xi^n}{\partial \omega^b} d\omega^a d\omega^b = g_{ab} d\omega^a d\omega^b,$$

onde, para o grupo SU(2), $g_{ab} = \delta_{ab}$ e para o grupo de Lorentz $g_{ab} = \eta_{ab}$. Isso mostra que a métrica obtida após a transformação de coordenadas é dada por

$$g_{mn}(\xi) = \frac{\partial \omega^a}{\partial \xi^m} \frac{\partial \omega^b}{\partial \xi^n} g_{ab}.$$

O objeto que faz a conexão entre as coordenadas planas locais ω_a e as coordenadas curvilíneas genéricas ξ_m é conhecido como “vielbein”, o qual é definido como o Jacobiano dessa transformação de coordenadas

$$e^a_m(\xi) \equiv \frac{\partial \omega^a}{\partial \xi^m} \quad \Rightarrow \quad (e^{-1})^b_m(\xi) = e^m_b(\omega) \equiv \frac{\partial \xi^m}{\partial \omega^b},$$

de modo que as transformações de coordenadas e da métrica possam ser escritas da forma

$$d\xi^m = e_a^m d\omega^a \qquad g_{mn}(\xi) = e_m^a e_n^b g_{ab}.$$

O espaço interno da variedade do modelo- σ é conhecido como espaço-alvo (target space). Em cada ponto desse espaço podemos traçar um plano tangente à variedade nesse ponto para montar um sistema de coordenadas cartesianas e, assim, projetar qualquer vetor v^m da variedade tanto em coordenadas ortogonais quanto em coordenadas curvilíneas

$$v^m(\xi) = e_a^m v^a.$$

Vamos construir um modelo- σ não-linear como uma formulação de Yang-Mills para spin-0. Para isso, consideremos agora o puro gauge $S\partial_\mu S^{-1}$ que carrega apenas o setor de spin-0 de Yang-Mills, onde

$$S = e^{i\omega_a(\xi(x))G_a}.$$

Expandindo esse puro gauge em potências de ω_a ,

$$S\partial_\mu S^{-1} = -i(\partial_\mu \omega_a)G^a + \frac{i}{2!}f_{bca}\omega_b(\partial_\mu \omega_c)G^a + \dots,$$

podemos notar que ele toma valores na álgebra de Lie do grupo de simetria e, transformando o operador derivada estrita

$$\partial_\mu = \partial_\mu \xi^m \partial_m \qquad \text{com} \qquad \partial_m = \frac{\partial}{\partial \xi^m},$$

podemos concluir que

$$S\partial_\mu S^{-1} = S\partial_m S^{-1} \partial_\mu \xi^m = -ie_m^a G_a \partial_\mu \xi^m.$$

Vamos criar um Lagrangeano para o modelo- σ não-linear que descreve a propagação dos seus campos escalares. Para isto, analisemos o seguinte termo

$$\text{tr}[(S\partial_\mu S^{-1})(S\partial^\mu S^{-1})],$$

o qual é formado pelo traço do produto de dois setores de spin-0 e possui a mesma forma que o Lagrangeano de Yang-Mills.

$$\text{tr}[(S\partial_\mu S^{-1})(S\partial^\mu S^{-1})] = -e_m^a e_n^b (\partial_\mu \xi^m)(\partial^\mu \xi^n) \text{tr}[G_a G_b] = -C(R)\delta_{ab} e_m^a e_n^b (\partial_\mu \xi^m)(\partial^\mu \xi^n)$$

$$\text{tr}[(S\partial_\mu S^{-1})(S\partial^\mu S^{-1})] = -C(R)g_{mn}(\partial_\mu \xi^m)(\partial^\mu \xi^n),$$

onde $C(R)$ é o coeficiente de Dynkin associado à representação adjunta do grupo de Yang-Mills, o qual obedece a relação de ortogonalidade abaixo

$$\text{tr}(G_a G_b) = C(R)\delta_{ab}.$$

Então, temos que o Lagrangeano do modelo- σ não-linear pode ser escrito como

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2\lambda^2} g_{mn}(\partial_\mu \xi^m)(\partial^\mu \xi^n),$$

onde ξ^m são campos escalares do ponto de vista do espaço-tempo, porém, são coordenadas da variedade associada ao grupo de simetria. Estes objetos são os bósons de Goldstone. O setor de Goldstone se organiza na variedade curva do grupo de simetria.

Mas, para que haja um sentido físico neste modelo, devemos saber qual é a simetria que atua nele. Sabendo que o espaço-alvo pode ser descrito por qualquer tipo de sistema de coordenadas (planas ou curvilíneas), então realizemos uma transformação geral de coordenadas na variedade

$$\xi \rightarrow \xi',$$

conhecida como difeomorfismo. Isso nos dá

$$g_{ij}(\xi) \partial_\mu \xi^i \partial^\mu \xi^j = \left(g'_{mn}(\xi') \frac{\partial \xi'^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi'^n}{\partial \xi^j} \right) \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi'^l} \partial_\mu \xi'^l \frac{\partial \xi^j}{\partial \xi'^p} \partial^\mu \xi'^p = g'_{mn}(\xi') \delta_l^m \delta_p^n \partial_\mu \xi'^l \partial^\mu \xi'^p$$

$$g_{ij}(\xi) \partial_\mu \xi^i \partial^\mu \xi^j = g'_{mn}(\xi') \partial_\mu \xi'^m \partial^\mu \xi'^n,$$

ou seja, a ação do modelo- σ é completamente invariante sob transformações de coordenadas da variedade alvo. Esta simetria pode ser vista da forma

$$\frac{\partial \xi'^m}{\partial \xi^i} g'_{mn}(\xi') \frac{\partial \xi'^n}{\partial \xi^j} = g_{ij}(\xi) \quad \Rightarrow \quad R_i^m g'_{mn}(\xi') R_j^n = g_{ij}(\xi)$$

$$R g'(\xi') R^T = g(\xi),$$

o que mostra que o modelo- σ não-linear naturalmente aparece com uma simetria local $O(N)$ em espaços com métricas não-triviais.

O modelo- σ não-linear geralmente consiste de um conjunto de campos escalares auto-interagentes num espaço D -dimensional, tendo como ação

$$S_\sigma = \frac{1}{2\lambda^2} \int d^D \mathbf{x} g_{ab}(\xi) \partial_\mu \xi^a \partial^\mu \xi^b,$$

onde a auto-interação dos campos está na estrutura da métrica do espaço interno ao qual eles pertencem. Pelo Princípio Variacional, temos

$$\delta S_\sigma = \frac{1}{2\lambda^2} \int d^D \mathbf{x} \left[\delta g_{ij}(\xi) \partial_\mu \xi^i \partial^\mu \xi^j + 2g_{ij}(\xi) (\partial_\mu \delta \xi^i) \partial^\mu \xi^j \right] = 0$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \int d^D \mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \partial_k g_{ij}(\xi) \delta \xi^k \partial_\mu \xi^i \partial^\mu \xi^j - \partial_\mu g_{kj}(\xi) \delta \xi^k \partial^\mu \xi^j - g_{kj}(\xi) \delta \xi^k \square \xi^j \right] = 0$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \int d^D \mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \partial_k g_{ij}(\xi) \partial_\mu \xi^i \partial^\mu \xi^j - \partial_i g_{kj}(\xi) \partial_\mu \xi^i \partial^\mu \xi^j - g_{kj}(\xi) \square \xi^j \right] \delta \xi^k = 0$$

$$g_{kj} \partial_\mu \partial^\mu \xi^j + (\partial_i g_{kj}) \partial_\mu \xi^i \partial^\mu \xi^j - \frac{1}{2} \partial_k g_{ij} \partial_\mu \xi^i \partial^\mu \xi^j = 0.$$

Multiplicando à esquerda por g^{kl} e usando a propriedade $g_{kj}g^{kl} = \delta_j^l$, obtemos

$$\begin{aligned}\partial_\mu \partial^\mu \xi^l + g^{kl} \left(\partial_i g_{kj} \right) \partial_\mu \xi^i \partial^\mu \xi^j - \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_k g_{ij} \right) \partial_\mu \xi^i \partial^\mu \xi^j &= 0 \\ \partial_\mu \partial^\mu \xi^l + g^{kl} \frac{1}{2} \left(\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ki} \right) \partial_\mu \xi^i \partial^\mu \xi^j - \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_k g_{ij} \right) \partial_\mu \xi^i \partial^\mu \xi^j &= 0 \\ \partial_\mu \partial^\mu \xi^l + g^{kl} \frac{1}{2} \left(\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \right) \partial_\mu \xi^i \partial^\mu \xi^j &= 0\end{aligned}$$

Portanto, temos que a equação de Euler-Lagrange do modelo- σ não-linear é

$$\square \xi^l + \Gamma_{ij}^l \partial_\mu \xi^i \partial^\mu \xi^j = 0,$$

onde

$$\Gamma_{ij}^l = g^{lk} \frac{1}{2} \left(\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \right)$$

é o símbolo de Christoffel. O primeiro termo da equação de Euler-Lagrange do modelo- σ trata da parte de campo livre enquanto o segundo termo descreve a auto-interação dos campos de spin-0.

Lembrando que o puro gauge $S \partial_\mu S^{-1}$, por conter apenas o setor longitudinal de Yang-Mills, não quebra a simetria de calibre do tensor intensidade da teoria, então vamos escrever o puro gauge em termos das vielbeins para determinar a condição geométrica que elas devem satisfazer na variedade.

$$F_{\mu\nu} \left(-\frac{i}{g} S \partial_\mu S^{-1} \right) = F_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{g} e_m^a G_a \partial_\mu \xi^m \right) = 0$$

$$F_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{g} e_m^a G_a \partial_\mu \xi^m \right) = -\frac{1}{g} \partial_\mu (e_m^a G_a \partial_\nu \xi^m) + \frac{1}{g} \partial_\nu (e_n^b G_b \partial_\mu \xi^n) + ig \left[-\frac{1}{g} e_m^a G_a \partial_\mu \xi^m, -\frac{1}{g} e_n^b G_b \partial_\nu \xi^n \right] = 0.$$

Usando $\partial_\mu e_m^a(\xi) = \partial_l e_m^a(\xi) \partial_\mu \xi^l$, teremos

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{g} e_m^a G_a \partial_\mu \xi^m \right) &= -\frac{1}{g} \left[(\partial_l e_m^a \partial_\mu \xi^l) G_a \partial_\nu \xi^m + e_m^a G_a \partial_\mu \partial_\nu \xi^m \right] \\ &+ \frac{1}{g} \left[(\partial_l e_n^b \partial_\nu \xi^l) G_b \partial_\mu \xi^n + e_n^b G_b \partial_\mu \partial_\nu \xi^n \right] + \frac{i}{g} e_m^a e_n^b \partial_\mu \xi^m \partial_\nu \xi^n [G_a, G_b] = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{g} e_m^a G_a \partial_\mu \xi^m \right) &= -\frac{1}{g} \left[(\partial_l e_m^a \partial_\mu \xi^l \partial_\nu \xi^m) G_a - (\partial_l e_n^b \partial_\nu \xi^l \partial_\mu \xi^n) G_b + f_{abc} e_m^a e_n^b \partial_\mu \xi^m \partial_\nu \xi^n G_c \right] \\ &= -\frac{1}{g} \left[\partial_n e_m^c - \partial_m e_n^c + f_{abc} e_n^a e_m^b \right] \partial_\mu \xi^n \partial_\nu \xi^m G_c = 0.\end{aligned}$$

Portanto, temos que a equação que deve ser satisfeita pela vielbein é

$$\partial_n e_m^a - \partial_m e_n^a + f_{bc}^a e_m^b e_n^c = 0,$$

conhecida como equação de Maurer-Cartan.

A equação de Euler-Lagrange do modelo σ não-linear tem a mesma forma que uma equação de geodésica num espaço curvo e a equação de Maurer-Cartan é uma equação que aparece muito em gravitação. E como todo o modelo- σ não-linear foi construído a partir de uma pura teoria de Yang-Mills, podemos notar que o formalismo teórico de Yang-Mills pode ser usado para construir uma teoria de gauge para a gravitação e com torção [48]-[50].

2.6 Conclusões

As simetrias naturais das interações de gauge emergem da geometria do espaço-tempo através de seu correspondente grupo de simetria e suas representações irredutíveis de dimensão finita. Mostramos que, partindo do Lagrangeano livre e seguindo o método de Noether, podemos criar corrente de auto-interação de campos bosônicos de gauge e, portanto, concluímos que os campos bosônicos de spin-1 podem sim auto-interagir. Vimos que a auto-interação dos campos bosônicos gera um monopólo magnético, sem a presença da matéria fermiônica. Vimos também que, ao construirmos uma teoria de gauge com acoplamento mínimo (derivada covariante) entre o campo de gauge e a matéria, então automaticamente aparece uma simetria local, mostrando que ela não aparece como um ponto de partida para a construção das teorias de gauge. Ao construirmos o modelo- σ não-linear a partir de um puro gauge de Yang-Mills, vimos que ele pode ser gerado para descrever o setor de bósons vetoriais massivos longitudinalmente polarizados, sendo interpretado como uma teoria de Yang-Mills para objetos de spin-0.

Capítulo 3

Aspectos da Quebra Espontânea de Simetria

3.1 Introdução

A teoria de gauge não-Abeliana proposta por C.N. Yang e R.L. Mills foi um sucesso para a construção do modelo padrão. Como ela foi inicialmente construída com campos de gauge de massa nula, estava próxima da QED mas só que com alcance infinito. Então, para compatibilizá-la com a física das interações fortes e fracas, foi necessário reduzir o seu alcance e criar uma escala de massas. O problema que Yang e Mills deixaram em aberto ao publicarem sua teoria era o de como gerar massa?

Como em uma larga escala de massa existem certos pontos de ‘splitting’ em que os estados fundamentais se subdividem em outros estados fundamentais, então isso indica que deva haver um grupo de simetria mais fundamental responsável pela origem desses novos estados quânticos que deixam de ser simétricos a partir do ponto de splitting.

A prática da simetria em Física geralmente é a seguinte: objetos distintos mas de massas muito próximas e de mesmo spin um dia foram iguais e as diferenças que se observa entre eles são diferenças controladas por alguma simetria que antes os colocava como partículas idênticas. Ou seja, é a própria quebra da simetria que produz a diferença de massa entre as partículas do mesmo multiplete. A quebra espontânea de simetria tem sido muito bem utilizada para a criação de modelos de supercondutividade para partículas elementares [20] [51]-[56]. Veremos neste capítulo como os bósons vetoriais adquirem massa através da quebra espontânea de simetria.

3.2 Teorema de Goldstone

O teorema de Goldstone afirma que sempre que houver uma quebra espontânea de uma simetria contínua sob a qual a ação do sistema é invariante aparecerá uma partícula sem massa e sem spin no espectro de estados quânticos, conhecida como o bóson de Goldstone. A quebra espontânea de simetria ocorre quando o estado fundamental não é invariante sob a transformação do grupo de simetria.

O vácuo comporta-se como um estado invariante sob translações

$$P_\mu|0\rangle = 0$$

e sob rotações, por ser um escalar do grupo de Lorentz. Pelo teorema de Noether, qualquer simetria contínua do Lagrangeano implica na existência de uma corrente conservada $J^\mu(x)$

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0,$$

a partir da qual se pode definir, através de integração sobre um volume finito do espaço Ω , o operador

$$Q_\Omega(t) = \int_\Omega d^3\mathbf{x} J^0(x).$$

Esse operador é mais bem definido para atuar nos processos de quebra espontânea de simetria do que o seu limite $Q(t) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} Q_\Omega(t)$ calculado em todo o espaço, o qual é um operador que não existe.

Naturalmente, em sistemas onde haja simetria em jogo, o estado fundamental é assumido como um discreto e não-degenerado autoestado do Hamiltoniano, atuando como uma representação unidimensional do grupo de simetria e também como um autoestado do operador de carga, $Q(t)|0\rangle = |0\rangle$. O espectro de todos os autoestados se dividem em multipletes de simetria, correspondendo a representações irredutíveis do grupo de simetria.

Porém, quando houver quebra espontânea de simetria, o estado fundamental deixa de ser um autoestado de $Q(t)$,

$$U|0\rangle \neq |0\rangle \quad \Rightarrow \quad Q|0\rangle \neq 0,$$

o que implica no aparecimento de infinitos estados fundamentais degenerados equivalentes ao estado fundamental inicial, os quais são gerados pela transformação que o vácuo sofre pelo grupo contínuo de simetria. Isso acontece quando há um operador de campo $\Phi(x)$ cujo valor esperado no vácuo não é invariante sob a transformação de simetria

$$\langle 0|e^{i\theta Q}\Phi(x)e^{-i\theta Q}|0\rangle \neq \langle 0|\Phi(x)|0\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle 0|[Q, \Phi(x)]|0\rangle \neq 0.$$

O operador $Q(t)$ não existe como um operador de carga conservada, pois como a invariância translacional do vácuo implica numa invariância translacional do estado $Q(t)|0\rangle$, sua norma tenderá ao infinito

$$\begin{aligned} \langle 0|Q(t)Q(t)|0\rangle &= \int d^3\mathbf{x} \langle 0|J^0(x)Q(t)|0\rangle = \int d^3\mathbf{x} \langle 0|e^{iP_\mu x^\mu} J^0(0)e^{-iP_\mu x^\mu} Q(t)|0\rangle \\ &= \int d^3\mathbf{x} \langle 0|J^0(0)Q(0)|0\rangle, \end{aligned}$$

o que diverge, já que o integrando é independente de x e $Q|0\rangle \neq 0$. Dessa forma, o estado $Q(t)|0\rangle$ não existe no espaço de Hilbert do sistema.

O comutador de $Q_\Omega(t)$ com um observável local A é independente do tempo quando o volume Ω for grande, pois, pela conservação da corrente

$$0 = \int_\Omega d^3\mathbf{x} [\partial_\mu J^\mu(\vec{\mathbf{x}}; t), A(y)] = \partial_o \int_\Omega d^3\mathbf{x} [J^0(\vec{\mathbf{x}}; t), A(y)] + \int_\Sigma d\vec{S} \cdot [\vec{J}(\vec{\mathbf{x}}; t), A(y)]$$

de modo que, tomando o limite de $\Omega \rightarrow \infty$, obtém-se

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} [Q_\Omega(t), A(y)] = 0,$$

já que quando o volume se torna grande demais a integral superficial vai a zero porque o seu integrando envolve operadores locais separados por um intervalo muito longo do tipo-espaço.

Para provar o teorema de Goldstone, assumiremos que haja uma corrente conservada e um operador de campo bosônico $\Phi(x)$ que expresse a não-invariância do vácuo sob a simetria

$$\delta a \equiv \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \langle 0 | [Q_\Omega(t), \Phi(0)] | 0 \rangle \neq 0.$$

Inserindo uma base completa de estados intermediários

$$\delta a = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \sum_n \int_\Omega d^3x [\langle 0 | J^o(\vec{x}; t) | n \rangle \langle n | \Phi(0) | 0 \rangle - \langle 0 | \Phi(0) | n \rangle \langle n | J^o(\vec{x}; t) | 0 \rangle]$$

e aproveitando o fato de que a invariância translacional implica em

$$J^o(x) = e^{iP \cdot x} J^o(0) e^{-iP \cdot x}$$

$$\Phi(x) = e^{iP \cdot x} \Phi(0) e^{-iP \cdot x},$$

temos

$$\begin{aligned} \delta a &= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \sum_n \int_\Omega d^3x [\langle 0 | J^o(0) | n \rangle \langle n | \Phi(0) | 0 \rangle e^{-iP_n \cdot x} - \langle 0 | \Phi(0) | n \rangle \langle n | J^o(0) | 0 \rangle e^{iP_n \cdot x}] \\ &= \sum_n (2\pi)^3 \delta^3(\vec{P}_n) [\langle 0 | J^o(0) | n \rangle \langle n | \Phi(0) | 0 \rangle e^{-iE_n t} - \langle 0 | \Phi(0) | n \rangle \langle n | J^o(0) | 0 \rangle e^{iE_n t}] \neq 0. \end{aligned}$$

Vimos pela conservação da corrente que

$$\frac{d}{dt} \delta a = 0,$$

então podemos chegar a

$$0 = \sum_n (2\pi)^3 \delta^3(\vec{P}_n) E_n [\langle 0 | J^o(0) | n \rangle \langle n | \Phi(0) | 0 \rangle e^{-iE_n t} + \langle 0 | \Phi(0) | n \rangle \langle n | J^o(0) | 0 \rangle e^{iE_n t}].$$

Logo, para que essas equações sejam respeitadas, é necessário que exista um estado $|n\rangle$ para o qual $\langle 0 | J^o(0) | n \rangle \langle n | \Phi(0) | 0 \rangle \neq 0$ e que $E_n = 0$ para $\vec{P}_n = 0$. É um estado não-massivo que possui os mesmos números quânticos dos operadores J^o e Φ .

Esses estados não-massivos são os bósons de Goldstone associados à quebra da simetria. Eles não precisam necessariamente ser observáveis. O teorema de Goldstone é verdadeiro independentemente da teoria de perturbação [57]-[60].

3.3 Quebra Espontânea de Simetria de Gauge Abelianas

3.3.1 Simetria Global: O Setor de Goldstone

Num modelo de Teoria de Campos, o ponto de partida da quebra espontânea de simetria é, no caso clássico, a configuração de mínima energia e, no caso quântico, o estado de mínima energia. O processo da quebra espontânea de simetria é, na realidade, uma quebra pela metade, pois a ação permanece invariante e, ao definirmos um estado de mínima energia para a construção de uma Teoria Quântica de Campos, este estado é que deve ser investigado se é ou não invariante sob as transformações de simetria do Lagrangeano, além de ter que respeitar a sua equação de movimento.

Seja $\Phi(t, \vec{x})$ um campo genérico, pertencente a qualquer representação do grupo de Lorentz (escalar, espinorial, vetorial, etc...). Na sua configuração de mínima energia, é necessário que ele seja invariante sob translações: $\partial_t \Phi = 0$ e $\vec{\nabla} \Phi = \vec{0}$. Se $\Phi(t, \vec{x})$ fosse um campo vetorial A^μ ou espinorial Ψ_0 , então teríamos, pelas transformações de Lorentz: $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \neq A^\mu$ e $\Psi'_0 = e^{-\frac{i}{8}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \omega^{\mu\nu}} \Psi_0 \neq \Psi_0$.

Portanto, a única configuração de campo não-trivial que respeita a simetria de translação e que seja invariante de Lorentz para descrever a configuração de mínima energia é a de um campo escalar.

Para um sistema descrito por configurações de campos escalares φ , usemos o Lagrangeano abaixo

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - V(\varphi, \varphi^*),$$

onde $V(\varphi, \varphi^*)$ é um potencial de interação entre os campos invariante sob transformações $U(1)$, o que deixa o Lagrangeano invariante sob as transformações contínuas de fase

$$\varphi' = e^{-iq\alpha} \varphi,$$

onde q é a carga do campo. A escolha de $\varphi_o = v \neq 0$ como o estado fundamental deste modelo provoca uma quebra espontânea de simetria, já que essa é uma escolha particular para a configuração de mínima energia em um sistema que possui uma degenerescência de estados fundamentais:

$$\varphi'_o = e^{-iq\alpha} \varphi_o \neq \varphi_o.$$

Splitaremos este campo φ em duas partes, uma real e outra imaginária: $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, onde os campos φ_1 e φ_2 são reais. Pela transformação de fase global, obtemos:

$$(\varphi_1 + i\varphi_2)' = e^{-iq\alpha} (\varphi_1 + i\varphi_2)$$

$$\begin{cases} \varphi'_1 = (\cos q\alpha) \varphi_1 + (\sin q\alpha) \varphi_2 \\ \varphi'_2 = -(\sin q\alpha) \varphi_1 + (\cos q\alpha) \varphi_2. \end{cases}$$

Realizando uma transformação infinitesimal, com $|\alpha| \ll 1$, obtemos:

$$\begin{cases} \delta\varphi_1 = q\alpha\varphi_2 \\ \delta\varphi_2 = -q\alpha\varphi_1. \end{cases}$$

O sistema pode partir de qualquer um dos estados fundamentais e, já que a transformação de simetria pode levá-lo a qualquer outro, então partiremos inicialmente da seguinte configuração de campos de energia mínima:

$$\begin{cases} \varphi_{1o} = v \\ \varphi_{2o} = 0, \end{cases}$$

onde v é o valor mínimo que o potencial $V(\varphi, \varphi^*)$ assume na configuração de campos de mínima energia, a qual possui a seguinte estrutura de valores esperados no vácuo:

$$\langle 0|\varphi_{1o}|0\rangle = v \quad \langle 0|\varphi_{2o}|0\rangle = 0.$$

A perturbação desses campos no estado fundamental causada pela excitação da simetria leva-os à seguinte configuração de campos:

$$\begin{cases} \delta\varphi_1 = 0 \\ \delta\varphi_2 = -qv\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi'_{1o} = \varphi_{1o} = v \\ \varphi'_{2o} = -qv\alpha, \end{cases}$$

e, simultaneamente, leva o sistema a uma outra estrutura de valores esperados no vácuo:

$$\langle 0|\varphi'_{1o}|0\rangle = v \quad \langle 0|\varphi'_{2o}|0\rangle = -qv\alpha.$$

Isso mostra que a simetria induz uma perturbação em torno da configuração inicial, criando uma outra configuração com uma nova componente para o campo φ_{2o} , sem alterar a energia do sistema. Isso é o que corresponde à quebra espontânea da energia, uma modificação na configuração do sistema sem gastar energia.

Sendo esse campo da nova configuração um campo constante, então ele possui comprimento de onda que tende a infinito e frequência que tende a zero. Na linguagem de campos, isso quer dizer que a própria simetria constrói, a partir de um vácuo não-trivial, uma flutuação em torno dele que se comporta como uma onda constante de comprimento de onda que tende a infinito e, portanto, energia nula. Se esse campo estiver associado a algum tipo de partícula, isso indica que, a partir do vácuo, gera-se uma partícula sem massa. Isso foi o que abriu as portas para a idéia do Teorema de Goldstone: a quebra espontânea de uma simetria global exige a presença uma partícula sem massa, a “partícula de Goldstone”.

Neste modelo, como a perturbação do campo φ_2 induzida pela simetria ($\delta\varphi_{2o} = -q\alpha v$) é que, numa interpretação de partículas, se refere a uma partícula de massa nula, então o campo φ_2 é o bóson de Goldstone. E, já que o campo φ_1 é quem possui valor esperado no vácuo, responsável pela quebra da simetria e é quem carrega toda a informação de que o vácuo é não-trivial, então ele é a partícula física que representa o bóson de Higgs.

Para ilustrar melhor este fato e analisar o espectro de massa do sistema após a quebra espontânea da simetria, usaremos o modelo do potencial renormalizável $V(\varphi, \varphi^*) = m^2 \varphi^* \varphi + \lambda (\varphi^* \varphi)^2$:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi - \lambda (\varphi^* \varphi)^2,$$

ou, excluindo o termo constante, o Lagrangeano fica

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - \lambda \left[(\varphi^* \varphi) - \frac{1}{2} v^2 \right]^2,$$

onde $v = \sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}}$.

Neste modelo, o valor mínimo da energia é obtido, através da minimização do potencial $V(\varphi, \varphi^*)$, pelas configurações de campo:

$$\varphi_0 = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda > 0 \text{ e } m^2 > 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} e^{-iq\alpha} & \text{se } \lambda > 0 \text{ e } m^2 < 0, \end{cases}$$

onde m^2 é apenas um parâmetro com dimensão de massa ao quadrado e λ é um parâmetro adimensional, já que estamos trabalhando no sistema natural de unidades: $\hbar = c = 1$. Para tratarmos de um sistema em que o estado fundamental seja um estado de energia mínima não trivial, adotaremos a condição $\lambda > 0$ e $m^2 < 0$.

Como $\frac{v}{\sqrt{2}}$ é o valor esperado de φ no vácuo, então vamos transladar o sistema para uma outra configuração de campos φ' em que o valor esperado no vácuo é nulo:

$$\varphi'(x) = \varphi(x) - \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)) \quad \text{ou} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)),$$

e, inserindo este campo no Lagrangeano, obteremos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2 - \frac{\lambda}{4} (2v\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_2)^2 - \lambda v^2 \varphi_1^2 - \lambda v \varphi_1 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\lambda}{4} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2.$$

Portanto, como foi previsto anteriormente, o campo φ_2 é não-massivo enquanto que o campo φ_1 corresponde ao de uma partícula real massiva, com uma massa de

$$M_{\varphi_1}^2 = 2\lambda v^2 = -2m^2 \quad \Rightarrow \quad M_{\varphi_1} = \sqrt{-2m^2},$$

o que indica que o campo φ_2 é o bóson de Goldstone e o campo φ_1 é o bóson de Higgs.

Neste modelo, a partícula de Goldstone é um bóson escalar de spin-0, enquanto que em teorias de quebra espontânea de supersimetria aparecem férmions de Goldstone de spin semi-inteiro.

3.3.2 Simetria Local: O Setor de Higgs

Se a simetria do sistema for local, então aparecerão campos de gauge para calibrar a transformação $U(1)$. Para este caso, o Lagrangeano passa a ser:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi) - V(\varphi, \varphi^*)$$

onde

$$D_\mu = \partial_\mu + iqeA_\mu$$

é a derivada covariante que acopla o campo escalar φ e o campo de gauge A^μ pela constante de acoplamento de gauge e . Lembrando que, pela simetria de Lorentz, $A_{0\mu} = 0$ no vácuo, então as configurações de campo de mínima energia são as mesmas das do caso anterior.

Pela análise das representações unitárias irredutíveis do Grupo de Poincaré e através do Teorema de Wigner para partículas de massa nula, sabemos que um campo vetorial de spin-1 não-massivo possui as polarizações -1 e +1. Do outro lado, um campo vetorial massivo deve apresentar modos de polarização -1, 0 e +1. Então, o problema de gerar uma massa para o campo de gauge está em acrescentar uma polarização 0 ao campo vetorial de massa nula, o que pode ser realizado acoplando-o ao gradiente de um campo escalar.

O Lagrangeano deste sistema é invariante sob as transformações de gauge:

$$\varphi' = e^{-iq\alpha(x)}\varphi \quad \text{e} \quad A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x).$$

Vamos separar novamente o campo φ em partes real e imaginária: $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, com φ_1 e φ_2 sendo reais. Pela transformação de fase local, obtemos:

$$(\varphi_1 + i\varphi_2)' = e^{-iq\alpha(x)}(\varphi_1 + i\varphi_2)$$

$$\begin{cases} \varphi'_1 = \cos[q\alpha(x)]\varphi_1 + \sin[q\alpha(x)]\varphi_2 \\ \varphi'_2 = -\sin[q\alpha(x)]\varphi_1 + \cos[q\alpha(x)]\varphi_2. \end{cases}$$

Realizando uma transformação infinitesimal, com $|\alpha(x)| \ll 1$, obtemos:

$$\begin{cases} \delta\varphi_1 = q\alpha(x)\varphi_2 \\ \delta\varphi_2 = -q\alpha(x)\varphi_1. \end{cases}$$

Dentre todas as configurações de mínima energia degeneradas do sistema, partiremos inicialmente da seguinte:

$$\begin{cases} \varphi_{1o} = v \\ \varphi_{2o} = 0, \end{cases} \quad \text{com} \quad A_{o\mu} = 0.$$

As perturbações que os campos escalares e o campo de gauge sofrem no estado fundamental estão ligadas pelo parâmetro de calibre $\alpha(x)$ e valem

$$\begin{cases} \delta A_\mu = \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \\ \delta \varphi_1 = 0 \\ \delta \varphi_2 = -qv\alpha(x). \end{cases}$$

Isso indica que, se a simetria for local, não há mais flutuações em torno do vácuo que se comportem como ondas de comprimento de onda tendendo a infinito, já que a perturbação do campo escalar φ_{2_0} não é mais constante e, portanto, não há mais o bóson de Goldstone.

Isolando o parâmetro de calibre α , obtemos:

$$\delta A_\mu = -\frac{1}{qev} \partial_\mu (\delta \varphi_2) \quad \text{ou} \quad \delta \varphi_2 = -\frac{qev}{\square} \partial_\mu (\delta A^\mu).$$

Isso mostra que aquilo que seria o bóson de Goldstone entra exatamente na parte longitudinal do campo de gauge. Ou seja, ao realizar uma perturbação local e gerar a onda que seria do bóson de Goldstone, surge um campo de gauge transverso que absorve essa onda e incorpora o bóson de Goldstone a ele, formando então um campo vetorial com um grau de liberdade longitudinal e, portanto, que adquire massa. Isso foi o que abriu as portas para o desenvolvimento do mecanismo de Higgs: “a quebra espontânea de uma simetria local transforma o bóson de Goldstone num grau de liberdade extra de polarização longitudinal do campo de gauge, fazendo com que ele adquira massa” [61]-[69].

Esse mecanismo de Higgs pode ser bem ilustrado se usarmos novamente como caso exemplar o modelo do potencial renormalizável $V(\varphi, \varphi^*) = m^2 \varphi^* \varphi + \lambda (\varphi^* \varphi)^2$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \varphi)^* (D^\mu \varphi) - \lambda \left[(\varphi^* \varphi) - \frac{1}{2} v^2 \right]^2.$$

Novamente, translademos o campo escalar do sistema para uma configuração em que o valor esperado do vácuo é nulo

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)),$$

e, colocando no Lagrangeano, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_2)^2 - \lambda v^2 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} q^2 e^2 v^2 A^2 + qev A^\mu \partial_\mu \varphi_2 + q^2 e^2 v \varphi_1 A^2 \\ & + qe A^\mu (\varphi_1 \partial_\mu \varphi_2 - \varphi_2 \partial_\mu \varphi_1) - \lambda v \varphi_1 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{1}{2} q^2 e^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) A^2 - \frac{\lambda}{4} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2, \end{aligned}$$

onde $A^2 \equiv A_\mu A^\mu$.

Realizando uma integração por partes na ação, podemos efetuar a seguinte transformação no sexto termo: $qev A^\mu \partial_\mu \varphi_2 \rightarrow -qev \varphi_2 (\partial_\mu A^\mu)$, o que mostra como o campo escalar φ_2 se acopla com o divergente do campo vetorial A^μ , para ser incorporado na parte longitudinal de A^μ . Analisando os termos quadráticos do Lagrangeano, nota-se que o campo φ_1 está isolado, enquanto o campo φ_2 está acoplado com o campo A^μ , formando um dublete. Pelo fato do campo

escalar φ_1 estar isolado, livre de qualquer acoplamento e possuir valor esperado no vácuo, então ele é quem representa o bóson de Higgs, uma partícula real, neutra e com uma massa de

$$M_H^2 = 2\lambda v^2 = -2m^2 \quad \Rightarrow \quad M_H = \sqrt{-2m^2}.$$

Mas já que o campo escalar φ_2 está acoplado com a divergência do campo vetorial A^μ e, pelos estudos das perturbações causadas pela simetria no estado fundamental concluímos que o bóson de Goldstone desaparece, então começaremos escrevendo o Lagrangeano $\mathcal{L}^{(2)}$ que acopla φ_2 com A^μ em termos de dubletes e procuraremos uma simetria de calibre que possa eliminar o campo φ_2 , onde

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_2)^2 - qev\varphi_2(\partial_\mu A^\mu) + \frac{1}{2}q^2e^2v^2A^2.$$

Realizando integrações por partes, cada termo desse Lagrangeano sofre a seguinte transformação:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &\longrightarrow \frac{1}{2}A^\mu\Box\Theta_{\mu\nu}A^\nu & \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_2)^2 &\longrightarrow -\frac{1}{2}\varphi_2\Box\varphi_2 \\ \varphi_2(\partial_\mu A^\mu) &\longrightarrow \frac{1}{2}(\varphi_2\partial_\mu A^\mu - A^\mu\partial_\mu\varphi_2) & \text{e} & \quad A^2 = (\Theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu})A^\mu A^\nu, \end{aligned}$$

onde $\Theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box}$ e $\omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box}$ são os operadores de projeção das partes transversal e longitudinal, respectivamente, do campo vetorial A^μ . Então, o Lagrangeano pode ser escrito da forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} &= \frac{1}{2}A^\mu\Box\Theta_{\mu\nu}A^\nu + \frac{qev}{2}(A^\mu\partial_\mu\varphi_2 - \varphi_2\partial_\mu A^\mu) + \frac{1}{2}q^2e^2v^2A^\mu(\Theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu})A^\nu - \frac{1}{2}\varphi_2\Box\varphi_2 \\ \mathcal{L}^{(2)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A^\mu & \varphi_2 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} (\Box + q^2e^2v^2)\Theta_{\mu\nu} + q^2e^2v^2\omega_{\mu\nu} & qev\partial_\mu \\ \hline -qev\partial_\nu & -\Box \end{array} \right) \begin{pmatrix} A^\nu \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esse Lagrangeano pode ser visto da forma $\mathcal{L}^{(2)} = \Phi\Omega\Phi$, sendo Φ o dublete dos campos A^μ e φ_2 e Ω o operador acima que atua sobre esse dublete. E, pela sua equação de movimento, $\Omega\Phi = 0$, nota-se que esse operador deve ser inversível para que se possa obter, na presença de fontes, os propagadores dos campos em função das distribuições de correntes.

Veremos se esse operador é inversível ou não. Sejam $\Omega = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ a matriz que representa o operador e $\Omega^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array}\right)$ sua inversa. Mas, realizando os cálculos da igualdade

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right),$$

encontra-se um resultado em que

$$X = (A - BD^{-1}C)^{-1} \quad \Rightarrow \quad X = [(\Box + 2q^2e^2v^2)\Theta]^{-1}.$$

Ou seja, como a matriz Θ é um projetor e os projetores não são inversíveis, então a matriz X não existe. Logo, o operador Ω que atua no dublete dos campos A^μ e φ_2 não é inversível. Isso indica então que devem haver diferentes Φ 's como soluções degeneradas da equação de movimento, podendo passar de uma solução para outra através de uma transformação de gauge. Ou seja, deve haver uma simetria de gauge sob a qual o Lagrangeano é invariante.

Analisaremos 2 casos de fixações de calibre que levam esse sistema diferentes espectros de partículas: o gauge unitário e o gauge renormalizável.

★ Gauge Unitário

É a fixação de calibre que elimina o campo correspondente ao bóson de Goldstone por escolha de gauge, deixando o espectro do sistema concentrado apenas em partículas físicas reais. Primeiro, para compensar a quebra da simetria de gauge do campo vetorial A_μ ($A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha$) causada pelo termo $e^2 v^2 A^2$, testemos a seguinte transformação de gauge para o campo escalar φ_2 : $\varphi'_2 = \varphi_2 + a\alpha$, onde a é um parâmetro arbitrário. Estas transformações de gauge, após realizadas certas integrações por partes, levam o Lagrangeano a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'^{(2)} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_2)^2 - qev\varphi_2(\partial_\mu A^\mu) + \frac{1}{2}q^2e^2v^2A^2 - (a + qev)\varphi_2\Box\varphi_2 \\ & - \left(\frac{1}{2}a^2 + qeva + \frac{1}{2}q^2e^2v^2\right)\alpha\Box\alpha - qev(a + qev)(\partial_\mu A^\mu)\alpha. \end{aligned}$$

Então, escolhendo o valor $a = -qev$ para o parâmetro a , notemos que o Lagrangeano permanece invariante sob as seguintes transformações de gauge:

$$\begin{cases} A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha \\ \varphi'_2 = \varphi_2 - qev\alpha, \end{cases}$$

de modo que

$$\mathcal{L}'^{(2)} = \mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_2)^2 - qev\varphi_2(\partial_\mu A^\mu) + \frac{1}{2}q^2e^2v^2A^2.$$

E, como α é um parâmetro arbitrário, então ele pode ser escolhido para eliminar o campo φ_2 , da mesma forma que, no gauge de Lorentz usado na Eletrodinâmica de Maxwell ($\partial_\mu A^\mu = 0$), α é escolhido para eliminar o spin-0 do campo de gauge. Ou seja, escolhendo o valor

$$\alpha(x) = \frac{1}{qev}\varphi_2(x),$$

teremos a situação especial em que $\varphi'_2 = 0$, o que mostra que campo escalar φ_2 onde mora o bóson de Goldstone pode ser eliminado por uma escolha de gauge. Essa categoria de campos que aparecem na formulação da teoria mas podem ser eliminados por uma escolha de gauge é a categoria dos campos compensadores, uma categoria de campos muito bem usada na formulação da supergravidade e da supersimetria.

Esse gauge, conhecido como gauge unitário, acaba transformando todo o Lagrangeano do acoplamento de φ_2 com A^μ simplesmente num Lagrangeano de Proca:

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}q^2e^2v^2A^2,$$

o que comprova que a massa adquirida pelo campo vetorial A^μ após essa quebra espontânea de simetria provocada pelo Higgs é de

$$M_A^2 = q^2 e^2 v^2 = -q^2 e^2 \frac{m^2}{\lambda} \quad \text{ou} \quad M_A^2 = \frac{q^2 e^2}{2\lambda} M_H^2 \quad \Rightarrow \quad M_A = qe \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}}.$$

Isso mostra que, quando o bóson vetorial adquire massa, essa escala de massa pode estar bem próxima da escala de massa da quebra espontânea da simetria, contanto que a constante de acoplamento do processo seja de escala próxima à da unidade.

O campo de Goldstone é um campo que, caso permaneça no tratamento teórico até as últimas consequências, acaba destruindo a unitariedade e, como o gauge unitário tem o papel de eliminar esses campos compensadores, então foi por isso que ele recebeu esse nome. Porém, com o gauge unitário se perde a renormalizabilidade da teoria.

★ Gauge Renormalizável ou Gauge de 't Hooft

É a fixação de calibre que mantém o campo escalar correspondente ao bóson de Goldstone no tratamento, mas que elimina o termo de acoplamento dele com o campo vetorial. A idéia do gauge de 't Hooft é acrescentar um Lagrangeano de fixação de gauge que cancele o termo misto de acoplamento. Para isso, usemos o Lagrangeano de calibre abaixo

$$\mathcal{L}^{g-f} = \frac{1}{2\beta} (\partial_\mu A^\mu + \beta q e v \varphi_2)^2,$$

onde β é um parâmetro fixo. Acrescentando esse Lagrangeano de calibre ao Lagrangeano de acoplamento, $\mathcal{L}_{gauge}^{(2)} = \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{g-f}$, obteremos:

$$\mathcal{L}_{gauge}^{(2)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2\beta} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{2} q^2 e^2 v^2 A^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} \beta q^2 e^2 v^2 \varphi_2^2,$$

o que resulta em dois setores separados, o setor de gauge e o setor de Goldstone, com agora o operador de propagação dos campos sendo inversível por estar diagonalizado.

Os campos A^μ e φ_2 possuem como equações de movimento

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} - \frac{1}{\beta} \partial_\nu \partial_\mu A^\mu + q^2 e^2 v^2 A_\nu = 0 \quad \text{e} \quad (\square - \beta q^2 e^2 v^2) \varphi_2 = 0.$$

E, aplicando um operador ∂^ν na equação de A^μ , obtém-se a equação da sua parte longitudinal

$$(\square - \beta q^2 e^2 v^2) \partial_\mu A^\mu = 0,$$

uma equação idêntica à do campo φ_2 , sendo ambas equações do tipo Klein-Gordon para campos escalares. Passando essas equações para o espaço dos momenta k^μ ,

$$(k^2 + \beta q^2 e^2 v^2) k_\mu \widetilde{A}^\mu = 0 \quad \text{e} \quad (k^2 + \beta q^2 e^2 v^2) \widetilde{\varphi}_2 = 0,$$

notemos que aparece um pólo massivo $k^2 = -\beta q^2 e^2 v^2$, podendo ser taquiônico se $\beta > 0$. Mas, nesse caso, como a massa dessas partículas depende do parâmetro de gauge e a massa é uma propriedade física que cada partícula deve ter independentemente da escolha de gauge, então

conclui-se que essas partículas não são físicas, ou seja, o gauge de 't Hooft introduz um modo não-físico de propagação para o bóson de Goldstone e deixa o campo vetorial se propagar com um modo longitudinal não-físico.

Abrindo a equação de A^μ e aplicando nela a equação do setor de spin-0 do campo vetorial, obtém-se a equação da parte transversal de A^μ

$$(\square + q^2 e^2 v^2) A_T^\nu = 0,$$

a qual possui um pólo massivo independente do gauge

$$k^2 = q^2 e^2 v^2$$

o que mostra que a massa legítima física adquirida pelo campo vetorial A^μ logo após a quebra espontânea da simetria está na sua parte transversal.

Em resumo, o espectro de massas obtido usando o gauge de 't Hooft possui duas partículas físicas reais, sendo elas o Higgs e o setor transversal do campo vetorial

$$M_H^2 = 2\lambda v^2 \quad \text{e} \quad M_{A_T}^2 = q^2 e^2 v^2,$$

e dois modos não-físicos, sendo eles o bóson de Goldstone e o setor longitudinal do campo vetorial

$$M_G^2 = -\beta q^2 e^2 v^2 \quad \text{e} \quad M_{A_L}^2 = -\beta q^2 e^2 v^2.$$

A vantagem do gauge unitário em relação ao gauge renormalizável é que o gauge unitário é usado para obter o espectro de todas as partículas físicas que há no problema, sendo então o mais bem adequado para tratar de problemas fenomenológicos. Mas, para se estudar propriedades mais fundamentais da teoria, como renormalizabilidade, unitariedade e a questão das anomalias, é preciso trabalhar com todos os modos de flutuação da teoria, sem suprimir nenhum para não perder elementos da contagem de renormalização e para isso se usa o gauge renormalizável.

3.4 Quebra Espontânea de Simetria de Gauge não-Abeliana: $SU(2) \times U(1)$

Para solucionar o problema da redução do alcance da teoria de Yang-Mills para que ela possa ser usada na descrição de processos eletrofracos, foi necessário gerar massas para os bósons de gauge. Isto é realizado através da quebra espontânea da simetria eletrofraca $SU_L(2) \times U_R(1)$, resultando na teoria eletromagnética de Maxwell $U_{em}(1)$. Primeiro investigaremos como ocorre a quebra espontânea da simetria local $SU_L(2) \times U_R(1)$ de um modo geral, independentemente do Lagrangeano do sistema, para localizar o Higgs, os bósons de Goldstone e como os bósons de gauge irão adquirir massa. Depois tratemos o problema usando o modelo do potencial renormalizável, em analogia com a descrição das seções anteriores.

Neste modelo, um em que os campos respondem a representações com cargas bem definidas de $SU_L(2) \times U_R(1)$, partiremos dos seguintes princípios:

- ★ respeito à simetria de Lorentz;

- ★ os férmions são quirais;
- ★ o setor left é organizado por um dublete de SU(2) e o setor right por um singlete de U(1);
- ★ pressupõe-se a existência da natureza de um setor de escalares.

Neste modelo, os neutrinos são descritos como partículas sem massa. O setor left é descrito por um dublete de espinores leptônicos de quiralidade left sujeito às transformações $SU_L(2)$ e $U_R(1)$, enquanto o setor right é descrito por um singlete de espinor leptônico de quiralidade right sujeito à transformação $U_R(1)$, sendo ambos designados por

$$L = \begin{pmatrix} \nu_L^l \\ l_L \end{pmatrix} \qquad R = l_R,$$

onde l se refere ao lépton em questão (e , μ ou τ) com seu correspondente neutrino ν_L^l . O setor right consiste apenas de um singlete leptônico porque, de acordo com a quebra da paridade do modelo padrão, os neutrinos só possuem a quiralidade left. Usaremos o setor leptônico como constituinte da matéria para estudar este modelo, mas, quanto ao setor de quarks, usa-se um dublete left formado por uma família de quarks (q_{1L} q_{2L}) com seus correspondentes singletes right q_{1R} e q_{2R} , pois este modelo também atua no setor de quarks. Esquemáticamente, este modelo consiste no seguinte processo de quebra de simetria:

$$SU_L(2) \times U_R(1) \xrightarrow[\text{Higgs}]{246 \text{ GeV}} U_{em}(1) \qquad \text{ou} \qquad SU_I(2) \times U_Y(1) \xrightarrow[\text{Higgs}]{246 \text{ GeV}} U_{em}(1)$$

em que a simetria $SU_L(2)$ do setor left está associada com o número quântico I , a simetria $U_R(1)$ do setor right está associada com o número quântico Y e, numa faixa de energia de aproximadamente 246 GeV, o setor de Higgs aparece e quebra as simetrias $SU_L(2)$ e $U_R(1)$, deixando apenas a simetria do setor eletromagnético $U_{em}(1)$ atuando no sistema.

Do ponto de vista da mecânica quântica, como todo e qualquer estado físico tem que ter carga elétrica bem determinada, então vamos associar o operador de carga elétrica com os números quânticos dos grupos SU(2) e U(1), o que pode ser bem realizado pela relação de Gell-Mann-Nishijima:

$$Q_{em} = I_3 + \frac{Y}{2},$$

onde I_3 é o isospin de SU(2) e Y é a hipercarga de U(1). Esta relação estrutural é introduzida tomando por base a relação correspondente no estudo da simetria SU(3) de sabor no chamado Modelo Eightfold Way de Gell-Mann para a Física de hádrons.

O setor de Higgs é introduzido com base na covariância relativística, na idéia de quebra espontânea de simetria e em harmonia com requisitos fundamentais, como causalidade e renormalizabilidade. Isso porque, de acordo com o grupo de Lorentz, campos escalares podem ser convenientemente aglutinados a campos vetoriais para fornecer massa aos campos vetoriais e, também, podem acoplar o setor left com o setor right dos férmions para gerar massa ao setor fermiônico, sem violar a simetria de Lorentz nem a renormalizabilidade do modelo. Os campos escalares são, então, usados para a determinação de escalas de massas em que a teoria a ser

construída possa ter efeito. Vamos introduzir um dublete de escalares complexos para efetuar o papel do Higgs de quebrar a simetria $SU_L(2) \times U_R(1)$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi^{(+)} \\ \varphi^0 \end{pmatrix},$$

em que as componentes superior e inferior possuem, respectivamente, carga eletromagnética $+1$ e 0 . Nesse dublete, como os campos $\varphi^{(+)}$ e $\varphi^{(0)}$ possuem, respectivamente, isospin $+\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$, então nota-se, pela relação de Gell-Mann-Nishijima, que a hipercarga que esse dublete possui para responder às transformações $U_R(1)$ vale $+1$, $Y(\Phi) = +1$. Separaremos os campos desse dublete em duas partes, uma real e outra imaginária pura

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix},$$

em que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ e φ_4 são reais.

Neste modelo, como estamos querendo preservar a simetria $U_{em}(1)$ da interação eletromagnética, já que ela atua tanto nas escalas de baixa energia ($E \sim 1 \text{ ev}$) quanto nas escalas de alta energia ($E \sim 1 \text{ Tev}$), então escolheremos como configuração do estado fundamental para o dublete de escalares uma configuração de carga elétrica nula:

$$\Phi_o = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix},$$

onde v é o valor mínimo de energia que o setor de escalares assume no estado fundamental. Esta configuração de campos provoca uma quebra espontânea nas simetrias $SU_L(2)$ e $U_R(1)$

$$\Phi'_o = e^{i\theta_j \frac{\sigma_j}{2}} \Phi_o \neq \Phi_o \quad \text{e} \quad \Phi'_o = e^{-iq_Y \beta} \Phi_o = e^{-i\beta} \Phi_o \neq \Phi_o.$$

Vamos ver se essa configuração de campos preserva a simetria eletromagnética:

$$\Phi'_o = e^{-iQ_{em}\alpha} \Phi_o \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i(+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\alpha} 0 \\ e^{-i(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\alpha} v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi'_o = \Phi_o.$$

Então, como esperado, a configuração de campos escalares de mínima energia que escolhemos preserva a simetria eletromagnética $U_{em}(1)$, já que a componente superior possui uma fase de transformação mas é nula nessa configuração, enquanto a componente inferior não é nula mas não possui fase de transformação. Agora vamos determinar, dentre todos os campos escalares do dublete, quais atuam como bósons de Goldstone sob as transformações $SU_L(2)$ e $U_R(1)$ e quais atuam como o Higgs desse modelo.

Pelo grupo $SU_I(2)$, o dublete de escalares sofre a seguinte transformação:

$$\Phi' = e^{i\theta_j \frac{\sigma_j}{2}} \Phi,$$

a qual, sendo infinitesimal, implica na variação

$$\delta\Phi = i\theta_j \frac{\sigma_j}{2} \Phi \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \delta\varphi^{(+)} \\ \delta\varphi^{(0)} \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \theta_3 & (\theta_1 - i\theta_2) \\ (\theta_1 + i\theta_2) & -\theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(+)} \\ \varphi^{(0)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \delta\varphi^{(+)} = \frac{i}{2} [\theta_3\varphi^{(+)} + (\theta_1 - i\theta_2)\varphi^{(0)}] \\ \delta\varphi^{(0)} = \frac{i}{2} [(\theta_1 + i\theta_2)\varphi^{(+)} - \theta_3\varphi^{(0)}]. \end{cases}$$

Na configuração do estado fundamental, teremos

$$\begin{cases} \delta\varphi^{(+)} = \frac{i}{2} (\theta_1 - i\theta_2) v \\ \delta\varphi^{(0)} = -\frac{i}{2} \theta_3 v \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \delta\varphi_1 + i\delta\varphi_2 = \frac{1}{2}\theta_2 v + i\frac{1}{2}\theta_1 v \\ \delta\varphi_3 + i\delta\varphi_4 = -i\frac{1}{2}\theta_3 v, \end{cases}$$

o que implica em

$$\delta\varphi_1 = \frac{1}{2}v\theta_2 \quad \delta\varphi_2 = \frac{1}{2}v\theta_1 \quad \delta\varphi_3 = 0 \quad \delta\varphi_4 = -\frac{1}{2}v\theta_3.$$

E pelo grupo $U_Y(1)$, o dublete de escalares sofre a transformação

$$\Phi' = e^{-iq_Y\beta} \Phi,$$

a qual, sendo infinitesimal, implica nas seguintes variações dos campos

$$\begin{cases} \delta\varphi_1 = q_Y\beta\varphi_2 \\ \delta\varphi_2 = -q_Y\beta\varphi_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \delta\varphi_3 = q_Y\beta\varphi_4 \\ \delta\varphi_4 = -q_Y\beta\varphi_3, \end{cases}$$

onde, na configuração do estado fundamental, teremos:

$$\delta\varphi_1 = 0 \quad \delta\varphi_2 = 0 \quad \delta\varphi_3 = 0 \quad \delta\varphi_4 = -q_Y v\beta.$$

No caso da simetria local $SU_I(2)$, como os campos escalares φ_1, φ_2 e φ_4 são os que sofrem flutuações no estado fundamental para gerarem massa para o bóson vetorial da simetria de gauge $SU_I(2)$, então eles são os bósons de Goldstone segundo o setor $SU(2)$. No caso da simetria local $U_Y(1)$, já que o campo escalar φ_4 é aquele que sofre flutuações no estado fundamental para poder gerar massa para o bóson vetorial da simetria de gauge $U_Y(1)$, então ele é o bóson de Goldstone segundo o setor $U(1)$. E como o campo φ_3 é o único campo escalar que não sofre variações no estado fundamental sob nenhuma das transformações e possui valor esperado no vácuo, então ele é quem assume o papel do Higgs neste modelo em que estamos trabalhando: $SU_L(2) \times U_R(1) \xrightarrow[\text{Higgs}]{246 \text{ GeV}} U_{em}(1)$.

Sejam $B_\mu = B_{\mu i} \frac{\sigma_i}{2}$ e Y_μ , respectivamente, os bósons de gauge associados às simetrias $SU_L(2)$ e $U_R(1)$, os quais possuem como constantes de acoplamento da interação deles com a

matéria, respectivamente, g e g' . Já que o campo B_μ é um campo não-Abeliano, então, como foi mostrado no Capítulo 1, sua transformação de calibre é

$$B'_\mu = SB_\mu S^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu S) S^{-1},$$

onde $S = e^{i\theta_i \frac{\sigma_i}{2}}$ é a matriz de transformação do grupo $SU_L(2)$. Para identificarmos como os bósons de Goldstone são absorvidos pelo setor longitudinal do campo vetorial B_μ , realizaremos uma transformação infinitesimal, com $|\theta_i| \ll 1$

$$B'_\mu = \left(1 + i\theta_i \frac{\sigma_i}{2}\right) B_\mu \left(1 - i\theta_i \frac{\sigma_i}{2}\right) - \frac{1}{g} (\partial_\mu \theta_i) \frac{\sigma_i}{2}$$

$$B'_\mu = B_\mu + i\theta_i \left[\frac{\sigma_i}{2}, B_\mu\right] - \frac{1}{g} (\partial_\mu \theta_i) \frac{\sigma_i}{2}$$

$$\delta B_\mu = i\theta_i B_{\mu j} \left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] - \frac{1}{g} (\partial_\mu \theta_k) \frac{\sigma_k}{2}$$

$$\delta B_{\mu k} \frac{\sigma_k}{2} = -\epsilon_{ijk} \theta_i B_{\mu j} \frac{\sigma_k}{2} - \frac{1}{g} (\partial_\mu \theta_k) \frac{\sigma_k}{2},$$

o que nos leva ao seguinte resultado:

$$\delta B_{\mu k} = -\epsilon_{ijk} \theta_i B_{\mu j} - \frac{1}{g} (\partial_\mu \theta_k).$$

Usando o resultado que obtivemos para a perturbação dos campos escalares φ_i no estado fundamental segundo a transformação $SU_I(2)$, concluímos que as 3 componentes de B_μ sofrem as seguintes flutuações no vácuo:

$$\begin{cases} \delta B_{\mu 1} = -\theta_2 B_{\mu 3} - \frac{2}{g\nu} \partial_\mu (\delta\varphi_2) \\ \delta B_{\mu 2} = -\theta_3 B_{\mu 1} - \frac{2}{g\nu} \partial_\mu (\delta\varphi_1) \\ \delta B_{\mu 3} = -\theta_1 B_{\mu 2} + \frac{2}{g\nu} \partial_\mu (\delta\varphi_4). \end{cases}$$

No caso da simetria $U_Y(1)$, como é um caso Abelian de simetria de gauge, então o seu bóson de gauge Y_μ se transforma da mesma forma que o campo vetorial A_μ da eletrodinâmica de Maxwell

$$Y'_\mu = Y_\mu + \frac{1}{g'} \partial_\mu \beta.$$

E usando o resultado que obtivemos para a perturbação dos campos escalares φ_i no estado fundamental segundo a transformação $U_Y(1)$, notemos que este campo sofre a seguinte flutuação no vácuo:

$$\delta Y_\mu = -\frac{1}{g'vq_Y} \partial_\mu (\delta\varphi_4).$$

Portanto, concluímos que, após a quebra espontânea da simetria $SU_L(2)$ provocada pelo Higgs, os campos escalares que descrevem os bósons de Goldstone do setor $SU(2)$ (φ_1, φ_2 e φ_4) são absorvidos nas partes longitudinais dos campos de gauge $B_{\mu i}$ desse setor, acrescentando um grau de liberdade extra da polarização 0, de modo que os campos de gauge adquiram massa. E, analogamente, concluímos que, após a quebra espontânea da simetria $U_R(1)$ provocada também pelo Higgs, o campo escalar correspondente ao bóson de Goldstone do setor $U(1)$ é absorvido na parte longitudinal do campo de gauge Y_μ desse setor, acrescentando um grau de liberdade extra da polarização 0, de modo que o campo de gauge adquira uma massa finita. Isso indica que, após a quebra espontânea da simetria de gauge do sistema, a parte longitudinal dos bósons massivos de spin-1 pode ser descrita por um modelo- σ não-linear constituído pelo setor dos bósons escalares de Goldstone.

Agora vamos ilustrar bem esse processo da quebra espontânea da simetria $SU_L(2) \times U_R(1)$ usando o Lagrangeano de cada setor de interação, onde o Lagrangeano total do sistema é dividido nos setores de Yang-Mills, leptônico, de Higgs e de Yukawa:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{Y-M} + \mathcal{L}^{\text{lépton}} + \mathcal{L}^{\text{Higgs}} + \mathcal{L}^{\text{Yukawa}}.$$

Quanto ao setor de Yang-Mills, o qual trata dos campos de gauge das simetrias $SU_L(2)$ e $U_R(1)$, o seu Lagrangeano invariante de gauge é dado por

$$\mathcal{L}^{Y-M} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu i} F_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu},$$

onde

$$F_{\mu\nu i} = \partial_\mu B_{\nu i} - \partial_\nu B_{\mu i} - g\epsilon_{ijk} B_{\mu j} B_{\nu k} \quad \text{e} \quad G_{\mu\nu} = \partial_\mu Y_\nu - \partial_\nu Y_\mu$$

são, respectivamente, os field strength dos campos de gauge das simetrias $SU_L(2)$ e $U_R(1)$. Por enquanto, antes da quebra espontânea da simetria, isso corresponde a quatro bósons de gauge não-massivos.

Quanto ao caso do setor leptônico de matéria, o seu Lagrangeano invariante de gauge é dado por

$$\mathcal{L}^{\text{lépton}} = \bar{L} i \gamma^\mu D_\mu L + \bar{R} i \gamma^\mu D_\mu R,$$

onde $D_\mu L$ e $D_\mu R$ são as derivadas covariantes que agem, respectivamente, nos setores left e right e valem

$$D_\mu L = \partial_\mu L + ig B_{\mu i} \frac{\sigma_i}{2} L + ig' \frac{Y^L}{2} Y_\mu L = \partial_\mu L + i \frac{g}{2} B_{\mu i} \sigma_i L - i \frac{g'}{2} Y_\mu L$$

$$D_\mu R = \partial_\mu R + ig' \frac{Y^R}{2} Y_\mu R = \partial_\mu R - ig' Y_\mu R,$$

pois, como vimos, o setor left sofre a ação das simetrias $SU_L(2)$ e $U_R(1)$ com hipercarga fraca $Y^L = -1$, enquanto o setor right sofre apenas a ação da simetria $U_R(1)$ com hipercarga fraca $Y^R = -2$.

O Lagrangeano de Yukawa trata do acoplamento entre o setor leptônico e o setor de Higgs, sendo então o responsável pela geração das massas dos léptons. De acordo com argumentos de contagem de potência, a renormalizabilidade, num espaço quadridimensional como o de Minkowski, pede que estes acoplamentos sejam construídos da forma $\bar{L}\Phi R$ e $\bar{R}\Phi^\dagger L$ (acoplamentos de Yukawa), deixando o Lagrangeano invariante sob as transformações $SU_L(2)$ e $U_R(1)$. Então, o Lagrangeano de Yukawa pode ser escrito da forma

$$\mathcal{L}^{\text{Yukawa}} = -f_Y \bar{L}\Phi R - f_Y \bar{R}\Phi^\dagger L,$$

onde f_Y é a constante de acoplamento de Yukawa.

Quanto ao setor de Higgs, usaremos o modelo do potencial renormalizável compatível com a simetria de gauge $V(\Phi, \Phi^\dagger) = m^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$, de modo que o seu Lagrangeano invariante de gauge seja

$$\mathcal{L}^{\text{Higgs}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \lambda \left[(\Phi^\dagger \Phi) - \frac{1}{2} v^2 \right]^2,$$

onde $\frac{v}{\sqrt{2}} = |\Phi_o| = \sqrt{-\frac{m^2}{2\lambda}}$ é o valor esperado do Higgs no vácuo, obtido através da minimização do potencial. Para que o sistema possa flutuar em torno de um valor mínimo não-trivial estável, é necessário que $\lambda > 0$ e $m^2 < 0$.

O campo quântico do setor de Higgs é descrito por uma configuração que representa as suas flutuações em torno do seu estado fundamental. Sejam então Φ_o e H , respectivamente, os dubletes do estado fundamental e das flutuações, dados por

$$\Phi_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi + i\xi \\ \rho + i\sigma \end{pmatrix}$$

de modo que o campo quântico de Higgs seja

$$\Phi = \Phi_o + H \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi + i\xi \\ (v + \rho) + i\sigma \end{pmatrix}.$$

Mas, atuando no gauge unitário, podemos eliminar os campos do dublete que não possuem valor esperado no vácuo, o que reduz o campo de Higgs à forma

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}.$$

A derivada covariante do setor de Higgs, o qual sofre efeito das transformações $SU_L(2)$ e $U_R(1)$, é dada por:

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + igB_{\mu i} \frac{\sigma_i}{2} \Phi + ig' \frac{Y^H}{2} Y_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + i \frac{g}{2} B_{\mu i} \sigma_i \Phi + i \frac{g'}{2} Y_\mu \Phi.$$

Inserindo o campo de Higgs nessa derivada covariante e no potencial renormalizável, obteremos o Lagrangeano de Higgs da forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{Higgs}} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu H)^2 - \lambda v^2 H^2 + \frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^{(+)} W^{\mu(-)} + \frac{g^2 v^2}{8} (B_{\mu 3})^2 - \frac{gg' v^2}{4} B_{\mu 3} Y^\mu + \frac{g'^2 v^2}{8} Y_\mu^2 - \lambda v H^3 \\ & + \frac{g^2 v}{2} H W_\mu^{(+)} W^{\mu(-)} + \frac{g^2 v}{4} H B_{\mu 3} B_3^\mu - \frac{gg' v}{2} H B_{\mu 3} Y^\mu + \frac{g'^2 v}{4} H Y_\mu Y^\mu - \frac{\lambda}{4} H^4 + \frac{g^2}{4} H^2 W_\mu^{(+)} W^{\mu(-)} \\ & + \frac{g^2}{8} H^2 B_{\mu 3} B_3^\mu - \frac{gg'}{4} H^2 B_{\mu 3} Y^\mu + \frac{g'^2}{8} H^2 Y_\mu Y^\mu, \end{aligned}$$

onde

$$W_\mu^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (B_{\mu 1} - i B_{\mu 2}) \quad \text{e} \quad W_\mu^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (B_{\mu 1} + i B_{\mu 2}).$$

Olhando para os termos quadráticos e bilineares do Lagrangeano de Higgs, notemos que, como o campo de Higgs H e os bósons vetoriais carregados $W_\mu^{(+)}$ e $W_\mu^{(-)}$ estão isolados sem acoplamento com nenhum outro campo, então suas massas valem

$$M_H^2 = 2\lambda v^2 \quad \text{e} \quad M_W^2 = \frac{g^2}{4} v^2.$$

Mas quanto aos campos $B_{\mu 3}$ e Y_μ , podemos notar que eles estão acoplados entre si, o que indica que os termos quadráticos de cada um não contêm todas as suas correspondentes massas. Para isso, é necessário diagonalizar a matriz de massa dos campos $B_{\mu 3}$ e Y_μ , sendo ela a matriz abaixo

$$M = \frac{1}{8} v^2 \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}.$$

Essa matriz possui um determinante nulo, o que indica que em sua base diagonalizada um de seus campos seja não-massivo. E já que ela é uma matriz simétrica, então ela pode ser diagonalizada por uma matriz ortogonal de $SO(2)$. Vejamos um caso geral. Seja A uma matriz real simétrica 2×2 qualquer e R uma matriz real ortogonal 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Diagonalizando a matriz A pela matriz R ,

$$RAR^T = \begin{pmatrix} a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta - c \sin 2\theta & c \cos 2\theta - \frac{b-a}{2} \sin 2\theta \\ c \cos 2\theta - \frac{b-a}{2} \sin 2\theta & b \cos^2 \theta + a \sin^2 \theta + c \sin 2\theta \end{pmatrix},$$

nota-se que a matriz ortogonal responsável pela diagonalização é aquela que respeita a seguinte relação:

$$\tan 2\theta = \frac{2c}{b-a}.$$

Então, para o nosso caso de diagonalizar a matriz M , usaremos a matriz ortogonal em que o ângulo de rotação é dado por

$$\tan 2\theta_W = \frac{-2gg'}{g'^2 - g^2} = \frac{2\frac{g'}{g}}{1 - \left(\frac{g'}{g}\right)^2} = \frac{2 \tan \theta_W}{1 - \tan^2 \theta_W} \Rightarrow \tan \theta_W = \frac{g'}{g}$$

o que dá

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \text{e} \quad \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}},$$

onde θ_W é referido como o ângulo de Weinberg. A base diagonalizada de M será uma base formada pelos campos Z_μ e A_μ tais que

$$\begin{cases} Z_\mu = \cos \theta_W B_{\mu 3} - \sin \theta_W Y_\mu \\ A_\mu = \sin \theta_W B_{\mu 3} + \cos \theta_W Y_\mu. \end{cases}$$

Inserindo esses campos no Lagrangeano de Higgs, obteremos

$$\mathcal{L}^{\text{Higgs}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu H)^2 - \lambda v^2 H^2 + \frac{g^2}{4} (v + H)^2 W_\mu^{(+)} W^{\mu(-)} + \frac{(g^2 + g'^2)}{8} (v + H)^2 Z_\mu^2 - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4.$$

Agora, os termos quadráticos mostram que, dos dois campos vetoriais que surgiram para diagonalizar o Lagrangeano de Higgs, o campo A_μ é não-massivo enquanto o campo Z_μ é massivo e possui uma massa de

$$M_Z^2 = \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{4} \Rightarrow M_Z = \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} v \quad M_A = 0,$$

o que indica que o campo vetorial A_μ é o mediador da interação eletromagnética, fóton, enquanto que os campos vetoriais Z_μ , $W_\mu^{(+)}$ e $W_\mu^{(-)}$ são os atualmente conhecidos mésons vetoriais neutro e carregados da interação fraca.

Abrindo o Lagrangeano do setor leptônico na base dos bósons vetoriais A_μ e Z_μ , ele assumirá a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{lépton}} = & \sum_l \bar{\nu}_L^l i \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L^l + \sum_l \bar{l}_i \gamma^\mu \partial_\mu l + g \sum_l \sin \theta_W \bar{l}_i \gamma^\mu l A_\mu \\ & + \frac{g}{\cos \theta_W} \sum_l \left[\frac{\cos 2\theta_W}{2} \bar{l}_L \gamma^\mu l_L - \sin^2 \theta_W \bar{l}_R \gamma^\mu l_R - \frac{1}{2} \bar{\nu}_L^l \gamma^\mu \nu_L^l \right] Z_\mu - \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_l \left[\bar{\nu}_L^l \gamma^\mu l_L W_\mu^{(+)} + \bar{l}_L \gamma^\mu \nu_L^l W_\mu^{(-)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\text{lépton}} &= \sum_l \bar{\nu}^l i \gamma^\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \partial_\mu \nu^l + \sum_l \bar{l} i \gamma^\mu \partial_\mu l + e \sum_l \bar{l} \gamma^\mu l A_\mu \\
&+ \frac{g}{2 \cos \theta_W} \sum_l \left[\frac{\cos 2\theta_W}{2} \bar{l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l - \sin^2 \theta_W \bar{l} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) l - \frac{1}{2} \bar{\nu}^l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu^l \right] Z_\mu \\
&- \frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_l \left[\bar{\nu}^l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l W_\mu^{(+)} + \bar{l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu^l W_\mu^{(-)} \right] \\
\mathcal{L}^{\text{lépton}} &= \sum_l \bar{\nu}^l i \gamma^\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \partial_\mu \nu^l + \sum_l \bar{l} i \gamma^\mu \partial_\mu l + e J_\mu^{em} A^\mu + \frac{g}{\cos \theta_W} J_\mu^0 Z^\mu - \frac{g}{\sqrt{2}} \left[J_\mu^{(-)} W^{\mu(+)} + J_\mu^{(+)} W^{\mu(-)} \right],
\end{aligned}$$

o que mostra que, ao ser o bóson de gauge acoplado à corrente neutra J_μ^0 , o méson vetorial Z_μ é neutro e, quanto aos bósons vetoriais carregados $W_\mu^{(+)}$ e $W_\mu^{(-)}$, ao se acoplarem respectivamente com as correntes carregadas $J_\mu^{(-)}$ e $J_\mu^{(+)}$, possuem cargas eletromagnéticas $+$ e $-$. Quanto ao caso do campo vetorial não-massivo A_μ , notemos que ele se acopla à corrente eletromagnética J_μ^{em} com uma constante de acoplamento e originária de outros parâmetros mais fundamentais dada por

$$e = g \sin \theta_W.$$

Inserindo o campo de Higgs no Lagrangeano de Yukawa, obtemos

$$\mathcal{L}^{\text{Yukawa}} = -\frac{f^{(l)}}{\sqrt{2}} v \sum_l (\bar{l}_L l_R + \bar{l}_R l_L) - \frac{f^{(l)}}{\sqrt{2}} \sum_l (\bar{l}_L l_R + \bar{l}_R l_L) H,$$

o que mostra que, após a quebra da simetria provocada pelo Higgs, os léptons carregados adquirem uma massa de

$$m_l = \frac{f^{(l)}}{\sqrt{2}} v,$$

e os neutrinos permanecem sem massa porque não há neutrinos de quiralidade right.

Escrevendo os tensores intensidade de campo $F_{\mu\nu}$ e $G_{\mu\nu}$ em termos dos bósons vetoriais carregados $W_\mu^{(+)}$ e $W_\mu^{(-)}$ e dos bósons vetoriais neutros A_μ e Z_μ , o Lagrangeano de Yang-Mills assumirá a forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{Y-M} &= -\frac{1}{4} \left[F_{\mu\nu} + ie (W_\mu^{(+)} W_\nu^{(-)} - W_\nu^{(+)} W_\mu^{(-)}) \right]^2 - \frac{1}{4} \left[Z_{\mu\nu} + ig \cos \theta_W (W_\mu^{(+)} W_\nu^{(-)} - W_\nu^{(+)} W_\mu^{(-)}) \right]^2 \\
&- \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu W_\nu^{(+)} - \partial_\nu W_\mu^{(+)}) - ie (W_\mu^{(+)} A_\nu - W_\nu^{(+)} A_\mu) - ig \cos \theta_W (W_\mu^{(+)} Z_\nu - W_\nu^{(+)} Z_\mu) \right]^2,
\end{aligned}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e $Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$ são os tensores intensidade de campo associados aos bósons vetoriais neutros A_μ e Z_μ .

3.5 Conclusões

Vimos como é possível gerar massa para os bósons vetoriais através da quebra espontânea de simetria, tanto para casos Abelianos de simetria $U(1)$ quanto para o caso não-Abeliano da simetria $SU(2) \times U(1)$, o que é bem útil para o estudo de sistemas com interações de alcance finito. Estudamos os 2 principais tipos de fixação de calibre, os quais são o gauge unitário e o gauge renormalizável, sendo que o primeiro trata da descrição das partículas físicas reais e o segundo é usado para estudar a renormalizabilidade da teoria.

Já que o modelo de Higgs foi o modelo de quebra espontânea de simetria mais usado na construção do modelo padrão em física de partículas e já foi aplicado diversas vezes em matéria condensada, então veremos no próximo capítulo se esse modelo pode ser bem aplicado a teorias de gauge de spin-2, o que é o caso da gravitação.

Capítulo 4

Geração de Massa no Setor de Spin-2

4.1 Introdução

A gravitação pode ser bem tratada como uma teoria de Yang-Mills [48]-[50], possuindo dois setores de simetria de gauge: o setor das transformações de Lorentz e o setor das transformações gerais de coordenadas (difeomorfismo), os quais são setores que tratam de objetos situados em espaços diferentes, mas que podem se conectar pelas vielbeins. A gravitação de Einstein já é bem tratada pelo setor de gauge de difeomorfismo, enquanto que, para se tratar de uma gravitação que contenha férmions de matéria fermiônica, é necessário incluir o setor de gauge de Lorentz para que se possa descrever os graus de liberdade dos spins da matéria. Esse setor acaba trazendo para a gravitação a torção, um objeto que descreve as correntes espinoriais da matéria na gravitação.

Recentemente, já existem diversos problemas que justifiquem o estudo da quebra espontânea da simetria de transformações gerais de coordenadas. Um deles está ligado com o estudo de modelos cosmológicos. Em princípio, campos escalares não-massivos que interagem apenas com a gravitação podem existir. Caso existam, eles podem gerar massa ao gráviton, neutralizando a interação gravitacional em largas distâncias. Outro problema é o de ver como o mecanismo de Higgs pode ser aplicado na gravitação ou, caso não dê certo, como ele deve ser modificado para funcionar em sistemas contendo bósons tensoriais massivos de spin-2.

4.2 Gravitação de Einstein-Hilbert Linearizada

Começaremos tratando de uma gravitação pura de Einstein-Hilbert atuando num espaço-tempo quadridimensional sem matéria, com o objetivo de analisar a propagação dos graus de liberdade gravitacionais. Sem a presença da matéria, todos os graus de liberdade gravitacionais estarão na métrica, não havendo torção pela ausência de matéria fermiônica. O Lagrangeano e a ação de Einstein-Hilbert são

$$\mathcal{L}_{E.H.} = -\frac{1}{2\kappa^2}\sqrt{-g}R \qquad S_{E.H.} = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g}R,$$

o que dará como equação de campo para a métrica a equação

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0,$$

onde g é o determinante da métrica, R é o escalar de curvatura de Ricci e $\kappa = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}}$. Pela convenção usual, adotaremos as seguintes definições

$$\begin{aligned} R &= g^{\alpha\nu} R_{\alpha\mu\nu}^{\mu} ; \\ R_{\alpha\mu\nu}^{\lambda} &= \partial_{\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}\Gamma_{\alpha\nu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda}\Gamma_{\alpha\mu}^{\rho} ; \\ \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha} (\partial_{\mu}g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu}g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}). \end{aligned}$$

Como a métrica de Minkowski é uma solução trivial das equações de Einstein, então realizemos a seguinte expansão na métrica total do espaço-tempo

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu},$$

a qual é conhecida como a aproximação do campo fraco ou aproximação linear, onde $h_{\mu\nu}$ é o campo físico a ser estudado, com dimensão de massa e que atua como a flutuação em torno da solução estável. A métrica inversa é

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \kappa^2 h^{\mu}_{\alpha} h^{\alpha\nu} + O(h^3).$$

Assim como as transformações de Yang-Mills aparecem como a simetria natural de gauge dos campos de spin-1 e a supersimetria aparece como a simetria natural de gauge dos campos de spin- $\frac{3}{2}$, as transformações gerais de coordenadas aparecem como a simetria natural de gauge dos campos de spin-2, pois é essa simetria que aparece no estudo das representações de spin-2 do grupo de Lorentz como simetria de gauge. A ação de Einstein-Hilbert é invariante sob transformações gerais de coordenadas $x \rightarrow x'(x)$, onde a métrica sofre a seguinte transformação:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^k}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} g_{k\lambda}.$$

Em particular, com um difeomorfismo infinitesimal do tipo

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x),$$

o Lagrangeano livre de Einstein-Hilbert é invariante sob as transformações

$$h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{\kappa} (\partial_{\mu}\xi_{\nu}(x) + \partial_{\nu}\xi_{\mu}(x)).$$

A equação de Fierz-Pauli, que é a equação de movimento para campos simétricos de spin-2,

$$\square h_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \left(\partial_k h^k_{\nu} - \frac{1}{2} \partial_{\nu} h^{\alpha}_{\alpha} \right) - \partial_{\nu} \left(\partial_k h^k_{\mu} - \frac{1}{2} \partial_{\mu} h^{\alpha}_{\alpha} \right) = 0,$$

nos permite obter como escolha de fixação de gauge o gauge de de Donder

$$\partial_k h^k{}_\mu - \frac{1}{2} \partial_\mu h^\alpha{}_\alpha = 0,$$

o qual pode ser usado para fixar o parâmetro $\xi_\mu(x)$ e eliminar os spins 0 e 1 carregados pelo tensor simétrico $h_{\mu\nu}(x)$, a fim de descrever ondas gravitacionais livres constituídas apenas de spin-2. Esse gauge de de Donder é, portanto, o análogo do gauge covariante de Lorentz da teoria eletromagnética.

Para obter os propagadores do gráviton na aproximação do campo fraco, vamos substituir a métrica e sua inversa no Lagrangeano de Einstein-Hilbert até obter o Lagrangeano de Fierz-Pauli bilinear em h . Usando

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{1}{2} \kappa h^\alpha{}_\alpha - \frac{1}{4} \kappa^2 (h_{\mu\alpha})^2 + \frac{1}{8} \kappa^2 (h^\alpha{}_\alpha)^2 + O(h^3),$$

obtemos

$$\mathcal{L}_{E.H.} \xrightarrow{g=\eta+h} \mathcal{L}_{F.P.} = -\frac{1}{4} \partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \partial_\lambda h^\alpha{}_\alpha \partial^\lambda h^\beta{}_\beta - \frac{1}{2} \partial_\lambda h^\lambda{}_\mu \partial^\mu h^\alpha{}_\alpha + \frac{1}{2} \partial_\lambda h^\lambda{}_\mu \partial_\nu h^{\nu\mu}$$

Acrescentemos agora ao Lagrangeano de Fierz-Pauli o Lagrangeano de fixação de gauge

$$\mathcal{L}_{g.f.} = -\frac{1}{2\alpha} \left(\partial_k h^k{}_\mu - \frac{1}{2} \partial_\mu h^\alpha{}_\alpha \right)^2,$$

de modo que o Lagrangeano final possa ser fatorado da forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{F.P.} + \mathcal{L}_{g.f.} = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} O_{\mu\nu,k\lambda} h^{k\lambda}.$$

Veremos quem é o operador $O_{\mu\nu,k\lambda}$ analisando termo a termo o Lagrangeano total:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} h_{\mu\nu} \square h^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \partial_\lambda (h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{4} h^{\mu\nu} \square \eta_{\mu k} \eta_{\nu \lambda} h^{k\lambda} \\ &= \frac{1}{8} h^{\mu\nu} \square \left(\eta_{\mu k} \eta_{\nu \lambda} + \eta_{\mu \lambda} \eta_{\nu k} \right) h^{k\lambda} \\ &= \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \square \frac{1}{4} \left(\eta_{\mu k} \eta_{\nu \lambda} + \eta_{\mu \lambda} \eta_{\nu k} \right) h^{k\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \partial_\lambda h^\alpha{}_\alpha \partial^\lambda h^\beta{}_\beta &= -\frac{1}{4} h^\alpha{}_\alpha \square h^\beta{}_\beta + \frac{1}{4} \partial_\lambda (h^\alpha{}_\alpha \partial^\lambda h^\beta{}_\beta) \\ &= -\frac{1}{4} h^{\mu\nu} \square \eta_{\mu\nu} \eta_{k\lambda} h^{k\lambda} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}h^{\mu\nu}\frac{1}{2}\square\eta_{\mu\nu}\eta_{k\lambda}h^{k\lambda}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\partial_\lambda h^\lambda{}_\mu\partial^\mu h^\alpha{}_\alpha &= \frac{1}{2}h^\lambda{}_\mu\partial_\lambda\partial^\mu h^\alpha{}_\alpha - \frac{1}{2}\partial_\lambda(h^\lambda{}_\mu\partial^\mu h^\alpha{}_\alpha) \\ &= \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu h^\alpha{}_\alpha \\ &= \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\eta_{k\lambda}h^{k\lambda} \\ &= \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\nu\eta_{k\lambda} + \partial_k\partial_\lambda\eta_{\mu\nu})h^{k\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_\lambda h^\lambda{}_\mu\partial_\nu h^{\nu\mu} &= -\frac{1}{2}h^\lambda{}_\mu\partial_\lambda\partial_\nu h^{\nu\mu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda(h^\lambda{}_\mu\partial_\nu h^{\nu\mu}) \\ &= -\frac{1}{2}h^{\nu\mu}\partial_\nu\partial_k h^k{}_\mu \\ &= -\frac{1}{2}h^{\mu\nu}\partial_\nu\partial_k\eta_{\mu\lambda}h^{k\lambda} \\ &= -\frac{1}{2}h^{\mu\nu}\frac{1}{2}(\eta_{\mu\lambda}\partial_\nu\partial_k + \eta_{\nu\lambda}\partial_\mu\partial_k)h^{k\lambda}, \end{aligned}$$

onde fizemos umas integrações por partes na ação, eliminando as integrais de superfície no infinito.

Analisaremos agora o Lagrangeano de gauge-fixing termo a termo:

$$\mathcal{L}_{g.f.} = -\frac{1}{2\alpha}\left(\partial_\lambda h^\lambda{}_\mu - \frac{1}{2}\partial_\mu h^\alpha{}_\alpha\right)^2 = -\frac{1}{2\alpha}\partial_\lambda h^\lambda{}_\mu\partial_k h^{k\mu} + \frac{1}{2\alpha}\partial_\lambda h^\lambda{}_\mu\partial^\mu h^\alpha{}_\alpha - \frac{1}{8\alpha}\partial_\mu h^\alpha{}_\alpha\partial^\mu h^\beta{}_\beta$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\alpha}\partial_\lambda h^\lambda{}_\mu\partial_k h^{k\mu} &= \frac{1}{2\alpha}h^\lambda{}_\mu\partial_\lambda\partial_k h^{k\mu} - \frac{1}{2\alpha}\partial_\lambda(h^\lambda{}_\mu\partial_k h^{k\mu}) \\ &= \frac{1}{2\alpha}h^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_k\eta_{\nu\lambda}h^{k\lambda} \\ &= \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu\partial_k\eta_{\nu\lambda} + \partial_\nu\partial_k\eta_{\mu\lambda})h^{k\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8\alpha}\partial_\mu h^\alpha{}_\alpha \partial^\mu h^\beta{}_\beta &= \frac{1}{8\alpha}h^\alpha{}_\alpha \square h^\beta{}_\beta - \frac{1}{8\alpha}\partial_\mu \left(h^\alpha{}_\alpha \partial^\mu h^\beta{}_\beta \right) \\
&= \frac{1}{2}h^{\mu\nu} \frac{1}{4\alpha} \square \eta_{\mu\nu} \eta_{k\lambda} h^{k\lambda}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\alpha}\partial_\lambda h^\lambda{}_\mu \partial^\mu h^\alpha{}_\alpha &= -\frac{1}{2\alpha}h^{\lambda\mu} \partial_\lambda \partial_\mu h^\alpha{}_\alpha + \frac{1}{2\alpha}\partial_\lambda \left(h^\lambda{}_\mu \partial^\mu h^\alpha{}_\alpha \right) \\
&= -\frac{1}{2\alpha}h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \eta_{k\lambda} h^{k\lambda} \\
&= -\frac{1}{2}h^{\mu\nu} \frac{1}{2\alpha} \left(\eta_{\mu\nu} \partial_k \partial_\lambda + \eta_{k\lambda} \partial_\mu \partial_\nu \right) h^{k\lambda},
\end{aligned}$$

onde, novamente, fizemos umas integrações por partes na ação admitindo que as integrais de superfície se anulam no infinito.

Portanto, comparando com a forma do Lagrangeano total fatorado

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}h^{\mu\nu} O_{\mu\nu,k\lambda} h^{k\lambda},$$

concluimos que o operador $O_{\mu\nu,k\lambda}$ simétrico nos pares $\mu\nu$ e $k\lambda$ é dado por:

$$\begin{aligned}
O_{\mu\nu,k\lambda} &= \frac{\square}{4} \left(\eta_{\mu k} \eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu k} \right) + \left(\frac{1-2\alpha}{4\alpha} \right) \square \eta_{\mu\nu} \eta_{k\lambda} \\
&\quad + \left(\frac{1-\alpha}{2\alpha} \right) \left(\partial_\mu \partial_k \eta_{\nu\lambda} + \partial_\nu \partial_\lambda \eta_{\mu k} \right) - \left(\frac{1-\alpha}{2\alpha} \right) \left(\partial_\mu \partial_\nu \eta_{k\lambda} + \partial_k \partial_\lambda \eta_{\mu\nu} \right).
\end{aligned}$$

O propagador do gráviton $\langle T(h_{\rho\sigma}(x)h_{k\lambda}(y)) \rangle$ é dado pelo tensor que inverte o operador $O_{\mu\nu,k\lambda}$, no sentido de que

$$O_{\mu\nu,}{}^{\rho\sigma} G_{\rho\sigma,\kappa\lambda} = O_{\mu\nu,}{}^{\rho\sigma} \langle T(h_{\rho\sigma}(x)h_{k\lambda}(y)) \rangle = \frac{1}{2} \left(\eta_{\mu k} \eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu k} \right),$$

onde o termo à direita é a identidade no espaço métrico para campos simétricos de rank-2. O símbolo $T(h_{\rho\sigma}(x)h_{k\lambda}(y))$ designa a operação de ordenamento temporal, conhecida da formulação canônica. Para se solucionar a equação tensorial acima, é necessário introduzir um conjunto de operadores tensoriais que atuam como projetores no setor dos tensores simétricos de rank-2. São eles os operadores de Barners-Rivers $P_{\mu\nu,k\lambda}$ [49] [70] onde, para o caso simétrico, temos:

$$P_{\mu\nu,k\lambda}^{(2)} \equiv \frac{1}{2} \left(\Theta_{\mu k} \Theta_{\nu\lambda} + \Theta_{\mu\lambda} \Theta_{\nu k} - \frac{1}{3} \Theta_{\mu\nu} \Theta_{k\lambda} \right)$$

$$P_{\mu\nu,k\lambda}^{(1)} \equiv \frac{1}{2} \left(\Theta_{\mu k} \omega_{\nu\lambda} + \Theta_{\mu\lambda} \omega_{\nu k} + \Theta_{\nu k} \omega_{\mu\lambda} + \Theta_{\nu\lambda} \omega_{\mu k} \right)$$

$$P_{\mu\nu,k\lambda}^{(0-s)} \equiv \frac{1}{3} (\Theta_{\mu\nu} \Theta_{k\lambda})$$

$$P_{\mu\nu,k\lambda}^{(0-w)} \equiv \omega_{\mu\nu} \omega_{k\lambda},$$

onde $\Theta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square}$ e $\omega^{\mu\nu} = \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square}$ são, respectivamente, os usuais operadores de projeção transversal e longitudinal dos campos vetoriais. Esses operadores de Barners-Rivers respeitam a seguinte relação de completeza

$$P_{\mu\nu,k\lambda}^{(2)} + P_{\mu\nu,k\lambda}^{(1)} + P_{\mu\nu,k\lambda}^{(0-s)} + P_{\mu\nu,k\lambda}^{(0-w)} = \frac{1}{2} \left(\eta_{\mu k} \eta_{\nu \lambda} + \eta_{\mu \lambda} \eta_{\nu k} \right).$$

No produto desses operadores entre si aparecem dois novos operadores que não participam da relação de completeza, já que esses quatro não formam uma álgebra fechada. São eles

$$P_{\mu\nu,k\lambda}^{(0-sw)} \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \Theta_{\mu\nu} \omega_{k\lambda} \qquad P_{\mu\nu,k\lambda}^{(0-ws)} \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \omega_{\mu\nu} \Theta_{k\lambda}.$$

A álgebra dos operadores tensoriais de Barners-Rivers que atuam no setor dos tensores simétricos de rank-2 é

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(i-a)} P_{,k\lambda}^{(j-b) \rho\sigma} &= \delta^{ij} \delta^{ab} P_{\mu\nu,k\lambda}^{(j-b)} \\ P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(i-ab)} P_{,k\lambda}^{(j-cd) \rho\sigma} &= \delta^{ij} \delta^{bc} P_{\mu\nu,k\lambda}^{(j-a)} \\ P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(i-a)} P_{,k\lambda}^{(j-bc) \rho\sigma} &= \delta^{ij} \delta^{ab} P_{\mu\nu,k\lambda}^{(j-ac)} \\ P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{(i-ab)} P_{,k\lambda}^{(j-c) \rho\sigma} &= \delta^{ij} \delta^{bc} P_{\mu\nu,k\lambda}^{(j-ac)}, \end{aligned}$$

a qual pode ser vista pela sua tabela multiplicativa abaixo.

	$P^{(2)}$	$P^{(1)}$	$P^{(0-s)}$	$P^{(0-w)}$	$P^{(0-sw)}$	$P^{(0-ws)}$
$P^{(2)}$	$P^{(2)}$	0	0	0	0	0
$P^{(1)}$	0	$P^{(1)}$	0	0	0	0
$P^{(0-s)}$	0	0	$P^{(0-s)}$	0	$P^{(0-sw)}$	0
$P^{(0-w)}$	0	0	0	$P^{(0-w)}$	0	$P^{(0-ws)}$
$P^{(0-sw)}$	0	0	0	$P^{(0-sw)}$	0	$P^{(0-s)}$
$P^{(0-ws)}$	0	0	$P^{(0-ws)}$	0	$P^{(0-w)}$	0

Em termos dos operadores de projeção de Barners-Rivers, o operador $O_{\mu\nu,k\lambda}$ assume a forma

$$O_{\mu\nu,k\lambda} = \frac{1}{2} \square P_{\mu\nu,k\lambda}^{(2)} + \frac{1}{2\alpha} \square P_{\mu\nu,k\lambda}^{(1)} - \frac{4\alpha - 3}{4\alpha} \square P_{\mu\nu,k\lambda}^{(0-s)} + \frac{1}{4\alpha} \square P_{\mu\nu,k\lambda}^{(0-w)} - \frac{\sqrt{3}}{4\alpha} \square \left(P_{\mu\nu,k\lambda}^{(0-sw)} + P_{\mu\nu,k\lambda}^{(0-ws)} \right).$$

Expressando o inverso desse operador em termos dos mesmos operadores de spin

$$(O^{-1})^{\rho\sigma}_{,k\lambda} = (xP^{(2)} + yP^{(1)} + zP^{(0-s)} + rP^{(0-w)} + sP^{(0-sw)} + tP^{(0-sw)})^{\rho\sigma}_{,k\lambda}$$

e, levando em conta que

$$O_{\mu\nu,\rho\sigma} (O^{-1})^{\rho\sigma}_{,k\lambda} = \frac{1}{2} \left(\eta_{\mu k} \eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu k} \right) = P_{\mu\nu,k\lambda}^{(2)} + P_{\mu\nu,k\lambda}^{(1)} + P_{\mu\nu,k\lambda}^{(0-s)} + P_{\mu\nu,k\lambda}^{(0-w)},$$

chega-se num sistema de seis equações. Com o uso da tabela multiplicativa conclui-se que o operador do propagador do gráviton vale:

$$(O^{-1})_{\mu\nu,k\lambda} = \frac{1}{\square} \left[2P^{(2)} + 2\alpha P^{(1)} - P^{(0-s)} + (4\alpha - 3)P^{(0-w)} - \sqrt{3} (P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}) \right]_{\mu\nu,k\lambda}.$$

Assim, podemos obter a expressão do propagador

$$\langle T[h_{\mu\nu}(x)h_{k\lambda}(y)] \rangle = iO_{\mu\nu k\lambda}^{-1} \delta^4(x - y)$$

$$\begin{aligned} \langle T[h_{\mu\nu}(x)h_{k\lambda}(y)] \rangle &= \frac{i}{\square} \left[2P^{(2)} + 2\alpha P^{(1)} - P^{(0-s)} \right. \\ &\quad \left. + (4\alpha - 3)P^{(0-w)} - \sqrt{3} (P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}) \right]_{\mu\nu,k\lambda} \delta^4(x - y) \end{aligned}$$

No gauge de Feynman ($\alpha = 1$), obtemos um resultado bem simplificado

$$\langle T[h_{\mu\nu}(-k)h_{k\lambda}(k)] \rangle_{\alpha=1} = \frac{-i}{k^2} \left(\eta_{\mu k} \eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu k} - \eta_{\mu\nu} \eta_{k\lambda} \right).$$

Há um pólo $k^2 = 0$, indicando que o mediador gráviton possui massa nula e que se propaga apenas com as helicidades +2 e -2. Como veremos na seção seguinte, a constante cosmológica gera uma massa para o gráviton de forma análoga à massa que o termo de Proca gera ao fóton na eletrodinâmica.

4.3 O Modelo de Higgs Gravitacional

Assim como os bósons vetoriais em teorias de gauge Abelianas e não-Abelianas, os grávitons também podem obter massa através de quebra espontânea de simetria local. O nosso objetivo é encontrar um Lagrangeano escalar de matéria \mathcal{L}_ϕ que, logo após a quebra espontânea da simetria de reparametrização de coordenadas, gere massa para o gráviton sem violar a simetria de Lorentz. Para isso, é necessário que o Lagrangeano tenha a simetria de Poincaré como uma simetria residual, de modo que o termo linear das flutuações em torno da métrica de Minkowski seja nulo [71] [72].

Sob a usual transformação infinitesimal de coordenadas

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x),$$

os campos escalares respondem da forma

$$\phi'(x') = \phi(x') - \xi^\lambda \partial_\lambda \phi(x') + O(\xi^2)$$

o que mostra que a simetria do difeomorfismo pode ser bem interpretada como uma simetria de gauge.

Para que a simetria interna dos escalares seja quebrada, deixando a simetria de Poincaré como simetria residual, é necessário que o valor esperado no vácuo dos escalares $\phi^a(x)$ tenha dependência tipo-frame de Lorentz

$$\langle \phi^a(x) \rangle = mx^a$$

$$\langle g_{\mu\nu} \rangle = \eta_{\mu\nu},$$

onde m é um parâmetro a ser determinado e $a = 0, 1, \dots, D - 1$ é o índice do espaço interno D -dimensional dos escalares.

Um bom Lagrangeano escalar de matéria que consiga gerar massa para o gráviton após a quebra espontânea da simetria é o Lagrangeano abaixo

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \eta_{ab} \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b.$$

Veremos em qual dimensão espaço-temporal esse processo tem maior facilidade de ocorrer, deixando o Lagrangeano total bem mais simplificado.

Escrevendo o campo escalar como uma flutuação em torno de seu estado fundamental

$$\phi^a(x) = \langle \phi^a(x) \rangle + \varphi^a(x) = mx^a + \varphi^a(x)$$

e usando

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{1}{2} \kappa h^\alpha_\alpha - \frac{1}{4} \kappa^2 (h_{\mu\alpha})^2 + \frac{1}{8} \kappa^2 (h^\alpha_\alpha)^2 + O(h^3)$$

$$g^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = D - \kappa h^\alpha_\alpha + \kappa^2 (h_{\mu\nu})^2 + O(h^3)$$

$$\partial_\mu \phi^a = m \delta_\mu^a + \partial_\mu \varphi^a,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi = & -\frac{1}{2} m^2 D - \frac{1}{2} \kappa m^2 \left(\frac{1}{2} D - 1 \right) h^\alpha_\alpha - \frac{1}{2} \kappa^2 m^2 \left(1 - \frac{1}{4} D \right) (h_{\mu\nu})^2 \\ & + \frac{1}{2} \kappa^2 m^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} D \right) (h^\alpha_\alpha)^2 + 2m \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi_\nu + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \eta_{ab} \partial_\mu \varphi^a \partial_\nu \varphi^b + O(h^3). \end{aligned}$$

Notando acima, há um acoplamento das flutuações escalares da matéria com o campo tensorial de gauge $h_{\mu\nu}$. Assim como fizemos no capítulo 2, escolheremos o gauge unitário $\varphi^a = 0$ com o uso da transformação de gauge dos escalares

$$\delta \phi^a(x) = -m \xi^a - \xi^\lambda \partial_\lambda \varphi^a,$$

de modo que, acrescentando o Lagrangeano de gravitação livre, teremos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -\frac{1}{2}m^2 D - \frac{1}{2}\kappa m^2 \left(\frac{1}{2}D - 1\right) h^\alpha_\alpha - \frac{1}{4}\partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial^\lambda h^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\partial_\lambda h^\alpha_\alpha\partial^\lambda h^\beta_\beta - \frac{1}{2}\partial_\lambda h^\lambda_\mu\partial^\mu h^\alpha_\alpha \\ & + \frac{1}{2}\partial_\lambda h^\lambda_\mu\partial_\nu h^{\nu\mu} - \frac{1}{2}\kappa^2 m^2 \left(1 - \frac{1}{4}D\right) (h_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}\kappa^2 m^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}D\right) (h^\alpha_\alpha)^2 + O(h^3).\end{aligned}$$

Então, podemos notar que o processo de quebra espontânea da simetria de gauge gravitacional se realiza com maior facilidade por um setor de escalares agrupados num espaço interno quadridimensional $D = 4$, o que faz com que o Lagrangeano acima seja simplificado para

$$\mathcal{L} = -2m^2 - \frac{1}{2}\kappa m^2 h^\alpha_\alpha - \frac{1}{4}\partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial^\lambda h^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\partial_\lambda h^\alpha_\alpha\partial^\lambda h^\beta_\beta - \frac{1}{2}\partial_\lambda h^\lambda_\mu\partial^\mu h^\alpha_\alpha + \frac{1}{2}\partial_\lambda h^\lambda_\mu\partial_\nu h^{\nu\mu}.$$

Por isso, iremos continuar a seção com $D = 4$. Também, como o termo linear em h^α_α deve ser nulo, já que o campo h é uma flutuação em torno de uma solução mínima $\eta_{\mu\nu}$, então vamos acrescentar a esse Lagrangeano o Lagrangeano da constante cosmológica para eliminar o termo linear em h^α_α

$$\mathcal{L}_\Lambda = -\frac{1}{2\kappa^2}\sqrt{-g}\Lambda.$$

Com isso, o Lagrangeano total que contém os termos bilineares do campo h passa a ser

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_T = & -\left(\frac{1}{2\kappa^2}\Lambda + 2m^2\right) - \left(\frac{1}{4\kappa}\Lambda + \frac{1}{2}\kappa m^2\right) h^\alpha_\alpha + \frac{1}{8}\Lambda(h_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{16}\Lambda(h^\alpha_\alpha)^2 \\ & + \frac{1}{4}h_{\mu\nu}\square h^{\mu\nu} - \frac{1}{4}h^\alpha_\alpha\square h^\beta_\beta + \frac{1}{2}h^\lambda_\mu\partial_\lambda\partial^\mu h^\alpha_\alpha - \frac{1}{2}h^\lambda_\mu\partial_\lambda\partial_\nu h^{\nu\mu}.\end{aligned}$$

Então, concluímos que a eliminação do termo linear se dá com uma constante cosmológica negativa

$$\Lambda = -2\kappa^2 m^2,$$

o que seria bem esperado no nosso limite de baixas energias, já que estamos usando a aproximação do campo fraco com uma métrica de fundo de Minkowski. Apesar de termos a constante cosmológica em \mathcal{L}_T , estamos fazendo uma perturbação em torno do espaço-tempo de Minkowski, e não do espaço de anti-de Sitter. Isto se justifica porque estamos interessados nas excitações correspondentes aos estados assintóticos e, assintoticamente, o grupo de anti-de Sitter $SO(2,3)$ converge para o grupo de Poincaré, $SO(1,3) \times T^{1,3}$. Portanto, assintoticamente, estamos perturbando em torno do espaço-tempo $M^{1,3}$, e não de AdS^4 . Isso significa dizer que o universo obedece a condições de contorno planas no ∞ e, nesta região assintótica, o gráviton aparece massivo às custas da constante cosmológica.

Com essa constante cosmológica o Lagrangeano total fica

$$\mathcal{L}_T = -m^2 - \frac{1}{4}\kappa^2 m^2 (h_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{8}\kappa^2 m^2 (h^\alpha_\alpha)^2 + \frac{1}{4}h_{\mu\nu}\square h^{\mu\nu}$$

$$-\frac{1}{4}h^\alpha_\alpha \square h^\beta_\beta + \frac{1}{2}h^\lambda_\mu \partial_\lambda \partial^\mu h^\alpha_\alpha - \frac{1}{2}h^\lambda_\mu \partial_\lambda \partial_\nu h^{\nu\mu}.$$

Vamos para o espaço de Fourier. Para identificar o espectro de massas dos campos dinâmicos, basta colocar o Lagrangeano total no referencial de repouso $k_\mu = (k, 0, 0, 0)$. Neste referencial, o Lagrangeano total será:

$$\mathcal{L}_T = -m^2 - \frac{1}{4}(k^2 + \kappa^2 m^2)(h_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{8}(2k^2 + \kappa^2 m^2)(h^\alpha_\alpha)^2 + \frac{1}{2}k^2 h_{00} h^{ii} + \frac{1}{2}k^2 h_{0i} h^{0i}.$$

Agora vamos dividir o campo tensorial $h_{\mu\nu}$ em suas representações irredutíveis:

$$h_{00} \equiv u, \quad h_{ii} \equiv h, \quad h_{ij} = \tilde{h}_{ij} + \frac{1}{3}h\delta_{ij}, \quad \tilde{h}_{ii} = 0,$$

$$h_{i0} = h_{0i} = h_i.$$

Em termos dessas novas variáveis e usando

$$(h_{\mu\nu})^2 = u^2 - 2(h_i)^2 + (\tilde{h}_{ij})^2 + \frac{1}{3}h^2$$

$$(h^\alpha_\alpha)^2 = u^2 - 2uh + h^2$$

obtemos:

$$\mathcal{L}_T = -m^2 + (k^2 + \kappa^2 m^2) \left[-\frac{1}{4}(\tilde{h}_{ij})^2 + \frac{1}{6}h^2 \right] + \frac{1}{2}\kappa^2 m^2 h_i^2 - \frac{1}{8}\kappa^2 m^2 (u + h)^2 + O(h_{\mu\nu}^3).$$

De acordo com o Lagrangeano acima, podemos notar que após a quebra espontânea da simetria surgem dois campos propagantes, \tilde{h}_{ij} e h , sendo que \tilde{h}_{ij} são os campos que descrevem as 5 componentes dinâmicas de um gráviton massivo e h é o campo escalar dinâmico que também adquiriu massa, ao passo que h_i e $u + h$ não se propagam. A massa que os campos \tilde{h}_{ij} e h acabam adquirindo por conterem pólos em seus propagadores é de

$$M_{\tilde{h}_{ij}} = M_h = \sqrt{\kappa m} \quad \text{ou} \quad M_{\tilde{h}_{ij}} = M_h = \left(-\frac{\Lambda}{2} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Com isso, podemos ver que a massa do gráviton pode ser fixada pela constante cosmológica. Portanto, temos que o modelo de Higgs aplicado à gravitação resulta num gráviton massivo acompanhado de um escalar massivo.

4.4 Conclusões

Neste capítulo vimos como o mecanismo de Higgs pode ser aplicado à gravitação. Primeiro estudamos uma gravitação livre de Einstein-Hilbert usando a aproximação do campo fraco para saber como é que o gráviton se propaga. Depois acrescentamos um setor de campos escalares e uma constante cosmológica negativa, cujos efeitos eram neutralizados pelos valores esperados no vácuo dos escalares. Procuramos por soluções de campos que tinham um estado fundamental. Vimos que tais soluções existem, mas exigem que os valores esperados no vácuo dos campos

escalares tenham dependência espaço-temporal para quebrar espontaneamente a simetria do difeomorfismo.

Após os valores esperados no vácuo assumirem dependência tipo-frame de Lorentz, os campos escalares se rearranjaram num espaço interno quadridimensional $D = 4$ para produzir uma teoria de campo que trata de partículas de spin-2 massivas e um escalar. Portanto, um mecanismo equivalente ao de Brout-Englert-Higgs aplicado à gravitação pode ser usado para gerar massa para o gráviton, sem a necessidade de se introduzir termos topológicos ou termos de derivadas superiores em adição ao termo de Einstein-Hilbert no Lagrangeano da gravitação. Esse modelo pode ser bem útil na construção de novos modelos cosmológicos que utilizem grávitons massivos, o que foi um dos principais motivos que levou ao seu desenvolvimento.

Capítulo 5

Considerações Finais e Perspectivas Futuras

Pelo resultado final do espectro de massas obtido após a quebra espontânea da simetria do difeomorfismo, notemos que é possível construir um mecanismo análogo ao de Brout-Englert-Higgs que possa ser aplicado a uma teoria de campo de spin-2 que trate da gravitação. Porém, como foi notado por 't Hooft segundo [71]-[72], esse mecanismo não implica numa teoria quântica de campos unitária, pois surgiram ghosts no Lagrangeano final que não foram anulados com o uso do gauge unitário. A expectativa era de que a aplicação desse mecanismo resultasse numa teoria de gauge unitária e renormalizável para a gravitação, como foi no caso da aplicação do mecanismo de Higgs para a construção da teoria eletrofraca de Salam, Glashow e Weinberg.

A Relatividade Geral é uma teoria que trata do espaço-tempo contínuo e que tem maior sucesso especialmente na escala macroscópica e cosmológica, podendo chegar a $10^{15}m$. Hoje em dia, grande parte das tentativas em realizar a sua formulação quantizada foram mais concentradas em desenvolver uma teoria microscópica consistente com as teorias quânticas já bem formuladas e que tenha como limite de baixas energias a relatividade geral. Mas já que a Gravitação é baseada no Princípio da Equivalência, um princípio bem diferente dos princípios da mecânica quântica, então ela não chega a atender bem simultaneamente a situações clássicas e quânticas da mesma forma que as demais interações fundamentais. É necessário, além de usar um formalismo capaz de descrever tanto as teorias de campo vetoriais quanto tensoriais como o de Yang-Mills que utilizamos, impor uma nova visão Física baseada em princípios que atuem mais como ponte-de-ligação entre os regimes clássicos e quânticos da gravitação.

A teoria das cordas é a única teoria candidata à gravitação quântica finita em cada ordem de perturbação, capaz de descrever as partículas do modelo padrão e as outras interações fundamentais. Nela, o papel da mecânica quântica é tão relevante que devemos estar dispostos a modificar a estrutura da Relatividade Geral de Einstein. Mas mesmo assim, as promessas de uma teoria unificada do modelo padrão com a gravitação quântica ainda não foram cumpridas. Ou seja, é necessário a busca por novas idéias.

Para a criação de modelos gravitacionais de grávitons massivos, também existem outros mecanismos que podem gerar massa para o gráviton, como o da geração de massa topológica proveniente de dimensões extras [73] e geração de massa através de termos de torção no Lagrangeano do modelo gravitacional [50], além do mecanismo de Higgs que utilizamos. Gravitação com torção propagante é capaz de resultar num modelo unitário com grávitons massivos em

(1+2)D [50] [70].

Como as teorias de campos mais bem conhecidas de hoje em dia são teorias que descrevem partículas elementares que vão até spin-2, então o mecanismo de Higgs ainda pode ser testado em teorias de gauge para bósons massivos de spin-3 ou em teoria quântica de campos que descreve partículas de spin- $\frac{5}{2}$. Também pode ser testado na supergravidade e na supersimetria para detectar indiretamente indícios que sejam provenientes da quebra espontânea da supersimetria local numa escala de massas mais próxima daquela em que o LHC está atingindo [74]-[77].

Referências Bibliográficas

- [1] T.D. Lee and C.N. Yang, *Phys. Rev.* **104** (1956), 254.
- [2] C.S. Wu, E.Ambler, R.W. Hayward, D.D. Hoppes and R.P. Hudson, *Physical Review* **105** (4) (1957) 1413.
- [3] R.L. Garwin, L.M. Lederman, M. Weinrich, *Physical Review* **105** (4) (1957) 1415.
- [4] A. Roy (2005). “Discovery of Parity Violation”. *Resonance* **10** (12) (2005) 164.
- [5] C.N. Yang and R.L. Mills, *Phys. Rev.* **96** (1954) 191.
- [6] A. Salam, *Nuovo Cimento* **5** (1957), 299.
- [7] T.D. Lee and C.N. Yang, *Phys. Rev.* **119** (1960) 1410.
- [8] T.D. Lee and C.N. Yang, *Phys. Rev. Lett.* **4** (1960) 307.
- [9] T.D. Lee and C.N. Yang, *Phys. Rev.* **128** (1962) 885.
- [10] O. Klein, “On the theory of charged fields”, 1938 *Conference on New Theories in Physics*, Warsaw, Poland, 1938.
- [11] D. Gross, “Oskar Klein and gauge theory”, arXiv: hep-th/9411233v1, PUPT-1508, Princeton University, 1994.
- [12] L. O’Raifeartaigh, *The Dawning of Gauge Theory*, Princeton University Press, 1997.
- [13] C.N. Yang, *Selected Papers (1945-1980) with Complementary*, World Scientific, Hackensack, NJ, 2005, p. 45.
- [14] Ronald Shaw, “Invariance under General Isotopic Spin Transformations”, Ph. D. Thesis, Cambridge University, 1954.
- [15] Ryoyu Utiyama, *Phys. Rev.* **101** (1956) 1597.
- [16] A. Komar and A. Salam, *Nucl. Phys.* **21** (1960), 624.
- [17] H. van Dam and M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B22** (1970) 397.
- [18] E.S. Abers and B.W. Lee, *Physics Reports* **9C** (1973) 1.
- [19] P.M. Anderson, *Phys. Rev.* **112** (1958) 1900.

- [20] P.M.Anderson, *Phys. Rev.* **130** (1963) 439.
- [21] E. Fermi, *Ric. Scientifica* **4** (2) (1933) 491.
- [22] P.A.M. Dirac, *Nuovo Cimento* **7** no. 9 (1950) 925.
- [23] P.A.M. Dirac, *Ann.Inst.H.Poincaré* **13**, no. 1 (1952) 1.
- [24] T.D. Lee and C.N. Yang, *Phys. Rev.* **104** (1956) 254.
- [25] T.D. Lee and C.N. Yang, *Phys. Rev.* **105** (1957) 1671.
- [26] J. Schwinger, *Ann. Phys.* **2** (1957) 407.
- [27] E.C.G. Sudarshan and R.E. Marshak, *Phys. Rev.* **109** (1958) 1860.
- [28] R.P. Feynman and M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* **109** (1959) 193.
- [29] A. Salam and J.C. Ward, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1961) 168.
- [30] S.L. Glashow and M. Gell-Mann, *Ann. Phys.* **15** (1961) 437.
- [31] S.L. Glashow, *Nucl.Phys.* **22** (1961) 579.
- [32] G. Danby, J.M. Gaillard, K. Goulianos, L.M. Lederman, N.B. Mistry, M. Schwartz and J. Steinberger, *Phys. Rev. Lett.* **9** (1962) 36.
- [33] Nicola Cabibbo, *Phys.Rev.Lett.* **10** (1963) 531.
- [34] A. Salam and J.C. Ward, *Phys.Lett.* **13** (1964) 168.
- [35] S. Weinberg, *Phys.Rev.Lett.* **19** (1967) 1264.
- [36] M. Kobayashi and T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49** no.2 (1973) 652.
- [37] Pankaj Jain and Sukanta Panda, “Two graviton production at e^+e^- and hadron hadron colliders in the Randall-Sundrum model”, *JHEP* **0403** 011 (2004), arXiv: hep-ph/0401222 [hep-ph].
- [38] A. Salam, *Progr. Theor. Phys.* **9** (1953) 550.
- [39] Carlos Alberto Santos de Almeida, “Propriedades quânticas e aspectos geométricos de modelos com supersimetria heterótica do tipo (2,0)”, Tese de Doutorado, CBPF, 1991.
- [40] Maurício Werneck de Oliveira, “Quantização no superespaço e cômputo de anomalias em modelos de gauge heteróticos”, Tese de Doutorado, CBPF, 1992.
- [41] Mauro Sérgio Góes Negrão, “Contribuições ao estudo dos modelos-sigma supersimétricos”, Tese de Doutorado, CBPF, 1999.
- [42] H. Leutwyler, “Goldstone Bosons”, [arXiv: hep-ph/9409422v1].

- [43] Domènec Espriu and Brian Yencho, “Longitudinal WW scattering in light of the “Higgs” discovery”, [arXiv: hep-ph/1212.4158v1].
- [44] E. Brezin and Jean Zinn-Justin, *Phys. Rev. Lett.* **36** (1976) 691.
- [45] E. Brezin, Jean Zinn-Justin and J.C. Le Guillou, *Phys. Rev.* **D14** (1976) 2615.
- [46] Z.F. Ezawa, “Quantum Hall Effect: Field-Theoretical Approach and Related Topics”, Word Scientific Publishing Company, Singapore, 2008 2nd Edition.
- [47] Oren Cheyette and Mary K. Gaillard, *Phys. Lett.* **B197** (1987) 205.
- [48] T.W.B. Kibble, *J. Math. Phys.* **212**, 2 (1961).
- [49] Rafael Nardi, “Aspectos da Torção nas Teorias Quânticas da Gravidade”, Dissertação de Mestrado, CBPF, 2008.
- [50] Carlos André Hernaski, “Novos Cenários Efetivos para Gravitação Quântica: Torção Dinâmica e Grávitons Massivos na Escala do LHC”, Tese de Doutorado, CBPF, 2011.
- [51] H. Fröhlich, *Phys. Rev.* **79** (1950) 845.
- [52] Z. Koba, *Progr. Theor. Phys.* **5** (1950) 696.
- [53] G. Wentzel, *Phys. Rev.* **83** (1951) 168.
- [54] Y. Nambu and G. Jona-Lasino, *Phys. Rev.* **122** (1961) 345.
- [55] Y. Nambu, *Phys. Rev.* **117** (1960) 648.
- [56] J. Goldstone, *Nuovo Cimento* **19** (1961) 154.
- [57] J. Bernstein, *Rev. Mod. Phys.* **46** (1974) 7.
- [58] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127** (1962) 965.
- [59] W.Gilbert, *Phys. Rev. Lett.* **12** (1964) 713.
- [60] O. Klein and B.W. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **12** (1964) 266.
- [61] S. Weinberg, in *50 Years of Yang-Mills Theory*, G. 't Hooft, editor, World Scientific, Hackensack, NJ, 2005, p. 105.
- [62] P. Higgs, *Phys. Lett.* **12** (1964) 132.
- [63] P. Higgs, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 508.
- [64] F. Englert and R. Brout, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964), 321.
- [65] G. Guralnik, C. Hagen and T. Kibble, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964), 585.
- [66] S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22** (1961), 579.

- [67] P. Higgs, *Phys. Rev.* **145** (1966) 1156.
- [68] E. Fabri and L.E. Picasso, *Phys. Rev. Lett.* **16** (1966) 408.
- [69] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D7** (1973) 1068.
- [70] Bruno Pereira Dias, “Aspectos Quânticos de Teorias de Gravitação com Violação da Simetria de Lorentz”, Tese de Doutorado, CBPF, 2012.
- [71] G. 't Hooft, “Unitarity in the Brout-Englert-Higgs Mechanism for Gravity”, 2008. arXiv: 0708.3184v4 [hep-th].
- [72] C.S.P. Wever, “A Higgs Mechanism for Gravity”, Master’s Thesis, Universiteit Utrecht, 2009.
- [73] Yutaka Hosotani, *Phys. Lett.* **B126** (1983) 309.
- [74] Erich Poppitz and Sandip P. Trivedi, “New Models of Gauge and Gravity Mediated Supersymmetry Breaking”, arXiv: 9609529v2 [hep-ph].
- [75] Ryuichiro Kitano, Hiroshi Ooguri and Yutaka Ookouchi, Supersymmetry Breaking and Gauge Mediation, arXiv: 1001.4535v2 [hep-th]
- [76] Matthew J. Dolan, David Grellscheid, Joerg Jaeckel, Valentin V. Khoze and Peter Richardson, “New Constraints on Gauge Mediation and Beyond from LHC SUSY Searches at 7 TeV”, arXiv: 1104.0585v2 [hep-ph].
- [77] Shoji Asai, Eita Nakamura and Satoshi Shirai, “Discriminating Minimal SUGRA and Minimal Gauge Mediation Models at the Early LHC”, arXiv: 1202.3584v2 [hep-ph].