

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

EDUARDO HENRIQUE SILVA BITTENCOURT

**SISTEMA GAUSSIANO DE
COORDENADAS PARA AS
MÉTRICAS DE SCHWARZSCHILD
E KERR**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação do CBPF
como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

RIO DE JANEIRO, 14 DE AGOSTO DE 2009.

À minha *flor do lodo*, Grasielle Santos.

Agradecimentos

- Agradeço ao professor Mário Novello pela orientação motivante. Pelo seu entusiasmo “contagante” durante nossas discussões científicas.
- A Grasielle Santos por me agüentar durante tanto tempo falando sobre “*sistema Gaussiano*” e pelas inúmeras sugestões que apresentou sobre o trabalho.
- A José Salim pelas tardes de discussões filosóficas, por proporcionar um novo olhar sobre o real e pelas dicas de meditação.
- A Érico Goulart pelas conversas relacionadas ao tema deste trabalho, música e filosofia.
- Aos amigos do CBPF: Felipe, Nelson, Marcela, Mariana, Sandro, Maria, Stella, Diego e alguns outros que posso estar me esquecendo no momento da escrita, mas que estão guardados na memória. Pela presença destes no *Pequeno Seminário* ajudando com sugestões e dúvidas.
- Aos colegas de sala: Virgínia, Fernando (Boiúna) e Thiago Hartz, pelo excelente clima de estudo.
- Aos secretários da CFC, Ricardo e Elisabete, às secretárias do ICRA, Elisete e Luciene, e aos secretários da biblioteca, Edileuza e André, pela ajuda quanto aos inúmeros problemas técnicos (impressora, pincel, lâmpada, etc...) e pela enorme disposição e simpatia que demonstraram toda vez que precisei deles.
- Aos meus pais e minhas irmãs pelo enorme apoio e carinho que têm me dado ao longo da vida.

- ao CNPq pela bolsa fornecida.

Resumo

A partir das equações de Einstein, analisamos algumas soluções esfericamente simétricas sendo elas: a métrica de Schwarzschild, Schwarzschild-deSitter, Reissner-Nordström e Kerr. A partir delas, construímos sistemas de coordenadas Gaussianos para as métricas de Schwarzschild, Reissner-Nordström e Kerr utilizando as equações das geodésicas, as equações que definem um sistema de coordenadas Gaussiano e a equação de Hamilton-Jacobi. Em seguida, fizemos uma análise qualitativa sobre a violação da causalidade na métrica de Kerr e as curvas geodésicas fechadas neste espaço-tempo. Finalmente, foi possível escrever as equações quase-Maxwellianas para uma dada métrica num sistema de coordenadas Gaussiano e estudar alguns casos particulares.

Abstract

From Einstein's equations, we analyze some spherically symmetric solutions: Schwarzschild, Schwarzschild-deSitter, Reissner-Nordström and Kerr metric. We then build a Gaussian coordinates system for the Schwarzschild, Reissner-Nordström and Kerr metrics using the geodesic equations, the defining equations of a Gaussian coordinate system and the Hamilton-Jacobi equation. After that, we make a qualitative analysis on the violation of causality in the Kerr metric and on the closed geodesics in this spacetime. Finally, we write the quasi-Maxwellian equations for a given metric in a Gaussian coordinate system and then study some particular cases.

Índice

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	iv
Índice	v
Notação	vii
1 Introdução	1
1.1 Algumas soluções esfericamente simétricas das equações de Einstein	5
2 Sistema de coordenadas Gaussiano	7
2.1 Equação de Hamilton-Jacobi relativística	9
2.1.1 Equivalência entre um sistema Gaussiano e uma classe de equações de Hamilton-Jacobi	10
2.2 Sistema de coordenadas Gaussiano para o modelo estelar de Schwarzschild	13
2.2.1 Integração das geodésicas radiais	13
2.2.2 Integração das equações para um sistema Gaussiano . .	21
2.2.3 Integração da equação de Hamilton-Jacobi	24
2.3 Sistema de coordenadas Gaussiano para a métrica de Reissner-Nordström	33
2.3.1 Integração das equações para um sistema Gaussiano . .	33
2.3.2 Integração da equação de Hamilton-Jacobi	38
2.4 Critérios para a construção um sistema Gaussiano global . . .	39

2.5	Sistema de coordenadas Gaussiano para a métrica de Kerr . .	43
3	Métrica de Kerr e violação de causalidade	60
4	Equações quase-Maxwellianas para uma métrica Gaussiana diagonal	64
5	Conclusão	77
6	Referências Bibliográficas	79

Notação

- Índices gregos: $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 0, 1, 2, 3$;

- Índices latinos: $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$;

- Delta de Kronecker:

$$\delta_{\nu}^{\mu} = \begin{cases} 1, & \text{se } \mu = \nu \\ 0, & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases};$$

- $c=1$;

- $8\pi G = 1$;

- Métrica de Minkowski: $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$;

- Derivada parcial $(,)$:

Sendo A^{α} um vetor e x^{μ} uma carta, a derivada parcial de A^{α} é

$$A^{\alpha},_{\mu} \doteq \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\mu}};$$

- Símbolos de Christoffel de primeira espécie:

$$[\beta\gamma, \alpha] = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\alpha});$$

- Símbolos de Christoffel de segunda espécie:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = g^{\alpha\lambda}[\beta\gamma, \lambda];$$

- Tensor de Riemann:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \doteq \Gamma_{\beta\mu,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\nu,\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}\Gamma_{\beta\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha}\Gamma_{\beta\nu}^{\lambda};$$

- Tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} \doteq R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu};$$

- Escalar de curvatura

$$R \doteq R^{\alpha}{}_{\alpha};$$

- Equação de campo de Einstein:

$$G^\mu{}_\nu \doteq R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}R\delta^\mu{}_\nu = -T^\mu{}_\nu;$$

- Pseudo-tensor de Levi-Civita:

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{se } (\alpha\beta\mu\nu) \text{ for permutação par de } 0123, \\ -1, & \text{se } (\alpha\beta\mu\nu) \text{ for permutação ímpar de } 0123, \\ 0, & \text{se houver pelo menos dois índices repetidos;} \end{cases}$$

- Tensor de Levi-Civita:

$$\eta_{\alpha\beta\mu\nu} = \sqrt{-g} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$$

onde g é o determinante de $g_{\mu\nu}$;

- Derivada covariante (;):

Sendo A^α um vetor e x^μ uma carta, a derivada covariante de A^α é

$$A^\alpha{}_{;\mu} \doteq \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} A^\beta;$$

- Operação de simetrização (>):

$$A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu});$$

- Operação de anti-simetrização []:

$$A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}).$$

1 Introdução

Consideremos um elemento de linha, numa variedade quadri-dimensional M , dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha) dx^\mu dx^\nu, \quad (1)$$

onde $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ é o tensor métrico. Podemos construir, a partir deste, as equações de campo de Einstein como sendo

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o *tensor de Ricci* e $T_{\mu\nu}$ é o tensor *momentum-energia*.

As equações de movimento de um ponto material no contexto da relatividade geral são as *equações das geodésicas*. Estas equações podem ser obtidas a partir do princípio variacional de um funcional linear S definido numa variedade diferenciável M [1] e são identificadas com as *equações de Euler-Lagrange* do sistema físico a ser descrito. Sendo γ uma curva definida pela integral da Eq. (1) em M , e sendo P_1 e P_2 pontos de M pertencentes a γ , tal funcional é escrito como

$$S(\gamma) = \int_{P_1}^{P_2} \mathcal{L}(x, \dot{x}) d^4x, \quad (3)$$

onde \mathcal{L} é conhecida como *densidade de Lagrangiana* e

$$L(x, \dot{x}) = \int_{\gamma} \mathcal{L} d^3x, \quad (4)$$

é a função de Lagrange, com i percorrendo apenas as coordenadas espaciais. Se γ for tal que $\delta S = 0$, então γ é dita ser uma geodésica da variedade.

As equações das geodésicas também podem ser obtidas a partir do conceito de transporte paralelo de vetores ao longo de uma curva. Seja V^μ um

campo de velocidades definido na variedade M . Se V^μ for um campo diferenciável de vetores tangentes associados a uma família \mathcal{F} de curvas definidas em M e, além disso, se ele satisfizer a equação

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha V^\mu V^\nu = 0, \quad (5)$$

onde λ é um parâmetro afim ao longo de γ e $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ são os *símbolos de Christoffel de segunda espécie*, então as curvas dessa família \mathcal{F} são ditas ser geodésicas métricas¹. Em particular, se $V^\alpha = \dot{x}^\alpha$, com $\dot{x}^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$, tem-se

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (6)$$

Se exigirmos que $V^\alpha V_\alpha = 1$, podemos definir também um projetor $h^{\mu\nu}$ no tri-espço perpendicular a V^μ como sendo [2]

$$h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - V^\mu V^\nu. \quad (7)$$

$h^{\mu\nu}$ é efetivamente um projetor, visto que satisfaz as propriedades

$$h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}, \quad (8a)$$

$$h_{\alpha\beta} V^\beta = 0, \quad (8b)$$

$$h^\alpha{}_\beta h_{\alpha\mu} = h_{\beta\mu}. \quad (8c)$$

Se calcularmos a derivada covariante de V^μ , em seguida projetá-la no tri-espço gerado por $h_{\mu\nu}$ e utilizarmos o teorema de decomposição em partes irreduzíveis para tensores de ordem 2, temos que

¹De uma maneira geral, é possível definir geodésica métrica diferentemente de geodésica afim, mas aqui será tratado apenas o caso em que elas coincidem.

$$h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} V_{\alpha;\beta} = \omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \vartheta h_{\mu\nu}, \quad (9)$$

onde ϑ , chamado coeficiente de *expansão*, é definido por

$$\vartheta = V^{\mu}{}_{;\mu}, \quad (10)$$

$\omega_{\mu\nu}$ é o coeficiente de *vorticidade*, sendo anti-simétrico, ortogonal a V^{μ} e definido como

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h_{[\mu}^{\alpha} h_{\nu]}^{\beta} V_{\alpha;\beta}, \quad (11)$$

e $\sigma_{\mu\nu}$ é o coeficiente de *cisalhamento* (*shear*), sendo simétrico, sem traço, ortogonal a V^{μ} e definido por

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h_{(\mu}^{\alpha} h_{\nu)}^{\beta} V_{\alpha;\beta} - \frac{1}{3} \vartheta h_{\mu\nu}. \quad (12)$$

Uma outra quantidade cinemática, chamada *aceleração*, pode ser definida por

$$a^{\mu} = V^{\mu}{}_{;\alpha} V^{\alpha}. \quad (13)$$

Tal quantidade está intrinsecamente relacionada com o fato do campo de velocidades V^{μ} ser geodésico ou não.

Por outro lado, se estudarmos a decomposição em partes irredutíveis do tensor de Riemann $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$, encontraremos uma parte que é essencialmente geométrica, ou seja, não pode ser determinada apenas pela distribuição de matéria no espaço-tempo. Esta parte é conhecida como *tensor de Weyl* e é definida da seguinte forma

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} - M_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{6} R g_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (14)$$

onde

$$M_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(R_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + R_{\beta\nu}g_{\alpha\mu} - R_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - R_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}) \quad (15)$$

e

$$g_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}. \quad (16)$$

O *dual* do tensor de Weyl é dado por

$${}^*W_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}{}^{\gamma\delta}W_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (17)$$

onde $\eta_{\mu\nu}{}^{\gamma\delta}$ é o *tensor de Levi-Civita*.

De posse de um campo de velocidades V^μ , do tensor de Weyl $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ e seu dual, podemos definir duas quantidades que estão associadas as forças de maré newtonianas. Uma delas é chamada *parte elétrica* $E_{\alpha\beta}$ do tensor de Weyl e é definida por

$$E_{\alpha\beta} = -W_{\alpha\mu\beta\nu}V^\mu V^\nu. \quad (18)$$

A outra é a *parte magnética* $H_{\alpha\beta}$ do tensor de Weyl definida como sendo

$$H_{\alpha\beta} = -{}^*W_{\alpha\mu\beta\nu}V^\mu V^\nu. \quad (19)$$

Os nomes dados às quantidades definidas pelas Eqs. (18) e (19) são bastante sugestivos. Tal sugestão surge das equações dinâmicas que a geometria Riemanniana considerada impõe sobre estas quantidades, usando como condições iniciais as equações de Einstein. Estas equações são chamadas *equações quase-Marwellianas* da relatividade geral, e podem ser vistas em [3].

1.1 Algumas soluções esfericamente simétricas das equações de Einstein

Consideremos agora um caso particular², onde a Eq. (1) é dada por

$$ds^2 = A(t, r)dt^2 - B(t, r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (20)$$

Para o caso em que $T^\mu{}_\nu = 0$, podemos aplicar o teorema de Birkhoff [4] para mostrar que $A(t, r) \equiv A(r)$ e $B(t, r) \equiv B(r)$, ou seja, a métrica é *necessariamente estática*. Neste caso, as Eqs. (2), expressas em componentes, tomam a seguinte forma

$$G_0^0 = \frac{1}{4B} \left[\left(\frac{A'}{A} \right)^2 + \frac{A' B'}{A B} - 2 \frac{A''}{A} - \frac{4 A'}{r A} \right], \quad (21a)$$

$$G_1^1 = \frac{1}{4B} \left[\left(\frac{A'}{A} \right)^2 + B' \frac{A'}{A} - 2 \frac{A''}{A} + \frac{4 B'}{r B} \right], \quad (21b)$$

$$G_2^2 = -\frac{1}{2Br} \left[\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} + \frac{2}{r} - \frac{2B}{r} \right], \quad (21c)$$

$$G_3^3 = G_2^2, \quad (21d)$$

sendo as demais componentes identicamente nulas. Podemos resolver as Eqs. (21), no limite de campo gravitacional fraco, se levarmos em consideração que a variedade em questão é assintoticamente plana e obtendo assim a solução de Schwarzschild [5], cujo elemento de linha da Eq. (20) é

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (22)$$

onde $r_S = 2M$ é o *raio de Schwarzschild* e M é conhecida como *massa geométrica* do buraco negro.

²A Eq. (20) poderia ser mais genérica tendo $C(r)$ ao invés de r , mas foi feita uma transformação na coordenadas tal que $C(r) = r$, sem perda de generalidade.

Se considerarmos o caso em que $T^\mu{}_\nu = \Lambda \delta^\mu{}_\nu$, onde Λ é a *constante cosmológica*, e que as funções A e B na Eq. (20) dependam apenas da coordenada radial r , as Eqs. (2) são dadas por

$$G_0^0 = \frac{1}{rB} \left[\frac{B'}{B} - \frac{1}{r} + \frac{B}{r} \right] = \Lambda, \quad (23a)$$

$$G_1^1 = \frac{1}{rB} \left[\frac{A'}{A} + \frac{1}{r} - \frac{B}{r} \right] = -\Lambda, \quad (23b)$$

$$G_2^2 = \frac{1}{rB} \left[\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} - \frac{r}{2} \left(\frac{A'}{A} \right)^2 - \frac{r}{2} \frac{B'}{B} \frac{A'}{A} + r \frac{A''}{A} \right] = -2\Lambda, \quad (23c)$$

$$G_3^3 = G_2^2. \quad (23d)$$

Resolvendo as Eqs. (23), obtemos a solução de Kottler [6], na qual a Eq. (20) é dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta)d\phi^2. \quad (24)$$

Se agora, além das condições que foram impostas para a obtenção da solução de Schwarzschild, considerarmos que há um tensor momentum-energia de um campo eletromagnético gerado por uma carga q que se encontra em $r = 0$, podemos resolver as Equações de Einstein e encontraremos a solução de Reissner-Nordström [7], cujo elemento de linha é dado por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta)d\phi^2. \quad (25)$$

Como não há uma dedução analítica construtivista intuitiva³ da métrica de Kerr [8], esta solução das equações de Einstein será apresentada em al-

³Existe uma dedução analítica, mas ela considera uma transformação de coordenadas complexa na solução de Schwarzschild.

guns sistemas de coordenadas do interesse deste trabalho. Esta métrica foi proposta por Kerr em 1963 [9], e tem a seguinte forma

$$ds^2 = (dx^0)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + \left[dx^0 + \frac{\rho}{a^2 + \rho^2}(x dx + y dy) + \frac{a}{a^2 + \rho^2}(y dx - x dy) + \frac{z}{\rho} dz \right]^2. \quad (26)$$

onde M é a *massa geométrica*, $a \equiv J/M$ *momento angular por unidade de massa geométrica*, sendo J o *momento angular* associado ao objeto que gera tal métrica, e

$$\rho^2 = \frac{r^2 - a^2 + \sqrt{(r^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2}}{2}, \quad (27)$$

com $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Em 1967, R. H. Boyer e R. W. Lindquist [10] encontraram um sistema de coordenadas no qual a métrica de Kerr tem sua máxima extensão analítica. Neste sistema de coordenadas, ela é dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S \rho}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) d\hat{t}^2 - \frac{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}{\Delta} d\rho^2 - (\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 - \left(\rho^2 + a^2 + \frac{a r_S \rho}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta d\hat{\phi}^2 + \frac{2 a r_S \rho \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} d\hat{t} d\hat{\phi} \quad (28)$$

onde $\Delta \equiv (\rho^2 + a^2 - r_S \rho)$ e r_S é o raio de Schwarzschild.

2 Sistema de coordenadas Gaussiano

Quando conseguimos encontrar um sistema de coordenadas tal que o elemento de linha infinitesimal (1) possa ser escrito na forma

$$ds^2 = d\tau^2 + \bar{g}_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j, \quad (29)$$

então tal sistema de coordenadas é dito *Gaussiano*. Uma propriedade de um tal sistema é que, localmente, ele define uma hipersuperfície do *tipo-espaço*, ou seja, os vetores normais a essa hipersuperfície são do *tipo-tempo*. Outra propriedade importante é que o tempo coordenado do sistema coincide com o tempo próprio de um observador do tipo-tempo, lembrando que na física observadores massivos são do tipo-tempo.

As equações que definem um sistema de coordenadas Gaussiano com componentes $\bar{x}^\alpha = (\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ são

$$\bar{g}^{00} = \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} = 1, \quad (30a)$$

$$\bar{g}^{0i} = \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} = 0. \quad (30b)$$

Vale ressaltar que, naturalmente, as Eqs. (30) têm seu domínio de validade somente onde estiver bem definido o sistema de coordenadas a partir do qual será construído o sistema Gaussiano. Um exemplo para isso é a métrica de Schwarzschild dada pela Eq. (22). O sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) só está bem definido para a região $r > r_S$. Assim, é necessário encontrar um outro sistema de coordenadas, por exemplo o sistema de coordenadas de *Eddington-Finkelstein* [11] ou então o sistema de coordenadas de *Kruskal-Szekeres* [12], tal que este tenha um domínio de validade maior sobre a variedade.

Porém, no caso de Schwarzschild, pode-se notar que se abrimos mão do significado físico de t e r e fizermos estas coordenadas trocarem de papel, ou seja, r passa a ser uma coordenada temporal e t uma coordenada espacial, então o novo sistema de coordenadas (r, t, θ, ϕ) cobre a parte restante da variedade deixada pelo sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) que corresponde a

$r < r_S$.⁴ Um caso similar aparecerá para a métrica de Reissner-Nordström.

2.1 Equação de Hamilton-Jacobi relativística

A ação para uma partícula livre (uma partícula que não esteja sob a influência de forças externas) na presença de um campo gravitacional, pode ser escrita como

$$S = -m \int ds, \quad (31)$$

onde ds é dado pela Eq. (1). Do princípio variacional, encontramos que

$$\delta S = -m u_\alpha \delta x^\alpha \Big|_a^b + m \int_a^b \delta x^\alpha \frac{Du_\alpha}{Ds} ds, \quad (32)$$

onde u_α são as componentes covariantes da quadri-velocidade da partícula. Sendo a variação feita com respeito a extremos fixos ($(\delta x^\alpha)_a = (\delta x^\alpha)_b = 0$), então temos que as equações de movimento são dadas por

$$\frac{Du_\alpha}{Ds} \equiv \frac{du_\alpha}{ds} - \Gamma_{\alpha\nu}^\mu u^\nu u_\mu = 0, \quad (33)$$

sendo D/Ds chamada de *derivada absoluta*.

Para determinarmos a dependência funcional da variação da ação com respeito às coordenadas, podemos deixar um dos extremos da variação livre, porém admitindo que a trajetória da partícula satisfaz as equações de movimento. Assim, teremos que

$$\delta S = -m u_\alpha \delta x^\alpha. \quad (34)$$

O quadri-vetor definido por

⁴Observa-se que mesmo assim as coordenadas de Schwarzschild cobrem apenas um quadrante do diagrama conforme de Kruskal.

$$p_\alpha \doteq -\frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \quad (35)$$

é chamado de *quadri-momentum*. O quadrado deste vetor é

$$p_\alpha p^\alpha = m^2. \quad (36)$$

Substituindo as Eqs. (35) em (36), encontramos a equação de Hamilton-Jacobi para uma partícula num campo gravitacional dada por

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} - m^2 = 0. \quad (37)$$

2.1.1 Equivalência entre um sistema Gaussiano e uma classe de equações de Hamilton-Jacobi

De acordo com o formalismo das transformações canônicas de coordenadas [13], onde $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ segundo uma função geratriz $F_1(q, Q, t)$, temos a seguinte condição

$$dF_1 = \sum_i (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (K - H) dt. \quad (38)$$

Na forma covariante, podemos escrever

$$dF_1(q^\mu, Q^\mu) = -p_\alpha dq^\alpha + P_\mu dQ^\mu, \quad (39)$$

onde $p_\alpha = (H, -\vec{p})$ e $P_\mu = (K \partial t / \partial Q^0, -\vec{P})$. Se utilizarmos uma função geratriz $F_2(q^\mu, P_\nu)$, teremos

$$F_2 = F_1 - P_\mu Q^\mu, \quad (40a)$$

$$dF_2 = -p_\alpha dq^\alpha - Q^\mu dP_\mu. \quad (40b)$$

Portanto, a função F_2 deve satisfazer

$$p_\alpha = -\frac{\partial F_2}{\partial q^\alpha}, \quad Q^\mu = -\frac{\partial F_2}{\partial P_\mu}. \quad (41)$$

De posse da Eq. (35), podemos identificar, neste caso, $F_2(q, P)$ com a ação $S(q, P) = S(q, p(q, P))$ de uma partícula relativística num campo gravitacional. Assim,

$$p_\alpha = -\frac{\partial S}{\partial q^\alpha}, \quad (42a)$$

$$Q^\mu = -\frac{\partial S}{\partial P_\mu}. \quad (42b)$$

Assumindo que $Q^0 = S/m$, da componente 0 das Eqs. (42b) temos

$$\frac{S}{m} = -\frac{\partial S}{\partial P_0}. \quad (43)$$

Logo,

$$S = e^{-P_0/m} f(q^\mu, P_i) \quad (44)$$

Sabendo que a equação de Hamilton-Jacobi é tal que a nova Hamiltoniana K é constante ($H \rightarrow K = C^{te} \equiv 1$), sendo $P_0 \propto K$, segue que $S = S(q^\mu, P_i)$. Portanto, reescrevendo a Eq. (37), temos

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial Q^0}{\partial x^\mu} \frac{\partial Q^0}{\partial x^\nu} = 1. \quad (45)$$

Tomando a derivada parcial com respeito a P_i da Eq. (45) e usando a Eq. (42b), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P_i} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial Q^0}{\partial x^\mu} \frac{\partial Q^0}{\partial x^\nu} - 1 \right) = 0 &\implies \\ \implies g^{\mu\nu} \frac{\partial Q^0}{\partial x^\mu} \frac{\partial Q^i}{\partial x^\nu} = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Nota-se que o sistema de coordenadas Q^μ juntamente com Eqs. (45) e (46) definem um sistema de coordenadas Gaussiano, de acordo com as Eqs. (30).

Como exemplo, podemos supor que S seja função das coordenadas esféricas $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$ dada por

$$S = \alpha t + \beta \phi + \gamma \theta + F(r, \alpha, \beta, \gamma), \quad (47)$$

com α , β e γ sendo parâmetros. Se calcularmos as derivadas parciais de S com respeito às coordenadas x^μ , temos

$$\begin{aligned} p_0 &\equiv \frac{\partial S}{\partial t} = \alpha, \\ p_1 &\equiv \frac{\partial S}{\partial r} = F'(r), \\ p_2 &\equiv \frac{\partial S}{\partial \theta} = \gamma, \\ p_3 &\equiv \frac{\partial S}{\partial \phi} = \beta, \end{aligned} \quad (48)$$

onde $F' = dF/dr$. Por outro lado, se calcularmos as derivadas parciais de S com respeito aos parâmetros, obteremos

$$\begin{aligned} Q^1 &\equiv \frac{\partial S}{\partial \alpha} \implies \alpha = -P_1, \\ Q^2 &\equiv \frac{\partial S}{\partial \gamma} \implies \gamma = -P_2, \\ Q^3 &\equiv \frac{\partial S}{\partial \beta} \implies \beta = -P_3. \end{aligned} \quad (49)$$

Portanto, temos como se dá tal transformação canônica segundo a função geratriz $S(q^\mu, P_i)$.

2.2 Sistema de coordenadas Gaussiano para o modelo estelar de Schwarzschild

Se escrevermos a métrica de Schwarzschild (22) em um sistema de coordenadas Gaussiano, uma das maneiras que ela deve apresentar-se é da seguinte forma

$$ds^2 = d\tau^2 - h^2(\tau, \rho)d\rho^2 - r^2(\tau, \rho)(d\bar{\theta}^2 + \text{sen}^2\bar{\theta}d\bar{\phi}^2). \quad (50)$$

A seguir apresentaremos alguns métodos de como encontrar um tal sistema de coordenadas para o caso do espaço-tempo de Schwarzschild.

2.2.1 Integração das geodésicas radiais

Consideremos as equações das geodésicas dadas pelas Eqs. (6). Se investigarmos apenas as geodésicas radiais no plano equatorial para a métrica de Schwarzschild (22), estas equações tomam a seguinte forma [14]

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = 0, \quad (51a)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = 0, \quad (51b)$$

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} + \frac{A'}{A} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0, \quad (51c)$$

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} + \frac{1}{2}A'A \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{A'}{A} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = 0, \quad (51d)$$

onde $A(r) = (1 - r_S/r)$ e A' denota a derivada de A em relação a r . Integrando as Eqs. (51c) e (51d), temos que

$$A \frac{dt}{d\lambda} = E, \quad (52a)$$

$$\frac{1}{A} E^2 - \frac{1}{A} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = \epsilon, \quad (52b)$$

onde E e ϵ são constantes de integração. Escolhendo o parâmetro λ tal que ele seja o tempo próprio τ de uma partícula, e admitindo que o vetor velocidade da mesma seja normalizado, ou seja,

$$1 = V^\alpha V_\alpha = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \epsilon, \quad (53)$$

podemos reescrever a Eq. (52b) como

$$\frac{E^2}{(1 - r_S/r)} \left[1 - \left(1 - \frac{r_S}{r} \right)^{-2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] = 1. \quad (54)$$

Tomando o limite de $r \rightarrow \infty$, temos que

$$E^2 \left[1 - \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \Big|_{r \rightarrow \infty} = E^2 (1 - v_0^2) = 1. \quad (55)$$

Se a partícula tiver uma velocidade inicial v_0 nula, então $E = 1$. A partir das Eqs. (52a) e (52b), temos as relações entre as coordenadas (t, r) e o tempo próprio τ

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \left(1 - \frac{r_S}{r} \right)^{-1}, \quad (56a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} = -\sqrt{\frac{r_S}{r}}, \quad (56b)$$

onde o sinal negativo da Eq. (56b) foi escolhido tal que r diminua conforme τ aumente.

Já que pretendemos deixar a métrica de Schwarzschild noutro sistema de coordenadas $\bar{x}^\mu = (\tau, \rho, \bar{\theta}, \bar{\phi})$ na forma dada por (50), podemos comparar este elemento de linha com aquele dado por (22), e assim obtemos as seguintes relações para a coordenada ρ :

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \rho}\right)^2 = \frac{r_S}{r} \frac{h^2}{(1 - r_S/r)^2}, \quad (57a)$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \rho}\right)^2 = h^2. \quad (57b)$$

Além disso, há vínculos de integrabilidade para esta transformação de coordenadas, dados por

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \rho \partial \tau} = \frac{\partial^2 t}{\partial \tau \partial \rho}, \quad (58a)$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \rho \partial \tau} = \frac{\partial^2 r}{\partial \tau \partial \rho}. \quad (58b)$$

De (58b), temos que

$$\begin{aligned} -\frac{\partial h}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(-\sqrt{\frac{r_S}{r}} \right) = \frac{1}{2r} \sqrt{\frac{r_S}{r}} \left(\frac{\partial r}{\partial \rho} \right) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{1}{2r} h \sqrt{\frac{r_S}{r}}. \end{aligned} \quad (59)$$

Uma solução para esta equação é

$$\frac{dh}{dr} \frac{\partial r}{\partial \tau} = \frac{1}{2r} h \sqrt{\frac{r_S}{r}} \rightarrow \frac{dh}{dr} = -\frac{h}{2r} \rightarrow h = \sqrt{\frac{r_S}{r}}. \quad (60)$$

e com esta solução a Eq. (58a) é imediatamente satisfeita.

De posse das Eqs. (56b) e (57b), podemos integrá-las, e obtermos

$$r^{3/2} = -\frac{3}{2}\sqrt{r_S}(\tau + \rho). \quad (61)$$

Da Eq. (56a) temos que

$$t = \left[3r_S\sqrt{r} + \frac{3}{2}\sqrt{r_S}(\tau + \rho) - \frac{3}{2}r_S^{3/2} \ln \left(\frac{\sqrt{r/r_S} + 1}{|\sqrt{r/r_S} - 1|} \right) \right] + f(\rho). \quad (62)$$

Por outro lado, da Eq. (57a) temos

$$t = \left[3r_S\sqrt{r} - \frac{3}{2}r_S^{3/2} \ln \left(\frac{\sqrt{r/r_S} + 1}{|\sqrt{r/r_S} - 1|} \right) \right] + g(\tau). \quad (63)$$

Comparando as Eqs. (62) e (63), encontramos que

$$t = \tau + r_S \left[\ln \left(\frac{\sqrt{r/r_S} + 1}{|\sqrt{r/r_S} - 1|} \right) - 2\sqrt{\frac{r}{r_S}} \right]. \quad (64)$$

Finalmente, podemos escrever a transformação de coordenadas de (t, r) para (τ, ρ) como

$$t = \tau + r_S \left[\ln \left(\frac{\sqrt{r/r_S} + 1}{|\sqrt{r/r_S} - 1|} \right) - 2\sqrt{\frac{r}{r_S}} \right], \quad (65a)$$

$$r = \left[-\frac{3}{2}\sqrt{r_S}(\tau + \rho) \right]^{2/3}, \quad (65b)$$

cuja transformação inversa é dada por

$$\tau = t - r_S \left[\ln \left(\frac{\sqrt{r/r_S} + 1}{|\sqrt{r/r_S} - 1|} \right) - 2\sqrt{\frac{r}{r_S}} \right], \quad (66a)$$

$$\rho = -t + r_S \left[\ln \left(\frac{\sqrt{r/r_S} + 1}{|\sqrt{r/r_S} - 1|} \right) - 2\sqrt{\frac{r}{r_S}} \right] - \frac{2r}{3}\sqrt{\frac{r}{r_S}}. \quad (66b)$$

Notamos que o domínio das novas coordenadas (τ, ρ) são tais que $-\infty < \tau < \infty$ e $-\infty < \rho < \infty$. Além disso, a superfície $r = r_S$ é dada por

$$r_S = -\frac{3}{2}(\tau + \rho). \quad (67)$$

Agora que o elemento de linha (50) está bem definido, a partir das transformações (65) e (66), podemos estudar um campo de velocidades \bar{V}^μ de observadores do tipo-tempo nesta geometria com este novo sistema de coordenadas.

Seja $\bar{V}^\mu \doteq \delta_0^\mu$. Se substituirmos \bar{V}^μ nas Eqs. (5), podemos mostrar que ele é tangente às geodésicas radiais, pois essas equações serão identicamente satisfeitas. Portanto, a aceleração a^μ definida por (13) também será identicamente nula. Como \bar{V}^μ é um gradiente por definição, ele é perpendicular às superfícies $\tau = \text{const}$. Portanto, ele será irrotacional ao longo de cada uma dessas superfícies, ou seja, $\omega^{\mu\nu} = 0$, onde $\omega^{\mu\nu}$ é definido por (11). Sendo assim, a Eq. (10) para a expansão pode ser escrita como

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}}(\sqrt{-\bar{g}}\bar{V}^\alpha)_{,\alpha}, \quad (68)$$

onde $\sqrt{-\bar{g}}$ é o determinante da métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$. Neste caso, $\sqrt{-\bar{g}} = \sqrt{r_S}r^{3/2}\text{sen}\theta$, portanto

$$\vartheta = \frac{1}{r^{3/2}}(r^{3/2})_{,0} = \frac{3}{2r} \frac{\partial r}{\partial \tau} = -\frac{3}{2r} \sqrt{\frac{r_S}{r}}. \quad (69)$$

Como a métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ está num sistema de coordenadas Gaussiano, o projetor no tri-espaco $\bar{h}_{\mu\nu}$ tem apenas componentes espaciais não nulas sendo $\bar{h}_{ij} = \bar{g}_{ij}$. Assim, podemos encontrar a deformação $\sigma_{\mu\nu}$ a partir da Eq. (12) como sendo

$$\sigma_{ij} = \bar{V}_{i;j} - \frac{1}{3}\vartheta\bar{g}_{ij}. \quad (70)$$

Em componentes, podemos escrevê-la como

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{11,0}) + \frac{1}{2}\frac{r_S\dot{r}}{r^2} = \frac{r_S\dot{r}}{r^2}, \quad (71a)$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{22,0}) + \frac{1}{2}r\dot{r} = -\frac{1}{2}r\dot{r}, \quad (71b)$$

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{33,0}) + \frac{1}{2}r\dot{r} = -\frac{1}{2}r\dot{r}, \quad (71c)$$

sendo as demais componentes identicamente nulas. Na forma matricial, podemos representar de maneira simples σ^i_j como

$$\sigma^i_j = \frac{\dot{r}}{r} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = -\sqrt{\frac{r_S}{r^3}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (72)$$

Como a solução de Schwarzschild é tal que $R_{\mu\nu} = 0$, o tensor de Weyl $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ dado por (14) é tal que

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (73)$$

onde $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ é o tensor de Riemann. As componentes não nulas do tensor de Riemann são

$$R_{0101} = -\frac{r_S^2}{r^4}, \quad (74a)$$

$$R_{0202} = \frac{r_S}{2r}, \quad (74b)$$

$$R_{0303} = \frac{r_S \sin^2 \theta}{2r}, \quad (74c)$$

$$R_{1212} = -\frac{r_S^2}{2r^2}, \quad (74d)$$

$$R_{1313} = -\frac{r_S^2 \sin^2 \theta}{2r^2}, \quad (74e)$$

$$R_{2323} = -r_S r \sin^2 \theta. \quad (74f)$$

Finalmente, podemos calcular as componentes da parte elétrica do tensor de Weyl, as quais são dadas por (18), como sendo

$$E_{11} = \frac{r_S^2}{r^4}, \quad (75a)$$

$$E_{22} = -\frac{r_S}{2r}, \quad (75b)$$

$$E_{33} = -\frac{r_S \sin^2 \theta}{2r}. \quad (75c)$$

Matricialmente, teremos

$$E^i_j = \frac{r_S}{r^3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Nota-se que a matriz que define E^i_j é proporcional àquela que define σ^i_j . Podemos encontrar o dual $*W_{\alpha\beta\mu\nu}$ do tensor de Weyl seguindo a definição (17). Desta forma, segue que

$$*W_{0123} = -\eta_{23}{}^{01}W_{0101}, \quad (77a)$$

$$*W_{0213} = -\eta_{13}{}^{02}W_{0202}, \quad (77b)$$

$$*W_{0312} = -\eta_{12}{}^{03}W_{0303}, \quad (77c)$$

$$*W_{1203} = -\eta_{03}{}^{12}W_{1212} = *W_{0312}, \quad (77d)$$

$$*W_{1302} = -\eta_{02}{}^{13}W_{1313} = *W_{0213}, \quad (77e)$$

$$*W_{2301} = -\eta_{01}{}^{23}W_{2323} = *W_{0123}. \quad (77f)$$

Como estamos considerando observadores tal que $\bar{V}^\mu = \delta_0^\mu$, pela definição (19), notamos que a parte magnética o tensor de Weyl $H_{\alpha\beta}$ é nula.

Por fim, as componentes de \bar{V}^μ no sistema de coordenadas de Schwarzschild podem ser dadas a partir de

$$V^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \bar{V}^\mu, \quad (78)$$

onde V^α é o campo \bar{V}^μ nas coordenadas de Schwarzschild. Em componentes, temos

$$\begin{aligned}
V^0 &= \frac{\partial t}{\partial \tau} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}, \\
V^1 &= \frac{\partial r}{\partial \tau} = \sqrt{\frac{r_S}{r}}, \\
V^2 &= 0, \\
V^3 &= 0.
\end{aligned} \tag{79}$$

2.2.2 Integração das equações para um sistema Gaussiano

Novamente, consideremos o elemento de linha de Schwarzschild dado por (22). Podemos procurar por uma transformação de coordenadas que mantém invariante as coordenadas angulares $\bar{\theta} = \theta$ e $\bar{\phi} = \phi$ [15]. Consideremos ainda uma transformação tal que

$$T = \alpha t + F(r), \tag{80}$$

onde $\alpha \in \Re$ é um parâmetro. Substituindo a Eq. (80) na Eq. (30a) temos que

$$\bar{g}^{00} = 1 \implies \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 g^{00} + \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 g^{11} = 1, \tag{81}$$

logo,

$$F'(r) = \sqrt{\frac{\alpha^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)}{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^2}}, \tag{82}$$

onde $F'(r) = dF/dr$. Se fizermos a mudança de variáveis

$$r > r_S : \quad \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \doteq \alpha^2 \text{sen}^2 x, \tag{83a}$$

$$r < r_S : \quad \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \doteq -\alpha^2 \text{senh}^2 x, \tag{83b}$$

segue que

$$r > r_S : \quad dF_e = 2r_S \frac{\alpha \cos^2 x}{\operatorname{sen} x (1 - \alpha^2 \operatorname{sen}^2 x)^2} dx, \quad (84a)$$

$$r < r_S : \quad dF_i = -2r_S \frac{\alpha \cosh^2 x}{\operatorname{senh} x (1 + \alpha^2 \operatorname{senh}^2 x)^2} dx, \quad (84b)$$

onde o índice e refere-se a região “externa” e i refere-se a região “interna” ao buraco negro. Com a mudança de coordenadas (83), não será preciso escrever as Eqs. (30) para o sistema de coordenadas (r, t, θ, ϕ) . Tal mudança de variável já faz a função de cobrir a região $r < r_S$.

Efetuada a integração das Eqs. (84), tem-se que

$$F_e = \frac{(2\alpha^2 - 1)r_S}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \ln \left[\frac{\alpha \cos x + \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha \cos x - \sqrt{\alpha^2 - 1}} \right] + \quad (85a)$$

$$+ r_S \frac{\alpha \cos x}{(1 - \alpha^2 \operatorname{sen}^2 x)} + 2\alpha r_S \ln \tan \frac{x}{2},$$

$$F_i = -\frac{(2\alpha^2 - 1)r_S}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \ln \left[\frac{\alpha \cosh x + \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha \cosh x - \sqrt{\alpha^2 - 1}} \right] + \quad (85b)$$

$$- r_S \frac{\alpha \cosh x}{(1 + \alpha^2 \operatorname{senh}^2 x)} - 2\alpha r_S \ln \tanh \frac{x}{2}.$$

Neste ponto, surge a condição de que $\alpha^2 > 1$ para que a transformação esteja bem definida.⁵ Uma observação muito importante a respeito deste fato é o aparecimento de uma *convergência não-uniforme*, dada por

$$\int \left(\lim_{\alpha^2 \rightarrow 1} F'(r) \right) dr \neq \lim_{\alpha^2 \rightarrow 1} \left(\int F'(r) dr \right). \quad (86)$$

⁵A condição $\alpha^2 > 1$ está associada com o fato da energia da partícula teste ser maior que sua energia de repouso.

Quando efetuamos o limite $\alpha^2 \rightarrow 1$ primeiramente, encontramos a mesma transformação de coordenadas dada na seção anterior, Eqs. (65), enquanto que se efetuarmos a integração primeiro, não obteremos a mesma transformação.

Devemos satisfazer também a Eq. (30b). Se derivarmos a Eq. (30a) com respeito ao parâmetro α , temos

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial T}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 T}{\partial x^\nu \partial \alpha} = 0. \quad (87)$$

Definindo

$$R \equiv \frac{\partial T}{\partial \alpha}, \quad (88)$$

por analogia entre a Eq. (87) e (30b), esta será imediatamente satisfeita e, portanto, um sistema de coordenadas Gaussiano estará dado. A transformação completa é, então, dada por

$$\begin{aligned} r > r_S & : \begin{cases} T = \alpha t + F_e(r), \\ R = t + \frac{\partial F_e}{\partial \alpha}, \end{cases} \\ r < r_S & : \begin{cases} T = \alpha t + F_i(r), \\ R = t + \frac{\partial F_i}{\partial \alpha}. \end{cases} \end{aligned} \quad (89)$$

Se calcularmos as demais componentes da métrica $\bar{g}^{\mu\nu}$ a partir de

$$\bar{g}^{ij} = g^{\mu\nu} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\nu}, \quad (90)$$

e em seguida a calcularmos as componentes covariantes de $\bar{g}_{\mu\nu}$, podemos escrevê-las numa forma matricial como

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{r_S}{r}) - \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}. \quad (91)$$

2.2.3 Integração da equação de Hamilton-Jacobi

Se utilizarmos toda a construção dada na Sec. (2.1.1), observamos que o método apresentado na seção anterior é um caso particular, na integração da equação de Hamilton-Jacobi, deste problema. Sendo assim, podemos propor o *Ansatz*

$$S_g = \alpha t + \beta \phi + W_1(r) + W_2(\theta), \quad (92)$$

onde S_g será considerado como sendo o mesmo que aparece na equação de Hamilton-Jacobi relativística por unidade de massa $S_g \equiv S/m$. Considerando $r > r_S$ e omitindo o índice g , se substituirmos a Eq. (92) na Eq. (45) temos

$$\begin{aligned} g^{00} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + g^{11} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + g^{22} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + g^{33} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 &= 1 \longrightarrow \\ \longrightarrow \frac{\alpha^2}{A} - AW_1'^2 - \frac{W_2'^2}{r^2} - \frac{\beta^2}{r^2 \text{sen}^2\theta} &= 1 \end{aligned} \quad (93)$$

onde $A(r) = (1 - r_S/r)$, $W_1' = (dW_1/dr)$ e $W_2' = (dW_2/d\theta)$. Observa-se que pode ser feita uma separação de equações tal que

$$r^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{A} + AW_1'^2 \right) \equiv -\gamma, \quad (94a)$$

$$W_2'^2 + \frac{\beta^2}{\text{sen}^2\theta} \equiv \gamma, \quad (94b)$$

com $\gamma > 0$, e assim encontramos duas equações separadas, sendo uma para r e outra para θ . Isolando W'_1 e W'_2 temos

$$W'_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{A} \left(\frac{\alpha^2}{A} - 1 - \frac{\gamma}{r^2} \right)}, \quad (95a)$$

$$W'_2 = \pm \sqrt{\gamma - \frac{\beta^2}{\text{sen}^2\theta}}. \quad (95b)$$

Num primeiro estudo, não é necessário encontrar explicitamente as integrais para as funções W'_1 e W'_2 , basta conhecermos os critérios para que estas funções estejam bem definidas. Portanto, temos dois critérios para satisfazer, se quisermos que as funções W'_1 e W'_2 sejam bem comportadas. Tais critérios, lembrando que $r > r_S$, são

$$\frac{\alpha^2}{A} - \frac{\gamma}{r^2} > 1, \quad (96a)$$

$$\gamma - \frac{\beta^2}{\text{sen}^2\theta} > 0. \quad (96b)$$

Observamos que, dependendo dos valores dos parâmetros, não é possível construir um sistema Gaussiano global (esta questão será melhor colocada na Sec. (2.4)). Nos gráficos (1), (2) e (3), notamos que a função $W'_1(r)$ está bem definida para todo valor de r , exceto $r = r_S \equiv 1$ devido ao sistema de coordenadas, isto sem que o critério (96a) seja violado. Porém, no gráfico (4), vemos que a partir de um determinado valor de $r = r_*$ a função $W'_1(r)$ não está definida no plano real. Neste caso r_* é um pouco menor que 2,6, apenas para efeito ilustrativo. Para valores de $\theta < \pi/4$ e $\theta > 3\pi/4$ a função $W'_2(\theta)$ também não está bem definida, como mostra o gráfico (5). Tal situação

indica a região polar admissível para uma partícula teste que tenha os valores dos parâmetros iguais aos apresentados na legenda.

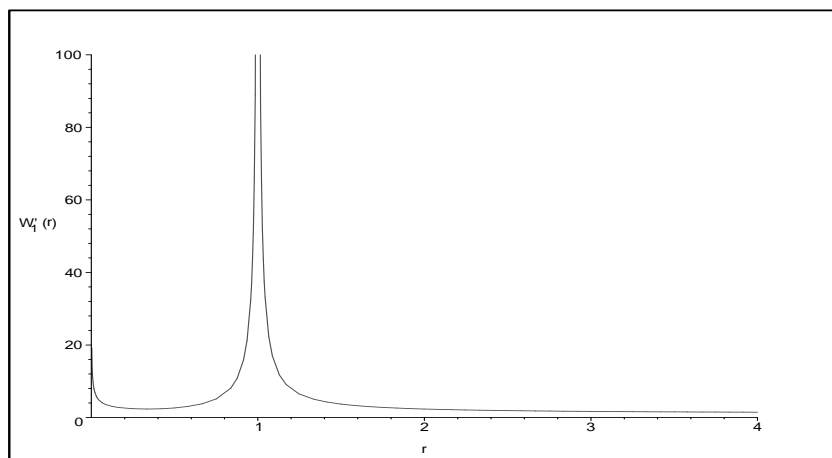


Figura 1: $W'_1(r)$, com $\alpha^2 = 2$, $\gamma = 1$ e $r_S = 1$.

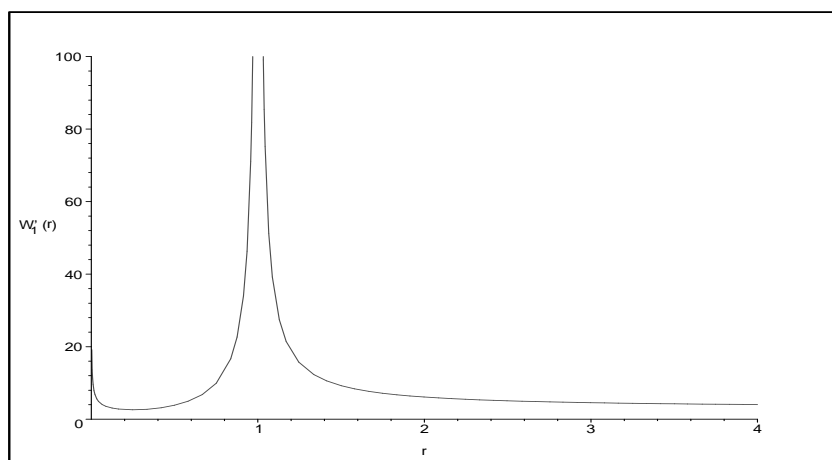


Figura 2: $W'_1(r)$, com $\alpha^2 = 10$, $\gamma = 1$ e $r_S = 1$.

As demais coordenadas do sistema Gaussiano são dadas por

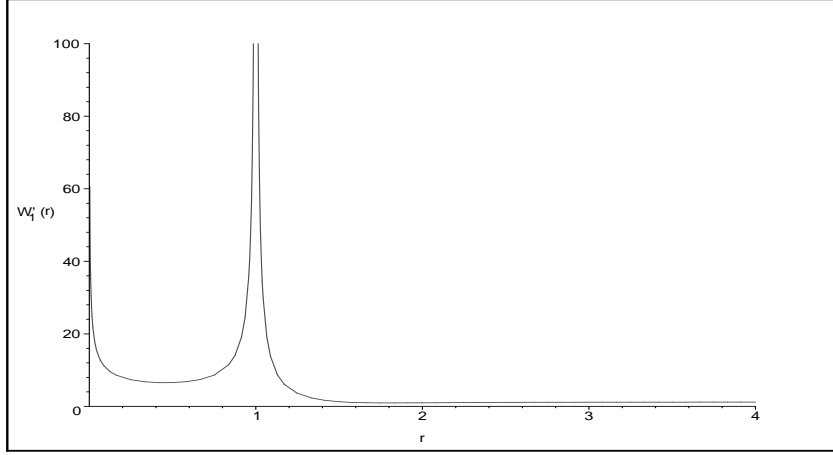


Figura 3: $W'_1(r)$, com $\alpha^2 = 2$, $\gamma = 10$ e $r_S = 1$.

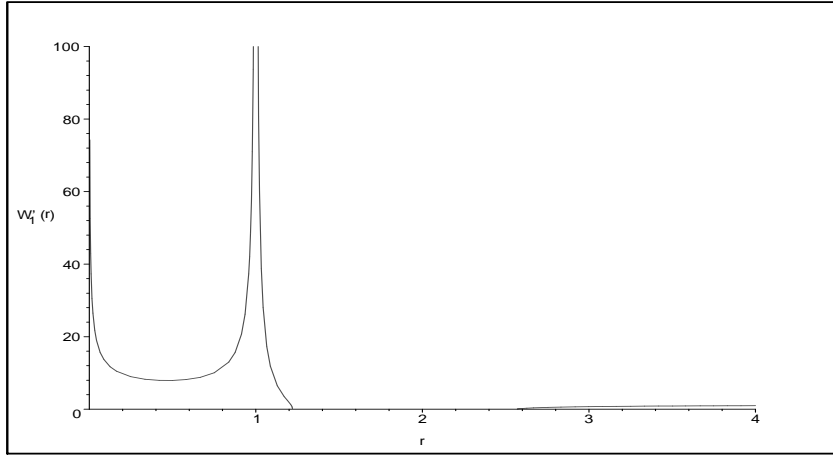


Figura 4: $W'_1(r)$, com $\alpha^2 = 2$, $\gamma = 15$ e $r_S = 1$.

$$R \doteq \frac{\partial S}{\partial \alpha} = t + \frac{\partial W_1}{\partial \alpha}, \quad (97a)$$

$$\Theta \doteq \frac{\partial S}{\partial \gamma} = \frac{\partial W_1}{\partial \gamma} + \frac{\partial W_2}{\partial \gamma}, \quad (97b)$$

$$\Phi \doteq \frac{\partial S}{\partial \beta} = \phi + \frac{\partial W_2}{\partial \beta}, \quad (97c)$$

e de posse das Eqs. (97), as Eqs. (46) são imediatamente satisfeitas, por

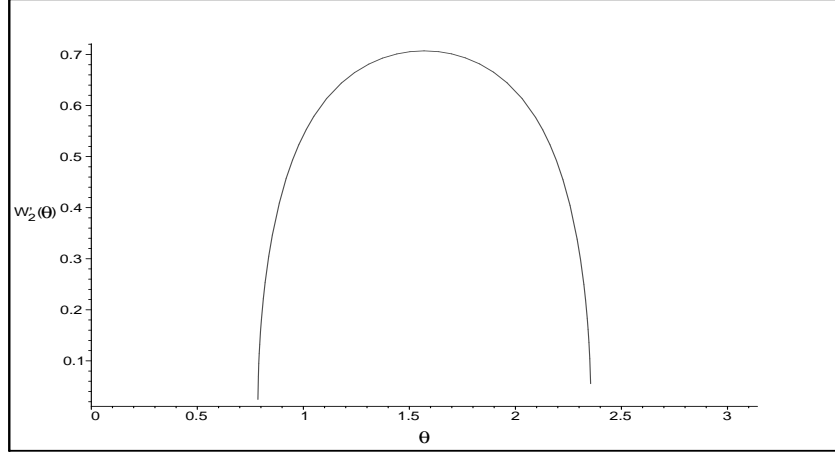


Figura 5: $W_2'(\theta)$, com $\beta^2 = 1/2$ e $\gamma = 1$.

construção.

As componentes espaciais \bar{g}^{ij} independentes da métrica de Schwarzschild neste novo sistema de coordenadas são dadas por

$$\begin{aligned}
\bar{g}^{11} &= g^{\mu\nu} \frac{\partial R}{\partial x^\mu} \frac{\partial R}{\partial x^\nu} = g^{00} + g^{11} \left(\frac{\partial W_1'}{\partial \alpha} \right)^2, \\
\bar{g}^{12} &= g^{\mu\nu} \frac{\partial R}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Theta}{\partial x^\nu} = g^{11} \frac{\partial W_1'}{\partial \alpha} \frac{\partial W_1'}{\partial \gamma}, \\
\bar{g}^{13} &= g^{\mu\nu} \frac{\partial R}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} = 0, \\
\bar{g}^{22} &= g^{\mu\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Theta}{\partial x^\nu} = g^{11} \left(\frac{\partial W_1'}{\partial \gamma} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_2'}{\partial \gamma} \right)^2, \\
\bar{g}^{23} &= g^{\mu\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} = g^{22} \frac{\partial W_2'}{\partial \gamma} \frac{\partial W_2'}{\partial \beta}, \\
\bar{g}^{33} &= g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} = g^{22} \left(\frac{\partial W_2'}{\partial \beta} \right)^2 + g^{33}.
\end{aligned} \tag{98}$$

Calculando a derivada parcial de W_1' com respeito a α e γ , e de W_2' com respeito a γ e β , a partir das Eqs. (95), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W'_1}{\partial \alpha} &= \pm \frac{\alpha}{A^2 \sqrt{f}}, & \frac{\partial W'_1}{\partial \gamma} &= \mp \frac{1}{2Ar^2 \sqrt{f}}, \\
\frac{\partial W'_2}{\partial \beta} &= \mp \frac{\beta}{\text{sen}^2 \theta \sqrt{h}}, & \frac{\partial W'_2}{\partial \gamma} &= \pm \frac{1}{2\sqrt{h}},
\end{aligned} \tag{99}$$

onde

$$f = \frac{1}{A} \left(\frac{\alpha^2}{A} - 1 - \frac{\gamma}{r^2} \right), \quad h = \gamma - \frac{\beta^2}{\text{sen}^2 \theta}. \tag{100}$$

Logo, as Eqs. (98) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}
\bar{g}^{11} &= -\frac{r^2 + \gamma}{\alpha^2 r^2 - A(r^2 + \gamma)}, \\
\bar{g}^{12} &= \frac{\alpha}{2(\alpha^2 r^2 - A(r^2 + \gamma))}, \\
\bar{g}^{13} &= 0, \\
\bar{g}^{22} &= -\frac{1}{4r^2} \left[\frac{A}{\alpha^2 r^2 - A(r^2 + \gamma)} + \frac{\text{sen}^2 \theta}{\gamma \text{sen}^2 \theta - \beta^2} \right], \\
\bar{g}^{23} &= \frac{\beta}{2r^2(\gamma \text{sen}^2 \theta - \beta^2)}, \\
\bar{g}^{33} &= -\frac{\gamma}{r^2(\gamma \text{sen}^2 \theta - \beta^2)}.
\end{aligned} \tag{101}$$

Calculando $\bar{g}_{\mu\nu}$ e colocando na forma matricial, temos

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 + A & -2\alpha\gamma & -\alpha\beta \\ 0 & -2\alpha\gamma & -4\gamma(r^2 + \gamma) & -2\beta(r^2 + \gamma) \\ 0 & -\alpha\beta & -2\beta(r^2 + \gamma) & -(\beta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta) \end{pmatrix}, \tag{102}$$

e, portanto,

$$\sqrt{-\bar{g}} = 2\sqrt{r^2[\alpha^2 r^2 - A(r^2 + \gamma)](\gamma \text{sen}^2 \theta - \beta^2)}. \tag{103}$$

Para o caso em que $r < r_S$ todas as relações desta seção permanecem inalteradas, exceto o critério (96a), o qual será alterado para

$$\frac{\alpha^2}{A} - \frac{\gamma}{r^2} < 1, \quad (104)$$

lembrando que $A = A(r)$.

Um campo de observadores $\bar{V}^\mu \doteq \delta_0^\mu$ no sistema de coordenadas Gaussiano possui componentes covariantes que podem ser escritas nas coordenadas de Schwarzschild como

$$V_\mu = (\alpha, W'_1, W'_2, \beta) \quad (105)$$

e as componentes contravariantes dadas por

$$V^\mu = \left(\frac{\alpha}{A}, -AW'_1, -\frac{W'_2}{r^2}, -\frac{\beta}{r^2 \sin^2 \theta} \right). \quad (106)$$

Podemos comparar este campo de velocidades dado pela Eq. (106) com o campo de velocidade $\tilde{V}^\alpha = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ que encontramos ao integrar as equações das geodésicas para Schwarzschild, onde $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau$, sendo τ o tempo próprio destes observadores.

Se dividirmos o elemento de linha da métrica de Schwarzschild por $d\tau^2$ e considerarmos campos de observadores normalizados $\tilde{V}^\alpha \tilde{V}_\alpha = 1$, temos a função de Lagrange L

$$1 = g_{\alpha\beta} \tilde{V}^\alpha \tilde{V}^\beta = A\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{A} - r^2\dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \equiv 2L. \quad (107)$$

As equações de Euler-Lagrange para este caso são

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{d\tau}(At) = 0, \quad (108a)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta} + r\text{sen}\theta \cos\theta \dot{\phi}^2 = 0, \quad (108b)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{d\tau}(r^2 \text{sen}^2 \theta \dot{\phi}) = 0. \quad (108c)$$

Não é necessário calcular a equação de Euler-Lagrange para a variável r , pois a Eq. (107) já faz o papel de uma integral primeira para tal sistema de equações. Das Eqs. (108a) e (108c) temos que

$$At \equiv \alpha, \quad (109a)$$

$$r^2 \text{sen}^2 \theta \dot{\phi} \equiv -\beta. \quad (109b)$$

Substituindo a Eq. (109b) na Eq. (108b) e multiplicando esta por $r^3 \dot{\theta}$, temos

$$\begin{aligned} & -r^4 \dot{\theta} \ddot{\theta} - 2r^3 \dot{r} \dot{\theta}^2 + \beta^2 \cot \theta \csc^2 \theta \dot{\theta} = 0 \implies \\ & \implies -\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left(r^4 \dot{\theta}^2 + \beta^2 \cot^2 \theta \right) = 0 \implies \\ & \implies r^4 \dot{\theta}^2 + \beta^2 \cot^2 \theta \equiv \gamma - \beta^2 \implies \\ & \implies \dot{\theta} = -\frac{1}{r^2} \sqrt{\gamma - \frac{\beta^2}{\text{sen}^2 \theta}}. \end{aligned} \quad (110)$$

Em seguida, substituindo as Eqs. (109) e (110) em (107), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^2}{A} - \frac{\dot{r}^2}{A} - \frac{1}{r^2} \left(\gamma - \frac{\beta^2}{\text{sen}^2 \theta} \right) - \frac{\beta^2}{r^2 \text{sen}^2 \theta} = 1 \implies \\ & \implies \frac{\dot{r}^2}{A} = \frac{\alpha^2}{A} - 1 - \frac{\gamma}{r^2} \implies \\ & \implies \dot{r} = -A \sqrt{\frac{1}{A} \left(\frac{\alpha^2}{A} - 1 - \frac{\gamma}{r^2} \right)} \end{aligned} \quad (111)$$

Finalmente, encontramos o campo de velocidades \tilde{V}^α dado por

$$\tilde{V}^\alpha = \left(\frac{\alpha}{A}, -A\sqrt{\frac{1}{A}\left(\frac{\alpha^2}{A} - 1 - \frac{\gamma}{r^2}\right)}, -\frac{1}{r^2}\sqrt{\gamma - \frac{\beta^2}{\text{sen}^2\theta}}, -\frac{\beta}{r^2\text{sen}^2\theta} \right), \quad (112)$$

e concluímos que o campo de observadores que encontramos nas Eqs. (106), pela integração da equação de Hamilton-Jacobi, equivale a todos os observadores do tipo-tempo normalizados para a métrica de Schwarzschild.

De posse disso, podemos calcular as quantidades cinemáticas apresentadas nas Eqs. (10), (11), (12) e (13) para $\bar{V}^\mu = \delta_0^\mu$. Pela escolha do campo, temos que

$$\omega_{\mu\nu} = 0, \quad a^\mu = 0. \quad (113)$$

pois V^μ é irrotacional e geodésico. A expansão ϑ é

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}}(\sqrt{-\bar{g}}\bar{V}^\mu)_{,\mu} = 2\frac{\dot{r}}{r} + \frac{F'\dot{r}}{F} + \frac{G'\dot{\theta}}{G}, \quad (114)$$

onde $F(r) = [\alpha^2 r^2 - A(r^2 + \gamma)]$, $G(\theta) = [\gamma \text{sen}^2\theta - \beta^2]$, $F' = (dF/dr)$ e $G' = (dG/d\theta)$. Por se tratar de um sistema de coordenadas Gaussiano, a deformação $\sigma^\mu{}_\nu$ possui, a princípio, apenas as componentes espaciais não nulas. Então,

$$\sigma^i{}_j = \frac{1}{2}h^{i\lambda}g_{j\lambda,0} - \frac{\vartheta}{3}\delta_j^i. \quad (115)$$

Podemos escrever explicitamente suas componentes como

$$\begin{aligned}
\sigma^1_1 &= -\frac{1}{2} \frac{(r^2 + \gamma)A'\dot{r}}{F} - \frac{\vartheta}{3}, \\
\sigma^1_2 &= -2 \frac{\alpha\gamma r\dot{r}}{F}, \\
\sigma^1_3 &= -\frac{\alpha\beta r\dot{r}}{F}, \\
\sigma^2_2 &= \left(1 + \frac{\gamma A}{F}\right) \frac{\dot{r}}{r} - \frac{\vartheta}{3}, \\
\sigma^2_3 &= \frac{\beta}{2r^2} \left(\frac{Ar\dot{r}}{F} - \frac{r^2 \text{sen}\theta \cos\theta\dot{\theta}}{G} \right), \\
\sigma^3_3 &= \frac{\dot{r}}{r} + \frac{\gamma \text{sen}\theta \cos\theta\dot{\theta}}{G} - \frac{\vartheta}{3},
\end{aligned} \tag{116}$$

sendo as demais componentes obtidas por regras de simetria.

2.3 Sistema de coordenadas Gaussiano para a métrica de Reissner-Nordström

Dada a métrica de Reissner-Nordström pela Eq. (25), podemos procurar por um sistema de coordenadas Gaussiano tal que esta métrica tome a forma da Eq. (29). Além disso, será considerado em (25) somente o caso em que $q^2 < M^2$, pois isso possibilitará uma análise mais rica do problema. O caso $q^2 > M^2$ será apresentado em forma de gráficos no decorrer na seção.

2.3.1 Integração das equações para um sistema Gaussiano

Dadas as condições acima, procederemos como apresentado na Sec. (2.2.2).

Como $q^2 < M^2$, o termo

$$g_{00} = \left(1 - \frac{r_S}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) \tag{117}$$

possui duas outras singularidades além da origem $r = 0$. Se fizermos $g_{00} = 0$, neste caso, temos como soluções

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - q^2}; \quad r_- = M - \sqrt{M^2 - q^2}. \quad (118)$$

Portanto, temos naturalmente o problema separado em três regiões disjuntas, sendo

$$A : r > r_+; \quad B : r_- < r < r_+; \quad C : r < r_-. \quad (119)$$

Cada região definirá equações do tipo (30) distintas, pois assim como em Schwarzschild, o sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) não cobre a variedade de Reissner-Nordström continuamente.

Suponhamos, para a região A , que

$$T = \alpha t + F_A(r), \quad (120)$$

onde $\alpha \in \mathfrak{R}$ é um parâmetro. Neste caso, a Eq. (30a) toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} \bar{g}^{00} = 1 &\implies \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 g^{00} + \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 g^{11} = 1 \implies \\ &\implies \frac{\alpha^2}{\mathcal{A}} - \mathcal{A}(F'_A)^2(r) = 1 \implies \\ &\implies F'_A = \sqrt{\frac{\alpha^2 - \mathcal{A}}{\mathcal{A}^2}}, \end{aligned} \quad (121)$$

onde $\mathcal{A} = (r - r_+)(r - r_-)/r^2$. Observe que, fazendo $q \rightarrow 0$, temos $r_+ = 2M$ e $r_- = 0$, logo recaímos no caso de um sistema gaussiano para Schwarzschild.

Explicitamente, temos que

$$F_A(r) = \int \frac{r \sqrt{\alpha^2 r^2 - (r - r_+)(r - r_-)}}{(r - r_+)(r - r_-)} dr, \quad (122)$$

que pode ser escrita em duas integrais:

$$\begin{aligned}
F_A(r) = & \frac{r_+}{r_+ - r_-} \int \frac{\sqrt{\alpha^2 r^2 - (r - r_+)(r - r_-)}}{(r - r_+)} dr + \\
& - \frac{r_-}{r_+ - r_-} \int \frac{\sqrt{\alpha^2 r^2 - (r - r_+)(r - r_-)}}{(r - r_-)} dr.
\end{aligned} \tag{123}$$

A integral do primeiro termo de (123) é dada por

$$\begin{aligned}
& \frac{r_+}{r_+ - r_-} \left\{ \frac{(2\alpha^2 - 1)r_+ + r_-}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \ln \left[\frac{2(\alpha^2 - 1)r + r_+ + r_-}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} + 2g(r) \right] + \right. \\
& \left. + g(r) - \alpha r_+ \ln \left[\frac{(r_+)^2 + rr_- + r_+(-r_- + (2\alpha^2 - 1)r + 2\alpha g(r))}{r - r_+} \right] \right\},
\end{aligned} \tag{124}$$

onde $g(r) = \sqrt{\alpha^2 r^2 - (r - r_+)(r - r_-)}$. Para que a transformação esteja bem definida, são necessárias as condições $\alpha^2 > 1$ e $g(r) > 0$. A integral do segundo termo de (123) é similar à anterior, e dada por

$$\begin{aligned}
& - \frac{r_-}{r_+ - r_-} \left\{ \frac{(2\alpha^2 - 1)r_- + r_+}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \ln \left[\frac{2(\alpha^2 - 1)r + r_+ + r_-}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} + 2g(r) \right] + \right. \\
& \left. + g(r) - \alpha r_- \ln \left[\frac{-r_- r_+ + rr_+ + r_-(r_- + (2\alpha^2 - 1)r + 2\alpha g(r))}{r - r_-} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{125}$$

Para a região B , temos que a Eq. (30a), para $T = \alpha t + F_B(r)$, é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(F'_B)^2 - \frac{\alpha^2}{\mathcal{B}} = 1 & \implies F'_B = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \mathcal{B}}{\mathcal{B}^2}} \implies \\
\implies F'_B = & \frac{r\sqrt{\alpha^2 r^2 - (r - r_+)(r - r_-)}}{(r_+ - r)(r - r_-)},
\end{aligned} \tag{126}$$

onde $\mathcal{B} = (r_+ - r)(r - r_-)/r^2$. Separando em duas integrais, temos

$$\begin{aligned}
F_B(r) = & \frac{r_+}{r_+ - r_-} \int \frac{\sqrt{\alpha^2 r^2 - (r - r_+)(r - r_-)}}{(r_+ - r)} dr + \\
& + \frac{r_-}{r_+ - r_-} \int \frac{\sqrt{\alpha^2 r^2 - (r - r_+)(r - r_-)}}{(r - r_-)} dr,
\end{aligned} \tag{127}$$

onde a integral do primeiro termo é

$$\begin{aligned}
& -\frac{r_+}{r_+ - r_-} \left\{ \frac{(2\alpha^2 - 1)r_+ + r_-}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \ln \left[\frac{2(\alpha^2 - 1)r + r_+ + r_-}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} + 2g(r) \right] + \right. \\
& \left. +g(r) - \alpha r_+ \ln \left[\frac{(r_+)^2 + rr_- + r_+(-r_- + (2\alpha^2 - 1)r + 2\alpha g(r))}{r_+ - r} \right] \right\}, \tag{128}
\end{aligned}$$

e a do segundo termo é

$$\begin{aligned}
& -\frac{r_-}{r_+ - r_-} \left\{ \frac{(2\alpha^2 - 1)r_- + r_+}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \ln \left[\frac{2(\alpha^2 - 1)r + r_+ + r_-}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} + 2g(r) \right] + \right. \\
& \left. +g(r) - \alpha r_- \ln \left[\frac{-r_-r_+ + rr_+ + r_-(r_- + (2\alpha^2 - 1)r + 2\alpha g(r))}{r - r_-} \right] \right\}, \tag{129}
\end{aligned}$$

sendo $g(r)$ dada como antes, e as condições sobre definibilidade do sistema Gaussiano na região A continuam sendo válidas.

Para o caso da região C , com $T = \alpha t + F_C(r)$, temos que a Eq. (30a) é

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha^2}{\mathcal{C}} - \mathcal{C}(F'_C)^2 = 1 \implies F'_C = \sqrt{\frac{\alpha^2 - \mathcal{C}}{\mathcal{C}^2}} \implies \\
& \implies F'_C = \frac{r\sqrt{\alpha^2 r^2 - (r - r_+)(r - r_-)}}{(r_+ - r)(r_- - r)}, \tag{130}
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{C} = (r_+ - r)(r_- - r)/r^2$. Novamente, separando em duas integrais, tem-se

$$\begin{aligned}
F_C(r) &= -\frac{r_+}{r_+ - r_-} \int \frac{\sqrt{\alpha^2 r^2 - (r - r_+)(r - r_-)}}{(r_+ - r)} dr + \\
& + \frac{r_-}{r_+ - r_-} \int \frac{\sqrt{\alpha^2 r^2 - (r - r_+)(r - r_-)}}{(r_- - r)} dr, \tag{131}
\end{aligned}$$

sendo a integral do primeiro termo

$$\begin{aligned}
& \frac{r_+}{r_+ - r_-} \left\{ \frac{(2\alpha^2 - 1)r_+ + r_-}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \ln \left[\frac{2(\alpha^2 - 1)r + r_+ + r_-}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} + 2g(r) \right] + \right. \\
& \left. + g(r) - \alpha r_+ \ln \left[\frac{(r_+)^2 + rr_- + r_+(-r_- + (2\alpha^2 - 1)r + 2\alpha g(r))}{r_+ - r} \right] \right\}, \tag{132}
\end{aligned}$$

e a do segundo termo,

$$\begin{aligned}
& -\frac{r_-}{r_+ - r_-} \left\{ \frac{(2\alpha^2 - 1)r_- + r_+}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \ln \left[\frac{2(\alpha^2 - 1)r + r_+ + r_-}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} + 2g(r) \right] + \right. \\
& \left. + g(r) - \alpha r_- \ln \left[\frac{-r_-r_+ + rr_+ + r_-(-r_- + (2\alpha^2 - 1)r + 2\alpha g(r))}{r_- - r} \right] \right\}, \tag{133}
\end{aligned}$$

sob as mesmas condições já dadas para as regiões A e B .

Por fim precisamos satisfazer também a Eq. (30b). Então, definimos uma coordenada $R = \partial T / \partial \alpha$ e teremos uma equação análoga a esta, como no caso da Sec. (2.2.2). Finalmente, o sistema de coordenadas Gaussianas para todas as regiões da métrica de Reissner-Nordström é dado por

$$\begin{aligned}
r > r_+ & : \begin{cases} T = \alpha t + F_A(r) \\ R = t + \frac{\partial F_A}{\partial \alpha} \end{cases}, \\
r_- < r < r_+ & : \begin{cases} T = \alpha t + F_B(r) \\ R = t + \frac{\partial F_B}{\partial \alpha} \end{cases}, \\
r < r_- & : \begin{cases} T = \alpha t + F_C(r) \\ R = t + \frac{\partial F_C}{\partial \alpha} \end{cases}.
\end{aligned} \tag{134}$$

As demais componentes da métrica $\bar{g}^{\mu\nu}$ podem ser dadas na forma matricial como

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) - \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}. \quad (135)$$

2.3.2 Integração da equação de Hamilton-Jacobi

Para encontrar um sistema de coordenadas Gaussiano para a geometria de Reissner-Nordström, podemos proceder da mesma maneira que no caso de Schwarzschild apresentado na Sec. (2.2.3). Os cálculos podem ser repetidos fazendo a consideração de que $A(r) = (1 - r_S/r + q^2/r^2)$. Além disso, a construção do sistema Gaussiano para Reissner-Nordström nas regiões $r > r_+$ e $r < r_-$ será idêntica à construção para Schwarzschild na região $r > r_S$ e a construção do sistema de coordenadas na região $r_- < r < r_+$ será equivalente à região $r < r_S$.

Para melhor ilustrar a função $W'_1(r)$, no caso $M^2 > q^2$, os gráficos (6), (7) e (8) mostram um esboço de como W'_1 varia com respeito aos parâmetros α e γ . As divergências que aparecem, para valores de $r = r_+$ e $r = r_-$, são devido ao sistema de coordenadas considerado. Notamos que todos esses gráficos não chegam a alcançar $r = 0$. O comportamento de $W'_2(\theta)$ é idêntico ao caso de Schwarzschild (ver Fig. 5).

Já para o caso em que $q^2 > M^2$, temos os gráficos (9), (10) e (11) ilustrando o comportamento de $W'_1(r)$ fixando alguns valores de α , γ e escolhendo $M^2 = 4$ e $q^2 = 6$. Neste caso, a única singularidade presente na métrica é $r = 0$. Novamente, notamos que, em nenhum dos casos, é possível chegar até

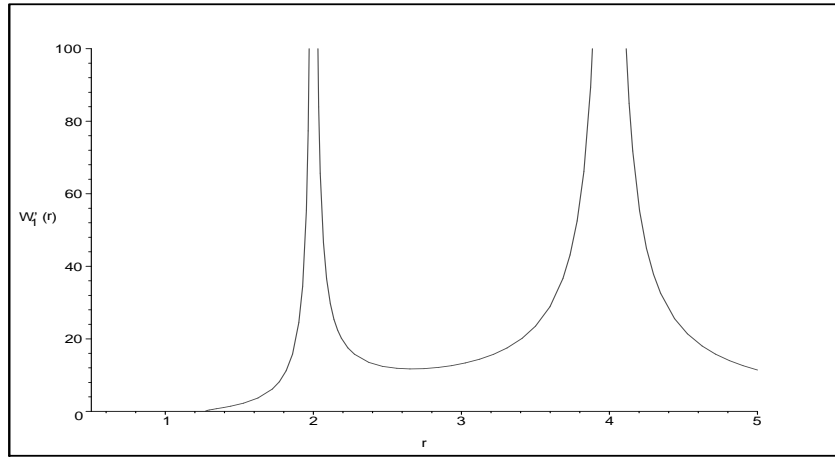


Figura 6: $W'_1(r)$, com $\alpha^2 = 2$, $\gamma = 1$, $r_+ = 4$ e $r_- = 2$.

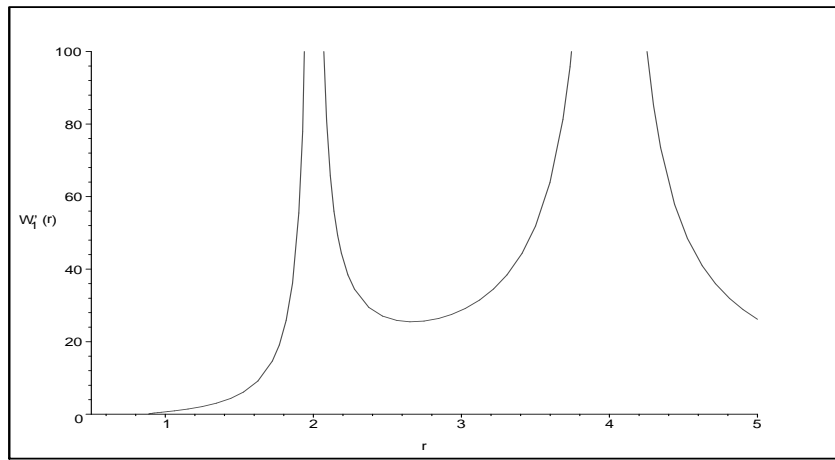


Figura 7: $W'_1(r)$, com $\alpha^2 = 10$, $\gamma = 1$, $r_+ = 4$ e $r_- = 2$.

$r = 0$.

2.4 Critérios para a construção um sistema Gaussiano global

Após a análise feita para os casos de Schwarzschild e Reissner-Nordström, somos levados à seguinte pergunta: dada uma métrica com simetria esférica

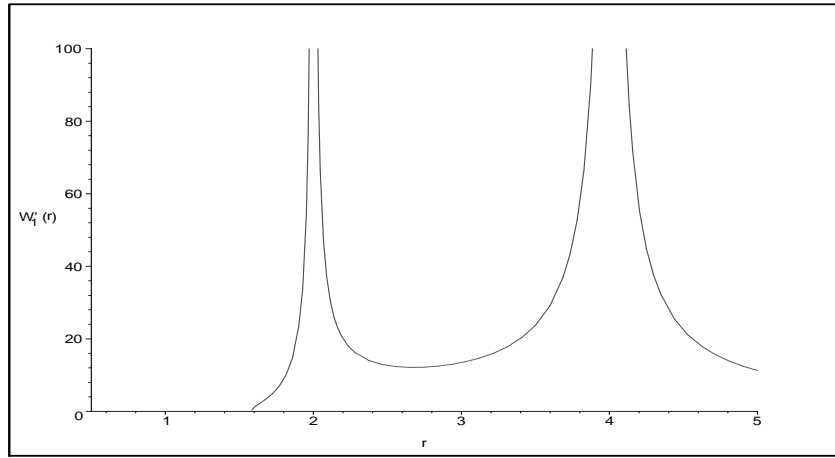


Figura 8: $W'_1(r)$, com $\alpha^2 = 2$, $\gamma = 10$, $r_+ = 4$ e $r_- = 2$.

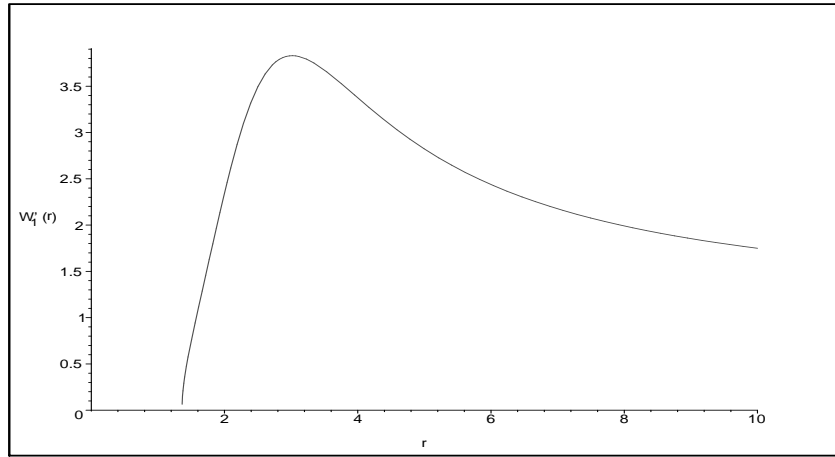


Figura 9: $W'_1(r)$, com $\alpha^2 = 2$, $\gamma = 1$, $M^2 = 4$ e $q^2 = 6$.

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (136)$$

quais critérios as funções $A(r)$ e $B(r)$ devem satisfazer, de modo tal que seja possível a construção de um sistema de coordenadas Gaussiano global?

Até o presente momento não conhecemos uma definição formal do que é um sistema de coordenadas Gaussiano global. Intuitivamente, esperamos que exista uma hiper-superfície S a qual separa o espaço-tempo em duas partes

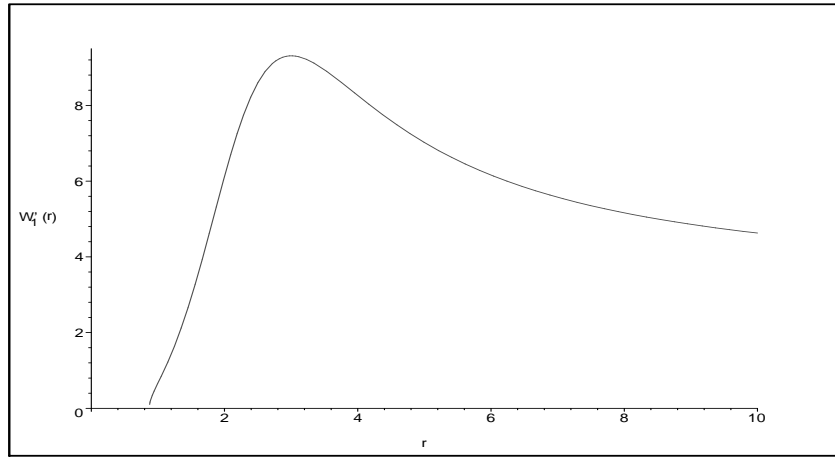


Figura 10: $W'_1(r)$, com $\alpha^2 = 10$, $\gamma = 1$, $M^2 = 4$ e $q^2 = 6$.

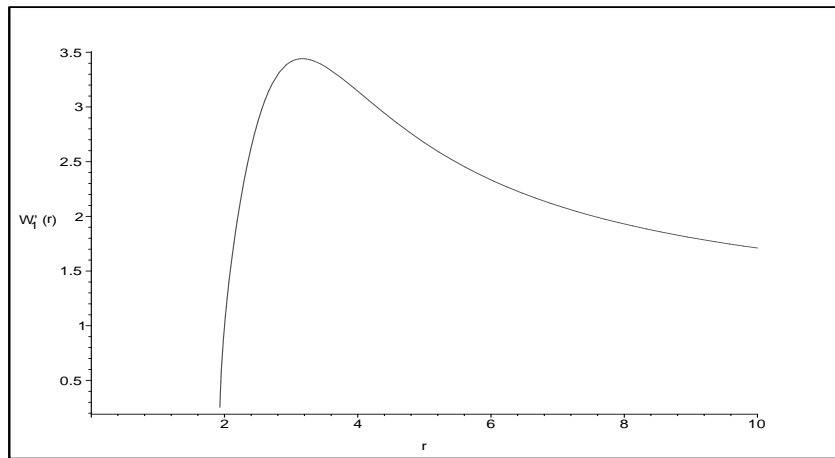


Figura 11: $W'_1(r)$, com $\alpha^2 = 2$, $\gamma = 10$, $M^2 = 4$ e $q^2 = 6$.

disjuntas, algo semelhante a uma *superfície de Cauchy*.

Primeiramente, sabemos que A e B devem ser tais que o determinante de $g_{\mu\nu}$ seja sempre negativo. Logo,

$$AB > 0. \tag{137}$$

Em particular, se quisermos que a nossa hiper-superfície $S = S_o$ tenha simetria esférica, com $t = t_o$ e $r = r_o$, então caímos nos casos apresentados

nas Secs. (2.2.2) e (2.3.1), cujo critério é dado por

$$\frac{B}{A}(\alpha^2 - A) \geq 0, \quad (138)$$

donde concluímos que A deve ser uma função *limitada superiormente*, uma vez que A e B devem trocar de sinal simultaneamente para preservar a assinatura da métrica. Devido a isso, notamos que, para Schwarzschild, não há problemas na construção do sistema Gaussiano, tal como existem como no caso de Reissner-Nordström.

Se assumirmos que S possa ser uma hiper-superfície mais geral, então caímos nos casos apresentados pelas Secs. (2.2.3) e (2.3.2). Os critérios que aparecem nessas seções são

$$[\alpha^2 r^2 - A(r^2 + \gamma)] \geq 0 \quad (139)$$

e

$$\text{sen}^2 \theta \geq \frac{\beta^2}{\gamma}. \quad (140)$$

Se pensarmos em α , β e γ como sendo os momenta de uma partícula teste neste espaço-tempo, notamos que, enquanto o momentum angular β não for nulo, há valores de θ inacessíveis à partícula. Além disso, se a Eq. (139) possuir pelo menos uma raiz r_* tal que, para $r < r_*$, a expressão à esquerda seja negativa, o sistema Gaussiano não pode ser estendido a partir deste ponto. Por fim, para $r \rightarrow \infty$, $A(r)$ deve ser limitada superiormente por α^2 .

Uma outra classe de geometrias, para a qual a pergunta sobre a construção de um sistema de coordenadas Gaussiano global é bastante interessante, são as métricas do tipo

$$ds^2 = dt^2 + 2h(r)dtd\phi - dr^2 - dz^2 + g(r)d\phi^2. \quad (141)$$

Tal métrica abrange casos como a métrica de Gödel [16], com $h(r) = \sqrt{2}\sinh^2 r$ e $g(r) = \sinh^2 r(\sinh^2 r - 1)$ que possui um sistema Gaussiano local apresentado em [17], e Minkowski com $h = h_o$ e $R''(r) = 0$ onde $R = h^2 - g$ que possui obviamente um sistema de coordenadas Gaussiano global.

Até o momento, a única condição que sabemos sobre h e g é que

$$h^2 - g > 0, \quad (142)$$

para que o sinal do determinante de $g_{\mu\nu}$ seja preservado. Se calcularmos os autovalores de $g_{\mu\nu}$ vemos que eles preservam a assinatura da métrica somente sob a validade da Eq. (142).

2.5 Sistema de coordenadas Gaussiano para a métrica de Kerr

Num sistema de coordenadas $x^\mu = (u, \rho, \theta, \phi)$, chamado *quase-esferoidal*, o elemento de linha infinitesimal para a solução de Kerr é dado por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M\rho}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) du^2 - (\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta)d\theta^2 - 2a\sin^2 \theta d\rho d\phi - 2dud\rho - \frac{4M\rho a \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} dud\phi - \left[(\rho^2 + a^2)\sin^2 \theta + \frac{2M\rho a^2 \sin^4 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right] d\phi^2. \quad (143)$$

Podemos escrever $g^{\mu\nu}$ como sendo

$$g^{\mu\nu} = g_0^{\mu\nu} + \frac{2M\rho}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} l^\mu l^\nu, \quad (144)$$

onde $g_0^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski neste sistema de coordenadas, dada por

$$g_0^{\mu\nu} = \frac{1}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \begin{pmatrix} a^2 \text{sen}^2 \theta & (\rho^2 + a^2) & 0 & -a \\ (\rho^2 + a^2) & (\rho^2 + a^2) & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & -a & 0 & 1/\text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (145)$$

e $l^\mu = (0, 1, 0, 0)$ é um vetor do tipo-nulo.

Neste sistema de coordenadas, o determinante de $g_{\mu\nu}$ é

$$g \doteq \det(g_{\mu\nu}) = -(\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 \text{sen}^2 \theta. \quad (146)$$

Fazendo a transformação de coordenadas

$$\begin{cases} z = \rho \cos \theta \\ x + iy = (\rho - ia)e^{i\phi} \text{sen} \theta \\ x_0 = u - \rho \end{cases}, \quad (147)$$

temos que o elemento de linha dado pela Eq. (143) toma a forma dada pela Eq. (26).

As superfícies que possuem propriedades físicas interessantes na métrica de Kerr são aquelas dadas por

$$\rho_1 = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}, \quad \rho_2 = M - \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}, \quad (148)$$

as quais são encontradas fazendo $g_{00} = 0$, e que correspondem a superfícies de *desvio infinito para o vermelho* e

$$\rho_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (149)$$

que são superfícies nulas, ou seja, cada vetor normal a estas superfícies é do tipo-nulo. Na relatividade geral há várias soluções das equações de Einstein que possuem superfícies como essas.

Na tentativa de construção de um sistema Gaussiano em Kerr, consideramos a equação de Hamilton-Jacobi para uma partícula relativística com $m = 1$ (sem perda de generalidade), dada pela Eq. (37), supondo primeiramente apenas a contribuição do termo $g_0^{\mu\nu}$ e que S possa ser escrita como

$$S = \alpha u + \beta \phi + W_1(\rho; \alpha, \beta, \gamma) + W_2(\theta; \alpha, \beta, \gamma), \quad (150)$$

onde γ é um parâmetro que será determinado e interpretado *a posteriori*. Podemos substituir a Eq. (150) na Eq. (37), obtendo

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \left[\alpha^2 a^2 \sin^2 \theta + (\rho^2 + a^2) \left(\frac{\partial W_1}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial \theta} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\beta^2}{\sin^2 \theta} + 2(\rho^2 + a^2) \alpha \left(\frac{\partial W_1}{\partial \rho} \right) - 2a\alpha\beta - 2a\beta \left(\frac{\partial W_1}{\partial \rho} \right) \right] = 1. \end{aligned} \quad (151)$$

Assim, definindo $W'_1 = \partial W_1 / \partial \rho$ e $W'_2 = \partial W_2 / \partial \theta$, obtemos

$$\begin{aligned} -(\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta) &= \alpha^2 a^2 \sin^2 \theta + (\rho^2 + a^2)(W'_1)^2 + (W'_2)^2 + \frac{\beta^2}{\sin^2 \theta} + \\ &+ 2(\rho^2 + a^2) \alpha W'_1 - 2a\alpha\beta - 2a\beta W'_1. \end{aligned} \quad (152)$$

Observamos que podemos separar a Eq. (152) em duas equações diferenciais parciais, sendo que uma só envolve θ e outra só envolve ρ tal que

$$\begin{aligned} (\rho^2 + a^2) \left[(W'_1)^2 - \frac{2a\beta W'_1}{\rho^2 + a^2} + 2\alpha W'_1 \right] + \rho^2 &= \\ = -(W'_2)^2 - \left(\alpha a \sin \theta - \frac{\beta}{\sin \theta} \right)^2 - a^2 \cos^2 \theta &\equiv -\gamma, \end{aligned} \quad (153)$$

sendo $\gamma > 0$. Logo,

$$W_1' = -\alpha + \frac{a\beta}{\rho^2 + a^2} \pm \sqrt{\left(\alpha - \frac{a\beta}{\rho^2 + a^2}\right)^2 - \frac{\rho^2 + \gamma}{\rho^2 + a^2}}, \quad (154a)$$

$$W_2' = \pm \sqrt{\gamma - a^2 \cos^2 \theta - \left(\alpha a \sin \theta - \frac{\beta}{\sin \theta}\right)^2}. \quad (154b)$$

Podemos apresentar o comportamento das funções W_1' e W_2' com respeito aos momenta canonicamente conjugados por meio dos gráficos ilustrados nas Figs. (12) a (17), uma vez que não estamos interessados, neste instante, na forma explícita das integrais $W_1(\rho)$ e $W_2(\theta)$.

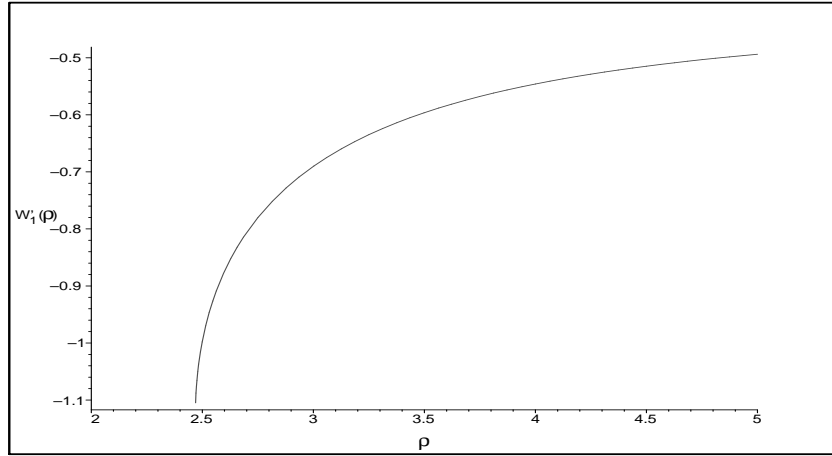


Figura 12: W_1' com $\alpha^2 = 2$, $a = 1$, $\beta = 2$ e $\gamma = 3$.

As demais componentes deste sistema de coordenadas Gaussiano são

$$R \equiv \frac{\partial S}{\partial \alpha} = u + \frac{\partial W_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial W_2}{\partial \alpha}, \quad (155a)$$

$$\Theta \equiv \frac{\partial S}{\partial \gamma} = \frac{\partial W_1}{\partial \gamma} + \frac{\partial W_2}{\partial \gamma}, \quad (155b)$$

$$\Phi \equiv \frac{\partial S}{\partial \beta} = \phi + \frac{\partial W_1}{\partial \beta} + \frac{\partial W_2}{\partial \beta}. \quad (155c)$$

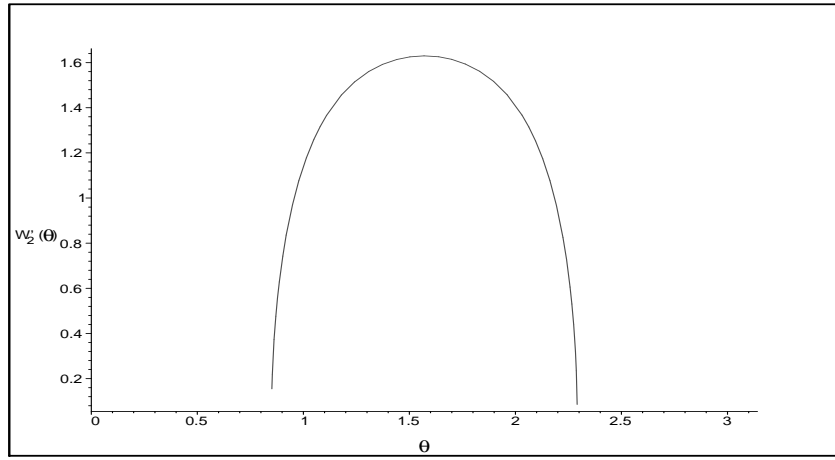


Figura 13: W'_2 , com $\alpha^2 = 2$, $a = 1$, $\beta = 2$ e $\gamma = 3$.

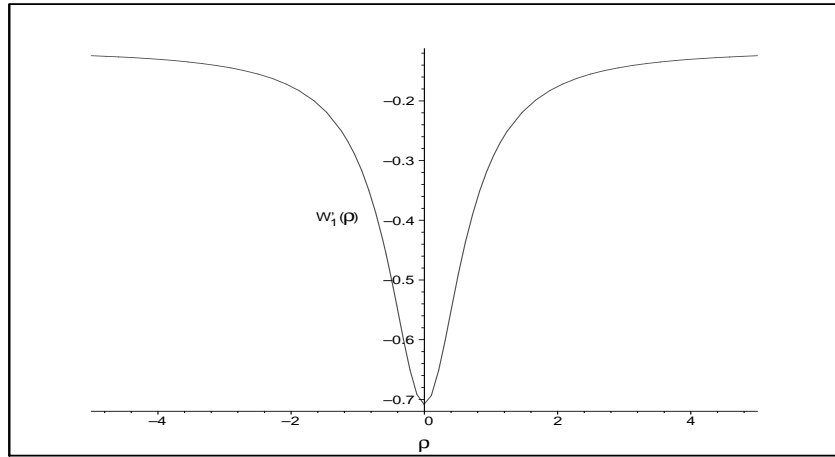


Figura 14: W'_1 , com $\alpha^2 = 20$, $a = 1$, $\beta = 2$ e $\gamma = 3$.

Podemos definir, apenas por simplicidade, as seguintes quantidades:

$$\begin{aligned}
 \dot{W}_1 &\equiv \frac{\partial W_1}{\partial \alpha}, & \hat{W}_1 &\equiv \frac{\partial W_1}{\partial \gamma}, & \tilde{W}_1 &\equiv \frac{\partial W_1}{\partial \beta}, \\
 \dot{W}_2 &\equiv \frac{\partial W_2}{\partial \alpha}, & \hat{W}_2 &\equiv \frac{\partial W_2}{\partial \gamma}, & \tilde{W}_2 &\equiv \frac{\partial W_2}{\partial \beta}.
 \end{aligned}
 \tag{156}$$

Portanto, as componentes da métrica neste novo sistema de coordenadas são dadas por

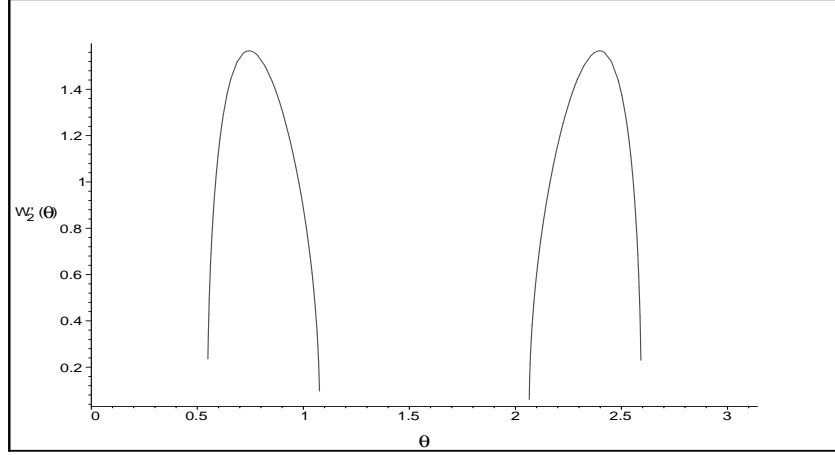


Figura 15: W'_2 , com $\alpha^2 = 20$, $a = 1$, $\beta = 2$ e $\gamma = 3$.

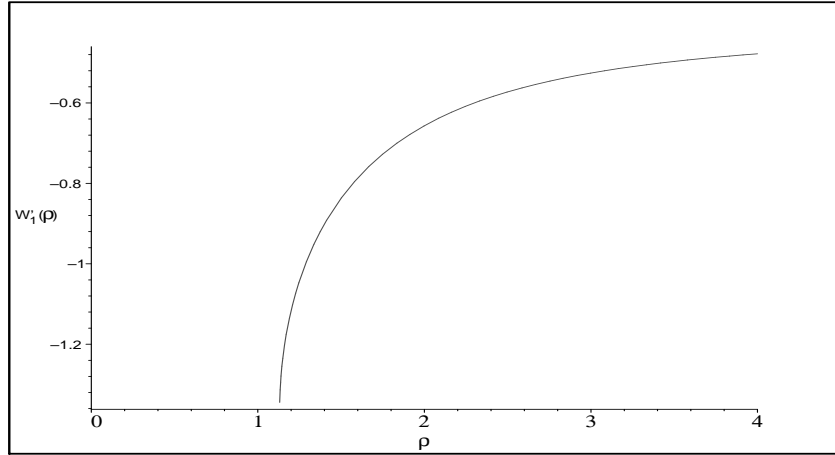


Figura 16: W'_1 com $\alpha^2 = 2$, $a = 1$, $\beta = 0.1$ e $\gamma = 3$.

$$\begin{aligned}
\bar{g}_0^{11} &= -\frac{1}{\rho^2} \left[a^2 \sin^2 \theta + (\rho^2 + a^2)(\dot{W}'_1)^2 + (\dot{W}'_2)^2 + 2(\rho^2 + a^2)\dot{W}'_1 \right], \\
\bar{g}_0^{12} &= -\frac{1}{\rho^2} \left[(\rho^2 + a^2)(1 + \dot{W}'_1)\hat{W}'_1 + \dot{W}'_2\hat{W}'_2 \right], \\
\bar{g}_0^{13} &= -\frac{1}{\rho^2} \left[-a(1 + \dot{W}'_1) + (\rho^2 + a^2)(1 + \dot{W}'_1)\tilde{W}'_1 + \dot{W}'_2\tilde{W}'_2 \right], \\
\bar{g}_0^{22} &= -\frac{1}{\rho^2} \left[(\rho^2 + a^2)(\hat{W}'_1)^2 + (\hat{W}'_2)^2 \right], \\
\bar{g}_0^{23} &= -\frac{1}{\rho^2} \left[-a\hat{W}'_1 + (\rho^2 + a^2)\hat{W}'_1\tilde{W}'_1 + \hat{W}'_2\tilde{W}'_2 \right],
\end{aligned} \tag{157}$$

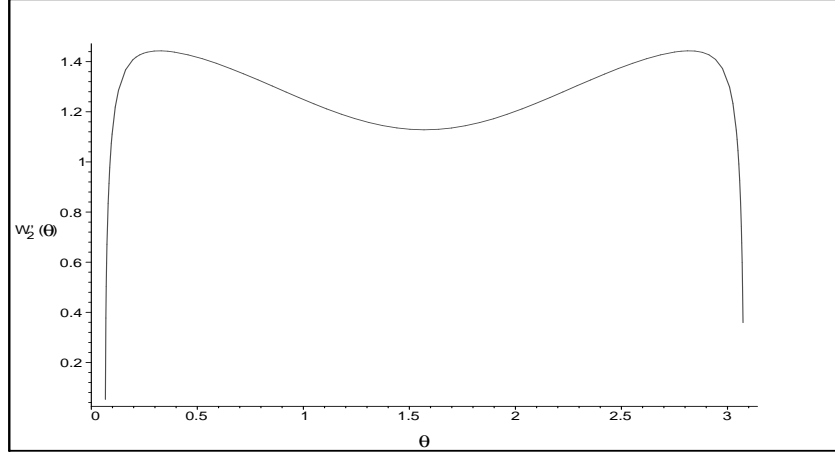


Figura 17: W'_2 com $\alpha^2 = 2$, $a = 1$, $\beta = 0.1$ e $\gamma = 3$.

$$\bar{g}_0^{33} = -\frac{1}{\tilde{\rho}^2} \left[\frac{1}{\text{sen}^2\theta} + (\rho^2 + a^2)(\tilde{W}'_1)^2 + (\tilde{W}'_2)^2 - 2a\tilde{W}'_1 \right].$$

onde $\tilde{\rho}^2 = \rho^2 + a^2 \cos^2 \theta$. A partir das Eqs. (154), podemos obter explicitamente as derivadas das quantidades definidas pelas Eqs. (156) como sendo

$$\begin{aligned} \dot{W}'_1 &= -1 \pm \frac{(\alpha\tilde{r}^2 - a\beta)}{\sqrt{f}}, & \dot{W}'_2 &= \mp a \text{sen}\theta \frac{(\alpha a \text{sen}^2\theta - \beta)}{\sqrt{h}}, \\ \hat{W}'_1 &= \mp \frac{1}{2\sqrt{f}}, & \hat{W}'_2 &= \pm \frac{\text{sen}\theta}{2\sqrt{h}}, \\ \tilde{W}'_1 &= \frac{a}{\tilde{r}^2} \mp \frac{(\alpha\tilde{r}^2 - a\beta)a}{\tilde{r}^2\sqrt{f}}, & \tilde{W}'_2 &= \frac{(\alpha a \text{sen}^2\theta - \beta)}{\text{sen}\theta\sqrt{h}}, \end{aligned} \quad (158)$$

onde $\tilde{r}^2 = \rho^2 + a^2$, $f = [(\alpha\tilde{r}^2 - a\beta)^2 - \tilde{r}^2(\rho^2 + \gamma)]$ e $h = [(\gamma - a^2 \cos^2 \theta)\text{sen}^2\theta - (\alpha a \text{sen}^2\theta - \beta)^2]$. De posse disso, as componentes da métrica podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
\bar{g}_0^{11} &= -\frac{1}{\tilde{\rho}^2} \left[\frac{\tilde{r}^4(\rho^2 + \gamma)}{f} + \frac{(\gamma - a^2 \cos^2 \theta)a^2 \text{sen}^4 \theta}{h} \right], \\
\bar{g}_0^{12} &= -\frac{1}{2\tilde{\rho}^2} \left[-\frac{(\alpha\tilde{r}^2 - a\beta)\tilde{r}^2}{f} - \frac{(\alpha a \text{sen}^2 \theta - \beta)a \text{sen}^2 \theta}{h} \right], \\
\bar{g}_0^{13} &= -\frac{1}{\tilde{\rho}^2} \left[-\frac{(\alpha\tilde{r}^2 - a\beta)^2 a}{f} - \frac{(\alpha a \text{sen}^2 \theta - \beta)^2 a}{h} \right], \\
\bar{g}_0^{22} &= -\frac{1}{4\tilde{\rho}^2} \left[\frac{\tilde{r}^2}{f} + \frac{\text{sen}^2 \theta}{h} \right], \\
\bar{g}_0^{23} &= -\frac{1}{2\tilde{\rho}^2} \left[\frac{(\alpha\tilde{r}^2 - a\beta)a}{f} + \frac{(\alpha a \text{sen}^2 \theta - \beta)}{h} \right], \\
\bar{g}_0^{33} &= -\frac{1}{\tilde{\rho}^2} \left[\frac{a^2(\rho^2 + \gamma)}{f} + \frac{(\gamma - a^2 \cos^2 \theta)}{h} \right].
\end{aligned} \tag{159}$$

Se substituirmos a métrica $g_0^{\mu\nu}$ pela métrica original de Kerr $g^{\mu\nu}$ dada em (144) e repetirmos os passos expostos pelas Eqs. (37) e (150)-(153), teremos uma nova equação para $W_1'(\rho)$ como segue

$$W_1' = -\frac{\alpha\tilde{r}^2 - a\beta \pm \sqrt{(\alpha\tilde{r}^2 - a\beta)^2 - \Delta(\rho^2 + \gamma)}}{\Delta}, \tag{160}$$

cujo gráfico pode ser ilustrado por meio das Figs. (18) a (23) para diferentes valores dos parâmetros, e $\Delta = \rho^2 + a^2 - 2M\rho$. A equação para W_2' permanece inalterada e é dada por (154b).

Definindo $F = [(\alpha\tilde{r}^2 - a\beta)^2 - \Delta(\rho^2 + \gamma)]$, podemos reescrever as Eqs. (158) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\dot{W}_1' &= -\frac{\tilde{r}^2}{\Delta} \pm \frac{(\alpha\tilde{r}^2 - a\beta)\tilde{r}^2}{\Delta\sqrt{F}}, & \dot{W}_2' &= \mp a \text{sen} \theta \frac{(\alpha a \text{sen}^2 \theta - \beta)}{\sqrt{h}}, \\
\hat{W}_1' &= \mp \frac{1}{2\sqrt{F}}, & \hat{W}_2' &= \pm \frac{\text{sen} \theta}{2\sqrt{h}}, \\
\tilde{W}_1' &= \frac{a}{\Delta} \mp \frac{(\alpha\tilde{r}^2 - a\beta)a}{\Delta\sqrt{F}}, & \tilde{W}_2' &= \frac{(\alpha a \text{sen}^2 \theta - \beta)}{\sqrt{h} \text{sen} \theta}.
\end{aligned} \tag{161}$$

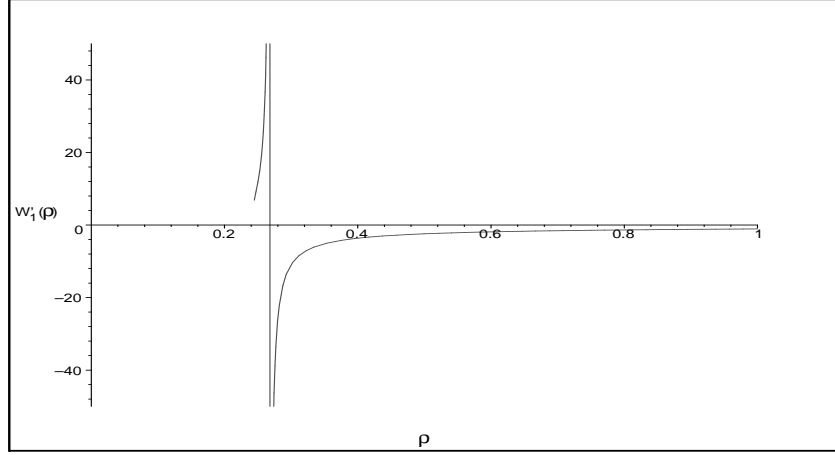


Figura 18: W'_1 , com $\alpha^2 = 2$, $a = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ e $M = 2$.

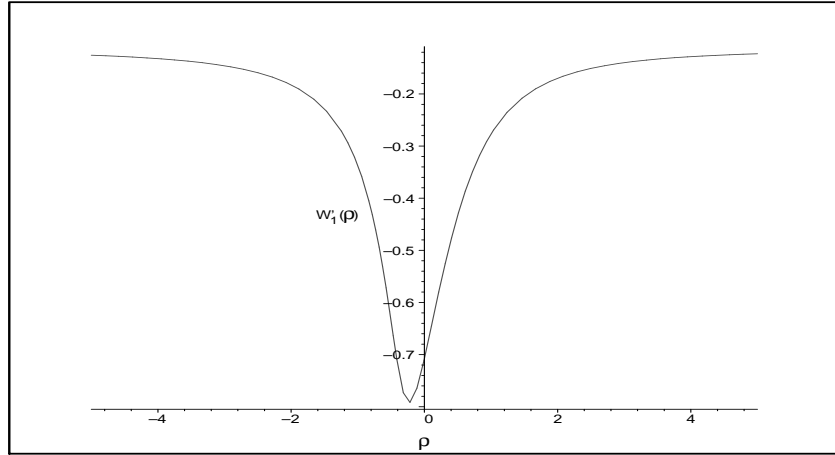


Figura 19: W'_1 , com $\alpha^2 = 20$, $a = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ e $M = 2$.

Considerando as equações acima temos que as novas componentes da métrica $g^{\mu\nu}$ são dadas por

$$\begin{aligned}
 \bar{g}^{11} &= -\frac{1}{\tilde{\rho}^2} \left[\frac{\tilde{r}^4(\rho^2 + \gamma)}{F} + \frac{(\gamma - a^2 \cos^2 \theta)a^2 \text{sen}^4 \theta}{h} \right], \\
 \bar{g}^{12} &= -\frac{1}{2\tilde{\rho}^2} \left[-\frac{(\alpha\tilde{r}^2 - a\beta)\tilde{r}^2}{F} - \frac{(\alpha a \text{sen}^2 \theta - \beta)a \text{sen}^2 \theta}{h} \right], \\
 \bar{g}^{13} &= -\frac{1}{\tilde{\rho}^2} \left[\frac{a(\tilde{r}^2 - \Delta)}{\Delta} - \frac{(\alpha\tilde{r}^2 - a\beta)^2 a \tilde{r}^2}{\Delta F} - \frac{(\alpha a \text{sen}^2 \theta - \beta)^2 a}{h} \right],
 \end{aligned} \tag{162}$$

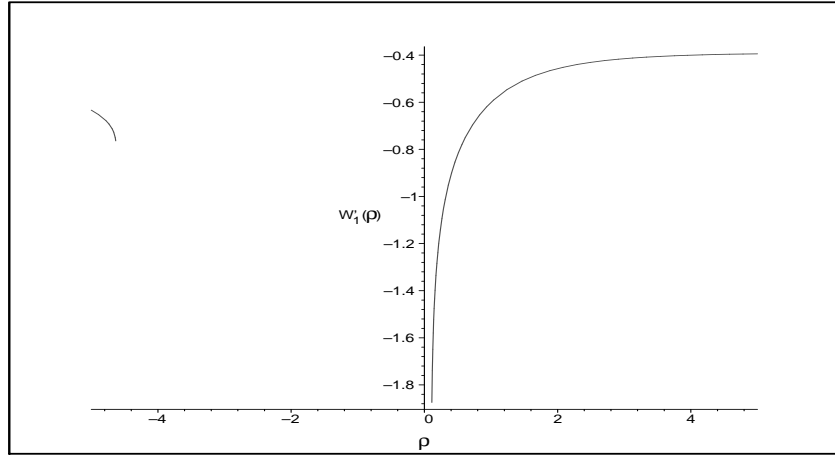


Figura 20: W'_1 , com $\alpha^2 = 2$, $a = 1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 3$ e $M = 2$.

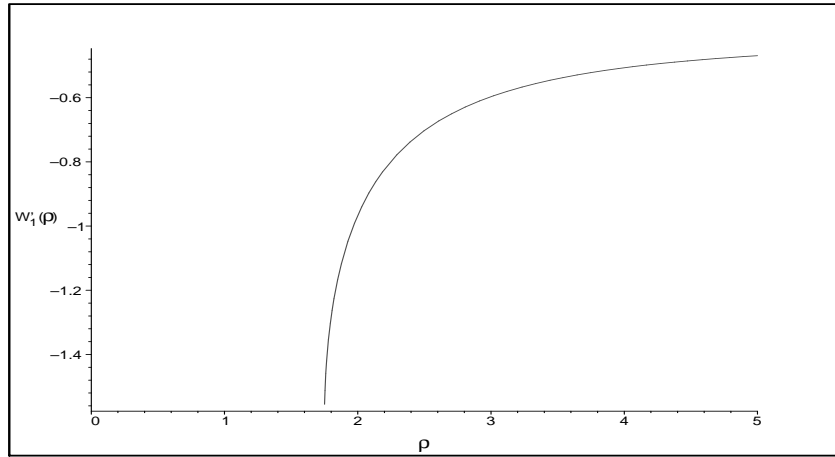


Figura 21: W'_1 , com $\alpha^2 = 2$, $a = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ e $M = 1/2$.

$$\begin{aligned}\bar{g}^{22} &= -\frac{1}{4\tilde{\rho}^2} \left[\frac{\Delta}{F} + \frac{\text{sen}^2\theta}{h} \right], \\ \bar{g}^{23} &= -\frac{1}{2\tilde{\rho}^2} \left[\frac{(\alpha\tilde{r}^2 - a\beta)a}{F} + \frac{(\alpha a \text{sen}^2\theta - \beta)}{h} \right], \\ \bar{g}^{33} &= -\frac{1}{\tilde{\rho}^2} \left[\frac{a^2(\rho^2 + \gamma)}{F} + \frac{(\gamma - a^2 \cos^2\theta)}{h} \right].\end{aligned}$$

Enquanto que as componentes covariantes são

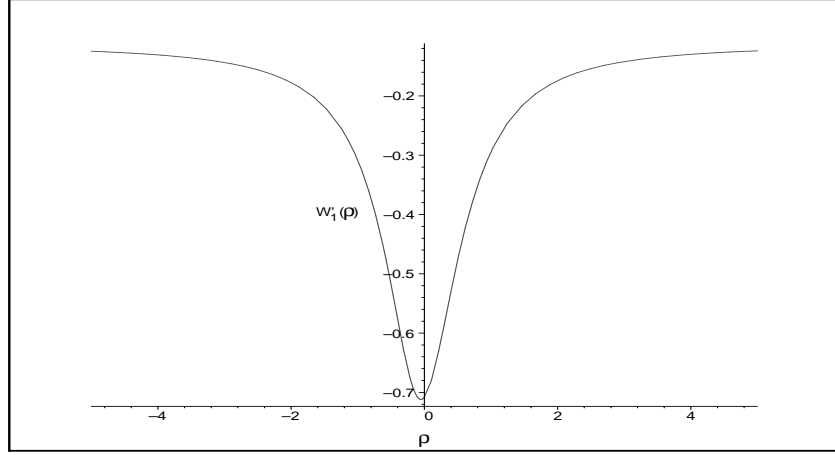


Figura 22: W'_1 , com $\alpha^2 = 20$, $a = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ e $M = 1/2$.

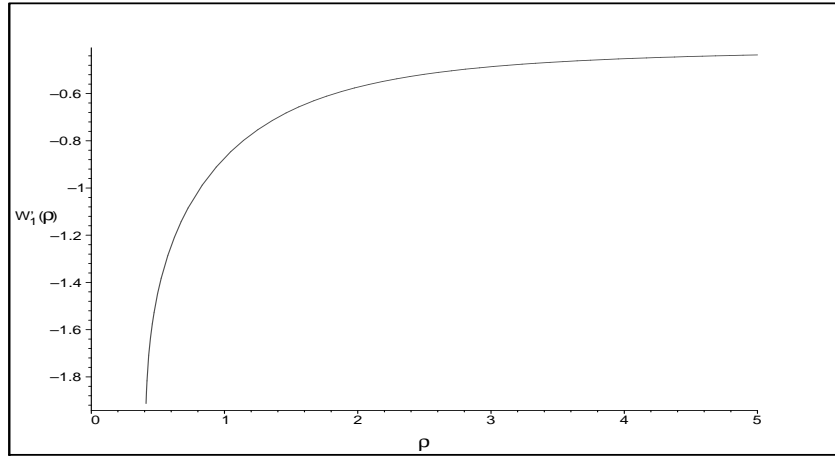


Figura 23: W'_1 , com $\alpha^2 = 2$, $a = 1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 3$ e $M = 1/2$.

$$\begin{aligned}
 \bar{g}_{11} &= 1 - \frac{2M\rho}{\tilde{\rho}^2} - \alpha^2, \\
 \bar{g}_{12} &= -2[\alpha(\gamma - a^2) + a\beta], \\
 \bar{g}_{13} &= -\alpha\beta - \frac{2Ma\rho \text{sen}^2\theta}{\tilde{\rho}^2}, \\
 \bar{g}_{22} &= -4(\rho^2 + \gamma)(\gamma - a^2 \cos^2\theta), \\
 \bar{g}_{23} &= -2[\beta(\rho^2 + \gamma) - (\alpha\tilde{r}^2 - a\beta)a \text{sen}^2\theta], \\
 \bar{g}_{33} &= -(\beta^2 + \tilde{r}^2 \text{sen}^2\theta) - \frac{2M\rho a^2 \text{sen}^4\theta}{\tilde{\rho}^2}.
 \end{aligned} \tag{163}$$

O determinante desta nova métrica é

$$\bar{g} \equiv \det g_{\mu\nu} = -4h(\theta)F(\rho). \quad (164)$$

Seja $\bar{V}^\mu = \delta_0^\mu$ um campo de velocidade no sistema de coordenadas (S, R, Θ, Φ) .

No sistema de coordenadas (u, ρ, θ, ϕ) , este campo é dado por

$$V_\mu = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \bar{V}_\nu. \quad (165)$$

Explicitamente, temos que as componentes covariantes desse campo de velocidades são

$$V_\mu = (\alpha, W'_1, W'_2, \beta), \quad (166)$$

enquanto que suas componentes contravariantes são dadas por

$$\begin{aligned} V^0 &= -\frac{1}{\tilde{\rho}^2}(\alpha a^2 \text{sen}^2 \theta + \tilde{r}^2 W'_1 - a\beta), \\ V^1 &= -\frac{1}{\tilde{\rho}^2}(\alpha \tilde{r}^2 + \Delta W'_1 - a\beta), \\ V^2 &= -\frac{W'_2}{\tilde{\rho}^2}, \\ V^3 &= -\frac{1}{\tilde{\rho}^2}(-a\alpha - aW'_1 + \frac{\beta}{\text{sen}^2 \theta}). \end{aligned} \quad (167)$$

Um método muito similar para encontrar uma *função principal de Hamilton* S para a métrica de Kerr foi empregado por B. Carter [18] o sistema de coordenadas de Boyer-Lindquist Eq. (28). Neste método, a função S não é identificada com o tempo próprio, pois possui uma liberdade de calibre.

Se quisermos comparar o campo de velocidades V^α dado pela Eq. (167) com o campo \tilde{V}^μ que obteremos a partir da integração das equações das geodésicas, tal como feito para o caso de Schwarzschild (Eqs. (107)-(112)), é

mais simples se usarmos o sistema de coordenadas de Boyer-Lindquist, cuja transformação é dada por

$$\begin{cases} \hat{t} &= u - A(\rho) \\ \hat{\rho} &= \rho \\ \hat{\theta} &= \theta \\ \hat{\phi} &= \phi - B(\rho) \end{cases}, \quad (168)$$

onde $(dA/d\rho) = \tilde{r}^2/\Delta$ e $(dB/d\rho) = -a/\Delta$. Reescrevendo as Eqs. (167) neste sistema de coordenadas, temos

$$\begin{aligned} V^0 &= -\frac{1}{\tilde{\rho}^2\Delta}(\alpha\Sigma^2 - 2Ma\beta), \\ V^1 &= -\frac{1}{\tilde{\rho}^2}(\alpha\tilde{r}^2 + \Delta W'_1 - a\beta), \\ V^2 &= -\frac{W'_2}{\tilde{\rho}^2}, \\ V^3 &= \frac{1}{\tilde{\rho}^2\Delta}(2Ma\alpha + (\tilde{\rho}^2 - 2M\rho)\frac{\beta}{\text{sen}^2\theta}), \end{aligned} \quad (169)$$

onde $\Sigma^2 = \tilde{r}^4 - a^2\Delta \text{sen}^2\theta$.

Podemos explicitar a função de Lagrange L neste sistema de coordenadas, considerando observadores normalizados $V^\mu V_\mu = 1$, como sendo

$$\begin{aligned} 1 &= \left(1 - \frac{2M\rho}{\tilde{\rho}^2}\right) \dot{t}^2 + \frac{4aM\rho \text{sen}^2\theta}{\tilde{\rho}^2} \dot{t}\dot{\phi} - \frac{\tilde{\rho}^2}{\Delta} \dot{r}^2 - \tilde{\rho}^2 \dot{\theta}^2 + \\ &\quad - \left(\rho^2 + a^2 + \frac{2a^2M\rho}{\tilde{\rho}^2} \text{sen}^2\theta\right) \text{sen}^2\theta \dot{\phi}^2 \equiv 2L \end{aligned} \quad (170)$$

Apesar dos cálculos, a partir de L , não serem apresentados neste trabalho podemos calcular as equações de Euler-Lagrange e encontrar as integrais primeiras para tais equações (cf. [19]). Feito isso, obtemos o campo $\tilde{V}^\mu = (\dot{\hat{t}}, \dot{\hat{\rho}}, \dot{\hat{\theta}}, \dot{\hat{\phi}})$ que poderá ser comparado e imediatamente identificado com V^α

dados pela Eq. (169). Daí concluímos que V^α , por consequência \bar{V}^μ , abarca todos os observadores geodésicos (do tipo-tempo) da métrica de Kerr.

Se quisermos analisar propriedades cinemáticas de campos de velocidades definidos na métrica de Kerr, podemos construir o projetor $\bar{h}_{\mu\nu}$ no tri-espaço do observador V^μ como sendo

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} - \bar{V}_\mu \bar{V}_\nu. \quad (171)$$

Sendo $\bar{V}^\mu = \delta_0^\mu$, concluímos que $\bar{h}_{ij} = \bar{g}_{ij}$, sendo as demais componentes \bar{h}_{00} e \bar{h}_{0i} nulas.

Usando a Eq. (164), podemos obter a expansão ϑ como sendo

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} (\sqrt{-\bar{g}} V^\mu)_{,\mu} = \frac{h_{,0}}{h} + \frac{F_{,0}}{F}. \quad (172)$$

No caso de um sistema de coordenadas Gaussiano e $\bar{V}^\mu = \delta_0^\mu$, a deformação $\sigma_{\mu\nu}$ possui apenas componentes espaciais σ_{ij} não nulas, e pode ser escrita como

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \bar{h}_{ij,0} - \frac{\vartheta}{3} \bar{h}_{ij}. \quad (173)$$

A partir das Eqs. (163), podemos explicitar tais componentes como sendo

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{M}{\tilde{\rho}^4} \left(\sin^2 \theta (\rho^2 - a^2 \cos^2 \theta) \dot{\rho} - a^2 \rho \sin 2\theta \dot{\theta} \right) - \frac{\vartheta}{3} \left(1 - \alpha^2 - \frac{2M\rho}{\tilde{\rho}^2} \right), \\ \sigma_{12} &= \frac{2\vartheta}{3} (\alpha(\gamma - a^2) + a\beta), \\ \sigma_{13} &= \frac{Ma}{\tilde{\rho}^4} \left[\sin^2 \theta (\rho^2 - a^2 \cos^2 \theta) \dot{\rho} - \rho \tilde{r}^2 \sin 2\theta \dot{\theta} \right] + \frac{\vartheta}{3} \left(\alpha\beta + \frac{2M\rho a \sin^2 \theta}{\tilde{\rho}^2} \right), \\ \sigma_{22} &= -4(\gamma - a^2 \cos^2 \theta) \left(\rho \dot{\rho} - \frac{\vartheta}{3} (\rho^2 + \gamma) \right) - 2a^2 (\rho^2 + \gamma) \sin 2\theta \dot{\theta}, \end{aligned} \quad (174)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{23} &= 2(\alpha a \operatorname{sen}^2 \theta - \beta) \rho \dot{\rho} - a(\operatorname{sen} 2\theta \dot{\theta} + \frac{2\vartheta}{3} \operatorname{sen}^2 \theta)(\alpha \tilde{r}^2 - a\beta) + \frac{2\vartheta}{3} \beta(\rho^2 + \gamma), \\
\sigma_{33} &= -\rho \dot{\rho} \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{Ma^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{\tilde{\rho}^4} \left[\operatorname{sen}^2 \theta (\rho^2 - a^2 \cos^2 \theta) \dot{\rho} + \rho \operatorname{sen} 2\theta (\tilde{\rho}^2 + \tilde{r}^2) \dot{\theta} \right] \\
&\quad - \frac{\tilde{r}^2}{2} \operatorname{sen} 2\theta \dot{\theta} + \frac{\vartheta}{3} \left[\beta^2 + \tilde{r}^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{2M\rho a^2 \operatorname{sen}^4 \theta}{\tilde{\rho}^2} \right].
\end{aligned}$$

Escrevendo a Eq. (28) na forma quadrática, temos

$$ds^2 = \tilde{\rho}^2 \frac{\Delta}{\Sigma^2} dt^2 - \frac{\Sigma^2}{\tilde{\rho}^2} \left(d\phi - \frac{2aM\rho}{\Sigma^2} dt \right)^2 \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{\tilde{\rho}^2}{\Delta} d\rho^2 - \tilde{\rho}^2 d\theta^2. \quad (175)$$

Daí, podemos escolher uma base de 1-formas ω^A , para $A = 0, 1, 2, 3$, como sendo

$$\begin{aligned}
\omega^0 &= \sqrt{\tilde{\rho}^2 \frac{\Delta}{\Sigma^2}} dt, \\
\omega^1 &= \sqrt{\frac{\Sigma^2}{\tilde{\rho}^2}} \left(d\phi - \frac{2aM\rho}{\Sigma^2} dt \right) \operatorname{sen} \theta, \\
\omega^2 &= \sqrt{\frac{\tilde{\rho}^2}{\Delta}} d\rho, \\
\omega^3 &= \sqrt{\tilde{\rho}} d\theta.
\end{aligned} \quad (176)$$

Se fizermos todos os cálculos necessários nesta base de tétradas, encontraremos as componentes não-nulas do tensor de Riemann R_{ABCD} (cf. [19]), dadas por

$$\begin{aligned}
R_{0123} &= \frac{aM \cos \theta}{\tilde{\rho}^6} (3\rho^2 - a^2 \cos^2 \theta), \\
R_{0312} &= \frac{aM \cos \theta}{\Sigma^2 \tilde{\rho}^6} (3\rho^2 - a^2 \cos^2 \theta) (\tilde{r}^4 + 2a^2 \Delta \sin^2 \theta), \\
R_{0213} &= \frac{aM \cos \theta}{\Sigma^2 \tilde{\rho}^6} (3\rho^2 - a^2 \cos^2 \theta) (2\tilde{r}^4 + a^2 \Delta \sin^2 \theta), \\
R_{0203} &= R_{1213} = -\frac{3a^2 M \tilde{r}^2 \sqrt{\Delta} \sin \theta \cos \theta}{\Sigma^2 \tilde{\rho}^6} (3\rho^2 - a^2 \cos^2 \theta), \\
R_{0212} &= -R_{0313} = -\frac{3aM \rho \tilde{r}^2 \sqrt{\Delta} \sin \theta}{\Sigma^2 \tilde{\rho}^6} (\rho^2 - 3a^2 \cos^2 \theta), \\
R_{0101} &= -R_{2323} = -\frac{M\rho}{\tilde{\rho}^6} (\rho^2 - 3a^2 \cos^2 \theta), \\
R_{0202} &= -R_{1313} = \frac{M\rho}{\Sigma^2 \tilde{\rho}^6} (\rho^2 - 3a^2 \cos^2 \theta) (2\tilde{r}^4 + a^2 \Delta \sin^2 \theta), \\
R_{0303} &= -R_{1212} = -\frac{M\rho}{\Sigma^2 \tilde{\rho}^6} (\rho^2 - 3a^2 \cos^2 \theta) (\tilde{r}^4 + 2a^2 \Delta \sin^2 \theta).
\end{aligned} \tag{177}$$

O campo V^α dado por (169) pode ser escrito na base de tétradas via

$$V^A = e^A{}_\alpha V^\alpha \tag{178}$$

ou explicitamente por

$$\begin{aligned}
V^0 &= \alpha \frac{\Sigma^2 - 2M\rho a \beta}{\sqrt{\Sigma^2 \Delta \tilde{\rho}^2}}, \\
V^1 &= \frac{\beta}{\tilde{\rho}^2 \Delta} \frac{\sin \theta}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 \Sigma^2}} \left[4M^2 a^2 \rho^2 \alpha + \frac{\Sigma^2 (\tilde{\rho}^2 - 2M\rho)}{\sin^2 \theta} \right], \\
V^2 &= -\sqrt{\frac{\tilde{\rho}^2}{\Delta}} \frac{W'_1}{\tilde{\rho}^2}, \\
V^3 &= -\frac{W'_2}{\sqrt{\tilde{\rho}^2}}.
\end{aligned} \tag{179}$$

Lembrando que estamos tratando do espaço-tempo de Kerr ($R_{AB} = 0$), o tensor de Weyl coincide com o tensor de Riemann e assim a parte elétrica do tensor de Weyl é

$$E_{AB} = -R_{ACBD}V^C V^D. \quad (180)$$

Em seguida, as componentes não-nulas do dual do tensor de Weyl $*W_{ABCD}$ podem ser encontradas fazendo as identificações abaixo

$$\begin{aligned} *W_{0101} &= -*W_{2323} = R_{0123}, \\ *W_{0123} &= -R_{0101}, \\ *W_{0202} &= -*W_{1313} = -R_{0213}, \\ *W_{0203} &= R_{0212}, \\ *W_{0212} &= -*W_{0313} = -R_{0203}, \\ *W_{0213} &= R_{0202}, \\ *W_{0303} &= -*W_{1212} = R_{0312}, \\ *W_{0312} &= -R_{0303}, \\ *W_{1213} &= -R_{0313}. \end{aligned} \quad (181)$$

Segue que a parte magnética do tensor de Weyl é

$$H_{AB} = -*W_{ACBD}V^C V^D. \quad (182)$$

As expressões explícitas em componentes para as quantidades (180) e (182) não serão expostas neste trabalho, pois não são de caráter manipulativo simples.

3 Métrica de Kerr e violação de causalidade

Neste capítulo faremos uma análise numérica da violação de causalidade na métrica de Kerr. Escolheremos um buraco negro específico, ou seja, fixaremos valores numéricos para a massa M e para o momento angular por unidade de massa a de tal objeto. Em seguida, analisaremos a possibilidade das curvas do tipo-tempo fechadas serem geodésicas.

Seja a métrica de Kerr dada no sistema de coordenadas de Boyer-Lindquist pela Eq. (28). Consideremos um campo de velocidades V^μ dado por

$$V^\mu = (0, 0, 0, \dot{\phi}_0), \quad (183)$$

onde $\dot{\phi}_0$ é uma constante. Assim temos que

$$g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = g_{33}(\dot{\phi}_0)^2. \quad (184)$$

Se houver alguma região no espaço-tempo de Kerr tal que

$$g_{33}(\rho, \theta) > 0, \quad (185)$$

teremos que o campo V^μ será do tipo-tempo. Sendo g_{33} dada pela Eq. (28), no caso em que $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$, a condição (185) é equivalente a

$$\rho < -\frac{(\rho^2 + a^2)(\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta)}{2Ma \sin^2 \theta}, \quad (186)$$

e daí concluímos que ρ deve ser negativo para que esta condição seja satisfeita. Além disso, se quisermos que V^μ seja geodésico, podemos substituí-lo nas equações das geodésicas (5), e obteremos

$$\begin{aligned} \Gamma_{33}^1 = 0 &\implies g_{33,1} = 0, \\ \Gamma_{33}^2 = 0 &\implies g_{33,2} = 0, \end{aligned} \quad (187)$$

onde $g_{33,1} = (\partial g_{33}/\partial \rho)$ e $g_{33,2} = (\partial g_{33}/\partial \theta)$. Se escolhermos $a = 1$ e $M = 2$ ⁶, podemos reescrever as Eqs. (187) como

$$\rho + \frac{2\text{sen}^2\theta}{\rho^2 + \cos^2\theta} - \frac{4\rho^2\text{sen}^2\theta}{(\rho^2 + \cos^2\theta)^2} = 0, \quad (188a)$$

$$\frac{4\rho\text{sen}^2\theta(\rho^2 + 1)}{(\rho^2 + \cos^2\theta)^2} + \rho^2 + 1 + \frac{4\rho\text{sen}^2\theta}{\rho^2 + \cos^2\theta} = 0. \quad (188b)$$

Se fizermos a mudança de variável $x = \text{sen}^2\theta$ e resolvermos as Eqs. (188a) e (188b) separadamente, obteremos

$$x_1 = \frac{\rho^3 + \rho + \rho^2 - 1 + \sqrt{\rho^4 + 4\rho^5 - 2\rho^2 + 1 + 4\rho^3}}{\rho - 2}, \quad (189a)$$

$$x_2 = \frac{\rho^3 + \rho + \rho^2 - 1 - \sqrt{\rho^4 + 4\rho^5 - 2\rho^2 + 1 + 4\rho^3}}{\rho - 2}, \quad (189b)$$

como soluções para (188a) e

$$x_3 = \frac{\left(\rho^2 - 4\rho + 1 + 2\sqrt{4\rho^2 - \rho^3 - \rho}\right)(\rho^2 + 1)}{\rho^2 - 4\rho + 1}, \quad (190a)$$

$$x_4 = \frac{\left(\rho^2 - 4\rho + 1 - 2\sqrt{4\rho^2 - \rho^3 - \rho}\right)(\rho^2 + 1)}{\rho^2 - 4\rho + 1}, \quad (190b)$$

como soluções para (188b), com $\rho \in \Re$. Agora, basta verificar se existe algum valor para ρ que satisfaça as Eqs. (188) simultaneamente. Para isso, podemos traçar os gráficos ilustrados na Fig. (24).

Observamos que apenas o caso em que temos $x_1(\rho)$ e $x_4(\rho)$ como soluções de (188) é que há um valor $\rho = \rho_*$ que satisfaz estas equações simultaneamente. Assim, obtemos também um valor para $x = x_*$, o qual corresponderá

⁶Algebricamente, tal escolha não é necessária, mas como será feita uma análise numérica posteriormente, fixamos desde já tais valores, arbitrariamente.

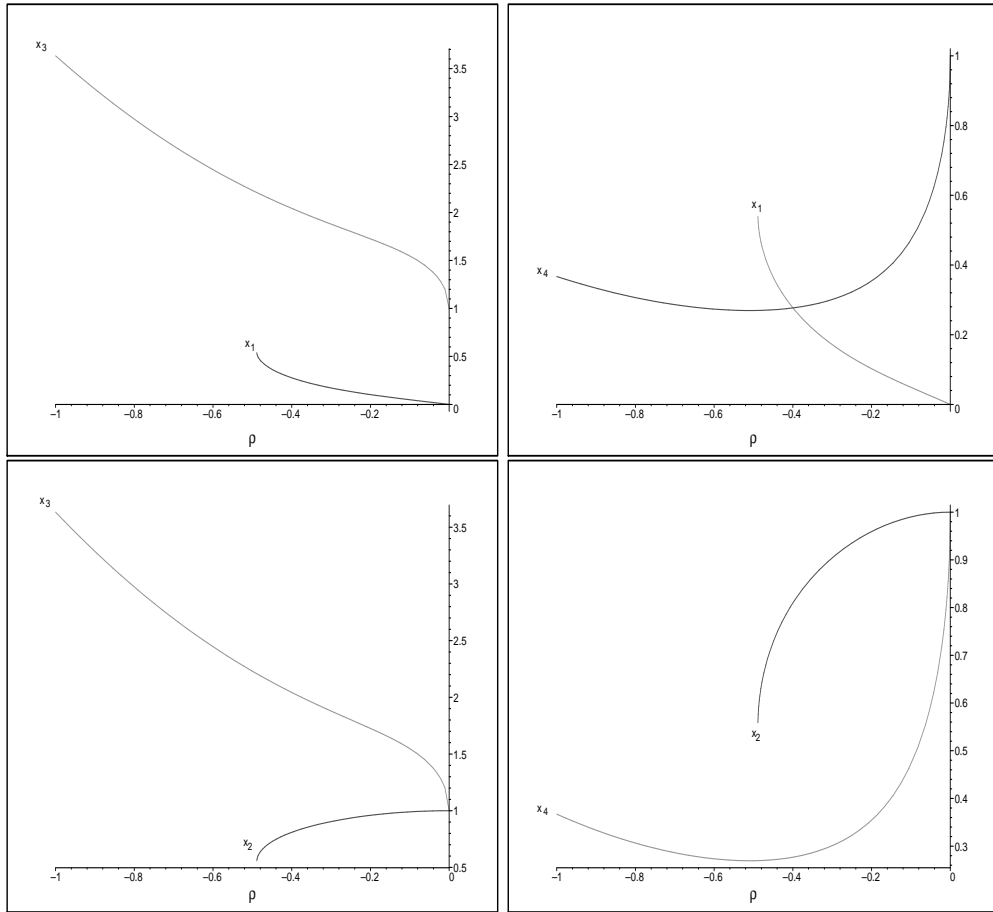


Figura 24: Intersecções, duas a duas, das soluções $x_1(\rho)$ e $x_2(\rho)$ com $x_3(\rho)$ e $x_4(\rho)$.

a dois possíveis valores de θ , sendo eles $\sin \theta_1 = \sqrt{x_*}$ e $\sin \theta_2 = -\sqrt{x_*}$. Considerando os valores de ρ_* e x_* obtidos deste gráfico, algo em torno de $\rho_* = -0,4$ e $x_* = 0,3$. Substituindo estes números na Eq. (186), percebemos que esta não é satisfeita, ou seja, neste ponto $g_{33} < 0$. Logo, não é possível escolher um campo como (183) que seja geodésico e viole causalidade simultaneamente (uma margem de erro foi considerada para os valores encontrados, porém o critério (186) continua sendo violado).

Se fizermos exatamente os mesmos cálculos e gráficos, mas agora com a consideração de que $a^2 > M^2$, obteremos a mesma conclusão negativa sobre

o fato do campo V^μ ter apenas componente azimutal $\hat{\phi}$ e ser geodésico ao mesmo tempo. Portanto concluímos destes dois casos que não é possível ter curvas do tipo-tempo fechadas e que ainda sejam geodésicas. Ou seja, se for possível encontrar uma geodésica que viole causalidade na métrica de Kerr ela deve ser não-limitada.

4 Equações quase-Maxwellianas para uma métrica Gaussiana diagonal

As equações quase-Maxwellianas são de extrema importância na teoria de perturbações na relatividade geral, quando tratamos de métricas com invariância conforme. Elas fazem com que o tratamento perturbativo provenha apenas de flutuações feitas no espaço-tempo de fundo e apresentam-se insensíveis à mudança de coordenadas, evitando um possível equívoco com respeito à origem real das flutuações consideradas.

Há inúmeras referências que tratam da dedução formal das equações quase-Maxwellianas (cf. [3], [20] e [21]). De uma maneira sucinta, estas equações podem ser obtidas a partir das identidades de Bianchi juntamente com as equações de Einstein (2), dando

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = -\frac{1}{2}T^{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{1}{6}g^{\mu[\alpha}T^{;\beta]}. \quad (191)$$

Avaliando as projeções independentes da divergência do tensor de Weyl

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu}V_{\beta}V_{\mu}h_{\alpha}{}^{\sigma}, \quad (192a)$$

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu}\eta^{\sigma\lambda}{}_{\alpha\beta}V_{\mu}V_{\lambda}, \quad (192b)$$

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu}h_{\mu}{}^{(\sigma}\eta^{\tau)\lambda}{}_{\alpha\beta}V_{\lambda}, \quad (192c)$$

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu}V_{\beta}h_{\mu(\tau}h_{\sigma)\alpha}, \quad (192d)$$

obtemos as equações quase-Maxwellianas, dadas por

$$\begin{aligned}
h^{\epsilon\alpha}h^{\lambda\gamma}E_{\alpha\lambda;\gamma} + \eta^\epsilon{}_{\beta\mu\nu}V^\beta H^{\nu\lambda}\sigma^\mu{}_\lambda + 3H^{\epsilon\nu}\omega_\nu &= \frac{1}{3}h^{\epsilon\alpha}\rho_{,\alpha} + \frac{\vartheta}{3}q^\epsilon + \\
-\frac{1}{2}(\sigma^\epsilon{}_\nu - 3\omega^\epsilon{}_\nu)q^\nu + \frac{1}{2}\pi^{\epsilon\mu}a_\mu + \frac{1}{2}h^{\epsilon\alpha}\pi_\alpha{}^\nu{}_{;\nu}, & \quad (193a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^{\epsilon\alpha}h^{\lambda\gamma}H_{\alpha\lambda;\gamma} - \eta^\epsilon{}_{\beta\mu\nu}V^\beta E^{\nu\lambda}\sigma^\mu{}_\lambda - 3E^{\epsilon\nu}\omega_\nu &= (\rho + p)\omega^\epsilon - \frac{1}{2}\eta^{\epsilon\alpha\beta\lambda}V_\lambda q_{\alpha;\beta} + \\
+\frac{1}{2}\eta^{\epsilon\alpha\beta\lambda}(\sigma_{\mu\beta} + \omega_{\mu\beta})\pi^\mu{}_\alpha V_\lambda, & \quad (193b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_\mu{}^\epsilon h_\nu{}^\lambda \dot{H}^{\mu\nu} + \vartheta H^{\epsilon\lambda} - \frac{1}{2}H_\nu{}^{(\epsilon} h^\lambda)_{\mu} V^{\mu;\nu} + \eta^{\lambda\nu\mu\gamma}\eta^{\epsilon\beta\tau\alpha}V_\mu V_\tau H_{\alpha\gamma}\vartheta_{\nu\beta} + \\
-a_\alpha E_\beta{}^{(\lambda}\eta^{\epsilon)\gamma\alpha\beta}V_\gamma + \frac{1}{2}E_{\beta}{}^\mu{}_{;\alpha}h_\mu{}^{(\epsilon}\eta^{\lambda)\gamma\alpha\beta}V_\gamma &= -\frac{3}{4}q^{(\epsilon}\omega^{\lambda)} + \frac{1}{2}h^{\epsilon\lambda}q^\mu\omega_\mu + \\
+\frac{1}{4}\sigma_\beta{}^{(\epsilon}\eta^{\lambda)\alpha\beta\mu}V_\mu q_\alpha + \frac{1}{4}h^\nu{}^{(\epsilon}\eta^{\lambda)\alpha\beta\mu}V_\mu\pi_{\nu\alpha;\beta}, & \quad (193c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_\mu{}^\epsilon h_\nu{}^\lambda \dot{E}^{\mu\nu} + \vartheta E^{\epsilon\lambda} - \frac{1}{2}E_\nu{}^{(\epsilon} h^\lambda)_{\mu} V^{\mu;\nu} + \eta^{\lambda\nu\mu\gamma}\eta^{\epsilon\beta\tau\alpha}V_\mu V_\tau E_{\alpha\gamma}\vartheta_{\nu\beta} + \\
+a_\alpha H_\beta{}^{(\lambda}\eta^{\epsilon)\gamma\alpha\beta}V_\gamma - \frac{1}{2}H_{\beta}{}^\mu{}_{;\alpha}h_\mu{}^{(\epsilon}\eta^{\lambda)\gamma\alpha\beta}V_\gamma &= \frac{1}{6}h^{\epsilon\lambda}(q^\mu{}_{;\mu} - q^\mu a_\mu - \pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}) + \\
-\frac{1}{2}(\rho + p)\sigma^{\epsilon\lambda} + \frac{1}{2}q^{(\epsilon}a^{\lambda)} - \frac{1}{4}h^\mu{}^{(\epsilon}h^{\lambda)\alpha}q_{\mu;\alpha} + \frac{1}{2}h_\alpha{}^\epsilon h_\mu{}^\lambda \dot{\pi}^{\alpha\mu} + \frac{1}{4}\pi_\beta{}^{(\epsilon}\sigma^{\lambda)\beta} + \\
-\frac{1}{4}\pi_\beta{}^{(\epsilon}\omega^{\lambda)\beta} + \frac{1}{6}\vartheta\pi^{\epsilon\lambda}. & \quad (193d)
\end{aligned}$$

onde

$$\vartheta_{\mu\nu} \doteq \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\vartheta h_{\mu\nu} \quad (194)$$

Além disso, temos a lei de conservação para o tensor momentum-energia $T^{\mu\nu}$ como sendo

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (195)$$

a qual pode ser projetada na direção do campo de observadores V^μ ou perpendicular a este campo dando

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}V^\mu = 0, \quad (196a)$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}h^{\mu\alpha} = 0, \quad (196b)$$

as quais podem ser escritas explicitamente como

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\vartheta + \dot{q}^\mu V_\mu + q^\alpha{}_{;\alpha} - \pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = 0, \quad (197a)$$

$$\begin{aligned} (\rho + p)a_\alpha - p_\mu h^\mu{}_\alpha + \dot{q}_\mu h^\mu{}_\alpha + \vartheta q_\alpha + q^\nu \vartheta_{\alpha\nu} + q^\nu \omega_{\alpha\nu} + \pi_\alpha{}^\nu{}_{;\nu} \\ + \pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}V_\alpha = 0. \end{aligned} \quad (197b)$$

A partir da definição do tensor de Riemann, podemos encontrar as equações de evolução das quantidades cinemáticas

$$\dot{\vartheta} + \frac{\vartheta^2}{3} + 2(\sigma^2 + \omega^2) - a^\alpha{}_{;\alpha} = R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu, \quad (198a)$$

$$\begin{aligned} h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu \dot{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}(-2(\sigma^2 + \omega^2) + a^\lambda{}_{;\lambda}) + a_\alpha a_\beta - \frac{1}{2}h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu (a_{\mu;\nu} + a_{\nu;\mu}) + \\ + \frac{2}{3}\vartheta\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu}\sigma^\mu{}_\beta + \omega_{\alpha\mu}\omega^\mu{}_\beta = R_{\alpha\epsilon\beta\nu}V^\epsilon V^\nu - \frac{1}{3}R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu h_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (198b)$$

$$\begin{aligned} h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu \dot{\omega}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu (a_{\mu;\nu} - a_{\nu;\mu}) + \frac{2}{3}\vartheta\omega_{\alpha\beta} - \sigma_{\beta\mu}\omega^\mu{}_\alpha + \\ + \sigma_{\alpha\mu}\omega^\mu{}_\beta = 0, \end{aligned} \quad (198c)$$

juntamente com os vínculos

$$\frac{2}{3}\vartheta_{;\mu}h^\mu{}_\lambda - (\sigma^\alpha{}_\gamma + \omega^\alpha{}_\gamma)_{;\alpha}h^\gamma{}_\lambda - a^\nu(\sigma_{\lambda\nu} + \omega_{\lambda\nu}) = R_{\mu\nu}V^\mu h^\nu{}_\lambda, \quad (199a)$$

$$\omega^\alpha{}_{;\alpha} + 2\omega^\alpha a_\alpha = 0, \quad (199b)$$

$$-\frac{1}{2}h_{(\tau}{}^\epsilon h_{\lambda)}{}^\alpha \eta_\epsilon{}^{\beta\gamma\nu} V_\nu (\sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta})_{;\gamma} + a_{(\tau}\omega_{\lambda)} = H_{\tau\lambda}. \quad (199c)$$

Restringindo-nos ao caso de uma métrica diagonal da forma

$$ds^2 = dT^2 - B(T, R)dR^2 - r^2(T, R)d\Omega^2, \quad (200)$$

e um campo de observadores $V^\mu \doteq \delta_0^\mu$, podemos escrever a expansão ϑ para este campo na forma

$$\vartheta = \frac{1}{2} \frac{r\dot{B} + 4B\dot{r}}{rB}, \quad (201)$$

onde $\dot{B} = \partial B/\partial T$ e $\dot{r} = \partial r/\partial T$. Em seguida, podemos calcular o tensor de cisalhamento $\sigma^\mu{}_\nu$ e escrevê-lo numa forma matricial 3-dimensional

$$[\sigma^i{}_j] = f(T, R) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (202)$$

sendo

$$f(T, R) = -\frac{1}{3} \frac{-r\dot{B} + 2B\dot{r}}{rB}. \quad (203)$$

Por outro lado, também podemos escrever a parte elétrica do tensor de Weyl $E^\mu{}_\nu$ para este campo de observadores escolhido na forma matricial

$$[E^i{}_j] = g(T, R) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (204)$$

onde

$$\begin{aligned}
g(T, R) = & \frac{1}{12r^2B^2}(-2r^2B\ddot{B} + r^2\dot{B}^2 - 4rBr'' + 2rB\dot{r}\dot{B} + 2rr'B' + \\
& + 4rB^2\ddot{r} - 4B^2 - 4B^2\dot{r}^2 + 4Br'^2),
\end{aligned} \tag{205}$$

$r' = \partial r / \partial R$ e $B' = \partial B / \partial R$.

Observamos que, mesmo neste caso geral, tanto $\sigma_{\mu\nu}$ quanto $E_{\mu\nu}$ só possuem componentes diagonais não-nulas e, além disso, são “proporcionais” à mesma matriz. Quanto à parte magnética $H_{\alpha\beta}$ do tensor de Weyl, esta é idênticamente nula, assim como a vorticidade $\omega_{\alpha\beta}$ e a aceleração a^μ . Tal fato é devido à particular escolha do campo de observadores δ_0^μ . Estes fatos facilitam muito os cálculos.

Assumindo um fluido com pressão anisotrópica dado por

$$[T^\mu{}_\nu] = \text{diag} \left(\rho, p + \pi^1{}_1, p - \frac{\pi^1{}_1}{2}, p - \frac{\pi^1{}_1}{2} \right), \tag{206}$$

as equações quase-Maxwellianas (193) para este fluido tomam a seguinte forma

$$g_{,1} + 3\frac{r'}{r}g = \frac{1}{3}\rho_{,1} + \frac{1}{2} \left(\pi^1{}_{1,1} + 3\frac{r'}{r}\pi^1{}_1 \right), \tag{207a}$$

$$g_{,0} + 3\frac{\dot{r}}{r}g = \frac{1}{4}f\pi^1{}_1 - \frac{1}{2}(\rho + p)f + \frac{1}{2}\pi^1{}_{1,0} + \frac{1}{6}\vartheta\pi^1{}_1, \tag{207b}$$

onde $g_{,1} = \partial g / \partial R$ e $g_{,0} = \partial g / \partial T$, e analogamente para $\pi^1{}_1$. Notamos que tanto a equação associada com a divergência da parte magnética do tensor de Weyl (193b) quanto aquela associada à derivada temporal de $H_{\alpha\beta}$ (193c) são idênticamente nulas. As equações que expressam a conservação da energia podem ser escritas explicitamente como

$$\rho_{,0} + (\rho + p)\vartheta - \frac{3}{2}f\pi^1_1 = 0, \quad (208a)$$

$$\pi^1_{1,1} + 3\frac{r'}{r}\pi^1_1 - p_{,1} = 0. \quad (208b)$$

A evolução das quantidades cinemáticas não-nulas, ϑ e σ^i_j , têm em componentes a forma

$$\vartheta_{,0} + \frac{\vartheta^2}{3} + \frac{3}{2}f^2 = -\frac{1}{2}(\rho + 3p), \quad (209a)$$

$$f_{,0} + \frac{f^2}{2} + \frac{2}{3}\vartheta f = -g - \frac{1}{2}\pi^1_1. \quad (209b)$$

Por fim, a única equação de vínculo que nos resta é

$$f_{,1} + 3\frac{r'}{r}f - \frac{2}{3}\vartheta_{,1} = 0. \quad (210)$$

O conjunto formado pelas Eqs. (207)-(210) corresponde a um caso particular de um problema de condições iniciais ou *problema de Cauchy*. No caso geral, o problema consiste em dar uma superfície de Cauchy S do tipo-espaço sobre a qual as equações de Einstein valham e a partir daí as Eqs. (193), juntamente com (197)-(199), propagam estes dados iniciais para uma vizinhança de S [22].

Analisando um caso particular tal que $T_{\mu\nu} = 0$, as equações de Einstein dão os resultados

$$B_E(T, R) = \frac{r'^2}{1 + F(R)}, \quad (211a)$$

$$\dot{r}_E(T, R) = -\sqrt{F + k_1/r}, \quad (211b)$$

$$r'_E(T, R) = w'(R)\sqrt{F + k_1/r}, \quad (211c)$$

onde $F(R)$ e $w(R)$ são funções arbitrárias e k_1 é uma constante. Portanto, dadas estas condições sobre uma superfície de Cauchy em $T = T_0$, as funções B e r poderão ser evoluídas a partir daí. Por outro lado, das Eqs. (207), temos que

$$g = -\frac{k}{r^3}, \quad (212)$$

onde k é uma constante. Da Eq. (210) obtemos

$$B_{QM} = \frac{r'^2}{1 + h(R)}, \quad (213)$$

sendo $h(R)$ é uma função arbitrária⁷. Podemos escrever as Eqs. (209) em termos explícitos da métrica como

$$\frac{\ddot{B}}{B} - \frac{1}{2} \frac{\dot{B}^2}{B^2} - 2 \frac{\ddot{r}}{r} = -3g, \quad (214a)$$

$$\frac{\ddot{B}}{B} - \frac{1}{2} \frac{\dot{B}^2}{B^2} + 4 \frac{\ddot{r}}{r} = 0. \quad (214b)$$

Substituindo a Eq. (213) em Eq. (214b), segue que

$$\frac{\ddot{r}'}{\ddot{r}} + 2 \frac{r'}{r} = 0 \implies \ddot{r} = \frac{a(T)}{r^2}, \quad (215)$$

onde $a(T)$ é uma função arbitrária de T . Subtraindo a Eq. (214a) da (214b) e substituindo as Eqs. (213) e (212) na diferença daquelas, encontramos que $2a(T) = -k$, logo $a(T)$ é uma constante. Portanto, da Eq. (215), encontramos

⁷O índice subscripto E indica que o resultado foi obtido unicamente a partir das equações de Einstein, e o índice QM no caso das equações quase-Maxwellianas.

$$\dot{r}_{QM}^2 = 2y(R) + \frac{k}{r}, \quad (216)$$

sendo $y(R)$ uma função arbitrária. Substituindo o vínculo (213) na definição de g , Eq. (205), e novamente tomando a diferença das Eqs. (214a) e (214b), obtemos

$$3\frac{\ddot{r}}{r} - \frac{\dot{r}\dot{r}'}{r r'} + \frac{1}{2}\frac{h'}{r r'} + \frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{h}{r^2} = 0. \quad (217)$$

Substituindo a Eq. (216) em (217) temos que

$$\frac{h}{r^2} - \frac{2y}{r^2} = x(T), \quad (218)$$

onde $x(T)$ é uma função arbitrária de T . Por uma questão de consistência, concluímos da Eq. (218) que $x(T) = 0$, pois h e y são funções apenas de R , o que implica que $h(R) = 2y(R)$.

Da Eq. (216), temos

$$\int \frac{dr}{\sqrt{h + k/r}} = \int dT. \quad (219)$$

Integrando, encontramos

$$\frac{\sqrt{(hr + k)r}}{h} - \frac{k}{2h^{3/2}} \ln(k + 2hr + 2\sqrt{(hr + k)hr}) = T + b(R). \quad (220)$$

Derivando com respeito a R , obtemos

$$r'_{QM} = b' \sqrt{h + \frac{k}{r}}. \quad (221)$$

Se voltarmos às Eqs. (211) e analisarmos melhor a Eq. (211b) escrita como

$$F = \dot{r}^2 - \frac{k_1}{r} \quad (222)$$

e interpretarmos a função $r(T, R)$ como medindo uma distância de um ponto do espaço-tempo até um centro de simetria [23], \dot{r} poderia ser vista como sendo a velocidade radial da partícula e o termo k_1/r seria um análogo do potencial Newtoniano, quando $r \rightarrow \infty$. Desta maneira, h estaria associada a energia total por unidade de massa de uma partícula teste nesta geometria. Portanto, a superfície de Cauchy a ser considerada seria tal que as condições citadas acima fossem válidas em $T = T_0$.

Ainda devemos determinar as funções arbitrárias presentes nas Eqs. (211). Consideremos que

$$F = \alpha^2 - 1, \quad (223a)$$

$$w(R) = \alpha R, \quad (223b)$$

onde α é uma contante. Em seguida, fazendo uma transformação de coordenadas a partir da matriz Jacobiana J^α_β

$$[J^\alpha_\beta] \equiv \left[\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta} \right] = \begin{pmatrix} \alpha/A & -(\alpha^2 - A)/A & 0 & 0 \\ -\sqrt{\alpha^2 - A} & \alpha\sqrt{\alpha^2 - A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (224)$$

onde $x^\alpha = (t, r, \theta, \phi)$, $\bar{x}^\beta = (T, R, \theta, \phi)$ e $A = 1 - k_1/r$, a métrica dada por (200) toma a forma de Schwarzschild (22),

$$ds^2 = \left(1 - \frac{k_1}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{k_1}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (225)$$

e assim podemos identificar $k_1 = 2M$ e α é a energia da partícula (componente 0 do momentum p_μ).

Devido ao fato da forma funcional das Eqs. (213), (216) e (221) ser similar às Eqs. (211), a determinação das funções arbitrárias sobre a superfície $T = T_0$ é imediata

$$B_E(T_0, R) = B_{QM}(T_0, R) \implies h(R) = F(R), \quad (226a)$$

$$\dot{r}_E(T_0, R) = \dot{r}_{QM}(T_0, R) \implies k = k_1, \quad (226b)$$

$$r'_E(T_0, R) = r'_{QM}(T_0, R) \implies b(R) = w(R). \quad (226c)$$

Já num caso um pouco mais geral, considerando

$$T_{\mu\nu} = \rho(T, R)V_\mu V_\nu, \quad (227)$$

as equações de Einstein dão outras condições sobre $B(T, R)$ e $r(T, R)$. Tais condições podem ser escritas como

$$B_E(T, R) = \frac{r'^2}{1 + f_0(R)}, \quad (228a)$$

$$\dot{r}_E(T, R) = \sqrt{f_0 + f_1(R)/r}, \quad (228b)$$

$$r'_E(T, R) = \frac{f'_1}{\rho r^2}, \quad (228c)$$

onde $f_0(R)$ e $f_1(R)$ são funções arbitrárias. Quando $\rho = \rho(T)$, tais condições se reduzem à solução de Tolman [23]. Por outro lado, podemos escrever as equações quase-Maxwellianas, juntamente com a conservação da energia, equações de evolução e vínculos, para o tensor momentum-energia dado por (227), como sendo

$$\frac{1}{r^3}(r^3g)_{,1} = \frac{\rho_{,1}}{3}, \quad (229a)$$

$$\frac{1}{r^3}(r^3g)_{,0} = \frac{\rho}{6} \left(2\frac{\dot{r}}{r} - \frac{\dot{B}}{B} \right), \quad (229b)$$

$$\frac{\rho_{,0}}{\rho} + 2\frac{\dot{r}}{r} + \frac{\dot{B}}{2B} = 0, \quad (229c)$$

$$B_{QM} = \frac{r'^2}{1 + h(R)}, \quad (229d)$$

$$2\frac{\ddot{r}'}{r'} - 2\frac{\ddot{r}}{r} = -3g, \quad (229e)$$

$$2\frac{\ddot{r}'}{r'} + 4\frac{\ddot{r}}{r} = -\rho. \quad (229f)$$

Substituindo a Eq. (229d) na Eq. (229c), temos que

$$r'_{QM} = \frac{h_0(R)}{\rho r^2}, \quad (230)$$

onde $h_0(R)$ é uma função arbitrária. Assim, substituindo a Eq. (230) na Eq. (229a), encontramos

$$r^3g = \frac{\rho r^3}{3} - \int h_0 dR - h_1(T), \quad (231)$$

onde $h_1(T)$ é uma função arbitrária. De posse disso, podemos substituir esta equação na Eq. (229b), e chegamos a

$$\frac{\rho_{,0}}{\rho} + 2\frac{\dot{r}}{r} + \frac{\dot{B}}{2B} - 3\frac{\dot{h}_1}{\rho r^3} = 0. \quad (232)$$

Comparando este resultado com a Eq. (229c), concluímos que $h_1(T) \equiv k$, sendo k uma constante. Podemos tomar a diferença entre as Eqs. (229e) e (229f), obtendo

$$6\frac{\ddot{r}}{r} = -\rho + 3g. \quad (233)$$

Substituindo nesta equação a Eq. (231), segue que

$$2\frac{\ddot{r}}{r} = -\frac{1}{r^3} \int h_0 dR - \frac{k}{r^3}, \quad (234)$$

cujas integrais nos fornece

$$\dot{r}_{QM}^2 = \frac{1}{r} \int h_0 dR + \frac{k}{r} + h_2(R), \quad (235)$$

sendo $h_2(R)$ uma função arbitrária. Por fim, substituindo a Eq. (229d) na definição de g , dada pela Eq. (205), e em seguida substituindo o resultado desta operação na Eq. (229e), temos a seguinte equação

$$\frac{\ddot{r}'}{r'} - \frac{\ddot{r}}{r} + \frac{\dot{r} \dot{r}'}{r r'} - \frac{h'}{2r r'} - \frac{\dot{r}^2}{r^2} + \frac{h}{r^2} = 0. \quad (236)$$

Substituindo nesta equação as Eqs. (230) e (235), segue que

$$\frac{h_2}{r^2} - \frac{h}{r^2} = y(T), \quad (237)$$

onde $y(T)$ é uma função arbitrária. Por consistência nas dependências funcionais dos lados esquerdo e direito da equação acima, notamos que $y(T) = 0$, o que implica que, $h_2(R) = h(R)$.

Agora, devemos aplicar as condições de junção entre as Eqs. (228) e as Eqs. (229) ao longo de uma superfície do tipo $T = T_0$. Como a forma funcional dessas funções é muito semelhante, assim como no exemplo anterior, a junção é imediata e dada por

$$B_E(T, R) = B_{QM}(T, R) \implies f_0(R) = h(R), \quad (238a)$$

$$\dot{r}_E(T, R) = \dot{r}_{QM}(T, R) \implies f_1(R) = \int h_0 dR + k, \quad (238b)$$

$$r'_E(T, R) = r'_{QM}(T, R) \implies f'_1(R) = h_0. \quad (238c)$$

Com estes exemplos, somos levados a pensar que talvez a hipótese de uma métrica que tenha simetria esférica seja muito forte para as equações quase-Maxwellianas, pois os graus de liberdade extras que deveriam aparecer neste tratamento são rapidamente eliminados. Portanto, a utilização das equações quase-Maxwellianas para encontrar uma possível solução interior para a métrica de Kerr parece manter o alto grau de dificuldade de solução deste problema.

5 Conclusão

O método desenvolvido neste trabalho para encontrar sistemas Gaussianos de coordenadas a partir da equação de Hamilton-Jacobi relativística foi bastante satisfatório. Desta forma, podemos transpor o problema de resolver as Eqs. (30), a quais não possuem um método de solução conhecido, para o problema de encontrar uma função principal de Hamilton S , sobre o qual existem inúmeros trabalhos na literatura sobre o assunto. Porém, um problema que surge na construção do sistema de coordenadas Gaussiano é encontrar $\bar{g}_{\mu\nu}$ escrita em termos das novas coordenadas (S, R, Θ, Φ) . O desconhecimento dessas expressões explícitas impossibilita os cálculos associados à geometria, como a obtenção do tensor de Riemann, de Ricci, escalar de curvatura etc.

Observamos também que, neste sistema de coordenadas, o campo $V^\mu = \delta_0^\mu$ corresponde a todas as geodésicas do tipo-tempo com vetor tangente normalizado, o que facilita o cálculo das integrais primeiras das equações das geodésicas no sistema de coordenadas inicial, bem como das quantidades cinemáticas de tal campo de observadores.

Quanto à análise da violação da causalidade na métrica de Kerr, reproduzimos um resultado já bastante conhecido de que não há geodésicas do tipo-tempo fechadas nesta geometria. Entretanto, a questão de haver ou não geodésicas de comprimento infinito confinadas na região de violação da causalidade ainda é um problema em aberto.

Em relação à construção de sistemas de coordenadas Gaussianos globais, é necessário um desenvolvimento mais rigoroso e objetivo do tema, pois esta questão está profundamente relacionada com a possibilidade de definirmos um tempo cosmológico global.

O objetivo inicial do estudo das equações quase-Maxwellianas era tentar,

por um caminho alternativo, encontrar uma solução interior para a métrica de Kerr. Acreditávamos que escrevendo estas equações para uma métrica num sistema Gaussiano, talvez fosse mais fácil de encontrar uma solução com tensor momentum-energia $T_{\mu\nu}$ diferente de zero. O estudo viabiliza consideravelmente o tratamento, pois as quantidades envolvidas, como a parte elétrica do tensor de Weyl, campo de observadores, expansão e cisalhamento, têm formas funcionais simples. Por outro lado, se a métrica tiver muitas simetrias, o problema pode ser simplificado de tal maneira que seja imediata a solução, e portanto, carente de novidades físicas. Além disso, a sistema Gaussiano construído, neste trabalho, para a métrica de Kerr, a princípio, não simplificaria consideravelmente as equações quase-Maxwellianas.

6 Referências Bibliográficas

1. V. I. Arnold, *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica*, Mir, Moskow, (1987).
2. Editor M. Novello, *Programa Mínimo de Cosmologia*, Cap. 5, em fase de publicação.
3. J. M. Salim, *Equações Quase-Maxwellianas da Gravitação: Aplicação às Perturbações dos Modelos Cosmológicos de Friedmann*, Tese de Doutorado CBPF/Rio de Janeiro (1982).
4. S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-time*, Appendix B, Cambridge University Press, Cambridge, England, (1973).
5. R. Adler, M. Bazin, M. Schiffer, *Introduction to General Relativity*, Chap. 6, McGraw-Hill, New York, (1975).
6. W. Rindler, *Relativity*, Oxford University Press, Oxford, 2001.
7. R. Adler, M. Bazin, M. Schiffer, *Introduction to General Relativity*, Chap. 15, McGraw-Hill, New York, (1975).
8. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Butterworth-Heinemann, London, (1975).
9. R. Kerr, *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*, *Phys. Rev. Lett.* **11** 237 (1963).
10. R. H. Boyer, R. W. Lindquist, *Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric*, *J. Math. Phys.* **8** 265 (1967).

11. A. S. Eddington, *Nature* **113** 192 (1924); D. Finkelstein, *Phys. Rev.* **110**, 965 (1958).
12. M. D. Kruskal, *Maximal Extension of Schwarzschild Metric*, *Phys. Rev.* **119** 1743 (1960); G. Szekeres, *Publ. Mat*, Debrecen **7** 285 (1960) .
13. N. Lemos, *Mecânica Analítica*, 2a. ed., Livraria da Física, São Paulo, (2007).
14. S. Dai, C. Guan, *Maximally Symmetric Subspace Decomposition of the Schwarzschild Black Hole*, arXiv:gr-qc/0406109.
15. M. Novello, *Sistema de Coordenadas Gaussiano*, não publicado (1982).
16. K. Gödel, *An Example of New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Equations of Gravitation*, *Rev. Mod. Phys.* **21** 447 (1949).
17. M. Novello, N. F. Svaiter e M. E. X. Guimarães, *Synchronized Frames for Gödel's Universe*, *Gen. Rel. Grav.* **25** 137 (1993); M. E. X. Guimarães, *Sistemas Sincrônicos de Coordenadas no Universo de Gödel*, Tese de Mestrado CBPF/Rio de Janeiro (1991); M. C. M. Silva, *Construção de Modelos para um Universo Globalmente Causal a partir da Solução de Gödel*, Tese de Mestrado CBPF/Rio de Janeiro (1992).
18. B. Carter, *Global Structure of the Family of Gravitational Fields*, *Phys. Rev.* **174** 1559 (1968).
19. S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press Inc., New York (1983).

20. M. Novello, J. M. Salim, M. C. Motta da Silva, S. E. Jorás e R. Klippert, *Minimal Closed Set of Observables in the Theory of Cosmological Perturbations*, *Phys. Rev. D* **51** 450 (1995).
21. M. C. Motta da Silva, *Teoria de Perturbações em Universos Anisotrópicos: Modelo de Kasner*, Tese de Doutorado CBPF/Rio de Janeiro (1998); R. Klippert *Teoria de Perturbações no Universo de Schwarzschild*, Tese de Doutorado CBPF/Rio de Janeiro (1998); E. Goulart, *Excitações do Tensor de Weyl na Cosmologia e Questões de Estabilidade*, Tese de Doutorado CBPF/Rio de Janeiro (2007).
22. A. Lichnerowicz, *Ondes et Radiations Électromagnétiques et Gravitationnelles en Relativité Générale*, *Ann. Mat. Pura ed Appl.* **50** 1 (1960).
23. A. Papapetrou, *Lectures on General Relativity*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland (1974); R. C. Arcuri, *Núcleos Atrasados de Matéria no Universo de Friedman*, Tese de Mestrado CBPF/Rio de Janeiro (1982).