

Dissertação de Mestrado

**Estudo das Divergências em
Eletrodinâmica Quântica ao Nível
Um Laço com a Utilização da
Regularização Implícita**

Lucas T. Cardoso

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, março de 2011

Agradecimentos

- Minha eterna gratidão aos meus pais, Paulo e Cláudia, pelo constante apoio não apenas neste período, mas ao longo de toda minha vida, colocando-me no caminho certo, incentivando-me e sempre respeitando minhas escolhas. Mãe, meu amor por você não cabe em palavras.
- Ao Prof. O. Battistel, por ter sido meu mentor e grande amigo desde o início de minha graduação em física. Com seu entusiasmo ao discutir os mais variados problemas de física e com seus valiosos ensinamentos, me motivou a seguir em frente na interminável busca pelos mistérios do universo.
- Ao Prof. José Helayël, por seus inigualáveis cursos motivadores, os quais foram de crucial importância para minha formação acadêmica, e também por sua admirável benevolência, estando sempre disposto a ajudar em problemas de cunho científico, burocrático e até mesmo pessoal.
- Aos meus tios Maria Ângela e Valmor, pelo incentivo e apoio e por estarem sempre dispostos a estender uma mão amiga e acolhedora nos momentos difíceis.
- À Dona Sônia Henes, não só pela ajuda financeira ao longo da graduação, mas, principalmente, por ser uma pessoa positiva, altruísta e de coração puro, sempre acreditando na bondade do ser humano.
- Aos meus amigos e colegas de discussão: Carlos A. Hernaski, Alan E. Maicá, Marcus V. S. Fonseca, Daniel S. Souza, Guilherme N. Bremm, Max Jáuregui, Kim Veiga, Jefferson Moraes, Rodrigo Turcati, Bruno Dias, Elvis L. Meza e aos demais colegas com quem tive contato neste período de mestrado.
- Aos meus irmãos Jonas, João Victor e Duda pelas alegrias e pelo amor e carinho. Amo vocês.
- Aos meus amigos Pedro, Binho, Gui, Cristian, Guigo, Junior, Caitano e Eduardo pela amizade de longa data e o apoio incondicional.
- À Cris, secretária do LAFEX, pela amizade e carinho, e pelos incontáveis "quebra-galhos".
- À Bete (CFC) por sua simpatia e por estar sempre de prontidão.
- À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

A Eletrodinâmica Quântica é, sem sombra de dúvidas, a teoria mais bem sucedida já construída, no que se refere a concordância entre predições teóricas e resultados experimentais. Por este motivo, a EDQ acaba por desempenhar um papel de modelo para as chamadas teorias de calibre das interações fundamentais. O grande sucesso da EDQ, por outro lado, pôde ser aproveitado apenas após uma adequada interpretação das séries perturbativas correspondentes às amplitudes físicas, devido ao aparecimento de divergências ou infinitos, o que se tornou possível através do processo de renormalização. No contexto do cálculo perturbativo, surgem naturalmente as chamadas regras de Feynman, estas possibilitam escrever as amplitudes associadas aos processos físicos pertinentes à teoria em cada dada ordem no parâmetro da expansão perturbativa. No presente trabalho, propõe-se estudar a EDQ ao nível um laço. Fixada a ordem da expansão perturbativa, é possível escrever as amplitudes físicas em termos de funções de Green, as quais por sua vez podem ser escritas em termos de integrais de Feynman. Estas integrais, entretanto, possuem geralmente um caráter divergente, o que se revela através da contagem das potências dos momentos internos aos laços para o caso da divergência ultravioleta, e pela presença do propagador do fóton no laço de um dado diagrama de Feynman no caso da divergência infravermelha. O processo de renormalização envolve manipulações e cálculos destas quantidades divergentes. Isto implica na necessidade da adoção de alguma prescrição de regularização ou filosofia equivalente para os passos intermediários envolvidos. O método utilizado para tal propósito é comumente conhecido por Regularização Implícita, a qual tem-se mostrado ser consistente e totalmente livre de ambiguidades. Estas últimas, assim como outros termos envolvendo certos objetos divergentes, são eliminadas consistentemente através da exigência que as identidades de Ward sejam mantidas, estas fazem parte de um conjunto de relações de simetria e são uma consequência direta da simetria de calibre.

Abstract

The quantum theory of the electromagnetic interactions, QED, is undoubtedly the most successful theory ever constructed, taking into account the agreement of theoretical predictions with experimental results. For this reason, QED plays the role of model for the so called gauge theories of the fundamental interactions. The success achieved by QED, on the other hand, could only be appreciated after an adequate interpretation for the perturbative series corresponding to the physical amplitudes, due to the appearance of divergences or infinities, which became possible with the renormalization procedure. In the context of perturbative calculus, the Feynman rules emerge naturally, these ones make possible writing the amplitudes associated to the physical processes relevant to the theory in each given order in the perturbative expansion parameter. In the present work, it is proposed a study of QED to the one loop level. Having fixed the order of the perturbative expansion it is possible to write the physical amplitudes in terms of Green functions, which in turn can be written as a combination of Feynman integrals. However, the integrals usually present a divergent character, which is revealed by the power counting of the momenta in the loop internal line, for the case of ultraviolet divergence, and by the presence of the photon propagator in the loop of a given Feynman diagram, in the case of infrared divergence. The renormalization process involves manipulations and calculations of these divergent quantities. This implies in the necessity of adopting some regularization prescription or equivalent philosophy for the intermediate steps involved. The method used for such purpose is commonly known as Implicit Regularization, which has been shown being consistent and totally free from ambiguities. The latter, such as other terms containing certain divergent objects, are eliminated consistently through Ward identities, which are part of a more general set of symmetry relations and are also a direct consequence of gauge invariance.

Sumário

1	Introdução Geral	2
2	A eletrodinâmica quântica em solução perturbativa	5
2.1	Aspectos gerais de TQCs	5
2.2	A eletrodinâmica quântica como uma teoria de Gauge	6
2.3	Regras de Feynman para a EDQ	8
2.4	Processos físicos básicos e divergências	9
2.4.1	Propagação do elétron na presença de interação	10
2.4.2	Propagação do fóton na presença da interação	11
2.4.3	Interação elétron-fóton	11
2.5	Cálculos perturbativos e parâmetros físicos	12
3	Funções de Green e identidades de Ward	15
3.1	Introdução	15
3.2	Desenvolvimento das funções de Green	16
3.2.1	Função de um ponto vetorial	16
3.2.2	Auto-energia do elétron por excitação de um fóton	17
3.2.3	Tensor de polarização do vácuo	17
3.2.4	Interação elétron-fóton	19
3.3	Relações entre as funções de Green	22
3.4	Identidades de Ward-Takahashi	24
4	Integrais de Feynman Divergentes	25
4.1	Introdução	25
4.2	Divergências Ultravioletas: uma estratégia alternativa.	25
4.3	Divergências Infravermelhas	31
4.3.1	Estratégia para manipulações e cálculos envolvendo divergências in- fravermelhas	31
5	Forma explícita das funções de Green divergentes	42
5.1	A função de um ponto vetorial	42
5.2	A função de dois pontos bi-vetorial	42
5.3	Auto-energia do elétron por excitação de um fóton	43
5.4	Interação elétron-fóton	44
6	Ambiguidades, relações de simetria e renormalização	47
6.1	Ambiguidades	47
6.1.1	Relações de simetria	48

6.2 Renormalização	49
7 Conclusões	56
A Álgebra das matrizes de Dirac	58
B Parametrização de Feynman	61
C Integração Dimensional	64
D Análise infravermelha das funções Z_k e Y_k	67

Capítulo 1

Introdução Geral

A intuição e a possibilidade de construção de modelos logicamente consistentes num domínio de aplicabilidade bem definido são liberdades das quais nós, cientistas, usufruímos sagazmente de modo a participarmos ativa e decisivamente na evolução do conhecimento científico, através da inevitável quebra de paradigmas até então bem consolidados. Entre os diversos paradigmas que foram quebrados, podemos citar um de importância incontestável: a introdução dos números complexos. O quanto teria se desenvolvido a análise caso Euler e outros matemáticos da época se recusassem a usar $i = \sqrt{-1}$?

Na matemática, a constante busca pela clareza das idéias proporcionou arquitetar modelos matemáticos de rigor e elegância irrefutáveis. Portanto a física, por ser quantificada e comunicada através da linguagem universal da matemática, se torna cada vez mais precisa na descrição dos fenômenos naturais. No entanto, na construção de um modelo axiomático qualquer, cria-se um conjunto de axiomas e define-se operações que relacionam os objetos descritos pelo modelo, requerindo essencialmente que os axiomas sejam independentes e não contraditórios entre si, e que a lógica presente no modelo seja consistente. Deste modo, no âmbito puramente matemático, existe uma infinidade de teorias igualmente válidas. A física, por outro lado, tem seu próprio conjunto de leis e princípios, que acaba por especificar um modelo matemático dentre vários outros contidos numa teoria mais ampla. Como um exemplo podemos citar o caso da Geometria. Matematicamente, ambas as geometrias Euclidiana, Lobachevskiana e Riemanniana são válidas, porém a Teoria da Relatividade Geral de Einstein nos mostra que um corpo que possui massa curva o espaço-tempo de tal modo que a trajetória das partículas neste espaço é agora descrita pela geometria Riemanniana (a qual é localmente equivalente à Geometria Euclideana). Um outro exemplo bastante comum reside no cálculo da função de Green de uma teoria de campos clássica. Em geral, o resultado de uma integral no plano complexo depende do caminho de integração. Porém, a simples exigência que o princípio de causalidade seja satisfeito elimina qualquer arbitrariedade com relação a escolha do caminho de integração, de modo que a função de Green tenha um valor único. Neste sentido, podemos dizer que as leis, princípios e simetrias físicas servem como guias dentro de um modelo matemático utilizado de modo a nos indicar o caminho certo nas "encruzilhadas matemáticas".

O advento da Teoria Quântica de Campos (TQC) em meados dos anos 30 acarretou um enorme desenvolvimento na descrição da natureza em termos de seus constituintes básicos e suas interações fundamentais. A Eletrodinâmica Quântica (EDQ) foi uma das primeiras e mais bem sucedidas TQC's a ser construída. Por ser uma teoria quântica e relativística,

com a pretensão de descrever todos os fenômenos envolvendo interações entre partículas carregadas eletricamente pela intermediação de fótons, a EDQ foi exaustivamente estudada e testada experimentalmente. A credibilidade da teoria, no entanto, foi posta em xeque pelos físicos da época ao perceberem a presença de divergências nas soluções perturbativas obtidas para as amplitudes associadas aos processos físicos pertinentes à teoria. Por outro lado, a EDQ é capaz de prever com extrema acurácia quantidades como o momento magnético anômalo do elétron e o desvio de Lamb dos níveis de energia do átomo de Hidrogênio. Devido a isso, no intuito de remediar a situação e validar a EDQ surge a teoria da renormalização. Um passo intermediário no processo de renormalização é a utilização de um método de regularização ou filosofia equivalente para tratar as amplitudes físicas de modo a ser possível a extração das quantidades finitas de objetos *a priori* divergentes. Neste contexto, emerge a necessidade de uma prescrição consistente no tratamento das divergências oriundas do cálculo perturbativo. Vários métodos com este propósito foram criados. No entanto, como certas simetrias podem ser violadas por alguns métodos, sua aplicabilidade acaba por ter um domínio restrito, e além do mais nem sempre é evidente que a aplicação de algum método resultará na quebra de uma certa simetria fundamental. Além do mais, é bem sabido que a manipulação indevida de objetos divergentes pode levar a implicações errôneas na obtenção de resultados finitos, já que as operações matemáticas usuais são bem definidas apenas no tratamento de quantidades finitas. Então, de maneira a evitar a manipulação de tais estruturas indefinidas a fim de não corromper o poder de predição da teoria criou-se uma estratégia alternativa em [8] por O. A. Battistel, a qual tem sido aplicada com bastante sucesso em TQC's, dando um tratamento consistente para as amplitudes físicas e uma interpretação adequada para os infinitos que surgem no contexto do cálculo perturbativo.

O método utilizado aqui, conhecido atualmente por *Regularização Implícita* (RI), não apenas evita a manipulação de quantidades indefinidas, mas também mantém explícita a arbitrariedade referente à rotulação das linhas internas dos laços. Em princípio, qualquer rotulação deveria nos levar a uma mesma amplitude física, o que é decorrente de uma simetria fundamental na construção de TQC's: a homogeneidade espaço-temporal. Tal propriedade é evidenciada através da invariância translacional da densidade de Lagrangeano, o que em linguagem perturbativa significa que deveria haver uma invariância das amplitudes sob um *shift* no momento de integração. Porém, este não parece ser o caso quando o grau de divergência envolvido é maior do que logarítmico. Assim como em outros casos comentados anteriormente, aqui também nos deparamos com uma "encruzilhada matemática", e a atitude tomada para seguirmos em frente não é outra senão a mais sadia e segura de assumir como guia as simetrias existentes na teoria em questão. A generalidade do método torna possível a abordagem de qualquer TQC, no entanto a EDQ é estudada aqui por ser, além de uma teoria bem sucedida, um modelo para as teorias de gauge das interações fundamentais.

Iniciaremos o trabalho apresentando um capítulo tratando da EDQ em solução perturbativa (cap. 2), no qual será discutido aspectos gerais de TQC's, assim como a EDQ como uma teoria de gauge e as regras de Feynman associadas a esta. Será introduzido, também neste capítulo, três processos físicos elementares da EDQ, os quais estarão relacionados a amplitudes físicas contendo um caráter divergente. No capítulo-3, escreveremos as funções de Green (e relações entre estas) associadas às amplitudes físicas, bem como as identidades de Ward oriundas da conservação da corrente vetorial. No seguinte capítulo, será introduzida a estratégia para o tratamento das integrais de Feynman (e suas devidas

soluções), integrais estas a partir das quais as funções de Green podem ser escritas. No caso da EDQ nos deparamos com dois tipos de divergências: a ultravioleta e a infravermelha. O tratamento destas será feito de forma separada também no capítulo-4. A seguir, no capítulo-5, com a solução das integrais de Feynman em mãos, escreveremos a forma explícita das funções de Green em termos das integrais já calculadas. No capítulo-6, será feito um estudo final das amplitudes físicas, com o tratamento das ambiguidades nelas existentes, as quais são consequência da arbitrariedade da rotulação dos momentos internos aos laços. Ainda neste capítulo, feitas as devidas interpretações para certos objetos divergentes violadores de simetria, efetuaremos a renormalização da EDQ. Finalmente, no capítulo-7 serão feitas as conclusões finais e perspectivas futuras.

Capítulo 2

A eletrodinâmica quântica em solução perturbativa

2.1 Aspectos gerais de TQCs

Uma TQC pode ser representada através de um funcional dos campos envolvidos e de suas respectivas derivadas espaço-temporais, o Lagrangeano L . O primeiro passo na construção de um Lagrangeano, é a identificação das partículas presentes na teoria, as quais são representadas pelos campos. Estes últimos especificarão na teoria uma parte que determina a dinâmica dos campos livres e uma parte que determina os termos de interações. Para a construção dos termos de interações impomos invariância de Lorentz e invariância frente ao grupo total de simetrias internas que julgarmos relevantes. Ao aplicarmos o princípio variacional de Hamilton à parte livre da Lagrangeana obtemos as equações de onda relativísticas para as partículas presentes na teoria. Podemos representar, de um modo geral, um Lagrangeano por

$$L(\phi_j, \partial_\mu \phi_j) = L_j^F + L^I \quad (2.1)$$

onde ϕ_j , L_j^F e L^I representam, respectivamente, o conjunto dos campos presentes na teoria, o Lagrangeano correspondente a parte livre dos campos participantes e o Lagrangeano correspondente aos termos de interações. Definimos a ação S como

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_j, \partial_\mu \phi_j) \quad (2.2)$$

onde

$$L(\phi_j, \partial_\mu \phi_j) = \int_{t_0}^{t_1} dt \mathcal{L}(\phi_j, \partial_\mu \phi_j) \quad (2.3)$$

e $\mathcal{L}(\phi_j, \partial_\mu \phi_j)$ é definida como a densidade de Lagrangeano. Ao aplicarmos a condição de extremização para S , obteremos as equações de movimento, ou seja, buscamos a condição que permite

$$\delta S = 0, \quad (2.4)$$

e encontramos que os campos devem obedecer às equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_j} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi_j)} \right] = 0. \quad (2.5)$$

Como resultado disto teremos uma equação diferencial para cada campo presente na teoria. A parte livre da equação levará a uma equação de onda relativística, para a qual, em geral, pode-se obter solução. Porém, a parte que representa as interações envolverá, simultaneamente, diferentes campos. Consequentemente, teremos para cada teoria um conjunto de equações diferenciais acopladas e (frequentemente) não-lineares. Se pudéssemos solucioná-las de forma exata obteríamos uma descrição completa e detalhada da fenomenologia envolvendo as partículas interagentes representadas na teoria. Entretanto, a obtenção de soluções exatas para tais equações de movimento é raramente possível, e se torna necessária a utilização de métodos perturbativos. Assim, as predições feitas por TQC's são geralmente construídas no contexto da linguagem perturbativa.

2.2 A eletrodinâmica quântica como uma teoria de Gauge

As leis de conservação nas mecânicas Clássica e Quântica podem ser implementadas através de simetrias. A invariância de uma Lagrangeana ou Hamiltoniana frente a um conjunto de transformações implica em simetrias e, conseqüentemente, na existência de quantidades conservadas. Como exemplos podemos citar: a invariância translacional temporal, a invariância translacional espacial e a invariância rotacional, as quais implicam, respectivamente, na conservação de energia, na conservação do momento linear e na conservação do momento angular.

Em teoria de campos, a conexão entre simetrias e leis de conservação é dada de forma precisa pelo teorema de Noether. Este estabelece basicamente que, "qualquer transformação de simetria contínua que deixa a ação invariante implica na existência de uma corrente conservada". As simetrias, por outro lado, podem ser classificadas em dois tipos: as simetrias globais e as simetrias locais ou de calibre. A EDQ pertence à segunda destas classes, sendo esta, mais precisamente, uma teoria de calibre com simetria Abelianana. A EDQ pode ser construída, nesta linguagem, através da imposição de que a teoria do elétron livre de Dirac seja invariante de gauge e renormalizável. Para verificarmos este fato, consideramos inicialmente a densidade de Lagrangeano para um campo $\psi(x)$ de elétron livre (correspondente a equação de onda relativística de Dirac)

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x). \quad (2.6)$$

Aqui, $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, m e γ_μ são, respectivamente, o campo spinorial do elétron, o conjugado de Dirac do campo $\psi(x)$ (definido por $\bar{\psi}(x) = \psi(x) \gamma^0$), sua massa e as matrizes de Dirac. Notemos que o funcional \mathcal{L}_F tem associado a si uma simetria global $U(1)$, o que pode ser observado através das seguintes transformações, correspondentes à invariância da teoria frente a uma transformação de fase

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha} \psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha} \bar{\psi}(x). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Neste caso, o parâmetro α é independente das coordenadas espaciais, de forma que os campos se transformam da mesma maneira independentemente do ponto do espaço-tempo (ou seja, uma transformação global). Ao admitirmos que o parâmetro α possa ser dependente

das coordenadas espaço-temporais estaremos promovendo a simetria para uma simetria local. Sendo assim, as transformações ficam

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha(x)}\bar{\psi}(x).\end{aligned}\quad (2.8)$$

Diferentemente do caso da simetria global, teremos que o primeiro termo da equação (2.6), o que possui a derivada do campo, resultará em dois termos, pois agora o parâmetro $\alpha(x)$ também sofrerá a ação da operação de derivação. Explicitamente,

$$\bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x)\partial_\mu\psi'(x) = \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) - i\bar{\psi}(x)[\partial_\mu\alpha(x)]\psi(x).\quad (2.9)$$

O segundo termo no lado direito da equação acima destrói a invariância do funcional \mathcal{L}_F . Para recuperá-la procuramos um operador D_μ , chamado de *derivada covariante*, para substituir a derivada ordinária ∂_μ de modo que a invariância do funcional \mathcal{L}_F possa ser recuperada. Tal transformação deve obedecer

$$D_\mu\psi(x) \rightarrow [D_\mu\psi(x)]' = e^{-i\alpha(x)}D_\mu\psi(x),\quad (2.10)$$

para que a combinação $\bar{\psi}(x)D_\mu\psi(x)$ seja invariante de calibre. Em outras palavras, a ação da derivada covariante sobre o campo não poderá afetar a propriedade de transformação do campo. Isto pode ser obtido se admitirmos a presença de um campo vetorial $A_\mu(x)$, o chamado *campo de calibre*, de forma que a derivada covariante possa ser escrita como

$$D_\mu\psi(x) = [\partial_\mu + ieA_\mu(x)]\psi(x),\quad (2.11)$$

onde e é um parâmetro livre que será identificado posteriormente com a carga do elétron. Assim, a lei de transformação para a derivada covariante (2.10) será satisfeita se o campo de calibre $A_\mu(x)$ possuir a seguinte propriedade de transformação

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x).\quad (2.12)$$

Das equações (2.6) e (2.11) temos que

$$\mathcal{L}'_F = \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x).\quad (2.13)$$

Para tornarmos o campo $A_\mu(x)$ uma variável dinâmica, precisamos adicionar ao funcional acima um termo envolvendo a parte livre deste campo vetorial. O termo mais simples invariante de calibre é

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},\quad (2.14)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,\quad (2.15)$$

Aqui $F_{\mu\nu}$ e $F^{\mu\nu}$ são, respectivamente, o tensor de Maxwell e seu correspondente dual. Para verificar explicitamente a invariância do tensor $F_{\mu\nu}$, basta perceber que

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &\rightarrow F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ &= \partial_\mu \left[A_\nu(x) + \frac{1}{e}\partial_\nu\alpha(x) \right] - \partial_\nu \left[A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \right] \\ &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x).\end{aligned}\quad (2.16)$$

Podemos escrever ainda uma relação entre o tensor $F_{\mu\nu}$ e as derivadas covariantes da forma

$$(ieF_{\mu\nu})\psi(x) = (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi(x), \quad (2.17)$$

e, devido a invariância de $F_{\mu\nu}$, podemos escrever

$$F'_{\mu\nu}\psi'(x) = [F_{\mu\nu}\psi(x)]e^{-i\alpha(x)}. \quad (2.18)$$

Combinando as equações (2.13) e (2.14), obtemos a densidade de Lagrangeano da EDQ

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.19)$$

A fim de facilitar os procedimentos de quantização, é conveniente ainda adicionar um termo à densidade de Lagrangeano (2.19), denominado termo de fixação de calibre (gauge fixing). Uma escolha adequada é dada por

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (2.20)$$

onde ξ é um parâmetro arbitrário. Nenhuma consequência dinâmica estará associada ao parâmetro ξ . Assim escrevemos o funcional \mathcal{L} , representando a EDQ como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (2.21)$$

2.3 Regras de Feynman para a EDQ

Como mencionado anteriormente, devido ao fato de soluções exatas para as equações de movimento serem raramente possíveis, as consequências das TQC's são geralmente apreciadas no contexto do cálculo perturbativo. Neste contexto, surgem naturalmente as chamadas regras de Feynman. Estas, possibilitam escrever as amplitudes correspondentes aos processos físicos pertinentes à teoria, em cada dada ordem no parâmetro da expansão perturbativa, de um modo simples e direto. Para tal considera-se todas as possíveis maneiras de um dado estado inicial evoluir para um dado estado final através da construção de diagramas, os denominados diagramas de Feynman. As peças utilizadas para a construção destes diagramas são: propagadores, vértices e fatores combinatórios. Para o caso da EDQ, as regras de Feynman são as seguintes:

i) Para cada linha fermiônica interna, associa-se um propagador dado por:

$$iS_f(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.22)$$

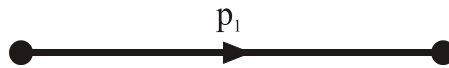


Figura 2.1: Representação diagramática para o propagador fermiônico de spin $\frac{1}{2}$.

ii) Para cada linha bosônica interna, associa-se um propagador:

$$iD_{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]. \quad (2.23)$$



Figura 2.2: Representação diagramática para o propagador correspondente ao vetor sem massa.

iii) Para cada vértice, atribui-se um fator:

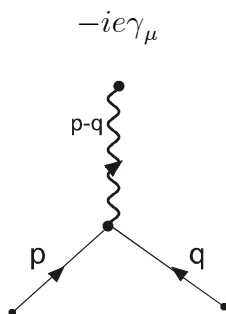


Figura 2.3: Representação diagramática correspondente ao vértice de interação elétron-fóton.

iv) Deve-se inserir um fator -1 multiplicativo em caso de laço puramente fermiônico.

v) Para o caso de diagramas contendo laços, deve-se efetuar a integração sobre os momentos não fixados pelas regras de conservação de energia-momentum dos vértices:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$

Um fator relativo -1 aparecerá entre os gráficos que diferem um do outro pela troca de duas linhas fermiônicas externas idênticas. As linhas fermiônicas internas devem ser representadas por flechas em ambos os sentidos horário e anti-horário. No entanto, os diagramas que são topologicamente equivalentes devem ser contados uma única vez. Por outro lado, as linhas correspondentes a elétrons e pósitrons chegando em um gráfico devem ser associadas a fatores $u(p, s)$ e $\bar{v}(p, s)$, respectivamente. As linhas correspondentes a elétrons e pósitrons saindo de um gráfico devem ser associadas a fatores $\bar{u}(p, s)$ e $v(p, s)$, respectivamente. A direção de linhas de pósitrons deve ser tomada como oposta à direção de linhas de elétrons, de forma que pósitrons chegando em vértices têm direção de momentos saindo deste.

2.4 Processos físicos básicos e divergências

Após estabelecermos as regras de Feynman estamos aptos a estudar os processos físicos pertinentes a EDQ no contexto do cálculo perturbativo. Inicialmente, temos de especificar a ordem da expansão perturbativa a ser utilizada, e então a tarefa se resume na construção de todos os diagramas possíveis capazes de conectar as linhas externas, utilizando para isso os propagadores e os vértices, para cada processo físico pertinente à teoria. A seguir, iremos abordar os três processos físicos fundamentais da EDQ. São eles: as propagações do elétron e do fóton na presença da interação e a interação elétron-fóton.

2.4.1 Propagação do elétron na presença de interação

A propagação do elétron na presença de interação é um dos processos físicos fundamentais da EDQ. Este está relacionado á denominada auto-energia do elétron. Tal processo é caracterizado por duas linhas fermiônicas externas. Na série perturbativa, o primeiro termo da expansão corresponde à propagação livre do elétron e o segundo termo recebe a contribuição do diagrama de auto-energia do elétron por excitação de um fóton. Outras contribuições estarão presentes em correções de ordem crescente na constante de acoplamento mas aqui nos restringiremos a correções até um laço.

A expansão perturbativa correspondente a auto-energia do elétron está representada diagramaticamente na figura a seguir.

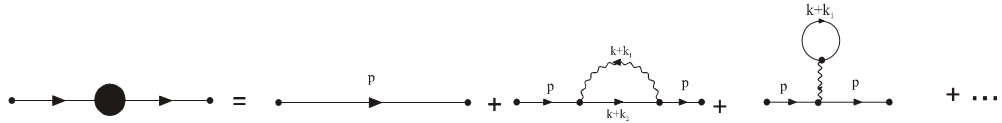


Figura 2.4: Representação diagramática para a expansão perturbativa correspondente a auto-energia do elétron.

Ao aplicarmos as regras de Feynman para o segundo diagrama, obtemos a função de Green $\Sigma^{1\gamma}(p)$, a qual representa a auto-energia do elétron pela excitação de um fóton. Podemos escrever a expressão correspondente como

$$\Sigma^{1\gamma}(p) = (-ie)^2 \Sigma(k_1, k_2, m), \quad (2.24)$$

onde

$$\Sigma(k_1, k_2, m) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \gamma_\nu \right] \frac{1}{(k + k_1)^2} \times \left[g^{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{(k + k_1)^\mu (k + k_1)^\nu}{(k + k_1)^2} \right]. \quad (2.25)$$

Para propósitos futuros é conveniente ainda introduzirmos as definições

$$\Sigma_1(k_1, k_2, m) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g^{\mu\nu} \left[\frac{\gamma_\mu [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma_\nu}{(k + k_2)^2 - m^2} \right] \frac{1}{(k + k_1)^2}, \quad (2.26)$$

e

$$\Sigma_2(k_1, k_2, m) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k} + \not{k}_1) [(\not{k} + \not{k}_2) + m] (\not{k} + \not{k}_1)}{[(k + k_1)^2]^2 [(k + k_2)^2 - m^2]}, \quad (2.27)$$

de forma que

$$\Sigma(k_1, k_2, m) = \Sigma_1(k_1, k_2, m) + (\xi - 1) \Sigma_2(k_1, k_2, m). \quad (2.28)$$

Os momentos arbitrários internos k_1 e k_2 estão relacionados ao momento externo carregado pelo elétron devido à conservação de energia e de momento por

$$k_2 - k_1 = p.$$

Uma simples contagem de potências do momento do laço na função de Green $\Sigma^{1\gamma}(p)$ revela que esta possui um grau superficial de divergência linear.

2.4.2 Propagação do fóton na presença da interação

Outro processo físico elementar pertinente à EDQ é aquele denominado propagação do fóton na presença da interação, ao qual está relacionado a auto-energia do fóton. Este é caracterizado por duas linhas bosônicas externas. Analogamente ao processo da propagação do elétron na presença de interação, podemos representar a expansão perturbativa correspondente diagramaticamente (Figura a seguir).



Figura 2.5: Representação diagramática correspondente a expansão perturbativa para a auto-energia do fóton.

A expressão correspondente pode ser escrita, com o auxílio das regras de Feynman, como

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (-) (-ie)^2 T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m), \quad (2.29)$$

que é denominada “tensor de polarização do vácuo”. Na expressão acima, $T_{\mu\nu}^{VV}$, à qual nos referiremos como função de Green fermiônica de dois pontos bi-vetorial, é dada por

$$T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}. \quad (2.30)$$

O momento externo carregado pelo fóton está relacionado aos momentos arbitrários k_1 e k_2 carregados pelas linhas fermiônicas internas por $k_1 - k_2 = p$, relação esta decorrente da conservação de energia e de momento nos vértices do gráfico de Feynman. Através da contagem das potências do momento do laço, percebemos que esta amplitude é (superficialmente) quadraticamente divergente.

2.4.3 Interação elétron-fóton

O processo definido por duas linhas fermiônicas e uma linha bosônica externas é denominado de interação elétron-fóton, e este caracteriza o vértice da interação elétron-fóton. A expansão perturbativa para este processo, em sua representação diagramática, contém (em mais baixa ordem perturbativa) um diagrama árvore e em ordem seguinte um diagrama contendo um laço associado à contribuição devido a excitação de um fóton, como pode ser observado na figura (2.6).

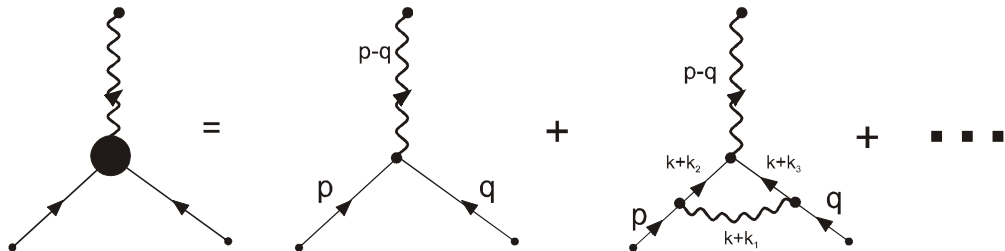


Figura 2.6: Representação diagramática correspondente a interação elétron-fóton em expansão perturbativa.

Novamente, fazendo uso das regras de Feynman obtemos, para o segundo dos diagramas, a expressão

$$V^\mu(p, q) = -e^3 \Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m), \quad (2.31)$$

onde $\Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m)$ representa a função de Green dada por

$$\Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \left[\gamma_\alpha \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \gamma^\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \gamma_\nu \right] \times \left[g^{\alpha\nu} + (\xi - 1) \frac{(k + k_1)^\alpha (k + k_1)^\nu}{(k + k_1)^2} \right] \frac{1}{(k + k_1)^2} \right\}. \quad (2.32)$$

Os momentos internos receberam rotulação arbitrária. Estes, entretanto, estão relacionados aos momentos externos devido á conservação de energia e de momento nos vértices. Estas relações são

$$\begin{cases} k_2 - k_1 = p, \\ k_3 - k_1 = q, \\ k_2 - k_3 = p - q. \end{cases} \quad (2.33)$$

A contagem de potências para a função $\Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m)$ revela uma divergência de grau logarítmico.

2.5 Cálculos perturbativos e parâmetros físicos

Antes de prosseguir é interessante discutirmos um importante aspecto do cálculo perturbativo em TQC, que é a parametrização da teoria. Para tal consideremos inicialmente o propagador livre do elétron, dado pela equação (2.22).

Na expressão do propagador estão contidas informações importantes para o estabelecimento do poder de predição da teoria. São informações sobre os parâmetros de entrada da teoria, ou seja, sobre os parâmetros necessários para que a teoria tenha poder de predição. O número destes parâmetros para uma teoria qualquer é, em princípio, igual ao número de termos na densidade de Lagrangeano. Consequentemente, em cada ordem da expansão perturbativa, estes devem ser identificados. Para o propagador do elétron tais parâmetros são a massa e a constante de normalização do campo. A massa da partícula é representada pelo polo do propagador, e esta pode ser definida como

$$- [S_f(p)]^{-1} \Big|_{\not{p}=0} \equiv m, \quad (2.34)$$

Por outro lado, o resíduo está associado á normalização do campo. Ou seja

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \not{p}} [S_f(p)]^{-1} \Big|_{\not{p}=0} &= \frac{\partial}{\partial \not{p}} (\not{p} - m + i\varepsilon) \Big|_{\not{p}=0} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ao considerarmos as correções de auto-energia, representadas a seguir diagramaticamente, teremos o propagador do elétron corrigido na ordem escolhida.



Figura 4.7: Representação diagramática para a série perturbativa correspondente a auto-energia do elétron.

Os círculos hachurados representam as contribuições para a auto-energia em uma certa ordem perturbativa. Denominando de $i\Sigma(p)$ estas contribuições, podemos escrever o propagador corrigido como

$$\begin{aligned}
iS_R(p) &= \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} + \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} [-i\Sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \\
&\quad + \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} [-i\Sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} [-i\Sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} + \dots \\
&= \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \left\{ 1 + [-i\Sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} + \right. \\
&\quad \left. [-i\Sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} [-i\Sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} + \dots \right\} \\
&= iS_f(p) \left\{ 1 + \Sigma(p) S_f(p) + [\Sigma(p) S_f(p)]^2 + \dots \right\} \\
&= \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(p) + i\varepsilon}. \tag{2.36}
\end{aligned}$$

O polo do propagador corrigido pela auto-energia não está mais necessariamente em $\not{p} = m$, mas é agora determinado pela condição: $\not{p} - m + \Sigma(p) = 0$. Para que m seja identificado ainda como sendo a massa a função $\Sigma(p)$ deveria ter as seguintes propriedades

$$\Sigma(\not{p})|_{\not{p}=0} = 0, \tag{2.37}$$

e

$$\left. \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma(\not{p}) \right|_{\not{p}=0} = 0. \tag{2.38}$$

No entanto, estas propriedades requeridas para a função $\Sigma(p)$ em geral não são satisfeitas. Desta forma, ao especificar a ordem no cálculo perturbativo, é necessário reparametrizar a teoria, e conseqüentemente reidentificar os parâmetros físicos. Podemos ver isto expandindo $\Sigma(p)$ em uma série de Taylor em torno de $\not{p} = 0$. Feito isso, teremos

$$\Sigma(\not{p}) = \Sigma(0) + \not{p}\Sigma'(0) + \tilde{\Sigma}(\not{p}), \tag{2.39}$$

onde

$$\tilde{\Sigma}(\not{p}) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Sigma^{(k)}(0) \not{p}^k}{k!}. \tag{2.40}$$

Assim, teremos para o polo

$$- [S_R(p)]^{-1} \Big|_{\not{p}=0} = m + \Sigma(0), \tag{2.41}$$

e para o resíduo

$$\left. \frac{\partial}{\partial \not{p}} [S_R(p)]^{-1} \right|_{\not{p}=0} = [1 - \Sigma'(0)]. \tag{2.42}$$

O propagador pode ainda ser reorganizado da forma

$$\begin{aligned}
iS_R(p) &= \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(0) - \not{p}\Sigma'(0) - \widetilde{\Sigma}(\not{p}) + i\varepsilon} \\
&= \frac{i}{[1 - \Sigma'(0)] \left(\not{p} - \frac{(m + \Sigma(0))}{(1 - \Sigma'(0))} - \frac{\widetilde{\Sigma}(\not{p})}{(1 - \Sigma'(0))} + i\varepsilon \right)} \\
&= \frac{iZ_\psi}{\not{p} - Z_\psi(m + \Sigma(0)) - Z_\psi\widetilde{\Sigma}(\not{p}) + i\varepsilon}, \tag{2.43}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$Z_\psi \equiv [1 - \Sigma'(0)]^{-1}, \tag{2.44}$$

a qual é a normalização do campo na ordem em que $\Sigma(p)$ é especificada. Identificamos a massa física M como sendo

$$M = \frac{m + \Sigma(0)}{(1 - \Sigma'(0))} \tag{2.45}$$

$$= Z_\psi [m + \Sigma(0)]. \tag{2.46}$$

O propagador corrigido com as redefinições apropriadas, fica então escrito como

$$iS_R(p) = \frac{iZ_\psi}{\not{p} - M - Z_\psi\widetilde{\Sigma}(\not{p}) + i\varepsilon}. \tag{2.47}$$

Esta breve discussão serve para mostrar alguns aspectos característicos do cálculo perturbativo. Em particular, a necessidade de reparametrização da teoria em cada ordem no parâmetro perturbativo. A dificuldade adicional, típica de TQC, vem do fato de as contribuições para a reparametrização dos parâmetros físicos serem quantidades divergentes. Nos capítulos posteriores consideraremos estes aspectos em detalhes para a EDQ ao nível de um laço de aproximação.

Capítulo 3

Funções de Green e identidades de Ward

3.1 Introdução

No capítulo anterior, consideramos alguns processos físicos pertinentes à EDQ, no contexto do cálculo perturbativo, e ressaltamos o fato de as funções de Green, funções a partir das quais as amplitudes físicas são escritas, apresentarem divergências, o que se observou através de uma simples contagem de potências do momento do laço. Porém, o que se espera de uma boa teoria é que esta represente razoavelmente o mundo físico ainda que dentro de seus limites de validade. Desta forma, devido ao fato de as quantidades físicas (os observáveis) serem quantidades mensuráveis e, portanto, finitas, a fim de que os resultados obtidos possam representar tais quantidades torna-se necessário interpretá-las adequadamente. Após tal interpretação esperamos que as amplitudes associadas aos processos físicos resultem em quantidades finitas. Estas, eventualmente, poderão ser medidas experimentalmente para então serem comparadas com as previsões da teoria.

Em busca de uma tal interpretação, inicialmente desenvolveremos as funções de Green associadas as amplitudes físicas com auxílio da álgebra das matrizes de Dirac, de modo a deixá-las escritas como combinações de integrais de Feynman. Estas por sua vez serão tratadas separadamente tomando-se todas as precauções possíveis no tratamento daquelas divergentes a fim de que a almejada interpretação consistente destas quantidades possa ser construída. Como parte desta busca identificaremos algumas relações entre as funções de Green (divergentes) válidas para as quantidades não integradas, de forma que possamos verificá-las após o tratamento das integrais. Estas relações nos permitem relacionar funções de diferentes números de pontos e com diferentes graus de divergências e serão de grande utilidade para nos guiar na busca pela tão desejada consistência. Por fim, consideraremos ainda as relações de simetria, as quais resultam em imposições sobre as amplitudes físicas associadas à manutenção da invariância de calibre. Esta simetria, implementada na construção da EDQ, implica na existência de uma corrente vetorial conservada. Isto por sua vez estabelece vínculos definitivos sobre as amplitudes do cálculo perturbativo da EDQ, as quais carregam índices de Lorentz. A imposição de manutenção das simetrias nas amplitudes perturbativas, a despeito da existência de divergências, fornece, como veremos no que se segue, importantes guias para a construção de uma estratégia consistente para as manipulações e cálculos das amplitudes divergentes do cálculo perturbativo em geral e em particular na EDQ.

3.2 Desenvolvimento das funções de Green

No contexto do cálculo perturbativo em teoria quântica de campos os processos físicos podem ser escritos como uma soma infinita de possíveis contribuições. Associada a cada contribuição existe uma hierarquia de importância determinada pela ordem desta contribuição no parâmetro perturbativo. No caso das interações eletromagnéticas, devido ao fato de o parâmetro perturbativo ser pequeno, a aproximação ao nível de um laço na expansão perturbativa é suficiente para a descrição razoavelmente precisa de fenômenos que estejam no domínio da teoria. Assim, o tratamento da EDQ neste nível de aproximação serve para dois propósitos distintos: para enfatizar os aspectos envolvidos na interpretação das amplitudes perturbativas (a renormalização) e também para a descrição dos processos físicos de interesse com razoável precisão. Tendo isto em mente vamos considerar, em detalhes a partir de agora, o cálculo explícito de tais quantidades.

Nas próximas subseções, desenvolveremos as funções de Green associadas aos processos físicos com o uso da álgebra das matrizes de Dirac (apêndice A), de forma a escrevê-las como combinações de integrais de Feynman.

3.2.1 Função de um ponto vetorial

Consideramos inicialmente a função de Green de um ponto vetorial, dada por:

$$T_\mu^V = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \right\}. \quad (3.1)$$

Utilizando a identidade

$$\frac{1}{(\not{k} + \not{k}_j) - m} \frac{(\not{k} + \not{k}_j) + m}{(\not{k} + \not{k}_j) + m} = \frac{(\not{k} + \not{k}_j) + m}{(k + k_j)^2 - m^2}, \quad (3.2)$$

tiramos o caráter matricial do denominador do integrando de T_μ^V de modo que possamos reescrevê-la como:

$$T_\mu^V = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \{ \gamma_\mu [(\not{k} + \not{k}_1) + m] \}}{(k + k_1)^2 - m^2}. \quad (3.3)$$

Através do uso da álgebra das matrizes de Dirac, podemos efetuar a operação de traço na equação (3.3) de modo a obter:

$$T_\mu^V = 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k + k_1)^2 - m^2} + 4k_{1\mu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k + k_1)^2 - m^2}. \quad (3.4)$$

Nesta etapa, se mostra conveniente, fazermos algumas definições com o único objetivo de compactar a notação para as integrais de Feynman, são elas:

$$P_i \equiv [(k + k_i)^2], \quad (3.5)$$

e

$$E_{ij\dots l} \equiv [(k + k_i)^2 - m^2] [(k + k_j)^2 - m^2] \dots [(k + k_l)^2 - m^2], \quad (3.6)$$

estas serão utilizadas daqui em diante.

Assim, T_μ^V pode ser escrita como

$$T_\mu^V = 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{E_1} + 4k_{1\mu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_1}. \quad (3.7)$$

3.2.2 Auto-energia do elétron por excitação de um fóton

No processo físico da auto-energia do elétron, definimos, na equação (2.26), a seguinte quantidade

$$\Sigma_1(k_1, k_2, m) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{\gamma^\mu [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma_\mu}{(k + k_2)^2 - m^2} \right] \frac{1}{(k + k_1)^2}, \quad (3.8)$$

a qual podemos reescrever de modo mais conveniente com o uso dos seguintes resultados:

$$\gamma^\mu [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma_\mu = -2(\not{k} + \not{k}_2) + 4m, \quad (3.9)$$

e

$$\begin{aligned} (\not{k} + \not{k}_1) [(\not{k} + \not{k}_2) + m] (\not{k} + \not{k}_1) &= \{ (k + k_1)^2 [m - (\not{k}_2 - \not{k}_1)] \\ &\quad + (\not{k} + \not{k}_1) [(k + k_2)^2 - m^2] \\ &\quad - (\not{k} + \not{k}_1) [(k_2 - k_1)^2 - m^2] \}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

De modo que,

$$\Sigma_1(k_1, k_2, m) = -2\gamma^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{P_1 E_2} - 2(\not{k}_2 - 2m) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{P_1 E_2}. \quad (3.11)$$

Por sua vez, a quantidade definida em (2.27) pode ser colocada na forma

$$\begin{aligned} \Sigma_2(k_1, k_2, m) &= [m - \not{p}] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{P_1 E_2} \\ &\quad + \gamma_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{P_1^2} + \not{k}_1 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{P_1^2} \\ &\quad - [p^2 - m^2] \gamma_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{P_1^2 E_2} \\ &\quad - [p^2 - m^2] \not{k}_1 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{P_1^2 E_2}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

na qual utilizamos a relação entre os momentos arbitrários k_1 e k_2 e o momento externo p e as expressões (3.5) e (3.6). Com as expressões para Σ_1 e Σ_2 obtidas aqui, a auto-energia do elétron fica escrita em termos das integrais de Feynman que serão calculadas posteriormente.

3.2.3 Tensor de polarização do vácuo

No cálculo da auto-energia do fóton, o tensor de polarização do vácuo, definimos, na equação (2.30), a função de Green de dois pontos bi-vetorial $T_{\mu\nu}^{VV}$, dada por:

$$T_{\mu\nu}^{VV} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}, \quad (3.13)$$

ou, após aplicarmos a identidade (3.2):

$$T_{\mu\nu}^{VV} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{Tr \{ \gamma_\mu [(\not{k} + \not{k}_1) + m] \gamma_\nu [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \}}{[(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]}, \quad (3.14)$$

de modo que ao efetuarmos as operações de traço em $T_{\mu\nu}^{VV}$ ela se torna:

$$T_{\mu\nu}^{VV} = 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\mu]}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} - 4g_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[(k+k_1) \cdot (k+k_2) - m^2]}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \quad (3.15)$$

ou, de uma forma mais compacta:

$$T_{\mu\nu}^{VV} = T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} T^{PP}, \quad (3.16)$$

em que o tensor $T_{\mu\nu}$ é definido por:

$$T_{\mu\nu} \equiv 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\mu]}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}, \quad (3.17)$$

e T^{PP} é a função de Green de dois pontos bi-pseudo-escalar, dada por:

$$T^{PP} = -4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[(k+k_1) \cdot (k+k_2) - m^2]}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}, \quad (3.18)$$

Desenvolvendo adicionalmente o termo $T_{\mu\nu}$, obtemos

$$\begin{aligned} & T_{\mu\nu} \\ = & 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \\ & + 4(k_1+k_2)_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \\ & + 4(k_1+k_2)_\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \\ & + 4(k_{1\mu}k_{2\nu} + k_{1\nu}k_{2\mu}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para reescrever T^{PP} , primeiro notamos que

$$\begin{aligned} & [(k+k_i) \cdot (k+k_j) - m^2] \\ = & \frac{1}{2} [(k+k_i)^2 - m^2] + \frac{1}{2} [(k+k_j)^2 - m^2] - \frac{1}{2} (k_i - k_j)^2, \end{aligned} \quad (3.20)$$

e então

$$\begin{aligned} & T^{PP} \\ = & -2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_2)^2 - m^2]} - 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2]} \\ & + 2(k_1 - k_2)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

e de forma compacta

$$\begin{aligned}
& T_{\mu\nu} \\
&= 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{E_{12}} \\
&\quad + 4(k_1 + k_2)_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{E_{12}} \\
&\quad + 4(k_1 + k_2)_\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{E_{12}} \\
&\quad + 4(k_{1\mu}k_{2\nu} + k_{1\nu}k_{2\mu}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{12}}, \tag{3.22}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& T^{PP} \\
&= -2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_2} - 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_1} \\
&\quad + 2(k_1 - k_2)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{12}}. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Com isso, obtivemos a forma desejada para esta amplitude.

3.2.4 Interação elétron-fóton

Para o processo físico da interação elétron-fóton definimos as seguintes quantidades:

$$\begin{aligned}
& \Lambda_1^\mu(k_1, k_2, k_3, m) \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\gamma_\alpha \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \gamma^\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \gamma^\alpha \right] \frac{1}{(k + k_1)^2} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{\gamma_\alpha [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu [(\not{k} + \not{k}_3) + m] \gamma^\alpha}{[(k + k_2)^2 - m^2] [(k + k_3)^2 - m^2]} \right] \frac{1}{(k + k_1)^2} \tag{3.24}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \Lambda_2^\mu(k_1, k_2, k_3, m) \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[(k + k_1)^\alpha \gamma_\alpha \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \gamma^\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} (k + k_1)^\nu \gamma_\nu \right] \frac{1}{[(k + k_1)^2]^2} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{(\not{k} + \not{k}_1) [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu [(\not{k} + \not{k}_3) + m] (\not{k} + \not{k}_1)}{[(k + k_2)^2 - m^2] [(k + k_3)^2 - m^2]} \right] \frac{1}{[(k + k_1)^2]^2}, \tag{3.25}
\end{aligned}$$

as quais podemos colocar numa forma mais conveniente para nossos propósitos futuros. Para tal utilizamos alguns resultados obtidos com o uso da álgebra das matrizes de Dirac. Como tal

$$\begin{aligned}
& \gamma_\alpha [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu [(\not{k} + \not{k}_3) + m] \gamma^\alpha \\
&= -4\gamma^\alpha (k^\mu k_\alpha) + 2(k + k_1)^2 \gamma^\mu + (-4k_1^\alpha \gamma^\mu - 2\gamma^\alpha \gamma^\mu \not{k}_3 - 2\gamma^\alpha \gamma^\mu \not{k}_2 + 8mg^{\mu\alpha}) k_\alpha \\
&\quad - 2k_1^2 \gamma^\mu - 2\not{k}_2 \gamma^\mu \not{k}_3 + 4m(k_2 + k_3)^\mu - 2m^2 \gamma^\mu, \tag{3.26}
\end{aligned}$$

o que nos permite escrever

$$\begin{aligned}
& \Lambda_1^\mu(k_1, k_2, k_3, m) \\
&= (-2k_1^2 \gamma^\mu - 2\not{k}_2 \gamma^\mu \not{k}_3 + 4m(k_2 + k_3)^\mu - 2m^2 \gamma^\mu) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{23} P_1} \\
&+ (-4k_1^\alpha \gamma^\mu - 2\gamma^\alpha \gamma^\mu \not{k}_3 - 2\gamma^\alpha \gamma^\mu \not{k}_2 + 8mg^{\mu\alpha}) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{E_{23} P_1} \\
&- 4\gamma^\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k^\mu k_\alpha)}{E_{23} P_1} + 2\gamma^\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{23}}. \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Por sua vez, para o numerador do integrando de $\Lambda_2^\mu(k_1, k_2, k_3, m)$, podemos utilizar o resultado

$$\begin{aligned}
& (\not{k} + \not{k}_1) [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu [(\not{k} + \not{k}_3) + m] (\not{k} + \not{k}_1) \\
&= (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k} + \not{k}_2) \gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_3) (\not{k} + \not{k}_1) \\
&+ m (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k} + \not{k}_2) \gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_1) \\
&+ m (\not{k} + \not{k}_1) \gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_3) (\not{k} + \not{k}_1) + m^2 (\not{k} + \not{k}_1) \gamma^\mu (\not{k} + \not{k}_1). \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Reescrevendo o primeiro termo da equação anterior obtemos

$$\begin{aligned}
& (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k} + \not{k}_2) \gamma_\mu (\not{k} + \not{k}_3) (\not{k} + \not{k}_1) = \\
&- (k + k_1)^4 \gamma_\mu \\
&- [(k + k_1)^2] \gamma_\mu (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
&- (k + k_1)^2 [(k + k_2)^2 - m^2] \gamma_\mu \\
&- [(k + k_2)^2 - m^2] \gamma_\mu (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
&+ (k + k_1)^2 [(k_1 - k_2)^2 - m^2] \gamma_\mu \\
&+ [(k_1 - k_2)^2 - m^2] \gamma_\mu (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
&+ (k + k_1)^4 \gamma_\mu \\
&- 2(k + k_1)^2 (k + k_1)_\mu (\not{k} + \not{k}_1) \\
&- (k + k_1)^2 (\not{k}_2 - \not{k}_1) \gamma_\mu (\not{k} + \not{k}_1) \\
&- (k + k_1)^2 (\not{k} + \not{k}_1) \gamma_\mu (\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
&- (k + k_1)^2 (\not{k}_2 - \not{k}_1) \gamma_\mu (\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
&+ 2(k + k_1)_\mu (k + k_1)^2 (\not{k} + \not{k}_2) \\
&+ 2(k + k_1)_\mu (k + k_1)^2 (\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
&+ 2(k + k_1)_\mu (\not{k}_2 - \not{k}_1) (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
&+ (k + k_1)^4 \gamma_\mu \\
&+ (k + k_1)^2 (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k}_2 - \not{k}_1) \gamma_\mu \\
&+ (k + k_1)^2 [(k + k_3)^2 - m^2] \gamma_\mu \\
&+ [(k + k_3)^2 - m^2] (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k}_2 - \not{k}_1) \gamma_\mu \\
&- (k + k_1)^2 [(k_1 - k_3)^2 - m^2] \gamma_\mu \\
&- [(k_1 - k_3)^2 - m^2] (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k}_2 - \not{k}_1) \gamma_\mu. \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Para o segundo termo da referida equação teremos

$$\begin{aligned}
(\not{k} + \not{k}_1)\gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_3)(\not{k} + \not{k}_1) &= (k + k_1)^2 \gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_3) \\
&\quad - 2(k + k_1)_\mu (k + k_1)^2 \\
&\quad - 2(k + k_1)_\mu (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
&\quad + [(k + k_1)^2] (\not{k} + \not{k}_1)\gamma_\mu \\
&\quad + [(k + k_3)^2 - m^2] (\not{k} + \not{k}_1)\gamma_\mu \\
&\quad - [(k_1 - k_3)^2 - m^2] (\not{k} + \not{k}_1)\gamma_\mu.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Já para o terceiro termo temos que

$$\begin{aligned}
(\not{k} + \not{k}_1)(\not{k} + \not{k}_2)\gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_1) &= (k + k_1)^2 \gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_1) \\
&\quad + [(k + k_2)^2 - m^2] \gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_1) \\
&\quad - [(k_1 - k_2)^2 - m^2] \gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_1) \\
&\quad + (k + k_1)^2 (\not{k} + \not{k}_2)\gamma_\mu \\
&\quad - 2(k + k_1)_\mu (k + k_1)^2 \\
&\quad - 2(k + k_1)_\mu (\not{k}_2 - \not{k}_1) (\not{k} + \not{k}_1),
\end{aligned} \tag{3.31}$$

e, finalmente, para o quarto e último termo, escrevemos

$$(\not{k} + \not{k}_1)\gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_1) = -(k + k_1)^2 \gamma_\mu + 2(k + k_1)_\mu (\not{k} + \not{k}_1). \tag{3.32}$$

Substituindo então as expressões (3.29), (3.30), (3.31) e (3.32) em (3.25) e considerando a relação entre os momentos arbitrários k_1 , k_2 e k_3 e os momentos externos p e q definida em (4.35), podemos reescrever Λ_2^μ como

$$\begin{aligned}
\Lambda_2^\mu(k_1, k_2, k_3, m) &= \gamma^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[P_1]^2} \\
&\quad - [\gamma^\mu \not{k}_1 (\not{p} - m) + (p^2 - m^2) \gamma^\mu] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[P_1]^2} \frac{1}{E_2} \\
&\quad - [(q - m) \not{k}_1 \gamma^\mu + (q^2 - m^2) \gamma^\mu] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[P_1]^2} \frac{1}{E_3} \\
&\quad - \gamma^\mu \gamma^\alpha [\not{p} - m] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{[P_1]^2} \frac{1}{E_2} \\
&\quad - [q - m] \gamma^\alpha \gamma^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{[P_1]^2} \frac{1}{E_3} \\
&\quad - (q - m) \gamma^\mu (\not{p} - m) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{P_1 E_{23}} \\
&\quad + [(p^2 - m^2) (q - m) \not{k}_1 \gamma^\mu \\
&\quad + (q^2 - m^2) \gamma^\mu \not{k}_1 (\not{p} - m) \\
&\quad + 2k_1^\mu (q - m) \not{k}_1 (\not{p} - m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (p^2 - m^2) (q^2 - m^2) \gamma^\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[P_1]^2 E_{23}} \\
& + [(q^2 - m^2) \gamma^\mu \gamma^\alpha (\not{p} - m) \\
& + 2k_1^\mu (q - m) \gamma^\alpha (\not{p} - m) \\
& + 2(q - m) \not{k}_1 (\not{p} - m) g^{\mu\alpha} \\
& + (p^2 - m^2) (q - m) \gamma^\alpha \gamma^\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{[P_1]^2 E_{23}} \\
& + 2(q - m) \gamma_\alpha (\not{p} - m) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\alpha}{[P_1]^2 E_{23}}, \tag{3.33}
\end{aligned}$$

o que conclui nossa tarefa aqui.

3.3 Relações entre as funções de Green

Antes de prosseguir e proceder o cálculo das integrais de Feynman identificadas nas amplitudes explicitadas nas subseções precedentes, é interessante considerarmos as relações existentes entre as quantidades consideradas. Como mencionado anteriormente, podemos relacionar funções de Green com diferentes números de pontos, e conseqüentemente, com diferentes graus de divergência. Tais relações entre estas funções podem ser identificadas ao nível do integrando, isto é, para as quantidades não integradas.

Como tal, consideramos inicialmente a expressão:

$$(k_1 - k_2)^\mu \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma^\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}. \tag{3.34}$$

Fazendo a contração com o momento externo teremos:

$$\left\{ \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} (\not{k}_1 - \not{k}_2) \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}. \tag{3.35}$$

A utilização da identidade

$$(\not{k}_i - \not{k}_j) = (\not{k} + \not{k}_i - m) - (\not{k} + \not{k}_j - m) \tag{3.36}$$

nos permite identificar que

$$\begin{aligned}
& (k_1 - k_2)^\mu \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma^\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\} \\
& = \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} - \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m}. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Agora, tomando o traço de Dirac em ambos os lados da expressão acima e integrando no momento k identificaremos a seguinte relação entre funções de Green:

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = T_\nu^V(k_2; m) - T_\nu^V(k_1; m). \tag{3.38}$$

Esta relação implica que após calcularmos explicitamente a função $T_{\mu\nu}^{VV}$ e fazermos a contração com o momento externo $(k_1 - k_2)^\mu$ deveremos obter a diferença entre as funções

de um ponto vetoriais $T_\nu^V(k_2; m)$ e $T_\nu^V(k_1; m)$ previamente calculadas. Esta relação serve como teste de consistência para a prescrição a ser utilizada para as manipulações e cálculos das quantidades indefinidas contidas em ambas as amplitudes presentes na identidade (capítulo posterior).

Analogamente, pode-se mostrar que:

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\mu\nu}^{VV} = T_\mu^V(k_2; m) - T_\mu^V(k_1; m).$$

Podemos obter ainda uma relação semelhante envolvendo a auto-energia do elétron e a função de vértice da interação elétron-fóton. Para este propósito, identificamos a seguinte expressão:

$$(k_3 - k_2)_\mu \left[\gamma^\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \gamma^\mu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma^\lambda \right], \quad (3.39)$$

e utilizando um processo análogo àquele usado anteriormente, obtemos:

$$\begin{aligned} & (k_3 - k_2)_\mu \left[\gamma^\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \gamma^\mu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma^\lambda \right] \\ &= \left[\gamma^\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma^\lambda - \gamma^\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \gamma^\lambda \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Nesta identidade, se multiplicarmos ambos os lados da equação pelo propagador fotônico, carregando momento $k + k_1$, e integrarmos em relação ao momentum k , ficamos com

$$\begin{aligned} & (k_3 - k_2)_\mu \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\gamma^\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \gamma^\mu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma^\lambda \right] \times \right. \\ & \left. \left[\frac{g_{\nu\lambda}}{(k + k_1)^2} + (\xi - 1) \frac{(k + k_1)_\lambda (k + k_1)_\nu}{[(k + k_1)^2]^2} \right] \right\} = \\ & - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\gamma^\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \gamma^\lambda \right] \left[\frac{g_{\nu\lambda}}{(k + k_1)^2} + (\xi - 1) \frac{(k + k_1)_\lambda (k + k_1)_\nu}{[(k + k_1)^2]^2} \right] \\ & + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\gamma^\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma^\lambda \right] \left[\frac{g_{\nu\lambda}}{(k + k_1)^2} + (\xi - 1) \frac{(k + k_1)_\lambda (k + k_1)_\nu}{[(k + k_1)^2]^2} \right] \end{aligned} \quad (3.41)$$

Podemos, nesta etapa, identificar na equação acima as integrais do lado esquerdo e do lado direito do sinal de igualdade como sendo, respectivamente, a função de Green associada ao vértice da interação elétron-fóton e a diferença entre as as funções de Green associadas a propagação do elétron na presença de interação, com diferentes momentos arbitrários k_2 e k_3 . Ou seja,

$$(k_3 - k_2)_\mu \Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = \Sigma(k_1, k_2, m) - \Sigma(k_1, k_3, m). \quad (3.42)$$

O que completa as relações entre funções de Green relevantes para as discussões que pretendemos neste trabalho. As relações entre as funções de Green tratadas aqui são obtidas através da manipulação algébrica de seus integrandos. Portanto, espera-se que, após adotarmos um método para a solução das integrais de Feynman, estas relações continuem sendo satisfeitas.

3.4 Identidades de Ward-Takahashi

De acordo com o teorema de Noether temos que, a cada simetria implementada na construção da densidade de Lagrangeano de uma teoria devemos ter associada uma corrente conservada. Na EDQ a invariância de calibre está associada a existência de uma corrente vetorial dada por

$$j^\mu = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x), \quad (3.43)$$

que é uma corrente conservada, ou seja,

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (3.44)$$

As implicações da invariância de calibre para as amplitudes perturbativas são propriedades bem definidas para estas quantidades, denominadas de relações de simetria ou identidades de Ward. Como tal, no caso da função de um ponto vetorial, devemos ter

$$k_1^\mu T_\mu^V = 0, \quad (3.45)$$

e para a função de dois pontos $T_{\mu\nu}^{VV}$

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = 0, \quad (3.46)$$

e também

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\mu\nu}^{VV} = 0. \quad (3.47)$$

Estas três condições acima poderão ser verificadas após todos os cálculos terem sido efetuados, podendo desempenhar um papel de teste de consistência para o procedimento que utilizaremos. Retornaremos a isto então após termos as amplitudes envolvidas em suas formas explícitas.

Capítulo 4

Integrais de Feynman Divergentes

4.1 Introdução

No capítulo precedente escrevemos as funções de Green associadas às amplitudes físicas em termos de integrais de Feynman, muitas das quais são quantidades divergentes. Feito isso, a etapa seguinte deve ser o tratamento adequado destas integrais.

No contexto da EDQ em solução perturbativa, nos deparamos com dois tipos de divergências: a ultravioleta e a infravermelha. A divergência ultravioleta é aquela que provém da região de altos valores de momento, e é comum a maioria das TQC's. Já a divergência infravermelha aparece devido a presença de um campo não massivo na teoria. No caso da EDQ este campo é o do fóton. Este tipo de divergência se deve ao comportamento das amplitudes em pequenos valores dos momentos. As integrais que possuem divergência infravermelha podem conter simultaneamente divergência ultravioleta. Isto faz com que o tratamento de tais integrais seja feito com cuidados adicionais. Neste capítulo faremos tratamento das integrais de Feynman identificadas no capítulo anterior, Faremos isto com a utilização de uma estratégia alternativa aos métodos de regularização tradicionais.

4.2 Divergências Ultravioletas: uma estratégia alternativa.

Como mencionando anteriormente, ao consideramos soluções perturbativas de TQC's é comum nos depararmos com amplitudes divergentes resultantes das contribuições de diagramas contendo laços. Devido a isso, torna-se necessário especificar algum tipo de prescrição para lidar com as indefinições matemáticas associadas. O modo tradicional de tratar este problema é a adoção de um método de regularização ou filosofia equivalente. Esses métodos têm como objetivo retirar uma parte finita das integrais de Feynman efetuando algum tipo de mudança no integrando. Posteriormente, é tomado algum tipo de limite a fim de remover as modificações iniciais. Existem vários métodos de regularização propostos na literatura. Muitos deles podem ser resumidos no seguinte esquema:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) \rightarrow \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) \left\{ \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G_{\Lambda_i}(k, \Lambda_i^2) \right\} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k). \quad (4.1)$$

onde $G_{\Lambda_i}(k, \Lambda_i^2)$ e Λ_i representam, respectivamente, a distribuição regularizadora e o conjunto de parâmetros desta. Além de garantir o caráter finito da integral modificada (evidentemente antes de o limite $\Lambda_i^2 \rightarrow \infty$ ser tomado), a distribuição regularizadora deve possuir duas propriedades bastante gerais. Ela deve ser par no momento de integração k de forma a preservar a invariância de Lorentz, bem como deve possuir um *limite de conexão* bem definido, i.e.,

$$\lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G_{\Lambda_i}(k^2, \Lambda_i^2) = 1. \quad (4.2)$$

Com a primeira das propriedades exigidas teremos a anulação de integrais ímpares no momento de integração, enquanto que a segunda garantirá, em particular, que os resultados das integrais finitas de uma amplitude não sofrerão qualquer modificação. É importante ressaltar que estas exigências são completamente gerais e estão de acordo com qualquer regularização razoável.

Ao invés de especificar alguma regularização, utilizaremos uma estratégia alternativa, conhecida comumente por *Regularização Implícita* [8], onde a distribuição regularizadora é assumida de um modo implícito e apenas propriedades bastante gerais são usadas em passos intermediários. O método consiste essencialmente em reescrever os propagadores das amplitudes perturbativas utilizando uma identidade algébrica de forma a separar os termos do integrando em partes que resultarão em integrais finitas e outras puramente divergentes, estas últimas por sua vez serão independentes dos momentos (arbitrários) internos. A identidade usada para este propósito pode ser escrita como

$$\frac{1}{(k + k_i)^2 - m_i^2} = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j (k_i^2 + 2k_i \cdot k)^j}{(k^2 - m_i^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^{n+1} (k_i^2 + 2k_i \cdot k)^{n+1}}{(k^2 - m_i^2)^{n+1} [(k + k_i)^2 - m_i^2]}, \quad (4.3)$$

onde k_i é (em princípio) uma rotulação arbitrária para os momentos carregados pelas linhas internas dos laços. Qualquer valor de $n \in \mathbb{N}$ satisfaz a identidade, porém, escolha-se o menor valor para o qual o último termo esteja em uma integral finita, de forma a evitar esforço desnecessário. Para as integrais finitas, as quais dependem dos momentos internos, podemos tomar o limite de conexão, o que significa remover a regularização. Para os termos divergentes, apenas eliminamos aqueles que são ímpares no momento de integração por assumir o caráter par da distribuição regularizadora e não são feitas mais modificações. Para amplitudes ao nível de um laço em uma teoria renormalizável podemos escrever os termos divergentes obtidos como combinação dos seguintes objetos:

$$\square_{\alpha\beta\mu\nu}(m^2) \equiv \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{24k_{\mu}k_{\nu}k_{\alpha}k_{\beta}}{(k^2 - m^2)^4} - 4g_{\alpha\beta} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} - 4g_{\alpha\nu} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\beta}k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^3} - 4g_{\alpha\mu} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\beta}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3}, \quad (4.4)$$

$$\Delta_{\mu\nu}(m^2) \equiv 4 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} - g_{\mu\nu} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}, \quad (4.5)$$

$$\nabla_{\mu\nu}(m^2) \equiv 2 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\nu}k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^2} - g_{\mu\nu} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)}, \quad (4.6)$$

$$I_{\log}(m^2) \equiv \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}, \quad (4.7)$$

$$I_{quad}(m^2) \equiv \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)}. \quad (4.8)$$

É importante enfatizar que com esta estratégia é possível mapear as expressões finais obtidas nos resultados correspondentes a outras técnicas, devido ao fato de que todos os passos são perfeitamente válidos dentro de prescrições de regularizações razoáveis, incluindo a técnica da *Regularização Dimensional* (RD) [21]. É necessário, para tal, apenas calcular as estruturas divergentes obtidas de acordo com o método específico com o qual desejamos estabelecer o mapeamento. Um outro ponto que merece ser mencionado é o fato de em momento algum efetuarmos o cálculo de integrais divergentes. As integrais de Feynman originárias das amplitudes são reescritas de tal modo que as partes divergentes são separadas das partes finitas e reorganizadas em termos dos objetos divergentes definidos previamente.

O método de Regularização Implícita (RI) que utilizaremos para o tratamento das integrais de Feynman divergentes tem sido aplicado com sucesso em diferentes problemas onde o papel das divergências típicas dos cálculos perturbativos é de essencial importância. Entre estes estudos podemos citar: violação das simetrias de Lorentz e CPT induzida por correções Radiativas [9]-[13], o poder de predição do modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) [14]-[19], anomalias em identidades de ward para funções de três pontos [20, 21, 23], ambiguidades e relações de simetria em amplitudes divergentes envolvendo densidades fermiônicas tensoriais [22], arbitrariedades, anomalia AV e geração de massa em D=1+1 [20, 24].

Vamos então proceder com a solução das integrais de Feynman identificadas nas amplitudes consideradas. Inicialmente, identificaremos o conjunto de integrais de Feynman puramente fermiônicas que aparecem nas amplitudes de um e dois pontos vetoriais, expressões (3.7) e (3.13), respectivamente.

a) Integrais de Feynman associadas a funções de um ponto:

$$(I_1; I_1^\mu) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k^\mu)}{E_1}, \quad (4.9)$$

b) Integrais de Feynman associadas a funções de dois pontos:

$$(I_2; I_2^\mu; I_2^{\mu\nu}) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k^\mu; k^\mu k^\nu)}{E_{12}}, \quad (4.10)$$

Agora procedemos o tratamento destas integrais com a utilização da prescrição que adotamos.

Integral I_1

Consideremos inicialmente a integral associada a função de um ponto vetorial com grau de divergência quadrático, definida em (4.9) como

$$I_1 = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_1}. \quad (4.11)$$

Para esta integral basta escolhermos $n = 2$ na expressão (4.3), de modo que a integral

se torna

$$\begin{aligned}
I_1 = & k_1^\alpha k_1^\beta \left[\int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\alpha\beta}}{(k^2 - m^2)^2} \right] \\
& + \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} + k_1^4 \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^3} \\
& - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)^3}{(k^2 - m^2)^3 [(k + k_1)^2 - m^2]}. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

As duas últimas integrais da equação acima são finitas e podem ser calculadas utilizando-se técnicas usuais (apêndice C). No entanto, as três primeiras integrais são divergentes e podem ser identificadas com os objetos divergentes definidos nas expressões (4.5) e (4.7), de modo que teremos

$$I_1 = I_{quad}(m^2) + k_1^\alpha k_1^\beta \Delta_{\alpha\beta}(m^2). \tag{4.13}$$

Integral I_1^μ

Consideremos agora a integral com o maior grau superficial de divergência, o grau cúbico. Esta foi definida em (4.9) como

$$I_1^\mu = \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{E_1}. \tag{4.14}$$

Tomando $n = 3$ na expressão (4.3), podemos reescrever o integrando de tal forma a obtermos

$$\begin{aligned}
I_1^\mu = & -2k_1^\nu \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \\
& + k_1^\nu k_1^\alpha k_1^\beta \left[4g_{\alpha\beta} \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k^\mu}{(k^2 - m^2)^3} - 8 \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\beta k_\nu k^\mu}{(k^2 - m^2)^4} \right] \\
& - \left[6k_1^4 k_1^\alpha \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k^\mu}{(k^2 - m^2)^4} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)^4 k^\mu}{(k^2 - m^2)^4 E_1} \right]. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Para obtermos a forma acima para I_1^μ , além de aplicarmos uma identidade algébrica para separar as integrais finitas daquelas puramente divergentes, desconsideramos as integrais ímpares no momento de integração devido ao caráter par da distribuição regularizadora. Além disso, tomamos o limite de conexão nas últimas duas integrais em (4.15), pois estas não possuem divergência para altos valores de k . Analogamente a I_1 , considerando os objetos divergentes definidos em (4.4)-(??), obtemos para I_1^μ

$$\begin{aligned}
I_1^\mu = & -k_1^\mu I_{quad}(m^2) \\
& - k_{1\nu} \nabla^{\mu\nu}(m^2) - \frac{1}{3} k_1^\alpha k_1^\beta k_1^\nu \square_{\alpha\beta\mu\nu}(m^2) \\
& - \frac{2}{3} k_1^2 k_{1\nu} \Delta^{\mu\nu}(m^2) - \frac{1}{3} k_1^\mu k_{1\beta} k_{1\nu} \Delta^{\beta\nu}(m^2) \\
& + k_1^2 k_{1\nu} \Delta^{\mu\nu}(m^2). \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Integral I_2

Passamos agora para as integrais com dois propagadores, iniciamos com a mais simples delas com um grau de divergência logaritmico, esta integral é definida como

$$I_2 = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{E_{12}}, \quad (4.17)$$

e novamente aplicando a identidade algébrica (4.3) com $n = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} I_2 = & \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)}{(k^2 - m^2)^2 [(k + k_2)^2 - m^2]} \\ & - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)}{(k^2 - m^2) [(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

A primeira das integrais acima pode ser identificada com o objeto divergente básico $I_{\log}(m^2)$. No entanto, as demais integrais podem ser resolvidas diretamente. Para estas obtemos

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)}{(k^2 - m^2)^2 E_2} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)}{(k^2 - m^2) E_{12}} = \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(p^2; m^2), \quad (4.19)$$

onde a função Z_0 é definida de modo geral por

$$Z_k(m_1^2; m_2^2; p^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz z^k \ln \left[\frac{p^2(1-z)z + (m_1^2 - m_2^2)z - m_1^2}{-\lambda^2} \right]. \quad (4.20)$$

Na expressão (4.19) fez-se a compactação de notação $Z_k(m^2, m^2, p^2; m^2) = Z_k(p^2; m^2)$ com o momento externo definido como $p = k_1 - k_2$. Portanto, I_2 pode ser escrita como

$$I_2 = I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(p^2; m^2). \quad (4.21)$$

Integral I_2^μ

A integral I_2^μ foi definida anteriormente, expressão (4.10), e é dada por

$$I_2^\mu = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{E_{12}}, \quad (4.22)$$

para esta integral utilizamos $n = 1$ na expressão (4.3), de modo a obter

$$\begin{aligned} I_2^\mu = & \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{(k^2 - m^2)^2} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu (k_1^2 + 2k_1 \cdot k)}{(k^2 - m^2)^3} \\ & - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu (k_2^2 + 2k_2 \cdot k)}{(k^2 - m^2)^3} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu (k_1^2 + 2k_1 \cdot k)^2}{(k^2 - m^2)^3 E_1} \\ & + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu (k_2^2 + 2k_2 \cdot k)^2}{(k^2 - m^2)^3 E_2} \\ & + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu (k_1^2 + 2k_1 \cdot k) (k_2^2 + 2k_2 \cdot k)}{(k^2 - m^2)^2 E_{12}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Para as integrais finitas acima, temos

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu (k_1^2 + 2k_1 \cdot k)^2}{(k^2 - m^2)^3 E_1} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu (k_2^2 + 2k_2 \cdot k)^2}{(k^2 - m^2)^3 E_2} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu (k_1^2 + 2k_1 \cdot k) (k_2^2 + 2k_2 \cdot k)}{(k^2 - m^2)^2 E_{12}} = \frac{i}{(4\pi)^2} P^\mu Z_1(p^2, m^2), \quad (4.24)
\end{aligned}$$

na qual $P \equiv k_1 + k_2$. Levando ainda em consideração os objetos divergentes definidos anteriormente, e utilizando a propriedade $Z_1(p^2; m^2) = \frac{1}{2} Z_0(p^2; m^2)$, podemos escrever

$$I_2^\mu = -\frac{1}{2} P_\nu \Delta^{\mu\nu}(m^2) - \frac{1}{2} P^\mu I_{\log}(m^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} P^\mu Z_0(p^2, m^2). \quad (4.25)$$

Integral $I_2^{\mu\nu}$

A última integral puramente fermiônica a ser considerada é a $I_2^{\mu\nu}$, esta é quadraticamente divergente e é dada por

$$I_2^{\mu\nu} = \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{E_{12}}. \quad (4.26)$$

Utilizando a mesma estratégia usada para as integrais de Feynman anteriores, temos que

$$\begin{aligned}
I_2^{\mu\nu} &= \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^2} - k_2^2 \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^3} \\
&+ 4(k_2 + k_1)_\alpha k_{2\beta} \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha k^\beta k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^4} + 4k_{1\alpha} k_{1\beta} \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha k^\beta k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^4} \\
&- k_1^2 \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^3} \\
&+ \left[(k_2^2)^2 + k_2^2 k_1^2 + (k_1^2)^2 \right] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^4} \\
&- \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu (k_2^2 + 2k_2 \cdot k)^3}{(k^2 - m^2)^4 [(k + k_2)^2 - m^2]} \\
&- \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu (k_2^2 + 2k_2 \cdot k)^2 (k_1^2 + 2k_1 \cdot k)}{(k^2 - m^2)^4 [(k + k_2)^2 - m^2]} \\
&- \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu (k_1^2 + 2k_1 \cdot k)^2 (k_2^2 + 2k_2 \cdot k)}{(k^2 - m^2)^4 [(k + k_2)^2 - m^2]} \\
&- \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu (k_1^2 + 2k_1 \cdot k)^3}{(k^2 - m^2)^3 [(k + k_2)^2 - m^2] [(k + k_1)^2 - m^2]}, \quad (4.27)
\end{aligned}$$

organizando então as integrais divergentes em termos dos objetos definidos em (4.4)-(4.8) e procedendo a integração dos termos finitos para ficamos com

$$\begin{aligned}
I_2^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \nabla^{\mu\nu} (m^2) + \frac{g^{\mu\nu}}{2} I_{quad} (m^2) + \frac{P^\nu P^\mu}{4} I_{\log} (m^2) \\
&\quad - \left(\frac{P^2 + p^2}{8} \right) \Delta^{\mu\nu} (m^2) + \frac{(p^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} p^2)}{12} I_{\log} (m^2) \\
&\quad + \frac{1}{24} (3P_\alpha P_\beta - P_\alpha p_\beta + p_\alpha P_\beta + p_\alpha p_\beta) \{ \square^{\alpha\beta\mu\nu} (m^2) + g^{\alpha\beta} \Delta^{\mu\nu} (m^2) \\
&\quad + g^{\alpha\nu} \Delta^{\beta\mu} (m^2) + g^{\alpha\mu} \Delta^{\beta\nu} (m^2) \} \\
&\quad + \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \left[Z_2(p^2, m^2) - \frac{1}{4} Z_0(p^2, m^2) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{P^\mu P^\nu}{4} Z_0(p^2, m^2) \right\}. \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Com esta integral finalizamos o cálculo das integrais de Feynman com divergências estritamente ultravioletas, as quais estão associadas aos laços puramente fermiônicos. Na próxima seção, trataremos as integrais que possuem divergência infravermelha simultaneamente à ultravioleta.

4.3 Divergências Infravermelhas

4.3.1 Estratégia para manipulações e cálculos envolvendo divergências infravermelhas

Na seção anterior tratamos as integrais de Feynman que continham apenas divergência ultravioleta, as quais estão associadas às funções de Green puramente fermiônicas como T_μ^V e $T_{\mu\nu}^{VV}$. Esta última representa, a menos de um fator multiplicativo, a amplitude da auto-energia do fóton. Porém, dos três processos físicos básicos da EDQ, dois deles envolvem integrais onde aparece também o propagador fotônico. Para este, temos que o polo ocorre a momento nulo, pois a massa do fóton é identicamente nula. Este fato tem uma implicação matemática que é o surgimento de divergências a baixos valores do momento de integração, estas são denominadas *divergências infravermelhas*.

A presença das integrais divergentes contendo o propagador do fóton nos força a introduzir certas modificações no procedimento adotado na seção anterior, para tratar as integrais de Feynman puramente fermiônicas. É importante ressaltarmos o fato de os objetos divergentes definidos em (4.4)-(??) serem funções da massa dos férmions. Portanto, ao considerarmos integrais de Feynman com propagadores de diferentes massas (para o férmion m e para o bóson μ), teremos objetos divergentes ora associados a massa do férmion, ora associados a massa do bóson, de modo que teríamos, após os cálculos, expressões diferentes para as quantidades divergentes nas amplitudes da EDQ. No entanto, uma das etapas que se seguem será a obter as relações explícitas entre funções de Green, as quais servem como um guia de consistência para os métodos de regularização aplicados às integrais de Feynman. Então, se mostra necessário obtermos relações entre os objetos básicos de diferentes massas, já que no contexto da RI não efetuamos de fato o cálculo das integrais puramente divergentes.

Baseados nesta idéia de relações entre os objetos divergentes, utilizamos a seguinte identidade:

$$\frac{1}{[(k+k_i)^2 - m_i^2]} = \frac{1}{(k^2 - \lambda_1^2)} - \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda_1^2 - m_i^2)}{(k^2 - \lambda_1^2) [(k+k_i)^2 - m_i^2]}. \quad (4.29)$$

Esta identidade é apenas uma generalização da expressão (4.3) para $n = 1$, trazendo um parâmetro arbitrário λ_1 . Podemos ainda, caso o segundo termo na equação acima produza uma integral de Feynman divergente, aplicar novamente a identidade de modo a obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{[(k+k_i)^2 - m^2]} &= \frac{1}{(k^2 - \lambda_1^2)} - \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda_1^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda_1^2)(k^2 - \lambda_2^2)} \\ &+ \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda_1^2 - m^2)(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda_2^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda_1^2)(k^2 - \lambda_2^2) [(k+k_i)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Tomando $k_i = 0$ e $m^2 = \lambda_2^2$ obtemos a seguinte relação

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda_2^2)} = \frac{1}{(k^2 - \lambda_1^2)} - \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{(k^2 - \lambda_1^2)^2} + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2}{(k^2 - \lambda_2^2)(k^2 - \lambda_1^2)^2}. \quad (4.31)$$

Esta identidade serve para relacionarmos objetos divergentes I_{quad} associados a diferentes massas, o que pode ser visto ao integrarmos esta expressão em ambos os lados com relação a k , ou seja

$$\begin{aligned} I_{quad}(\lambda_2^2) &= I_{quad}(\lambda_1^2) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) I_{\log}(\lambda_1^2) \\ &+ \frac{i}{(4\pi)^2} \left[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + \lambda_1^2 \ln \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.32)$$

Similarmente, podemos relacionar os objetos I_{\log} associados a diferentes massas através da identidade

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda_1^2)^2} = \frac{1}{(k^2 - \lambda_2^2)^2} - \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{(k^2 - \lambda_1^2)^2 (k^2 - \lambda_2^2)} - \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{(k^2 - \lambda_2^2)^2 (k^2 - \lambda_1^2)}, \quad (4.33)$$

a qual, após a integração, resulta em

$$I_{\log}(\lambda_1^2) = I_{\log}(\lambda_2^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\ln \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) \right]. \quad (4.34)$$

As relações entre os objetos divergentes (4.32) e (4.34) será de crucial importância no tratamento das integrais que contenham divergência infravermelha simultaneamente à ultravioleta. Pois, através delas poderemos separar as divergências ultravioleta e infravermelha das integrais e então tratá-las separadamente.

Antes de prosseguirmos com o tratamento das integrais divergentes, identificaremos o conjunto de integrais de Feynman que contém o propagador do fóton. Estas integrais surgem nas amplitudes da interação elétron-fóton e da auto-energia do elétron. Então, identificamos:

$$(J_2; J_2^\mu) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k^\mu)}{P_1 E_2}, \quad (4.35)$$

e

$$(J_3; J_3^\mu; J_3^{\mu\nu}) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k^\mu; k^\mu k^\nu)}{P_1 E_{23}}. \quad (4.36)$$

as quais possuem polos simples em $P_1 = 0$, e também

$$(L_2; L_2^\mu) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k^\mu)}{[P_1]^2}, \quad (4.37)$$

$$(L_3; L_3^\mu) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k^\mu)}{[P_1]^2 E_2}, \quad (4.38)$$

e

$$(L_4; L_4^\mu; L_4^{\mu\nu}) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k^\mu; k^\mu k^\nu)}{[P_1]^2 E_{23}}, \quad (4.39)$$

as quais possuem polos duplos em $P_1 = 0$.

Para o tratamento das integrais definidas em (4.36)-(4.39) adotaremos o seguinte procedimento:

a) Antes de efetuar as separações das partes finitas e divergentes (ultravioletas) introduziremos uma massa fictícia μ^2 onde aparecer o propagador do fóton.

b) Separaremos as partes divergentes ultravioletas em objetos básicos I_{\log} e I_{quad} utilizando como escala a massa do elétron.

c) Resolveremos então as integrais finitas obtidas e estudaremos o comportamento das mesmas no limite $\mu^2 \rightarrow 0$. A presença de termos divergentes neste limite implicará em divergências infravermelhas nas amplitudes correspondentes.

Feitas estas considerações, partimos agora para o tratamento das integrais.

Integral J_2

Iniciamos com o cálculo da integral J_2 , dada por

$$J_2 = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2][(k+k_2)^2 - m^2]}. \quad (4.40)$$

Prosseguimos levando em conta o procedimento citado anteriormente

$$J_2 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - \mu^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \right\}. \quad (4.41)$$

Com o intuito de compactar a notação, utilizamos a seguinte definição:

$$U_i = U(k_i, \mu^2) = [(k+k_i)^2 - \mu^2], \quad (4.42)$$

de forma que

$$P_i = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \{U_i\} = U(k_i, 0). \quad (4.43)$$

Com isso, temos que

$$J_2 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{U_1 E_2} \right\}. \quad (4.44)$$

Esta integral é logaritmicamente divergente no limite ultravioleta. Deste modo, devemos utilizar a identidade (4.29) tomando como escala a massa do elétron, para ficar com

$$\begin{aligned}
& J_2 \\
= & \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)}{(k^2 - m^2)^2} E_2 \right. \\
& \left. - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2)}{(k^2 - m^2)^2} E_2 U_1 \right\} \quad (4.45)
\end{aligned}$$

Na equação acima, a primeira integral é identificada com o objeto I_{\log} e as demais podem ser calculadas. Feito isso, obtemos

$$J_2 = I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} Z_0(\mu^2; m^2; p^2; m^2). \quad (4.46)$$

A função Z_0 não tem nenhum problema de divergência no limite de conexão infravermelha (consultar o apêndice D). Então,

$$J_2 = I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(0; m^2; p^2; m^2). \quad (4.47)$$

Integral J_2^μ

Esta integral é definida, explicitamente, por

$$J_2^\mu = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[(k + k_1)^2][(k + k_2)^2 - m^2]}. \quad (4.48)$$

E considerando o procedimento proposto anteriormente temos que

$$J_2^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[\int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{U_1 E_2} \right], \quad (4.49)$$

o que pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
J_2^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} & \left\{ -2(k_2 + k_1)_\nu \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^3} \right. \\
& + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)^2 k^\mu}{(k^2 - m^2)^3 E_2} \\
& + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2) k^\mu}{(k^2 - m^2)^3 E_2} \\
& \left. + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2)^2 k^\mu}{(k^2 - m^2)^2 E_2 U_1} \right\}, \quad (4.50)
\end{aligned}$$

e em sua forma final, J_2^μ fica

$$\begin{aligned}
J_2^\mu = & -\frac{(k_2 + k_1)_\nu}{2} [g^{\mu\nu} I_{\log}(m^2) + \Delta^{\mu\nu}(m^2)] \\
& - \frac{1}{2} \frac{i}{(4\pi)^2} P^\mu Z_0(p^2, 0, m^2; \lambda^2). \quad (4.51)
\end{aligned}$$

Integral J_3

Definimos J_3 por

$$J_3 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2][(k+k_2)^2-m^2](k+k_3)^2-m^2]}. \quad (4.52)$$

Seguindo o procedimento que adotamos, escrevemos

$$J_3 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{U_1 E_{23}} \right], \quad (4.53)$$

que após a integração fica

$$J_3 = \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \xi_{00}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2), \quad (4.54)$$

onde a função ξ pode ser definida em sua forma geral por

$$\xi_{nm}(q^2; p^2; m_1^2; m_2^2; m_3^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z^n y^m}{Q(z, y, p^2, q^2)},$$

onde

$$Q(z, y, q^2, p^2) = q^2 z(1-z) + p^2 y(1-y) + 2(p \cdot q)zy + (m_1^2 - m_3^2)z + (m_1^2 - m_2^2)y - m_1^2. \quad (4.55)$$

e assumimos ainda que $p = (k_1 - k_2)$ e $q = (k_1 - k_3)$.

Integral J_3^μ

Definimos J_3^μ por

$$J_3^\mu = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[(k+k_1)^2][(k+k_2)^2-m^2](k+k_3)^2-m^2]}, \quad (4.56)$$

a qual pode ser escrita como

$$J_3^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{U_1 E_{23}} \right], \quad (4.57)$$

de modo que após a integração resulta em

$$\begin{aligned} & J_3^\mu \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[q^\mu \xi_{10}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) + q^\mu \xi_{01}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) \right. \\ & \quad \left. - k_1^\mu \xi_{00}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Integral $J_3^{\mu\nu}$

Para a última das integrais associada a um polo simples em $P_1 = 0$, definida em (4.36), temos

$$J_3^{\mu\nu} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[(k+k_1)^2][(k+k_2)^2-m^2](k+k_3)^2-m^2]}, \quad (4.59)$$

ou, seguindo a nossa estratégia

$$J_3^{\mu\nu} = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{U_1 E_{23}} \right]. \quad (4.60)$$

Esta integral é logaritmicamente divergente no regime ultravioleta, e portanto temos de aplicar a identidade (4.29), de modo a obter

$$J_3^{\mu\nu} = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2-m^2)^3} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_3^2 + 2k_3 \cdot k) k^\mu k^\nu}{(k^2-m^2)^3} E_3 \right. \\ \left. - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k) k^\mu k^\nu}{(k^2-m^2)^2} E_{23} \right. \\ \left. - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2) k^\mu k^\nu}{(k^2-m^2) U_1 E_{23}} \right\}, \quad (4.61)$$

após a integração, ficamos com

$$(J_3)_{\mu\nu} = + \frac{g_{\mu\nu} I_{\log}(m^2)}{4} + \frac{\Delta_{\mu\nu}(m^2)}{4} \\ + \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\delta_{\mu\nu}}{2} \eta_{00}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) \right. \\ + k_{1\mu} k_{1\nu} \xi_{00}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) \\ - (k_{1\mu} p_\nu + k_{1\nu} p_\mu) \xi_{01}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) \\ - (k_{1\mu} q_\nu + k_{1\nu} q_\mu) \xi_{10}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) \\ + (p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) \xi_{11}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) \\ + p_\mu p_\nu \xi_{02}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) \\ \left. + q_\mu q_\nu \xi_{20}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) \right\}, \quad (4.62)$$

onde a função básica η é definida em sua forma geral como

$$\eta_{nm}(p^2; q^2; m_1^2; m_2^2; m_3^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy (z^n y^m) \ln \left[\frac{Q(z, y, p^2, q^2)}{-\lambda^2} \right], \quad (4.63)$$

onde a função $Q(z, y, p^2, q^2)$ é aquela definida na expressão (4.55).

Integral L_2

Passamos então para as integrais com polos duplos em $P_1 = 0$. Iniciando por L_2 , a qual é definida por

$$L_2 = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2]^2}, \quad (4.64)$$

escrevemos esta como

$$L_2 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[U_1]^2} \right\}. \quad (4.65)$$

Primeiramente, notemos que

$$\lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} I_1(k_1; \mu^2) = L_2, \quad (4.66)$$

e então, considerando a identidade (4.29) aplicada recursivamente em $I_1(k_1; \mu^2)$, até que a massa do fóton esteja associada a uma integral sem divergência ultravioleta, ou seja

$$\begin{aligned} I_1(k_1, \mu^2) &= \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \\ &\quad - \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + m^2 - \mu^2)}{(k^2 - m^2)^2} \\ &\quad + \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2)^2}{(k^2 - m^2)^3} \\ &\quad - \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2)^3}{(k^2 - m^2)^3 U_1}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Efetuada a integração, o seguinte resultado emerge

$$\begin{aligned} I_1(k_1; \mu^2) &= I_{quad}(m^2) - (m^2 - \mu^2) I_{\log}(m^2) + k_{1\alpha} k_{1\beta} \Delta^{\alpha\beta}(m^2) \\ &\quad - \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\mu^2 \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) + (m^2 - \mu^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.68)$$

O resultado acima e a relação entre I_1 e L_2 expressa em (4.66) implicam em

$$L_2 = I_{\log}(m^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[\ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right], \quad (4.69)$$

evidenciando aqui a presença de divergência infravermelha logarítmica.

Integral L_2^μ

Consideremos agora a integral

$$L_2^\mu = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[(k + k_1)^2]^2}. \quad (4.70)$$

Para esta, consideramos a seguinte relação

$$L_2^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} I_1^\mu(k_1, \mu), \quad (4.71)$$

na qual $I_1^\mu(k_1, \mu)$ é dada por

$$\begin{aligned}
I_1^\mu(k_1, \mu) &= - \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2k_1 \cdot k) k^\mu}{(k^2 - m^2)^2} \\
&+ 4(k_1^2 + m^2 - \mu^2) k_{1\nu} \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\nu k^\mu}{(k^2 - m^2)^3} \\
&- 8k_{1\alpha} k_{1\beta} k_{1\nu} \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha k^\beta k^\nu k^\mu}{(k^2 - m^2)^4} \\
&- 6(k_1^2 + m^2 - \mu^2)^2 k_{1\nu} \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\nu k^\mu}{(k^2 - m^2)^4} \\
&+ \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2)^4 k^\mu}{(k^2 - m^2)^4 U_1}.
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Em seguida procedendo a integração dos termos finitos teremos:

$$\begin{aligned}
I_1^\mu(k_1, \mu^2) &= -k_1^\mu \left\{ I_{quad}(m^2) + (\mu^2 - m^2) I_{\log}(m^2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{i}{(4\pi)^2} \left[(m^2 - \mu^2) + \mu^2 \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] \right\} \\
&- k_{1\nu} \nabla^{\mu\nu}(m^2) - \frac{2}{3} k_1^2 k_{1\nu} \Delta^{\mu\nu}(m^2) - \frac{1}{3} k_{1\alpha} k_{1\beta} k_{1\nu} \Delta^{\beta\nu}(m^2) \\
&+ k_{1\nu} (k_1^2 + m^2 - \mu^2) \Delta^{\mu\nu}(m^2) - \frac{1}{3} k_{1\alpha} k_{1\beta} k_{1\nu} \square^{\alpha\beta\mu\nu}(m^2).
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Por fim, efetuando a derivada em relação a μ^2 , obtemos

$$L_2^\mu = -k_1^\mu I_{\log}(m^2) - k_{1\nu} \Delta^{\mu\nu}(m^2) + k_1^\mu \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \tag{4.74}$$

Integral L_3

Passamos agora para as integrais definidas em (4.38). Começamos por

$$L_3 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2]^2 [(k + k_2)^2 - m^2]}. \tag{4.75}$$

Pela contagem das potências já podemos perceber que esta integral não possui divergência do tipo ultravioleta. Assim, seguindo o procedimento adotado para o tratamento das integrais, escrevemos

$$L_3 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[U_1]^2 E_2}, \tag{4.76}$$

ou ainda,

$$L_3 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} I_2(k_1, \mu; k_2, m). \tag{4.77}$$

A integral $I_2(k_1, \mu^2; k_2, m^2)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
I_2(k_1, \mu^2; k_2, m^2) &= \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)}{(k^2 - m^2)^2 E_2} \\
&- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)}{(k^2 - m^2) U_1 E_2}
\end{aligned} \tag{4.78}$$

A solução desta integral acima é bastante análoga àquela da I_2 explícita em (4.17), exceto pelo fato de naquele caso $\mu = m$. Para este caso, temos

$$I_2(k_1, \mu^2; k_2, m^2) = I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2), \quad (4.79)$$

de modo que,

$$L_3 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} I_2(k_1, \mu; k_2, m) \quad (4.80)$$

$$L_3 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2) \right], \quad (4.81)$$

e utilizando a seguinte relação entre as funções Z_k e Y_k

$$Y_k(\mu^2, m^2, q^2; \lambda^2) = \lambda^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} [Z_k(\mu^2, m^2, q^2; \lambda^2)], \quad (4.82)$$

ficamos com

$$L_3 = -\frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{1}{m^2} Y_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2). \quad (4.83)$$

Integral L_3^μ

Outra integral finita no limite ultravioleta definida em (4.38) é dada por

$$L_3^\mu = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[(k+k_1)^2]^2 [(k+k_2)^2 - m^2]}. \quad (4.84)$$

Escrevemos então,

$$L_3^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[U_1]^2 E_1}, \quad (4.85)$$

ou ainda,

$$L_3^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} I_2^\mu(k_1, \mu^2; k_2, m^2). \quad (4.86)$$

Com base na estratégia que adotamos, temos que

$$\begin{aligned} I_2^\mu(k_1, \mu; k_2, m) &= - \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2k_2 \cdot k) k^\mu}{(k^2 - m^2)^3} \\ &\quad - \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2k_1 \cdot k) k^\mu}{(k^2 - m^2)^3} \\ &\quad + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)^2 k^\mu}{(k^2 - m^2)^3 E_2} \\ &\quad + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k) (k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2) k^\mu}{(k^2 - m^2)^3 E_2} \\ &\quad + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2)^2 k^\mu}{(k^2 - m^2)^2 U_1 E_2}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Resolvendo as integrais finitas teremos

$$I_2^\mu(k_1, \mu; k_2, m) = -\frac{1}{2}P_\nu \Delta^{\mu\nu}(m^2) - \frac{1}{2}P^\mu I_{\log}(m^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} [p^\mu Z_1(p^2; \mu^2; m^2; m^2) + k_1^\mu Z_0(p^2; \mu^2; m^2; m^2)], \quad (4.88)$$

e finalmente, L_3^μ fica

$$L_3^\mu = \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[\frac{p^\mu}{m^2} Y_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2) + \frac{k_1^\mu}{m^2} Y_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2) \right] \quad (4.89)$$

Integral L_4

Consideramos por fim as integrais definidas em (4.39). Iniciamos então com L_4 , esta é dada por

$$L_4 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2]^2 [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]}, \quad (4.90)$$

a qual pode ser escrita como

$$L_4 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[U_1]^2 E_{23}}. \quad (4.91)$$

Pela contagem das potências esta integral revela um caráter finito no limite ultravioleta, e portanto pode ser diretamente parametrizada e então resolvida. Resultando em

$$L_4 = \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \sigma_{00}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2), \quad (4.92)$$

onde a função σ_{00} , em sua forma geral, é dada por

$$\begin{aligned} \sigma_{nm} &\equiv \frac{\partial \xi_{nm}(p^2; q^2; \mu^2; m^2; m^2)}{\partial \mu^2} \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z^n y^m (1-y-z)}{[Q(z, y, p^2, q^2)]^2}, \end{aligned} \quad (4.93)$$

com os momentos externos dados por $p = k_1 - k_2$ e $q = k_1 - k_3$.

Integral L_4^μ

A próxima integral a ser tratada é L_4^μ , dada explicitamente por

$$L_4^\mu = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[(k+k_1)^2]^2 [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]}. \quad (4.94)$$

Esta pode ser escrita de uma maneira mais compacta por

$$L_4^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[U_1]^2 E_{23}}. \quad (4.95)$$

Devido ao fato de L_4^μ também ser finita no limite ultravioleta, podemos integra-la diretamente através dos métodos usuais de integração, de modo a obter

$$L_4^\mu = \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ +q^\mu \sigma_{10}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) + p^\mu \sigma_{01}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) - k_1^\mu \sigma_{00}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) \right\}.$$

Integral $L_4^{\mu\nu}$

Por fim, consideramos a integral $L_4^{\mu\nu}$ definida em (4.39), e dada explicitamente por

$$L_4^{\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)} \frac{k^\mu k^\nu}{[(k+k_1)^2]^2 [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]}. \quad (4.96)$$

Esta pode ser escrita da forma

$$L_4^{\mu\nu} = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \int \frac{d^4k}{(2\pi)} \frac{k^\mu k^\nu}{[U_1]^2 E_{23}}. \quad (4.97)$$

Analogamente às integrais L_4 e L_4^μ , o fato de $L_4^{\mu\nu}$ não revelar um caráter de divergência ultravioleta nos possibilita resolvê-la diretamente. Efetuada então a integração, obtemos

$$\begin{aligned} L_4^{\mu\nu} = & \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{g^{\mu\nu}}{2} [\xi_{00}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) - \xi_{01}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2)] \right. \\ & - \xi_{10}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) \\ & + q^\mu q^\nu \sigma_{20}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) \\ & + p^\mu p^\nu \sigma_{02}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) \\ & + (p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu) \sigma_{11}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) \\ & - [k_1^\mu q^\nu + k_1^\nu q^\mu] \sigma_{10}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) \\ & + [k_1^\mu p^\nu + k_1^\nu p^\mu] \sigma_{01}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) \\ & \left. + k_1^\mu k_1^\nu \sigma_{00}(q^2; p^2; \mu^2; m^2; m^2) \right\}. \quad (4.98) \end{aligned}$$

Com isso terminamos os cálculos das integrais de Feynman necessárias para explicitarmos as amplitudes associadas aos três processos físicos os quais nos propomos a estudar em solução perturbativa ao nível um laço.

Com os resultados das integrais de Feynman em mãos, estamos aptos a obter as amplitudes divergentes da EDQ em suas formas explícitas. Este será, portanto, o assunto do próximo capítulo.

Capítulo 5

Forma explícita das funções de Green divergentes

5.1 A função de um ponto vetorial

Iniciamos pela função de Green de um ponto vetorial, equação (3.7) e escrita em termos das integrais de Feynman previamente definidas

$$T_\mu^V(k_1, m) = 4 \left[(I_1)_\mu + k_{1\mu} I_1 \right]. \quad (5.1)$$

Considerando o resultado de I_1 e $(I_1)_\mu$, obtemos

$$\begin{aligned} T_\mu^V(k_1, m) &= -4k_1^\nu \nabla_{\mu\nu}(m^2) - \frac{4}{3} k_1^\alpha k_1^\beta k_1^\nu \square_{\alpha\beta\mu\nu}(m^2) \\ &\quad + \frac{4}{3} k_1^2 k_1^\nu \Delta_{\mu\nu}(m^2) + \frac{8}{3} k_{1\mu} k_1^\beta k_1^\nu \Delta_{\beta\nu}(m^2). \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.2 A função de dois pontos bi-vetorial

Consideraremos agora a função de dois pontos vetorial-vetorial definida na equação (3.13). Levando em consideração as expressões (3.21) e (3.22), podemos escrever

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{VV} &= 2(I_2)_{\mu\nu} + 4(k_1 + k_2)_\mu (I_2)_\nu + 4(k_1 + k_2)_\nu (I_2)_\mu \\ &\quad + 4(k_{1\mu} k_{2\nu} + k_{1\nu} k_{2\mu}) I_2 - 2g_{\mu\nu} I_1(k_1) \\ &\quad - 2g_{\mu\nu} I_1(k_2) + 2(k_1 - k_2)^2 g_{\mu\nu} I_2, \end{aligned} \quad (5.3)$$

e após substituírmos os resultados das integrais de Feynman, obtemos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{VV} &= 4\nabla_{\mu\nu}(m^2) \\ &\quad - 2[p^2 + P^2] \Delta_{\mu\nu}(m^2) \\ &\quad + \frac{1}{3} [3P^\alpha P^\beta + p^\alpha p^\beta - P^\alpha p^\beta + p^\alpha P^\beta] [\square_{\alpha\beta\mu\nu}(m^2) + g_{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta}(m^2) \\ &\quad + g_{\mu\alpha} \Delta_{\nu\beta}(m^2) + g_{\mu\beta} \Delta_{\alpha\nu}(m^2)] \\ &\quad - \frac{g_{\mu\nu}}{2} [P^\alpha P^\beta + p^\alpha p^\beta - P^\alpha p^\beta - p^\alpha P^\beta] \Delta_{\alpha\beta}(m^2) \\ &\quad - 2P^\alpha [P_\mu \Delta_{\alpha\nu}(m^2) + P_\nu \Delta_{\mu\alpha}(m^2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4}{3} (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) I_{\log} (m^2) \\
& \frac{-8i}{(4\pi)^2} (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) \left[Z_2 (p^2; m^2) - \frac{Z_0 (p^2; m^2)}{2} \right], \tag{5.4}
\end{aligned}$$

onde $p = k_1 - k_2$ e $P = k_1 + k_2$.

Utilizando a redução da função $Z_2 (p^2; m^2)$ para a função $Z_0 (p^2; m^2)$, dada por

$$Z_2 (p^2; m^2) = \frac{1}{3} \frac{(p^2 - m^2)}{p^2} Z_0 (p^2; m^2) - \frac{1}{18},$$

e definindo

$$\begin{aligned}
A_{\mu\nu} = & 4\nabla_{\mu\nu} (m^2) \\
& -2 [p^2 + P^2] \Delta_{\mu\nu} (m^2) \\
& + \frac{1}{3} [3P^\alpha P^\beta + p^\alpha p^\beta - P^\alpha p^\beta + p^\alpha P^\beta] [\square_{\alpha\beta\mu\nu} (m^2) + g_{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta} (m^2) \\
& \quad + g_{\mu\alpha} \Delta_{\nu\beta} (m^2) + g_{\mu\beta} \Delta_{\alpha\nu} (m^2)] \\
& - \frac{g_{\mu\nu}}{2} [P^\alpha P^\beta + p^\alpha p^\beta - P^\alpha p^\beta - p^\alpha P^\beta] \Delta_{\alpha\beta} (m^2) \\
& - 2P^\alpha [P_\mu \Delta_{\alpha\nu} (m^2) + P_\nu \Delta_{\mu\alpha} (m^2)], \tag{5.5}
\end{aligned}$$

podemos escrever $T_{\mu\nu}^{VV}$ como

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{VV} = & + \frac{4}{3} \frac{i}{(4\pi)^2} (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) \left[\frac{(2m^2 + p^2)}{3p^2} Z_0 (p^2; m^2) + \frac{1}{3} \right] \\
& - \frac{4}{3} (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) I_{\log} (m^2) + A_{\mu\nu}. \tag{5.6}
\end{aligned}$$

5.3 Auto-energia do elétron por excitação de um fóton

Considerando a função de Green relacionada a auto-energia do elétron dada por (2.25) e lembrando das equações (3.11), (3.12) e (3.13), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Sigma (k_1, k_2, m) = & -2\gamma_\mu J_2^\mu - 2 (\not{k}_2 - 2m) J_2 \\
& + (\xi - 1) [(m - \not{p}) J_2 + \gamma_\mu L_2^\mu + \not{k}_1 L_2 \\
& - (p^2 - m^2) (\gamma_\mu L_3^\mu + \not{k}_1 L_3)]. \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Substituindo os resultados das integrais de Feynman na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 (k_1, k_2, m) = & (-\not{p} + 4m) I_{\log} (m^2) + P^\nu \gamma^\mu \Delta_{\mu\nu} (m^2) \\
& + \frac{i}{(4\pi)^2} \left[(\not{p} - 4m) \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} Z_0 (p^2; \mu^2; m^2; m^2) \right], \tag{5.8}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Sigma_2(k_1, k_2, m) &= (m - \not{p}) I_{\log}(m^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \left[(\not{p} - m) \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} Z_0(p^2; \mu^2; m^2; m^2) \right] \\
&\quad - \gamma^\mu \left(\frac{P^\nu}{2} + \frac{p^\nu}{2} \right) \Delta_{\mu\nu}(m^2) \\
&\quad - \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\not{p}(p^2 - m^2) \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{Y_1(p^2; \mu^2; m^2; m^2)}{m^2} \right]. \tag{5.9}
\end{aligned}$$

Com base nas equações acima e levando em conta o fato das funções Z_0 e Y_1 não possuírem nem um tipo de divergência no limite em consideração (ver apêndice D), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Sigma(k_1, k_2, m) &= (-\not{p} + 4m) I_{\log}(m^2) + P^\nu \gamma^\mu \Delta_{\mu\nu}(m^2) \\
&\quad + \frac{i}{(4\pi)^2} [(\not{p} - 4m) Z_0(p^2; 0; m^2; m^2)] \\
&\quad + (\xi - 1)(m - \not{p}) I_{\log}(m^2) + (\xi - 1) \frac{i}{(4\pi)^2} [(\not{p} - m) Z_0(p^2; 0; m^2; m^2)] \\
&\quad - (\xi - 1) \gamma^\mu \left(\frac{P_1^\nu}{2} + \frac{p_1^\nu}{2} \right) \Delta_{\mu\nu}(m^2) \\
&\quad - (\xi - 1) \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\not{p}(p^2 - m^2) \frac{Y_1(p^2; 0; m^2; m^2)}{m^2} \right], \tag{5.10}
\end{aligned}$$

onde P e p são, respectivamente, os momentos ambíguo e externo ao laço.

5.4 Interação elétron-fóton

Para a função de Green relacionada ao processo de interação elétron-fóton dada por (2.32), e lembrando das equações (3.27) e (??), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^\mu(k_1, k_2, k_3, m) &= (-2k_1^2 \gamma^\mu - 2\not{k}_2 \gamma^\mu \not{k}_3 + 4m(k_2 + k_3)^\mu - 2m^2 \gamma^\mu) J_3 \\
&\quad + (-4k_1^\alpha \gamma^\mu - 2\gamma^\alpha \gamma^\mu \not{k}_3 - 2\gamma^\alpha \gamma^\mu \not{k}_2 + 8mg^{\alpha\mu}) (J_3)_\alpha \\
&\quad - 4\gamma_\alpha J_3^{\mu\alpha} + 2\gamma^\mu I_2(k_2, k_3), \tag{5.11}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Lambda_2^\mu(k_1, k_2, k_3, m) &= \gamma^\mu L_2 - [\gamma^\mu \not{k}_1 (\not{p} - m) + (p^2 - m^2) \gamma^\mu] L_3(k_2) \\
&\quad - [(\not{q} - m) \not{k}_1 \gamma^\mu + (q^2 - m^2) \gamma^\mu] L_3(k_3) \\
&\quad - \gamma^\mu \gamma_\alpha [\not{p} - m] L_3^\alpha(k_2) - [\not{q} - m] \gamma_\alpha \gamma^\mu L_3^\alpha(k_3) \\
&\quad - (\not{q} - m) \gamma^\mu (\not{p} - m) J_3 + [(p^2 - m^2) (\not{q} - m) \not{k}_1 \gamma^\mu \\
&\quad + (q^2 - m^2) \gamma^\mu \not{k}_1 (\not{p} - m) + 2k_1^\mu (\not{q} - m) \not{k}_1 (\not{p} - m) \\
&\quad + (p^2 - m^2) (q^2 - m^2) \gamma^\mu] L_4 + [(q^2 - m^2) \gamma^\mu \gamma^\alpha (\not{p} - m) \\
&\quad + 2k_1^\mu (\not{q} - m) \gamma^\alpha (\not{p} - m) + 2(\not{q} - m) \not{k}_1 (\not{p} - m) g^{\mu\alpha} \\
&\quad + (p^2 - m^2) (\not{q} - m) \gamma^\alpha \gamma^\mu] (L_4)_\alpha \\
&\quad + 2(\not{q} - m) \gamma_\alpha (\not{p} - m) L_4^{\mu\alpha}. \tag{5.12}
\end{aligned}$$

Considerando então os resultados das integrais de Feynman previamente calculadas e fazendo algumas manipulações algébricas, podemos deixar Λ_1^μ e Λ_2^μ em termos dos momentos externos p e q , ficando com

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^\mu &= -\gamma_\alpha \nabla^{\mu\alpha} (m^2) + \gamma^\mu I_{\log} (m^2) \\
&\quad - \frac{2i}{(4\pi)^2} \gamma^\mu Z_0 ((p-q)^2; m^2; m^2) \\
&\quad + \frac{2i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \gamma^\mu \eta_{00} (p^2, \mu^2, m^2, q^2, m^2; m^2) \right. \\
&\quad \quad - 2q^\mu q \xi_{20} (p^2, \mu^2, m^2, q^2, m^2) \\
&\quad \quad - 2p^\mu p \xi_{02} (p^2, \mu^2, m^2, q^2, m^2) \\
&\quad \quad - 2(p^\mu q + q^\mu p) \xi_{11} (p^2, \mu^2, m^2, q^2, m^2) \\
&\quad \quad + (p \not{\gamma}^\mu q + p \not{\gamma}^\mu p - 4mp^\mu) \xi_{01} (p^2, \mu^2, m^2, q^2, m^2) \\
&\quad \quad + (q \not{\gamma}^\mu q + p \not{\gamma}^\mu q - 4mq^\mu) \xi_{10} (p^2, \mu^2, m^2, q^2, m^2) \\
&\quad \quad \left. + [2m(p+q)^\mu - p \not{\gamma}^\mu q - m^2 \gamma^\mu] \xi_{00} (p^2, \mu^2, m^2, q^2, m^2) \right\}, \quad (5.13)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\Lambda_2)_\mu &= \gamma_\mu \left[I_{\log} (m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] \\
&\quad + \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ [(p^2 - m^2) \gamma_\mu] \frac{Y_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2)}{m^2} \right. \\
&\quad \quad + [(q^2 - m^2) \gamma_\mu] \frac{Y_0(\mu^2, m^2, q^2; m^2)}{m^2} - [(q-m) \not{q} \gamma_\mu] \frac{Y_1(\mu^2, m^2, q^2; m^2)}{m^2} \\
&\quad \quad \left. - [\gamma_\mu \not{p} (p-m)] \frac{Y_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2)}{m^2} \right\} \\
&\quad - \frac{i}{(4\pi)^2} (q^2 - m^2) \gamma_\mu \gamma_\alpha (p-m) \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} [p^\alpha \xi_{01}(\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) \\
&\quad \quad + q^\alpha \xi_{10}(\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2)] \\
&\quad - \frac{i}{(4\pi)^2} (p^2 - m^2) (q-m) \gamma_\alpha \gamma_\mu \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} [p^\alpha \xi_{01}(\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) \\
&\quad \quad + q^\alpha \xi_{10}(\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2)] + \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ (q^2 - m^2) (p^2 - m^2) \gamma_\mu \right. \\
&\quad \quad \left. - (q-m) \gamma_\mu (p-m) \right\} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} [\xi_{00}(\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2)] \\
&\quad - \frac{i}{(4\pi)^2} (q-m) \gamma^\alpha (p-m) \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left\{ \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} \eta_{00}(\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2; m^2) \right. \\
&\quad \quad - q_\mu q_\alpha \xi_{20}(\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) - p_\mu p_\alpha \xi_{02}(\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) \\
&\quad \quad \left. - (p_\mu q_\alpha + q_\mu p_\alpha) \xi_{11}(\mu^2, p^2, m^2, q^2, m^2) \right\}. \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Para obtermos o resultado final para a forma explícita de Λ_1^μ e Λ_2^μ resta ainda tomar o limite indicado. Porém, para tal é necessário um estudo detalhado das funções Z_k , Y_k , ξ_{nm} , η_{nm} e σ_{nm} no que diz respeito aos seus comportamentos em $\mu^2 \rightarrow 0$. A análise das funções Z_k e Y_k foi feita e se encontra no apêndice D, no entanto resta analisar as funções

ξ_{nm} , η_{nm} e σ_{nm} . Desta forma adotaremos apenas uma representação para as funções ξ_{nm} , η_{nm} e σ_{nm} no limite infravermelho de modo a compactificar a notação, ou seja

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \xi_{nm}(\mu^2) \doteq \xi_{nm}(0), \\ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \eta_{nm}(\mu^2) \doteq \eta_{nm}(0), \\ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \sigma_{nm}(\mu^2) \doteq \sigma_{nm}(0). \end{array} \right. \quad (5.15)$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} \Lambda_1^\mu &= -\gamma_\alpha \nabla^{\mu\alpha}(m^2) + \gamma^\mu I_{\log}(m^2) \\ &\quad - \frac{2i}{(4\pi)^2} \gamma^\mu Z_0((p-q)^2; m^2; m^2) \\ &\quad + \frac{2i}{(4\pi)^2} \left\{ \gamma^\mu \eta_{00}(p^2, 0, m^2, q^2, m^2; m^2) \right. \\ &\quad \quad - 2q^\mu q \xi_{20}(p^2, 0, m^2, q^2, m^2) \\ &\quad \quad - 2p^\mu p \xi_{02}(p^2, 0, m^2, q^2, m^2) \\ &\quad \quad - 2(p^\mu q + q^\mu p) \xi_{11}(p^2, 0, m^2, q^2, m^2) \\ &\quad \quad + (p \gamma^\mu q + p \gamma^\mu p - 4mp^\mu) \xi_{01}(p^2, 0, m^2, q^2, m^2) \\ &\quad \quad + (q \gamma^\mu q + p \gamma^\mu q - 4mq^\mu) \xi_{10}(p^2, 0, m^2, q^2, m^2) \\ &\quad \quad \left. + [2m(p+q)^\mu - p \gamma^\mu q - m^2 \gamma^\mu] \xi_{00}(p^2, 0, m^2, q^2, m^2) \right\}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

e

$$\begin{aligned} (\Lambda_2)_\mu &= \gamma_\mu I_{\log}(m^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ (p^2 - m^2) \gamma_\mu \frac{Y_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2)}{m^2} \right. \\ &\quad + (q^2 - m^2) \gamma_\mu \frac{Y_0(\mu^2, m^2, q^2; m^2)}{m^2} - (q - m) q \gamma_\mu \frac{Y_1(\mu^2, m^2, q^2; m^2)}{m^2} \\ &\quad \left. - [\gamma_\mu p (p - m)] \frac{Y_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2)}{m^2} \right\} \\ &\quad - (q^2 - m^2) \gamma_\mu \gamma_\alpha (p - m) [p^\alpha \sigma_{01}(0, p^2, m^2, q^2, m^2) \\ &\quad + q^\alpha \sigma_{10}(0, p^2, m^2, q^2, m^2)] \\ &\quad - (p^2 - m^2) (q - m) \gamma_\alpha \gamma_\mu [p^\alpha \sigma_{01}(0, p^2, m^2, q^2, m^2) \\ &\quad + q^\alpha \sigma_{10}(0, p^2, m^2, q^2, m^2)] + [(q^2 - m^2) (p^2 - m^2) \gamma_\mu \\ &\quad - (q - m) \gamma_\mu (p - m)] [\sigma_{00}(0, p^2, m^2, q^2, m^2)] \\ &\quad - (q - m) \gamma^\alpha (p - m) \left\{ -\frac{1}{2} g_{\mu\alpha} \xi_{00}(0, p^2, m^2, q^2, m^2; m^2) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} \xi_{10}(0, p^2, m^2, q^2, m^2; m^2) + \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} \xi_{01}(0, p^2, m^2, q^2, m^2; m^2) \\ &\quad - q_\mu q_\alpha \sigma_{20}(0, p^2, m^2, q^2, m^2) - p_\mu p_\alpha \sigma_{02}(0, p^2, m^2, q^2, m^2) \\ &\quad \left. - (p_\mu q_\alpha + q_\mu p_\alpha) \sigma_{11}(0, p^2, m^2, q^2, m^2) \right\} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Agora devemos analisar os resultados obtidos com vistas à consistência.

Capítulo 6

Ambiguidades, relações de simetria e renormalização

6.1 Ambiguidades

Nas amplitudes que calculamos é fácil perceber a presença de termos que apresentam dependência de combinações indefinidas dos momentos internos arbitrários. Eles representam então a presença de termos nas amplitudes que dependem das escolhas para os rótulos dos momentos das linhas internas. Isso significa que são termos potencialmente ambíguos. Diferentes escolhas podem levar a diferentes amplitudes.

É interessante destacar os termos ambíguos de cada amplitude calculada. Iniciamos pela função de um ponto vetorial $T_\mu^V(k_1, m)$. Para esta temos,

$$(T_\mu^V)_{amb} = -4k_1^\nu \nabla_{\mu\nu}(m^2) - \frac{4}{3}k_1^\alpha k_1^\beta k_1^\nu \square_{\alpha\beta\mu\nu}(m^2) + \frac{4}{3}k_1^2 k_1^\nu \Delta_{\mu\nu}(m^2) + \frac{8}{3}k_{1\mu} k_1^\beta k_1^\nu \Delta_{\beta\nu}(m^2). \quad (6.1)$$

Observamos que $T_\mu^V(k_1, m)$ é totalmente ambígua já que k_1 é arbitrário.

Para o caso da função de Green de dois pontos vetorial-vetorial, temos que

$$(T_{\mu\nu}^{VV})_{amb} = P^\alpha P^\beta [\square_{\alpha\beta\mu\nu}(m^2) - g_{\mu\beta} \Delta_{\nu\alpha}(m^2) - g_{\alpha\mu} \Delta_{\beta\nu}(m^2) - 3g_{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta}(m^2)] + \frac{1}{3} [p^\alpha P^\beta - P^\alpha p^\beta] [\square_{\alpha\beta\mu\nu}(m^2) + g_{\nu\alpha} \Delta_{\mu\beta}(m^2) + g_{\alpha\mu} \Delta_{\beta\nu}(m^2)]. \quad (6.2)$$

A parte ambígua da função de Green associada a auto-energia do elétron $\Sigma(k_1, k_2, m)$ é dada por:

$$(\Sigma)_{amb} = P^\nu \gamma^\mu \Delta_{\mu\nu}(m^2) - \frac{(\xi - 1)}{2} \gamma^\mu P^\nu \Delta_{\mu\nu}(m^2). \quad (6.3)$$

Podemos perceber nas equações acima que as partes ambíguas das funções de Green estão invariavelmente associadas aos objetos divergentes \square , Δ e ∇ . Tais objetos são quantidades indefinidas e, em princípio arbitrárias, já que dependem da escolha de uma regularização para serem especificadas. Disto é fácil perceber então que a escolha específica de uma regularização que venha a produzir um valor nulo para estes objetos nos permite eliminá-los sistematicamente. Esta é uma possibilidade tentadora, porém não deixaria

de ser consequência de uma escolha arbitrária. Seria, por outro lado, interessante que os objetos \square , \triangle e ∇ , que são diferenças entre integrais de Feynman com o mesmo grau de divergência, fossem fixados no valor nulo através de exigências de simetria do próprio cálculo perturbativo. Para verificar esta possibilidade consideremos as relações de simetria envolvendo as amplitudes mantendo a presença dos termos ambíguos.

6.1.1 Relações de simetria

Uma consequência da simetria de calibre associada à EDQ é a conservação da corrente vetorial, o que tem como produto as identidades de Ward, equações (3.45) e (3.46). Considerando estas identidades e as funções de um e dois pontos vetoriais em suas formas explícitas, (5.2) e (5.6), obtemos para a função de um ponto vetorial

$$\begin{aligned} k_1^\mu T_{\mu}^V(k_1, m) &= k_1^\mu \left\{ -4k_1^\nu \nabla_{\mu\nu}(m^2) - \frac{4}{3}k_1^\alpha k_1^\beta k_1^\nu \square_{\alpha\beta\mu\nu}(m^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3}k_1^2 k_1^\nu \Delta_{\mu\nu}(m^2) + \frac{8}{3}k_{1\mu} k_1^\beta k_1^\nu \Delta_{\beta\nu}(m^2) \right\} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{6.4}$$

e para a função de dois pontos bi-vetorial

$$\begin{aligned} p^\mu T_{\mu\nu}^{VV} &= p^\mu A_{\mu\nu} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{6.5}$$

ou, mais explicitamente

$$\begin{aligned} p^\mu T_{\mu\nu}^{VV} &= 4p^\mu \nabla_{\mu\nu}(m^2) - 2p^\mu p^2 \Delta_{\mu\nu}(m^2) \\ &\quad + \frac{1}{3}p^\mu p^\alpha p^\beta \left[\square_{\alpha\beta\mu\nu}(m^2) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta}(m^2) + g_{\mu\alpha} \Delta_{\nu\beta}(m^2) + g_{\mu\beta} \Delta_{\alpha\nu}(m^2) \right] \\ &\quad - 2p^\mu P^2 \Delta_{\mu\nu}(m^2) - 2p^\mu P^\alpha [P_\mu \Delta_{\alpha\nu}(m^2) + P_\nu \Delta_{\mu\alpha}(m^2)] \\ &\quad + \frac{1}{3}p^\mu [3P^\alpha P^\beta - P^\alpha p^\beta + p^\alpha P^\beta] [\square_{\alpha\beta\mu\nu}(m^2) + g_{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta}(m^2) \\ &\quad + g_{\mu\alpha} \Delta_{\nu\beta}(m^2) + g_{\mu\beta} \Delta_{\alpha\nu}(m^2)] \\ &\quad - \frac{g_{\mu\nu}}{2} p^\mu [P^\alpha P^\beta - P^\alpha p^\beta - p^\alpha P^\beta] \Delta_{\alpha\beta}(m^2) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Lembrando ainda da relação entre as funções de Green de um e dois pontos expressa em (3.39), temos que

$$\begin{aligned} p^\mu T_{\mu\nu}^{VV} &= T_\nu^V(k_2; m) - T_\nu^V(k_1; m) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Podemos perceber então, nas amplitudes calculadas, a aparente violação das identidades de Ward. Estas não sendo satisfeitas implicam na violação da simetria de calibre. Desta maneira, é necessário que todos os termos violadores de simetria sejam eliminados das amplitudes como exigência mínima de consistência. Os termos violadores, por outro lado, estão invariavelmente associados aos objetos \square , \triangle e ∇ e, em alguns casos, são não

ambíguos no que diz respeito aos momentos internos do laço. Portanto, é necessário que as condições

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mu\nu}^{reg} = 0 \\ \Delta_{\mu\nu}^{reg} = 0 \\ \square_{\alpha\beta\mu\nu}^{reg} = 0. \end{array} \right. \quad (6.8)$$

sejam satisfeitas, de modo a preservar as simetrias no cálculo perturbativo. Além disso, estas condições são aparentemente suficientes para a manutenção das simetrias e eliminação sistemática das ambiguidades. Devido a isso este conjunto de equações é denominado *Relações de Consistência* (RC's). É importante enfatizar que a nulidade destes objetos foi imposta por argumentos bem gerais. No contexto deste trabalho, tais exigências são decorrentes apenas da manutenção da simetria de gauge. Pode-se, entretanto, perceber que uma exigência bem mais abrangente e universal é capaz de levar às mesmas condições que é a exigência de que a invariância translacional seja mantida no cálculo perturbativo.

6.2 Renormalização

Neste ponto, já temos em mãos as amplitudes livres de ambiguidades e com suas simetrias preservadas. Observamos, entretanto, que com a retirada dos termos \square , Δ e ∇ restam ainda os termos divergentes I_{\log} e I_{quad} nas expressões para as amplitudes. Isto quer dizer que as amplitudes ainda são quantidades indefinidas ou divergentes e não podem ser associadas a observáveis físicos. A possível saída reside num outro aspecto crucial: a redefinição ordem a ordem no cálculo perturbativo dos parâmetros da densidade de Lagrangeano.

Deve-se enfatizar, no entanto, que a necessidade da reparametrização não é uma característica exclusiva de teorias de campos relativísticas. A renormalização tem a sua própria base física intrínseca e não é trazida a tona apenas pela necessidade de expurgar infinitos, pois mesmo em teorias finitas pode ser necessária a renormalização de quantidades físicas. Como um exemplo, podemos considerar o caso de um elétron se movendo no interior de um sólido. Devido a interação do elétron com a estrutura interna do sólido a massa efetiva do elétron m^* , a qual determina a sua resposta a uma força externa aplicada, é certamente diferente da massa do elétron m medida fora do sólido. A massa do elétron é mudada (renormalizada) de m para m^* pela interação do elétron com a estrutura interna do sólido.

A implementação sistemática da reparametrização em TQC, a teoria da renormalização, é uma prescrição através da qual, após um número finito de redefinições dos parâmetros livres da densidade de Lagrangeano, podemos tornar a teoria finita a qualquer ordem da expansão perturbativa. Existe uma grande variedade de prescrições de renormalização na literatura. Todas utilizam, essencialmente, os mesmos argumentos físicos. A idéia geral é a existência de um conjunto de parâmetros físicos *nus*, que podem ser quantidades tais como as constantes de acoplamento e massas. No entanto esses parâmetros nus não são mensuráveis. As divergências desses parâmetros são escolhidas de forma a cancelar aquelas originadas nos diagramas de Feynman devido ao comportamento dos propagadores em valores altos para os momentos. Após estas divergências terem sido absorvidas pelos parâmetros nus, o que resta são os parâmetros físicos renormalizados, ou *vestidos*, que são, por sua vez, finitos e mensuráveis. Para que o processo de renormaliza-

ção possa ser efetuado é necessário em passos intermediários a manipulação de integrais de Feynman divergentes, etapa já cumprida nos capítulos precedentes. Vamos então retomar as expressões para as amplitudes, agora livres dos termos ambíguos, e efetuar a reparametrização da teoria ao nível um laço e mostrar então que isto nos permite eliminar consistente e sistematicamente as divergências remanescentes.

Na seção 4.5, obtivemos o propagador fermiônico corrigido, eq.(2.36), levando em consideração a sua propagação na presença de interação. Uma das consequências matemáticas da correção do propagador foi que o polo nele contido, o qual define a massa física da partícula, foi deslocado de m para $m + \Sigma(\not{p} = 0)$. Porém, a função de Green $\Sigma(\not{p})$, construída ao nível um loop com o auxílio das regras de Feynman, definida na equação (2.25), é divergente. Isto implica que a massa m que aparece na densidade de Lagrangeano, equação (2.21), não é de fato a massa física, mas sim um parâmetro divergente que precisa ser reinterpretado. O mesmo ocorre com os parâmetros e e ξ e com a normalização dos campos ψ e A_μ .

Para dar início ao processo de renormalização da EDQ ao nível de um laço fazamos primeiramente as seguintes redefinições nos parâmetros da densidade de Lagrangeano

$$\left\{ \begin{array}{l} m \longrightarrow m_0, \\ e \longrightarrow e_0, \\ \xi \longrightarrow \xi_0, \\ \psi \longrightarrow \psi^0, \\ A_\mu \longrightarrow A_\mu^0, \end{array} \right. \quad (6.9)$$

de modo que o índice 0 esteja associado aos parâmetros nus (divergentes) e os parâmetros sem índices venham a representar as quantidades físicas mensuráveis. Estes são usualmente chamados de parâmetros renormalizados. Feitas estas redefinições, podemos escrever a densidade de Lagrangeano como:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^0 i\gamma^\mu (\partial_\mu + ie_0 A_\mu^0) \psi^0 - m_0 \bar{\psi}^0 \psi^0 - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^0 - \partial_\nu A_\mu^0)^2 - \frac{1}{2\xi_0} (\partial_\mu A^{0\mu})^2. \quad (6.10)$$

Façamos então as parametrizações

$$m_0 = \frac{Z_m}{Z_\psi} m, \quad (6.11)$$

$$e_0 = \frac{Z_e}{Z_\psi \sqrt{Z_A}} e, \quad (6.12)$$

$$\xi_0 = \frac{Z_A}{Z_\xi} \xi, \quad (6.13)$$

$$\psi^0 = \sqrt{Z_\psi} \psi, \quad (6.14)$$

$$A_\mu^0 = \sqrt{Z_A} A_\mu. \quad (6.15)$$

Os fatores Z_m , Z_e , Z_ξ , Z_A e Z_ψ são inseridos com o intuito de que fique explícito na densidade de Lagrangeano o que é de caráter divergente e o que é finito, como veremos a seguir estes parâmetros podem ser escritos em termos dos objetos divergentes que não foram eliminados após a imposição das relações de consistência.

A Lagrangeana pode ser escrita como a soma de uma parte física com outra divergente, esta última denominada Lagrangeana dos contratermos. Ou seja,

$$L = L_{fis} + L_{ct}.$$

Assim sendo, com base nas considerações prévias, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}i\partial\psi - m\bar{\psi}\psi - e\bar{\psi}A\psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\ & + i(Z_\psi - 1)\bar{\psi}\partial\psi - m(Z_m - 1)\bar{\psi}\psi - e(Z_e - 1)\bar{\psi}A\psi \\ & - \frac{1}{4}(Z_A - 1)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi}(Z_\xi - 1)(\partial_\mu A^\mu)^2, \end{aligned} \quad (6.16)$$

onde

$$\mathcal{L}_{fis} = \bar{\psi}i\partial\psi - m\bar{\psi}\psi - e\bar{\psi}A\psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (6.17)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ct} = & i(Z_\psi - 1)\bar{\psi}\partial\psi - m(Z_m - 1)\bar{\psi}\psi - e(Z_e - 1)\bar{\psi}A\psi \\ & - \frac{1}{4}(Z_A - 1)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi}(Z_\xi - 1)(\partial_\mu A^\mu)^2. \end{aligned} \quad (6.18)$$

A etapa seguinte consiste em escrever os parâmetros Z' s impostos na densidade de Lagrangeano em termos de propriedades das amplitudes $\Pi_{\mu\nu}^{VV}$, $\Lambda_\mu(\not{p}, \not{p}')$ e $\Sigma(\not{p})$. Para isso, façamos

$$\begin{aligned} L = & \bar{\psi}i\partial\psi - m\bar{\psi}\psi - e\bar{\psi}A\psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\ & + (a_1) \left[-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \right] \\ & + (a_2) (\bar{\psi}i\partial\psi) \\ & + (a_3) (-\bar{\psi}m\psi) \\ & + (a_4) [-e\bar{\psi}A\psi] \\ & + (a_5) \left[-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \right] \end{aligned} \quad (6.19)$$

Agora procedemos a identificação dos contratermos. O primeiro deles deverá cancelar a divergência do diagrama da auto-energia do fóton. Para esta amplitude, a partir das equações (2.29) e (5.6), escrevemos

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = (p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \Pi(p^2) \quad (6.20)$$

onde:

$$\Pi(p^2) = -\frac{4}{3}e^2 [I_{\log}(m^2)] + \Pi^{fin}(p^2). \quad (6.21)$$

A parte finita definida acima possui a propriedade:

$$\Pi^{fin}(p^2 = 0) = 0. \quad (6.22)$$

Então,

$$(Z_A - 1) \left[-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \right] = + (a_1) \left[-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \right] \quad (6.23)$$

e observando a amplitude $T_{\mu\nu}^{VV}$ temos que

$$Z_A = 1 - \frac{4e^2}{3} [I_{\log}(m^2)]. \quad (6.24)$$

O segundo e o terceiro contratermos deverão cancelar as estruturas divergentes associadas a auto-energia do elétron. Para identificarmos adequadamente este contratermo, consideramos a forma explícita para a função de Green da auto-energia do elétron expressa em (5.10)

$$\begin{aligned} \Sigma^{1\gamma}(p) = & (-ie)^2 \left\{ (-\not{p} + 4m) I_{\log}(m^2) + \frac{i}{(4\pi)^2} [(\not{p} - 4m) Z_0(p^2; 0; m^2; m^2)] \right. \\ & + (\xi - 1)(m - \not{p}) I_{\log}(m^2) - (\xi - 1) \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\not{p}(p^2 - m^2) \frac{Y_1(p^2; 0; m^2; m^2)}{m^2} \right] \\ & \left. + (\xi - 1) \frac{i}{(4\pi)^2} [(\not{p} - m) Z_0(p^2; 0; m^2; m^2)] \right\}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

Façamos então a seguinte compactação

$$\Sigma^{1\gamma}(p) = A(p^2) + \not{p}B(p^2) + (\xi - 1)[C(p^2) + \not{p}D(p^2)], \quad (6.26)$$

na qual identificamos

$$A(p^2) = -4me^2 \left[I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(p^2; 0; m^2; m^2) \right], \quad (6.27)$$

e

$$C(p^2) = -me^2 \left[I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(p^2; 0; m^2; m^2) \right],$$

O primeiro termo, de ambos $A(p^2)$ e $C(p^2)$, contém a divergência ultravioleta. No entanto, os outros são finitos e possuem as propriedades

$$A_{fin}(p^2 = 0) = C_{fin}(p^2 = 0) = 0. \quad (6.28)$$

Agora, para a parte linear de (6.26) temos

$$B(p^2) = +e^2 \left[I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(p^2; 0; m^2; m^2) \right] \quad (6.29)$$

e

$$\begin{aligned} D(p^2) = & +e^2 \left\{ I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(p^2; 0; m^2; m^2) \right\} \\ & + e^2 (p^2 - m^2) \left[\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{Y_1(p^2; 0; m^2; m^2)}{m^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Podemos notar que a parte finita de $B(p^2)$ possui a propriedade $B_{fin}(p^2 = 0) = 0$. Porém, a parte finita de $D(p^2)$ não se anula em $p^2 = 0$,

$$D_{fin}(p^2 = 0) = -\frac{i}{2} \frac{e^2}{(4\pi)^2}. \quad (6.31)$$

Efetuada a organização, a parte finita adquire a propriedade:

$$\begin{cases} \Sigma_{fin}^{1\gamma}(p) |_{p=0} = 0 \\ \frac{\partial \Sigma_{fin}^{1\gamma}(p)}{\partial p} |_{p=0} = -\frac{i}{2} \frac{e^2}{(4\pi)^2}. \end{cases} \quad (6.32)$$

Deste modo, para o segundo contratérmo temos

$$i(Z_\psi - 1) \bar{\psi} \not{\partial} \psi = i(a_2) (\bar{\psi} \not{\partial} \psi), \quad (6.33)$$

e, consequentemente

$$\begin{aligned} i(Z_\psi - 1) &= ia_2 = i \left[1 - \frac{\partial \Sigma^{1\gamma}(p)}{\partial p} \Big|_{p=0} - 1 \right] \\ &= -ie^2 \left[I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(0; 0; m^2; m^2) \right] \\ &\quad - ie^2 (\xi - 1) \left[I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(0; 0; m^2; m^2) \right] \\ &\quad + ie^2 (\xi - 1) \left[-\frac{i}{2} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \right], \end{aligned} \quad (6.34)$$

de modo que

$$\begin{aligned} Z_\psi &= 1 - e^2 \left[I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(0; 0; m^2; m^2) \right] \\ &\quad - (\xi - 1) e^2 \left[I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(0; 0; m^2; m^2) + \frac{i}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Para o terceiro contratérmo identificamos

$$-m(Z_m - 1) \bar{\psi} \psi = -m(a_3) (\bar{\psi} \psi),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \Sigma^{1\gamma}(0) &= -4me^2 \left[I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(0; 0; m^2; m^2) \right] \\ &\quad - (\xi - 1) me^2 \left[I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(0; 0; m^2; m^2) \right], \end{aligned} \quad (6.36)$$

de modo que

$$\begin{aligned} a_3 &= -4e^2 \left[I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(0; 0; m^2; m^2) \right] \\ &\quad - (\xi - 1) e^2 \left[I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(0; 0; m^2; m^2) \right], \end{aligned} \quad (6.37)$$

e

$$\begin{aligned} Z_m &= 1 - 4e^2 \left[I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(0; 0; m^2; m^2) \right] \\ &\quad - (\xi - 1) e^2 \left[I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(0; 0; m^2; m^2) \right]. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Para obtermos o quarto contratermo, o qual leva ao cancelamento da divergência oriunda da função de Green associada a interação elétron-fóton seria necessário um estudo detalhado das funções $Z_k, Y_k, \xi_{nm}, \eta_{nm}$ e σ_{nm} no que diz respeito aos seus comportamentos em $\mu^2 \rightarrow 0$. Para as funções Z_k e Y_k este estudo foi feito explicitamente (ver apêndice D), devido ao fato de a integração no parâmetro de Feynman poder ser completada. Já para as as funções ξ_{nm}, η_{nm} e σ_{nm} , as dificuldades são relativamente maiores já que as integrações nos parâmetros de Feynman não são facilmente completadas.

Uma análise superficial revela a possibilidade de divergências no limite infravermelho para a função σ_{nm} , a qual é essencialmente a derivada ξ_{nm} , por esta conter um polinômio quadrático em μ^2 . De qualquer forma, a renormalização pode ser levada a diante para uma escolha conveniente para o parâmetro de gauge já que este é arbitrário. Como tal, adotando $\xi = 1$ (calibre de Feynman), nos livramos do problema de possível divergência infravermelha, já que com esta fixação do calibre eliminamos Λ_2 , a qual é justamente a parte que contém a função possivelmente problemática no limite infravermelho, a função σ_{nm} . Podemos perceber isso observando as expressões (5.13) e (5.14). Assim sendo, seguindo o mesmo procedimento de anteriormente, escrevemos a expressão para a função de vértice na forma:

$$\Lambda_\mu(p, q) = -e^3 \left\{ \gamma_\mu [I_{\log}(m^2) + \Lambda^{fin}(0, 0)] + [\Lambda_\mu^{fin}(p, q) - \gamma_\mu \Lambda^{fin}(0, 0)] \right\}, \quad (6.39)$$

onde $\gamma_\mu \Lambda^{fin}(0, 0)$ é o valor da parte finita de $\Lambda_\mu(p, q)$ tomado a momentos $p = q = 0$. Com isso, temos que

$$-e(Z_e - 1) \bar{\psi} \not{A} \psi = -e(a_4) \bar{\psi} \not{A} \psi, \quad (6.40)$$

e

$$(Z_e - 1) = -e^2 [I_{\log}(m^2) + \Lambda^{fin}(0, 0)], \quad (6.41)$$

de modo que

$$Z_e = 1 - e^2 [I_{\log}(m^2) + \Lambda^{fin}(0, 0)]. \quad (6.42)$$

Finalmente, para obtermos o contratermo associado ao parâmetro de calibre, identificamos

$$-\frac{1}{2\xi} (Z_\xi - 1) (\partial_\mu A^\mu)^2 = -\frac{1}{2\xi} (a_5) (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (6.43)$$

O termo de calibre envolve a presença da derivada do campo vetorial fotônico, similarmente ao termo de Maxwell. Desta forma, ele deve contribuir também para a auto-energia do fóton, assim sendo, considerando as equações (6.20), (6.21) e (6.22), obtemos que

$$Z_\xi = Z_A = 1 - \frac{4e^2}{3} [I_{\log}(m^2)]. \quad (6.44)$$

Obtidos os contratermos para cada termo na densidade de Lagrangeano, podemos escrever uma nova expressão para este último levando em consideração uma forma explícita

para os contratermos. Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \bar{\psi}i\partial\psi - m\bar{\psi}\psi - e\bar{\psi}A\psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\
& -ie^2 \left[I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(0; 0; m^2; m^2) \right] \bar{\psi}\partial\psi \\
& +4me^2 \left[I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(0; 0; m^2; m^2) \right] \bar{\psi}\psi \\
& +e^3 [I_{\log}(m^2) + \Lambda^{fin}(0, 0)] \bar{\psi}A\psi \\
& +\frac{e^2}{3} [I_{\log}(m^2)] (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \\
& +\frac{2e^2}{3\xi} [I_{\log}(m^2)] (\partial_\mu A^\mu)^2.
\end{aligned} \tag{6.45}$$

Capítulo 7

Conclusões

No presente trabalho consideramos o estudo da EDQ em solução perturbativa ao nível um laço. Depois de escrever a densidade de Lagrangeano para a teoria e obter as regras de Feynman, especificamos três processos físicos básicos pertinentes à teoria, são eles: a auto-energia do elétron, a auto-energia do fóton e a função de vértice da interação elétron-fóton.

Para cada um dos processos físicos identificamos uma função de Green de caráter divergente, o que foi revelado através da contagem de potências do momento de integração k . Desta forma, tornou-se necessário construir uma interpretação consistente para as amplitudes contendo tais divergências. Para tratarmos de tal problema, passamos por duas etapas. A primeira delas consistiu no tratamento das integrais de Feynman de uma forma consistente (cap. 4), papel este desempenhado pela estratégia adotada para manipulações e cálculos denominada como *Regularização Implícita*.

Este método tem uma característica importante de não ser realizado de fato o cálculo das integrais de Feynman divergentes, estas são separadas das integrais finitas e organizadas em termos de um conjunto de objetos básicos, aqueles definidos em (4.4)-(4.8). É possível evitar, deste modo, as modificações usuais das amplitudes por distribuições regularizadoras.

Além disso, nos deparamos com dois tipos diferentes de divergências: a ultravioleta e a infravermelha. Estas estão associadas, respectivamente, a valores altos de momento ($k \rightarrow \infty$), e à região de pequenos valores dos momentos ($k \rightarrow 0$). A possível presença deste último tipo de divergências está associada ao propagador do fóton estar presente nas integrais, o qual contém um polo em valor nulo para o momentum do fóton ($k = 0$). As divergências infravermelha e ultravioleta foram tratadas separadamente de modo natural dentro da estratégia que adotamos. No entanto, no resultado dos cálculos para as amplitudes percebemos a presença de termos potencialmente ambíguos. Estes termos, comprometeriam o poder de predição da teoria, pois dependem de escolhas arbitrárias, porém, através de argumentos de simetria, é possível encontrar um modo de eliminar tais termos de forma consistente e sistemática. Isto porque na construção da densidade de Lagrangeano da eletrodinâmica quântica (cap. 2), impomos que a teoria do elétron livre de Dirac fosse invariante frente a uma transformação local (ou de gauge), o que tem como uma implicação a existência de uma corrente vetorial conservada. Este fato estabelece propriedades bem definidas para as amplitudes do cálculo perturbativo que são as identidades de Ward. A manutenção das simetrias no cálculo perturbativo passa pela preservação das identidades de Ward.

No entanto, ao calcularmos explicitamente a função de Green para a polarização do vácuo, percebemos que esta contém termos que violam a invariância de calibre. Com base nisso, percebemos que a única maneira de preservar as simetrias é a imposição das *relações de consistência*, as quais implicam na anulação dos objetos divergentes \square , \triangle e ∇ . Como resultado destas propriedades para as integrais de Feynman divergentes todos os termos ambíguos são eliminados automaticamente.

Após esta etapa que produz amplitudes livres de violações de simetrias e de ambigüidades, consequência da estratégia adotada para o tratamento das amplitudes divergentes resta ainda a presença da quantidade divergente básica I_{\log} . A eliminação desta quantidade das amplitudes físicas somente pode ser feita através da reparametrização da teoria ou renormalização. Este procedimento consiste em absorver os infinitos remanescentes, ou seja, aqueles objetos divergentes que não puderam ser eliminados através das relações de consistência. Para o caso da EDQ, o único objeto que resiste a estas relações é o objeto I_{\log} . Procedemos então a renormalização da EDQ ao nível de um laço produzindo então amplitudes (renormalizadas) livres de infinitos.

Embora a renormalização da EDQ ao nível um laço não represente uma novidade no contexto de TQC, o procedimento utilizado para tal apresenta vantagens inegáveis frente aos procedimentos tradicionais, pois não fazemos o uso de uma regularização de fato, por assim dizer. Dito de outro modo, a forma com a qual lidamos com os objetos divergentes que surgem na EDQ é ditada pelo próprio conjunto de simetrias contido na teoria. Além disso, as amplitudes não são modificadas em momento algum em relação ao modo como surgem das regras de Feynman. O método aplicado aqui, não parece ter limitações de aplicabilidade de natureza alguma, podendo ser aplicado em quaisquer dimensões espaço-temporais e para quaisquer teorias e modelos, diferentemente dos métodos tradicionais de regularização, os quais são, em sua maioria, relativamente restritos com respeito a sua aplicabilidade.

As conclusões que retiramos no que diz respeito à consistência do método para a EDQ são transparentes quanto a ambigüidades, relações de simetria e divergências ultravioletas, que são as questões cruciais envolvidas. Quanto às questões relacionadas à presença de divergências infravermelhas nas amplitudes, infelizmente não foi possível com os estudos realizados fornecer uma conclusão clara e definitiva. Torna-se necessário para tal um estudo mais detalhado de algumas funções finitas (no regime ultravioleta) a fim de que possamos retirar conclusões definitivas (ξ_{nm} , η_{nm} e σ_{nm} para os casos em que n e/ou m são nulos). Este aspecto, entretanto, refere-se a características da teoria das interações eletromagnéticas e não à consistência do método aplicado na investigação efetuada no presente trabalho. Deixamos este aspecto como perspectiva para estudos futuros. Investigações neste sentido estão atualmente em andamento, assim como a aplicação do método em outros cenários, como aquele relacionado a questão da divergência no problema da constante cosmológica.

Apêndice A

Álgebra das matrizes de Dirac

No contexto da mecânica quântica relativística surgem naturalmente, associadas às partículas de spin semi-inteiro, as chamadas matrizes de Dirac. Estas obedecem a uma álgebra não-comutativa de Clifford, e estão presentes na Lagrangeana, nas funções de Green e, conseqüentemente, nas amplitudes físicas perturbativas. Deste modo, se mostra necessário o conhecimento da álgebra obedecida por tais matrizes, assim como, o desenvolvimento de certas identidades relevantes envolvendo estas a fim de realizar manipulações convenientes nas expressões para as amplitudes que são construídas a partir das regras de Feynman. Neste apêndice iremos detalhar algumas das propriedades e identidades resultantes da álgebra das matrizes de Dirac que se mostram fundamentais para o nossos objetivos neste trabalho.

Iniciamos pela definição das matrizes que formam o conjunto das matrizes de Dirac. Estas são 4 matrizes γ_μ 4×4 que obedecem a álgebra não comutativa de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \hat{I}, \quad (\text{A.1})$$

onde onde \hat{I} é a matriz identidade 4×4 , e $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico do espaço de Minkowski, dado por:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Podemos definir também uma matriz que possui a propriedade de anticomutar com todas as matrizes γ_μ , esta é a matriz γ_5 definida por:

$$\gamma^5 = -\frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta, \quad (\text{A.2})$$

onde $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é o tensor totalmente antissimétrico de quatro índices de Levi-Civita.

Consideremos então uma representação para as matrizes $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$. Podemos adotar

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e conseqüentemente a matriz γ_5 será dada por:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

É interessante ressaltarmos as seguintes propriedades:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\hat{I}, \quad (\text{A.5})$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\mu = -2\gamma_\nu, \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma^5 \gamma^5 = \hat{I}, \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu, \quad (\text{A.8})$$

$$\gamma_\mu \sigma_{\alpha\beta} \gamma^\mu = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\gamma_\nu \sigma_{\alpha\beta} = -i (\delta_{\nu\alpha} \gamma_\beta - \delta_{\nu\beta} \gamma_\alpha - \varepsilon_{\alpha\beta\nu\mu} \gamma^\mu \gamma^5), \quad (\text{A.10})$$

onde:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} (\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha). \quad (\text{A.11})$$

A contração de matrizes γ com quadrivetores, representada por:

$$\not{A} = A_\mu \gamma^\mu, \quad (\text{A.12})$$

leva a identidades tais como:

$$\not{A}\not{B} + \not{B}\not{A} = 2A \cdot B, \quad (\text{A.13})$$

$$\gamma_\mu \not{A} + \not{A} \gamma_\mu = 2A_\mu, \quad (\text{A.14})$$

$$\gamma_\mu \not{A}\not{B} \gamma_\mu = 4A \cdot B, \quad (\text{A.15})$$

$$\gamma_\mu \not{A} \gamma_\mu = 2\not{A}, \quad (\text{A.16})$$

e

$$\gamma_\mu \not{A}\not{B}\not{C} \gamma_\mu = -2\not{C}\not{B}\not{A}. \quad (\text{A.17})$$

Para concluirmos este apêndice vamos considerar os traços das matrizes de Dirac. Estes surgem quando estamos analisando as funções de Green puramente fermiônicas. Os traços são dados por:

$$\text{Tr}(\gamma_\mu) = 0, \quad (\text{A.18})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4\delta_{\mu\nu}, \quad (\text{A.19})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\delta) = 0, \quad (\text{A.20})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 4(\delta_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta} - \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} + \delta_{\mu\beta} \delta_{\nu\alpha}), \quad (\text{A.21})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\delta \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 0, \quad (\text{A.22})$$

a matriz γ_5 não aparece em nenhuma função de Green associada aos processos físicos que nos propomos a estudar neste trabalho. No entanto, apenas com o intuito de complementar o estudo das matrizes de Dirac, apresentamos alguns traços envolvendo a matriz γ_5

$$\text{Tr}(\gamma_5) = 0, \quad (\text{A.23})$$

$$\text{Tr}(\gamma_5\gamma_\nu) = 0, \quad (\text{A.24})$$

$$\text{Tr}(\gamma_5\gamma_\nu\gamma_\alpha) = 0, \quad (\text{A.25})$$

$$\text{Tr}(\gamma_5\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta) = 0, \quad (\text{A.26})$$

$$\text{Tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma) = 4i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (\text{A.27})$$

$$\text{Tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\rho) = 0, \quad (\text{A.28})$$

Os resultados apresentados neste apêndice são necessários e suficientes no que diz respeito a manipulações algébricas das matrizes de Dirac no desenvolver do presente trabalho.

Apêndice B

Parametrização de Feynman

No capítulo (4) escreve-se as funções de Green associadas as amplitudes físicas como uma combinação de integrais de Feynman. Estas integrais podem ser definidas de um modo geral por :

$$(I_n)^{\alpha\beta\dots\rho} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha k^\beta \dots k^\rho}{E_{12\dots n}}, \quad (\text{B.1})$$

onde definimos

$$\begin{aligned} E_{12\dots n} &= [(k+k_1)^2 - m_1^2] [(k+k_2)^2 - m_2^2] \dots [(k+k_n)^2 - m_n^2]. \\ &= a_1 a_2 \dots a_n \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Através da contagem das potências do momento de integração k , é fácil perceber se uma integral é finita ou divergente. Para esta última mostra-se necessário a adoção de um método consistente para seu tratamento e eventual manipulação, conforme foi feito no capítulo (5). Porém as integrais finitas no regime ultravioleta, podem ser integradas usando-se métodos usuais de integração. O objetivo deste apêndice consiste em explicitar, e conseqüentemente esclarecer, a primeira parte da solução destas integrais finitas, que é a *Parametrização de Feynman*.

Tal estratégia consiste em reescrever os integrandos, iniciando com uma parametrização do denominador. Para isso, notamos que

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n \frac{1}{a_j} &= (-i)^n \int_0^\infty dz_1 \exp(iz_1 a_1) \dots \int_0^\infty dz_n \exp(iz_n a_n) \\ &= (-i)^n \int_0^\infty dz_1 \dots \int_0^\infty dz_n \int_0^\infty \frac{dv}{v} \exp\left(i \sum_{j=1}^n z_j a_j\right) \delta\left(1 - \frac{1}{v} \sum_{j=1}^n z_j\right). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Fazendo então a mudança de variável $z_j = vx_j$, obtém-se

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n \frac{1}{a_j} &= (-i)^n \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_n \int_0^\infty dv v^{n-1} \exp\left(iv \sum_{j=1}^n x_j a_j\right) \delta\left(1 - \sum_{j=1}^n x_j\right) \\ &= (n-1)! \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_n \frac{\delta\left(1 - \sum_{j=1}^n x_j\right)}{\left(\sum_{j=1}^n x_j a_j\right)^n}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Apartir desta parametrização podemos obter outras que levem em consideração a possibilidade de aparecerem propagadores repetidos nos denominadores, isto é, a_j^m com

$m \succ 1$. Para isso basta derivar a expressão (B.4) com relação a algum dos parâmetros a'_j 's. Desta forma teremos:

$$\frac{1}{a_i^2} \prod_{j=1; i \neq j}^n \frac{1}{a_j} = n! \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_n \frac{\delta \left(1 - \sum_{j=1}^n x_j \right) x_i}{\left(\sum_{j=1}^n x_j a_j \right)^{n+1}}. \quad (\text{B.5})$$

Usando estas relações, e outras que podem ser obtidas através de sucessivas aplicações do operador derivada, podemos construir uma lista de identidades que são necessárias para procedermos a parametrização das integrais finitas que surgem ao longo do presente trabalho. Esta lista é formada pelas relações:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[(b-a)z + a]^2}, \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{1}{a^2b} = 2 \int_0^1 \frac{(1-z)dz}{[(b-a)z + a]^3}, \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{1}{a^3b} = 3 \int_0^1 \frac{(1-z)^2 dz}{[(b-a)z + a]^4}, \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{1}{a^4b} = 4 \int_0^1 \frac{(1-z)^3 dz}{[(b-a)z + a]^5}, \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{dy}{[(c-a)z + (b-a)y + a]^3}, \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{1}{a^2bc} = 6 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{(1-y-z)dy}{[(c-a)z + (b-a)y + a]^4}, \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{1}{a^3bc} = 12 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{(1-y-z)^2 dy}{[(c-a)z + (b-a)y + a]^5}, \quad (\text{B.12})$$

Afim de ilustrar a técnica de parametrização, consideremos a terceira integral da expressão (4.18), a qual denominaremos I_2^a , esta é dada por:

$$I_2^a = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)}{(k^2 - m^2) [(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2]} \quad (\text{B.13})$$

Percebe-se que o denominador tem a forma abc , assim sendo, utilizamos a parametrização:

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{dy}{[(c-a)z + (b-a)y + a]^3}. \quad (\text{B.14})$$

Onde identificamos:

$$a = (k^2 - m^2), \quad (\text{B.15})$$

$$b = [(k + k_1)^2 - m^2], \quad (\text{B.16})$$

$$c = [(k + k_2)^2 - m^2]. \quad (\text{B.17})$$

Então,

$$\begin{aligned}
& (c-a)z + (b-a)y + a \\
= & \{[(k+k_2)^2 - m^2] - (k^2 - m^2)\} z \\
& + \{[(k+k_1)^2 - m^2] - (k^2 - m^2)\} y + (k^2 - m^2) \\
= & k^2 + (2k_2 \cdot k + k_2^2) z + (2k_1 \cdot k + k_1^2) y - m^2 \\
= & (k + k_2 z + k_1 y)^2 - k_2^2 z^2 - k_1^2 y^2 - 2k_1 \cdot k_2 z y + k_2^2 z + k_1^2 y - m^2 \\
= & (k + k_2 z + k_1 y)^2 + k_2^2 z(1-z) + k_1^2 y(1-y) - 2k_1 \cdot k_2 z y - m^2 \\
= & k'^2 + H^2,
\end{aligned} \tag{B.18}$$

onde definiu-se:

$$k' \equiv (k + k_2 z + k_1 y), \tag{B.19}$$

e

$$\begin{aligned}
H^2 & \equiv k_2^2 z(1-z) + k_1^2 y(1-y) - 2k_1 \cdot k_2 z y - m^2 \\
& = Q(y, z).
\end{aligned} \tag{B.20}$$

É importante notar que:

$$\frac{\partial Q(y, z)}{\partial y} = k_1^2(1-2y) - 2k_1 \cdot k_2 z. \tag{B.21}$$

Considerando-se as expressões (B.19) e (B.21) deve-se efetuar então o shift no numerador, assim,

$$\begin{aligned}
(k_1^2 + 2k_1 \cdot k) & = [k_1^2 + 2k_1 \cdot (k' - k_2 z - k_1 y)] \\
& = 2k_1 \cdot k' + k_1^2 - 2k_1 \cdot k_2 z - 2k_1^2 y \\
& = 2k_1 \cdot k' + k_1^2(1-2y) - 2k_1 \cdot k_2 z \\
& = 2k_1 \cdot k' + \frac{\partial Q(y, z)}{\partial y}
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Feitas estas redefinições, I_2^a pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
I_2^a & = 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{\partial Q(y, z)}{\partial y} dy \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4 [k'^2 + H^2]^3} \\
& \quad + 4k_1^\alpha \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4 [k'^2 + H^2]^3} k'_\alpha.
\end{aligned} \tag{B.23}$$

Devido ao caráter par da distribuição regularizadora, conserva-se apenas os termos no numerador com potências pares nos momentos de integração, assim

$$(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)_{\text{pares}} = \frac{\partial Q(y, z)}{\partial y}, \tag{B.24}$$

e finalmente, podemos reescrever I_2^a como

$$I_2^a = 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{\partial Q(y, z)}{\partial y} dy \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4 [k'^2 + H^2]^3}. \tag{B.25}$$

Feita a parametrização de Feynman, o passo seguinte para a solução das integrais finitas é o da integração no momento do loop k , e para isso utilizamos a integração dimensional.

Apêndice C

Integração Dimensional

No apêndice anterior consideramos a parametrização de Feynman, a qual é o primeiro passo para a solução das integrais finitas que surgem na análise das funções de Green presentes neste estudo. Para obtermos a solução final destas integrais devemos efetuar a integração dimensional.

Feita a parametrização de Feynman, deixamos as integrais com uma forma do tipo

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(1, k_\mu, k_\mu k_\nu, k^2, k_\mu k_\nu k_\alpha, \dots)}{[k^2 + 2Q \cdot k - H^2]^\alpha} \quad (\text{C.1})$$

Não apresentaremos aqui a dedução do resultado para estas integrais, porém sabemos que o resultado para o conjunto das integrais definidas em (C.1) podem ser obtidas através da manipulação algébrica do resultado de uma única integral (para mais detalhes consultar [25]). Esta é dada por

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}}, \quad (\text{C.2})$$

A partir deste resultado podemos obter a solução para as integrais que aparecem em (??), como mencionado anteriormente. Por exemplo, se desejamos calcular:

$$I_\mu = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha}, \quad (\text{C.3})$$

derivamos ambos os lados da equação (C.2) em relação ao momento externo Q_μ e obtemos

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^{\alpha+1}} = \frac{-i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega + 1) Q_\mu}{\Gamma(\alpha + 1) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega + 1}}. \quad (\text{C.4})$$

Redefinindo $\alpha' = \alpha + 1$, uma vez que α é arbitrário, temos

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \frac{-i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega) Q_\mu}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}}. \quad (\text{C.5})$$

Aplicando este mesmo procedimento de forma sucessiva podemos obter todas as outras soluções necessárias para os cálculos das integrais que surgem na avaliação das funções de Green. Assim sendo, apresentamos a seguir alguns resultados em uma forma genérica necessários para o cálculo das funções consideradas neste trabalho.

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}}, \quad (\text{C.6})$$

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \frac{-i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega) Q_\mu}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}}, \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \frac{i}{(4\pi)^\omega} \left[\frac{Q_\mu Q_\nu \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \delta^{\mu\nu} \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[\frac{Q^2 \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\ &\left. + \frac{\omega \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \frac{-i}{(4\pi)^\omega} \left[\frac{Q_\mu Q_\nu Q_\alpha \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} Q_\alpha + \delta_{\mu\alpha} Q_\nu + \delta_{\alpha\nu} Q_\mu) \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 k_\alpha}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \frac{-i}{(4\pi)^\omega} \left[\frac{Q^2 Q_\alpha \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\ &\left. + \frac{\frac{1}{2}(2\omega + 2) Q_\alpha \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \frac{i}{(4\pi)^\omega} \left[\frac{Q_\mu Q_\nu Q_\alpha Q_\beta \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\ &+ \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} Q_\alpha Q_\beta + \delta_{\mu\alpha} Q_\nu Q_\beta + \delta_{\mu\beta} Q_\nu Q_\alpha + \delta_{\nu\alpha} Q_\mu Q_\beta + \\ &\quad + \delta_{\nu\beta} Q_\mu Q_\alpha + \delta_{\alpha\beta} Q_\mu Q_\nu) \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} + \\ &\left. + \frac{1}{4} (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}) \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 2}} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 k_\alpha k_\beta}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \frac{i}{(4\pi)^\omega} \left[\frac{Q^2 Q_\alpha Q_\beta \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\ &+ \frac{\frac{1}{2} ((2\omega + 4) Q_\alpha Q_\beta + \delta_{\alpha\beta} Q^2) \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} + \\ &\left. + \frac{\frac{1}{4} (2\omega + 2) \delta_{\alpha\beta} \Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 2}} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k^4}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \frac{i}{(4\pi)^\omega} \left[\frac{Q^4 \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\ &+ \frac{(2\omega + 2) Q^2 \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} + \\ &\left. + \frac{\omega(\omega + 1) \Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 2}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

É interessante notar que dos resultados anteriores decorrem as seguintes propriedades:

$$i) \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} f(k^2) k_\alpha = zero, \quad (C.15)$$

$$ii) \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} k_\alpha k_\beta f(k^2) = \frac{g_{\alpha\beta}}{2\omega} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} k^2 f(k^2), \quad (C.16)$$

$$iii) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k_\alpha k_\beta k_\mu k_\nu f(k^2) = \frac{1}{4\omega(\omega+1)} (g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} k^4 f(k^2). \quad (C.17)$$

Os resultados deduzidos acima são suficientes para a solução de todas as integrais de Feynman consideradas no presente trabalho.

Apêndice D

Análise infravermelha das funções Z_k e Y_k

Com a aplicação do procedimento sugerido para o tratamento das integrais de Feynman que contêm o propagador do fóton, a presença ou não de divergência infravermelha pode ser evidenciada no estudo do limite $\mu^2 \rightarrow 0$ de certas funções usadas para parametrizar a parte finita (no regime ultravioleta) resultante das integrais de Feynman.

Façamos aqui a análise das funções Z_k e Y_k no regime infravermelho. Começando pela função Z_k , a qual é definida no caso geral por

$$Z_k(m_1^2; m_2^2; q^2; \lambda^2) = \int_0^1 z^k \ln \left[\frac{q^2(1-z)z + (m_1^2 - m_2^2)z - m_1^2}{-\lambda^2} \right] dz. \quad (\text{D.1})$$

Para o caso em particular que estamos interessados, temos que $m_2^2 = \lambda^2 = m^2$ e $m_1^2 = \mu^2 \rightarrow 0$. Neste caso, temos que Z_k se resume a

$$\lim_{\mu^2 \rightarrow 0} Z_k(\mu^2; m^2; q^2; m^2) = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \int_0^1 z^k \ln \left[\frac{q^2(1-z)z + (\mu^2 - m^2)z - \mu^2}{-m^2} \right] dz. \quad (\text{D.2})$$

Podemos escrever a equação anterior da seguinte forma

$$\lim_{\mu^2 \rightarrow 0} Z_k(\mu^2; m^2; q^2; m^2) = \int_0^1 z^k \ln \left[\frac{q^2(1-z)z + -m^2z}{-m^2} \right] dz \quad (\text{D.3})$$

de modo que

$$\begin{aligned} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} Z_k(\mu^2; m^2; q^2; m^2) &= \int_0^1 z^k \ln z dz + \int_0^1 dz z^k \ln \left[\frac{-q^2z + (q^2 - m^2)z}{-m^2} \right] dz \\ &= -\frac{1}{(k+1)^2} + f_k(q^2; m^2), \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

onde $f_k(q^2; m^2) \in \mathbb{R} \forall q^2 \leq m^2 \wedge k \geq 0$. A função $f_k(q^2; m^2)$ pode ser calculada analiticamente, resultando em

$$f_k(q^2; m^2) = \frac{1}{k+1} \ln \left(\frac{q^2}{m^2} \right) + \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j} k!}{j! (k-j)!} \left(\frac{m^2}{q^2} - 1 \right)^{k-j} g_{j,k}(q^2; m^2), \quad (\text{D.5})$$

onde $g_{j,k}(q^2; m^2)$ é definida por

$$g_{j,k}(q^2; m^2) = \frac{1}{k+1} \left(\frac{m^2}{q^2}\right)^{j+1} \ln\left(\frac{m^2}{q^2}\right) - \frac{1}{k+1} \left(\frac{m^2}{q^2} - 1\right)^{j+1} \ln\left(\frac{m^2}{q^2} - 1\right) - \frac{1}{(k+1)^2} \left[\left(\frac{m^2}{q^2}\right)^{k+1} - \left(\frac{m^2}{q^2} - 1\right)^{k+1} \right]. \quad (\text{D.6})$$

Portanto, verificamos explicitamente o fato de não haver divergência infravermelha associada a função Z_k .

Passamos então para a análise da função Y_k no limite infravermelho. Esta é definida, para o caso em questão, como

$$\lim_{\mu^2 \rightarrow 0} Y_k(\mu^2; m^2; q^2; m^2) = (-m^2) \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{z^k(1-z)dz}{[q^2z(1-z) + (\mu^2 - m^2)z - \mu^2]}. \quad (\text{D.7})$$

Esta integral pode expressa da forma

$$\lim_{\mu^2 \rightarrow 0} Y_k(\mu^2; m^2; q^2; m^2) = (-m^2) \int_0^1 \frac{z^{k-1}(1-z)dz}{[q^2(1-z) - m^2]}. \quad (\text{D.8})$$

Devido ao comportamento funcional do integrando separamos a análise de Y_k em dois casos: $k = 0$ e $k > 0$. Para o primeiro caso, temos

$$\lim_{\mu^2 \rightarrow 0} Y_0(\mu^2; m^2; q^2; m^2) = (-m^2) \int_0^1 \frac{(1-z)dz}{z[q^2(1-z) - m^2]}, \quad (\text{D.9})$$

ou, simplificando algebricamente

$$\lim_{\mu^2 \rightarrow 0} Y_0(\mu^2; m^2; q^2; m^2) = \frac{m^2}{q^2} \int_0^1 \frac{(1-z)dz}{z(z+\alpha)}, \quad (\text{D.10})$$

onde $\alpha \equiv \frac{m^2}{q^2} - 1 > 0$. Nesta última integral já percebemos a presença da divergência infravermelha devido ao polo do integrando em $z = 0$ estar contido na região de integração. A integral acima pode ser trivialmente calculada de modo a obtermos explicitamente o valor

$$\begin{aligned} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} Y_0(\mu^2; m^2; q^2; m^2) &= -\frac{m^2}{q^2} \frac{1}{\alpha} \left[\lim_{l \rightarrow 0} \ln l + (\alpha + 1) \ln\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) \right] \\ &= -\frac{m^2}{m^2 - q^2} \left[\lim_{l \rightarrow 0} \ln l + \frac{m^2}{q^2} \ln\left(\frac{m^2}{m^2 - q^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Para o segundo caso, $k > 0$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} Y_{k>0}(\mu^2; m^2; q^2; m^2) &= (-m^2) \int_0^1 \frac{z^{k-1}(1-z)dz}{[q^2(1-z) - m^2]} \\ &= \frac{m^2}{q^2} \int_0^1 \frac{z^{k-1}(1-z)dz}{(z+\alpha)}. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

É fácil observar que para este caso não teremos problema de divergência devido ao simples fato de o integrando não desenvolver polos no intervalo de integração, já que $\alpha > 0$. No

entanto, é interessante colocar o resultado explícito de $Y_{k>0}$ no limite $\mu^2 \rightarrow 0$, sendo este

$$\begin{aligned}
& \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} Y_{k>0} (\mu^2; m^2; q^2; m^2) \\
&= \frac{m^2}{q^2} (-1)^{k-1} \alpha^{k-1} \left[(\alpha + 1) \ln \left(\frac{1 + \alpha}{\alpha} \right) - 1 \right] \\
& \quad + \frac{m^2}{q^2} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-1)^{k-1-j} (k-1)!}{j^2 (j-1)! (k-1-j)!} \alpha^{k-1-j} \left\{ \frac{1}{(j+1)} \left[(1 + \alpha)^{j+1} - \alpha^{j+1} \right] - \alpha^j \right\} \\
&= \frac{m^2}{q^2} (-1)^{k-1} \left(\frac{m^2 - q^2}{q^2} \right)^{k-1} \left[\frac{m^2}{q^2} \ln \left(\frac{m^2}{m^2 - q^2} \right) - 1 \right] \\
& \quad + \frac{m^2}{q^2} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-1)^{k-1-j} (k-1)!}{j^2 (j-1)! (k-1-j)!} \left(\frac{m^2 - q^2}{q^2} \right)^{k-1-j} \times \\
& \quad \times \left\{ \frac{1}{(j+1)} \left[\left(\frac{m^2}{q^2} \right)^{j+1} - \left(\frac{m^2 - q^2}{q^2} \right)^{j+1} \right] - \left(\frac{m^2 - q^2}{q^2} \right)^j \right\} \tag{D.13}
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] S. Weinberg, “The Quantum Theory of Fields”, Cambridge University Press, (1996)
- [2] P. Ramond; “Field Theory: A modern Primer” Addison-Wesley (1990)
- [3] C. Itzykson an J.B. Zuber; “Quantum Field Theory”, McGraw-Hill, New York (1980)
- [4] R.P. Feynman, “Quantum Electrodynamics”, Frontiers on Physics Lecture note Series, Addison-Wesley (1961)
- [5] F.Gross, “Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory”, John Wiley and Sons, (1993)
- [6] J.Collins, Renormalization, Cambridge University Press, New York (1992)
- [7] T.P. Cheng e L.F. Li, “ Theory of Elementary Particle Physics”, Oxford University Press, New York (1984)
- [8] O. A. Battistel, *PhD Thesis 1999*, Universidade Federal de Minas Gerais, Brazil.
- [9] O. A. Battistel e G. Dallabona, Nucl. Phys. B**610** 317 (2001).
- [10] O. A. Battistel e G. Dallabona, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **27**, L53-L60 (2001).
- [11] O. A. Battistel e G. Dallabona, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **28**, 2539 (2002).
- [12] O. A. Battistel and G. Dallabona, Eur. Phys. J. C **1**, 001 (2003).
- [13] O. A. Battistel e G. Dallabona, *Phys. Rev.* D**72**, 045009 (2005)
- [14] O. A. Battistel e M. C. Nemes, Phys. Rev. D**59** 055010 (1999).
- [15] O. A. Battistel, O. L. Battistel, A. Blin, B. Hiller e M. C. Nemes, *Regularization free systematic treatment of amplitudes and related Ward identities in an SU(2) version of NJL Model*, XIX Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, Caxambu (1998); O. A. Battistel, O. L. Battistel e G. Dallabona, *Meson properties in the SU(2) NJL model*, XXII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, (2002).
- [16] O. A. Battistel, and G. I. Krein, Mod. Phys. Lett. **A18**, 2255 (2002).
- [17] R.L.S. Farias, G. Dallabona, G. I. Krein, and O. A. Battistel, *Phys. Rev.* C**73**, 018201 (2006).
- [18] R.L.S. Farias, G. Dallabona, G. I. Krein, and O. A. Battistel, *Phys. Rev.* C**77**, 065201 (2008).

- [19] R.L.S. Farias, G. Dallabona, G. I. Krein, and O. A. Battistel, AIP Conf. Proc. 739 (2005) 431.
- [20] O. A. Battistel e O. L. Battistel, Int. J. Mod. Phys. **A17**, 1979-2017 (2002).
- [21] O. A. Battistel e G. Dallabona, Phys. Rev. **D65** 125017 (2002).
- [22] G. Dallabona e O. A. Battistel, Phys. Rev. **D70**, 065017 (2004)
- [23] O. A. Battistel e G. Dallabona, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **28**, 1-22 (2002).
- [24] O.A. Battistel, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **30**, 543 (2004).
- [25] E. Gambin, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Maria (2004).