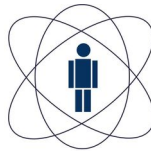


Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Coordenação de Formação Acadêmica
Coordenação de Física Experimental de Altas Energias



CBPF

Centro Brasileiro de
Pesquisas Físicas

Pedro Igor Cavalcante Caneda

Eletrodinâmica Quântica de Lee-Wick

Rio de Janeiro - RJ
12 de setembro de 2016

Pedro Igor Cavalcante Caneda

Eletrodinâmica Quântica de Lee-Wick

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, como requisito parcial para a obtenção do Título de mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Antonio José Accioly

12 de setembro de 2016

À memória de minha avó, Maria Estelina Cavalcante Caneda (1923-2014).

“E tu, Melkor, verás que nenhum tema pode ser tocado sem ter em mim sua fonte mais remota, nem ninguém pode alterar a música contra a minha vontade. E aquele que tentar, provará não ser senão meu instrumento na invenção de coisas ainda mais fantásticas, que ele próprio nunca imaginou.”

- Eru Ilúvatar, Ainulindalë

Agradecimentos

Primeiramente agradeço minha mãe, tia e primo, que sempre me apoiaram e me ensinaram o valor da educação. Também sou grato à minha falecida avó que sonhava em me ver formado.

Agradeço ao professor Accioly pela orientação, discussões e todo o valioso conhecimento transmitido.

Agradeço aos professores José Helayël e Sebastião Alves pelos cursos de alto nível e discussões que foram imprescindíveis à minha evolução como físico.

Aos novos amigos que fiz no CBPF quando cheguei e que me receberam de braços abertos: Laís, por ter me auxiliado nas burocracias e procedimentos internos quando cheguei (e por esse template), bem como um desagrado por colocar o ar-condicionado no mínimo, enlouquecendo todos da sala; Cristofher por me explicar Interstellar; Célio pelas discussões na sala Dirac e pelo café; Yuri, o mesmo que o Célio, porém com funções de Bessel.

Aos que chegaram junto comigo, ou depois: Felipe (FMA) e Amanda (Vasco), que conheci no Big Deep, tanto pelas discussões sobre o padrão e sobre o que não me interessa; Luiz (LFOG) pelo exemplo caxias de organização e desempenho; Guilherme (GB) por discussões relevantes e trabalhos que não me enviou até a presente data; Rafael (tela preta) por discussões sobre o MP (não referentes a tese) e principalmente "Não não não o **"; Alexandre Hefren por me fazer acreditar que não sei não sei equações de Euler-Lagrange e pela sua aula de mecânica clássica ($\phi \equiv \varphi$); Gustavo e Judismar, pelas discussões na sala Dirac e ajuda na mudança, em especial assuntos referentes à presente dissertação. Agradeço também ao Rodrigo Bruni, pelas recentes discussões referente à dissertação.

Aos demais amigos que seguem, amigos mais antigos e queridas Kappa: pelos aris, jogatina e também: Nickolas (Coronel, Pedreiro) pelo DPS, Jauffret (Misera) "vou fazer um toddy"... e nunca mais voltou, Rodrigo (Troll) "Estou cansado porque entrei de férias", Gabriel (Toxicity) pela toxicidade, Marina (não conheço apelido que a agrade) pelas constantes ironias e deboches, Nina (esse nome já é um apelido Keepo) pela incompreensão de convenções sociais e Helena (Alice) por ser tão troll quanto eu.

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
1 Introdução	1
2 QED Finita de Podolsky-Lee-Wick	4
2.1 QED de Lee-Wick	4
2.2 QED de Podolsky	6
2.3 Unitariedade	8
2.4 Acoplamento com a matéria	9
2.5 Alguns aspectos da QED de Podolsky-Lee-Wick	11
3 Limite inferior para a massa do fantasma de Lee-Wick	15
3.1 Limite Clássico para M	15
3.2 O momento magnético do elétron	17
3.3 O momento magnético anômalo do elétron	20
3.3.1 Parametrização de Feynman	22
3.3.2 Calculando \mathcal{N}^μ	23
3.3.3 Calculando o momento magnético anômalo	24
4 Teorias com comprimento mínimo observável	27
4.1 Sobre a existência de um comprimento mínimo observável	27
4.2 O Princípio de Incerteza Generalizado	28
4.2.1 Introduzindo o Comprimento Mínimo	28
4.2.2 Álgebra de Quesne-Tkachuk	30
4.3 QED com comprimento mínimo	33
4.3.1 Teoria livre	33
4.3.2 Teoria interagente	35
4.4 Consequências do comprimento mínimo na QED	37

Resumo

Revisamos a Eletrodinâmica Quântica de Lee-Wick, uma extensão da QED obtida através de derivadas superiores. A teoria apresenta um comportamento ultravioleta refinado, dispensando o programa de renormalização. O preço a pagar por isto é a introdução de um fantasma, um modo massivo que viola a microcausalidade. Limites inferiores para a massa do fantasma são encontrados através de experimentos clássicos e quânticos.

Palavras-chave: QED, Lee-Wick.

Abstract

We revise Lee-Wick Quantum Electrodynamics, an extension of QED obtained through higher derivatives. The theory presents an improved ultraviolet behaviour, dispensing the renormalization program. The price to pay for that is the introduction of a ghost, a massive mode that violates microcausality. Lower bounds for the ghost's mass are found within classical and quantum experiments.

Capítulo 1

Introdução

A teoria quântica de campos (TQC) é atualmente o mais poderoso arcabouço teórico, sendo aplicável a uma vasta gama de fenômenos, desde a escala atômica e molecular até a subnuclear. A Eletrodinâmica Quântica é a teoria quântica de campos mais bem sucedida, possuindo o melhor acordo entre cálculo teórico e medida experimental. A TQC porém apresenta divergências ultravioletas, i.e., a teoria de perturbação fornece resultados infinitos ordem a ordem, o que põe em questão sua validade. Resultados físicos, confirmados experimentalmente, são extraídos subtraindo-se essas divergências, expostas através dos métodos de regularização. O desenvolvimento destas técnicas culminou na Teoria da Renormalização, que classifica diferentes teorias quânticas de campos de acordo com a possibilidade de torná-las finitas e como esse procedimento deve ser então realizado. Dentro deste quadro a QED é uma teoria renormalizável, significando que é necessária a redefinição de apenas um número finito de seus parâmetros para torná-la finita [1, 2].

Antes que o programa de renormalização da QED fosse completado, extensões da própria teoria foram consideradas. Tendo em vista o problema ultravioleta, Podolsky, em 1942, introduziu um termo de derivada quártica à lagrangeana¹, que domina sobre o termo de derivada segunda para altas frequências [3]. Podolsky buscou então impor condições sobre os graus de liberdade adicionais de modo a remover as divergências presentes na teoria usual. A QED de Podolsky [4] apresenta dificuldades adicionais de mais difícil tratamento e interpretação (que serão abordadas ao longo dessa dissertação) e provavelmente por esta razão foi deixada de lado frente ao sucesso do programa de renormalização da QED usual.

Posteriormente em 1969, Lee e Wick propuseram uma nova extensão da QED, visando explicar as massas do espectro hadrônico [5]. Eles introduziram um novo bóson de spin 1 massivo, i.e., um campo de Proca. A característica marcante é que este novo campo é adicionado com sinal negativo, possuindo desta maneira norma negativa. Lee e Wick

¹Derivadas mais altas foram desconsideradas por Podolsky por quebrarem o Princípio de Superposição, i.e., Podolsky buscava uma extensão que fornecesse equações de campos que ainda fossem lineares nos campos elétrico e magnético.

argumentaram que para escalas de energias muito baixas em comparação com a massa deste novo bóson, não haveria problema de instabilidade. Estados de norma negativa eram precisamente um dos problemas presentes na QED de Podolsky. De fato é possível demonstrar que ambas modificações da QED são equivalentes. Portanto os mesmos problemas que afligem a QED de Podolsky se fazem presentes na QED de Lee-Wick. Pouco tempo após a proposta de Lee e Wick, o problema do espectro hadrônico que os motivou foi resolvido no âmbito da QCD e, mais uma vez, a extensão de Podolsky-Lee-Wick voltou a ser ignorada.

Foi somente em 2008 que se reacendeu o interesse na QED de Podolsky-Lee-Wick, através do trabalho de Grinstein, O'Connell e Wise [6]. Eles utilizaram a idéia de Lee e Wick de introduzir novas partículas massivas e de norma negativa em todos os campos do Modelo Padrão. Portanto os novos termos da lagrangiana podem todos ser escritos como termos de derivadas quárticas, devido a equivalência com a QED de Podolsky. Esse Modelo Padrão de Lee-Wick, como é conhecido, embora não seja finito como a extensão correspondente da QED, permanece renormalizável. Sua característica mais marcante é oferecer uma solução alternativa ao problema de hierarquia do Higgs. É claro, no entanto, que as mesmas dificuldades se fazem novamente presentes, só que agora elas afetam todos os campos do Modelo Padrão!

Como podemos então lidar com os estados de norma negativa, os ditos fantasmas? Esse tem sido o foco de muitos trabalhos teóricos e avanços foram de fato alcançados. Atualmente há consciência de que, como diz o jargão, não precisamos ter medo dos fantasmas. Isso expressa o fato de que não estamos rigorosamente livres destes estados, porém no que concerne à realidade observável, eles não se fazem presentes [7]. Fantasmas são importantes apenas como estados virtuais e somente dessa forma podem afetar grandezas mensuráveis. Desse modo teorias de derivadas superiores, ao menos como teorias efetivas, se tornam boas candidatas no que concerne à descrição da realidade.

Paralelamente aos estudos de teorias com derivadas superiores, teorias com comprimento mínimo também foram desenvolvidas. Sugerido por Heisenberg, a existência de um comprimento mínimo naturalmente ofereceria um cut-off às integrais de momento da série perturbativa da TQC. Desse modo todas as divergências ultravioletas em TQC poderiam ser eliminadas através de um único parâmetro físico. O primeiro avanço significativo nessa direção foi devido a Snyder que, através da construção de uma álgebra de Poincaré deformada pela presença de um comprimento mínimo, mostrou que essa hipótese não necessariamente violava a simetria de Lorentz [8]. A álgebra de Snyder se destaca por apresentar um espaço-tempo não comutativo, i.e., os operadores de posição deixam de comutar. Isso por sua vez estimulou o estudo de TQCs em espaço-tempos não comutativos [9]. Porém foi somente com o estudo de efeitos quânticos da gravitação que esta área passou a receber maior atenção. O caminho para quantização da interação gravitacional sugere uma generalização do princípio de incerteza [10, 11]. Esse Princípio

de Incerteza Generalizado (PIG) fornece um comprimento mínimo observável no sentido de uma incerteza mínima na determinação da posição. Foi nesse contexto que a álgebra de Snyder, e a não comutatividade do espaço-tempo, foi generalizada por Kempf através do PIG [12]. Também no contexto de Teoria de Cordas e Loop Quantum Gravity há evidências e diversos estudos sobre comprimento mínimo e não-comutatividade [13,14].

Posteriormente a versão covariantizada da álgebra de Kempf e do PIG foi construída por Quesne-Tkachuk [15]. Com ela foi possível analisar as teorias de derivada superior, dessa vez sobre um novo ponto de vista. O comprimento mínimo aparece na lagrangiana de derivada superior no mesmo lugar em que a massa do fantasma na QED de Podolsky-Lee-Wick, sugerindo então que o fantasma pode ser interpretado como consequência da existência de um comprimento mínimo observável [16]. Ainda mais, essas teorias apresentam regime não-local quando nos aproximamos da escala do comprimento mínimo. Portanto somos tentados a interpretar o fantasma de norma negativa como uma manifestação da não-localidade do espaço-tempo. Sobre essa nova luz é possível recuperar uma versão mais simples do Modelo Padrão de Lee-Wick, pois todos os fantasmas introduzidos possuem claramente a mesma origem e portanto a extensão é feita através da introdução de apenas um parâmetro físico.

Nessa dissertação iremos apresentar as QEDs de Lee-Wick e Podolsky e após mostrar a equivalência entre elas, as consequências dos estados de norma negativa e problemas de não unitariedade e instabilidade são também tratadas. As principais características e resultados desta QED são apresentados. Naturalmente eles dependem do novo parâmetro introduzido, ou seja, a massa do fantasma. Limites inferiores para essa massa são encontrados através de cálculos teóricos baseados em experimentos bem conhecidos. Tendo estabelecido a QED de Podolsky-Lee-Wick, fazemos uma pausa e motivamos então a hipótese do comprimento mínimo e construímos o PIG e álgebra de Quesne-Tkachuk. Com isso somos capazes de estudar a QED na presença de um comprimento mínimo e obter um limite inferior de maneira análoga ao que foi feito na QED de Podolsky-Lee-Wick. A extensão para o Modelo Padrão de Lee-Wick comentada acima não é realizada, mas pode ser obtida de maneira análoga.

Capítulo 2

QED Finita de Podolsky-Lee-Wick

2.1 QED de Lee-Wick

Lee e Wick propuseram uma extensão da QED como tentativa de explicar as diferenças de massa do espectro hadrônico. Bárions e mésons que pertencem ao mesmo multiplete de isospin possuem uma diferença de massa finita. Lee e Wick atribuíram essa diferença a ambiguidades na manipulação de divergências no contexto da QED usual. A solução então proposta por Lee e Wick consistia em adicionar um termo que seria relevante apenas em altas frequências (onde as divergências aparecem), de modo que a QED usual, junto com todos seus sucessos, fosse recuperada no limite de baixa energia. Com isso em mente, Lee e Wick introduziram um novo bóson massivo. Sua massa deveria ser grande em comparação aos demais bósons conhecidos, uma vez que não havia ainda sido detectado. Além disso, no ano anterior ao trabalho de Lee e Wick, uma nova classe de teorias de campo foi descoberta, em que a matriz S é unitária, mas a Lagrangiana não é hermitiana. Lee e Wick foram então levados a substituir o campo A_μ por um novo campo C_μ :

$$C_\mu = A_\mu + B_\mu, \quad (2.1)$$

onde A_μ é o campo do fóton da QED usual e B_μ é o novo campo massivo, anti-hermitiano

$$B_\mu^\dagger = -B_\mu \quad (2.2)$$

Podemos imediatamente generalizar o termo cinético do setor de gauge. Para esse propósito, definimos o field-strength $G_{\mu\nu}$ a partir de B_μ :

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (2.3)$$

Podemos assim expressar o field-strength $C_{\mu\nu}$ de C_μ em função dos field-strengths do fóton e do novo bóson massivo:

$$C_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + G_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

Portanto o termo cinético é simplesmente

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4}C_{\mu\nu}^\dagger C^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

onde os termos cruzados se cancelam devido à não hermiticidade do campo B_μ . Note o sinal trocado do field-strength do novo campo introduzido por Lee e Wick, suas consequências serão discutidas na seção 2.3. À lagrangiana cinética devemos adicionar o termo de massa do campo B_μ , que também entrará com o sinal trocado pela mesma razão. A lagrangiana livre completa é então

$$\mathcal{L}_{LW} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} - \frac{1}{2}M^2 B_\mu B^\mu. \quad (2.6)$$

A lagrangiana claramente possui a forma “Maxwell menos Proca”. Apontamos o fato dessa teoria não ser invariante de gauge por causa do termo de massa. A teoria apresenta uma partícula sem massa, o fóton, e um novo bóson massivo em seu espectro. Retornaremos a esse ponto na próxima seção quando discutirmos a QED de Podolsky e compararmos suas similaridades e diferenças em relação à QED de Lee-Wick.

Torna-mo-nos agora aos propagadores. A_μ é o campo do fóton, cujo propagador pode ser obtido através do procedimento padrão, adicionando-se um termo de fixação de calibre:

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (2.7)$$

que representa a condição de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$. Escrevendo a lagrangiana na forma Campo-Operador-Campo através de integrações por partes e invertendo o operador resultante, encontramos o propagador. No espaço de momenta temos (levando em conta a prescrição adicional da TQC de multiplicar por um fator i):

$$D_{\mu\nu}^{(A)} = -\frac{i}{k^2} \left[\eta_{\mu\nu} + (\lambda - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]. \quad (2.8)$$

O campo B_μ , ao contrário de A_μ não é invariante de calibre, portanto não devemos incluir um termo do tipo (2.7) para o campo B_μ , senão modificamos a física. Repetindo o mesmo procedimento anterior (sem a fixação de calibre) encontramos o propagador do campo B_μ , também no espaço de momenta:

$$D_{\mu\nu}^{(B)} = \frac{i}{k^2 - M^2} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \right). \quad (2.9)$$

Aqui a razão para o limite da QED usual, $M \rightarrow \infty$, fica mais clara, o campo massivo não propaga.

O propagador em (2.9) reflete o sinal errado com o qual o field-strength $G_{\mu\nu}$ entra na lagrangiana. O novo bóson massivo portanto contribui para processos físicos de modo sim-

ilar a um regularizador de Pauli-Villars. A diferença entre a teoria de Lee-Wick e o método de regularização é bastante simples. Na regularização de Pauli-Villars a dependência em M deve desaparecer dos resultados finais, pois faz parte apenas de uma prescrição para identificar e posteriormente remover divergências, enquanto que na teoria de Lee-Wick a massa M é associada a um campo legítimo e está presente já na lagrangiana. Por esta razão, M é tomada como um parâmetro físico da teoria com possíveis consequências observáveis.

2.2 QED de Podolsky

Pouco após a proposta da QED de Lee-Wick surgiu a QCD como teoria das interações fortes. Embora o problema das diferenças de massa não tenha sido resolvido com a QCD, era claro que a discussão deveria se dar em seu âmbito e conseqüentemente a teoria de Lee-Wick foi esquecida por algum tempo. No entanto, o sucesso da teoria de Lee e Wick se deve ao fato dela descrever uma QED com comportamento ultravioleta refinado. Tecnicamente isso é devido ao novo bóson massivo se comportar como um regulador, como discutido na seção anterior. Porém a desvantagem da teoria proposta por Lee e Wick é ela não ser invariante de calibre, enquanto fenômenos eletromagnéticos o são. É portanto natural se perguntar sobre a existência de uma teoria que seja simultaneamente invariante de calibre e finita no regime ultravioleta. A similaridade com a regularização de Pauli-Villars, que altera o comportamento do propagador de k^{-2} para k^{-4} , nos sugere considerar uma teoria de derivada superior. Precisamente somos levados a adicionar um termo de derivada quártica à lagrangiana usual de Maxwell. Em contraste com a teoria de Lee-Wick, nós podemos construir tal termo com apenas um campo, incluindo um termo cinético similar ao usual com a adição de um d'Alembertiano (porque devemos formar um escalar). A lagrangiana de derivada superior é então

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4M^2}F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Essa lagrangiana é de fato invariante de calibre, pois é construída apenas em termos de $F_{\mu\nu}$. Também introduz automaticamente um parâmetro de massa M , uma vez que o d'Alembertiano possui dimensão de massa ao quadrado que deve ser compensada. Impondo que devemos recuperar a QED usual, encontramos prontamente o limite $M \rightarrow \infty$, o mesmo que na teoria de Lee-Wick. Notamos que também é comum encontrar o termo de derivada superior em (2.10) escrito como

$$\frac{1}{2M^2}\partial^\mu F_{\mu\nu}\partial^\lambda F_\lambda{}^\nu, \quad (2.11)$$

com sinal positivo. É imediato mostrar que (2.11) é equivalente ao termo de derivada

superior em (2.10) através de integrações por parte (daí a troca de sinal), enquanto que o fator 2 surge da coleta de termos semelhantes no campo A_μ . A receita é simplesmente fazer a troca

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} \partial^\lambda F_\lambda{}^\nu \leftrightarrow -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

O propagador pode ser calculado através do mesmo procedimento usando a fixação de calibre (2.7). Obtemos

$$D_{\mu\nu} = -i \frac{M^2}{k^2(k^2 - M^2)} \left\{ \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \left[1 + \xi \left(\frac{k^2}{M^2} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (2.13)$$

Por razões práticas é conveniente às vezes decompor o pré-fator em (2.13) em frações parciais:

$$D_{\mu\nu} = i \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - M^2} \right] \left\{ \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \left[1 + \xi \left(\frac{k^2}{M^2} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (2.14)$$

A forma (2.14), por exemplo, é conveniente para o cálculo da correção de vértice, enquanto que (2.13) é mais adequada para o cálculo da polarização do vácuo, onde surge uma série geométrica. O propagador em (2.14) também evidencia mais uma similaridade entre a teoria de derivada superior e a de Lee-Wick, i.e., a estrutura “Maxwell menos Proca”.

Mostraremos agora que o conteúdo de campo da teoria de derivada superior é equivalente ao da teoria de Lee-Wick, i.e., que ambas descrevem dois campos, um sem massa e outro massivo [17, 18]. Isso já pode ser esperado tanto de (2.13) quanto (2.14) se notarmos a presença de dois pólos em $k^2 = 0$ e $k^2 = M^2$. Iremos reduzir a lagrangiana de derivada superior (2.10) à lagrangiana de Lee-Wick (2.6). Isso é feito introduzindo-se um campo auxiliar Z^μ

$$\mathcal{L}_{aux} = \frac{1}{2} A_\mu \square Z^\mu - \frac{1}{2} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu Z^\nu - \frac{M^2}{8} A_\mu A^\mu + \frac{M^2}{4} A_\mu Z^\mu - \frac{M^2}{8} Z_\mu Z^\mu \quad (2.15)$$

que reproduz (2.10) ao eliminarmos Z^μ através da equação de movimento de A_μ (que é encontrada ao se variar com respeito a Z_μ)

$$Z_\mu = A_\mu + \frac{2}{M^2} \square A_\mu - \frac{2}{M^2} \partial_\mu \partial_\nu A^\nu, \quad (2.16)$$

As redefinições de campo

$$A_\mu = B_\mu + C_\mu \quad (2.17)$$

$$Z_\mu = B_\mu - C_\mu, \quad (2.18)$$

diagonalizam (2.15) e levam imediatamente à lagrangiana “Maxwell menos Proca”, como em (2.6).

Enfatizamos agora uma importante diferença entre as teorias apresentadas. Na teoria

de derivada superior (2.10), os campos massivo e sem massa não são independentes, uma vez que são vinculados por (2.16), enquanto que na teoria de Lee-Wick (2.6) não há tal relação. Essa distinção entre ambas teorias pode ser pensada como resultado da imposição da invariância de calibre sobre toda a teoria. Isso é refletido nos graus de liberdade das teorias. Na teoria de Lee-Wick 2 graus de liberdade são provenientes de Maxwell e mais 3 de Proca, totalizando 5 graus de liberdade. Na teoria de derivada superior o vínculo entre os campos reduz os graus de liberdade para 5. A origem desse vínculo entre os modos propagantes da teoria pode ser traçada de volta à imposição da invariância de calibre da teoria completa, o que não ocorre na QED de Lee-Wick.

2.3 Unitariedade

Antes de iniciarmos o desenvolvimento da teoria através da introdução dos campos de matéria, iremos retomar o problema mencionado logo em seguida à equação (2.5): o sinal errado do field-strength do novo bóson massivo introduzido por Lee e Wick. Na teoria de derivada superior esse problema ainda está presente no pólo massivo do propagador (2.13). Em TQC os pólos de propagadores estão relacionados às massas físicas dos modos propagantes. Matematicamente, para cada pólo há um resíduo, cujo significado físico está relacionado com a normalização dos campos. O sinal negativo do resíduo do pólo de $k^2 = M^2$ indica um estado de norma negativa, que implica numa violação de unitariedade na teoria. Por esta razão a partícula pesada de Lee-Wick é usualmente chamada de fantasma¹.

A dificuldade dos estados de norma negativa é comum às teorias com derivadas superiores a dois. O Teorema de Ostrogradsky mostra que a hamiltoniana de teorias de derivadas de ordem superior depende linearmente de algumas variáveis canônicas e por esta razão não é inferiormente limitada [19]. Contudo o Teorema de Ostrogradsky supõe que a teoria não seja degenerada

$$\det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_t^2 \Phi)_\alpha \partial(\partial_t^2 \Phi)_\beta} \right) \neq 0, \quad (2.19)$$

para Φ um campo qualquer em uma dada representação do grupo de Poincaré. Iremos agora mostrar que o contrário vale para a teoria de Lee-Wick, isso é, (2.19) se anula e portanto o Teorema de Ostrogradsky não se aplica. Isso já pode ser esperado, uma vez que a teoria apresenta vínculos, como discutimos na seção anterior.

¹Não um fantasma no mesmo sentido que os fantasmas de Faddeev-Popov, isso é, o modo massivo não é um campo fermiônico descrita por uma lagrangiana bosônica. A partícula pesada de Lee-Wick é um fantasma no sentido de que é um estado de norma negativa que viola unitariedade.

Para o caso da eletrodinâmica de PLW temos $\Phi = A_\alpha$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial_t^2 A_\alpha \partial_t^2 A_\beta} = \frac{1}{M^2} (\eta^{\alpha\beta} - \delta_0^\alpha \delta_0^\beta) \quad (2.20)$$

$$= \frac{1}{M^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

cujos determinando é claramente nulo. A teoria de Lee-Wick é portanto singular.

2.4 Acoplamento com a matéria

O próximo passo é introduzir a matéria fermiônica na teoria. Isso é feito adicionando-se uma lagrangiana de Dirac minimamente acoplada com o campo A_μ . Tecnicamente substituímos a derivada comum pela derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Obtemos assim

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4M^2} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} + i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - e\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu - m\bar{\psi} \psi. \quad (2.22)$$

A corrente eletromagnética

$$j^\mu = e\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (2.23)$$

possui a mesma forma que na QED usual, embora devamos nos lembrar que o acoplamento é feito com o campo de Lee-Wick A_μ que possui ambos modos massivo e sem massa.

Formalmente possuindo a mesma estrutura que na QED usual, a decomposição de Gordon da corrente eletromagnética é preservada. Iremos brevemente derivá-la para fins posteriores. Em geral a corrente eletromagnética conecta dois férmions de momenta inicial e final p e p' , respectivamente

$$j^\mu = e\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p). \quad (2.24)$$

Esses espinores satisfazem as equações de Dirac no espaço de momenta

$$(\gamma^\nu p_\nu - m)u(p) = 0 \quad (2.25)$$

$$\bar{u}(p')(\gamma^\nu p'_\nu - m) = 0. \quad (2.26)$$

Para reproduzir a corrente eletromagnética (2.24) a partir das equações de Dirac acima, multiplicamos a primeira por $e\bar{u}(p')\gamma^\mu$ à esquerda e a segunda por $e\gamma^\mu u(p)$ à direita. Somando ambas equações encontramos

$$e\bar{u}(p')[\gamma^\mu \gamma^\nu p_\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu p'_\nu]u(p) - 2me\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = 0. \quad (2.27)$$

Prontamente identificamos a corrente eletromagnética no segundo termo, então a isolamos e decomponemos o primeiro termo usando a identidade matricial $AB = (\{A, B\} + [A, B])/2$ que para matrizes γ , por formarem uma álgebra de Clifford, se torna

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}, \quad (2.28)$$

onde definimos $\sigma^{\mu\nu} = i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/2$. Substituindo (2.28) de volta em (2.27) encontramos

$$2me\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = e\bar{u}(p')(p' + p)^\mu u(p) + \bar{u}(p)ie\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu u(p), \quad (2.29)$$

ou ainda, definindo o momento transferido $q_\nu = (p' - p)_\nu$:

$$e\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = e\bar{u}(p')u(p)\frac{(p' + p)^\mu}{2m} + \bar{u}(p)\frac{ie\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}u(p). \quad (2.30)$$

Essa é a famosa decomposição de Gordon da corrente eletromagnética. Faremos breves comentários sobre (2.30).

- Podemos interpretar fisicamente a decomposição de Gordon pensando em duas componentes independentes dentro da corrente eletromagnética. A primeira componente representa a densidade de carga, por ser proporcional a $\bar{u}u$. A segunda representa a corrente de spin, pois $\sigma^{\mu\nu}$ é a representação de spin-1/2 dos geradores do grupo de Poincaré. De maneira simples: Corrente EM = Carga + Spin.
- Segue do comentário acima que o acoplamento do spin do elétron com um campo magnético é descrito pelo segundo termo da decomposição, i.e., a corrente de spin. Esse fato será útil quando calcularmos o momento magnético anômalo do elétron.
- Finalmente notamos que a decomposição de Gordon aqui foi feita no contexto da interação eletromagnética apenas. Se permitirmos a interferência da interação fraca, isso é, se considerarmos a teoria eletrofraca, então novas contribuições proporcionais à γ^5 surgem, devido ao caráter violador de paridade da interação fraca. Especificamente um momento de dipolo elétrico, que viola também CP , e um momento de anapólo² são induzidos. Nessa tese, contudo, não consideraremos tais contribuições, uma vez que estão fora da escala de energia a qual estamos nos restringindo nesse trabalho $E < m_\mu^2$, com m_μ a massa do múon.

²O momento de anapólo é a contribuição proporcional à $(q^\mu - \frac{q^2}{2m}\gamma^\mu)\gamma^5$ na decomposição de Gordon da corrente eletrofraca. Uma revisão didática sobre fatores de forma pode ser encontrada em [20].

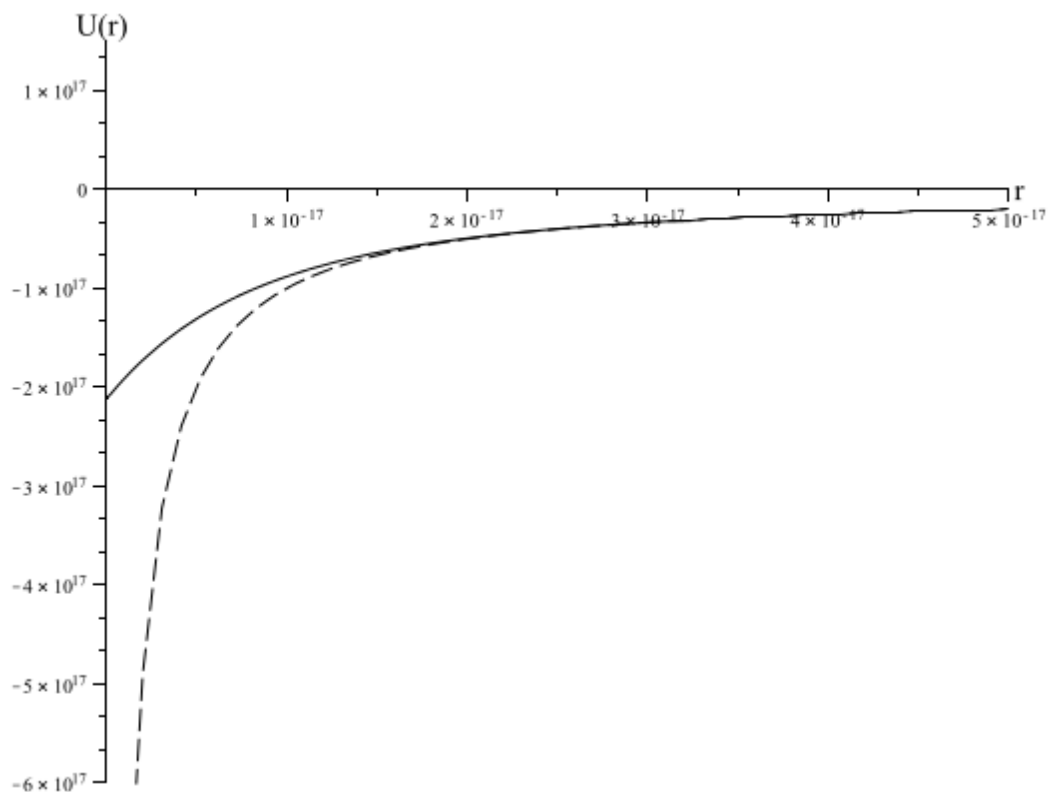


Figura 2.1: Comparação entre as energias potenciais de Lee-Wick (em linha cheia) e Coulomb (em linha tracejada), ambas em unidades de α .

2.5 Alguns aspectos da QED de Podolsky-Lee-Wick

Devida à estrutura “Maxwell menos Proca” do propagador podemos concluir também que a energia potencial de Lee-Wick é da forma “Coulomb menos Yukawa”

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} (1 - e^{-Mr}), \quad (2.31)$$

onde $\alpha = e^2/4\pi$ é a constante de estrutura da QED [21]. Para longas distâncias ($r \gg 1/M$) a contribuição do fantasma é desprezível e recuperamos Coulomb. A energia potencial de Lee-Wick difere da de Coulomb apenas próximo da origem, quando a contribuição do fantasma se torna importante. Particularmente em $r = 0$ temos uma energia finita³

$$U(0) = \alpha M. \quad (2.32)$$

A QED de Lee-Wick então apresenta uma solução ao problema da divergência do campo na origem. Devido a essa característica, a teoria de Lee-Wick pode já a nível clássico quebrar a degenerescência dos níveis $2s$ e $2p$ no átomo de hidrogênio, ao contrário da teoria de Maxwell. Para isso introduzimos a contribuição do fantasma como uma

³Neste gráfico $M = 80.3\text{GeV}$. Este valor será calculado no próximo capítulo como um limite inferior para M .

pequena perturbação em torno do potencial de Coulomb

$$\Delta E = \int d^3x |\psi_{2s}(0)|^2 \frac{\alpha}{r} e^{-Mr}, \quad (2.33)$$

que leva a

$$\Delta E = \frac{\alpha^4 m^3}{2M^2}. \quad (2.34)$$

Esta é apenas a contribuição do fantasma ao Lamb Shift. Todas as demais contribuições já conhecidas, e.g. polarização do vácuo⁴, devem ser levadas em conta antes de utilizarmos (2.34) para estimar a massa do fantasma. Na realidade nos limitaremos aqui apenas à enunciação deste resultado, pois a melhor estimativa possível será feita no próximo capítulo, através do momento magnético anômalo do elétron.

Tendo estabelecido a lagrangiana completa da teoria de Lee-Wick, podemos agora encontrar as equações de movimento. Poderíamos realizar a variação da lagrangiana em relação ao campo A_μ , porém podemos ler as equações de movimento notando que o setor cinético de gauge na QED de Lee-Wick difere da QED usual por uma contribuição \square/M^2 . As equações de movimento são então

$$\left(1 + \frac{\square}{M^2}\right) \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (2.35)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.36)$$

com j^ν a corrente eletromagnética (2.23). A equação de movimento da matéria é a equação de Dirac, uma vez que modificamos apenas o setor de gauge.

Podemos, a partir das equações de movimento, encontrar o tensor de energia momento através da conhecida prescrição de contrair a primeira equação com o field-strength e manipular as derivadas de forma a obtermos uma derivada total. Para isso podemos ainda utilizar a identidade de Bianchi, que equivale à segunda equação, uma vez que a QED de Lee-Wick não a altera⁵. A primeira contribuição reproduz o conhecido resultado da teoria de Maxwell, concentramo-nos então no termo de Lee-Wick. Contraindo com

⁴A polarização do vácuo na QED de PLW também apresenta correções devido ao fantasma [22].

⁵A segunda equação é modificada apenas na presença de monopólos magnéticos.

$F_{\nu\alpha}$ temos (omitimos temporariamente o fator $1/M^2$):

$$\begin{aligned}
F_{\nu\alpha}\square\partial_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}\square F^{\mu\nu}) - (\partial_\mu F_{\nu\alpha})\square F^{\mu\nu} \\
&= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}\square F^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}(\partial_\mu F_{\nu\alpha} - \partial_\nu F_{\mu\alpha})\square F^{\mu\nu} \\
&= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}\square F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(\partial_\alpha F_{\mu\nu})\square F^{\mu\nu} \\
&= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}\square F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\partial_\alpha(F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\square\partial_\alpha F_{\mu\nu} \\
&= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}\square F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\partial_\alpha(F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\square(\partial_\nu F_{\alpha\mu} - \partial_\mu F_{\alpha\nu}) \\
&= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}\square F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\partial_\alpha(F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu}) + F^{\mu\nu}\square\partial_\nu F_{\alpha\mu} \\
&= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}\square F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\partial_\alpha(F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu}) + \partial_\nu(F^{\mu\nu}\square F_{\alpha\mu}) - (\partial_\nu F^{\mu\nu})\square F_{\alpha\mu}. \quad (2.37)
\end{aligned}$$

O último termo se torna

$$\begin{aligned}
-(\partial_\nu F^{\mu\nu})\square F_{\alpha\mu} &= (\partial_\nu F^{\mu\nu})\partial^\beta(\partial_\alpha F^{\mu\beta} + \partial_\mu F^{\beta\alpha}) \\
&= \partial_\alpha(\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\beta F_{\mu\beta}) - \partial_\alpha(\partial_\nu F^{\mu\nu})\partial^\beta F_{\mu\beta} + \partial_\mu(\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\beta F_{\beta\alpha}) \\
&= \partial_\alpha(\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\beta F_{\mu\beta}) + \partial_\mu(\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\beta F_{\beta\alpha}) - \frac{1}{2}\partial_\alpha(\partial_\nu F^{\mu\nu})^2 \\
&= \frac{1}{2}\partial_\alpha(\partial_\nu F^{\mu\nu})^2 + \partial_\mu(\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\beta F_{\beta\alpha}). \quad (2.38)
\end{aligned}$$

Juntado tudo e arrumando os índices, conseguimos escrever o termo de Lee-Wick contraído com $F_{\nu\alpha}$ como uma derivada total. Somando com o resultado da parte de Maxwell temos o tensor energia-momentum da QED de Lee-Wick

$$\begin{aligned}
T^{\mu\alpha} &= F^{\mu\nu}F_\nu^\alpha + \frac{1}{4}\eta^{\mu\alpha}F_{\lambda\nu}F^{\lambda\nu} + \frac{1}{2M^2}\eta^{\mu\alpha}\left[F_{\rho\sigma}\square F^{\rho\sigma} + (\partial_\nu F^{\rho\nu})^2\right] + \\
&\quad + \frac{1}{M^2}\left[F_\nu^\alpha\square F^{\mu\nu} + F_\nu^\mu\square F^{\alpha\nu} + \partial_\nu F^{\mu\nu}\partial_\beta F^{\beta\alpha}\right]. \quad (2.39)
\end{aligned}$$

Podemos ler a energia na componente T^0_0 . Vamos tomar o caso de um campo eletrostático: $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, $\partial_t \mathbf{E} = 0$ e $\mathbf{B} = 0$. Temos a princípio

$$\mathcal{E} = \int d^3\mathbf{x}T^0_0 = \int d^3\mathbf{x}\left[\frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{M^2}\left(-\mathbf{E}\cdot\nabla^2\mathbf{E} + \frac{1}{2}(\nabla\cdot\mathbf{E})^2\right)\right], \quad (2.40)$$

o que pode ser simplificado utilizando a identidade $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E}$ e supondo que $\mathbf{E} \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$. Temos assim

$$\mathcal{E} = \int d^3\mathbf{x}\frac{1}{2}\left[\mathbf{E}^2 + \frac{1}{M^2}(\nabla\cdot\mathbf{E})^2\right]. \quad (2.41)$$

Utilizando a energia potencial de Lee-Wick (2.31) podemos calcular o campo eletrostático

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi r^2} \left[1 - (1 + Mr) e^{-Mr} \right] \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.42)$$

Vemos que o campo eletrostático diverge na origem, apesar do potencial ser finito. Contudo a energia (2.41) também será finita na origem. O campo eletrostático (2.42) contribui com um fator $1/r^2$ que é cancelado pelo elemento de volume. Na eletrodinâmica de Maxwell, por outro lado, a divergência surge porque o campo entra em (2.41) com $1/r^4$. Enfim, a energia eletrostática de uma carga pontual é

$$\mathcal{E} = \frac{\alpha M}{4}. \quad (2.43)$$

Capítulo 3

Limite inferior para a massa do fantasma de Lee-Wick

Para darmos real significado à teoria de Lee-Wick precisamos ao menos ter uma estimativa para o parâmetro introduzido pela teoria, a massa do fantasma M . Iremos impor um limite inferior clássico para M através do antigo experimento de Plimpton e Lawton, envolvendo medidas de potenciais eletrostáticos entre cascas esféricas. Em seguida encontramos um limite inferior quântico para M através da medida do momento magnético anômalo do elétron. Essa grandeza possui a qualidade teórica de ser uma propriedade intrínseca do elétron, enquanto que experimentalmente é o melhor acordo entre teoria e experimento em física. Portanto esperamos que forneça o melhor limite inferior teórico para M .

3.1 Limite Clássico para M

O experimento de Plimpton e Lawton consistia em medir a diferença de potencial entre duas cascas esféricas concêntricas, onde a casca exterior de raio R_2 é carregada com um potencial V e a interior de raio R_1 é mantida descarregada. Plimpton e Lawton constataram que não havia mudança no potencial da casca interior devida à exterior com uma sensibilidade de $1\mu V$ [23]. Podemos utilizar esse limite experimental para encontrar um limite inferior para a massa M do fantasma de Lee-Wick [17].

Para isso precisamos resolver a equação de Gauss da eletrodinâmica de Lee-Wick

$$(1 - l^2 \nabla^2) \nabla^2 \phi = -\rho, \quad (3.1)$$

onde ϕ é o potencial eletrostático, ρ é a densidade de carga e utilizamos $l^2 = 1/M^2$ por conveniência. O potencial é determinado se conhecermos a função de Green $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, sendo

$$\phi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'. \quad (3.2)$$

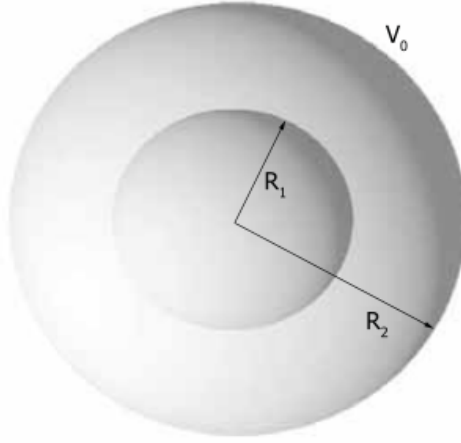


Figura 3.1: Representação da geometria do experimento de Plimpton e Lawton.

Da energia potencial de Lee-Wick (2.31) podemos ler a função de Green

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1 - e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/l}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.3)$$

A densidade de carga para a geometria do experimento de Plimpton-Lawton é claramente $\rho(\mathbf{r}') = \sigma R_2^2$, onde σ é a densidade superficial. Em coordenadas esféricas temos então

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\sigma R_2}{2} \int_{-1}^1 \frac{1 - \exp\left(\frac{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}}{l}\right)}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} \sin \theta d\theta. \quad (3.4)$$

A primeira contribuição do numerador reproduz o resultado da eletrodinâmica de Maxwell $\phi_M = \sigma R_2$. A segunda contribuição, que chamamos de ϕ_{LW} , é facilmente encontrada após a mudança de variável $u = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}$

$$\phi_{LW}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma R_2 l}{r} e^{-R_2/l} \sinh(r/l). \quad (3.5)$$

O potencial eletrostático é portanto

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_M(\mathbf{r}) + \phi_{LW}(\mathbf{r}) = \sigma R_2 \left(1 - \frac{l e^{-R_2/l}}{r} \sinh(r/l) \right). \quad (3.6)$$

É imediato verificar que no limite $l \rightarrow 0$ recuperamos o potencial eletrostático de Maxwell, como deveria ser.

O potencial na casca interior possui a mesma forma que (3.6), bastando substituir $R_1 \rightarrow R_2$. A diferença de potencial relativa entre as cascas esféricas é então

$$\frac{\phi(R_2) - \phi(R_1)}{\phi(R_2)} \approx \frac{l}{2R_2}, \quad (3.7)$$

onde fizemos a aproximação $R_2 \gg l$. A partir dessa expressão encontramos a ex-

pressão para a escala de comprimento associada ao fantasma de Lee-Wick em função dos parâmetros experimentais ($\Delta\phi \equiv \phi(R_2) - \phi(R_1)$)

$$l \approx \frac{2R_2\Delta\phi}{\phi(R_2)}. \quad (3.8)$$

Plimpton e Lawton utilizaram cascas esféricas de raios $R_1 = 0,61\text{m}$ e $R_2 = 0,76\text{m}$ e um potencial $\phi(R_2) = 3\text{kV}$ na casca exterior. Utilizando o limite experimental encontrado por Plimpton e Lawton $\Delta\phi/\phi(R_2) < 1\mu\text{V}$, encontramos o limite superior para l

$$l < 5,1 \times 10^{-10}\text{m}. \quad (3.9)$$

Esse limite pode ser interpretado como um limite inferior para a massa da partícula pesada de Lee-Wick, que em unidades naturais é

$$M > 0,387 \times 10^{-3}\text{MeV}. \quad (3.10)$$

Esse limite é mil vezes inferior à massa do elétron $m = 0,5\text{MeV}$. Esse limite deixa em aberto um grande intervalo de energia no qual a partícula pesada poderia ser produzida e detectada. Porém é um fato experimental que esse fantasma nunca foi detectado, portanto o limite inferior (3.10) deveria ser muito mais alto. Teoricamente esse limite implicaria que não poderíamos desprezar os efeitos do termo de derivada superior e recuperar o eletromagnetismo de Maxwell. Contudo chamamos atenção para o fato de que a análise teórica realizada aqui foi puramente clássica. Na seção seguinte usaremos a QED de Podolsky-Lee-Wick e veremos que o limite é melhorado drasticamente. Nesse espírito vale comentar também que diversos experimentos semelhantes ao de Plimpton e Lawton foram realizados posteriormente, em geral com geometrias diferentes. No entanto como buscamos um limite para uma escala de comprimento muito curta, somos favorecidos por experimentos em que a separação entre as cascas metálicas seja a menor possível, como pode ser constatado a partir de (3.7). Por esta razão o experimento original de Plimpton e Lawton é o que fornece o melhor limite para M , embora seja o mais antigo.

3.2 O momento magnético do elétron

A história do momento magnético do elétron começa na eletrodinâmica clássica. É bem conhecido o resultado de que uma carga em rotação produz um momento de dipolo magnético, como se o elétron fosse uma barra magnética. O momento de dipolo magnético do elétron μ calculado na eletrodinâmica clássica é

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m}\mathbf{L}, \quad (3.11)$$

onde \mathbf{L} é o momento angular orbital do elétron. Porém este resultado da eletrodinâmica clássica está errado por um fator de 2. O resultado foi historicamente corrigido pela introdução do fator giromagnético g

$$\boldsymbol{\mu} = -g \frac{e}{2m} \mathbf{L}. \quad (3.12)$$

Investigações foram feitas para entender a origem do fator g e seu valor $g = 2$. O problema evolui com a descoberta do spin. Tentativas foram feitas para explicar o valor $g = 2$ como a soma de contribuições iguais de momento angular orbital e spin. No entanto, por ser uma partícula de spin $1/2$, a contribuição de spin do elétron devia contribuir apenas com metade do valor de (3.11) ao momento de dipolo magnético. O valor $g = 2$ então não pôde ser obtido. O problema foi então retomado para explicar a razão pela qual o spin do elétron contribuía o dobro do momento angular orbital para o momento de dipolo magnético

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m} (\mathbf{L} + g_s \mathbf{S}), \quad (3.13)$$

onde g_s é o fator giromagnético de spin, que deve ser igual a 2 para reproduzir o valor observado.

Mostraremos agora como esse problema foi resolvido por Dirac em 1928. Começando com a equação de Dirac minimamente acoplada ao eletromagnetismo

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0, \quad (3.14)$$

que expressamos em forma matricial

$$\left[i \begin{pmatrix} \partial_0 & \sigma^i \partial_i \\ -\sigma^i \partial_i & -\partial_0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} A_0 & \sigma^i A_i \\ -\sigma^i A_i & -A_0 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \quad (3.15)$$

onde usamos a representação de Dirac das matrizes γ e os três σ^i denotam as matrizes de Pauli. Além disso, ϕ e χ são os bispinores que compõem ψ . Para tornar o limite não relativístico mais claro, iremos passar para o espaço de momenta. A equação de Dirac se torna:

$$\left[\begin{pmatrix} E & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -E \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} A_0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -A_0 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = 0, \quad (3.16)$$

que se separa em duas equações

$$\begin{cases} (E - m + eA_0)\phi - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})\chi = 0 \\ (E + m + eA_0)\chi - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})\phi = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Até esse ponto tudo é exato e geral. Especializamos agora para o caso de um campo

magnetostático \mathbf{B} , que nos permite tomar $A_0 = 0$:

$$\begin{cases} (E - m)\phi - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})\chi = 0 \\ (E + m)\chi - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})\phi = 0 \end{cases} \implies \chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})}{E + m} \phi. \quad (3.18)$$

O limite não relativístico consiste em tomar a energia de repouso muito maior que a energia cinética, isso é, $E \approx m$. Encontramos assim¹.

$$\chi \approx \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})}{2m} \phi. \quad (3.19)$$

Substituindo esse resultado de volta em (3.18) temos

$$(E - m)\phi = \frac{1}{2m} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2 \phi. \quad (3.20)$$

Reconhecemos a energia cinética $K \equiv i\partial_0 - m$ no lado esquerdo. O lado direito (r.h.s.) é simplificado usando a identidade de Pauli $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, com $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$. O r.h.s. se torna

$$\text{r.h.s.} = \frac{1}{2m} [(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A})] \phi. \quad (3.21)$$

Outra simplificação é feita explorando-se o caráter operatorial de \mathbf{p} . O primeiro e segundo termos se tornam, respectivamente

$$(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 = \mathbf{p}^2 + e^2 \mathbf{A}^2 - e[(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}) + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}] \quad (3.22)$$

$$(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) = -e(\mathbf{p} \times \mathbf{A}). \quad (3.23)$$

Substituindo esses resultados em (3.20) e retornando ao espaço de configurações encontramos

$$K\phi = \frac{1}{2m} [-\nabla^2 + e^2 \mathbf{A}^2 + ie(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) + 2ie\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\nabla} - e\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})] \phi. \quad (3.24)$$

O termo $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\nabla}$ leva ao acoplamento do momento angular orbital com o campo magnético, após usarmos a identidade vetorial $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$:

$$K\phi = \frac{1}{2m} [-\nabla^2 + e^2 \mathbf{A}^2 - e \underbrace{\mathbf{r} \times (-i)\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{B} - e \underbrace{\boldsymbol{\sigma}}_{2\mathbf{S}} \cdot \mathbf{B}] \phi. \quad (3.25)$$

Reconhecemos ambos operadores de momento angular orbital \mathbf{L} e spin, cuja definição é

¹A componente χ assim obtida é conhecida como a componente fraca do espinor de Dirac, pois é supressa com respeito a ϕ por um fator v/c , que aqui não aparece explicitamente devido ao emprego do sistema de unidades naturais

precisamente $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$. Encontramos finalmente:

$$(i\partial_0 - m)\phi = \frac{1}{2m}[-\nabla^2 + e^2\mathbf{A}^2 - e(\mathbf{L} + 2\mathbf{S})\cdot\mathbf{B}]\phi = 0. \quad (3.26)$$

Essa é a famosa equação de Pauli. Aqui ela foi derivada como o limite não relativístico da equação de Dirac minimamente acoplada com o campo eletromagnético. Vemos claramente que o spin é duplamente mais efetivo na geração de um campo magnético que o momento angular orbital. A equação de Dirac portando naturalmente produz o fator giromagnético $g = 2$ que historicamente havia sido posto à mão para alcançar acordo entre teoria e experimento. Esse foi um dos mais importantes resultados da equação de Dirac, que refletem sua grande importância.

3.3 O momento magnético anômalo do elétron

A solução do problema $g = 2$ foi um presente da equação de Dirac, surgindo do tratamento adequado da natureza espionorial da matéria ferminônica. O avanço das técnicas experimentais revelou posteriormente um pequeno desvio em torno do valor $g = 2$. Esse desvio é conhecido como o momento magnético anômalo do elétron e é definido como

$$a_e = \frac{g - 2}{2}. \quad (3.27)$$

Isso levantou a questão quanto a sua origem. Podemos inocentemente argumentar que esse não é um defeito da equação de Dirac, mas da descrição inadequada do próprio campo eletromagnético, que entra em (3.26) como um campo clássico. Esse raciocínio está quase correto, no sentido de que devemos tratar o eletromagnetismo quanticamente, e de fato o valor correto de g (ou a_e) seguirá disso, apesar de que um elétron acoplado a um campo magnético clássico externo também apresenta essa anomalia. Caímos então no domínio da QED.

Para evitar confusões conceituais, enfatizamos que o momento magnético anômalo do elétron é dependente do fóton, no sentido que sem ele não seríamos sequer capazes de detectá-lo. Não obstante, essa propriedade, como qualquer outra propriedade eletromagnética, é até certo grau intrínseca ao elétron. Por intrínseca nos referimos àquela “quantidade” de tal propriedade que estaria presente mesmo se desligássemos completamente o campo eletromagnético. Esse comentário levará a uma simplificação importante mais à frente.

Se um experimento visa medir as propriedades eletromagnéticas do elétron, em nosso caso seu momento de dipolo magnético, então esse experimento deve lidar com a interação de um elétron com o campo eletromagnético. A interação eletromagnética, por sua vez, está contida no vértice da QED. Portanto nos voltamos ao cálculo da correção de vértice.

O efeito da correção de vértice é produzir uma função de vértice não trivial $ie\gamma^\mu \rightarrow ie\Gamma^\mu$. Por definição, a função de vértice deve conter a identidade eletromagnética da partícula. A contribuição a nível de árvore $ie\gamma^\mu$ de fato carrega as propriedades eletromagnéticas do elétron, como mostramos através da decomposição de Gordon (2.30). Esperamos então que a correção de vértice modifique os coeficientes de (2.30)

$$\Gamma^\mu(p', p) = F_Q(q^2)\gamma^\mu + F_M(q^2)\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}. \quad (3.28)$$

$F_Q(q^2)$ e $F_M(q^2)$ são conhecidos como fatores de forma. $F_Q(q^2)$ é o fator de forma de carga e $F_M(q^2)$ é o fator de forma de momento de dipolo magnético. Devemos então olhar para $F_M(q^2)$ para extrairmos o momento magnético anômalo do elétron. A dependência em q^2 , o único escalar não trivial disponível no problema, representa o momento do campo eletromagnético externo. Quando calcularmos o momento magnético anômalo precisaremos tomar $q^2 = 0$, desligando o campo eletromagnético, em certo ponto para obtermos precisamente a porção do momento magnético anômalo que é intrínseco ao elétron.

Formalmente Γ^μ é a soma do vértice da QED e de todas suas correções. Estamos interessados, porém, apenas na correção dominante, que na linguagem da TQC significa 1 loop. Na QED existe apenas um diagrama de 1 loop, mostrado na Figura 2.1 abaixo. A linha do fóton interno, carregando momentum k , é de natureza quântica, enquanto que a externa, de momentum q , é apenas um dado campo externo.

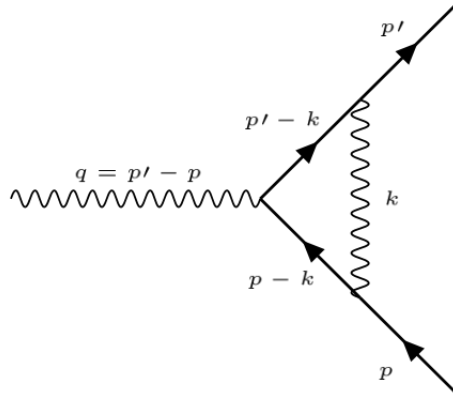


Figura 3.2: Correção de Vértice

Uma aplicação imediata das regras de Feynman fornece a amplitude:

$$\mathcal{M}^{(2)} = ie\bar{u}(p') \underbrace{\delta\Gamma_1^\mu(p', p)}_{\text{Vértice}} u(p) A_\mu(q), \quad (3.29)$$

onde $\delta\Gamma_1^\mu(p', p)$ é a correção de primeira ordem ao vértice da QED, representada graficamente pelo loop. A função de vértice é dada por:

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma_1^\mu &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k D_{\alpha\beta}(k) ie\gamma^\alpha S(p' - k)\gamma^\mu S(p - k) ie\gamma^\beta \\
&= -\frac{i\epsilon^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \left[\frac{1}{k^2 + i\epsilon} - \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \right] \times \\
&\times \gamma^\alpha \frac{\not{p}' - \not{k} + m}{(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{\not{p} - \not{k} + m}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

A contribuição longitudinal do propagador de A_μ foi descartada porque aqui aparece saturada com correntes conservadas. Poder-se-ia pensar em manter os graus de liberdade longitudinais no setor de Proca, porém lembramos que a QED de Lee-Wick é invariante de gauge e por isso a contribuição longitudinal deve sempre desaparecer quando saturada com correntes conservadas.

O cálculo da integral acima envolve duas técnicas: (i) Parametrização de Feynman no denominador e (ii) identidades de contração das matrizes γ no numerador $\mathcal{N}^\mu = \gamma^\alpha(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma_\alpha$. Como o cálculo do denominador envolve uma mudança de variáveis que também afeta o numerador, começamos por (i).

3.3.1 Parametrização de Feynman

Feynman introduziu uma técnica para expressar o produto de denominadores como em (3.30) como um polinômio quadrático elevado a uma potência n , sendo n o número de denominadores. Em nosso caso temos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{ABC} &= 2 \int_0^1 dx dy dz \frac{\delta(x + y + z - 1)}{(xA + yB + zC)^3} = \\
&= 2 \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \frac{1}{[A + y(B - A) + z(C - A)]^3}. \tag{3.31}
\end{aligned}$$

onde $B = (p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon$ e $C = (p - k)^2 - m^2 + i\epsilon$. Para a primeira contribuição ao propagador do fóton (a parte tipo Maxwell) temos $A = k^2 + i\epsilon$, enquanto que para a segunda (a parte tipo Proca) $A = k^2 - M^2 + i\epsilon$. Os dois denominadores se tornam, respectivamente

$$D_1 = [k^2 - 2k \cdot (yp' + zp) + i\epsilon]^3 \tag{3.32}$$

$$D_2 = [k^2 - 2k \cdot (yp' + zp) - (1 - y - z)M^2 + i\epsilon]^3. \tag{3.33}$$

Realizamos a mesma mudança de variável em ambos denominadores $l = k - (yp' + zp)$, levando a

$$D_1 = [l^2 - \Delta_1 + i\epsilon]^3 \text{ and } D_2 = [l^2 - \Delta_2 + i\epsilon]^3, \tag{3.34}$$

onde definimos por simplicidade $\Delta_1 \equiv (y+z)^2 m^2 - yzq^2$ e $\Delta_2 \equiv (y+z)^2 m^2 - yzq^2 + (1-y-z)M^2$. Note que como a mudança de variável é apenas uma translação, temos que $d^4k = d^4l$. Reunindo tudo que fizemos até o momento temos

$$\delta\Gamma_1^\mu(p', p) = -2ie^2 \int dydz \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \mathcal{N}^\mu \left[\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} \right]. \quad (3.35)$$

3.3.2 Calculando \mathcal{N}^μ

O próximo passo consiste em reescrever o numerador \mathcal{N}^μ substituindo $k = l + yp' + zp$. Apesar de simples, é uma longa conta e por esta razão discutimos como abordá-la antes de atacá-la. Começamos nos lembrando que estamos interessados no momento magnético e por esta razão, em vista da identidade de Gordon, podemos jogar fora todos os termos proporcionais à γ^μ e manter apenas aqueles em p^μ e p'^μ . A dependência em ambos momenta pode ser convertida nas combinações lineares $(p' + p)^\mu$ e q^μ (anti)simetrizando-se seus coeficientes. Iremos explicitamente mostrar que o termo q^μ leva a uma integral nula e por isso pode ser descartado. Finalmente utilizaremos a decomposição de Gordon para trocar $(p' + p)^\mu$ por γ^μ , a ser descartado, e $i\sigma^\mu q_\nu$, que já mostramos ser a corrente de spin contida na corrente eletromagnética. Ao longo dos cálculos as seguintes identidades são usadas exaustivamente

$$\not{a}\gamma^\mu = 2a^\mu - \gamma^\mu \not{a} \quad (3.36)$$

$$\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2a \cdot b \quad (3.37)$$

$$\gamma^\nu \not{a}\not{b}\not{c}\gamma_\nu = -2\not{c}\not{b}\not{a}, \quad (3.38)$$

para usarmos as equações de Dirac (no espaço de momenta) $\bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p')m$ e $\not{p}u(p) = mu(p)$.

Vamos colocar a mão na massa. Começamos com

$$\mathcal{N}^\mu = \gamma^\nu (\not{P}' - \not{l} + m) \gamma^\mu (\not{P} - \not{l} + m) \gamma_\nu, \quad (3.39)$$

onde definimos $\not{P}' = (1-y)\not{p}' - z\not{p}$ e $\not{P} = (1-z)\not{p} - y\not{p}'$ por conveniência. É útil organizar as contribuições de acordo com potências de m . O termo em m^2 é proporcional a γ^μ e portanto pode ser descartado. O termo em m é

$$\begin{aligned} & m\gamma^\nu (\not{P}'\gamma^\mu + \gamma^\mu \not{P})\gamma_\nu = \\ & = 4m[(1-2y)p'^\mu + (1-2z)p^\mu] \\ & = 4m(1-y-z)(p' + p)^\mu, \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde no último passo realizamos a simetrização que descrevemos no parágrafo anterior. Podemos jogar fora o termo em q^μ porque ele é antissimétrico em y e z , enquanto que

o denominador é simétrico nesses parâmetros. Trabalhando com o termo m^0 , obtemos:

$$\begin{aligned}
& \gamma^\nu \not{P}' \gamma^\mu \not{P} \gamma_\nu = \\
& = -2 \not{P} \gamma^\mu \not{P}' = \\
& = -2 \{ [(1-z)\not{p} - ym] \gamma^\mu [(1-y)\not{p}' - zm] \} = \\
& = 2m[(y+z)(3-y-z) - 2](p' + p)^\mu,
\end{aligned} \tag{3.41}$$

onde da terceira para quarta linhas coletamos novamente termos em potências de m e jogamos fora todos os termos em γ^μ . Juntando estes resultados encontramos uma expressão surpreendentemente simples

$$\mathcal{N}^\mu = 2m(y+z)(1-y-z)(p' + p)^\mu. \tag{3.42}$$

Aplicando a decomposição de Gordon e lembrando de (3.31) que $x + y + z = 1$ podemos reescrever este resultado de modo ainda mais simples para integração

$$\mathcal{N}^\mu = -4m^2 x(1-x) \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m}. \tag{3.43}$$

3.3.3 Calculando o momento magnético anômalo

Estamos enfim prontos para realizar as integrações em (3.35). Levando (3.43) em (3.35) chegamos a seguinte expressão para o fator de forma $F_M(q^2)$:

$$\begin{aligned}
F_M(q^2) = 8im^2 e^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz x(1-x) \times \\
\times \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(l^2 - \Delta_1 + i\epsilon)^3} - \frac{1}{(l^2 - \Delta_2 + i\epsilon)^3} \right].
\end{aligned}$$

A integral I no 4-momenta l é bem conhecida e seu resultado é (tomando $q^2 = 0$ após a integração):

$$I = \frac{-i}{32\pi^2} \left[\frac{1}{(1-x)^2 m^2} - \frac{1}{(1-x)^2 m^2 - xM^2} \right], \tag{3.44}$$

que leva a

$$F_M(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{x^2 M^2}{(1-x)[(1-x)^2 m^2 + xM^2]}. \tag{3.45}$$

A integral em z é imediata. Definindo o parâmetro infinitesimal $\epsilon \equiv \frac{m^2}{M^2} \ll 1$ encontramos:

$$F_M(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \frac{x^2}{x + \epsilon(1-x)^2}. \tag{3.46}$$

Pausamos rapidamente aqui para apontar que o limite da QED usual se traduz em

tomar $\epsilon \rightarrow 0$. Recuperamos então o conhecido resultado de Schwinger

$$F_M(0) = \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (3.47)$$

Essa correção ao valor $g = 2$ calculado por Dirac se deve à natureza quântica do campo eletromagnético e por isso só pôde ser obtida após o advento da QED. A reobtenção do resultado de Schwinger, apesar de antecipada pela assinatura “Maxwell menos Proca” da teoria de Lee-Wick, nos garante que estamos na direção certa. A correção ao resultado (3.47) na teoria de Lee-Wick é, por sua vez, devido à presença do fantasma massivo de Lee-Wick. Para encontrá-la, calculamos (3.46).

Começamos explicitando o polinômio de segundo grau no denominador $x + \epsilon(1 - x)^2 = \epsilon x^2 + (1 - 2\epsilon)x + \epsilon$. Temos então uma integral racional bem conhecida

$$F_M(0) = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \left[\frac{x}{\epsilon} - \frac{1 - 2\epsilon}{2\epsilon^2} \ln(|x + \epsilon(1 - x)^2|) \right]_0^1 + \frac{(1 - 2\epsilon)^2 - 2\epsilon^2}{2\epsilon^2} \int_0^1 dx \frac{1}{x + \epsilon(1 - x)^2} \right\}.$$

Computando os limites de integração e a segunda integral, similar à anterior, podemos escrever

$$F_M(0) = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \frac{1 - 2\epsilon}{2\epsilon^2} \ln \epsilon + \frac{1 - 4\epsilon + 2\epsilon^2}{2\epsilon^2} \frac{1}{\sqrt{1 - 4\epsilon}} \left[\ln \left(\left| \frac{2\epsilon x + (1 - 2\epsilon) - \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2\epsilon x + (1 - 2\epsilon) + \sqrt{1 - 4\epsilon}} \right| \right) \right]_0^1 \right\}.$$

Calculando os limites de integração encontramos

$$F_M(0) = \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} - \left(\frac{1 - 2\epsilon}{2\epsilon^2} \right) \ln \epsilon + \frac{1 - 4\epsilon + 2\epsilon^2}{2\epsilon^2 \sqrt{1 - 4\epsilon}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\epsilon}}{1 - \sqrt{1 - 4\epsilon}} \right) \right]. \quad (3.48)$$

Até esse ponto tudo é exato (dentro dessa ordem perturbativa). O próximo passo é expandir o terceiro termo de (3.48) em torno de $\epsilon = 0$. O primeiro e segundo termos são divergentes nesse ponto, mas serão cancelados pela expansão do terceiro termo. Chamamos a atenção para o fato de que a expansão deve ir até a quarta ordem para obtermos um resultado em segunda ordem, devido ao fator $1/\epsilon^2$. As expansões são:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - 4\epsilon}} &\approx 1 + 2\epsilon + 6\epsilon^2 + 20\epsilon^3 + 70\epsilon^4 \implies \\ \implies \frac{1 - 4\epsilon + 2\epsilon^2}{2\epsilon^2 \sqrt{1 - 4\epsilon}} &\approx \frac{1 - 2\epsilon + 2\epsilon^4}{2\epsilon^2} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (3.49)$$

e

$$\ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\epsilon}}{1 - \sqrt{1 - 4\epsilon}} \right) \approx - \left[2\epsilon + 3\epsilon^2 + \frac{20}{3}\epsilon^3 + \frac{35}{2}\epsilon^4 + \ln \epsilon \right] + \mathcal{O}(\epsilon^5). \quad (3.50)$$

O terceiro termo se torna então

$$-\frac{1-2\epsilon+2\epsilon^4}{2\epsilon^2} \left(2\epsilon + 3\epsilon^2 + \frac{20}{3}\epsilon^3 + \frac{35}{2}\epsilon^4 + \ln \epsilon \right),$$

que contém as contribuições

$$-\frac{1}{\epsilon} \text{ e } -\frac{1-2\epsilon}{2\epsilon^2} \ln \epsilon, \quad (3.51)$$

que cancelam as divergências do primeiro e segundo termos. Após um breve algebrismo

$$F_M(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[1 - \frac{2}{3}\epsilon - 2 \left(\frac{25}{12} + \ln \epsilon \right) \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right]. \quad (3.52)$$

Note que a contribuição dominante é exatamente o resultado de Schwinger (3.47), como antecipamos. A correção da teoria de Lee-Wick, em primeira ordem, é

$$\frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{\alpha}{3\pi}\epsilon. \quad (3.53)$$

Esse resultado pode ser usado para impor o melhor limite teórico possível para M , comparando o resultado experimental [24]

$$F_M^{exp}(0) = 1159652180.76(0.27) \times 10^{-12} \quad (3.54)$$

ao melhor cálculo teórico (que inclui também correções devido ao Modelo Padrão) [25]

$$F_M^{th}(0) = 1159652182.79(7.71) \times 10^{-12}. \quad (3.55)$$

Atribuindo a discordância entre experimento e teoria devido ao fantasma massivo de Lee-Wick, encontramos o seguinte limite inferior para sua massa

$$M \gtrsim 80.3 \text{ GeV}. \quad (3.56)$$

Este valor é incrivelmente próximo da massa dos bósons W^\pm da teoria eletrofraca, $m_W = 80.385 \text{ GeV}$ [24]. A partir dessa energia bósons W^\pm podem ser produzidos na camada de massa e a teoria eletrofraca deve ser considerada no lugar da QED apenas. Similarmente, a partir de uma certa energia de repouso o fantasma poderia ser produzido na camada de massa e a QED usual falharia. Como tal partícula nunca foi observada deve-se esperar que sua escala de energia de fato ultrapasse a da teoria eletrofraca. De fato com dados experimentais e cálculos teóricos ainda mais precisos no futuro, espera-se que o limite inferior (3.56) cresça. Portanto encaramos o limite inferior $M \approx m_W$ apenas como uma coincidência. Iremos estudar no capítulo seguinte uma reformulação da QED de PLW que nos permitirá impor um limite inferior ainda maior sobre a massa do fantasma².

²Embora, como veremos, a QED estudada a seguir não seja rigorosamente a QED de PLW.

Capítulo 4

Teorias com comprimento mínimo observável

Nesse capítulo iremos supor a existência de um comprimento mínimo observável na natureza como ponto de partida na construção da eletrodinâmica. Iremos mostrar como a partir dessa hipótese podemos alcançar uma teoria mais abrangente e poderosa que engloba teorias de derivada superior, porém distintas de Podolsky-Lee-Wick. Iremos primeiramente esclarecer a motivação para a introdução de um comprimento mínimo observável na natureza e apresentar um argumento, que será suplantado nas demais seções por considerações mais rigorosas, da emergência da não localidade nessa teoria.

4.1 Sobre a existência de um comprimento mínimo observável

A localidade da teoria quântica de campos, expressa matematicamente como (usamos Φ para denotar um campo numa representação qualquer do grupo de Poincaré)

$$[\Phi^\dagger(x), \Phi(y)] = 0, \quad \text{para } (x - y)^2 < 0, \quad (4.1)$$

significa que campos em pontos distintos do espaço-tempo que não se encontram um no cone de luz do outro não possuem relação causal¹, i.e., são independentes. Isso implica que os campos são localizados ponto-a-ponto no espaço-tempo com precisão “infinita”. Para isso os campos deveriam ter momentum infinito, ou ainda, para que permaneçam localizados, campos elementares deveriam possuir massa infinita [26]. Isso é expresso pela

¹Por isso em teoria quântica de campos, localidade, no sentido de ((4.1)), implica também em causalidade. Notamos que esse tipo de localidade (localidade de Einstein, ou localidade causal) é diferente do conceito de (não)-localidade advindo do emaranhamento, cujas correlações são preparadas dentro do mesmo cone de luz, e por isso não violam causalidade.

relação de incerteza

$$\Delta x \sim \frac{1}{m} \Rightarrow \Delta x = 0, m \rightarrow \infty, \quad (4.2)$$

onde a localizabilidade do campo é expressa exatamente pela incerteza nula na posição.

Abrimos um breve parênteses aqui para chamar a atenção de que existe outro tipo possível de comprimento mínimo, no sentido de uma rede discreta. A natureza do comprimento mínimo que aqui expomos não discretiza o espaço-tempo, mas o transforma num borrão que não podemos remover. Em particular a noção de ponto do espaço-tempo ainda existe, embora não possamos penetrar a região que o contém. Tudo o que podemos dizer é que o campo está dentro de uma dada região, que pictoricamente podemos imaginar como uma pequena esfera, cujo raio é o comprimento mínimo, em torno do ponto onde a priori estaria localizado o campo. Ainda mais, essa região existe ponto-a-ponto no espaço-tempo. Dessa forma o conceito de comprimento mínimo não conflita com a simetria de Lorentz, pois não define direções privilegiadas, como no caso de um comprimento mínimo de rede.

Tendo em vista a natureza contínua do espaço-tempo na presença de um comprimento mínimo, temos que campos em pontos cuja separação é menor que o comprimento mínimo possuem uma superposição que não podemos resolver. Dessa consideração segue que esses campos devem possuir alguma relação. Em especial esses campos podem ser separados por uma distância tipo espaço e então não poderíamos mais garantir que (4.1) seja satisfeita

$$[\Phi^\dagger(x), \Phi(y)] \neq 0, \text{ para } (x - y)^2 < 0. \quad (4.3)$$

O comprimento mínimo leva desse modo a uma teoria não-local. A não localidade porém fica restrita apenas a escalas de comprimento extremamente pequenas, da ordem do comprimento mínimo. Garantimos então a localidade das teorias nas escalas que somos capazes de acessar com a atual tecnologia, de modo que não entramos em conflito com a física vigente. Neste capítulo iremos estudar os efeitos do comprimento mínimo numa escala de energia em que a localidade é preservada, de modo que podemos utilizar o maquinário usual da teoria quântica de campos. Fica claro também que a teoria assim construída é de natureza efetiva.

4.2 O Princípio de Incerteza Generalizado

4.2.1 Introduzindo o Comprimento Mínimo

A hipótese do comprimento mínimo requer uma modificação da relação de incerteza para que reflita uma incerteza mínima na posição [26]. Modificação da relação de incerteza automaticamente acarreta uma mudança na álgebra satisfeita pelos operadores de posição

e momentum². Segue também que a representação dos operadores posição e momento será, em princípio, alterada. Por esta razão passaremos a denotar estes operadores com letras maiúsculas X^μ e P^μ , para distinguí-los dos $x^\mu = x^\mu$ e $p^\mu = -i\partial^\mu$ de grandes escalas. Nesta subseção iremos focar no Princípio de Incerteza Generalizado, enquanto que na próxima iremos nos concentrar nas relações de comutação e representações.

A generalização do princípio de incerteza já foi bem estudada no contexto da álgebra de Kempf [12] e também em estudos de gravitação quântica [27–30]. Podemos contudo intuir a forma mais simples de uma relação de incerteza generalizada que comporte uma incerteza mínima na posição. A relação de incerteza original nos diz que poderíamos determinar exatamente a posição em troca de uma incerteza infinita no momentum

$$\Delta x^\mu \Delta p^\nu \geq \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \Rightarrow \Delta x^\mu \rightarrow 0, \text{ conforme } \Delta p^\mu \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Para evitar esse comportamento devemos introduzir no lado direito da relação de incerteza alguma dependência no momentum. Poderíamos a princípio introduzir um termo linear $\alpha \langle P^\mu \rangle$, para alguma constante α , que se cancelaria e forneceria uma incerteza mínima para a posição $\Delta X \geq \hbar\alpha/2$. Esse termo, contudo, não é possível do ponto de vista da covariância. Propomos então uma extensão quadrática nos momenta, cuja forma mais geral é

$$\Delta X^\mu \Delta P^\nu \geq \frac{1}{2} \left| [(1 - \beta \langle P^2 \rangle) \eta^{\mu\nu} - \beta' \langle P^\mu P^\nu \rangle] \right|. \quad (4.5)$$

Essa relação contém a existência de um comprimento mínimo observável em ΔX de um modo mais sutil. Em (4.5) não podemos diminuir arbitrariamente ΔX , pois, através do crescimento de ΔP , eventualmente o lado direito crescerá mais rápido. Para que isso funcione (e também recuperemos a relação de incerteza original) as constantes β e β' devem ser extremamente pequenas. Imaginamos então que β e β' estejam diretamente relacionadas com o comprimento mínimo observável, de forma que $l \equiv l(\beta, \beta')$.

Vamos agora calcular o comprimento mínimo a partir da Princípio de Incerteza Generalizado (4.5). Vamos nos concentrar na parte espacial $\Delta X^i \Delta P^j$. Invariância rotacional permite nos restringirmos à diagonal $\Delta X^i \Delta P^i$

$$\Delta X^i \Delta P^i \geq \frac{1}{2} \left[-(1 - \beta \langle P^2 \rangle) - \beta' \langle (P^i)^2 \rangle \right]. \quad (4.6)$$

Usando agora a definição de desvio padrão na parte espacial de $\langle P^2 \rangle$

$$\Delta X^i \Delta P^i \geq \frac{1}{2} \left[-(1 - \beta \langle (P^0)^2 \rangle) + \beta \sum_i [(\Delta P^i)^2 + \langle P^i \rangle^2] - \beta' ((\Delta P^i)^2 + \langle P^i \rangle^2) \right]. \quad (4.7)$$

²O caminho inverso também pode ser feito, i.e., partir de relações de comutação generalizadas e encontrar uma relação de incerteza generalizada, porém dentro da presente construção de idéias acreditamos que o caminho apresentado seja mais didático.

Supomos agora por simplicidade que as incertezas nos tri-momenta sejam isotrópicas $\Delta P^i = \Delta P$, $\forall i$, o que levará também a incertezas isotrópicas para as posições

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{1}{2} \left[-(1 - \beta \langle (P^0)^2 \rangle + \beta' \langle P^i \rangle^2) - (3\beta + \beta') \Delta P^2 \right]. \quad (4.8)$$

Observe que a mínima incerteza possível para a posição se dará quando os valores esperados dos tri-momenta se anularem, isso leva à

$$\Delta X \geq \frac{1}{2} \left[-\frac{(1 - \beta \langle (P^0)^2 \rangle)}{\Delta P} - (3\beta + \beta') \Delta P \right]. \quad (4.9)$$

O lado direito atinge um mínimo quando

$$\Delta P = \sqrt{\frac{1 - \beta \langle (P^0)^2 \rangle}{3\beta + \beta'}}. \quad (4.10)$$

O comprimento mínimo isotrópico é portanto

$$\Delta X_{\min} \equiv l = \sqrt{(3\beta + \beta')(1 - \beta \langle (P^0)^2 \rangle)}. \quad (4.11)$$

4.2.2 Álgebra de Quesne-Tkachuk

Vamos agora construir as relações de comutação compatíveis com o Princípio de Incerteza Generalizado. A álgebra resultante é conhecida como Álgebra de Quesne-Tkachuk [15]. A relação de comutação entre posição e momentum é diretamente lida de (4.5)

$$[X^\mu, P^\nu] = -i[(1 - \beta P^2)\eta^{\mu\nu} - \beta' P^\mu P^\nu]. \quad (4.12)$$

Para que essa álgebra seja satisfeita, os operadores posição e momento devem ter suas representações alteradas. Para encontrá-las faremos duas hipóteses adicionais. Primeira-mente as novas representações devem ser tais que reproduzam as representações usuais no limite de grandes distâncias em relação ao comprimento mínimo. Isso corresponde ao limite de baixas energias, logo os desvios das representações usuais devem se comportar como p^2 ou $p^\mu p^\nu$. Essa hipótese é necessária por consistência. A segunda hipótese é que a deformação das novas representações com respeito às antigas sejam funções apenas destas combinações de momenta, i.e., não dependem da posição. Isso está de acordo com a idéia de que tais deformações são sentidas puramente devido ao aumento de energia. Propomos então a seguinte forma para os operadores generalizados no limite $p^2 l^2 \rightarrow 0$

$$P^\mu \equiv P^\mu(p) \xrightarrow{p^2 l^2 \rightarrow 0} P^\mu \approx (1 + f(\beta, \beta') p^2) p^\mu \quad (4.13)$$

$$X^\mu \equiv X^\mu(x, p) \xrightarrow{p^2 l^2 \rightarrow 0} X^\mu \approx [(1 + g(\beta, \beta') \{p^2, \}) \eta^{\mu\sigma} + g'(\beta, \beta') \{p^\mu p^\sigma, \}] x_\sigma. \quad (4.14)$$

A presença dos anticomutadores na representação de X^μ reflete a simetrização da deformação, uma vez que x^μ e p^μ não comutam. As deformações são caracterizadas por duas constantes f e g que devem depender *linearmente* apenas das constantes β e β' .

Como o operador dos momenta sofrerá uma deformação que depende apenas dos momenta, podemos concluir imediatamente que

$$[P^\mu, P^\nu] = 0. \quad (4.15)$$

Pelo mesmo argumento vemos que os operadores de posição deixarão de comutar

$$[X^\mu, X^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (4.16)$$

onde colocamos i por conveniência. O tensor $\theta^{\mu\nu}$ é antissimétrico e deve desaparecer no limite de grandes distâncias quando ambos $\beta, \beta' \rightarrow 0$. Concluimos então que a existência de um comprimento mínimo observável induz uma geometria não comutativa no espaço-tempo a distâncias próximas de l . A forma exata do comutador (4.16) pode ser obtida facilmente na representação de momenta $P^\mu = p^\mu$ a partir dos comutadores (4.12) e (4.15). Relegamos a conta ao apêndice e apresentamos aqui o resultado

$$[X^\mu, X^\nu] = i \frac{2\beta - \beta' + (2\beta + \beta')\beta P^2}{1 - \beta P^2} (P^\mu X^\nu - P^\nu X^\mu). \quad (4.17)$$

A partir do comutador (4.16), i.e., sem necessidade da forma explícita, é possível construir uma TQC finita e invariante de Lorentz [31–33].

As relações de comutação (4.12), (4.15) e (4.17) formam a álgebra de Quesne-Tkachuk. Esta álgebra é uma generalização que engloba os limites da teoria quântica de campos usual, quando $\beta, \beta' \rightarrow 0$ e a álgebra de Snyder, quando $\beta = 0$. A álgebra de Kempf pode ser obtida desprezando as contribuições de P^0 , porém o resultado não é o mesmo que aquele que é obtido tomando-se o limite não relativístico $c \rightarrow \infty$.

Uma palavra sobre representações. As constantes f , g e g' não são únicas, i.e., existe mais de uma escolha para essa tripla de constantes que leva a representações que satisfazem (4.12). Isso não é surpreendente, pois na própria mecânica quântica as representações dos operadores posição e momentum não é única. A saber temos a representação de posição $x^i = x^i$, $p^i = -i\partial/\partial x_i$ e a representação de momenta $x^i = i\partial/\partial p_i$, $p^i = p^i$. No entanto a representação de posição não deve existir na Álgebra de Quesne-Tkachuk, devido a existência do comprimento mínimo. Por outro lado a representação de momenta existe, uma vez que não incluímos termos no Princípio de Incerteza Generalizado que levassem a um momenta mínimo. Portanto o uso da representação de momenta para o cálculo de (4.17) é justificado.

Por outro lado podemos nos perguntar o quão próximo podemos chegar de autoestados de posição no limite $p^2 l^2 \rightarrow 0$. Rápida inspeção de (4.17) revela que para $\beta' = 2\beta$ a

comutação se reduz a

$$[X^\mu, X^\nu] = i \frac{4\beta^2}{1 - \beta P^2} (P^\mu X^\nu - P^\nu X^\mu) \approx 4i\beta^2(1 + \beta P^2)(P^\mu X^\nu - P^\nu X^\mu), \quad (4.18)$$

a não comutatividade se revela apenas em segunda ordem em β . Vamos ver agora o que isso implica para as representações de posição e momenta. Substituindo (4.13) e (4.14) em (4.12) encontramos

$$[X^\mu, P^\nu] = -i[1 + (f + 2g)p^2]\eta^{\mu\nu} - i(2f + 2g')p^\mu p^\nu. \quad (4.19)$$

Restringindo-nos a primeira ordem de β e β' , obtemos duas equações

$$f + 2g = -\beta \quad (4.20)$$

$$f + g' = -\frac{\beta'}{2}. \quad (4.21)$$

Impondo agora $\beta' = 2\beta$ obtemos

$$g' = 2g. \quad (4.22)$$

Portanto a representação

$$P^\mu = [1 - (\beta + 2g(\beta))p^2]p^\mu \quad (4.23)$$

$$X^\mu = [(1 + g(\beta)\{p^2, \})\eta^{\mu\sigma} + 2g(\beta)\{p^\mu p^\sigma, \}]x_\sigma \quad (4.24)$$

é a mais geral que garante que a não-comutatividade do espaço-tempo apareça somente a partir da ordem β^2 , ou ainda na ordem de l^4 . Frisamos que nessa última análise nos restringimos somente a primeira ordem de β nas relações de comutação e nas representações. Rigorosamente (4.23) e (4.24) não formam uma representação, pois o comutador em (4.19) que as implicam só coincide com (4.12) em primeira ordem. Porém o uso de (4.23) e (4.24) como representações é legítimo se desprezarmos efeitos de ordem maior no comprimento mínimo.

As representações (4.23) e (4.24) são determinadas a menos da constante $g(\beta)$. Não possuímos formas a priori de determiná-la. Iremos então seguir a literatura e tomar $g = 0$, levando a representação [16, 34–36]

$$X^\mu = x^\mu, \quad (4.25)$$

$$P^\mu = (1 - \beta p^2)p^\mu. \quad (4.26)$$

Essa escolha é mais que meramente por razões de simplicidade, ela também reduz a representação de X^μ à representação usual. Isso permite que ao construirmos lagrangianas, não precisaremos expandir um campo em suas coordenadas para contabilizar sua contribuição

para a teoria em primeira ordem de β . Fosse esse o caso, produziríamos uma lagrangiana com dependência explícita nas coordenadas. Neste caso o comprimento mínimo (4.11) se reduz a

$$l \equiv \sqrt{5\beta(1 - \beta\langle(P^0)^2\rangle)}. \quad (4.27)$$

4.3 QED com comprimento mínimo

4.3.1 Teoria livre

A correção em primeira ordem ao operador de momenta sugere uma deformação da derivada

$$\partial_\mu \mapsto (1 + \beta\Box)\partial_\mu. \quad (4.28)$$

Se introduzirmos esta deformação na QED usual de Maxwell o field-strength se torna $F^{\mu\nu} \mapsto (1 + \beta\Box)F^{\mu\nu}$ que leva a lagrangiana deformada, em primeira ordem em β ,

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{2\beta}{4}F^{\mu\nu}\Box F_{\mu\nu}. \quad (4.29)$$

Esta é precisamente a lagrangiana de ordem superior (2.10) ao identificarmos

$$\beta = \frac{1}{2M^2}. \quad (4.30)$$

Além de recuperarmos a QED de Lee-Wick, ganhamos também uma nova interpretação para o fantasma massivo. O fantasma aqui aparece como manifestação da existência de um comprimento mínimo observável. Vimos no primeiro capítulo que o fantasma produz problemas de unitariedade na teoria que se tornam aparentes apenas a partir do regime de energia onde ele possa ser excitado. Aqui vemos que esse regime corresponde a distâncias próximas do comprimento mínimo. Isso nos fornece uma interpretação mais física da quebra da unitariedade em qualquer teoria de derivadas superiores através do comprimento mínimo. A existência de regiões do espaço-tempo que não podemos acessar, aqui tomada como um princípio físico, exclui o acesso a estados pressupostos na teoria usual. A retirada destes estados somos levados à violação de unitariedade, cuja definição é mantida. Contudo como tais estados jamais poderão ser observados, o que devemos fazer é retirá-los da definição de unitariedade. Dessa forma previsões teóricas poderão ser feitas que cobrem toda a realidade observável sem a aparente violação da unitariedade.

Por ser uma propriedade do espaço-tempo, o comprimento mínimo deve afetar todos os campos fundamentais. O procedimento de deformação (4.28) deve ser sentido também pela matéria fermiônica. Devemos contudo nos lembrar que férmions são atuados pela projeção das derivadas sobre as matrizes γ , i.e., o operador a ser deformado pelo compri-

mento mínimo é $\not{\partial} = \gamma^\alpha \partial_\alpha$. Temos portanto

$$\gamma^\mu \partial_\mu \mapsto (1 + \beta \gamma^\alpha \partial_\alpha \gamma^\beta \partial_\beta) \gamma^\mu \partial_\mu, \quad (4.31)$$

que leva à lagrangiana de Dirac deformada

$$\mathcal{L}_{\text{matéria}} = \bar{\psi} \left(i(1 + \beta \gamma^\alpha \partial_\alpha \gamma^\beta \partial_\beta) \gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi. \quad (4.32)$$

Em uma teoria livre é possível eliminar as matrizes γ notando que $\not{\partial}\not{\partial} = \square$

$$\mathcal{L}_{\text{matéria}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu (1 + \beta \square) \partial_\mu - m) \psi. \quad (4.33)$$

Isso revela que para uma teoria livre ambas deformações (4.28) e (4.31) são equivalentes para o setor fermiônico. A lagrangiana (4.33) é estudada em [35]. A diferença entre ambas deformações surge ao introduzirmos interação através do acoplamento mínimo, pois as derivadas covariantes não comutam. Por hora adiamos a introdução de interação até a próxima subseção. Vamos analisar melhor a (4.33). Se realizarmos uma integração por partes com respeito a uma das derivadas que compõem o d'Alembertiano podemos escrever

$$\mathcal{L}_{\text{matéria}} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - i\beta (\partial_\alpha \bar{\psi}) \gamma^\mu \partial_\mu (\partial^\alpha \psi) - m\bar{\psi} \psi. \quad (4.34)$$

Definindo

$$\psi^\alpha \equiv \partial^\alpha \psi \quad \text{e} \quad \bar{\psi}_\alpha \equiv \partial_\alpha \bar{\psi}, \quad (4.35)$$

podemos reescrever a equação acima

$$\mathcal{L}_{\text{matéria}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - i\beta \bar{\psi}_\alpha \gamma^\mu \partial_\mu \psi^\alpha. \quad (4.36)$$

Essa lagrangiana nos permite pensar na teoria livre de Dirac deformada pelo comprimento mínimo em primeira ordem, ou equivalentemente a teoria de Dirac com derivada superior, como uma teoria livre de Dirac usual para o espinor massivo ψ menos uma teoria livre de Dirac para o campo sem massa $\partial^\alpha \psi$. Frisamos, porém, que essa notação é conveniente apenas para estudar a interação e deve ser restrita apenas para as manipulações matemáticas que faremos a seguir na teoria. Como discutido na Eletrodinâmica de Podolsky-Lee-Wick, o campo ψ na teoria de derivada superior apresentará dois pólos, sendo o segundo correspondente ao fantasma massivo, como mostrado em [35]³. Desse modo o campo ψ_α não corresponde ao fantasma da teoria, por não possuir massa.

³De fato poderíamos ter feito a mesma quebra na teoria de Podolsky-Lee-Wick e escrevê-la como a diferença entre duas teorias de Maxwell, uma para o campo A_μ e a outra para $\partial_\alpha A_\mu$.

Note que a lagrangeana livre completa $\mathcal{L}_{\text{livre}} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{matéria}}$,

$$\mathcal{L}_{\text{livre}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{2\beta}{4}F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu(1 + \beta\square)\partial_\mu - m)\psi \quad (4.37)$$

não é rigorosamente uma generalização da eletrodinâmica de Podolsky-Lee-Wick. O limite $\beta \rightarrow 0$ recupera a QED de Maxwell. Por outro lado a QED de Podolsky-Lee-Wick corresponderia a tomar este limite apenas no setor fermiônico, mantendo o setor de gauge intacto. Essa operação obviamente não possui justificativa a priori. Portanto a QED de Podolsky-Lee-Wick e a QED na presença de um comprimento mínimo são teorias inequivalentes. Neste espírito podemos pensar na QED de Podolsky-Lee-Wick como uma teoria incompleta.

4.3.2 Teoria interagente

Vamos agora introduzir interação através do procedimento de acoplamento mínimo. Apenas $\mathcal{L}_{\text{matéria}}$ será modificado

$$\mathcal{L}_{\text{matéria}} = \bar{\psi}(i(1 + \beta\gamma^\alpha D_\alpha\gamma^\beta D_\beta)\gamma^\mu D_\mu - m)\psi. \quad (4.38)$$

Esta lagrangiana é da mesma forma que a proposta por Grinstein, O'Connell e Wise para o setor fermiônico do Modelo Padrão de Lee-Wick [6]⁴. Decompondo o termo de deformação em parte simétrica e antissimétrica

$$\gamma^\alpha D_\alpha\gamma^\beta D_\beta = \frac{1}{4}\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\}\{D_\alpha, D_\beta\} + \frac{1}{4}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta][D_\alpha, D_\beta] \quad (4.39)$$

e lembrando que o comutador das derivadas covariantes resulta no field-strength

$$[D_\alpha, D_\beta] = ieF_{\alpha\beta}, \quad (4.40)$$

encontramos a lagrangiana interagente

$$\mathcal{L}_{\text{matéria}} = \bar{\psi} \left(\underbrace{i(1 + \beta D_\alpha D_\alpha)\gamma^\mu D_\mu - m}_{\mathcal{L}_S} + i \underbrace{\frac{e\beta}{2}\sigma^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}\gamma^\mu D_\mu}_{\mathcal{L}_A} \right) \psi, \quad (4.41)$$

onde $\sigma^{\alpha\beta}$ é o mesmo definido em (2.28). Note que o primeiro termo \mathcal{L}_S é exatamente o que obteríamos se houvésemos empregado a deformação (4.28) no lugar de (4.31). A diferença entre ambas deformações na teoria interagente é dada pela presença do termo \mathcal{L}_A que vem da parte antissimétrica das derivadas covariantes. Por organização vamos

⁴Com a ressalva de que no Modelo Padrão de Lee-Wick não é a QED que é considerada, mas a teoria de gauge do grupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

estudar cada um desses termos separadamente.

Começaremos por \mathcal{L}_S que contém a lagrangiana original de Dirac minimamente acoplada

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi. \quad (4.42)$$

Desta parte recuperamos imediatamente as interações da QED usual. Os novos vértices aparecerão do termo de derivada superior e são supressos pelo comprimento mínimo. Podemos organizá-los de acordo com a ordem e . Como temos 3 derivadas covariantes teremos contribuições até terceira ordem em e . O termo livre (de ordem e^0) reproduz exatamente o termo cinético do campo ψ^α como em (4.36). Os demais termos de interação são

- Ordem e :

$$-e\beta\bar{\psi}\gamma^\mu[(\square A_\mu) + A_\mu\square + 2(\partial_\alpha A_\mu)\partial^\alpha + (\partial_\alpha A^\alpha)\partial_\mu + 2A^\alpha\partial_\alpha\partial_\mu]\psi. \quad (4.43)$$

- Ordem e^2 :

$$-ie^2\beta\bar{\psi}\gamma^\mu[(\partial_\alpha A^\alpha)A_\mu + 2A^\alpha(\partial_\alpha A_\mu) + 2A^\alpha\partial_\alpha\partial_\mu + A^2\partial_\mu]\psi. \quad (4.44)$$

- Ordem e^3 :

$$e^3\beta\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A^2 A_\mu. \quad (4.45)$$

O termo de primeira ordem em e representa correções ao vértice da QED. Devido aos acoplamentos derivativos isso produzirá uma correção ao potencial de Coulomb que decresce com $1/r^3$. Os termos de segunda e terceira ordem introduzem dois novos vértices onde 2 férmions interagem com 2 ou 3 fótons, respectivamente, onde o primeiro também produz um potencial $1/r^2$. Chamamos a atenção de que estes novos vértices não representam fótons auto-interagindo, a aparição de mais de um fóton num mesmo vértice só se dá na presença de dois férmions⁵.

Estudaremos agora \mathcal{L}_A . Essa parte pode ainda ser decomposta e isso facilitará sua interpretação. Note que ela apresenta o produto de uma matriz γ por um comutador de matrizes γ . Isso nos permite utilizar a identidade

$$\frac{1}{2}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]\gamma^\mu = -i\epsilon^{\mu\alpha\beta\lambda}\gamma^5\gamma_\lambda + \eta^{\mu\alpha}\gamma^\beta - \eta^{\mu\beta}\gamma^\alpha, \quad (4.46)$$

onde $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Substituindo de volta em (4.41) produzimos duas classes de termos

$$\mathcal{L}_A = i\frac{e\beta}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta\lambda}F_{\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma^5\gamma_\lambda D_\mu\psi - \frac{e\beta}{2}F_{\alpha\beta}\bar{\psi}(\gamma^\beta D^\alpha - \gamma^\alpha D^\beta)\psi. \quad (4.47)$$

⁵Lembramos que uma situação análoga ocorre na QED escalar.

O primeiro termo é puramente topológico, i.e., não depende da métrica, enquanto que o segundo apresenta novas formas de interação entre fótons e férmions. O aparecimento de termos topológicos na teoria não é inesperada. A introdução de um comprimento mínimo observável, como já comentamos, define uma região do espaço-tempo que nos é inacessível (mas ainda dentro do cone-de-luz). Podemos imaginá-la efetivamente como um buraco no espaço-tempo, contudo frisamos que o comprimento mínimo observável, no sentido de uma incerteza mínima, não destrói a continuidade do espaço-tempo fora desta região.

Ambos termos de (4.47) são de primeira ordem em β , mas podemos organizá-los também de acordo com a ordem em e ao abrir as derivadas covariantes

$$\mathcal{L}_A = \frac{e\beta}{2}\bar{\psi}F_{\alpha\beta}(i\epsilon^{\mu\alpha\beta\lambda}\gamma^5\gamma_\lambda\partial_\mu + 2\gamma^{[\beta}\partial^{\alpha]})\psi + \frac{e^2\beta}{2}\bar{\psi}F_{\alpha\beta}(\epsilon^{\mu\alpha\beta\lambda}\gamma_\lambda\gamma^5 A_\mu + 2i\gamma^{[\beta}A^{\alpha]})\psi, \quad (4.48)$$

onde definimos $u^{[\alpha}v^{\beta]} = (u^\alpha v^\beta - u^\beta v^\alpha)/2$ como a parte antissimétrica do produto $u^\alpha v^\beta$. Em ordem e vemos mais uma modificação do vértice da QED, enquanto que em ordem e^2 temos mais uma contribuição ao novo vértice de dois férmions com dois fótons.

Comentamos agora sobre uma aparente curiosidade sobre os termos topológicos que surgem de \mathcal{L}_A . O primeiro termo de ordem $e^2\beta$ em (4.48)

$$\frac{e^2\beta}{2}\bar{\psi}F_{\alpha\beta}\epsilon^{\mu\alpha\beta\lambda}\gamma_\lambda\gamma^5 A_\mu\psi \quad (4.49)$$

possui a mesma forma do termo de Carroll-Field-Jackiw (CFJ) [37]

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta\lambda}v_\lambda F_{\alpha\beta}A_\mu \quad (4.50)$$

onde identificamos o vetor de fundo v_λ

$$v_\lambda = \frac{e^2\beta}{2}\bar{\psi}\gamma_\lambda\gamma^5\psi. \quad (4.51)$$

Contudo, ao contrário da QED de CFJ, o vetor v_λ possui dinâmica e portanto não induz violação da simetria de Lorentz. Também no limite de baixas energias em comparação com a massa do elétron, quando eles podem ser integrados, um fóton livre não recebe contribuições de loops fermiônicos que violariam Lorentz. Tecnicamente isso ocorre porque loops fermiônicos são proporcionais a traços de matrizes γ . O vértice de (4.50) porém é proporcional a γ^5 , cujo traço deve ser tomado com no máximo 3 outras matrizes γ e portanto estas contribuições são nulas.

4.4 Consequências do comprimento mínimo na QED

Primeiramente notamos que as correções ao vértice da QED, bem como os novos vértices, são supressos pelo comprimento mínimo. A constante de acoplamento destas

contribuições possuem então dimensão de inverso de massa ao quadrado. Isso é indicativo de uma teoria *não-renormalizável*. Para decidir se de fato a teoria é ou não renormalizável deveríamos verificar se todas as divergências poderiam ser absorvidas nos parâmetros físicos da teoria. Poder-se-ia imaginar que a teoria possui um cut-off natural consequente do comprimento mínimo, porém a QED aqui construída é válida até alguma escala de energia abaixo deste cut-off, devido à escolha da representação (4.25), (4.28). Portanto estamos lidando com uma teoria efetiva que não precisa ser renormalizável.

O setor puro de gauge é idêntico ao da QED de Podolsky-Lee-Wick, portanto os resultados que independem do setor fermiônico são os mesmo, e.g., a energia potencial finita na origem e o tensor energia-momentum do campo de gauge. É claro também que o setor de gauge é ainda degenerado. O setor fermiônico também é degenerado, portanto nenhuma instabilidade é introduzida pelo setor de Dirac com derivada superior.

As diferenças surgem na interação. As contribuições dominantes do comprimento mínimo para a QED podem ser vistas na correção tree-level do vértice. Juntando as contribuições de primeira ordem em $e\beta$ de \mathcal{L}_S e \mathcal{L}_A encontramos após algumas integrações por parte

$$\mathcal{L}_{int}^{(1)} = e\beta \left[\bar{\psi}_\alpha \gamma^\mu \psi^\alpha A_\mu + \bar{\psi} \left(F_{\alpha\mu} + \gamma^5 \tilde{F}_{\alpha\mu} \right) \gamma^\mu \psi^\alpha - (\partial_\mu \bar{\psi}^\alpha) \gamma^\mu \psi A_\alpha - \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi^\alpha) A_\alpha \right], \quad (4.52)$$

onde usamos o tensor dual $\tilde{F}_{\alpha\mu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\mu\lambda\beta} F^{\lambda\beta}$. Podemos reescrever essa expressão na forma $j^\mu A_\mu$ após algumas renomeações de índices e integrações por partes para liberar o campo A_μ . A corrente resultante pode ser quebrada em uma parte métrica e outra topológica $j^\mu = j_{met}^\mu + j_{top}^\mu$, com

$$j_{met}^\mu = e\beta \left[\bar{\psi}_\alpha \gamma^\mu \psi^\alpha + \bar{\psi}^\mu \gamma^\alpha \psi_\alpha - \bar{\psi}_\alpha \gamma^\alpha \psi^\mu + \bar{\psi} \gamma^\mu \square \psi - (\square \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - 2\bar{\psi} \gamma^\alpha \partial^\mu \psi_\alpha \right], \quad (4.53)$$

$$j_{top}^\mu = ie\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu\lambda} \bar{\psi}_\alpha \gamma^5 \gamma_\lambda \psi_\beta. \quad (4.54)$$

Observe que o fator i garante que a corrente topológica seja real, portanto temos uma corrente completamente real. Estas correntes introduzem modificações δV^μ ao vértice $V^\mu = ie\gamma^\mu$ da QED

$$\delta V^\mu = -ie\beta [\gamma^\mu (p' \cdot p + p^2 - p'^2) - \gamma^\alpha (p'^\mu p_\alpha - p'_\alpha p^\mu - 2p_\alpha p^\mu) + i\epsilon^{\alpha\beta\mu\lambda} \gamma^5 \gamma^\lambda p'_\alpha p_\beta]. \quad (4.55)$$

A primeira contribuição, proporcional à γ^μ , pode ser encarada como uma correção à carga elétrica

$$e \mapsto e' = [1 + \beta(p' \cdot p + p^2 - p'^2)]e. \quad (4.56)$$

As demais contribuições por outro lado apresentam uma forma distinta do vértice da QED e portanto não podem ser diretamente absorvidas na carga elétrica. Logo efeitos de comprimento mínimo podem ser observados em medições da constante de acoplamento

da QED através de (4.56). Em processos em que o férmion não muda sua identidade, e.g., espalhamento Møller $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$, os momenta devem estar on-shell, logo a modificação adquire a forma

$$e' = \left[1 - \beta \left(m^2 - \frac{q^2}{2} \right) \right], \quad (4.57)$$

onde q é o momentum transferido.

Essa separação do vértice de acordo com quem carrega o índice livre também é conveniente por tornar claro quais termos contribuirão para a corrente de spin. Tendo em vista a decomposição de Gordon, conclui-se rapidamente que apenas o primeiro termo contribui para o momento de dipolo magnético. Isso acontece porque na segunda contribuição a matriz γ está contraída com os momenta, que por serem simétricos, matam a parte antisimétrica do produto entre matrizes γ . Ainda mais no primeiro termo da função de vértice somente o primeiro, $-iep'.p\gamma^\mu$, contribui para o processo onde os férmions de entrada e saída são os mesmos. Esse é o caso se quisermos falar do momento magnético anômalo do elétron. Esse termo pode ser reescrito ainda lembrando que $p'.p = m^2 - q^2/2$. Portanto no limite $q^2 \rightarrow 0$ resta apenas a massa do elétron. A contribuição topológica também desaparece nesse limite devido a antissimetrização nos momenta de entrada e saída. Logo se restringirmos o interesse apenas na corrente de spin a tree-level e tomarmos o caso limite $q^2 \rightarrow 0$ podemos considerar o vértice simplesmente como

$$V^\mu = ie(1 - m^2\beta)\gamma^\mu. \quad (4.58)$$

Isso nos permite impor um limite inferior para a massa do fantasma ainda melhor, pois a correção aparece já a tree-level. Na teoria de Lee-Wick era necessário irmos até 1 loop, uma vez que lá a única modificação ocorria no propagador do campo A_μ . Isso também torna o cálculo imediato. Tomando os mesmos valores experimentais e teóricos (3.54) e (3.55) encontramos um limite teórico

$$M \gtrsim 254,5 \text{ GeV}. \quad (4.59)$$

Note que esse limite é maior que o encontrado em (3.56). Isso se deve à correção devida ao comprimento mínimo aparecer já a nível de árvore. Esse limite também está acima da massa de todas partículas elementares atualmente conhecidas.

Epílogo

Nesta dissertação apresentamos uma revisão das principais características das já bem conhecidas Eletrodinâmicas de Podolsky e Lee-Wick. A distinção entre as duas é a invariância de gauge, sendo a teoria de Lee-Wick invariante. Contudo mostramos a equivalência entre ambas teorias ao nível das equações de movimento, ou ainda, do espectro de partículas na teoria quântica. A Eletrodinâmica de Podolsky-Lee-Wick oferece uma solução a um antigo problema da teoria de Maxwell, a divergência do campo sobre a carga. Correspondentemente a QED de Podolsky-Lee-Wick não apresenta divergências ultravioletas, em contraste com a QED usual.

A resolução destes problemas é alcançada através da introdução de uma partícula pesada de norma negativa associada ao fóton. Esse fantasma age como regulador das divergências ultravioletas e impõe uma escala de energia até onde a QED de Maxwell é válida. Limites inferiores para esta escala de energia M são estimadas tanto clássica quanto quanticamente. O melhor limite, dado pelo estudo do momento magnético anômalo do elétron, impõe $M \gtrsim 80.3$ GeV. Esse limite é consistente com a escala de energia conhecida da interação eletrofraca $M_{EW} \approx 80$ GeV, a partir da qual a própria QED já falha. Isso garante que os estados de norma negativa na QED de Podolsky-Lee-Wick aparecem apenas como estados virtuais e portanto não destroem a unitariedade da teoria em processos físicos.

Na sequência nos tornamos à observação de que um comprimento mínimo observável estabeleceria uma escala de energia natural que regularia as divergências ultravioletas das TQCs. Com base neste princípio construímos a Álgebra de Quesne-Tkachuk como a mais simples generalização da Álgebra de Heisenberg que admite uma incerteza mínima na posição. A partir de uma representação específica, caracterizada pela escolha $\beta' = 2\beta$ e $g(\beta) = 0$, uma nova QED é construída a partir da QED usual. Reforçamos que a QED resultante é uma teoria efetiva, devido à restrição a uma escala de energia onde o espaço-tempo é ainda comutativo. A teoria é válida então num regime de energia intermediário entre a escala de Planck e o Modelo Padrão. A QED resultante é similar à QED de Podolsky-Lee-Wick, porém formalmente distinta.

A construção da QED na presença de um comprimento mínimo em escalas mais energéticas deve levar em conta mais altas ordens da expansão no comprimento mínimo, até que ultimamente a expansão não seja válida. Ordens mais altas da expansão introduziriam

derivadas superiores de ordens mais altas, do tipo $\beta^n \square^n$, a menos de constantes. Neste caso o espaço-tempo deixaria de ser comutativo já em segunda ordem. Por outro lado, teorias não-locais podem ser vistas como limites de teorias que apresentam uma sequência infinita de derivadas superiores [38]. A construção destas teorias contudo é mais delicada devida a não-comutatividade. Um primeiro passo nessa direção seria estudar, ainda em primeira ordem no comprimento mínimo, a construção desta QED na representação de momenta.

A construção aqui apresentada também poderia ser feita de modo análogo para o Modelo Padrão. O resultado seria uma teoria semelhante ao Modelo Padrão de Lee-Wick, porém com considerável simplificação no espaço de parâmetros, que se reduz agora apenas a um. Seria interessante verificar quais resultados relevantes podem ser obtidos desta observação a partir dos resultados já conhecidos, bem como possíveis novos resultados. Muitas das extensões do Modelo Padrão se referem a alguma escala de energia intermediária abaixo da escala de Planck onde nova física deve surgir.

Finalizando, informamos que os principais resultados apresentados nesta dissertação se encontrarão em [37].

Apêndice A

Cálculo do comutador $[X^\mu, X^\nu]$

Neste apêndice iremos calcular explicitamente o comutador entre os operadores posição na álgebra de Quesne-Tkachuk. Para isso é conveniente trabalharmos na representação dos autoestados de momenta

$$P^\mu \psi(p) = p^\mu \psi(p) \quad (\text{A.1})$$

$$X^\mu \psi(p) = [(1 - \beta P^2) \eta^{\mu\sigma} - \beta' P^\mu P^\sigma] x_\sigma \psi(p), \quad (\text{A.2})$$

onde a atuação de X^μ na função de onda $\psi(p)$, na representação dos momenta, deve assumir a forma acima por consistência com o comutador (4.12) e $x_\sigma = i\partial_{p^\sigma}$ é a i vezes a derivada em relação ao momenta p^σ . Usando então estas representações dos operadores P^μ e X^ν podemos calcular $[X^\mu, X^\nu]$ através dos operadores mais bem conhecidos p^μ e x^μ :

$$\begin{aligned} [X^\mu, X^\nu] &= [(1 - \beta p^2) x^\mu, (1 - \beta p^2) x^\nu] + [(1 - \beta p^2) x^\mu, -\beta' p^\nu p_\sigma x^\sigma] + \\ &+ [-\beta' p^\nu p_\sigma x^\sigma, (1 - \beta p^2) x^\nu] + [-\beta' p^\mu p_\rho x^\rho, -\beta' p^\nu p_\sigma x^\sigma]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Vamos calcular esses 4 comutadores um por vez. O primeiro é

$$\begin{aligned} (i) &= -\beta [p^2, x^\nu] x^\mu - \beta [x^\mu, p^2] x^\nu + \beta^2 [p^2 x^\mu, p^2 x^\nu] = \\ &= 2i\beta p^\nu x^\mu - 2i\beta p^\mu x^\nu + \beta^2 (p^2 [x^\mu, p^2 x^\nu] + [p^2, p^2 x^\nu] x^\mu) = \\ &= -2i\beta (p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu) + \beta^2 (p^2 [x^\mu, p^2] x^\nu + p^2 [p^2, x^\nu] x^\mu) = \\ &= -2i\beta (p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu) + \beta^2 (2ip^2 p^\mu x^\nu - 2ip^2 p^\nu x^\mu) = \\ &= -2i\beta (1 - \beta p^2) (p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

O segundo, por sua vez

$$\begin{aligned}
(ii) &= -\beta' [x^\mu, p^\nu p_\sigma x^\sigma] + \beta' \beta [p^2 x^\mu, p^\nu p_\sigma x^\sigma] = \\
&= -\beta' (p^\nu [x^\mu, p_\sigma x^\sigma] + [x^\mu, p^\nu] p_\sigma x^\sigma) + \beta' \beta (p^2 [x^\mu, p^\nu p_\sigma x^\sigma] + [p^2, p^\nu p_\sigma x^\sigma] x^\mu) = \\
&= -\beta' (p^\nu [x^\mu, p_\sigma] x^\sigma + i\eta^{\mu\nu} p_\sigma x^\sigma) + \beta' \beta (p^2 p^\nu [x^\mu, p_\sigma x^\sigma] + p^2 [x^\mu, p^\nu] p_\sigma x^\sigma + p^\nu p_\sigma [p^2, x^\sigma] x^\mu) = \\
&= -\beta' (ip^\nu x^\mu + i\eta^{\mu\nu} p_\sigma x^\sigma) + \beta' \beta (p^2 p^\nu [x^\mu, p_\sigma] x^\sigma + ip^2 \eta^{\mu\nu} p_\sigma x^\sigma - 2ip^2 p^\nu x^\mu) = \\
&= -i\beta' (p^\nu x^\mu + \eta^{\mu\nu} p_\sigma x^\sigma) + \beta' \beta (ip^2 p^\nu x^\mu + ip^2 \eta^{\mu\nu} p_\sigma x^\sigma - 2ip^2 p^\nu x^\mu) = \\
&= -i\beta' (p^\nu x^\mu + \eta^{\mu\nu} p_\sigma x^\sigma) - i\beta' \beta p^2 (p^\nu x^\mu - \eta^{\mu\nu} p_\sigma x^\sigma) = \\
&= -i\beta' [(1 + \beta p^2) p^\nu x^\mu + (1 - \beta p^2) \eta^{\mu\nu} p_\sigma x^\sigma]. \tag{A.5}
\end{aligned}$$

Note que o terceiro termo pode ser identificado com o segundo através da troca $\mu \leftrightarrow \nu$ e invertendo a ordem do comutador, logo

$$(iii) = i\beta' [(1 + \beta p^2) p^\mu x^\nu + (1 - \beta p^2) \eta^{\mu\nu} p_\sigma x^\sigma]. \tag{A.6}$$

O quarto termo, por sua vez, é o comutador entre momenta multiplicados pelo mesmo operador $p_\sigma x^\sigma$. Decompondo o comutador encontraríamos três tipos de comutadores: entre momenta, que são nulos, entre os operadores $p_\sigma x^\sigma$, também nulos e cruzados entre um momenta e $p_\sigma x^\sigma$, também nulos

$$\begin{aligned}
(iv) &= p^\mu [p_\sigma x^\sigma, p^\nu] + p^\nu [p^\mu, p_\sigma x^\sigma] = \\
&= p^\mu p_\sigma [x^\sigma, p^\nu] + p^\nu p_\sigma [p^\mu, x^\sigma] = \\
&= ip^\mu p^\nu - ip^\nu p^\mu = 0. \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Coletando estes resultados temos

$$[X^\mu, X^\nu] = 2i\beta(1 + \beta p^2)(p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu) - i\beta'(1 - \beta p^2)(p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu), \tag{A.8}$$

onde o primeiro termo é o próprio (i) e o segundo advém da soma (ii) + (iii). Podemos reescrever a equação acima como

$$[X^\mu, X^\nu] = i(2\beta - \beta' + (2\beta + \beta')\beta p^2)(p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu). \tag{A.9}$$

Para fechar a álgebra precisamos expressar esse resultado em termos dos operadores P e X . Como estamos na representação de momenta podemos simplesmente escrever P em lugar dos p . Para produzir X a partir dos x fazemos três operações. Primeiramente apenas extraímos a métrica dos x

$$P^\mu x^\nu - P^\nu x^\mu = P^\mu \eta^{\nu\sigma} x_\sigma - P^\nu \eta^{\mu\sigma} x_\sigma.$$

A seguir multiplicamos e dividimos por $(1 + \beta P^2)$ para produzir o primeiro termo de X e finalmente somamos e subtraímos $\beta' P^\mu P^\nu P^\sigma x_\sigma$ produzindo

$$p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu = P^\mu \left[(1 + \beta P^2) \eta^{\nu\sigma} + \beta' P^\nu P^\sigma x_\sigma \right] - P^\nu \left[(1 + \beta P^2) \eta^{\mu\sigma} + \beta' P^\mu P^\sigma x_\sigma \right], \quad (\text{A.10})$$

os termos entre colchetes são precisamente X^ν e X^μ , respectivamente. Temos portanto

$$[X^\mu, X^\nu] = i \frac{2\beta - \beta' + (2\beta + \beta')\beta P^2}{1 + \beta P^2} (P^\mu X^\nu - P^\nu X^\mu), \quad (\text{A.11})$$

conforme afirmamos anteriormente.

Referências Bibliográficas

- [1] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. 1995.
- [2] Steven Weinberg. *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. Cambridge University Press, 2005.
- [3] Boris Podolsky. A Generalized Electrodynamics Part I-Non-Quantum. *Phys. Rev.*, 62:68–71, 1942.
- [4] Boris Podolsky and Chihiro Kikuchi. A generalized electrodynamics part ii-quantum. *Phys. Rev.*, 65:228–235, Apr 1944.
- [5] T. D. Lee and G. C. Wick. Finite theory of quantum electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 2:1033–1048, Sep 1970.
- [6] Benjamín Grinstein, Donal O’Connell, and Mark B. Wise. The lee-wick standard model. *Phys. Rev. D*, 77:025012, Jan 2008.
- [7] S. W. Hawking and Thomas Hertog. Living with ghosts. *Phys. Rev. D*, 65:103515, May 2002.
- [8] Hartland S. Snyder. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, 71:38–41, Jan 1947.
- [9] Richard J. Szabo. Quantum field theory on noncommutative spaces. *Physics Reports*, 378(4):207 – 299, 2003.
- [10] Michele Maggiore. A generalized uncertainty principle in quantum gravity. *Physics Letters B*, 304(1-2):65–69, 1993.
- [11] Saurya Das and Elias C Vagenas. Universality of quantum gravity corrections. *Physical Review Letters*, 101(22):221301, 2008.
- [12] Achim Kempf, Gianpiero Mangano, and Robert B. Mann. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. *Phys. Rev. D*, 52:1108–1118, Jul 1995.

- [13] Sabine Hossenfelder. Minimal length scale scenarios for quantum gravity. *Living Reviews in Relativity*, 16(2), 2013.
- [14] Nathan Seiberg and Edward Witten. String theory and noncommutative geometry. *Journal of High Energy Physics*, 1999(09):032, 1999.
- [15] C Quesne and V M Tkachuk. Lorentz-covariant deformed algebra with minimal length and application to the $(1 + 1)$ -dimensional dirac oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(34):10909, 2006.
- [16] Apollo V. Silva, E. M. C. Abreu, and M. J. Neves. Quantum electrodynamics and the electron self-energy in a deformed space with a minimal length scale. *International Journal of Modern Physics A*, 31(17):1650096, 2016.
- [17] Antonio Accioly, Patricio Gaete, José Helayël-Neto, Esley Scatena, and Rodrigo Turcati. Exploring lee-wick finite electrodynamics. *arXiv preprint arXiv:1012.1045*, 2010.
- [18] ANTONIO ACCIOLY and ESLEY SCATENA. Limits on the coupling constant of higher-derivative electromagnetism. *Modern Physics Letters A*, 25(04):269–276, 2010.
- [19] Richard P. Woodard. Ostrogradsky’s theorem on Hamiltonian instability. *Scholarpedia*, 10(8):32243, 2015.
- [20] M Nowakowski, E A Paschos, and J M Rodríguez. All electromagnetic form factors. *European Journal of Physics*, 26(4):545, 2005.
- [21] Antonio Accioly, Patricio Gaete, Jose Helayel-Neto, Esley Scatena, and Rodrigo Turcati. Investigations in the lee–wick electrodynamics. *Modern Physics Letters A*, 26(26):1985–1994, 2011.
- [22] Rodrigo Turcati and Mario Junior Neves. Complex-mass shell renormalization of the higher-derivative electrodynamics. *The European Physical Journal C*, 76(8):1–10, 2016.
- [23] S. J. Plimpton and W. E. Lawton. A very accurate test of coulomb’s law of force between charges. *Phys. Rev.*, 50:1066–1071, Dec 1936.
- [24] K. A. Olive et al. Review of Particle Physics. *Chin. Phys.*, C38:090001, 2014.
- [25] Tatsumi Aoyama, Masashi Hayakawa, Toichiro Kinoshita, and Makiko Nio. Tenth-order qed contribution to the electron $g-2$ and an improved value of the fine structure constant. *Phys. Rev. Lett.*, 109:111807, Sep 2012.

- [26] Il-Tong Cheon. Hypothesis of the fundamental length and quantum electrodynamics. *International Journal of Theoretical Physics*, 17(8):611–629, 1978.
- [27] D. Amati, M. Ciafaloni, and G. Veneziano. Can spacetime be probed below the string size? *Physics Letters B*, 216(1):41 – 47, 1989.
- [28] Michele Maggiore. The algebraic structure of the generalized uncertainty principle. *Physics Letters B*, 319(1):83 – 86, 1993.
- [29] LUIS J. GARAY. Quantum gravity and minimum length. *International Journal of Modern Physics A*, 10(02):145–165, 1995.
- [30] Edward Witten. Reflections on the fate of spacetime. *Physics Today*, 49:24–31, 1996.
- [31] Anais Smailagic and Euro Spallucci. UV divergence free QFT on noncommutative plane. *J. Phys.*, A36:L517–L521, 2003.
- [32] Anais Smailagic and Euro Spallucci. Feynman path integral on the noncommutative plane. *J. Phys.*, A36:L467, 2003.
- [33] Anais Smailagic and Euro Spallucci. Lorentz invariance, unitarity in UV-finite of QFT on noncommutative spacetime. *J. Phys.*, A37:1–10, 2004. [Erratum: *J. Phys.*A37,7169(2004)].
- [34] S. K. Moayedi, M. R. Setare, and H. Moayeri. Quantum gravitational corrections to the real klein-gordon field in the presence of a minimal length. *International Journal of Theoretical Physics*, 49(9):2080–2088, 2010.
- [35] S. K. MOAYEDI, M. R. SETARE, H. MOAYERI, and M. POORAKBAR. Formulation of the spinor field in the presence of a minimal length based on the qesne–tkachuk algebra. *International Journal of Modern Physics A*, 26(29):4981–4990, 2011.
- [36] M. Dias, J. M. Hoff da Silva, and E. Scatena. Higher-order theories from the minimal length. *International Journal of Modern Physics A*, 31(16):1650087, 2016.
- [37] Sean M. Carroll, George B. Field, and Roman Jackiw. Limits on a lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 41:1231–1240, Feb 1990.
- [38] D.A. Eliezer and R.P. Woodard. The problem of nonlocality in string theory. *Nuclear Physics B*, 325(2):389 – 469, 1989.
- [37] A. Accioly, G. Brito and P. Caneda. Differences and similarities between the outstanding electrodynamics of Podolsky and Lee-Wick. Submetido à aplicação no *Annals of Physics*.