

CBPF - CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
LAFEX - COORDENACAO DE FÍSICA EXPERIMENTAL DE ALTAS ENERGIAS
GRUPO DE TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS E PARTÍCULAS
ELEMENTARES

**Deflexão gravitacional da luz em um cenário com
violação da simetria de Lorentz**

GUSTAVO PAZZINI DE BRITO

RIO DE JANEIRO
2016

GUSTAVO PAZZINI DE BRITO

**Deflexão gravitacional da luz em um cenário com
violação da simetria de Lorentz**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Antonio José Accioly.

RIO DE JANEIRO

2016

Dedico este trabalho ao meu pai, por todo o apoio e incentivo.

Agradecimentos

Agradeço ao meu pai por todo apoio, incentivo, amizade e muito mais.

À minha mãe, que apesar da distância, sempre esteve presente de forma muito amorosa.

Aos meus avós Neusa e Carlos, meus segundos pais.

À minha família como um todo, por todos os momentos especiais.

Ao professor Accioly que, além de ser um grande orientador, tem sido um grande amigo. Agradeço por todos os bate papos e ensinamentos sobre física e sobre a vida, além de todos os convites para aquele excelente café expresso da UFRJ.

Ao professor José Helayël-Neto, por todo o esforço empregado na formação dos pós-graduandos do CBPF e na criação de um ambiente para reflexões sobre aspectos da natureza.

Ao professor Sebastião Dias, pelo seu esforço na preparação de cursos de altíssimo nível para a pós-graduação do CBPF.

Ao professor Julio Hoff, pessoa fundamental no início da minha vida acadêmica.

Aos professores Gilvan Alves e Rodrigo Sobreiro, pela leitura cuidadosa desse trabalho.

Aos amigos da *sala Dirac*: Célio, Judismar, Yuri, Gabriel, Pedro Caneda, Pedro Malta, Fábio e Gregório, por todas as discussões de física, matemática, política e por todas as conversas fiadas. Em resumo, por fazerem desta a melhor sala do CBPF.

Aos demais colegas do CBPF, em especial: Laís, Vahid, André, José, Anderson e Carlos.

Aos companheiros de APG, por todos os debates, enfrentamentos e conquistas (mesmo que modestas).

Aos colegas da *república Dirac*, em especial ao Luís pelo acolhimento na minha chegada ao Rio de Janeiro.

Aos meus amigos de Guaratinguetá: Alessandro, Gabriel, Nicole e Pedro.

Em especial, deixo o meu agradecimento com muito amor e carinho a uma pessoa que faz a minha vida cada dia melhor: Fernanda Alvarim Silveira. Obrigado por me fazer tão feliz!

Aos funcionários do CBPF, que proporcionam as condições necessárias para a realização de pesquisa e atividades de formação nessa instituição.

Ao povo brasileiro que permite o funcionamento e manutenção das instituições públicas de pesquisa e das agências de fomento.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

*“Num tempo
Página infeliz da nossa história
Passagem desbotada na memória
Das nossas novas gerações
Dormia, a nossa pátria mãe tão distraída
Sem perceber que era subtraída
Em tenebrosas transações”
Vai Passar - Chico Buarque*

Resumo

Neste trabalho investigamos os efeitos de uma possível violação da simetria de Lorentz (VSL) sobre o fenômeno da deflexão gravitacional da luz. Após uma breve revisão do processo de espalhamento gravitacional da luz no contexto da eletrodinâmica de Maxwell, reconsideramos o processo em questão à luz de uma eletrodinâmica com VSL, a saber, a teoria de Carroll-Field-Jackiw. Nesse contexto, derivamos o ângulo de deflexão gravitacional da luz e obtivemos uma contribuição relacionada ao vetor que realiza a VSL. Além disso, constatamos que o ângulo de deflexão gravitacional da luz, na presença da VSL, exibe uma dependência explícita em termos da frequência da luz espalhada. Comparando os nossos resultados teóricos com as medidas experimentais mais recentes podemos estabelecer um limite superior para o vetor de fundo, a saber, $\mathcal{O}(v^\mu) \lesssim 10^{-18}$ GeV. Em vista da existência de limites superiores mais estridentes, concluímos que os efeitos de uma possível VSL não se manifestaria nos experimentos atuais de deflexão gravitacional da luz.

Palavras-Chave: Deflexão gravitacional da luz; Violação da simetria de Lorentz; Carroll-Field-Jackiw.

Abstract

In this work we investigate the effects of a possible Lorentz symmetry violation (LSV) on the phenomenon of gravitational light deflection. After a brief review about the gravitational scattering of light in the context of Maxwell electrodynamics, we reconsider the same process in the light of an electrodynamics with LSV, the Carroll-Field-Jackiw theory. In this context, we compute the angle of the gravitational light bending and, as a result, we obtain a contribution related with the LSV vector. Besides, we observed that the deflection angle, in the presence of LSV, exhibits an explicit dependence in the frequency of the light scattered. Comparing our theoretical results with the most recent experimental measurements we found an upper bound to the background vector, namely, $\mathcal{O}(v^\mu) \lesssim 10^{-18}$ GeV. In view of more stringent limits, we conclude that effects of a possible LSV would not manifest itself in the present experiments of gravitational light deflection.

Sumário

Sumário	vi
Introdução	1
1 Teoria da gravitação linearizada	6
1.1 Elementos geométricos da gravitação linearizada	7
1.2 Dinâmica gravitacional na teoria linearizada da Relatividade Geral . .	10
1.3 Aspectos quânticos da gravitação linearizada: unitariedade e renormalizabilidade	14
1.4 Campo gravitacional para uma fonte puntiforme	18
2 Deflexão gravitacional da luz: Uma abordagem via teoria de espalhamento	19
2.1 A interação do fóton com o campo gravitacional	20
2.2 Espalhamento gravitacional da luz	22
2.3 Ângulo de deflexão gravitacional da luz	26
3 A eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw	27
3.1 A dinâmica da eletrodinâmica de CFJ	28
3.2 Tensor de energia- <i>momentum</i>	30
3.3 Soluções clássicas e modos de propagação	31
3.4 Consistência das soluções clássicas: estabilidade e causalidade	35
3.4.1 Caso 1 - Vetor de fundo tipo-tempo ($v_0 \neq 0$ e $\vec{v} = 0$)	36
3.4.2 Caso 2 - Vetor de fundo tipo espaço ($v_0 = 0$ e $\vec{v} \neq 0$)	37
4 Deflexão gravitacional da luz na presença de violação da simetria de Lorentz	39
4.1 Interação do campo de CFJ com a gravitação	39
4.2 Espalhamento gravitacional da luz na teoria de CFJ	41
4.3 Ângulo de deflexão gravitacional da luz	46

4.4	Comparação com resultados experimentais	48
4.4.1	Caso 1 - Vetor de fundo puramente temporal ($v_0 \neq 0$ e $\vec{v} = 0$): . .	49
4.4.2	Caso 2 - Vetor de fundo puramente espacial ($v_0 = 0$ e $\vec{v} \neq 0$): . .	50
4.4.3	Caso 3 - Vetor de fundo com setores temporal e espacial ($v_0 \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$):	51
	Conclusão	52
	A Operadores de Barnes-Rivers	56
	B Elementos de matriz $\mathcal{M}_{rr'}$	59
	Referências Bibliográficas	61

Introdução

Desde a formulação da teoria da relatividade geral (RG) de Einstein, em 1915, a nossa compreensão sobre a interação gravitacional está intimamente relacionada à geometria do espaço-tempo [1]. Desse modo, esta geometria pode ser determinada, segundo as equações da RG, em termos da distribuição de matéria e energia [2–4]. Essa conexão entre gravitação e geometria conduz a uma das características mais interessantes da interação gravitacional: a sua universalidade. De fato, como as trajetórias das partículas clássicas são geodésicas do espaço-tempo, toda e qualquer partícula sente os efeitos da gravitação devido a alteração da própria estrutura do espaço-tempo.

Um século após a sua formulação, a teoria de Einstein se estabeleceu como um dos pilares da física moderna, passando por todas as verificações experimentais e tendo todas as suas previsões confirmadas [5], como é o caso dos assim chamados testes clássicos da RG: deflexão gravitacional da luz, precessão do periélio de Mercúrio e *redshift* gravitacional. Inclusive, vale destacar a recente confirmação experimental das ondas gravitacionais, previstas pela RG há um século [6]. Além disso, a teoria da RG tem sido utilizada como um paradigma para a compreensão teórica da estrutura do Universo em larga escala [7].

Dentre os testes clássicos da RG mencionados no parágrafo anterior, destacamos o desvio gravitacional da luz. Esse fenômeno merece atenção, não somente por ser uma das mais belas e surpreendentes previsões da RG, mas também pela incrível concordância entre a previsão teórica e os resultados experimentais. De fato, a deflexão gravitacional da luz é obtida como consequência direta do aspecto universal da gravitação. Em outras palavras, as equações de campo da RG indicam que um corpo massivo pode curvar o espaço-tempo, de modo que as geodésicas que determinam a propagação da luz implicam em trajetórias curvilíneas para os raios luminosos.

Como é bem sabido, a primeira observação experimental da deflexão gravitacional da luz ocorreu em 1919. Sem dúvida pode-se dizer que a comprovação desse fenômeno foi fundamental para a aceitação da teoria de Einstein, pois, até 1915, não existia nenhum indicativo da sua ocorrência. Em 1919, Eddington e Dyson organizaram duas expedições separadas, uma em Sobral (no Brasil) e a outra na Ilha do Príncipe (na costa

atlântica da África), com o objetivo de observar esse fenômeno durante o eclipse de 29 de maio daquele ano [8]. Os resultados relatados pelas expedições realizadas no Brasil e na costa da África correspondem, respectivamente, a deflexões de $1.98 \pm 0.16''$ e $1.61 \pm 0.40''$, concordando razoavelmente com a previsão de Einstein. Nas décadas subsequentes uma série de experimentos foram realizados, confirmando a ocorrência do fenômeno. No entanto, a precisão experimental não aumentou de forma considerável até 1976, com o advento dos interferômetros de bases extensas [9]. As medidas experimentais obtidas com a técnica de interferometria de bases extensas apresentam resultados com precisão até a quarta casa decimal [10].

Levando em conta que a gravitação de Einstein é uma teoria puramente geométrica, uma vez determinada a geometria em termos da distribuição de matéria e energia, o efeito da interação gravitacional sobre as partículas clássicas se dá, essencialmente, pela determinação das geodésicas num espaço-tempo curvo e pela especificações das condições iniciais das partículas. Nesse contexto, partículas sujeitas às mesmas condições iniciais irão percorrer as mesmas trajetórias no espaço-tempo, independente das suas características individuais. Do ponto de vista clássico este resultado é completamente coerente, uma vez que as partículas clássicas são tratadas como puntiformes e sem estruturas internas. No entanto, quando analisamos os efeitos da gravitação sobre as partículas em um nível mais elementar, a situação torna-se distinta: agora as partículas são descritas por campos quânticos e a suas estruturas internas podem ser relevantes para a interação gravitacional [11]. Portanto, em um nível mais fundamental, os efeitos da mecânica quântica devem, de alguma forma, ser incorporados na descrição da interação entre a gravitação e as outras partículas da natureza.

No que tange a questão levantada no final do parágrafo anterior, estamos diante de um problema, pois, até o presente momento, não temos uma teoria de gravitação quântica completamente satisfatória [12–14]. No entanto, esse fato não é um impedimento para avançarmos nessa direção. Embora não tenhamos uma teoria quântica da gravitação, podemos analisar o problema do ponto de vista de uma teoria semi-clássica, onde a gravitação é considerada como um campo clássico e as outras partículas são descritas como campos quânticos. No contexto das teorias semi-clássicas, destacamos a teoria da RG linearizada [15]. Nesse quadro a gravidade é descrita por um campo tensorial simétrico de *rank*-2 que representa uma pequena perturbação em torno da métrica de Minkowski.

A teoria da RG linearizada pode ser vista sob duas perspectivas distintas: i) como uma simples aproximação de campo fraco da teoria de Einstein; ii) como uma teoria de calibre, definida em um plano de fundo minkowskiano, para um campo tensorial de *rank*-2. Do ponto de vista da segunda opção, podemos utilizar ferramentas usuais da teoria quântica de campos a fim de incorporarmos os aspectos microscópicos na interação gravitacional, contudo, essa discussão só ocorre de forma bem definida

em diagramas de Feynman ao nível de árvore, pois a teoria da RG linearizada não é renormalizável.

A análise da ação da gravitação sobre partículas quânticas mostra que a estrutura interna dessas partículas é de fato relevante para o resultado [16–20]. Nesse contexto, a seção de choque associada ao espalhamento de partículas devida ao campo gravitacional exibe uma dependência clara em relação ao spin das partículas. Além disso, o estudo da gravitação ao nível de árvore abre alas para a exploração de novos domínios da física [21]. Por exemplo, combinando os resultados experimentais acerca da deflexão gravitacional da luz com a análise ao nível de árvore do problema, Accioly e colaboradores obtiveram um limite superior para a massa do fóton na teoria de Proca [22–24]. Outras investigações também foram conduzidas no âmbito das teorias de gravitação com derivadas de ordem superior [25–27]. No último caso, os resultados experimentais para o ângulo de deflexão gravitacional da luz foram utilizados a fim de se determinar um limite inferior para o parâmetro livre associado ao setor $R_{\mu\nu}^2$ dessa teoria.

Discutimos agora o segundo tópico explorado ao longo desta dissertação: a violação da simetria de Lorentz (VSL). Se, por um lado, a simetria de Lorentz constitui um dos pilares da física moderna, por outro, a sua violação parece ser um ingrediente chave para a construção de uma física ainda mais fundamental incluindo efeitos da escala de Planck e da gravitação quântica [28]. A compreensão da física na escala de Planck permanece como um dos maiores desafios da física moderna. Parte da dificuldade em explorar a física nesta escala se deve ao fato de que os experimentos atuais não permitem o acesso desta escala de energia. Entretanto, apesar da falta de experimentos diretos na escala de Planck, as teorias que supostamente descrevem a física nessa escala de energia podem servir como uma ponte entre os experimentos realizados em escalas acessíveis e a física da escala de Planck. Embora não possamos testar essas teorias no regime planckiano, o regime de baixas energias pode nos trazer assinaturas da natureza na escala de Planck, tais como a VSL [29, 30].

Nas últimas duas décadas o estudo a VSL tem inspirado o aparecimento interessantes trabalhos na literatura, destacando a contribuição de A. Kostelecký e colaboradores. O chamado Modelo Padrão Estendido proposto por Colladay e Kostelecký, em 1998, generaliza o Modelo Padrão da física de partículas com a inclusão de possíveis efeitos da VSL [31]. A ideia é que o Modelo Padrão Estendido corresponda ao regime de baixas energias de uma teoria válida na escala de Planck, sendo que a VSL representa uma forma de assinatura dessa física mais fundamental. Desse modo, a possibilidade de detecção experimental da VSL representa a possibilidade de sinais experimentais da escala de Planck.

O Modelo Padrão Estendido foi construído sobre duas hipóteses simples: i) invariância pela simetria de calibre $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ do Modelo Padrão usual; ii) covariância por transformações de Lorentz do ponto de vista dos observadores. Além

disso, como as simetrias de Lorentz e CPT estão intimamente relacionadas [32], a quebra da simetria de Lorentz também abre o caminho para a violação da invariância CPT . De fato, o Modelo Padrão Estendido também inclui ambos os setores CPT par e CPT ímpar.

Além do Modelo Padrão Estendido, outras teorias efetivas também trazem a VSL como assinatura de uma física da escala de Planck. A eletrodinâmica de Myers e Pospelov [33], por exemplo, incorpora a VSL como sendo um efeito remanescente das correções provenientes da gravidade quântica. Nessa teoria, a VSL aparece como um vetor de fundo utilizado para formar um operador com dimensão cinco. Além disso, a eletrodinâmica de Myers e Pospelov também inclui contribuições de derivadas superiores no seu propagador.

Ao lado de todo o desenvolvimento teórico realizado na área de VSL, um enorme esforço também foi direcionado no estudo da fenomenologia e na busca por sinais experimentais dessa quebra de simetria [34, 35]. Nas últimas duas décadas uma série de estudos foram realizados em diversas áreas da física a fim de se encontrar traços fenomenológicos e experimentais da VSL, por exemplo: buscas por sinais da VSL na astrofísica [36]; correções ligadas ao efeito Casimir [37]; correções ao espectro do hidrogênio [38–41]; contribuições ao momento de dipolo elétrico e magnético [42–46]; efeitos sobre os processos elementares da eletrodinâmica quântica [47–51]; limites experimentais a partir de experimentos de comparação entre relógios de alta precisão [52]; efeitos sobre a física dos *gamma ray bursts* [53]; efeitos sobre a física de neutrinos e de outras partículas elementares [54–57]; testes da invariância de Lorentz na física de raios cósmicos ultra-energéticos [58]; correções à dinâmica orbital planetária [59]; busca por sinais da VSL na recente descoberta das ondas gravitacionais [60]; dentre outras investigações.

Neste trabalho pretendemos trazer nossa singela contribuição à literatura de VSL, investigando o efeito da VSL no fenômeno de deflexão gravitacional da luz. A fim de implementarmos essa tarefa precisamos escolher um modelo específico que incorpore a VSL no estudo teórico da deflexão gravitacional da luz, para isso, escolhemos a eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw (CFJ) [61]. Desse modo, em uma análise ao nível de árvore para o espalhamento da luz por um campo gravitacional, descrevemos a propagação da luz por um campo de CFJ e analisamos o seu efeito sobre o ângulo de deflexão gravitacional da luz.

A teoria de CFJ incorpora a quebra da simetria de Lorentz através da inclusão de um vetor de fundo utilizado para formar um termo topológico do tipo Chern-Simons. Além da quebra da simetria de Lorentz, a teoria de CFJ também realiza a violação da invariância CPT . Inicialmente a eletrodinâmica de CFJ foi proposta como uma teoria independente das outras interações e com a propriedade de descrever um “fóton” cujo propagador livre apresenta um polo não trivial. No entanto, com a proposta

do Modelo Padrão Estendido de Colladay e Kostelecký, a teoria CFJ passou a ser entendida como o setor eletromagnético de um modelo mais amplo, incorporando novas forma de quebra da simetria de Lorentz e incluindo outras interações. Desde a sua proposta original, a eletrodinâmica de CFJ tem sido alvo de uma séries de trabalhos de pesquisa, seja na busca de limites experimentais e de efeitos fenomenológicos, quanto em questões de consistência teórica no que diz respeito ao estudo de estabilidade, causalidade, unitariedade, dentre outras características que buscamos em uma boa teoria quântica de campos [62–64].

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: No capítulo 1 revisamos os principais aspectos sobre a teoria linearizada da gravitação; no capítulo 2 analisamos o processo de espalhamento da luz por um campo gravitacional segundo uma abordagem semi-clássica do problema; no capítulo 3 revisamos o modelo de CFJ e os seus principais aspectos clássicos; no capítulo 4 discutimos o efeito da violação da simetria de Lorentz no fenômeno de espalhamento gravitacional da luz e a sua consequência para o ângulo de deflexão; ao final dessa dissertação apresentamos as nossas conclusões e organizamos dois apêndices com alguns detalhes técnicos omitidos ao longo do texto.

Ao longo deste trabalho utilizamos unidades naturais em que $c = \hbar = 1$ e consideramos a métrica de Minkowski como sendo $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$.

Teoria da gravitação linearizada

No estágio atual da nossa compreensão acerca da interação gravitacional, interpretamos a gravitação como sendo uma teoria que descreve a dinâmica da própria geometria do espaço-tempo; e a teoria que cumpre esse papel é a Relatividade Geral (RG) [2–4]. Se, por um lado, a teoria da RG possui excelentes resultados quando confrontada com as observações experimentais macroscópicas [5], por outro, a RG possui sérios problemas quando buscamos aplicá-la ao mundo microscópico [11].

Primeiramente, devido à escassez de testes microscópicos, não há nenhuma garantia de validade da RG nessa escala. Em segundo lugar, em escalas microscópicas esperamos que a gravitação sofra efeitos de natureza quântica, no entanto, a RG não apresenta nenhum esquema natural de quantização e, além disso, qualquer tentativa de quantizá-la conduz a resultados altamente divergentes e não renormalizáveis. Finalmente, a RG não se adéqua a nenhum esquema de unificação com as outras interações fundamentais.

Atualmente existem diversas tentativas de se contornar o problema da quantização da gravitação [12], *e.g.* teorias de cordas, *loop quantum gravity*, teorias efetivas de gravitação quântica, teorias de gravitação de ordem superior, dentre outras. No entanto, dentre as alternativas mencionadas acima, somente as teorias de cordas apresentam um esquema consistente para a questão da unificação das interações fundamentais.

Entretanto, apesar dos problemas mencionados acima, ainda podemos extrair propriedades microscópicas interessantes no contexto de teoria da RG linearizada. Nesse viés o campo gravitacional é descrito por um campo tensorial simétrico e de *rank*-2 que representa uma pequena perturbação em torno da métrica de Minkowski. A teoria da RG linearizada pode ser vista sob duas perspectivas distintas: i) como uma aproximação de campo fraco obtida a partir de uma teoria mais fundamental; ii) como uma teoria de calibre para um campo tensorial definida sobre um espaço-tempo minkowskiano.

Neste capítulo abordaremos os principais aspectos da teoria linearizada da gravitação. Começaremos por uma breve discussão sobre os objetos geométricos presentes nessa discussão, em seguida abordaremos os aspectos dinâmicos da teoria linearizada.

Discutiremos também alguns aspectos quânticos da teoria linearizada da gravitação e finalizaremos com uma solução particular das equações de campo.

1.1 Elementos geométricos da gravitação linearizada

Conforme anunciado acima, a teoria da gravitação linearizada é definida a partir de pequenas perturbações em torno de um espaço-tempo minkowskiano. Consideremos então uma métrica pseudo-riemanniana, $g_{\mu\nu}$, definida sobre o espaço-tempo. Vamos considerar a aproximação em que a métrica do espaço-tempo pode ser expressa como a métrica de Minkowski mais uma pequena perturbação, isto é

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad \|\kappa h_{\mu\nu}\| \ll 1, \quad (1.1)$$

onde $h_{\mu\nu}$ é um campo tensorial simétrico que representa as flutuações em torno da métrica de Minkowski e definimos a constante de Einstein como sendo $\kappa = \sqrt{32\pi G}$ (onde G é a constante universal da gravitação). Utilizando a equação $g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$, podemos obter a seguinte expansão para a métrica inversa

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \kappa^2 h^{\mu\alpha} h_{\alpha}^{\nu} + \mathcal{O}(\kappa^3). \quad (1.2)$$

Ressaltamos que nessa aproximação, as operações de abaixamento e levantamento de índices são realizadas pela atuação da própria métrica de Minkowski e sua inversa, respectivamente.

Podemos, agora, calcular outros objetos geométricos que são relevantes para a teoria da RG. Começemos pelos símbolos de Christoffel, cujas componentes podem ser escritas como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_{\mu}g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}). \quad (1.3)$$

Levando em conta a aproximação de campo fraco, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{\kappa}{2}(\partial_{\mu}h_{\nu}^{\alpha} + \partial_{\nu}h_{\mu}^{\alpha} - \partial^{\alpha}h_{\mu\nu}) - \frac{\kappa^2}{2}h^{\alpha\lambda}(\partial_{\mu}h_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}h_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}h_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(\kappa^3). \quad (1.4)$$

A fim de simplificarmos os passos que se seguem, definamos a notação $\Gamma_{\mu\nu}^{(n)\alpha}$ para designarmos a contribuição de ordem κ^n ao símbolo de Christoffel. Desse modo, podemos reescrever a expressão acima na forma

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \kappa \Gamma_{\mu\nu}^{(1)\alpha} + \kappa^2 \Gamma_{\mu\nu}^{(2)\alpha} + \mathcal{O}(\kappa^3), \quad (1.5)$$

onde

$$\Gamma^{(1)\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu h_\nu^\alpha + \partial_\nu h_\mu^\alpha - \partial^\alpha h_{\mu\nu}), \quad (1.6)$$

e

$$\Gamma^{(2)\alpha}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}h^{\alpha\lambda}(\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\mu\lambda} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}) \quad (1.7)$$

Passemos agora ao tensor de curvatura de Riemann, o qual pode ser escrito em termos dos símbolos de Cristoffel a partir da seguinte expressão

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\beta\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\alpha}. \quad (1.8)$$

Levando em conta a notação introduzida acima, bem como a aproximação de campo fraco, podemos escrever

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \kappa \partial_\alpha \Gamma^{(1)\mu}_{\nu\beta} + \kappa^2 \partial_\alpha \Gamma^{(2)\mu}_{\nu\beta} + \kappa^2 \Gamma^{(1)\mu}_{\alpha\lambda} \Gamma^{(1)\lambda}_{\nu\beta} - (\alpha \leftrightarrow \beta) + \mathcal{O}(\kappa^3). \quad (1.9)$$

A partir do tensor de curvatura de Riemann podemos escrever mais duas quantidades de interesse: o tensor de Ricci, $R_{\nu\alpha}$, e o escalar de curvatura, R . Vejamos primeiro o caso do tensor de Ricci, o qual é definido como sendo

$$R_{\nu\alpha} = R^\mu_{\nu\alpha\mu}. \quad (1.10)$$

Conseqüentemente, levando em conta a aproximação de campo fraco, podemos escrever

$$\begin{aligned} R_{\nu\alpha} &= \kappa \partial_\alpha \Gamma^{(1)\mu}_{\nu\mu} - \kappa \partial_\mu \Gamma^{(1)\mu}_{\nu\alpha} + \kappa^2 \partial_\alpha \Gamma^{(2)\mu}_{\nu\mu} - \kappa^2 \partial_\mu \Gamma^{(2)\mu}_{\nu\alpha} + \\ &+ \kappa^2 \Gamma^{(1)\mu}_{\alpha\lambda} \Gamma^{(1)\lambda}_{\nu\mu} - \kappa^2 \Gamma^{(1)\mu}_{\mu\lambda} \Gamma^{(1)\lambda}_{\nu\alpha} + \mathcal{O}(\kappa^3). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Finalmente, o escalar de curvatura é definido como sendo o traço do tensor de Ricci, isto é

$$R = g^{\nu\alpha} R_{\nu\alpha}. \quad (1.12)$$

Utilizando a definição acima combinada com a aproximação de campo fraco, teremos $R = (\eta^{\nu\alpha} - \kappa h^{\nu\alpha} + \dots) R_{\nu\alpha}$, portanto, podemos escrever o escalar de curvatura como

$$\begin{aligned} R &= \kappa \eta^{\nu\alpha} \partial_\nu \Gamma^{(1)\mu}_{\mu\alpha} - \kappa \eta^{\nu\alpha} \partial_\mu \Gamma^{(1)\mu}_{\nu\alpha} - \kappa^2 h^{\nu\alpha} \partial_\nu \Gamma^{(1)\mu}_{\mu\alpha} + \kappa^2 h^{\nu\alpha} \partial_\mu \Gamma^{(1)\mu}_{\nu\alpha} + \\ &+ \kappa^2 \partial^\nu \Gamma^{(2)\mu}_{\nu\mu} - \kappa^2 \eta^{\nu\alpha} \partial_\mu \Gamma^{(2)\mu}_{\nu\alpha} + \kappa^2 \eta^{\nu\alpha} \Gamma^{(1)\mu}_{\alpha\lambda} \Gamma^{(1)\lambda}_{\nu\mu} - \kappa^2 \eta^{\nu\alpha} \Gamma^{(1)\mu}_{\mu\lambda} \Gamma^{(1)\lambda}_{\nu\alpha} + \mathcal{O}(\kappa^3). \end{aligned} \quad (1.13)$$

De posse dos elementos acima, estamos quase prontos para estudarmos a dinâmica da

gravitação linearizada. Afim de completarmos a nossa lista de elementos geométricos, vamos computar a quantidade $\sqrt{-g}$, onde $g = \det(g_{\mu\nu})$, na aproximação de campo fraco. Recordemos, inicialmente, que dado um tensor $M_{\mu\nu}$ definido sobre o espaço-tempo quadridimensional, podemos calcular o determinante associado à sua representação matricial a partir da seguinte expressão

$$\det(M_{\mu\nu}) = \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\sigma\rho\gamma} M_{\mu\lambda} M_{\nu\sigma} M_{\alpha\rho} M_{\beta\gamma}, \quad (1.14)$$

onde $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é o símbolo de Levi-Civita (com $\epsilon^{0123} = 1$). Desse modo, para o tensor métrico podemos escrever o seu determinante (já levando em consideração a aproximação de campo fraco) como sendo dado por

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\sigma\rho\gamma} g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} g_{\alpha\rho} g_{\beta\gamma}, \\ g &= \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\sigma\rho\gamma} (\eta_{\mu\lambda} + \kappa h_{\mu\lambda}) (\eta_{\nu\sigma} + \kappa h_{\nu\sigma}) (\eta_{\alpha\rho} + \kappa h_{\alpha\rho}) (\eta_{\beta\gamma} + \kappa h_{\beta\gamma}), \\ g &= \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{\kappa}{4!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} h_{\mu}{}^{\lambda} + \frac{\kappa}{4!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\sigma\alpha\beta} h_{\nu}{}^{\sigma} + \\ &+ \frac{\kappa}{4!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\rho\beta} h_{\alpha}{}^{\rho} + \frac{\kappa}{4!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\alpha\gamma} h_{\alpha}{}^{\gamma} + \mathcal{O}(\kappa^2). \end{aligned}$$

Após algumas simples redefinições de índices mudos, podemos observar que os quatro termos de ordem κ correspondem exatamente ao mesmo termo, portanto, podemos rescrever a equação acima na forma

$$g = \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{\kappa}{3!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} h_{\mu}{}^{\lambda} + \mathcal{O}(\kappa^2). \quad (1.15)$$

Recordando as seguintes identidades para o símbolo de Levi-Civita

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -4! \quad \text{e} \quad \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} = -3! \delta_{\lambda}^{\mu}, \quad (1.16)$$

obtemos

$$-g = 1 + \kappa h + \mathcal{O}(\kappa^2), \quad (1.17)$$

onde utilizamos a definição $h = h_{\mu}{}^{\mu}$. Extraíndo a raiz da equação acima, obtemos a quantidade desejada

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{\kappa}{2} h + \mathcal{O}(\kappa^2). \quad (1.18)$$

De posse de todos os elementos geométricos necessários, podemos partir agora para o estudo da dinâmica da RG linearizada.

1.2 Dinâmica gravitacional na teoria linearizada da Relatividade Geral

Iniciaremos o nosso estudo a partir da teoria da RG completa, isto é, levando em conta uma métrica pseudo-riemanniana, $g_{\mu\nu}$, arbitrária. Consideremos então a ação de Einstein-Hilbert (EH), definida por

$$S_{EH} = \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (1.19)$$

A ação de EH definida acima, na sua forma completa, dá origem às famigeradas equações de Einstein (no vácuo) da RG, a saber

$$G_{\mu\nu} = 0, \quad (1.20)$$

onde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ é o tensor de Einstein. Essencialmente a equação acima descreve a dinâmica da geometria do espaço tempo. Podemos ainda adicionar um setor de matéria¹ na lagrangiana acima, de modo que a lagrangiana completa (geometria + setor de matéria) pode ser escrita como

$$S = S_{EH} + S_M = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{2}{\kappa^2} R + \mathcal{L}_{int} \right) \quad (1.21)$$

onde $S_M = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{int}$, sendo \mathcal{L}_{int} a lagrangiana que descreve a interação entre o setor de matéria e a gravitação. A presença do setor de matéria na ação completa introduz um termo de fonte nas equações de campo, nesse caso as equações de Einstein ficam reescritas como

$$G_{\mu\nu} = -\frac{\kappa^2}{4} T_{\mu\nu}, \quad (1.22)$$

onde

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (1.23)$$

é o tensor de energia-*momentum* associado ao setor de matéria.

No entanto, nesse trabalho estamos interessados em lidar com a dinâmica da gravitação na sua aproximação de campo fraco, portanto, aplicaremos essa aproximação à ação de EH. Por um instante não vamos levar em conta a estrutura de índices dos elementos geométricos definidos na seção anterior, de modo que podemos escrever, sem

¹Com “setor de matéria” estamos nos referindo à qualquer campo que se acopla com a gravitação.

nenhum prejuízo, a seguinte expressão

$$\sqrt{-g}R \sim \left(1 + \frac{\kappa}{2}h + \dots\right) \left(\kappa \partial\Gamma^{(1)} + \kappa^2 h \partial\Gamma^{(1)} + \kappa^2 \partial\Gamma^{(2)} + \kappa^2 \Gamma^{(1)}\Gamma^{(1)} + \dots\right). \quad (1.24)$$

Efetuando as multiplicações na expressão acima e mantendo somente termos até ordem κ^2 , obtemos o seguinte resultado²

$$\sqrt{-g}R \sim \kappa \partial\Gamma^{(1)} + \kappa^2 \partial\Gamma^{(2)} + \kappa^2 h \partial\Gamma^{(1)} + \kappa^2 \Gamma^{(1)}\Gamma^{(1)} + \frac{\kappa^2}{2}h \partial\Gamma^{(1)} + \mathcal{O}(\kappa^3). \quad (1.25)$$

Observe, entretanto, que podemos omitir a contribuição dos dois primeiros termos da expressão acima na ação de EH. Desse modo, retornando com a estrutura de índices correta, podemos escrever a ação de EH na aproximação de campo fraco como sendo dada por

$$S_{EH} = \int d^4x \left(h \eta^{\nu\alpha} \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^{(1)\mu} - h \eta^{\nu\alpha} \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^{(1)\mu} - 2 h^{\nu\alpha} \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^{(1)\mu} + \right. \\ \left. + 2 h^{\nu\alpha} \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^{(1)\mu} + 2 \eta^{\nu\alpha} \Gamma_{\alpha\lambda}^{(1)\mu} \Gamma_{\nu\mu}^{(1)\lambda} - 2 \eta^{\nu\alpha} \Gamma_{\mu\lambda}^{(1)\mu} \Gamma_{\nu\alpha}^{(1)\lambda} \right). \quad (1.26)$$

Utilizando a expressão para os símbolos de Christoffel apresentada na equação (1.6) e realizando algumas integrações por partes, obtemos a seguinte expressão (após algumas integrações por partes) para a ação de EH correspondente à dinâmica linear da gravitação

$$S_{EH} = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu h^{\nu\alpha} \partial^\mu h_{\nu\alpha} - \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \partial_\mu h \partial_\nu h^{\mu\nu} - \partial_\mu h^{\mu\alpha} \partial^\nu h_{\nu\alpha} \right). \quad (1.27)$$

A ação acima, também conhecida como Einstein-Hilbert-Fierz-Pauli, descreve a dinâmica linear da gravitação em termos das flutuações em torno da métrica de Minkowski. Desse modo, podemos interpretar a gravitação linearizada como sendo uma teoria que descreve um campo tensorial de *rank*-2 em um plano de fundo minkowskiano.

Utilizando a ação linearizada apresentada acima, podemos calcular as equações de movimento para o campo tensorial $h_{\mu\nu}$. Tomando a variação funcional com respeito ao campo $h_{\mu\nu}$, obtemos

$$\frac{\delta S_{EH}}{\delta h^{\mu\nu}} = -\square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h + \partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha h_{\alpha\mu} + \eta_{\mu\nu} (\square h - \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta}). \quad (1.28)$$

Por outro lado, utilizando as equações (1.1), (1.6), (1.11) e (1.13), podemos verificar

²Note que a partir de ordem κ^3 os termos contribuem somente para a dinâmica não-linear da teoria.

que

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left(\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h - \partial_\mu \partial^\alpha h_{\nu\alpha} - \partial_\nu \partial^\alpha h_{\mu\alpha} - \eta_{\mu\nu} (\square h - \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta}) \right) + \mathcal{O}(\kappa^2). \quad (1.29)$$

Comparando as duas últimas expressões, obtemos

$$G_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2} \frac{\delta S_{EH}}{\delta h^{\mu\nu}} + \mathcal{O}(\kappa^2). \quad (1.30)$$

Por outro lado, para que a equação de movimento obtida a partir da ação linearizada, isto é

$$\frac{\delta}{\delta h^{\mu\nu}} (S_{EH} + S_M) = 0, \quad (1.31)$$

seja consistente com a linearização das equações de Einstein na presença de fontes externas, Eq. (1.22), devemos ter

$$-\frac{\kappa}{2} \frac{\delta S_{EH}}{\delta h^{\mu\nu}} + \mathcal{O}(\kappa^2) = -\frac{\kappa^2}{4} T_{\mu\nu}. \quad (1.32)$$

Desse modo, o tensor de energia-*momentum* deve se relacionar com a ação correspondente ao setor de matéria da seguinte forma

$$\frac{\delta S_M}{\delta h^{\mu\nu}} = -\frac{\kappa}{2} T_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\kappa^2) \Rightarrow S_M = \int d^4x \left(-\frac{\kappa}{2} h^{\mu\nu} T_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\kappa^2) \right). \quad (1.33)$$

Segue diretamente a partir da expressão acima que a lagrangiana que descreve a interação gravitação-matéria, na aproximação linear da gravitação, pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\kappa}{2} h^{\mu\nu} T_{\mu\nu}. \quad (1.34)$$

Juntando o setor de interação com matéria ao setor puramente gravitacional, podemos reescrever a ação completa da gravitação linearizada como sendo dada por

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu h^{\nu\alpha} \partial^\mu h_{\nu\alpha} - \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \partial_\mu h \partial_\nu h^{\mu\nu} - \partial_\mu h^{\mu\alpha} \partial^\nu h_{\nu\alpha} - \frac{\kappa}{2} h^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \right). \quad (1.35)$$

Em termos lagrangianos podemos escrever

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu h^{\nu\alpha} \partial^\mu h_{\nu\alpha} - \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \partial_\mu h \partial_\nu h^{\mu\nu} - \partial_\mu h^{\mu\alpha} \partial^\nu h_{\nu\alpha} - \frac{\kappa}{2} h^{\mu\nu} T_{\mu\nu}. \quad (1.36)$$

A equação de movimento para a gravitação linear na presença de fontes pode, então,

ser escrita na forma

$$\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h - \partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\nu} - \partial_\nu \partial^\alpha h_{\alpha\mu} + \eta_{\mu\nu} (\partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \square h) = -\frac{\kappa}{2} T_{\mu\nu}. \quad (1.37)$$

A teoria da RG é covariante por transformações gerais de coordenadas, de modo que a ação de EH deve permanecer invariante por transformações na métrica da forma

$$g_{\mu\nu}(x) \mapsto g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x). \quad (1.38)$$

Consideremos transformações infinitesimais $x'^\mu = x^\mu + \kappa \xi^\mu$, onde $\|\kappa \xi^\mu\| \ll 1$. Nesse caso, podemos escrever

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} = \delta_\alpha^\mu + \kappa \partial_\alpha \xi^\mu \Rightarrow \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \delta_\mu^\alpha - \kappa \partial^\alpha \xi_\mu + \mathcal{O}(\kappa^2). \quad (1.39)$$

Utilizando as equações acima e lembrando que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$ ($g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h'_{\mu\nu}$), obtemos a correspondente transformação para o campo $h_{\mu\nu}$

$$h_{\mu\nu} \mapsto h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu. \quad (1.40)$$

A transformação acima define uma transformação de calibre para o campo gravitacional. Não é difícil de demonstrar que a ação de EH linearizada é invariante pela transformação acima, isto é

$$\delta_\xi h_{\mu\nu} = -\partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \Rightarrow \delta_\xi S_{EH} = 0. \quad (1.41)$$

Para que a ação completa (gravitação + setor de matéria) também seja invariante pela transformação de calibre acima, o tensor de energia-*momentum* deve ser conservado, ou seja

$$\delta_\xi S_M = 0 \Rightarrow \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.42)$$

A simetria de calibre exibida acima pode ser utilizada a nosso favor para simplificarmos a equação (1.37). Primeiramente, notemos que tomando o traço da equação (1.37), obtemos

$$\square h - \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} = \frac{\kappa}{4} T. \quad (1.43)$$

onde $T = \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$. Utilizando a equação acima em (1.37) e, rearranjando os termos, obtemos a seguinte equação

$$\square h_{\mu\nu} - (\partial_\mu \partial^\alpha \gamma_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha \gamma_{\alpha\mu}) = \frac{\kappa}{2} \left(\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T - T_{\mu\nu} \right), \quad (1.44)$$

onde $\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$. Utilizando a transformação de calibre (1.40), vemos que

$$\partial^\mu \gamma_{\mu\nu} \mapsto \partial^\mu \gamma'_{\mu\nu} = \partial^\mu \gamma_{\mu\nu} - \square \xi_\nu. \quad (1.45)$$

Portanto, podemos escolher $\xi_\nu = \frac{1}{\square} \partial^\mu \gamma_{\mu\nu}$ de modo a obtemos $\partial^\mu \gamma'_{\mu\nu} = 0$, assim, podemos zerar os termos dependentes de $\gamma_{\mu\nu}$ na equação (1.37). A escolha $\partial^\mu \gamma_{\mu\nu} = 0$ é conhecida como condição de calibre de de-Donder e a equação de campo que descreve a dinâmica gravitacional nesse caso é dada por

$$\square h_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left(\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T - T_{\mu\nu} \right). \quad (1.46)$$

Adiante voltaremos a essa equação e desenvolveremos a sua solução para o caso de fontes massivas e pontuais. É importante notar que, na aproximação de campo fraco, $T_{\mu\nu}$ representa o tensor de energia-*momentum* da relatividade restrita.

1.3 Aspectos quânticos da gravitação linearizada: unitariedade e renormalizabilidade

Conforme mencionamos no início desse capítulo, a tentativa de se construir uma teoria quântica da gravitação a partir da RG não é completamente consistente devido a resultados divergentes. Nesta seção investigaremos alguns aspectos quânticos da teoria da gravitação linearizada e mostraremos que, apesar de constituir uma teoria unitária, a teoria da gravitação linearizada é não-renormalizável.

Começemos a nossa discussão pela análise da unitariedade ao nível de árvore. Essa análise pode ser realizada de forma simples por meio de uma prescrição bastante usual constituída dos seguintes passos [65]:

- Reescrever a lagrangiana livre da teoria na forma campo-operador-campo, isto é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} h \mathcal{O} h; \quad (1.47)$$

- Reescrever o operador acima no espaço de Fourier e calcular o operador inverso $\mathcal{O}^{-1}(k)$;
- Saturar o operador inverso, $\mathcal{O}^{-1}(k)$, com correntes externas conservadas (tensor energia-*momentum*) a fim de obter o chamado propagador saturado, $PS(k)$;
- Analisar o sinal do resíduo do $PS(k)$ nos seus polos: se o resultado for positivo a teoria é unitária; se o resultado for negativo a teoria é não-unitária; se o resíduo for nulo então não há propagação;

Primeiramente, como a ação da gravitação linearizada é invariante por transformações de calibre $\delta_\xi h_{\mu\nu} = -\partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu$, devemos fixar um calibre para que o operador \mathcal{O} seja inversível. Considerando o calibre de de-Donder, vamos adicionar o termo de fixação de calibre $\mathcal{L}_{f.c.} = \frac{1}{2\lambda}(\partial_\nu \gamma^{\mu\nu})^2$ à lagrangiana da gravitação linearizada, de modo que a lagrangiana livre da teoria linearizada da gravitação pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu h^{\nu\alpha}\partial^\mu h_{\nu\alpha} - \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \partial_\mu h\partial_\nu h^{\mu\nu} - \partial_\mu h^{\mu\alpha}\partial^\nu h_{\nu\alpha} + \frac{1}{2\lambda}(\partial_\nu \gamma^{\mu\nu})^2. \quad (1.48)$$

Após algumas integrações por partes e realizando algumas manipulações algébricas a fim de evidenciar as simetrias nas trocas $\mu \leftrightarrow \nu$, $\alpha \leftrightarrow \beta$ e $\mu\nu \leftrightarrow \alpha\beta$, podemos reescrever a lagrangiana acima na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{1}{2}h_{\mu\nu} \left[\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) \frac{\eta^{\mu\alpha}\partial^\nu\partial^\beta + \eta^{\mu\beta}\partial^\nu\partial^\alpha + \eta^{\nu\beta}\partial^\mu\partial^\alpha + \eta^{\nu\alpha}\partial^\mu\partial^\beta}{2} - \frac{\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta}}{2} \square + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{1}{4\lambda}\right) \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} \square - \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) (\eta^{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta + \eta^{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu) \right] h_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Comparando a equação acima com a forma bilinear $\mathcal{L} = \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\mathcal{O}^{\mu\nu,\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$, obtemos a seguinte expressão para o operador de onda

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{\mu\nu,\alpha\beta} = \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) \frac{\eta^{\mu\alpha}\partial^\nu\partial^\beta + \eta^{\mu\beta}\partial^\nu\partial^\alpha + \eta^{\nu\beta}\partial^\mu\partial^\alpha + \eta^{\nu\alpha}\partial^\mu\partial^\beta}{2} + \\ - \frac{\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta}}{2} \square + \left(1 - \frac{1}{4\lambda}\right) \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} \square - \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) (\eta^{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta + \eta^{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Realizando a passagem do operador de onda para o espaço de Fourier (segundo a prescrição simples $\partial_\mu \mapsto -ik_\mu$), obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}(k))^{\mu\nu,\alpha\beta} = -\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) \frac{\eta^{\mu\alpha}k^\nu k^\beta + \eta^{\mu\beta}k^\nu k^\alpha + \eta^{\nu\beta}k^\mu k^\alpha + \eta^{\nu\alpha}k^\mu k^\beta}{2} + \\ + \frac{\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta}}{2} k^2 - \left(1 - \frac{1}{4\lambda}\right) \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} k^2 + \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) (\eta^{\mu\nu}k^\alpha k^\beta + \eta^{\alpha\beta}k^\mu k^\nu). \end{aligned} \quad (1.51)$$

A fim de inverter o operador de onda acima vamos reescrevê-lo em uma base mais conveniente, a dos operadores de Barnes-Rivers. Nessa base podemos reescrever o operador de onda da seguinte forma³

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}(k))^{\mu\nu,\alpha\beta} = \left\{ k^2 P^{(2)} + \frac{k^2}{2\lambda} P^{(1)} + \left(\frac{3}{4\lambda} - 2\right) k^2 P^{(0-s)} + \right. \\ \left. + \frac{k^2}{4\lambda} P^{(0-w)} + \frac{\sqrt{3}k^2}{4\lambda} (P^{(0-ws)} + P^{(0-sw)}) \right\}^{\mu\nu,\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

³Veja o apêndice A para uma breve revisão sobre os operadores de Barnes-Rivers.

Nessa base de operadores a inversão é imediata e o resultado obtido é o seguinte

$$(\mathcal{O}^{-1}(k))^{\mu\nu,\alpha\beta} = \left\{ \frac{1}{k^2} P^{(2)} + \frac{2\lambda}{k^2} P^{(1)} - \frac{1}{2k^2} P^{(0-s)} + \left(\frac{4\lambda}{k^2} - \frac{3}{2k^2} \right) P^{(0-w)} - \frac{\sqrt{3}}{2k^2} (P^{(0-ws)} + P^{(0-sw)}) \right\}^{\mu\nu,\alpha\beta}. \quad (1.53)$$

Contraindo a expressão acima com fontes externas conservadas (tensor de energia-*momentum*), obtemos o seguinte resultado para o propagador saturado

$$PS(k) = T^{\mu\nu} (\mathcal{O}^{-1}(k))_{\mu\nu,\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = \frac{1}{k^2} \left(T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} T^2 \right). \quad (1.54)$$

Supondo que o termo entre parênteses não introduza nenhum polo ao propagador saturado, precisamos nos preocupar somente com o resíduo em $k^2 = 0$. De fato, obtemos

$$Res(PS(k))|_{k^2=0} = \left(T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} T^2 \right) \Big|_{k^2=0}. \quad (1.55)$$

É possível demonstrar que $(T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} T^2)|_{k^2=0} \geq 0$ e⁴, portanto

$$Res(PS(k))|_{k^2=0} \geq 0. \quad (1.56)$$

Concluimos, portanto, que o campo tensorial $h_{\mu\nu}$ contempla uma descrição, unitária ao nível de árvore, de uma partícula sem massa e helicidade ± 2 .

Vejamos agora a questão da renormalizabilidade da gravitação linearizada. Consideremos então a lagrangiana de interação entre a gravitação e o setor de matéria, a saber

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\kappa}{2} h^{\mu\nu} T_{\mu\nu}. \quad (1.57)$$

Vamos analisar a questão da renormalizabilidade a partir do grau de divergência superficial em um gráfico de Feynman arbitrário. Em primeiro lugar, o propagador associado ao campo $h_{\mu\nu}$ se comporta, no regime UV, da seguinte forma

$$\langle hh \rangle \sim \frac{1}{k^2}, \quad (1.58)$$

Portanto contribuem para o grau de divergência superficial com um fator do tipo $2I_h$, onde I_h denota o número de linhas internas associadas ao campo $h_{\mu\nu}$ em um dado gráfico de Feynman. O tensor de energia-*momentum* pode trazer contribuições tanto de setores bosônicos como de setores fermiônicos. Vamos assumir que os setores bosônicos e fermiônicos possuem os propagadores nas suas formas usuais, respectivamente

⁴Para uma demonstração desse fato veja o apêndice B da referência [27].

comportando-se como

$$\langle \text{bóson-bóson} \rangle \sim \frac{1}{k^2} \quad \text{e} \quad \langle \text{férmion-férmion} \rangle \sim \frac{1}{k}. \quad (1.59)$$

Desse modo a contribuição do setor de matéria para o grau de divergência superficial associado a um gráfico de Feynman arbitrário é da forma $2I_b + 3I_f$, onde I_b e I_f representam, respectivamente, o número de linhas internas bosônicas e fermiônicas. Tendo em mente que os termos cinéticos bosônicos apresentam, tipicamente, duas derivadas e que os termos cinéticos fermiônicos, usualmente, possuem apenas uma derivada do campo, o acoplamento entre a gravitação e os setores de matéria traz a contribuição da quantidade $2V_b + V_f$ para o grau de divergência superficial da teoria, onde V_b e V_f representam, respectivamente, o número de vértices bosônicos e fermiônicos em um dado gráfico. Lembrando que devemos descontar do grau de divergência superficial total a quantidade $4(V - 1)$, onde $V = V_b + V_f$ é o número total de vértices, devido as integrações realizadas sobre as deltas de conservação de *momentum*. Finalmente, podemos escrever o grau de divergência superficial da teoria de gravitação linearizada como sendo

$$\delta = 2I_h + 2I_b + 3I_f + 2V_b + V_f - 4(V_b + V_f - 1). \quad (1.60)$$

Por outro lado, considerações topológicas nos revelam as seguintes relações

$$2I_h + E_h = V_f + V_b, \quad (1.61)$$

$$2I_b + E_b = 2V_b, \quad (1.62)$$

$$2I_f + E_f = 2V_f, \quad (1.63)$$

onde E_h , E_b e E_f representam, respectivamente, número de linhas internas associadas ao campo $h_{\mu\nu}$, aos campos bosônicos e aos campos fermiônicos. Utilizando as relações topológicas acima, podemos reescrever o grau de divergência superficial da seguinte forma

$$\delta = 4 - \left(E_h + E_b + \frac{3}{2}E_f \right) + V_b + V_f. \quad (1.64)$$

Conforme podemos observar na expressão acima, o grau de divergência superficial associado a um gráfico de Feynman arbitrário advindo da teoria linearizada da gravitação possui um comportamento crescente com o número de vértices contidos nesse gráfico, o que indica claramente a não-renormalizabilidade da teoria.

1.4 Campo gravitacional para uma fonte puntiforme

Nessa seção trabalharemos na obtenção de uma solução das equações de campo da teoria linearizada da gravitação correspondente à uma massa pontual localizada na origem do sistema de coordenadas adotado. Relembrando do resultado obtido no final da seção 1.2, podemos escrever as equações de campo da gravitação linearizada, no calibre de de-Donder, da seguinte forma

$$\square h_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\eta_{\mu\nu}}{2} T - T_{\mu\nu} \right). \quad (1.65)$$

Consideremos a situação em que o tensor de energia-*momentum* descreve uma fonte de massa M localizada na origem do sistema de coordenada, isto é $T_{\mu\nu} = \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} M \delta(\vec{x})$. Substituindo o tensor energia-*momentum* na equação acima, obtemos

$$\square h_{\mu\nu} = \frac{\kappa M}{2} \left(\frac{\eta_{\mu\nu}}{2} - \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \right) \delta(\vec{x}). \quad (1.66)$$

Como estamos interessados em soluções estáticas, podemos escrever

$$-\nabla^2 h_{\mu\nu} = \frac{\kappa M}{2} \left(\frac{\eta_{\mu\nu}}{2} - \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \right) \delta(\vec{x}). \quad (1.67)$$

Escrevendo $h_{\mu\nu}(\vec{x})$ e $\delta(\vec{x})$ na representação de Fourier, isto é

$$h_{\mu\nu}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{x} \tilde{h}_{\mu\nu}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad \text{e} \quad \delta(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{x} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (1.68)$$

nos permite reescrever a equação (1.67) no espaço de Fourier da seguinte forma

$$\vec{k}^2 \tilde{h}_{\mu\nu}(\vec{k}) = \frac{\kappa M}{2} \left(\frac{\eta_{\mu\nu}}{2} - \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \right). \quad (1.69)$$

Portanto, ainda no espaço de Fourier, obtemos a seguinte solução para o campo gravitacional

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(\vec{k}) = \frac{\kappa M}{4\vec{k}^2} \left(\eta_{\mu\nu} - 2\eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \right). \quad (1.70)$$

Substituindo o resultado acima na primeira equação em (1.68), e levando em conta a seguinte integral

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\vec{k}^2} = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|}, \quad (1.71)$$

obtemos o seguinte resultado para o campo $h_{\mu\nu}$ no espaço das coordenadas de posição

$$h_{\mu\nu}(\vec{x}) = \frac{\kappa M}{16\pi|\vec{x}|} \left(\eta_{\mu\nu} - 2\eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \right). \quad (1.72)$$

Deflexão gravitacional da luz: Uma abordagem ao nível de árvore

Uma das previsões mais surpreendentes da relatividade geral é o desvio gravitacional da luz. De acordo com a teoria de Einstein, um corpo de massa M deve curvar o espaço-tempo de tal forma que, ao passar por uma região próxima do corpo massivo, a luz deve sofrer uma deflexão de um ângulo dado por¹

$$\theta_E = \frac{4GM}{b}, \quad (2.1)$$

onde G é a constante universal de Newton e b é o parâmetro de impacto do processo (veja a Figura 2.1).

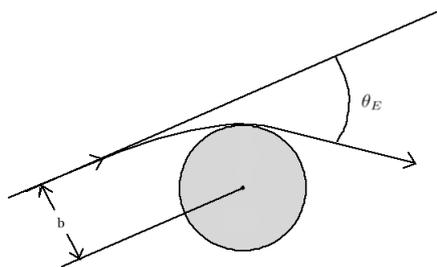


Figura 2.1: Esquema gráfico da deflexão gravitacional da luz.

Até a formulação da teoria de Einstein, nenhuma observação deste fenômeno havia ocorrido, no entanto, motivadas pela previsão da relatividade geral iniciaram-se expedições experimentais para a busca de tal deflexão e, de fato, o fenômeno foi observado experimentalmente pela primeira vez em 1919 [8]. Desde então uma série de experimentos têm sido realizados a fim de aumentar a precisão das medidas do ângulo de

¹Aqui está implícito que o corpo de massa M deve possuir simetria esférica, caso contrário o ângulo de deflexão pode sofrer alterações.

deflexão gravitacional da luz [10].

No âmbito da relatividade geral o ângulo de espalhamento pode ser obtido pelo cálculo das geodésicas do tipo-luz para a métrica de Schwarzschild. Nesse contexto, partículas sujeitas às mesmas condições iniciais seguem as mesmas geodésicas no espaço-tempo, independente das características específicas de cada partícula. No entanto, podemos considerar a linearização das equações de Einstein e tratar a gravitação como uma teoria de campos e, portanto, podemos utilizar o ferramental da teoria quântica de campos para investigar o espalhamento fóton-gráviton em uma abordagem semi-clássica do problema². Nesse caso, a estrutura interna do fóton passa a ser relevante para a interação gravitacional [16–20].

Tendo em mente que a estrutura interna das partículas pode ser relevante para a interação gravitacional, podemos utilizar as medidas experimentais do ângulo de deflexão da luz para explorar novos domínios da física teórica [21]. Por exemplo, Accioly e colaboradores utilizaram os resultados experimentais acerca do espalhamento gravitacional da luz para impor um limite superior para a massa do fóton na teoria de Proca [22–24]. Outras investigações também foram realizadas no contexto de teorias de gravitação com derivadas superiores. No último caso, os limites experimentais para o ângulo do espalhamento fóton-gráviton foram utilizados para estabelecer um limite inferior para um dos parâmetros livres da teoria [25–27].

No presente capítulo consideramos uma abordagem ao nível de árvore para o estudo da deflexão da luz devido a interação com um campo gravitacional externo. A fim de tornarmos a discussão mais didática, essa será dividida em três etapas:

- Iniciamos a discussão pelo estabelecimento do cenário de interação entre o fóton e o campo gravitacional externo.
- Na sequência, computamos a amplitude de Feynman e a seção de choque diferencial (não-polarizada) associada ao processo de espalhamento do fóton por um campo gravitacional externo.
- Finalmente, calculamos o ângulo de deflexão gravitacional da luz.

2.1 A interação do fóton com o campo gravitacional

No capítulo anterior mencionamos que a lagrangiana que descreve a interação entre o campo gravitacional e os outros campos, que não possuem origem gravitacional, pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\kappa}{2} h^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

²Com a terminologia semi-clássica entendemos que o fóton deve ser tratado como uma partícula quântica, enquanto a interação gravitacional age como um campo clássico externo.

onde $T_{\mu\nu}$ representa o tensor de energia-*momentum* associado aos campos de matéria no espaço de Minkowski. Estamos aqui interessados em estudar a interação entre o campo gravitacional e a luz, essa última descrita pelo campo de Maxwell. Primeiramente, recordemos que o tensor de energia-*momentum* de Maxwell pode ser escrito como

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}^2 - F_{\mu}{}^{\alpha}F_{\nu\alpha}, \quad (2.3)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$. Utilizando o tensor de energia-*momentum* acima, podemos escrever a lagrangiana que descreve a interação entre o fóton e o campo gravitacional na seguinte forma

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\kappa}{2}h^{\mu\nu}\left(\frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}^2 - F_{\mu}{}^{\alpha}F_{\nu\alpha}\right). \quad (2.4)$$

Após algumas manipulações algébricas, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & -\frac{\kappa}{4}h^{\mu\nu}\left((\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\lambda\sigma} - \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\eta_{\lambda\sigma} - \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}\eta_{\lambda\sigma}) - \eta_{\mu\nu}\eta_{\beta\lambda}\eta_{\alpha\sigma} - \eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma} + \right. \\ & \left. - \eta_{\alpha\beta}\eta_{\nu\lambda}\eta_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\alpha}\eta_{\beta\lambda}\eta_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\beta}\eta_{\mu\lambda}\eta_{\alpha\sigma} + \eta_{\mu\alpha}\eta_{\beta\lambda}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\lambda}\eta_{\alpha\sigma}\right)\partial^{\lambda}A^{\alpha}\partial^{\sigma}A^{\beta}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

A fim de computarmos o vértice associado com a interação fóton-gráviton³ consideremos as representações de Fourier a seguir

$$A^{\alpha}(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{A}^{\alpha}(p) e^{-ip \cdot x}, \quad (2.6)$$

$$A^{\beta}(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{A}^{\beta}(q) e^{-iq \cdot x}, \quad (2.7)$$

e

$$h^{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{h}^{\mu\nu}(k) e^{-ik \cdot x}. \quad (2.8)$$

Observe que estamos definindo o vértice de interação com todas as partículas “entrando” no ponto de interação, de acordo com a figura 2.2. Levando em consideração

³Estando ciente de que não temos uma teoria completa da gravitação quântica, o uso da palavra “gráviton” pode ser considerado um abuso de linguagem. Entretanto, no contexto de uma teoria efetiva, associamos o termo gráviton à partícula descrita ao nível de árvore pelo campo tensorial $h_{\mu\nu}$.

as expressões acima e substituindo-as na equação (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{h}^{\mu\nu}(k) \tilde{A}^\alpha(p) \tilde{A}^\beta(q) \times \\ & \times \left\{ -\frac{\kappa}{2} \left(p \cdot q (\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} - \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} - \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha}) - \eta_{\mu\nu} p_\beta q_\alpha + \eta_{\mu\alpha} p_\beta q_\nu + \right. \right. \\ & \left. \left. + \eta_{\nu\alpha} p_\beta q_\mu + \eta_{\nu\beta} p_\mu q_\alpha + \eta_{\mu\beta} p_\nu q_\alpha - \eta_{\alpha\beta} p_\mu q_\nu - \eta_{\alpha\beta} p_\nu q_\mu \right) \right\} e^{-i(p+q+k)\cdot x}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

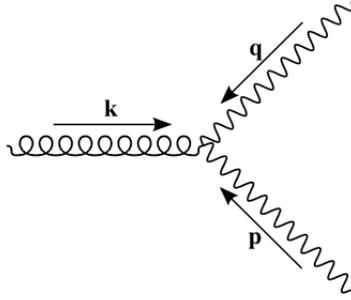


Figura 2.2: Vértice da interação fóton-gráviton.

Por outro lado, a função de vértice, $V_{\mu\nu,\alpha\beta}(p, q)$, está relacionada com a lagrangiana de interação a partir da seguinte equação

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{h}^{\mu\nu}(k) V_{\mu\nu,\alpha\beta}(p, q) \tilde{A}^\alpha(p) \tilde{A}^\beta(q) e^{-i(q+p+k)\cdot x}. \quad (2.10)$$

Comparando as equações (2.9) e (2.10) obtemos a seguinte expressão para o tri-vértice de interação fóton-gráviton

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu,\alpha\beta}(p, q) = & -\frac{\kappa}{2} \left(p \cdot q (\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} - \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} - \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha}) - \eta_{\mu\nu} p_\beta q_\alpha + \right. \\ & \left. + \eta_{\mu\alpha} p_\beta q_\nu + \eta_{\nu\alpha} p_\beta q_\mu + \eta_{\nu\beta} p_\mu q_\alpha + \eta_{\mu\beta} p_\nu q_\alpha - \eta_{\alpha\beta} p_\mu q_\nu - \eta_{\alpha\beta} p_\nu q_\mu \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.2 Espalhamento gravitacional da luz

O objetivo desse capítulo consiste no cálculo do ângulo de deflexão gravitacional da luz por meio do ferramental usual dos processos de espalhamentos da física de altas energias. Começamos pelo computo da amplitude de Feynman associada ao processo de espalhamento representado na figura 2.2.

Primeiramente, a amplitude $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ associada com o processo de espalhamento gravitacional da luz é definida por

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} = \tilde{h}^{\mu\nu}(\vec{k}) V_{\mu\nu,\alpha\beta}(p, -q), \quad (2.12)$$

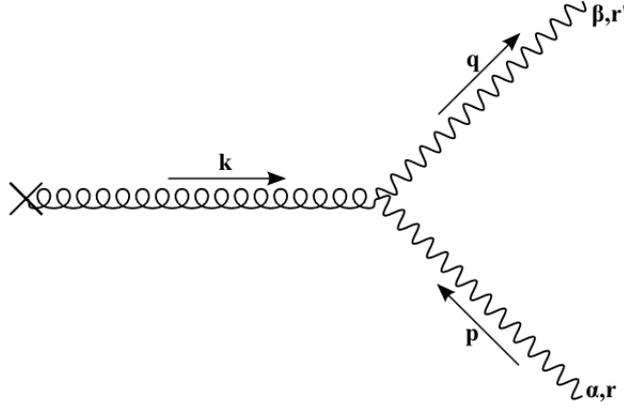


Figura 2.3: Gráfico de Feynman associado com o processo de deflexão gravitacional da luz.

onde $\tilde{h}_{\mu\nu}$ representa um campo gravitacional externo e $V_{\mu\nu,\alpha\beta}(p, -q)$ é o vértice associado ao processo⁴. Utilizando as equações (1.70) e (2.11), obtemos

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} = \frac{\kappa^2 M}{4\vec{k}^2} \left(p \cdot q (2\eta_{\alpha 0} \eta_{\beta 0} - \eta_{\alpha\beta}) + p_\beta q_\alpha + 2p_0 q_0 \eta_{\alpha\beta} - 2\eta_{\alpha 0} p_\beta q_0 - 2\eta_{\beta 0} p_0 q_\alpha \right). \quad (2.13)$$

De acordo com a notação aqui utilizada, o *momentum* do fóton “entrando” no vértice de interação é dado por $p^\mu = (p^0, \vec{p})$, enquanto o *momentum* do fóton “saindo” do vértice é denotado por $q^\mu = (q^0, \vec{q})$. Entretanto, como estamos considerando o gráviton como campo externo, esse não transfere energia para o fóton, logo, devemos ter $p^0 = q^0 \equiv E$. Além disso, lembrando que $p^2 = q^2 = 0$ para o fóton de Maxwell *on-shell*, temos $|\vec{p}| = |\vec{q}| = E$. Desse modo, podemos reescrever a expressão acima da seguinte forma

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} = \frac{\kappa^2 M}{4\vec{k}^2} \left(2p \cdot q \eta_{\alpha 0} \eta_{\beta 0} + p_\beta q_\alpha + (E^2 + \vec{p} \cdot \vec{q}) \eta_{\alpha\beta} - 2E(\eta_{\alpha 0} p_\beta + \eta_{\beta 0} q_\alpha) \right). \quad (2.14)$$

Tomando a base de vetores de polarização dos fótons incidentes e espalhados, respectivamente, como sendo $\{\epsilon_r^\alpha(p)\}_{r=1,2}$ e $\{\epsilon_{r'}^\beta(q)\}_{r'=1,2}$, podemos definir o elemento de matriz

$$\mathcal{M}_{rr'} = \mathcal{M}_{\alpha\beta} \epsilon_r^\alpha(p) \epsilon_{r'}^\beta(q), \quad (2.15)$$

associado com a amplitude de Feynman relacionada ao processo de espalhamento do fóton devido a um campo gravitacional externo. Em geral, podemos restringir os vetores de polarização do fóton de Maxwell a um subespaço contido no setor puramente espacial

⁴No vértice acima estamos utilizando seguinte notação: p representa o *momentum* do fóton “entrando” no vértice, enquanto q denota o *momentum* do fóton “saindo” do vértice, por isso o sinal contrário do *momentum* q .

do espaço-tempo de Minkowski e, portanto, podemos escrever

$$\epsilon_r^\alpha(p) = (0, \vec{\epsilon}_r(p)) \quad \text{e} \quad \epsilon_{r'}^\beta(q) = (0, \vec{\epsilon}_{r'}(q)). \quad (2.16)$$

Utilizando as equações (2.14), (2.15) e (2.16), obtemos a seguinte expressão para o elemento de matriz $\mathcal{M}_{rr'}$

$$\mathcal{M}_{rr'} = \frac{\kappa^2 M}{4\vec{k}^2} \left((q \cdot \epsilon_r(p)) (p \cdot \epsilon_{r'}(q)) + (E^2 + \vec{p} \cdot \vec{q}) \epsilon_r(p) \cdot \epsilon_{r'}(q) \right). \quad (2.17)$$

As medidas típicas de deflexão gravitacional da luz é realizada com feixes não-polarizados, portanto, estamos interessados na obtenção da seção de choque diferencial não-polarizada associada ao processo de espalhamento em questão. De fato, a seção de choque diferencial não-polarizada está relacionada com a amplitude de Feynman a partir da seguinte equação

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{r,r'=1}^2 |\mathcal{M}_{rr'}|^2. \quad (2.18)$$

Observe que a expressão acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \text{tr}(\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}), \quad (2.19)$$

onde \mathcal{M} é a matriz cujos elementos são definidos por $\mathcal{M}_{rr'}$, isto é

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

A partir deste ponto vamos escolher um sistema de coordenadas conveniente para realizarmos os cálculos. Escolhamos a parte espacial do *momentum* do fóton “entrando” no vértice como estando alinhado ao longo do eixo z , ou seja

$$\vec{p} = E \hat{z}. \quad (2.21)$$

Sabemos que a base de vetores de polarização associada com o fóton de Maxwell deve estar restrita ao plano transversal à direção de propagação do fóton, portanto, podemos escolher

$$\vec{\epsilon}_1(p) = \hat{x} \quad \text{e} \quad \vec{\epsilon}_2(p) = \hat{y}. \quad (2.22)$$

Por outro lado, para o fóton espalhado, podemos escrever a parte espacial do *momentum*

como sendo

$$\vec{q} = E(\sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}), \quad (2.23)$$

onde θ e ϕ representam, respectivamente, o ângulo polar e o ângulo azimutal. Com a parametrização dada acima, podemos escrever a base de vetores de polarização do fóton espalhado da seguinte forma

$$\vec{e}_1(q) = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \quad \text{e} \quad \vec{e}_2(q) = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}. \quad (2.24)$$

Utilizando as expressões (2.17), (2.20), (2.21), (2.22), (2.23) e (2.24), obtemos

$$\mathcal{M} = -\frac{\kappa^2 M}{2\vec{k}^2} E^2 \cos^2(\theta/2) \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

A conservação do *momentum* no processo de espalhamento implica na seguinte igualdade

$$\vec{k} = \vec{q} - \vec{p}, \quad (2.26)$$

onde \vec{k} é o *momentum* carregado pelo campo gravitacional externo. Utilizando esta equação, podemos ainda escrever

$$\vec{k}^2 = \vec{p}^2 + \vec{q}^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{q} = 4E^2 \sin^2(\theta/2). \quad (2.27)$$

Portanto, podemos reescrever a equação (2.25) da seguinte forma

$$\mathcal{M} = -\frac{\kappa^2 M}{8 \tan^2(\theta/2)} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Utilizando a expressão acima, obtemos a seguinte expressão para a seção de choque diferencial não-polarizada

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2 M^2}{\tan^4(\theta/2)}, \quad (2.29)$$

onde utilizamos a definição $\kappa = \sqrt{32\pi G}$. Por fim, em um processo de espalhamento da luz por um campo gravitacional externo, esperamos que o ângulo de deflexão da luz seja muito pequeno. Nesse regime podemos considerar a aproximação $\tan(\theta/2) \approx \frac{\theta}{2}$ e, portanto, reescrever a seção de choque diferencial da seguinte forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(4GM)^2}{\theta^4}, \quad \text{para } \theta \ll 1. \quad (2.30)$$

2.3 Ângulo de deflexão gravitacional da luz

Nesse ponto estamos com todos o ingredientes necessários para o cálculo do ângulo de deflexão gravitacional da luz seguindo uma abordagem via teoria de campos. Vamos, então, ao cálculo desejado!

Por um lado, podemos relacionar a seção de choque diferencial, ângulo de espalhamento θ e o parâmetro de impacto b , a partir da seguinte equação

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{b}{\theta} \frac{db}{d\theta}. \quad (2.31)$$

Por outro lado, na seção anterior deduzimos a equação (2.30), que nos fornece uma expressão para a seção de choque diferencial não-polarizada associada com o processo de espalhamento gravitacional da luz. Comparando as equações (2.30) e (2.31), obtemos a seguinte equação diferencial

$$-\frac{b}{\theta} \frac{db}{d\theta} = \frac{(4GM)^2}{\theta^4}. \quad (2.32)$$

Integrando a equação acima, obtemos o seguinte resultado

$$b^2 = \frac{(4GM)^2}{\theta^2} + C, \quad (2.33)$$

onde C representa uma constante de integração. Afim de determinarmos a constante de integração, vamos comparar a equação acima com o ângulo de deflexão obtida pela abordagem clássica da RG, ou seja, com o ângulo de Einstein

$$\theta_E = \frac{4MG}{b}. \quad (2.34)$$

Comparando as duas última expressões, não é difícil concluir que para que o resultado obtido via teoria de campos retorne, quando $\theta \ll 1$, ao resultado da abordagem clássica, devemos fazer $C = 0$. Portanto, finalizamos a nossa discussão com a seguinte expressão para o ângulo de deflexão gravitacional obtido pela abordagem ao nível de árvore (quando $\theta \ll 1$)

$$\theta = \frac{4MG}{b} \equiv \theta_E. \quad (2.35)$$

A eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw

A simetria de Lorentz e a invariância CPT estão entre os principais pilares da física moderna. De fato, a teoria quântica de campos foi construída com o objetivo de incorporar essas simetrias nos processos de altas energias. Um dos maiores triunfos da teoria quântica de campos, o Modelo Padrão da física de partículas elementares, possui a simetria de Lorentz e a invariância CPT no seu cerne. No entanto, existem indicativos de que devemos ir além do Modelo Padrão de física de partículas. Algumas teorias que vislumbram a física além do Modelo Padrão, *e.g.* teorias de cordas [29], podem acarretar na VSL e quebra da invariância CPT . Portanto, a possível detecção de traços da quebra das simetrias de Lorentz e CPT podem indicar o caminho para uma nova física além do Modelo Padrão.

Na década de 1990, Kostelecký e colaboradores deram início a um programa de pesquisa por teorias efetivas que apresentam VSL. Em especial, destacamos o Modelo Padrão Estendido, que incorpora a VSL e quebra da invariância CPT , mas deixa intacta a simetria de calibre $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ do Modelo Padrão usual [31].

No âmbito das teorias efetivas, podemos analisar os setores do Modelo Padrão minimamente estendido de forma isolada. Nesse trabalho focaremos no seu setor eletromagnético. Em geral, o setor eletromagnético apresenta um setor CPT par e outro CPT ímpar, aqui estamos interessados somente no segundo. Embora o setor eletromagnético e CPT ímpar seja um subsetor do Modelo Padrão minimamente estendido, quando analisado de forma isolada, esse setor é conhecido como eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw (CFJ) [61].

A eletrodinâmica de CFJ foi originalmente concebida em 1990 com a proposta de introduzir um termo na lagrangiana de Maxwell invariante pelas transformações de calibre do eletromagnetismo (em $D = 3 + 1$) e capaz de produzir polos não triviais no propagador. Para que o termo adicional mantenha a lagrangiana invariante por transformações de calibre do grupo $U(1)$, se faz necessária a introdução de um vetor de fundo, v^μ , para formar o termo do tipo Chern-Simons. Entretanto, a introdução de

um vetor de fundo na teoria realiza a quebra da simetria de Lorentz, enquanto o termo topológico viola a invariância *CPT*.

3.1 A dinâmica da eletrodinâmica de CFJ

Começamos o nosso estudo da eletrodinâmica de CFJ a partir da sua dinâmica, cuja lagrangiana é definida por [61]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}v_\mu A_\nu \partial_\alpha A_\beta, \quad (3.1)$$

ou de forma equivalente

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}v_\mu A_\nu \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor de Maxwell, $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ é o seu dual e v_μ é um vetor de fundo com dimensão canônica de massa igual a 1.

Considerando a transformação de calibre usual da eletrodinâmica, isto é $A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \xi$, obtemos a seguinte expressão para a variação da lagrangiana de CFJ segundo essa transformação de calibre

$$\delta_\xi \mathcal{L} = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu} \delta_\xi F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}v_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \delta_\xi A_\nu - \frac{1}{2}v_\mu A_\nu \delta_\xi \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

No entanto, a transformação de calibre acima implica nos seguintes resultados

$$\delta_\xi A_\mu = \partial_\mu \xi, \quad \delta_\xi F_{\mu\nu} = 0 \quad \text{e} \quad \delta_\xi \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.4)$$

portanto, a menos de divergências totais, a equação (3.3) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\delta_\xi \mathcal{L} = -\frac{1}{2}\xi \partial_\mu v_\nu \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (3.5)$$

Para que a variação funcional de \mathcal{L} seja nula de forma independente do parâmetro ξ , a seguinte equação deve ser satisfeita

$$\partial_\mu v_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow (\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu) \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.6)$$

A maneira mais simples da equação acima ser satisfeita, de forma independente de qualquer especificidade do campo A_μ , reside na escolha do vetor de fundo como sendo, em certo sentido, uma constante fundamental da natureza. Essa escolha, no entanto, possui consequências conceituais profundas: a escolha de um vetor constante v_μ com a

componente temporal não trivial, $v^0 \neq 0$, quebra a invariância por transformações de *boost*; enquanto a escolha de um vetor de fundo com parte espacial não nula, $\vec{v} \neq \vec{0}$, destrói a invariância por rotações espaciais, isto é, ocorre a quebra a isotropia espacial. Em suma, a existência de um vetor de fundo constante realiza a quebra da simetria de Lorentz. É válido observar que a escolha $v_\mu = \partial_\mu \phi$, onde $\phi = \phi(x)$ é uma função escalar suave, também satisfaz a condição acima, no entanto, nessa dissertação iremos nos restringir ao caso em que v_μ é um vetor de fundo constante.

Como até os dias atuais não houve nenhuma evidência experimental da VSL, devemos assumir que os componentes, tanto no setor temporal quanto no setor espacial, possuem valores muito pequenos quando comparados às escalas típicas de energia dos experimentos realizados até então. No trabalho original de Carroll, Field e Jackiw os autores obtiveram limites experimentais para a escala de intensidade do vetor de fundo. De fato, com base em experimentos geomagnéticos o limite superior de $\lesssim 10^{-26}$ GeV foi obtido, enquanto, com base em dados astrofísicos, o limite superior encontrado foi $\lesssim 10^{-42}$ GeV [61].

As equações de campo da eletrodinâmica de CFJ na presença de uma corrente externa, J^ν , podem ser escritas da seguinte forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = v_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} + J^\nu, \quad (3.7)$$

enquanto as equações homogêneas permanecem inalteradas, ou seja

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.8)$$

De forma mais explícita as equações de campo podem ser reescritas como

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho - \vec{v} \cdot \vec{B}, \quad (3.9a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.9b)$$

$$\partial_t \vec{B} + \nabla \times \vec{E} = 0, \quad (3.9c)$$

$$-\partial_t \vec{E} + \nabla \times \vec{B} = \vec{J} - v_0 \vec{B} + \vec{v} \times \vec{E}. \quad (3.9d)$$

Como as equações de campo podem ser escritas sem a dependência explícita do campo de calibre A_μ , podemos concluir de forma direta que as equações de campo são invariantes pela transformação de calibre mencionada anteriormente. Adicionalmente, não é difícil notar que recuperamos as equações de Maxwell quando $v_\mu = 0$, assim como deveria-se esperar.

3.2 Tensor de energia-*momentum*

Nos capítulos anteriores mencionamos que a interação do setor de matéria com o campo gravitacional deve ser implementada a partir do acoplamento entre o campo $h_{\mu\nu}$ e o tensor de energia-*momentum* associando ao campo de matéria. Por outro lado, no capítulo 4 estudaremos a interação entre o campo de CFJ e a gravitação, portanto, precisamos calcular uma expressão para o tensor de energia-*momentum* no contexto da eletrodinâmica de CFJ.

O objetivo desta seção é, justamente, derivar uma expressão para o tensor de energia-*momentum* a partir de uma serie de manipulações das equações de movimento que conduzem a uma equação de continuidade. Primeiramente, multiplicando a equação (3.7) por $F^\alpha{}_\nu$ e utilizando a regra de Leibniz para as derivadas, obtemos a seguinte equação

$$\partial_\mu(F^\alpha{}_\nu F^{\mu\nu}) - \partial_\mu F^\alpha{}_\nu F^{\mu\nu} = v_\mu F^\alpha{}_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} + F^\alpha{}_\nu J^\nu. \quad (3.10)$$

Utilizando a identidade de Bianchi podemos escrever, após algumas manipulações algébricas, a seguinte igualdade

$$\partial_\mu F^\alpha{}_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \partial_\mu (\eta^{\mu\alpha} F_{\sigma\lambda}^2). \quad (3.11)$$

Além disso, recordando a identidade $F^\alpha{}_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \eta^{\mu\alpha} F_{\sigma\lambda} \tilde{F}^{\sigma\lambda}$, obtemos

$$v_\mu F^\alpha{}_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu (v^\alpha \tilde{F}^{\mu\nu} A_\nu). \quad (3.12)$$

Substituindo as equações (3.11) e (3.12) na equação (3.10), podemos escrever a seguinte equação de conservação

$$\partial_\mu \left(\frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^2 - F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{2} v^\nu \tilde{F}^{\mu\alpha} A_\alpha \right) = f^\nu, \quad (3.13)$$

onde $f^\nu = -F^\nu{}_\alpha J^\alpha$ é a expressão covariante para a densidade força de Lorentz. Lembrando que o tensor de energia-*momentum* está, usualmente, relacionando com a força de Lorentz a partir da equação de continuidade

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = f^\nu, \quad (3.14)$$

podemos identificar o tensor de energia-*momentum* da eletrodinâmica de CFJ com o termo entre parenteses na equação (3.13), isto é

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^2 - F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{2} v^\nu \tilde{F}^{\mu\alpha} A_\alpha. \quad (3.15)$$

Observe que a expressão acima se reduz ao tensor de energia-*momentum* de Maxwell no caso em que $v^\mu = 0$. Apesar do termo de CFJ ser de natureza topológica e, portanto, não se acoplar com a métrica do espaço-tempo, o mesmo contribui para a expressão do tensor de energia-*momentum* como uma forma de “agente externo”. Note que a presença desse termo adicional é imprescindível para garantir a equação de conservação $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ na ausência de correntes externas.

Podemos ainda observar que o tensor de energia-*momentum* obtido acima não é invariante por transformações de calibre, de fato temos

$$T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}v^\nu \tilde{F}^{\mu\alpha} \partial_\alpha \xi, \quad (3.16)$$

onde $T'^{\mu\nu}$ representa o tensor de energia-*momentum* associado ao campo A'_μ . No entanto, pode-se verificar que os observáveis físicos que podem ser calculados a partir desse tensor (*e.g.* energia, *momentum* e etc) não dependem da escolha de calibre.

Antes de finalizarmos a nossa discussão sobre o tensor de energia-*momentum*, consideramos alguns aspectos concernentes ao setor correspondente à densidade de energia do campo de CFJ. Lembrando que a densidade de energia, u , corresponde ao componente T^{00} , podemos escrever

$$u \equiv T^{00} = \frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{2} + \frac{1}{2}v_0 \vec{B} \cdot \vec{A}. \quad (3.17)$$

O termo $\frac{1}{2}v_0 \vec{B} \cdot \vec{A}$ na expressão acima viola a garantia de positividade da energia, portanto, a quebra da simetria de Lorentz pode causar a instabilidade do campo de CFJ. Mais adiante nesse capítulo voltaremos à discussão sobre a estabilidade da eletrodinâmica de CFJ.

3.3 Soluções clássicas e modos de propagação

Nesta seção estudamos as soluções de ondas planas e os modos de propagação associados com as equações de CFJ no vácuo, para isso, examinamos as equações de CFJ em termos dos campos \vec{E} e \vec{B} . Nas ausência de fontes externas, podemos reescrever as equações (3.9) da seguinte forma

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\vec{v} \cdot \vec{B}, \quad (3.18a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.18b)$$

$$\partial_t \vec{B} + \nabla \times \vec{E} = 0, \quad (3.18c)$$

$$-\partial_t \vec{E} + \nabla \times \vec{B} = -v_0 \vec{B} + \vec{v} \times \vec{E}. \quad (3.18d)$$

Utilizando o *ansatz* usual de soluções na forma de ondas planas, ou seja

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad \text{e} \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}, \quad (3.19)$$

podemos reescrever o conjunto de equações acima no espaço dos *momenta*, a saber

$$i\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = -\vec{v} \cdot \vec{B}_0, \quad (3.20a)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad (3.20b)$$

$$\omega \vec{B}_0 = \vec{k} \times \vec{E}_0, \quad (3.20c)$$

$$i\omega \vec{E}_0 + i\vec{k} \times \vec{B}_0 = -v_0 \vec{B}_0 + \vec{v} \times \vec{E}_0. \quad (3.20d)$$

Utilizando a equação (3.20c), podemos escrever $\vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0$ e, portanto, podemos eliminar o campo magnético das equações (3.20a) e (3.20d), desse modo, obtemos as seguintes equações

$$\left(\vec{k} + i \frac{\vec{k} \times \vec{v}}{\omega} \right) \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad (3.21a)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad (3.21b)$$

$$i\omega \left(1 - \frac{\vec{k}^2}{\omega^2} \right) \vec{E}_0 + \frac{i}{\omega} (\vec{k} \cdot \vec{E}_0) \vec{k} + \left(\frac{v_0}{\omega} \vec{k} - \vec{v} \right) \times \vec{E}_0 = 0. \quad (3.21c)$$

A equação (3.21a) nos indica que as oscilações do campo elétrico se dão sobre um plano ortogonal à direção definida pelo vetor $\vec{k} + i \frac{\vec{k} \times \vec{v}}{\omega}$ do campo, enquanto a equação (3.21b) nos diz que o campo magnético oscila em um plano ortogonal ao plano de propagação. Além disso, de acordo com a equação (3.20c), os campos \vec{E} e \vec{B} são ortogonais entre si. A equação (3.21c) pode ser reescrita na seguinte forma

$$R_{ij} \vec{E}_0^j = 0, \quad (3.22)$$

onde \vec{E}_0^j denota a i -ésima componente do campo elétrico e R_{ij} foi definido como sendo

$$R_{ij} = i(\omega^2 - \vec{k}^2) \delta_{ij} + i\vec{k}_i \vec{k}_j - \epsilon_{ijl} (v_0 \vec{k}_l - \omega \vec{v}_l). \quad (3.23)$$

Colocando os R_{ij} 's como os elementos de uma matriz \mathcal{R} , obtemos

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} i(\omega^2 - \vec{k}_2^2 - \vec{k}_3^2) & i\vec{k}_1 \vec{k}_2 - v_0 \vec{k}_3 + \omega \vec{v}_3 & i\vec{k}_1 \vec{k}_3 + v_0 \vec{k}_2 - \omega \vec{v}_2 \\ i\vec{k}_1 \vec{k}_2 + v_0 \vec{k}_3 - \omega \vec{v}_3 & i(\omega^2 - \vec{k}_1^2 - \vec{k}_3^2) & i\vec{k}_2 \vec{k}_3 - v_0 \vec{k}_1 + \omega \vec{v}_1 \\ i\vec{k}_1 \vec{k}_3 - v_0 \vec{k}_2 + \omega \vec{v}_2 & i\vec{k}_2 \vec{k}_3 + v_0 \vec{k}_1 - \omega \vec{v}_1 & i(\omega^2 - \vec{k}_1^2 - \vec{k}_2^2) \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Para que a equação (3.22) admita soluções não triviais, o determinante da matriz acima deve ser nulo; portanto, podemos obter os modos de propagação da teoria de CFJ a partir das raízes do determinante de \mathcal{R} . Calculando o determinante da matriz acima

e impondo a sua trivialidade, obtemos, após uma séries de manipulações algébricas, o seguinte resultado

$$k^4 - (v \cdot k)^2 + v^2 k^2 = 0. \quad (3.25)$$

A equação acima representa a relação de dispersão para a eletrodinâmica de CFJ e suas soluções $\omega = \omega(\vec{k})$ determinam os modos de propagação dessa teoria. Como a equação acima é polinomial de quarto grau, existe a possibilidade de obtermos dois ou mais modos de propagação. Mais adiante voltaremos à equação acima quando analisarmos a consistência das soluções clássicas segundo os critérios de estabilidade e causalidade.

Vejam, agora, alguns pontos acerca dos graus de polarização na eletrodinâmica de CFJ. Para isso, reconsideremos a equação (3.7) na ausência de fontes externa e escrita em termos do vetor A^μ , a saber

$$\square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} v_\nu \partial_\alpha A_\beta = 0. \quad (3.26)$$

No espaço de Fourier a equação acima pode ser reescrita como segue

$$k^2 \tilde{A}^\mu(k) - k^\mu k_\nu \tilde{A}^\nu(k) + i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} v_\nu k_\alpha \tilde{A}_\beta(k) = 0, \quad (3.27)$$

onde $\tilde{A}^\mu(k)$ representa a transformada de Fourier do campo $A^\mu(x)$. Consideremos a seguinte expansão do vetor $\tilde{A}^\mu(k)$

$$\tilde{A}^\mu(k) = a_0(k)k^\mu + \sum_{r=1}^3 a_r(k)\xi_r^\mu(k). \quad (3.28)$$

onde os vetores k^μ , ξ_1^μ , ξ_2^μ e ξ_3^μ formam uma base do espaço de Minkowski e são definidos por

$$k^\mu = (k^0, \vec{k}) = (\omega, \vec{k}), \quad (3.29)$$

e

$$\xi_r^\mu(k) = (0, \vec{\xi}_r(k)), \quad (r = 1, 2, 3), \quad (3.30)$$

sendo que os tri-vetores $\{\vec{\xi}_1(k), \vec{\xi}_2(k), \vec{\xi}_3(k)\}$ formam um conjunto de vetores ortonormais e escolhemos $\vec{\xi}_3(k)$ na direção do tri-momentum, isto é $\vec{\xi}_3(k) = \hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$.

Inicialmente, observemos que com a escolha de calibre adequada podemos fazer $a_0(k) = 0$ e, portanto, não há grau de liberdade físico ao longo da direção k^μ . Substi-

tuindo a expressão (3.28) na equação (3.27), obtemos

$$a_3(k) \left(|\vec{k}| k^\mu + k^2 \xi_3^\mu + i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} v_\nu k_\alpha \xi_{3,\beta} \right) + \sum_{r=1}^2 a_r(k) \left(k^2 \xi_r^\mu + i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} v_\nu p_\alpha \xi_{r,\beta} \right) = 0. \quad (3.31)$$

Singularizando a equação acima para $\mu = 0$, obtemos o seguinte resultado

$$a_3(k) = \frac{i}{\omega} (a_1(k) v_2 - a_2(k) v_1), \quad (3.32)$$

onde utilizamos $\vec{\xi}_1 \times \vec{\xi}_2 = \vec{\xi}_3$ (e suas permutações cíclicas) e definimos a notação $v_r = \vec{v} \cdot \vec{\xi}_r$. A equação acima nos fornece uma vínculo entre $a_3(k)$ e os coeficientes $a_1(k)$ e $a_2(k)$. Esse vínculo indica que o grau de liberdade ao longo da direção ξ_3^μ não é independente dos demais graus de liberdade físicos. Podemos, então, utilizar o vínculo acima a fim de eliminar a dependência de $a_3(k)$ na expansão do campo \tilde{A}^μ . Nesse caso, podemos reescrever a equação (3.28) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \tilde{A}^\mu(k) &= a_1(k) \left(\xi_1^\mu(k) + i \frac{v_2}{\omega} \xi_3^\mu(k) \right) + a_2(k) \left(\xi_2^\mu(k) - i \frac{v_1}{\omega} \xi_3^\mu(k) \right) \\ &= a_1(k) \varepsilon_1^\mu(k) + a_2(k) \varepsilon_2^\mu(k), \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde definimos os novos vetores de polarização

$$\varepsilon_1^\mu(k) = \xi_1^\mu(k) + i \frac{v_2}{\omega} \xi_3^\mu(k) \quad \text{e} \quad \varepsilon_2^\mu(k) = \xi_2^\mu(k) - i \frac{v_1}{\omega} \xi_3^\mu(k). \quad (3.34)$$

Os novos vetores de polarização, $\varepsilon_1^\mu(k)$ e $\varepsilon_2^\mu(k)$, possuem uma grande vantagem sobre os vetores antigos: esse novo conjunto de vetores de polarização exibe de forma clara quais são os graus de liberdade físicos da teoria de CFJ. Para a discussão que vem a seguir, convêm utilizar a seguinte notação condensada

$$\varepsilon_r^\mu(k) = \xi_r^\mu(k) + i \chi_r \xi_3^\mu(k), \quad (r = 1, 2), \quad (3.35)$$

onde definimos $\chi_1 = \frac{v_2}{\omega}$ e $\chi_2 = -\frac{v_1}{\omega}$. Observe que podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^\mu(k) &= \sqrt{1 + \chi_r^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \chi_r^2}} \xi_r^\mu(k) + i \frac{\chi_r}{\sqrt{1 + \chi_r^2}} \xi_3^\mu(k) \right) \\ &= \sqrt{1 + \chi_r^2} \left(\cos \phi_r \xi_r^\mu(k) + i \sin \phi_r \xi_3^\mu(k) \right), \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde $\phi_r = \arctan(\chi_r)$. Escrevendo os senos e cossenos em termos de exponenciais,

obtemos o seguinte resultado

$$\varepsilon_r^\mu(k) = \frac{\sqrt{1 + \chi_r^2}}{2} \left(e^{i\phi_r} (\xi_r^\mu(k) + \xi_3^\mu(k)) + e^{-i\phi_r} (\xi_r^\mu(k) - \xi_3^\mu(k)) \right). \quad (3.37)$$

Note que a VSL traz fatores de fase para os vetores de polarização dos campos de CFJ. Levando em conta que essas fases dependem explicitamente de ω , a possibilidade de existir mais de um modo de propagação como solução da relação de dispersão (3.25) nos conduz a existência múltiplos conjuntos de vetores de polarização, cada um correspondendo a um modo de propagação diferente. Esse fenômeno caracteriza a propriedade de bi-refringência do vácuo, presente na teoria de CFJ. Pode-se observar que no caso em que a simetria de Lorentz é restaurada, isto é $v^\mu = 0$, os fatores de fase acabam por desaparecer, eliminando, assim, a bi-refringência do vácuo.

3.4 Consistência das soluções clássicas: estabilidade e causalidade

O objetivo dessa seção é a investigação da consistência das soluções clássicas, obtidas acima, de acordo com os critérios de estabilidade e causalidade [62–64, 66]. Antes de investigarmos a estabilidade e a causalidade da teoria de CFJ, vamos estabelecer a estratégia aqui utilizada. No que diz respeito à estabilidade das soluções, precisamos averiguar se os modos de propagação exibem frequência imaginárias, se isso ocorrer, dizemos que o modo é instável, caso contrário, a estabilidade estará garantida. Com relação à causalidade, precisamos analisar a *velocidade de grupo* e a chamada *velocidade de frente* [67], ambas podem ser obtidas a partir da relação de dispersão (3.25). A velocidade de grupo é definida por

$$\mathbf{v}_{grupo} = \frac{\partial \omega(k)}{\partial |\vec{k}|}, \quad (3.38)$$

enquanto as velocidades de fase e de frente são, respectivamente, definidas por

$$\mathbf{v}_{fase} = \frac{\omega}{|\vec{k}|} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_{frente} = \lim_{|\vec{k}| \rightarrow \infty} \mathbf{v}_{fase}. \quad (3.39)$$

Com esses elementos em mãos, dizemos que a teoria é causal se as seguintes condições forem satisfeitas simultaneamente [62, 63, 66]

$$\mathbf{v}_{grupo} \leq 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_{frente} = 1. \quad (3.40)$$

No que segue abaixo, aplicamos os critérios acima a fim de analisarmos a estabilidade e causalidade da teoria de CFJ. Como a obtenção das soluções exatas $\omega = \omega(\vec{k})$ não

é uma tarefa simples para um vetor v^μ arbitrário, vamos analisar dois casos distintos para o vetor que realiza a quebra da simetria de Lorentz.

3.4.1 Caso 1 - Vetor de fundo tipo-tempo ($v_0 \neq 0$ e $\vec{v} = 0$)

No caso em que o vetor de fundo apresenta somente a componente temporal, podemos escrever a equação de dispersão para a eletrodinâmica de CFJ da seguinte forma

$$(\omega^2 - \vec{k}^2)^2 - v_0^2 \omega^2 + v_0^2 (\omega^2 - \vec{k}^2) = 0. \quad (3.41)$$

A equação acima apresenta duas soluções para ω^2 , a saber

$$\omega_\pm^2 = |\vec{k}| (|\vec{k}| \pm v_0). \quad (3.42)$$

Primeiramente vamos analisar a questão estabilidade dos modos de propagação. Conforme podemos observar, a equação acima apresenta dois modos de propagação e, portanto, precisaremos analisar a estabilidade de cada um deles. Consideremos primeiro o sinal positivo na equação acima, nesse caso temos

$$\omega_+^2 = |\vec{k}| (|\vec{k}| + v_0). \quad (3.43)$$

Suponhamos que $v_0 > 0$, nesse caso, a equação acima nos conduz ao seguinte resultado

$$v_0 > 0 \Rightarrow \omega_+^2 \geq 0 \Rightarrow \text{Im}(\omega_+) = 0. \quad (3.44)$$

Portanto, o modo $\omega_+(k)$ é estável quando $v_0 > 0$. Se ao invés da hipótese $v_0 > 0$, tivéssemos adotado $v_0 < 0$, a estabilidade não poderia ser garantida no setor infravermelho da teoria. Utilizando um argumento análogo, não é difícil concluir que o modo de propagação $\omega_-(k)$ é estável se a hipótese $v_0 < 0$ for satisfeita e, além disso, no caso $v_0 > 0$ teremos instabilidade no setor infravermelho. Podemos então concluir que a estabilidade não pode ser garantida para os dois modos de propagação de forma simultânea¹.

Vejamos agora a questão da causalidade da teoria de CFJ. Utilizando a equação (3.43), obtemos a seguinte expressão para a velocidade de grupo

$$\mathbf{v}_{grupo}^\pm = \frac{2|\vec{k}| \pm v_0}{2\sqrt{|\vec{k}|^2 \pm v_0|\vec{k}|}}. \quad (3.45)$$

¹Estamos excluindo o caso $v_0 = 0$, pois nesse caso retornaríamos à eletrodinâmica de Maxwell.

Adicionalmente, obtemos a seguinte expressão para a velocidade de frente

$$\mathbf{v}_{frente}^{\pm} = \lim_{|\vec{k}| \rightarrow \infty} \left(1 \pm \frac{v_0}{|\vec{k}|} \right)^{1/2} = 1. \quad (3.46)$$

Uma inspeção cuidadosa na velocidade de grupo, nos permite concluir que $\mathbf{v}_{grupo}^{\pm} < 1$ se $v_0 < 0$, enquanto $\mathbf{v}_{grupo}^{-} < 1$ se $v_0 > 0$. Portanto, podemos inferir que o modo de propagação $\omega_+(k)$ é causal quando $v_0 < 0$, enquanto o modo $\omega_-(k)$ possui causalidade garantida somente se $v_0 > 0$. Assim, os dois modos também não podem ser simultaneamente causais. A tabela abaixo sintetiza os resultados aqui obtidos

Modo de propagação	Estabilidade	Causalidade
$\omega_+(k)$	$v_0 > 0$	$v_0 < 0$
$\omega_-(k)$	$v_0 < 0$	$v_0 > 0$

Tabela 3.1: Síntese sobre a estabilidade e causalidade dos modos de propagação.

Conforme podemos observar na tabela acima, não existe nenhuma possibilidade de consistência das soluções clássicas no caso em que o vetor de fundo é puramente tipo-tempo.

3.4.2 Caso 2 - Vetor de fundo tipo espaço ($v_0 = 0$ e $\vec{v} \neq 0$)

Consideremos agora o caso em que o vetor de fundo é puramente espacial, isto é $v_0 = 0$ e $\vec{v} \neq 0$, nesse caso a equação relação de dispersão de CFJ pode ser colocada na forma

$$(\omega^2 - \vec{k}^2)^2 - |\vec{v}|^2 |\vec{k}|^2 \cos^2 \phi_{k,v} - |\vec{v}|^2 (\omega^2 - \vec{k}^2) = 0, \quad (3.47)$$

onde $\phi_{k,v}$ representa o ângulo entre os vetores \vec{k} e \vec{v} . Resolvendo a equação acima para ω^2 , obtemos

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{|\vec{v}|^2}{2} \left(1 + \frac{2|\vec{k}|^2}{|\vec{v}|^2} \pm \sqrt{1 + \frac{4|\vec{k}|^2 \cos^2 \phi_{k,v}}{|\vec{v}|^2}} \right). \quad (3.48)$$

Apesar de termos dois modos de propagação, não é difícil concluir, a partir da expressão acima, que os dois modos satisfazem à condição $\omega_{\pm}(k) \geq 0$. Portanto, no caso em que o vetor de fundo possui apenas o setor trivial, ambos dos modos de propagação são estáveis.

Com relação à causalidade, a análise é um pouco mais complexa do que no caso anterior. Primeiramente, consideremos a velocidade de frente. Nesse caso obtemos

$$\mathbf{v}_{frente}^{\pm} = \lim_{|\vec{k}| \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{|\vec{v}|^2}{2|\vec{k}|^2} \pm \frac{|\vec{v}|^2}{2|\vec{k}|^2} \sqrt{1 + \frac{4|\vec{k}|^2 \cos^2 \phi_{k,v}}{|\vec{v}|^2}} \right)^{1/2} = 1. \quad (3.49)$$

Por outro lado, a velocidade de grupo é dada por

$$\mathbf{v}_{grupo}^{\pm} = \frac{|\vec{k}|}{|\vec{v}|} \left(1 \pm \frac{\cos^2 \phi_{k,v}}{\sqrt{1 + 4 \frac{|\vec{k}|^2}{|\vec{v}|^2} \cos^2 \phi_{k,v}}} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{|\vec{k}|^2}{|\vec{v}|^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 \frac{|\vec{k}|^2}{|\vec{v}|^2} \cos^2 \phi_{k,v}} \right)^{-1/2}. \quad (3.50)$$

Embora não seja evidente a partir da expressão acima, pode-se verificar, com auxílio de software de manipulação algébrica, que a velocidade de grupo satisfaz à condição $\mathbf{v}_{grupo}^{\pm} \leq 1$ para todo o espaço dos parâmetros $|\vec{v}|$ e $\phi_{k,v}$. Portanto, os dois modos de propagação respeitam causalidade.

Em suma, no caso em que o vetor de fundo é puramente do tipo espaço, isto é $v_0 = 0$ e $\vec{v} \neq 0$, os dois modos satisfazem aos critérios necessários para garantir a estabilidade e causalidade da teoria.

Deflexão gravitacional da luz na presença de violação da simetria de Lorentz

Nos capítulos anteriores foram discutidos, essencialmente, dois assuntos distintos: a deflexão gravitacional da luz e a VSL na eletrodinâmica. O objetivo desse capítulo é explorar a união desses dois tópicos. Conforme foi mencionado no início do capítulo 3, a busca por efeitos da VSL em situações experimentais de baixas energias pode nos dar alguns indicativos de uma nova física de altas energias.

Neste capítulo investigamos o efeito da VSL e a quebra da invariância CPT no processo de deflexão gravitacional da luz. A violação dessas simetrias pode ser implementada pelo acoplamento da luz com um vetor de fundo constante. Do ponto de vista da teoria de campos, isso pode ser realizado pela eletrodinâmica de CFJ, onde um termo topológico tipo Chern-Simons acopla o campo A_μ com um vetor de fundo.

A fim de investigarmos os traços da VSL no processo de deflexão gravitacional da luz, lançamos mão das mesmas ferramentas teóricas do capítulo 2. A análise teoria com processo de espalhamento da luz (descrita pela eletrodinâmica de CFJ) por um campo gravitacional externo (descrito pela teoria linearizada de Einstein-Hilbert), revela que o ângulo de deflexão gravitacional da luz passa a depender explicitamente do vetor de fundo que realiza a quebra da simetria de Lorentz. Desse modo, podemos comparar a previsão teórica com os dados experimentais, tendo como objetivo a procura por sinais da existência do vetor de fundo nesse processo.

4.1 Interação do campo de CFJ com a gravitação

A análise teórica do efeito da VSL no processo de espalhamento da luz por um campo gravitacional externo passa pelos mesmos passos realizados no capítulo 2, são eles: estabelecimento da lagrangiana de interação e o cálculo do vértice; cálculo da amplitude e seção de choque diferencial associada ao processo de espalhamento; determinação do

ângulo de deflexão gravitacional da luz. Na presente seção estamos interessados nos dois primeiros itens da lista acima, a lagrangiana e o vértice de interação.

Conforme foi mencionado no capítulo 1, a lagrangiana de interação entre a gravitação e o setor de matéria pode se obtida a partir do acoplamento entre o campo gravitacional $h^{\mu\nu}$ e o tensor de energia-*momentum*, $T_{\mu\nu}$, associado ao setor de matéria, ou seja

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\kappa}{2}h^{\mu\nu}T_{\mu\nu}. \quad (4.1)$$

Substituindo na equação acima a expressão obtida no capítulo 3 para o tensor de energia-*momentum* no contexto da eletrodinâmica de CFJ, equação (3.15), obtemos a seguinte lagrangiana de interação

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\kappa}{2}h^{\mu\nu} \left(\frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}^2 - F_{\mu\alpha}F_{\nu}{}^{\alpha} + \frac{1}{2}v_{\nu}\tilde{F}_{\mu\alpha}A^{\alpha} \right). \quad (4.2)$$

Após algumas manipulações algébricas, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & -\frac{\kappa}{4}h^{\mu\nu} \left((\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\lambda\sigma} - \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\eta_{\lambda\sigma} - \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}\eta_{\lambda\sigma}) - \eta_{\mu\nu}\eta_{\beta\lambda}\eta_{\alpha\sigma} - \eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma} + \right. \\ & \left. - \eta_{\alpha\beta}\eta_{\nu\lambda}\eta_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\alpha}\eta_{\beta\lambda}\eta_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\beta}\eta_{\mu\lambda}\eta_{\alpha\sigma} + \eta_{\mu\alpha}\eta_{\beta\lambda}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\lambda}\eta_{\alpha\sigma} \right) \partial^{\lambda}A^{\alpha}\partial^{\sigma}A^{\beta} + \\ & -\frac{\kappa}{16}h^{\mu\nu}(v_{\mu}\epsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} - v_{\nu}\epsilon_{\mu\lambda\alpha\beta})(A^{\alpha}\partial^{\lambda}A^{\beta} - \partial^{\lambda}A^{\alpha}A^{\beta}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

A fim de obtermos a função de vértice consideremos as equações (2.6), (2.7) e (2.8), as quais expressam os campos envolvidos na lagrangiana de interação em termos das suas respectivas transformadas de Fourier. Utilizando (2.6), (2.7) e (2.8), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & -\frac{1}{2} \sum_{r,r'=1}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{h}^{\mu\nu}(k)\varepsilon_r^{\alpha}(p)\varepsilon_{r'}^{\beta}(q) \times \\ & \times \left\{ -\frac{\kappa}{2} \left(p \cdot q (\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} - \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}) - \eta_{\mu\nu}p_{\beta}q_{\alpha} + \eta_{\mu\alpha}p_{\beta}q_{\nu} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \eta_{\nu\alpha}p_{\beta}q_{\mu} + \eta_{\nu\beta}p_{\mu}q_{\alpha} + \eta_{\mu\beta}p_{\nu}q_{\alpha} - \eta_{\alpha\beta}p_{\mu}q_{\nu} - \eta_{\alpha\beta}p_{\nu}q_{\mu} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{i}{8}(\epsilon_{\mu\lambda\alpha\beta}v_{\nu} - \epsilon_{\lambda\nu\alpha\beta}v_{\mu})(p^{\lambda} - q^{\lambda}) \right\} e^{-i(p+q+k)\cdot x}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Lembrando que a função de vértice e a lagrangiana de interação estão relacionados pela equação abaixo

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{2} \sum_{r,r'=1}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{h}^{\mu\nu}(k)\varepsilon_r^{\alpha}(p)\varepsilon_{r'}^{\beta}(q)V_{\mu\nu,\alpha\beta}(p,q)e^{-i(p+q+k)\cdot x}, \quad (4.5)$$

podemos escrever a seguinte expressão para o vértice da interação entre o campo de CFJ e o campo gravitacional

$$V_{\mu\nu,\alpha\beta}(p, q) = -\frac{\kappa}{2} \left(p \cdot q (\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} - \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}) - \eta_{\mu\nu}p_\beta q_\alpha + \eta_{\mu\alpha}p_\beta q_\nu + \eta_{\nu\alpha}p_\beta q_\mu + \right. \\ \left. + \eta_{\nu\beta}p_\mu q_\alpha + \eta_{\mu\beta}p_\nu q_\alpha - \eta_{\alpha\beta}p_\mu q_\nu - \eta_{\alpha\beta}p_\nu q_\mu + \frac{i}{8}(\epsilon_{\mu\lambda\alpha\beta}v_\nu - \epsilon_{\lambda\nu\alpha\beta}v_\mu)(p^\lambda - q^\lambda) \right). \quad (4.6)$$

Vale lembrar que a equação acima foi determinada com a convenção de que os *momenta* de todas as partículas estão “entrando” no vértice (vide figura 2.2).

4.2 Espalhamento gravitacional da luz na teoria de CFJ

Começemos pelo cálculo da amplitude de Feynman associada ao processo de espalhamento gravitacional da luz. Essencialmente, esse espalhamento consiste no mesmo tipo de processo considerado no capítulo 2, com a exceção de que o vértice utilizado no cálculo da amplitude de Feynman associada ao diagrama representado na figura 2.2 deve ser substituído pela equação (4.6). Recordando alguns pontos centrais, a amplitude de Feynman associado ao espalhamento gravitacional da luz pode ser escrita na forma

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} = \tilde{h}^{\mu\nu}(\vec{k}) V_{\mu\nu,\alpha\beta}(p, -q), \quad (4.7)$$

onde $\tilde{h}^{\mu\nu}(\vec{k})$ representa o campo gravitacional externo dado pela equação (1.70) e $V_{\mu\nu,\alpha\beta}(p, -q)$ diz respeito ao vértice da interação entre o campo de CFJ e o campo gravitacional¹. Combinando as equações (1.70) e (4.6), obtemos a seguinte expressão para a amplitude de Feynman

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} = \frac{\kappa^2 M}{4\vec{k}^2} \left(p \cdot q (2\eta_{\alpha 0}\eta_{\beta 0} - \eta_{\alpha\beta}) + p_\beta q_\alpha + 2p_0 q_0 \eta_{\alpha\beta} - 2\eta_{\alpha 0} p_\beta q_0 - 2\eta_{\beta 0} p_0 q_\alpha + \right. \\ \left. + \frac{i}{8} \epsilon_{\alpha\beta\lambda\sigma} [2v_0(\eta^{\lambda 0} p^\sigma + \eta^{\lambda 0} q^\sigma) + (p^\lambda + q^\lambda)v^\sigma] \right). \quad (4.8)$$

De acordo com a notação aqui empregada, $p^\mu = (p^0, \vec{p})$ é o *momentum* da partícula de CFJ “entrando” no vértice, enquanto $q^\mu = (q^0, \vec{q})$ representa o *momentum* do partícula “saindo” após a interação. Como estamos considerando o campo gravitacional como um agente externo, podemos desprezar a transferência de energia entre o campo de CFJ e o campo gravitacional, desse modo, podemos escrever $p^0 = q^0 \equiv E$. Com base

¹Do mesmo modo que foi feito no capítulo 2, utilizamos o sinal contrário para *momentum* da partícula saindo do vértice.

nessas considerações, podemos reescrever a amplitude de Feynman da seguinte forma

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} = \frac{\kappa^2 M}{4\vec{k}^2} \left(2p \cdot q \eta_{\alpha 0} \eta_{\beta 0} + p_\beta q_\alpha + (E^2 + \vec{p} \cdot \vec{q}) \eta_{\alpha\beta} - 2E(\eta_{\alpha 0} p_\beta + \eta_{\beta 0} q_\alpha) + \frac{i}{8} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\sigma} [2v_0(\eta^{\lambda 0} p^\sigma + \eta^{\lambda 0} q^\sigma) + (p^\lambda + q^\lambda) v^\sigma] \right). \quad (4.9)$$

Assim como fizemos no capítulo 2, definimos os elementos de matriz $\mathcal{M}_{rr'}$ como sendo

$$\mathcal{M}_{rr'} = \mathcal{M}_{\alpha\beta} \varepsilon_r^\alpha(p) \varepsilon_{r'}^\beta(q), \quad (4.10)$$

onde $\varepsilon_r^\alpha(p)$ e $\varepsilon_{r'}^\beta(q)$ representam, respectivamente, as polarizações do campo de CFJ antes e depois da interação². Combinando as equações (4.9) e (4.10), obtemos a seguinte expressão

$$\mathcal{M}_{rr'} = \frac{\kappa^2 M}{4\vec{k}^2} \left((\vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_{r'}(q)) (\vec{q} \cdot \vec{\varepsilon}_r(p)) - (E^2 + \vec{p} \cdot \vec{q}) \vec{\varepsilon}_r(p) \cdot \vec{\varepsilon}_{r'}(q) + \frac{i}{8} (v_0(\vec{p} + \vec{q}) + 2E\vec{v}) \cdot (\vec{\varepsilon}_r(p) \times \vec{\varepsilon}_{r'}(q)) \right). \quad (4.11)$$

Vamos agora ao cálculo dos elementos de matriz $\mathcal{M}_{rr'}$. Para tanto, vamos adotar um sistema de coordenadas em que vetor de fundo encontra-se alinhado ao longo do eixo- z , isto é

$$\vec{v} = |\vec{v}| \hat{z}. \quad (4.12)$$

Nesse sistema de coordenadas podemos escrever a parte espacial dos *momentum* da partícula “entrando” no vértice como sendo

$$\vec{p} = |\vec{p}| (\sin \theta_p \cos \phi_p \hat{x} + \sin \theta_p \sin \phi_p \hat{y} + \cos \theta_p \hat{z}), \quad (4.13)$$

onde θ_p representa o ângulo entre o *momentum* \vec{p} e o vetor \vec{v} , enquanto ϕ_p corresponde ao ângulo entre o eixo x e a projeção do vetor \vec{p} sobre o plano xy . Antes de escrevermos os vetores de polarização propriamente ditos, convém definir os vetores $\vec{\xi}_1(p)$ e $\vec{\xi}_2(p)$ que formam uma base do espaço definido pelo plano transversal ao *momentum* \vec{p} , a saber

$$\vec{\xi}_1(p) = \cos \theta_p \cos \phi_p \hat{x} + \cos \theta_p \sin \phi_p \hat{y} - \sin \theta_p \hat{z}, \quad (4.14)$$

e

$$\vec{\xi}_2(p) = -\sin \phi_p \hat{x} + \cos \phi_p \hat{y}. \quad (4.15)$$

²Vide capítulo 3.

Relembrando dos resultados obtidos na seção 3.3, podemos escrever os vetores de polarização associados à partícula de CFJ, “entrando” no vértice da interação, como sendo dados por

$$\vec{\varepsilon}_1(p) = \vec{\xi}_1(p) \quad \text{e} \quad \vec{\varepsilon}_2(p) = \vec{\xi}_2(p) + i \frac{|\vec{v}| \sin \theta_p}{E} \hat{p}. \quad (4.16)$$

De forma análoga, para a partícula de CFJ “saindo” do vértice temos

$$\vec{q} = |\vec{q}|(\sin \theta_q \cos \phi_q \hat{x} + \sin \theta_q \sin \phi_q \hat{y} + \cos \theta_q \hat{z}), \quad (4.17)$$

e os seguintes vetores de polarização

$$\vec{\varepsilon}_1(q) = \vec{\xi}_1(q) \quad \text{e} \quad \vec{\varepsilon}_2(q) = \vec{\xi}_2(q) + i \frac{|\vec{v}| \sin \theta_q}{E} \hat{q}, \quad (4.18)$$

onde definimos os vetores $\vec{\xi}_1(q)$ e $\vec{\xi}_2(q)$ de forma análoga aos vetores $\vec{\xi}_1(p)$ e $\vec{\xi}_2(p)$, bastando realizar as substituições $\theta_p \mapsto \theta_q$ e $\phi_p \mapsto \phi_q$.

Utilizando o conjunto de equações de (4.12) até (4.18), junto com a equação (4.11), podemos calcular todos os elementos de matriz $\mathcal{M}_{rr'}$. No entanto, a fim de não sobrecarregar o texto com equações muito extensas, reservamos o apêndice B para as expressões explícitas dos elementos de matriz $\mathcal{M}_{rr'}$, enquanto aqui exibimos apenas os resultados mais relevantes.

Em primeiro lugar, recordemos que a seção de choque diferencial não polarizada está relacionada com a amplitude de Feynman a partir da equação

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{r,r'=1}^2 |\mathcal{M}_{rr'}|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \text{tr}(\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}), \quad (4.19)$$

onde \mathcal{M} é a matriz cujos elementos são definidos por $\mathcal{M}_{rr'}$, isto é

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

De modo geral, podemos decompor a matriz \mathcal{M} de acordo com a ordem de contribuição do vetor de fundo, isto é

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{(0)} + \mathcal{M}^{(v)} + \mathcal{M}^{(v^2)} + \dots, \quad (4.21)$$

onde $\mathcal{M}^{(0)}$ representa a contribuição para a matriz \mathcal{M} que não depende do vetor de fundo, $\mathcal{M}^{(v)}$ representa a contribuição que depende somente da primeira potência dos componentes do vetor de fundo e assim por diante. Utilizando a decomposição acima,

podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathcal{M}^\dagger\mathcal{M}) &= \mathrm{tr}(\mathcal{M}^{(0)\dagger}\mathcal{M}^{(0)}) + \mathrm{tr}(\mathcal{M}^{(1)\dagger}\mathcal{M}^{(0)} + \mathcal{M}^{(0)\dagger}\mathcal{M}^{(1)}) \\ &+ \mathrm{tr}(\mathcal{M}^{(1)\dagger}\mathcal{M}^{(1)} + \mathcal{M}^{(1)\dagger}\mathcal{M}^{(0)} + \mathcal{M}^{(0)\dagger}\mathcal{M}^{(1)}) + \mathcal{O}(v^3).\end{aligned}\quad (4.22)$$

Utilizando o conteúdo do apêndice B, obtemos os seguintes resultados

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathcal{M}^{(0)\dagger}\mathcal{M}^{(0)}) &= \left(\frac{\kappa^2 M}{4\vec{k}^2}\right)^2 \left\{ \left((E^2 + |\vec{p}||\vec{q}| \cos\theta_p \cos\theta_q) \cos(\phi_p - \phi_q) + |\vec{p}||\vec{q}| \sin\theta_p \sin\theta_q \right)^2 \right. \\ &+ \left((E^2 \cos\theta_p + |\vec{p}||\vec{q}| \cos\theta_q)^2 + (E^2 \cos\theta_q + |\vec{p}||\vec{q}| \cos\theta_p)^2 \right) \sin^2(\theta_p - \theta_q) + \\ &\left. + \left((|\vec{p}||\vec{q}| + E^2 \cos\theta_p \cos\theta_q) \cos(\phi_p - \phi_q) + E^2 \sin\theta_p \sin\theta_q \right)^2 \right\},\end{aligned}\quad (4.23)$$

$$\mathrm{tr}(\mathcal{M}^{(1)\dagger}\mathcal{M}^{(0)} + \mathcal{M}^{(0)\dagger}\mathcal{M}^{(1)}) = 0, \quad (4.24)$$

e

$$\mathrm{tr}(\mathcal{M}^{(1)\dagger}\mathcal{M}^{(1)} + \mathcal{M}^{(2)\dagger}\mathcal{M}^{(0)} + \mathcal{M}^{(0)\dagger}\mathcal{M}^{(2)}) = \mathcal{O}(v^2). \quad (4.25)$$

Aqui estamos interessados somente nas contribuições de ordem mais baixa do vetor de fundo, portanto, não estamos nos preocupando com a expressão explícita para o termo de ordem $\mathcal{O}(v^2)$. A princípio, poderíamos pensar que o termo de ordem mais baixa no vetor de fundo seria o termo de ordem $\mathcal{O}(v^2)$, no entanto, quando substituirmos a relação de dispersão da teoria de CFJ, veremos que aparecem contribuições de ordem $\mathcal{O}(v)$ no termo $\mathrm{tr}(\mathcal{M}^{(0)\dagger}\mathcal{M}^{(0)})$ e, portanto, esse será o termo de ordem mais baixa no vetor de fundo. Utilizando as expressões acima, junto com a equação (4.19), obtemos a seguinte expressão para a seção de choque diferencial não-polarizada

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\kappa^2 M}{4\vec{k}^2}\right)^2 \left\{ \left((E^2 + |\vec{p}||\vec{q}| \cos\theta_p \cos\theta_q) \cos(\phi_p - \phi_q) + |\vec{p}||\vec{q}| \sin\theta_p \sin\theta_q \right)^2 \right. \\ &+ \left((E^2 \cos\theta_p + |\vec{p}||\vec{q}| \cos\theta_q)^2 + (E^2 \cos\theta_q + |\vec{p}||\vec{q}| \cos\theta_p)^2 \right) \sin^2(\theta_p - \theta_q) + \\ &\left. + \left((|\vec{p}||\vec{q}| + E^2 \cos\theta_p \cos\theta_q) \cos(\phi_p - \phi_q) + E^2 \sin\theta_p \sin\theta_q \right)^2 \right\} + \mathcal{O}(v^2).\end{aligned}\quad (4.26)$$

Antes de considerarmos, de fato, a relação de dispersão da eletrodinâmica de CFJ, ainda podemos fazer algumas considerações sobre a relação entre a energia e o *momentum* da partícula de CFJ. Se estivéssemos considerando a eletrodinâmica de Maxwell, a relação entre energia e *momentum* seria da forma $E = |\vec{p}|$, no entanto, na eletrodinâmica de CFJ esperamos que essa relação sofra uma pequena alteração devido ao vetor

de fundo. Desse modo, podemos escrever

$$|\vec{p}| = (1 + \delta f_p)E, \quad \text{onde } |\delta f_p| \ll 1. \quad (4.27)$$

De forma similar, podemos escrever a equação

$$|\vec{q}| = (1 + \delta f_q)E, \quad \text{onde } |\delta f_q| \ll 1. \quad (4.28)$$

para a partícula de CFJ “saindo” do vértice. Conforme veremos adiante por meio da relação de dispersão da eletrodinâmica de CFJ, δf_p e δf_q trarão contribuições de ordem $\mathcal{O}(v)$ e, portanto, podemos desprezar os termos de quadráticos em δf_p e δf_q pela mesma razão que descartamos os termos $\mathcal{O}(v^2)$. Substituindo as expressões acima em (4.26) e mantendo somente os termos até ordem $\mathcal{O}(v)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = & \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\kappa^2 E^2 M}{4\vec{k}^2} \right)^2 \left(\frac{1 + \delta f_p + \delta f_q}{2} \right) \times \\ & \times \left(\cos(\phi_p + \phi_q) + 2 \cos(\phi_p - \phi_q)(1 + \sin \theta_p \sin \theta_q) \right)^2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Seja θ o ângulo entre os vetores \vec{p} e \vec{q} . Por um lado, podemos escrever a equação

$$\hat{p} \cdot \hat{q} = \cos \theta, \quad (4.30)$$

por outro lado, temos

$$\hat{p} \cdot \hat{q} = \sin \theta_p \sin \theta_q \cos(\phi_p - \phi_q) + \cos \theta_p \cos \theta_q. \quad (4.31)$$

Comparando as duas últimas expressões, obtemos

$$\cos \theta = \sin \theta_p \sin \theta_q \cos(\phi_p - \phi_q) + \cos \theta_p \cos \theta_q. \quad (4.32)$$

Com boa aproximação podemos fazer $\phi_p \approx \phi_q$ e, portanto, $\cos(\phi_p - \phi_q) \approx 1$. Nesse regime, a equação acima nos conduz ao seguinte resultado

$$\cos \theta \approx \sin \theta_p \sin \theta_q + \cos \theta_p \cos \theta_q \Rightarrow \theta \approx \theta_p - \theta_q. \quad (4.33)$$

Lançando mão da conservação do *momentum*, isto é $\vec{k} = \vec{q} - \vec{p}$, podemos escrever a seguinte expressão

$$\vec{k}^2 = 4E^2(1 + \delta f_p + \delta f_q) \sin^2(\theta/2). \quad (4.34)$$

Substituindo a expressão acima na equação (4.29) e mantendo somente os termos de

ordem mais baixa em v , obtemos a seguinte expressão para a seção de choque diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{GM}{4}\right)^2 (1 + \delta f_p + \delta f_q) \left(\frac{2 + \cos\theta + \cos(\theta + 2\theta_p) + 2\sin\theta_p \sin(\theta + \theta_p)}{\sin^4(\theta/2)}\right), \quad (4.35)$$

onde utilizamos a definição $\kappa = \sqrt{32\pi G}$. No regime em que o ângulo de espalhamento é muito pequeno, podemos reescrever a seção de choque diferencial da seguinte forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (4GM)^2 \frac{1 + \delta f_p + \delta f_q}{\theta^4}, \quad \theta \ll 1. \quad (4.36)$$

4.3 Ângulo de deflexão gravitacional da luz

Finalmente podemos calcular uma expressão para o ângulo de espalhamento da luz para a eletrodinâmica de CFJ. Por um lado, podemos relacionar a seção de choque diferencial com o ângulo de espalhamento θ e o parâmetro de impacto b , por meio da seguinte equação

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{b}{\theta} \frac{db}{d\theta}. \quad (4.37)$$

Por outro lado, na seção anterior deduzimos uma expressão para a seção de choque diferencial. Comparando as equações (4.36) e (4.37), obtemos a seguinte equação diferencial

$$-\frac{b}{\theta} \frac{db}{d\theta} = (4GM)^2 \frac{1 + \delta f_p + \delta f_q}{\theta^4}. \quad (4.38)$$

Realizando a integração da equação acima, obtemos

$$b^2 = \frac{(4GM)^2}{\theta^2} (1 + \delta f_p + \delta f_q) + C(v), \quad (4.39)$$

onde $C(v)$ é uma constante de integração. Observe que $C(v)$ é uma constante no sentido de não depender de θ e b , no entanto, a constante de integração pode depender do vetor de fundo. Em geral, não podemos determinar a dependência explícita da constante de integração em termos do vetor de fundo, no entanto, como veremos abaixo, podemos descartar a sua contribuição sem nenhum prejuízo para o resultado. Em primeiro lugar, observe que podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$\theta = \frac{4GM}{\sqrt{b^2 - C(v)}} \left(1 + \frac{\delta f_p + \delta f_q}{2}\right) + \mathcal{O}(\delta f_p^2, \delta f_q^2). \quad (4.40)$$

No caso em que a simetria de Lorentz é restaurada, $v = 0$, devemos ter $\delta f_p = \delta f_q = 0$ e a expressão acima dever retornar ao ângulo de Einstein, portanto, devemos impor a condição $C(0) = 0$ sobre a constante de integração. No entanto, aqui estamos considerando possibilidade de VSL e, portanto, $v \neq 0$. Contudo, como não há nenhum indício experimental da VSL, podemos supor que o vetor de fundo esteja próximo do vetor

nulo. Como não há nenhuma razão para esperarmos variações abruptas na expressão para a constante de integração em termos do vetor de fundo, também podemos supor que esta última esteja próxima do zero. Lembrando, ainda, que o parâmetro de impacto deve ser da ordem de medidas astronômicas, podemos considerar sem nenhum dano ao resultado a aproximação $b^2 - C(v) \approx b^2$. Desse modo, chegamos ao seguinte resultado para o ângulo de deflexão gravitacional da luz no contexto da eletrodinâmica de CFJ

$$\theta = \left(1 + \frac{\delta f_p + \delta f_q}{2}\right) \theta_E + \mathcal{O}(v^2), \quad (4.41)$$

onde $\theta_E = \frac{4GM}{b}$ é o ângulo de Einstein.

Voltaremos, agora, a nossa atenção para a determinação das quantidades δf_p e δf_q . Recordemos a relação de dispersão para a partícula de CFJ “entrando” no vértice de interação, a saber

$$p^4 - (p \cdot v)^2 + v^2 p^2 = 0. \quad (4.42)$$

Lembrando da expressão $|\vec{p}| = (1 + \delta f_p)E$, podemos reescrever a equação acima de forma aproximada

$$\begin{aligned} \left(\frac{v_0}{E} - \frac{|\vec{v}|}{E} \cos \theta_{p,v}\right)^2 + 2\left(\frac{v^2}{E^2} - \frac{v_0|\vec{v}|}{E^2} \cos \theta_{p,v} + \frac{|\vec{v}|^2}{E^2} \cos^2 \theta_{p,v}\right) \delta f_p + \\ + \left(\frac{v^2}{E^2} + \frac{|\vec{v}|^2}{E^2} \cos^2 \theta_{p,v} - 4\right) \delta f_p^2 + \mathcal{O}(\delta f_p^3) = 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Resolvendo a equação acima e considerando $v/E \ll 1$, obtemos

$$\delta f_p = \pm \frac{v_0 - |\vec{v}| \cos \theta_p}{2E} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{E^2}\right). \quad (4.44)$$

A ambiguidade de sinais na equação acima está relacionada com o fenômeno da birrefringência do vácuo na eletrodinâmica de CFJ. De forma similar, para a partícula de *momentum* \vec{q} , obtemos

$$\delta f_q = \pm \frac{v_0 - |\vec{v}| \cos \theta_q}{2E} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{E^2}\right). \quad (4.45)$$

Utilizando as expressões acima, obtemos

$$|\vec{p}|_{\pm} = E \pm \frac{v_0 - |\vec{v}| \cos \theta_p}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{E^2}\right) \quad \text{e} \quad |\vec{q}|_{\pm} = E \pm \frac{v_0 - |\vec{v}| \cos \theta_q}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{E^2}\right). \quad (4.46)$$

Suponhamos, por um instante, que a interação gravitacional tenha sido “desligada”.

Nesse caso, como não ocorre nenhuma interação adicional, esperamos que a partícula de CFJ no estado *in* possua o mesmo *momentum* da partícula no estado *out*. Desse modo, se a partícula *in* corresponde ao modo de propagação $|\vec{p}|_+$ (ou $|\vec{p}|_-$), então, a partícula no estado *out* deve corresponder ao modo $|\vec{q}|_+$ (ou $|\vec{q}|_-$), com $\theta_p = \theta_q$. Retornando com a interação gravitacional e supondo que a transição entre os regimes interagente e livre ocorra de forma suave, podemos concluir que: se a partícula de CFJ no estado *in* corresponde ao modo de propagação $|\vec{p}|_+$ (ou $|\vec{p}|_-$), então, após a interação com a gravitação, a partícula deve corresponder ao modo $|\vec{q}|_+$ (ou $|\vec{q}|_-$).

Levando em conta as considerações acima e utilizando as equações (4.44) e (4.45), obtemos

$$\theta = \theta_E \left[1 \pm \frac{1}{4E} \left(2v_0 - |\vec{v}| (\cos \theta_p + \cos \theta_q) \right) \right] + \mathcal{O}(v^2). \quad (4.47)$$

Finalmente, como o ângulo de deflexão gravitacional da luz é $\theta \ll 1$, podemos considerar a aproximação $\theta_p \approx \theta_q$ e, então, reescrever a expressão acima da seguinte forma

$$\theta = \theta_E \left[1 \pm \frac{1}{2E} \left(v_0 - |\vec{v}| \cos \varphi \right) \right] + \mathcal{O}(v^2), \quad (4.48)$$

onde definimos $\varphi \equiv \theta_p (\approx \theta_q)$.

A equação (4.48) nos fornece uma expressão teórica para o ângulo de deflexão gravitacional da luz em um cenário com VSL. Conforme o esperado, o ângulo de deflexão depende do vetor de fundo que realiza a quebra da simetria de Lorentz e, consistentemente, recuperamos o ângulo de Einstein no limite em que $v = 0$. Observemos ainda que a luz possui um comportamento dispersivo ao interagir com a gravitação, isto é, o ângulo de espalhamento depende da energia do fóton. Nesse caso dizemos que ocorre o fenômeno de arco-iris gravitacional [68].

4.4 Comparação com resultados experimentais

Usualmente o resultado experimental para o ângulo de deflexão gravitacional da luz é apresentado da seguinte forma

$$\theta_{\text{exp}} = \frac{1 + \gamma}{2} \theta_E, \quad (4.49)$$

onde γ representa o chamado parâmetro de deflexão. Observe que a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{\gamma - 1}{2} = \frac{\theta_{\text{exp}} - \theta_E}{\theta_E} \equiv \frac{\Delta\theta}{\theta_E}. \quad (4.50)$$

Portanto, o desvio da unidade do parâmetro de deflexão, $\gamma - 1$, essencialmente mede o desvio do resultado experimental em relação ao ângulo de Einstein. Supondo que

esse desvio se dê pela necessidade de incluir correções devido à uma possível VSL, concluimos que

$$|\gamma - 1| \geq \frac{1}{2\pi\nu} \left| v_0 - |\vec{v}| \cos \varphi \right|, \quad (4.51)$$

onde utilizamos $E = 2\pi\nu$, sendo ν a frequência da partícula de CFJ.

Na tabela abaixo apresentamos os resultados experimentais obtidos por Fomalont *et.al.* relacionando $\gamma - 1$ com a frequência de ondas de rádio [10].

Frequência do fóton (ν)	$(\gamma - 1) \times 10^{-4}$
43 GHz - Livre de efeitos de corona	-2.4
43 GHz	-1.0
43 GHz - Outubro de 2005	-3.2
23 GHz - Outubro de 2005	-2.0

Tabela 4.1: Resultados experimentais obtidos por Fomalont *et.al.*.

Vamos analisar os resultados em três situações distintas, na primeira consideramos $|\vec{v}| = 0$, em seguida fazemos $v_0 = 0$ e finalmente consideramos a situação em que $v_0 \neq 0$ e $|\vec{v}| \neq 0$.

4.4.1 Caso 1 - Vetor de fundo puramente temporal ($v_0 \neq 0$ e $\vec{v} = 0$):

Nesse caso o ângulo de deflexão pode ser escrito da seguinte forma

$$\theta = \theta_E \left(1 \pm \frac{v_0}{2E} \right), \quad (4.52)$$

e a inequação (4.51) pode ser recolocada da seguinte maneira

$$|\gamma - 1| \geq \frac{|v_0|}{2\pi\nu}. \quad (4.53)$$

Combinando a inequação acima com os dados da tabela 4.1, podemos obter limites superiores experimentais para o parâmetro v_0 , conforme exposto na tabela 4.2.

Frequência do fóton (ν)	$(\gamma - 1) \times 10^{-4}$	Limite superior para v_0
43 GHz - Livre de efeitos de corona	-2.4	6.79×10^{-9} eV
43 GHz	-1.0	2.83×10^{-9} eV
43 GHz - Outubro de 2005	-3.2	9.06×10^{-9} eV
23 GHz - Outubro de 2005	-2.0	3.02×10^{-9} eV

Tabela 4.2: Limites superiores experimentais para o parâmetro v_0 .

4.4.2 Caso 2 - Vetor de fundo puramente espacial ($v_0 = 0$ e $\vec{v} \neq 0$):

No caso em que o vetor de fundo é puramente espacial podemos reescrever o ângulo de deflexão como sendo

$$\theta = \theta_E \left(1 \pm \frac{1}{2E} |\vec{v}| \cos \varphi \right). \quad (4.54)$$

A inequação (4.51) pode ser reescrita como segue

$$|\gamma - 1| \geq \frac{1}{2\pi\nu} |\vec{v}| |\cos \varphi|. \quad (4.55)$$

Com base nos resultados experimentais expostos na tabela 4.1, podemos determinar regiões no espaço dos parâmetros $|\vec{v}|$ e φ em que a inequação acima é satisfeita. Nas figuras abaixo plotamos tais regiões.

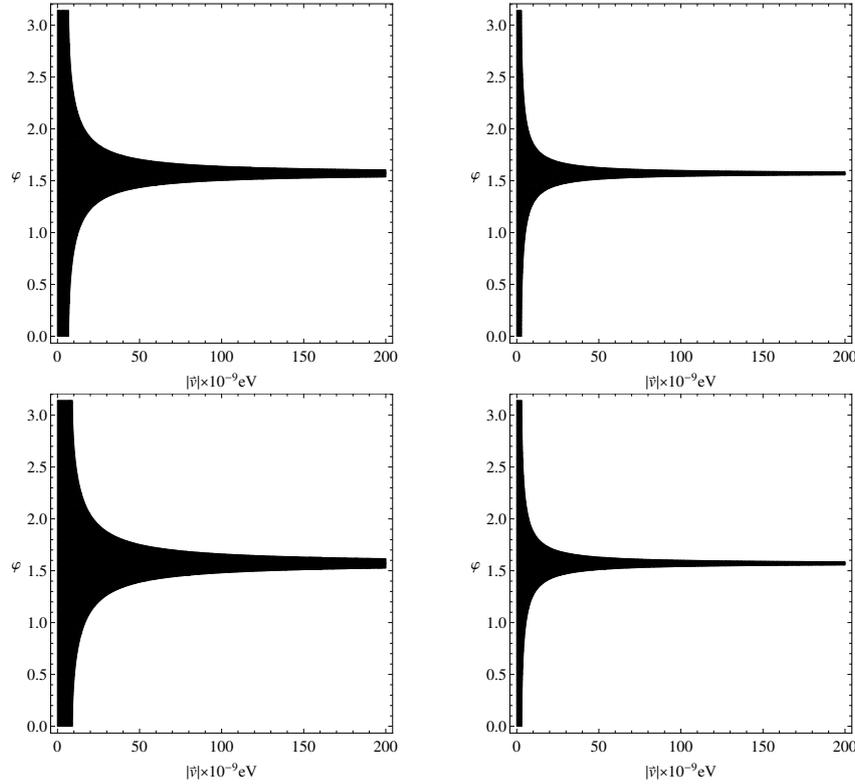


Figura 4.1: Regiões em que a inequação (4.55) é satisfeita (regiões preenchidas). Nos gráficos acima foram utilizados (da esquerda para direita e de cima para baixo): $\nu = 43$ GHz e $|\gamma - 1| = 2.4 \times 10^{-4}$; $\nu = 43$ GHz e $|\gamma - 1| = 1.0 \times 10^{-4}$; $\nu = 43$ GHz e $|\gamma - 1| = 3.2 \times 10^{-4}$; $\nu = 23$ GHz e $|\gamma - 1| = 2.0 \times 10^{-4}$.

Como podemos observar nas figuras acima, uma vez especificados os parâmetros γ e ν , existem regiões densas no espaço dos parâmetros em que a VSL não entra em contradição com os resultados experimentais.

4.4.3 Caso 3 - Vetor de fundo com setores temporal e espacial ($v_0 \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$):

Finalmente, consideramos o caso em que o vetor de fundo possui setores temporal e espacial não triviais. Nesse caso o angulo de deflexão pode ser escrito como

$$\theta = \theta_E \left(1 \pm \frac{1}{2E} |\vec{v}| \cos \varphi \right), \quad (4.56)$$

A inequação (4.51) pode ser reescrita como segue

$$|\gamma - 1| \geq \frac{1}{2\pi\nu} |v_0 - |\vec{v}| \cos \varphi|. \quad (4.57)$$

Novamente podemos utilizar os resultados experimentais expostos na tabela 4.1 para determinar regiões no espaço dos parâmetros v_0 , $|\vec{v}|$ e φ em que a inequação acima é satisfeita.

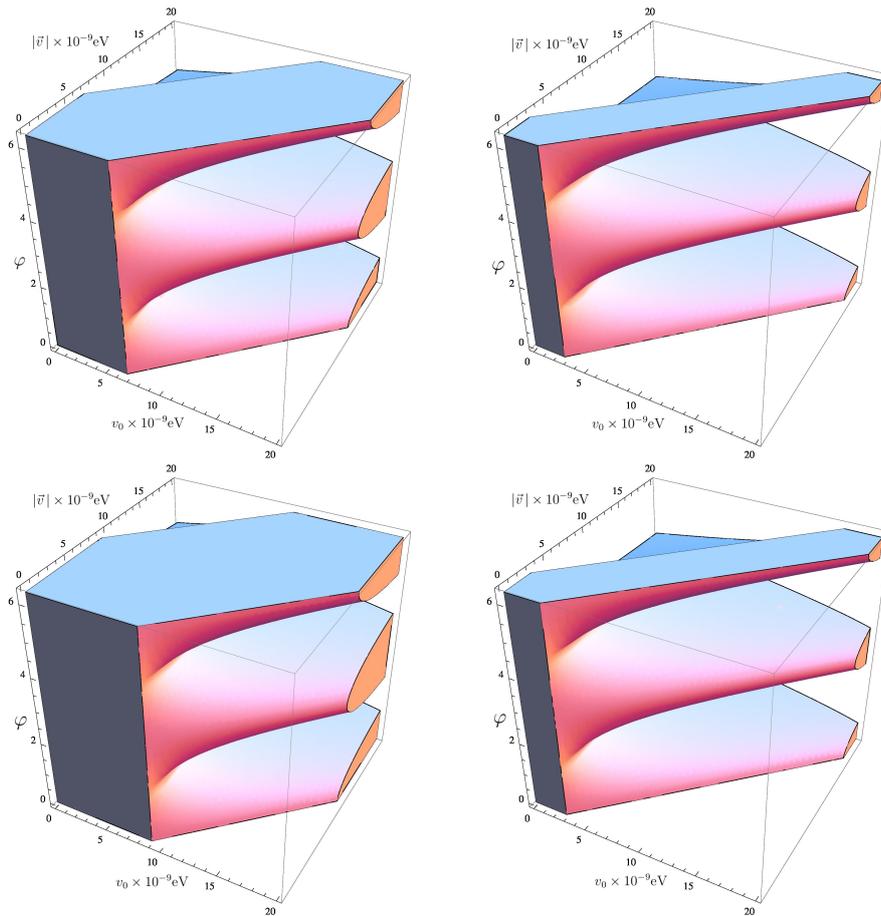


Figura 4.2: Região em que a inequação (4.57) é satisfeita (regiões preenchidas). Foram utilizados (da esquerda para direita e de cima para baixo): $\nu = 43$ GHz e $|\gamma - 1| = 2.4 \times 10^{-4}$; $\nu = 43$ GHz e $|\gamma - 1| = 1.0 \times 10^{-4}$; $\nu = 43$ GHz e $|\gamma - 1| = 3.2 \times 10^{-4}$; $\nu = 23$ GHz e $|\gamma - 1| = 2.0 \times 10^{-4}$.

Conforme podemos observar na figura 4.2, nesse caso também existem regiões densas em que a VSL é compatível com as observações experimentais para o ângulo de deflexão gravitacional da luz.

Considerações finais

Embora ainda não tenhamos acesso experimental à física da escala de Planck, nas últimas décadas muitos trabalhos de pesquisa teórica têm sido direcionado à exploração da física nessa escala de energia. Contudo, na era dos experimentos de alta precisão podemos esperar por assinaturas da física planckiana em experimentos realizados em escalas de energia atualmente acessíveis [69]. Assim, destacamos a importância do papel das teorias efetivas na busca de traços da física na escala de Planck em experimentos de baixas energias. Essas teorias efetivas podem ser entendidas como um limite de baixas energias de uma teoria mais fundamental, *e.g.* das teorias de cordas. Desse modo, se os experimentos de alta precisão forem capazes de apontar na direção de alguma teoria efetiva, esses experimentos estarão também apontando na direção de alguma física da escala de Planck.

Dentre os diversos experimentos de alta precisão existentes até o momento, focamos a nossa atenção naqueles relacionados ao fenômeno de deflexão gravitacional da luz. Podemos nos indagar sobre a razão dessa escolha. De fato, a escolha de um experimento ligado à teoria da RG se justifica por essa ser uma das mais bem estabelecidas teorias da física moderna e, em particular, a escolha do fenômeno da deflexão gravitacional da luz está amparada no fato do fenômeno da deflexão gravitacional da luz produzir o resultado com a melhor concordância entre a teoria e o experimento dentre os testes clássicos da RG.

Escolhemos analisar os efeitos da violação da simetria de Lorentz sobre a deflexão gravitacional da luz. Embora a simetria de Lorentz seja um dos principais pilares da física moderna, a sua violação parece ser necessária em uma teoria física mais fundamental. Nesse sentido, o Modelo Padrão Estendido de Colladay e Kostelecký [31] cumpre o papel de uma teoria efetiva que emerge como um limite de uma teoria mais fundamental. Como estamos interessados nos efeitos da VSL sobre a deflexão gravitacional da luz, analisamos somente o setor eletromagnético do Modelo Padrão Estendido, esse setor também é conhecido como eletrodinâmica de CFJ.

Em uma análise a nível de árvore, consideramos o processo de espalhamento da partícula de CFJ por um campo gravitacional externo. Vale ressaltar que esse formalismo

foi essencial para a inclusão da estrutura microscópica da partícula de CFJ. Essa abordagem nos conduziu a uma expressão teórica para o ângulo de deflexão gravitacional da luz em um cenário com violação da simetria de Lorentz. Essa expressão para o ângulo de deflexão possui ao menos duas características marcantes: i) traz explicitamente a assinatura da quebra da simetria de Lorentz; ii) dependência explícita da energia da partícula de CFJ.

O primeiro ponto destacado acima corresponde exatamente ao que foi proposto nesse trabalho, isto é, a busca pelos efeitos da VSL no experimento deflexão gravitacional da luz. A fim de buscarmos por assinaturas experimentais da VSL, relacionamos os seus traços teóricos com o parâmetro pós-newtoniano γ (parâmetro de deflexão). Comparando o resultado obtido teoricamente com os resultados experimentais devidos à Fomalont *et.al.*, podemos estabelecer limites experimentais para o vetor de fundo que realiza a VSL. A análise dos resultados foi dividida em três casos de interesse. No primeiro caso foi considerado que o vetor de fundo possui somente o componente temporal. Nesse caso verifica-se que não há conflitos com os resultados experimentais desde que o vetor de fundo seja $v_0 \lesssim 10^{-9}$ eV ($\sim 10^{-18}$ GeV). No segundo caso foi considerado o vetor de fundo como sendo puramente espacial. Como nessa situação o ângulo de deflexão depende de dois parâmetros, a saber $|\vec{v}|$ e φ , podemos determinar regiões no espaço dos parâmetros $|\vec{v}|$ e φ em que a violação da simetria de Lorentz não entra em conflito com os resultados observacionais do ângulo de deflexão gravitacional da luz. Conforme podemos observar na figura 4.1, para valores de $|\vec{v}|$ da ordem de 10^{-8} eV ($\sim 10^{-17}$ GeV), ou superiores, a violação da simetria de Lorentz é compatível com os resultados experimentais somente se o ângulo entre o *momentum* do fóton e o vetor de fundo estiver próximo do valor $\pi/2$. Por outro lado, para valores de $|\vec{v}|$ abaixo de 10^{-8} eV a violação de simetria de Lorentz devido a um vetor de fundo puramente espacial é completamente compatível com os resultados experimentais atuais. No terceiro e último caso, contemplou-se a situação em que o vetor de fundo possui os dois setores, temporal e espacial, não triviais. Nesse caso a análise dos resultados é um pouco mais complicada devido a dependência de três parâmetros (v_0 , $|\vec{v}|$ e φ). Na figura 4.2 verificamos a existência de regiões tridimensionais no espaço dos parâmetros v_0 , $|\vec{v}|$ e φ em que a violação da simetria de Lorentz não contradiz as observações experimentais. Em especial, para valores de v_0 e $|\vec{v}|$ abaixo da ordem 10^{-8} eV ($\sim 10^{-17}$ GeV), a violação da simetria de Lorentz não produz efeitos detectáveis nos experimentos atuais de deflexão gravitacional da luz.

Com relação ao segundo ponto destacado acima – a dependência do ângulo de deflexão em relação à energia da partícula de CFJ – podemos também traçar alguns comentários relevantes. Em primeiro lugar, essa dependência descreve um comportamento dispersivo do ângulo de espalhamento, caracterizando o que chamamos de arco-íris gravitacional. Os arco-íris gravitacionais consistem basicamente na decompo-

sição espectral da luz devido a interação com um campo gravitacional externo. Esse fenômeno teórico aparece também em outras situações físicas, por exemplo: no espalhamento gravitacional do fóton massivo da eletrodinâmica de Proca; na deflexão gravitacional da luz no contexto da teoria de gravitação de ordem superior. Embora ainda não tenhamos precisão experimental suficiente para a observação desse fenômeno, vale ressaltar a importância do desenvolvimento teórico nesse sentido, pois, tendo em mente o rápido avanço tecnológico das últimas décadas, podemos esperar a sua detecção em um futuro não tão distante.

Conforme mencionado acima, comparando a expressão teórica para o ângulo de deflexão gravitacional da luz na presença de VSL com os resultados experimentais atuais, estabelecemos um limite superior da ordem de 10^{-18} GeV para os componentes do vetor de fundo. No entanto, esse limite ainda está muito acima do valor obtido a partir de observações relacionadas à radiação cósmica de fundo (CMB), a saber $\sim 10^{-43}$ GeV [34]. Desso modo, podemos concluir que a observação de assinaturas da VSL ainda estão experimentalmente distantes no que diz respeito ao fenômeno de deflexão gravitacional da luz. Finalizando, informamos que os principais resultados apresentados nesta dissertação se encontram na referência [70].

Operadores de Barnes-Rivers

O cálculo do operador de onda inverso associado com a teoria linearizada da gravitação pode ser, em geral, um trabalho árduo, no entanto, encolhendo uma base conveniente de operadores diferenciais esse cálculo pode ser consideravelmente simplificado.

Começemos pelos operadores de projeção longitudinal e transverso, respectivamente definidos por

$$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \quad \text{e} \quad \omega_{\mu\nu} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \quad (\text{A.1})$$

Os operadores de projeção definidos acima satisfazem as seguintes relações de idempotência e ortogonalidade

$$\theta_\mu^\alpha \theta_\alpha^\nu = \theta_\mu^\nu, \quad \omega_\mu^\alpha \omega_\alpha^\nu = \omega_\mu^\nu, \quad \theta_\mu^\alpha \omega_\alpha^\nu = \omega_\mu^\alpha \theta_\alpha^\nu = 0. \quad (\text{A.2})$$

Os operadores de Barnes-Rivers em 3 + 1 dimensões são definidos por [71]

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(2)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\alpha}\theta_{\nu\beta} + \theta_{\mu\beta}\theta_{\nu\alpha}) - \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.3})$$

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\alpha}\omega_{\nu\beta} + \theta_{\mu\beta}\omega_{\nu\alpha} + \theta_{\nu\alpha}\omega_{\mu\beta} + \theta_{\nu\beta}\omega_{\mu\alpha}), \quad (\text{A.4})$$

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-s)} = \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.5})$$

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-w)} = \omega_{\mu\nu}\omega_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.6})$$

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-sw)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_{\mu\nu}\omega_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.7})$$

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-ws)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\omega_{\mu\nu}\theta_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.8})$$

Os quatro primeiros operadores de Barnes-Rivers são, de fato, projetores. No referencial de repouso de um campo tensorial massivo os quatro primeiros operadores definidos acima projetam o campo tensorial sobre suas as componentes de spin-2, spin-1 e duas

componentes de spin-0. Os dois últimos, denominados operadores de transição, são necessários para garantir a completeza do conjunto de operadores de Barnes-Rivers.

O operador identidade no setor de tensores simétricos de *rank*-2 pode ser escrito em termos dos operadores de Barnes-Rivers, a saber

$$1_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta}}{2} = P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(2)} + P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(1)} + P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-s)} + P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-w)}. \quad (\text{A.9})$$

A tarefa de expandir um dado operador de onda em termos dos operadores de Barnes-Rivers pode ser consideravelmente simplificada se considerarmos as seguintes identidades

$$\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} = \left[3P^{(0-s)} + \sqrt{3}(P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}) + P^{(0-w)} \right]_{\mu\nu,\alpha\beta}, \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{1}{k^2} (\eta_{\mu\alpha}k_\nu k_\beta + \eta_{\nu\alpha}k_\mu k_\beta + \eta_{\mu\beta}k_\nu k_\alpha + \eta_{\nu\beta}k_\mu k_\alpha) = [2P^{(1)} + 4P^{(0-w)}]_{\mu\nu,\alpha\beta}, \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{1}{k^2} (\eta_{\mu\nu}k_\alpha k_\beta + \eta_{\alpha\beta}k_\mu k_\nu) = \left[\sqrt{3}(P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}) + 2P^{(0-w)} \right]_{\mu\nu,\alpha\beta}, \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{1}{k^4} k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta = P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-w)}. \quad (\text{A.13})$$

Antes de finalizarmos a nossa discussão sobre os operadores de Barnes-Rivers, vamos considerar uma fórmula simples que permite a inversão do operador de onda. Em geral, o operador de onda pode ser expandido em termos da base de operadores de Barnes-Rivers, a saber

$$\mathcal{O} = x_2 P^{(2)} + x_1 P^{(1)} + x_s P^{(0-s)} + x_w P^{(0-w)} + x_{sw} P^{(0-sw)} + x_{ws} P^{(0-ws)}. \quad (\text{A.14})$$

Por outro lado, o operador inverso \mathcal{O}^{-1} também pode ser expandido em termos da base de operadores de Barnes-Rivers, isto é

$$\mathcal{O}^{-1} = y_2 P^{(2)} + y_1 P^{(1)} + y_s P^{(0-s)} + y_w P^{(0-w)} + y_{sw} P^{(0-sw)} + y_{ws} P^{(0-ws)}. \quad (\text{A.15})$$

A relação entre os coeficientes x 's e os coeficientes y 's pode ser diretamente obtida com auxílio da tabela multiplicativa abaixo e lembrando que o operador inverso deve satisfazer a seguinte relação

$$(\mathcal{O}^{-1})_{\mu\nu}{}^{\lambda\sigma} \mathcal{O}_{\lambda\sigma,\alpha\beta} = 1_{\mu\nu,\alpha\beta}. \quad (\text{A.16})$$

Considerando a relação acima, obtemos o seguinte conjunto de equações algébricas

$$\begin{cases} x_s y_s + x_{ws} y_{sw} = 1, \\ x_w y_w + x_{sw} y_{ws} = 1, \\ x_s y_{ws} + x_{ws} y_w = 0, \\ x_w y_{sw} + x_{sw} y_s = 0, \\ x_1 y_1 = x_2 y_2 = 1. \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Resolvendo o conjunto de equações acima para os y 's, obtemos a seguinte expressão para o operador de onda inverso

$$\mathcal{O}^{-1} = \frac{1}{x_2} P^{(2)} + \frac{1}{x_1} P^{(1)} + \frac{x_w P^{(0-s)} + x_s P^{(0-w)} - x_{sw} P^{(0-sw)} - x_{ws} P^{(0-ws)}}{x_w x_s - x_{sw} x_{ws}}. \quad (\text{A.18})$$

	$P^{(2)}$	$P^{(1)}$	$P^{(0-s)}$	$P^{(0-w)}$	$P^{(0-sw)}$	$P^{(0-ws)}$
$P^{(2)}$	$P^{(2)}$	0	0	0	0	0
$P^{(1)}$	0	$P^{(1)}$	0	0	0	0
$P^{(0-s)}$	0	0	$P^{(0-s)}$	0	$P^{(0-sw)}$	0
$P^{(0-w)}$	0	0	0	$P^{(0-w)}$	0	$P^{(0-ws)}$
$P^{(0-sw)}$	0	0	0	$P^{(0-sw)}$	0	$P^{(0-s)}$
$P^{(0-ws)}$	0	0	$P^{(0-ws)}$	0	$P^{(0-w)}$	0

Tabela A.1: Tabela multiplicativa dos operadores de Barnes-Rivers.

Apêndice **B**

Elementos de matriz $\mathcal{M}_{rr'}$

Neste apêndice apresentamos as expressões correspondentes aos elementos de matriz $\mathcal{M}_{rr'}$. Primeiramente, a fim de facilitarmos o enquadramento das equações, vamos decompor o elemento de matriz $\mathcal{M}_{rr'}$ da seguinte forma

$$\mathcal{M}_{rr'} = \mathcal{M}_{rr'}^{(0)} + \mathcal{M}_{rr'}^{(v)} + \mathcal{M}_{rr'}^{(v^2)} + \mathcal{M}_{rr'}^{(v^3)}, \quad (\text{B.1})$$

onde o termo $\mathcal{M}_{rr'}^{(0)}$ não traz nenhuma contribuição do vetor de fundo e os termos $\mathcal{M}_{rr'}^{(v)}$, $\mathcal{M}_{rr'}^{(v^2)}$ e $\mathcal{M}_{rr'}^{(v^3)}$ trazem, respectivamente, as contribuições de primeira, segunda e terceira ordem no vetor de fundo. Abaixo apresentamos a lista completa com todas as contribuições não-nulas para os elementos de matriz $\mathcal{M}_{rr'}$:

Contribuições de ordem zero:

$$\mathcal{M}_{11}^{(0)} = -\frac{\kappa^2 M}{4\vec{k}^2} \left((|\vec{p}||\vec{q}| + E^2 \cos \theta_p \cos \theta_q) \cos(\phi_p - \phi_q) + E^2 \sin \theta_p \sin \theta_q \right); \quad (\text{B.2})$$

$$\mathcal{M}_{12}^{(0)} = -\frac{\kappa^2 M}{4\vec{k}^2} (|\vec{p}||\vec{q}| \cos \theta_q + E^2 \cos \theta_p) \sin(\phi_p - \phi_q); \quad (\text{B.3})$$

$$\mathcal{M}_{21}^{(0)} = \frac{\kappa^2 M}{4\vec{k}^2} (|\vec{p}||\vec{q}| \cos \theta_p + E^2 \cos \theta_q) \sin(\phi_p - \phi_q); \quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{M}_{22}^{(0)} = -\frac{\kappa^2 M}{4\vec{k}^2} \left((E^2 + |\vec{p}||\vec{q}| \cos \theta_p \cos \theta_q) \cos(\phi_p - \phi_q) + |\vec{p}||\vec{q}| \sin \theta_p \sin \theta_q \right); \quad (\text{B.5})$$

Contribuições de ordem $\mathcal{O}(v)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{11}^{(v)} = & i \frac{\kappa^2 M}{32\vec{k}^2} \left[\left(v_0 \cos \theta_p \cos \theta_q (|\vec{p}| \sin^2 \theta_p + |\vec{q}| \sin^2 \theta_q) \right) \sin \phi_p + \right. \\ & - \left(2E |\vec{v}| \cos \theta_p \sin \theta_q + v_0 (|\vec{p}| \cos \theta_p + |\vec{q}| \cos \theta_q) \cos \theta_p \sin \theta_q \right) \sin \phi_p + \\ & \left. - \left(2E |\vec{v}| \cos \theta_p \cos \theta_q + v_0 (|\vec{p}| \cos \theta_p + |\vec{q}| \cos \theta_q) \right) \cos \phi_p \sin \phi_q \right]; \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{12}^{(v)} = & -i \frac{\kappa^2 M}{32\vec{k}^2} \left[|\vec{p}| v_0 \cos \phi_p \cos \phi_q + |\vec{q}| v_0 \cos \theta_p \cos \theta_q \cos \phi_p \cos \phi_q + \right. \\ & + 2E |\vec{v}| (3 - 2 \cos(2\theta_q)) \cos \theta_p \cos \phi_p \cos \phi_q + |\vec{q}| v_0 \sin \phi_q \sin \phi_q + \\ & \left. + \left(|\vec{p}| v_0 \sin^2 \theta_p + 16E |\vec{v}| \sin^2(\theta_p/2) \right) \sin \phi_p \sin \phi_q \right]; \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{21}^{(v)} = & i \frac{\kappa^2 M}{32\vec{k}^2} \left[\left(2|\vec{p}| v_0 + 16E |\vec{v}| \cos \theta_p \right) \sin \theta_p \sin \theta_q + \right. \\ & - \left(2|\vec{q}| v_0 \sin \theta_q + 16E |\vec{v}| \cos \theta_q \sin^2 \theta_p \right) \cos \theta_q \cos \phi_p + \\ & - \left(4E |\vec{v}| + 2|\vec{p}| v_0 \cos \theta_p - 2|\vec{q}| \cos \theta_q \sin \theta_q \right) \sin \theta_q \cos \phi_p + \\ & \left. + 2 \left(|\vec{q}| v_0 \cos \theta_p \cos \theta_q - 2E |\vec{v}| (1 - 2 \cos(2\theta_p)) \cos \theta_q \right) \sin \phi_p \sin \phi_q \right]; \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{22}^{(v)} = & i \frac{\kappa^2 M}{32\vec{k}^2} \left\{ 2E |\vec{v}| \left(\sin \theta_p \cos \theta_q + 2[\cos(2\theta_p) - \cos(2\theta_q)] \sin(\phi_p - \phi_q) \right) + \right. \\ & \left. + v_0 (|\vec{p}| \cos \theta_p + |\vec{q}| \cos \theta_q) \sin \theta_p \cos \theta_q \right\}; \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

Contribuições de ordem $\mathcal{O}(v^2)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{12}^{(v^2)} = & \frac{\kappa^2 M}{64\vec{k}^2} \left\{ \frac{2v_0 |\vec{v}|}{E} \left(|\vec{q}| \cos \theta_p \cos \theta_q - |\vec{p}| \sin^2 \theta_p \right) \sin^2 \theta_q \sin \phi_p \cos \theta_q + \right. \\ & - \left(2|\vec{v}|^2 + \frac{v_0 |\vec{v}|}{E} (|\vec{p}| \cos \theta_p + |\vec{q}| \cos \theta_q) \right) \cos \theta_p \sin(2\theta_q) \sin \phi_p + \\ & \left. + \left(\frac{2|\vec{p}| |\vec{v}| v_0}{E} + 4|\vec{v}|^2 \cos \theta_p \right) \sin^2 \theta_q \cos \phi_p \sin \phi_q \right\}; \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{21}^{(v^2)} &= \frac{\kappa^2 M \sin^2 \theta_p}{32\vec{k}^2} \left\{ 2|\vec{v}|^2 (\sin \theta_q \sin \phi_p + \cos \theta_q \cos \phi_p \sin \phi_q) + \right. \\
&\quad + \frac{|\vec{p}||\vec{v}|v_0}{E} (\sin \theta_q + \cos \theta_q \cos \phi_q) \cos \theta_p \sin \phi_p + \\
&\quad \left. + \frac{|\vec{q}||\vec{v}|v_0}{E} \left(\cos \phi_p \sin \phi_q + \cos \theta_q \sin \theta_q \sin \phi_p - \sin \theta_q \cos \phi_q \sin \theta_q \sin \phi_p \right) \right\}; \tag{B.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{22}^{(v^2)} &= \frac{\kappa^2 M}{64\vec{k}^2} \left\{ 4|\vec{v}|^2 (4 \sin^2 \theta_p \sin^2 \theta_q + \sin^2 \theta_p - \sin \theta_q) \cos \phi_p \cos \phi_q + \right. \\
&\quad + 4|\vec{v}|^2 (\sin^2 \theta_q - 2 \cos(2\theta_p) \sin^2 \theta_q) \sin \phi_p \sin \phi_q + 8|\vec{v}|^2 \sin(2\theta_p) \sin \theta_q \cos \theta_q + \\
&\quad + \frac{2|\vec{p}||\vec{v}|v_0}{E} \left((\sin \theta_p - \cos \theta_p \cos \phi_p) \sin(2\theta_q) - 2(\sin^2 \theta_q + \sin^2 \theta_p) \cos \theta_p \sin \phi_p \sin \phi_q \right) + \\
&\quad \left. + \frac{2|\vec{q}||\vec{v}|v_0}{E} \left(2(\sin^2 \theta_p + \sin^2 \theta_q) \cos \theta_q \cos \phi_p \cos \phi_q - (\sin(2\theta_p) + 2 \cos^2 \theta_q \cos \phi_p) \sin \theta_q \right) \right\}; \tag{B.12}
\end{aligned}$$

Contribuições de ordem $\mathcal{O}(v^3)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{22}^{(v^3)} &= i \frac{\kappa^2 M}{32\vec{k}^2} \left\{ \frac{2|\vec{v}|^3}{E} \sin^2 \theta_p \sin \theta_q (\sin \theta_q \cos \phi_p \sin \phi_q - \cos \theta_q \sin \phi_p) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{|\vec{v}|^2 v_0}{E^2} (|\vec{p}| \cos \theta_p + |\vec{q}| \cos \theta_q) \sin^2 \theta_p \sin \theta_q \sin \phi_p (\cos \phi_q \sin \theta_q - \cos \theta_q) \right\}; \tag{B.13}
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein. The foundation of the general theory of relativity. *Annalen Phys.*, 49:769, 1916.
- [2] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology - Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley, 1972.
- [3] R. M. Wald. *General relativity*. University of Chicago Press, first edition edition, 1984.
- [4] J.A. Wheeler C.W. Misner, K.S. Thorne. *Gravitation*. Physics Series. W. H. Freeman, first edition edition, 1973.
- [5] Clifford M. Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Rev. Rel.*, 17:4, 2014.
- [6] B.P. Abbott and *et.al.* Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:6, 2016.
- [7] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, USA, 2008.
- [8] F.W. Dyson, A.S. Eddington, and C. Davidson. A determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, A220:291–333, 1920.
- [9] E.B. Fomalont and R.A. Sramek. Measurements of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves in Agreement with General Relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 36:1475–1478, 1976.
- [10] E. Fomalont, S. Kopeikin, G. Lanyi, and J. Benson. Progress in measurements of the gravitational bending of radio waves using the VLBA. *Astrophys. J.*, 699:1395–1402, 2009.
- [11] D.V. Ahluwalia. Interface of gravitational and quantum realms. *Mod. Phys. Lett.*, A 17:1135, 2002.

- [12] S. Carlip. Quantum gravity: A Progress report. *Rept. Prog. Phys.*, 64:885, 2001.
- [13] R. P. Woodard. How Far Are We from the Quantum Theory of Gravity? *Rept. Prog. Phys.*, 72:126002, 2009.
- [14] A. Ashtekar, M. Reuter, and C. Rovelli. From General Relativity to Quantum Gravity. 2014.
- [15] J.F. Donoghue. Introduction to the effective field theory description of gravity. In *Advanced School on Effective Theories Almunecar, Spain, June 25-July 1, 1995*, 1995.
- [16] A. Accioly and R. Paszko. Quantum mechanics versus equivalence principle. *Phys. Rev.*, D78:064002, 2008.
- [17] R. Paszko. *Teorias Semiclássica e Efetiva da Gravitação*. PhD thesis, Instituto de Física Teórica - Universidade Estadual Paulista, 2006.
- [18] A. Accioly and R. Paszko. Semiclassical violation of the equivalence principle in the gravitational lenses realm. *Int. J. Mod. Phys.*, D18:2107, 2009.
- [19] A. Accioly and R. Paszko. Conflict between the classical equivalence principle and quantum mechanics. *Adv. Stud. Theor. Phys.*, 3:65–78, 2009.
- [20] A. Accioly, M. Dias, B. Giacchini, and W. Herdy. Interesting features of semiclassical gravitational deflection. *Class. Quant. Grav.*, 32:175020, 2015.
- [21] S. Pireaux. *Light deflection experiments as a test of relativistic theories of gravitation*. PhD thesis, Louvain U., 2002.
- [22] A. Accioly, J. Helayel-Neto, and E. Scatena. Combining general relativity, massive qed and very long baseline interferometry to gravitationally constrain the photon mass. *Phys. Lett.*, A374:3806–3809, 2010.
- [23] A. Accioly, J. Helayel-Neto, and E. Scatena. Upper bounds on the photon mass. *Phys. Rev.*, D82:065026, 2010.
- [24] E.G. Scatena. *Tópicos em Teoria Quântica de Campos*. PhD thesis, Instituto de Física Teórica - Universidade Estadual Paulista, 2012.
- [25] A. Accioly, J. Helayel-Neto, B. Giacchini, and W. Herdy. Classical and tree-level approaches to gravitational deflection in higher-derivative gravity. *Phys. Rev.*, D91:125009, 2015.

- [26] A. Accioly, J. Helayel-Neto, F. E. Barone, B. Giacchini, and W. Herdy. Dispersive photon propagation in semiclassical higher-derivative gravity. *Mod. Phys. Lett.*, A30:1550052, 2015.
- [27] B.L. Giacchini. Limites para as constantes de acoplamento da gravitação de ordem superior. Master’s thesis, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2016.
- [28] S. Liberati. Tests of Lorentz invariance: a 2013 update. *Class. Quant. Grav.*, 30:133001, 2013.
- [29] V.A. Kostelecky and S. Samuel. Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry in String Theory. *Phys. Rev.*, D39:683, 1989.
- [30] M.S. Berger and V.A. Kostelecky. Supersymmetry and Lorentz violation. *Phys. Rev.*, D65:091701, 2002.
- [31] D. Colladay and V.A. Kostelecky. Lorentz violating extension of the standard model. *Phys. Rev.*, D58:116002, 1998.
- [32] O. W. Greenberg. CPT violation implies violation of Lorentz invariance. *Phys. Rev. Lett.*, 89:231602, 2002.
- [33] R.C. Myers and M. Pospelov. Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory. *Phys. Rev. Lett.*, 90:211601, 2003.
- [34] V.A. Kostelecky and N. Russell. Data Tables for Lorentz and CPT Violation. *Rev. Mod. Phys.*, 83:11–31, 2011.
- [35] S. Liberati. Lorentz symmetry breaking: phenomenology and constraints. *J. Phys. Conf. Ser.*, 631(1):012011, 2015.
- [36] V.A. Kostelecky and M. Mewes. Astrophysical Tests of Lorentz and CPT Violation with Photons. *Astrophys. J.*, 689:L1–L4, 2008.
- [37] O.G. Kharlanov and V.C. Zhukovsky. Casimir Effect within D=3+1 Maxwell-Chern-Simons Electrodynamics. *Phys. Rev.*, D81:025015, 2010.
- [38] R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell. Searching for Lorentz violation in the ground state of hydrogen. In *Quantum gravity, generalized theory of gravitation, and superstring theory-based unification. Proceedings, 28th Conference, Orbis Scientiae, Coral Gables, USA, December 16-19, 1999*, pages 173–180, 2000.
- [39] H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira, Jr., J.A. Helayel-Neto, and F.M.O. Mouchereck. Lorentz-violating corrections on the hydrogen spectrum induced by a non-minimal coupling. *Phys. Rev.*, D74:065009, 2006.

- [40] V.A. Kostelecký and A.J. Vargas. Lorentz and CPT tests with hydrogen, antihydrogen, and related systems. *Phys. Rev.*, D92(5):056002, 2015.
- [41] L.H.C. Borges and F.A. Barone. Traces of Lorentz symmetry breaking in a Hydrogen atom at ground state. *Eur. Phys. J.*, C76(2):64, 2016.
- [42] P.A. Bolokhov, M. Pospelov, and M. Romalis. Electric Dipole Moments as Probes of CPT Invariance. *Phys. Rev.*, D78:057702, 2008.
- [43] H. Belich, L. P. Colatto, T. Costa-Soares, J. A. Helayel-Neto, and M. T. D. Orlando. Magnetic Moment Generation from non-minimal couplings in a scenario with Lorentz-Symmetry Violation. *Eur. Phys. J.*, C62:425–432, 2009.
- [44] M. Haghghat, I. Motie, and Z. Rezaei. Charged lepton electric dipole moment enhancement in the Lorentz violated extension of the standard model. *Int. J. Mod. Phys.*, A28(24):1350115, 2013.
- [45] Y.V. Stadnik, B.M. Roberts, and V.V. Flambaum. Tests of CPT and Lorentz symmetry from muon anomalous magnetic dipole moment. *Phys. Rev.*, D90:045035, 2014.
- [46] Y.M.P. Gomes and P.C. Malta. Laboratory-based limits on the Carroll-Field-Jackiw Lorentz-violating electrodynamics. *Phys. Rev.*, D94(2):025031, 2016.
- [47] V. Alan Kostelecky and Matthew Mewes. Signals for Lorentz violation in electrodynamics. *Phys. Rev.*, D66:056005, 2002.
- [48] B. Altschul. Compton scattering in the presence of Lorentz and CPT violation. *Phys. Rev.*, D70:056005, 2004.
- [49] R. Casana, M.M. Ferreira, R.V. Maluf, and F.E.P. dos Santos. Effects of a CPT-even and Lorentz-violating nonminimal coupling on the electron-positron scattering. *Phys. Rev.*, D86:125033, 2012.
- [50] B. Charneski, M. Gomes, R.V. Maluf, and A.J. da Silva. Lorentz violation bounds on Bhabha scattering. *Phys. Rev.*, D86:045003, 2012.
- [51] G. P. de Brito, J. T. Guaitolini Junior, D. Kroff, P. C. Malta, and C. Marques. Lorentz violation in simple QED processes. *Phys. Rev.*, D94:056005, 2016.
- [52] V.A. Kostelecky and C.D. Lane. Constraints on Lorentz violation from clock comparison experiments. *Phys. Rev.*, D60:116010, 1999.
- [53] Z. Chang, X. Li, H-N Lin, Y. Sang, P. Wang, and S. Wang. Constraining Lorentz invariance violation from the continuous spectra of short gamma-ray bursts. *Chin. Phys.*, C40(4):045102, 2016.

- [54] S.R. Coleman and S.L. Glashow. High-energy tests of Lorentz invariance. *Phys. Rev.*, D59:116008, 1999.
- [55] A.H. Gomes, A. Kostelecky, and A.J. Vargas. Laboratory tests of Lorentz and CPT symmetry with muons. *Phys. Rev.*, D90(7):076009, 2014.
- [56] V.A. Kostelecky and M. Mewes. Lorentz violation and short-baseline neutrino experiments. *Phys. Rev.*, D70:076002, 2004.
- [57] J.S. Diaz. Neutrinos as probes of Lorentz invariance. *Adv. High Energy Phys.*, 2014:962410, 2014.
- [58] Cong-Xin Qiu and Zi-Gao Dai. Testing Lorentz Violation Using Propagating UHECRs. *Res. Astron. Astrophys.*, 9:409–421, 2009.
- [59] A. Hees, Q.G. Bailey, C. Le Poncin-Lafitte, A. Bourgoïn, A. Rivoldini, Brahim. Lamine, F. Meynadier, C. Guerlin, and P. Wolf. Testing Lorentz symmetry with planetary orbital dynamics. *Phys. Rev.*, D92(6):064049, 2015.
- [60] V.A. Kostelecký and M. Mewes. Testing local Lorentz invariance with gravitational waves. *Phys. Lett.*, B757:510–514, 2016.
- [61] S.M. Carroll, G.B. Field, and R. Jackiw. Limits on a lorentz and parity violating modification of electrodynamics. *Phys. Rev.*, D41:1231, 1990.
- [62] C. Adam and F.R. Klinkhamer. Causality and radiatively induced cpt violation. *Phys. Lett.*, B513:245–250, 2001.
- [63] C. Adam and F.R. Klinkhamer. Causality and CPT violation from an abelian chern-simons like term. *Nucl. Phys.*, B607:247–267, 2001.
- [64] A.P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J.L. Boldo, and J.A. Helayel-Neto. Quantum mechanical consistency aspects and vortex - like configurations in Abelian models with Lorentz breaking terms. 2002.
- [65] A. Accioly, J. Helayël-Neto, G. Correia, G. Brito, J. de Almeida, and W. Herdy. Interparticle potential energy for D-dimensional electromagnetic models from the corresponding scalar ones. *Phys. Rev.*, D93(10):105042, 2016.
- [66] C.E. da Hora Santos. Estudo da consistência e soluções clássicas da eletrodinâmica de maxwell-carroll-field-jackiw-proca. Master’s thesis, Universidade Federal do Maranhão, 2008.
- [67] L. Brillouin. *Wave propagation and group velocity*. Academic Press, 1960.
- [68] A. Accioly and H. Blas. Gravitational rainbow. *Phys. Rev.*, D64:067701, 2001.

- [69] M. Le Dall, M. Pospelov, and A. Ritz. Sensitivity to light weakly-coupled new physics at the precision frontier. *Phys. Rev.*, D92(1):016010, 2015.
- [70] A Accioly, G.P. Brito, P. Caneda, and Helayël-Neto. Tree-level gravitational deflection of a Carroll-Field-Jackiw particle - Em preparação.
- [71] A. Accioly, J. Helayël-Neto, F. E. Barone, and W. Herdy. Simple prescription for computing the interparticle potential energy for D-dimensional gravity systems. *Class. Quant. Grav.*, 32(3):035021, 2015.