

Dissertação de Mestrado

**Implicações cosmológicas de um campo escalar com ação de
Born-Infeld estendida**

Cristina Furlanetto

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, Maio de 2008.

Dissertação de Mestrado

**Implicações cosmológicas de um campo escalar com ação de
Born-Infeld estendida**

*Dissertação de Mestrado submetida ao
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
como requisito para obtenção do grau
de Mestre em Física.*

Cristina Furlanetto
Orientador: Martín Makler

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rio de Janeiro, Maio de 2008.

Dedico esta Dissertação
aos meus queridos pais.

Agradecimentos

Aos meus pais Franciso e Clarice e ao meu irmão Tiago, pelo apoio incondicional, pelo exemplo de vida, por serem o suporte da minha vida e a quem devo tudo o que sou.

A Raphael pelo companheirismo, compreensão, apoio e por iluminar a minha vida há tantos anos.

À família Hirschfeld, que abriu as portas de sua casa e de sua vida, me acolheu como filha e cujo apoio foi fundamental para a realização deste trabalho.

Ao Professor Martín Makler por aceitar o desafio da minha orientação, pelos valiosos ensinamentos, pelo incentivo e pela paciência.

A todos os meus amigos e familiares, que sempre se preocuparam e torceram por mim.

A Monique, Danilo, Amanda, Lis, Felipe e Iara, por tornarem a minha estada nesta cidade mais agradável e divertida.

À minha querida amiga Amanda, pela amizade e companheirismo.

A todos os meus colegas do CBPF, em especial Marcela, Jefferson, Rodrigo, Habib e Guillermo, pelos conselhos, ajuda e bom humor, principalmente nos momentos mais difíceis.

A todos os professores, pesquisadores e alunos do ICRA, em especial aos professores Mario Novello e Herman Cuesta pelos ensinamentos e oportunidades.

Ao CBPF, por proporcionar um ótimo ambiente de estudo e pesquisa.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

À CFC.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo detalhado de um modelo de unificação da matéria e energia escuras baseado em uma extensão da Lagrangiana de Born-Infeld para um campo escalar. Mostramos que este modelo apresenta algumas vantagens em relação a outras propostas de unificação. Por exemplo, sua velocidade do som pode se anular tanto na configuração em que o campo escalar representa a matéria escura quanto naquela em que ele atua como constante cosmológica. Além disso, o valor máximo da velocidade do som pode ser bem inferior ao da velocidade da luz e pode ocorrer antes do início da expansão acelerada do Universo. Investigamos a dinâmica das soluções espacialmente homogêneas e verificamos que a Cosmologia de de Sitter é um atrator para grande parte das configurações iniciais, especialmente para as que representam um Universo com pequena curvatura. Finalmente, comparamos as previsões teóricas do modelo no caso plano com dados de Supernova do tipo Ia. Verificamos que ele é compatível com estes dados para um amplo intervalo de valores de seus parâmetros.

Abstract

In this work we present a detailed study of a dark energy and dark matter unification model based on an extension of the Born-Infeld Lagrangian for a scalar field. We show that this model has some advantages over other unification proposals. For example, its sound velocity can vanish both in the configuration where the scalar field behaves as dark matter as well as when it acts as a cosmological constant. Furthermore, the maximum sound velocity can be smaller than the speed of light and it can be attained before the acceleration starts. We investigate the dynamics of spatially homogeneous solutions and verify that the de Sitter cosmology is an attractor for most of the initial configurations, especially those representing a Universe with small curvature. Finally, we compare the theoretical predictions of this model for the flat case with type Ia Supernovae data. We verify that the model is consistent with this data for a wide range of parameter values.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
1 Introdução	1
2 Conteúdo material do Universo e quartessência	5
2.1 Matéria e energia escuras	5
2.1.1 Matéria escura	5
2.1.2 Energia escura	8
2.2 K-essência	11
2.2.1 Tensor de energia-momentum e equação de estado para a k-essência	13
2.3 Quartessência	14
2.3.1 Flutuações e quartessência adiabática e não adiabática	16
2.3.2 Quartessência convexa	18
2.3.3 Quartessência do tipo degrau	22
2.4 Quartessência a partir de k-essência puramente cinética	22
3 O modelo de Born-Infeld Estendido e a sua dinâmica em um Universo homogêneo	25
3.1 Lagrangiana de Born-Infeld estendida	25
3.2 Modelo de Born-Infeld Estendido com $\beta > 0$ - Caso 1	28
3.2.1 Equação de estado	29
3.2.2 Velocidade do som	31

3.2.3	A aceleração do Universo	36
3.2.4	Dinâmica de soluções espacialmente homogêneas	38
3.3	Modelo de Born-Infeld Estendido com $\beta < 0$ - Caso 2	41
3.3.1	Equação de estado	43
3.3.2	Velocidade do som	44
3.3.3	A aceleração do Universo	47
3.3.4	Dinâmica de soluções espacialmente homogêneas	49
4	Limites observacionais a partir Supernovas do tipo Ia no modelo de Born-Infeld Estendido	53
4.1	Propagação da luz e o desvio para o vermelho	54
4.2	Distância de luminosidade	55
4.3	Supernovas do tipo Ia	60
4.4	Estimativa dos parâmetros e intervalos de confiança para dados de Supernova do tipo Ia	61
4.5	O parâmetro de Hubble para o modelo de Born-Infeld Estendido	65
4.5.1	Caso 1	66
4.5.2	Caso 2	70
4.6	Limites de Supernovas do tipo Ia no modelo de Born-Infeld Estendido	72
4.6.1	Marginalização analítica em H_0	73
4.6.2	Confrontamento do modelo de Born-Infeld Estendido com dados de SNIa	74
5	Conclusões e perspectivas futuras	79
A	Decomposição 1+3 covariante da Relatividade Geral	81
A.1	O tensor energia-momentum e as equações de movimento	81
A.1.1	Decomposição 1+3 covariante da Relatividade Geral	83
A.1.2	O modelo de Friedmann	95
	Referências Bibliográficas	99

Lista de Figuras

2.1	Equação de estado para um modelo de quartessência com $p = -\frac{1}{\rho}$. A linha tracejada representa a equação de estado do vácuo, onde $p_v = -\rho_v$. O ponto corresponde a $\rho = \rho_v$	15
2.2	Equação de estado para quartessência tipo degrau com $\beta = 3$ e $\sigma = 0,4$. A linha tracejada corresponde a $p = -\rho$	23
3.1	Dependência da Lagrangiana do modelo de Born-Infeld Estendido com $\beta > 0$ em relação a Γ	30
3.2	Equação de estado para o modelo Born-Infeld Estendido com $\beta > 0$ para vários valores de Γ . A linha tracejada representa a equação de estado para o vácuo.	32
3.3	Equação de estado para o modelo Born-Infeld Estendido com $\beta > 0$ onde p e ρ são normalizadas por p e ρ do modelo Milne-Born-Infeld para vários valores de Γ : $\Gamma = -0,249$ (azul), $\Gamma = -0,12$ (vermelho), $\Gamma = 0$ (verde), $\Gamma = 1$ (laranja) e $\Gamma = 10$ (rosa). A linha tracejada mostra a equação de estado para o vácuo.	33
3.4	Velocidade do som ao quadrado c_s^2 em função de W no intervalo $W_{max} > W > W_v$, para os seguintes valores de Γ : $-0,245$; $-0,12$; 0 ; $0,05$; 1 e 10 (da curva inferior à superior, onde a curva tracejada representa $\Gamma = 0$).	34
3.5	Velocidade do som ao quadrado máxima c_{smax}^2 em função de Γ	35
3.6	Velocidade do som ao quadrado c_s^2 em função de ρ' para os seguintes valores de Γ (de baixo para cima): $-0,24$; $-0,12$; 0 ; $0,3$; 1 e 10 , onde a curva tracejada representa $\Gamma = 0$	36

3.7	Velocidade do som ao quadrado c_s^2 em função do parâmetro da equação de estado w para os seguintes valores de Γ (de baixo para cima): $-0,249; -0,12; 0; 0,1; 1$ e 10 , onde a curva tracejada representa $\Gamma = 0$	37
3.8	W_a em função de Γ	38
3.9	W_a e W_s em função de Γ . Ambos são iguais para $\Gamma = 0$	39
3.10	$c_s^2(W_a)$ e c_{smax}^2 em função de Γ	39
3.11	Diagramas de fase para o Caso 1 para vários valores de Γ	41
3.12	Diagramas de fase para o Caso 1 para vários valores de Γ	42
3.13	Dependência da Lagrangiana do modelo de Born-Infeld Estendido com $\beta < 0$ em relação a Γ	43
3.14	Equação de estado para o modelo Born-Infeld Estendido com $\beta < 0$ para os seguintes valores de Γ (da curva superior à inferior): $0,1; 1; 10; 100$. A reta tracejada representa a equação de estado para o vácuo.	45
3.15	Velocidade do som ao quadrado c_s^2 em função de W para os seguintes valores de Γ : $0; 0,5; 1; 10; 100$ (da esquerda para a direita).	46
3.16	Velocidade do som ao quadrado c_s^2 em função de ρ' para os seguintes valores de Γ : $0,1; 1; 10; 100$ (da esquerda para a direita).	47
3.17	Velocidade do som ao quadrado c_s^2 em função do parâmetro da equação de estado w para os seguintes valores de Γ (da curva inferior à superior): $0,1; 1; 10$	48
3.18	W_a em função de Γ	48
3.19	$c_s^2(W_a)$ em função de Γ	49
3.20	Diagramas de fase para o Caso 2 para diferentes valores de Γ	51
4.1	Função densidade de probabilidade $p(\theta)$. A área preenchida corresponde a valores de θ cuja probabilidade é dada pelo nível de confiança C	63
4.2	Função densidade de probabilidade $p(\theta)$ para o caso gaussiano. A área preenchida corresponde a valores de θ cuja probabilidade é dada pelo nível de confiança C	64

4.3	A curva sólida representa ρ' exato e as curvas tracejadas representam os limites para $a \rightarrow 0$ (verde) e $a \rightarrow \infty$ (laranja) para o caso em que $\Gamma = 1, 2$ e $W_0 = 0, 54$	69
4.4	A curva sólida representa ρ' exato e as curvas tracejadas representam os limites para $a \rightarrow 0$ e $a \rightarrow \infty$ para o caso em que $\Gamma = 3$ e $W_0 = 1$	71
4.5	Contorno de confiança para $\Delta\tilde{\chi}^2 = 2, 3$ (interna) e $\Delta\tilde{\chi}^2 = 6, 17$ (externa) para o Caso 1.	76
4.6	Contorno de confiança para $\Delta\tilde{\chi}^2 = 2, 3$ (interna) e $\Delta\tilde{\chi}^2 = 6, 17$ (externa) para o Caso 2.	77

Lista de Tabelas

4.1	$\Delta\chi^2$ em função dos níveis de confiança C e dos graus de liberdade ν	65
-----	---	----

Capítulo 1

Introdução

Um dos grandes desafios da Cosmologia atual é compreender a natureza da matéria escura e da energia escura. No contexto da teoria da Relatividade Geral, estas componentes são necessárias para explicar dois fenômenos distintos: a dinâmica das estruturas desde escalas galácticas até as maiores escalas observadas e a expansão acelerada do Universo, respectivamente. Apesar de haver alguns candidatos a matéria escura propostos pela física de partículas, ainda não há evidências experimentais de que estas partículas existam. A existência de uma constante cosmológica positiva nas equações de Einstein é a explicação mais antiga e simples para a expansão acelerada. Entretanto, se a constante cosmológica for associada à energia do vácuo, surge uma discrepância de aproximadamente 120 ordens de grandeza entre o valor teórico obtido no contexto da teoria quântica de campos e o valor observado. Muitos outros modelos de energia escura têm sido propostos, notadamente os baseados em campos escalares. O fato de termos duas componentes cuja natureza é desconhecida nos leva a indagar se seria possível descrever a fenomenologia associada a elas a partir de uma única componente. Esta idéia levou à proposta da unificação da matéria e energia escuras, onde um único componente seria responsável pela formação de estruturas e pela expansão acelerada do Universo.

Neste trabalho estudamos um modelo que se propõe a unificar estas duas componentes em um cenário conhecido como quartessência. Este modelo é descrito por uma Lagrangiana com termo cinético não canônico para um campo escalar. Em particular, a

Lagrangiana é dada pela raiz quadrada de um polinômio quadrático do termo cinético do campo escalar e pode ser pensada como uma generalização da Lagrangiana de Born-Infeld. Por causa disto, este modelo é chamado de Born-Infeld Estendido.

Uma motivação para a escolha do modelo de Born-Infeld Estendido se deve ao fato de que, ao contrário de outros candidatos à quartessência, sua velocidade do som pode se anular próximo do estado de constante cosmológica. Isto poderia evitar os problemas relacionados à formação de estruturas presentes em outros modelos de quartessência.

Um estudo detalhado do modelo de Born-Infeld Estendido foi realizado nesta dissertação, sendo que primeiramente mostrou-se que a dinâmica dada pela Lagrangiana é equivalente àquela de um fluido perfeito. Obtivemos a equação de estado e investigamos suas propriedades. Observamos o comportamento da velocidade do som, uma quantidade fundamental associada à evolução das perturbações de densidade. Esta quantidade foi analisada em função dos parâmetros do modelo e, desta forma, foi possível verificar que de fato ela pode assumir um valor muito pequeno na época da formação de estruturas, o que é desejável e representa uma vantagem em relação a outros modelos. Estudamos a aceleração do Universo e a relacionamos com a velocidade do som. Verificamos que a velocidade do som pode atingir o seu valor máximo antes ou depois que a expansão começa a acelerar, dependendo do valor de um parâmetro do modelo. Além disso, quanto mais cedo a velocidade do som atingir o seu máximo, menor será esse valor.

Feito isso, dedicamos nossa atenção à dinâmica do modelo para configurações espacialmente homogêneas e isotrópicas, uma vez que as observações atuais indicam que o nosso Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas. Construimos alguns diagramas de fase e determinamos várias trajetórias. Verificamos que o estado que representa a configuração de constante cosmológica é um atrator para uma boa parte das soluções em expansão.

Para finalizar o estudo deste modelo, comparamos as suas previsões teóricas para o caso de um Universo plano com dados observacionais recentes de Supernova do tipo Ia. Para tal, determinamos o parâmetro de Hubble e a distância de luminosidade neste modelo. Posteriormente, fizemos uma análise estatística usando dois códigos distintos que desenvolvemos (um em Fortran e outro usando o aplicativo Mathematica) para limitar os

parâmetros do modelo. Verificamos que o modelo de Born-Infeld Estendido é compatível com estes dados observacionais, porém eles não limitam significativamente os parâmetros do modelo.

Esta dissertação está estruturada da seguinte maneira: no Capítulo 2 fazemos uma revisão sobre os cenários da quartessência e da k -essência, apresentando suas propriedades e seus problemas e citando alguns candidatos. No Capítulo 3, que é inteiramente original, apresentamos o estudo detalhado do modelo de Born-Infeld Estendido descrito anteriormente relativo à equação de estado, velocidade do som, aceleração e dinâmica das soluções espacialmente homogêneas. No Capítulo 4 fazemos uma breve revisão sobre a utilização de Supernovas do tipo Ia para limitar os parâmetros do modelo e sobre a análise estatística utilizada para isso. Discutimos a dedução da distância de luminosidade e obtemos esta quantidade para o modelo de Born-Infeld Estendido. Confrontamos pela primeira vez este modelo com os dados de Supernovas do tipo Ia, obtendo assim os contornos de confiança para os parâmetros de interesse e discutimos os resultados. No Capítulo 5 apresentamos as conclusões e comentamos os resultados, além de indicar as perspectivas futuras para a continuidade deste trabalho. Finalmente, no Apêndice A revisamos o formalismo $1 + 3$ covariante da Relatividade Geral e apresentamos algumas equações importantes que serão usadas ao longo desta dissertação. Também discutimos o caso particular de um Universo homogêneo e isotrópico e apresentamos as relações relevantes que serão utilizadas quando considerarmos tal caso.

Capítulo 2

Conteúdo material do Universo e quartessência

2.1 Matéria e energia escuras

Existem atualmente modelos cosmológicos que explicam de forma bastante satisfatória a história do Universo, pelo menos da nucleossíntese primordial em diante. Esses modelos reproduzem com precisão diversas propriedades observadas do Universo, como a radiação cósmica de fundo em microondas, a abundância de elementos leves e a estrutura em grande escala. Entretanto, geralmente é assumida nesses modelos a existência de dois componentes desconhecidos que dominam a dinâmica do Universo: a matéria escura e a energia escura. A seguir, faremos uma breve revisão sobre estes dois componentes, discutindo suas evidências observacionais e apresentando alguns candidatos para eles.

2.1.1 Matéria escura

A evidência mais direta da existência de matéria escura em escalas galáticas foi descoberta na década de 1970 por Rubin e provém das medidas das curvas de rotação das galáxias espirais, que fornecem a velocidade de rotação de estrelas e gás em função da

distância ao centro galáctico [1]. O fato de a velocidade ser aproximadamente constante a grandes distâncias do centro galáctico implica na existência de um halo com massa $M(r) \propto r$ e densidade $\rho \propto 1/r^2$, onde r é a distância ao centro galáctico. No entanto, não há sinal de matéria visível em nenhum comprimento de onda que apresente estas características.

Na escala de aglomerados de galáxias, a primeira evidência da matéria escura surgiu em 1933, quando Zwicky e colaboradores [2] inferiram, a partir de medidas da dispersão de velocidades das galáxias no aglomerado de Coma, uma razão massa-luminosidade (M/L) superior a das estrelas em duas ordens de magnitude. O mesmo resultado foi obtido para outros aglomerados estudados. Portanto, a maior parte da massa dos aglomerados não pode estar sob a forma de estrelas, ou seja, a matéria luminosa é insuficiente para explicar os movimentos das galáxias nos aglomerados.

Além da dispersão de velocidades, há vários outros métodos complementares para estimar a massa de aglomerados de galáxias. Por exemplo, podemos utilizar o efeito de lente gravitacional, onde a distorção de imagens de objetos distantes devido à presença de um aglomerado na linha de visada entre o observador e o objeto está relacionada com o poço de potencial gravitacional e, conseqüentemente, com a massa do aglomerado. Também podemos utilizar o espectro na faixa de raios-x da radiação emitida pelo gás rarefeito que permeia o aglomerado para determinar a sua temperatura. A partir desta e supondo que o gás está em equilíbrio hidrostático é possível obter o potencial gravitacional que segura este gás e assim determinar o massa do aglomerado. Esta também pode ser inferida através do efeito Sunyaev-Zel'dovich, no qual a radiação cósmica de fundo em microondas tem seu espectro distorcido por elétrons através de espalhamento Compton inverso.

Estas estimativas da massa obtidas através de diversos observáveis são consistentes entre si. Juntamente com observações da aglomeração da matéria em grandes escalas, esses resultados indicam que a densidade total da matéria corresponde a aproximadamente 25% da densidade de energia do Universo.

Todas as medidas de massa baseadas na dinâmica, desde a escala galáctica até a estrutura em grande escala do Universo, resultam em valores muito maiores do que a

massa inferida através de sua distribuição luminosa. A maior parte da matéria do Universo é escura, ou seja, não é detectada em nenhum comprimento de onda.

Até aqui discutimos evidências da existência de matéria escura. Em princípio, esta poderia ser composta por matéria ordinária formando objetos frios que não emitem luz. No entanto, existe outro conjunto de evidências que indicam que a matéria escura não pode ser bariônica.

A primeira delas vem da observação da abundância de elementos leves no Universo. Cálculos da nucleossíntese primordial prevêm esta abundância em função da densidade de bárions. Comparados com os dados observacionais estes resultados mostram que aproximadamente 4% da densidade de energia do Universo corresponde a matéria bariônica. Como a densidade de matéria corresponde a cerca de 25% da densidade de energia do Universo, chegamos à conclusão de que a maior parte da matéria escura do Universo deve ser não bariônica.

Outra evidência provém do aglomerado da Bala (formado pela colisão de dois aglomerados de galáxias ocorrida há cerca de 150 milhões de anos) e de outros aglomerados que sofreram colisão recente, onde as galáxias, o gás e a matéria escura se comportam de forma distinta, o que permite estudá-los separadamente. As galáxias dos aglomerados se cruzam sem sofrer colisões. Os gases dos dois aglomerados, que representam a maior parte da matéria bariônica destes, interagem fazendo com que se concentrem na região da colisão. Já a matéria escura, que é detectada através do fenômeno de lente gravitacional, se concentra nas regiões próximas das galáxias. Isto indica que a matéria escura não segue a distribuição da maior parte da matéria bariônica, ou seja, apesar de estar dispersa em todo o aglomerado, ela não sofre colisões, ao contrário de um gás ordinário.

Uma terceira evidência do fato da matéria escura não ser bariônica é proporcionada pela distribuição de matéria em grandes escalas. Antes do desacoplamento entre matéria e radiação, as flutuações na componente bariônica não evoluem, uma vez que a matéria bariônica interage fortemente com a radiação. Já as perturbações de matéria escura podem evoluir na era dominada pela matéria e começar a formar estruturas. Após o desacoplamento, as perturbações na matéria bariônica são induzidas pelas flutuações da matéria escura. Em razão disso, a matéria escura é a principal responsável pela formação

das primeiras estruturas em grandes escalas. Sem ela, as flutuações seriam muito menores pois, no momento do desacoplamento, $\delta\rho/\rho$ para a matéria bariônica era da ordem de 10^{-5} e não teria havido tempo suficiente para produzir as estruturas em grande escala que são observadas hoje.

Outra medida das abundâncias de matéria bariônica e não bariônica pode ser obtida através da análise de espectro das flutuações da radiação cósmica de fundo em microondas. Novamente, a conclusão é de que a matéria escura não bariônica é necessária para explicar o espectro observado.

Existem na literatura muitos candidatos a matéria escura. Os áxions [3], introduzidos na física de partículas para resolver o problema da violação da simetria CP (conjugação de carga e paridade), são geralmente discutidos como candidatos a matéria escura pois eles devem interagir fracamente com as partículas ordinárias (bariônicas). Entretanto, a maior classe de candidatos, constituída por dezenas de partículas sugeridas, é a classe de WIMP, que equivale à abreviatura em inglês de partículas massivas que interagem fracamente. O WIMP mais popular é o neutralino previsto pela supersimetria [4, 5]. Apesar de todos estes e outros candidatos terem sido propostos para a matéria escura, ainda não há nenhuma evidência experimental de que tais partículas existam. Para uma revisão sobre candidatos a matéria escura veja [6].

Outra importante classificação é entre a matéria escura “fria” e “quente”. Um candidato a matéria escura é chamado “quente” se, na época da formação de galáxias, ele se move com velocidades relativísticas e “frio” se, nesta mesma época, ele se move com velocidades não relativísticas. A matéria escura quente não pode se aglomerar em escalas de galáxias até que ela se resfrie e tenha velocidades não relativísticas. Assim, ela geraria um espectro de flutuações diferente da matéria escura fria. Observações da estrutura em grandes escalas mostram que a maior parte ou a totalidade da matéria escura deve ser fria.

2.1.2 Energia escura

Há uma década atrás, análises da relação entre o desvio para o vermelho e a lumino-

sidade de Supernovas distantes do tipo Ia [7, 8] indicaram que a expansão do Universo é atualmente acelerada. Esta aceleração fornece fortes evidências para a existência de uma componente de energia escura com pressão negativa.

Além de explicar a expansão acelerada do Universo, a existência da energia escura é necessária para conciliar as medidas da geometria do espaço com a quantidade total de matéria no Universo. Medidas da radiação cósmica de fundo em microondas, mais especificamente da localização do pico do espectro das anisotropias de temperatura, indicam, com uma precisão melhor do que 10%, que a geometria do universo é aproximadamente plana. Dessa forma, a densidade de energia do Universo deve ser aproximadamente igual à densidade de energia crítica. Conforme a discussão da seção anterior, existe um conjunto de evidências complementares que indicam que a quantidade total de matéria no Universo, incluindo tanto bárions quanto a matéria escura, representa aproximadamente 25% da densidade de energia crítica do Universo. Isto implica na existência de uma forma adicional de energia que corresponde aos outros 75% da densidade de energia crítica.

Outras evidências da existência da energia escura foram sugeridas por uma série de observações astrofísicas, que incluem a abundância de aglomerados de galáxias em função do desvio para o vermelho, a evolução das estruturas em grande escala e uma combinação de outros observáveis que dependem dos parâmetros cosmológicos, inclusive da densidade de energia escura.

Apesar das evidências indicarem a existência da energia escura, a sua natureza física ainda é desconhecida. Sabe-se somente que ela possui pressão negativa e que não interage através de outras forças fundamentais a não ser a gravidade. A candidata mais tradicional e simples para a energia escura é a constante cosmológica Λ proposta por Einstein. Uma constante cosmológica, cuja pressão negativa causa a aceleração da expansão do universo, poderia ser responsável por 75% da densidade de energia faltante, sem interferir significativamente na formação de galáxias. A origem física da constante cosmológica pode ser a energia do vácuo da física de partículas. Entretanto, estimativas heurísticas do valor da densidade de energia do vácuo baseadas em uma escala de corte escolhida como sendo a escala de Planck estão em total desacordo com os valores inferidos a partir de dados observacionais. Mais especificamente, a densidade de energia da constante

cosmológica observada é aproximadamente 120 ordens de grandeza menor do que a densidade de energia do vácuo. Este problema é chamado problema da constante cosmológica. Outro problema relacionado à constante cosmológica consiste no fato de as densidades de energia da matéria escura e da energia escura serem comparáveis no tempo atual. Se a energia escura for realmente uma constante cosmológica, só há um curto período de tempo na evolução do Universo em que elas são comparáveis, então porque isto está acontecendo atualmente, ou seja, no período em que podemos observá-la? Este problema é chamado problema da coincidência cósmica.

O modelo que representa o conteúdo material do Universo mais utilizado é o chamado Λ CDM, que denota um Universo composto de matéria escura fria e constante cosmológica. Este modelo explica de forma satisfatória as observações da radiação cósmica de fundo em microondas, bem como as observações de Supernovas do tipo Ia e da estrutura em grandes escalas, entre outras.

Apesar da constante cosmológica ser a hipótese mais simples para a energia escura, os problemas mencionados acima levaram à procura por alternativas para a sua natureza. Vários outros candidatos a energia escura têm sido propostos e, entre estes, os modelos com campo escalar são uma subclasse importante e popular. A característica básica desses modelos é a pressão negativa, que, segundo as equações da Relatividade Geral, causa a expansão acelerada do Universo. Uma segunda característica compartilhada pela maioria desses modelos é que as perturbações de densidade do campo escalar não afetam o processo de formação de estruturas.

Um desses cenários é conhecido como quintessência [9, 10, 11, 12] e descreve um campo escalar ϕ com uma Lagrangiana padrão $\mathcal{L} = X - V(\phi)$ onde $X = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\phi_{;\alpha}\phi_{;\beta}$ corresponde ao termo cinético. Outra proposta consiste em campos escalares fantasmagóricos [13, 14], que possuem o termo cinético com sinal invertido. Também existe uma possibilidade mais geral, conhecida como k-essência [9, 15] que corresponde a uma teoria de campo escalar descrita por uma Lagrangiana com termo cinético não linear em X . Uma lista com vários modelos de energia escura pode ser encontrada em [16].

Outra possibilidade é considerar que o campo escalar que atua como energia escura seja também o responsável pela matéria escura. Como não temos muito conhecimento

sobre a natureza destas componentes, esta possibilidade de unificação vai de encontro com a busca da física pela simplicidade. Para que isso ocorra, o campo responsável pela quartessência deve ter pressão negativa em grandes escalas e pressão desprezível em pequenas escalas. Este cenário é chamado de quartessência e entre as suas possíveis implementações estão modelos no qual a unificação é feita através de uma equação de estado efetiva com motivação fenomenológica, como o gás de Chaplygin generalizado, e modelos de campo escalar com termo cinético não canônico, como a k-essência puramente cinética. A seguir faremos uma revisão destes modelos, apresentando as suas vantagens e também os problemas que eles podem apresentar. Para uma breve revisão sobre modelos de unificação da matéria escura usando cosmologias com campo escalar, veja [17].

2.2 K-essência

A k-essência (k de “kinetic”) é uma teoria descrita por uma Lagrangiana com termo cinético não canônico [9]. Em sua forma mais comum, a Lagrangiana é do tipo

$$\mathcal{L}(X, \phi) = V(\phi)F(X), \quad (2.1)$$

onde

$$X = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} \quad (2.2)$$

é termo cinético.

Há muito tempo teorias descritas por ações com termos cinéticos não canônicos atraem um interesse considerável. A primeira teoria deste tipo foi introduzida por M. Born e L. Infeld em 1934 para evitar a auto-energia infinita do elétron [18]. Alguns anos depois, em 1939 e 1952, tais teorias foram estudadas por W. Heisenberg em conexão com a física de raios cósmicos [19] e produção de mésons [20], respectivamente. As idéias de Born e Infeld também foram desenvolvidas por P. Dirac [21] em 1962. Os termos cinéticos não canônicos também são comuns na teoria de cordas [22, 23], onde surgem correções de mais alta ordem em X na ação efetiva para um campo escalar.

Na Cosmologia, tais teorias foram primeiramente estudadas no contexto da k-inflação

[9] e após como um modelo para a energia escura [15, 24, 25, 26] e para a unificação da matéria e energia escuras [27, 28, 29, 30].

A introdução de termos cinéticos não canônicos pode levar ao surgimento de uma nova dinâmica que não era possível de ser atingida anteriormente na quintessência. Em [31] são apresentadas algumas correspondências entre os modelos de k-essência e de quintessência e demonstra-se que todos os modelos de quintessência podem ser vistos como gerados por funções $F(X)$ apropriadas, desde que o potencial em função do tempo cosmológico seja o mesmo em ambos os casos.

Assim como a quintessência, a k-essência pode explicar satisfatoriamente o problema da coincidência cósmica, pois apresenta soluções que seguem a equação de estado do tipo dominante de matéria até a época em que a matéria sem pressão (poeira) domina, onde a k-essência começa a evoluir para um comportamento do tipo constante cosmológica [15, 32]. Entretanto, a k-essência pode resolver este problema de uma forma genérica (independente do potencial escolhido) e de forma menos dependente das condições iniciais que a quintessência.

Uma característica deste modelo, que será mostrada adiante, é que a pressão negativa, necessária para explicar a expansão acelerada, resulta dos termos cinéticos não canônicos [24]. Outra característica interessante dos modelos de k-essência é que eles podem produzir uma componente de energia escura com velocidade do som menor do que a velocidade da luz. Além disso, modelos de k-essência podem ser distinguidos observacionalmente de modelos de quintessência, para os quais a velocidade do som é exatamente igual à velocidade da luz [29].

Uma grande variedade de formas para $\mathcal{L}(X, \phi)$ tem sido considerada na literatura. A mais comum, como já foi dito, é a que tem a forma $\mathcal{L}(X, \phi) = V(\phi)F(X)$. Por exemplo, em [15, 25, 33] estuda-se casos com $V(\phi) = 1/\phi^2$. Já para o caso de táquions, tem-se $F(X) = -\sqrt{1 - 2X}$ e $V(\phi) = V_0(1 + \phi/\phi_0) \exp(-\phi/\phi_0)$, onde ϕ representa o condensado de táquions [26]. Em [34] investiga-se Lagrangianas do tipo $\mathcal{L} = F(X) - V(\phi)$. Outra forma bastante estudada consiste no modelo de k-essência que possui somente a parte cinética, ou seja, $V(\phi)$ é constante. Este modelo foi o primeiro a ser investigado em [9], quando a k-inflação foi proposta. Posteriormente, em [29] mostrou-se que este tipo de

k-essência, chamada k-essência puramente cinética, também pode unificar a matéria e a energia escuras desde que algumas condições sobre a forma funcional da Lagrangiana sejam satisfeitas. Este modelo particular será discutido em detalhes na seção 2.4.

A seguir introduziremos o formalismo geral para a k-essência e determinaremos o tensor de energia-momentum, o parâmetro da equação de estado e a velocidade do som.

2.2.1 Tensor de energia-momentum e equação de estado para a k-essência

Suponha que o campo escalar ϕ da k-essência esteja acoplado minimamente com o campo gravitacional $g_{\alpha\beta}$. Então, a ação da k-essência é dada por

$$S_k(\phi, g_{\alpha\beta}) = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(X, \phi), \quad (2.3)$$

onde X é o termo cinético canônico e g é o determinante da métrica.

A variação da ação (2.3) em relação a $g_{\alpha\beta}$ dá o tensor de energia-momentum para o campo escalar da k-essência

$$T_{\alpha\beta} := \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_k}{\delta g^{\alpha\beta}} = -g_{\alpha\beta} \mathcal{L} + \mathcal{L}_X \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}, \quad (2.4)$$

onde $\mathcal{L}_X := \partial \mathcal{L} / \partial X$.

Usando o formalismo 1 + 3 covariante da Relatividade Geral apresentado no Apêndice A, qualquer tensor de energia-momentum pode ser decomposto em termos de seus parâmetros dinâmicos ρ , p , q_α e $\pi_{\alpha\beta}$, definidos por (A.32)-(A.35), através da escolha de um referencial particular representado por um observador dotado de um campo de 4-velocidade, levando à decomposição dada por (A.30). No referencial comoviente com o gradiente do campo, a 4-velocidade é definida pelo vetor normalizado

$$u_\alpha := \frac{\phi_{,\alpha}}{\sqrt{2\|X\|}}. \quad (2.5)$$

Para o tensor energia-momentum da k-essência (2.4), os parâmetros dinâmicos são

$$\rho = -\mathcal{L} + 2\mathcal{L}_X X, \quad p = \mathcal{L}, \quad q_\alpha = 0, \quad \pi_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.6)$$

e o tensor de energia-momentum (2.4) fica equivalente àquele de um fluido perfeito (A.36).

Assim, o parâmetro da equação de estado, definido como

$$w := \frac{p}{\rho}, \quad (2.7)$$

é dado para a k-essência por

$$w = \frac{\mathcal{L}}{2X\mathcal{L}_X - \mathcal{L}}. \quad (2.8)$$

A velocidade do som, que é uma quantidade fundamental para o crescimento das perturbações de densidade, no caso da k-essência é dada por [35]

$$c_s^2 := \frac{(\partial p / \partial X)}{(\partial \rho / \partial X)} = \frac{\mathcal{L}_X}{\mathcal{L} + 2X\mathcal{L}_{XX}}. \quad (2.9)$$

2.3 Quartessência

Como ainda não há evidências observacionais conclusivas quanto à natureza da energia e matéria escuras, é interessante investigar a possibilidade de descrever a fenomenologia associada a elas através de um único componente material, que seria responsável pela expansão acelerada e pela aglomeração da matéria em pequenas escalas. Como só há uma componente escura além de bárions, fótons e neutrinos, a componente material que implementa a unificação é chamada *quartessência* ou também *matéria escura unificada* [36].

A implementação deste cenário pode ser feita, por exemplo, através de um fluido com uma equação de estado efetiva que possua uma motivação fenomenológica ou obtida a partir de um modelo com campo escalar, como a k-essência puramente cinética, que será tratada na seção 2.4.

Para ser um candidato a quartessência, um modelo deve apresentar uma equação de estado que satisfaça algumas condições. Considerando que o Universo é descrito pelo modelo de Friedmann, para haver expansão acelerada, a densidade e a pressão médias atuais, segundo a equação (A.81), devem satisfazer a relação

$$\rho + 3p < 0. \quad (2.10)$$

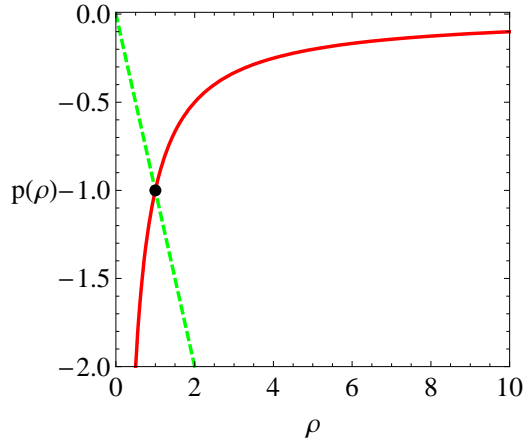


Figura 2.1: Equação de estado para um modelo de quartessência com $p = -\frac{1}{\rho}$. A linha tracejada representa a equação de estado do vácuo, onde $p_v = -\rho_v$. O ponto corresponde a $\rho = \rho_v$.

Por outro lado, para que as estruturas que observamos hoje em grandes escalas tenham sido formadas, a matéria deve ser não relativística

$$\rho \gg |p| . \quad (2.11)$$

Estas duas condições não estão em contradição, já que as observações mostram que a densidade média é diferente em diferentes épocas e diferentes escalas. Elas podem ser compatíveis se p for negativa e se for uma função monotonicamente crescente de ρ . Dessa forma, a quartessência atuaria como matéria escura fria em tempos mais remotos e em regiões de alta densidade atualmente e como energia escura no Universo atual (e futuro) e em regiões de baixa densidade. Essa propriedade da equação de estado é mostrada na Figura 2.1.

Uma característica muito interessante da quartessência para o caso geral de um fluido perfeito é que, a partir da equação de conservação da energia (A.70)

$$(\rho + p)\theta = -\dot{\rho}, \quad (2.12)$$

onde $\theta = 3\dot{a}/a$ e a é o fator de escala, segue que, enquanto θ é positivo e não divergente e $(\rho + p) > 0$, a evolução dada por esta equação faz com que ρ diminua com o tempo. Com isso, pelo comportamento da equação de estado da quartessência, que pode ser visto

na Figura 2.1, notamos que a pressão se aproxima cada vez mais do estado $p = -\rho$. Então $(p + \rho)$ se aproxima de zero de modo que $\dot{\rho}$ tende a zero. No limite assintótico $(p + \rho) \rightarrow 0$ enquanto $\rho \rightarrow \rho_v$, que corresponde ao valor mínimo para a densidade de energia. O subscrito v se refere ao vácuo, uma vez que $p_v = -\rho_v$ corresponde à equação de estado do vácuo (que na Figura 2.1 é representado por um ponto). Como consequência disto, não é possível passar de um estado com $(\rho + p) > 0$ para outro com $(\rho + p) < 0$, pois a densidade de energia “congela” quando nos aproximamos do estado com $p_v = -\rho_v$. Podemos pensar esta situação como se existisse uma barreira do vácuo que não pode ser transposta. Em particular, em um Universo homogêneo em expansão, ρ_v é o limite assintótico para $a \rightarrow \infty$.

A partir da equação (2.12) também é possível verificar que, em regiões em contração, onde $\theta < 0$ e $\dot{\rho} > 0$, quanto mais ρ aumenta, mais a fração $|p/\rho|$ se aproxima de zero. Em um Universo homogêneo em contração, $|p/\rho| \rightarrow 0$ quando $a \rightarrow 0$. Isto representa o comportamento de matéria escura fria ou poeira.

Se inicialmente $(\rho + p) > 0$ ou, equivalentemente, $\rho > \rho_v$, então o parâmetro da equação de estado, definido pela equação (2.7), pode variar no intervalo $-1 < w < 0$.

2.3.1 Flutuações e quartessência adiabática e não adiabática

Agora vamos discutir alguns aspectos sobre formação de estruturas em modelos de quartessência.

A formação de estruturas está relacionada a dois processos. O primeiro é consequência da mudança de geodésicas devido à flutuações locais de densidade. Em outras palavras, a matéria segue o campo gravitacional local. O segundo processo está relacionado ao desvio da trajetória do elemento de fluido em relação à geodésica devido à presença de um gradiente de pressão, o que é descrito pela equação de Euler (A.71), que foi deduzida no Apêndice A. Esta equação pode ser escrita como

$$a_\gamma = \frac{p_{,\alpha} h^\alpha_\gamma}{(\rho + p)}. \quad (2.13)$$

No caso adiabático, ou seja, quando a entropia não varia, a quantidade $p_{,\gamma}$ pode ser

escrita, utilizando a definição dada por (A.74), como

$$p_{,\gamma} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \rho_{,\gamma} = c_s^2 \rho_{,\gamma} \quad (2.14)$$

e, portanto, está associada com perturbações na densidade de energia. Substituindo a equação (2.14) em (2.13), podemos notar que as perturbações de densidade ($\rho_{,\gamma} \neq 0$) causam desvios na trajetórias, através de a_γ . Assim, para uma dada flutuação na densidade $\rho_{,\gamma}$, c_s^2 quantifica quanto será o desvio da trajetória em relação à geodésica.

De fato, a evolução das perturbações no regime linear é governada por um termo relacionado ao campo gravitacional local e por outro relacionado à velocidade do som ao quadrado [37, 38, 39, 40]. Para que uma solução seja mecanicamente estável, devemos ter $c_s^2 \geq 0$. Para o caso adiabático, o fato de p ser uma função monotonicamente crescente de ρ na equação de estado da quartessência implica que $c_s^2 > 0$ pois $\partial p / \partial \rho > 0$.

Em modelos onde a matéria escura e a energia escura são componentes separadas, a matéria escura possui $c_s^2 = 0$, uma vez que sua pressão é nula. Já a energia escura, em geral apresenta flutuações apenas em grandes escalas. No caso em que a energia escura corresponde a uma constante cosmológica, $c_s^2 = 0$ pois o gradiente de pressão é nulo. Dessa forma, o fluido que tem pressão relevante é diferente daquele que se aglomera e é responsável pela formação de estruturas, que tem $c_s^2 = 0$. Assim, c_s^2 não é uma quantidade muito importante em modelos onde matéria e energia escuras são componentes separadas.

A situação é diferente em modelos de quartessência, pois o mesmo fluido que possui pressão não nula é responsável pela formação de estruturas, já que também se aglomera. Se há formação de estruturas, há um gradiente de densidade que, através da equação (2.14), está relacionado ao gradiente de pressão. Assim, c_s^2 é, em geral, não nula e tem um papel fundamental na formação de estruturas em modelos de quartessência.

Alguns estudos mostraram que, para diversos modelos de quartessência, a velocidade do som acarreta em oscilações e supressões no espectro de potências das flutuações de densidade, o que inviabilizaria estes modelos frente aos dados observacionais [41, 42, 43]. Entretanto, esta situação pode mudar se considerarmos o caso não adiabático, no qual p também depende da entropia s , ou seja, $p = p(\rho, s)$. Nesse caso c_s^2 pode ser escrita como

$$c_s^2 = \frac{\frac{\partial p}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial p}{\partial s} \dot{s}}{\dot{\rho}} \quad (2.15)$$

e pode ser nula se os termos no numerador se cancelarem. Em [42] mostra-se que se a condição inicial for $c_s^2 = 0$, então isso se manterá durante toda a evolução linear. Nesse caso, o espectro de potências resultante é semelhante ao obtido com o modelo Λ CDM e os modelos de quartessência voltam a ser compatíveis com os dados observacionais. No entanto, é preciso acrescentar um novo grau de liberdade ao modelo, a entropia, e uma condição inicial um tanto peculiar.

No caso não adiabático, a equação de estado não precisa ter a pressão como uma função crescente da densidade de energia, ou seja $\partial p / \partial \rho > 0$. As únicas condições impostas para haver comportamento de quartessência é que $\partial w / \partial \rho > 0$ e que $|p/\rho| \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow \infty$.

Vamos apresentar agora alguns modelos de quartessência e discutir suas propriedades à luz das considerações acima.

2.3.2 Quartessência convexa

Em modelos de quartessência cuja equação de estado é convexa, temos no caso adiabático que

$$\frac{dc_s^2}{d\rho} = \frac{d^2 p}{d\rho^2} < 0. \quad (2.16)$$

Esta condição implica que c_s^2 é uma função decrescente de ρ e, portanto, seu valor máximo ocorre quando ρ atinge seu valor mínimo, que é ρ_v .

Neste caso, a época de expansão acelerada, onde ρ é próxima a ρ_v , é também um período com velocidade do som adiabática alta, o que, conforme a discussão anterior, causa problemas com perturbações.

A seguir, apresentaremos alguns modelos de quartessência convexa encontrados na literatura.

Gás de Chaplygin generalizado

O candidato mais popular a quartessência é um fluido com uma equação de estado do tipo lei de potência inversa

$$p = -\frac{M^{4(\alpha+1)}}{\rho^\alpha}, \quad (2.17)$$

que ficou conhecido como gás de Chaplygin generalizado [27, 28, 44, 45, 46]. Em (2.17), M tem dimensão de massa e α é um parâmetro adimensional. Este modelo é uma generalização do gás de Chaplygin, que foi proposto em [44] como um candidato à energia escura e tem a equação de estado (2.17) com $\alpha = 1$. O caso $\alpha = 0$ reduz este modelo ao modelo Λ CDM, pelo menos para a métrica homogênea e flutuações de primeira ordem. Em [27, 46] mostrou-se que este fluido poderia naturalmente unificar a matéria escura e a energia escura.

Resolvendo a equação de conservação de energia (A.82) para o Universo homogêneo e isotrópico, obtemos que a densidade é dada por

$$\rho = \rho_0 \left[(1 - A) \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(\alpha+1)} + A \right]^{\frac{1}{\alpha+1}}, \quad (2.18)$$

onde $A = \left(\frac{M^4}{\rho_0} \right)^{\alpha+1}$ e o subscrito 0 se refere a valores atuais.

Como esperado, para $\frac{a}{a_0} \ll 1$ temos

$$\rho \propto \frac{1}{a^3}, \quad (2.19)$$

que corresponde ao comportamento característico de Universo dominado pela matéria. Já para $\frac{a}{a_0} \gg 1$

$$p = -\rho = -M^4 \quad (2.20)$$

e o fluido se comporta como uma constante cosmológica. A equação (2.18) mostra que o gás de Chaplygin generalizado interpola entre a matéria escura fria e a energia escura à medida que a densidade de energia do Universo varia.

O valor mínimo para a densidade, que é $\rho_v = M^4$, e o intervalo permitido para os valores de ρ_0 , dado por $\rho_v < \rho_0 < \infty$, impõem restrições no parâmetro A , que deve satisfazer $0 < A < 1$ ($A = 0$ para o caso em que o fluido se comporta como matéria escura fria e $A = 1$ para o caso em que o fluido atua como constante cosmológica).

Para este modelo, a velocidade do som adiabática, dada por (A.74), é

$$c_s^2 = -\alpha w. \quad (2.21)$$

Por se tratar de um modelo de quartessência convexa, esta quantidade possui um valor máximo, que é obtido para $w = -1$, ou seja, para $\rho = \rho_v$. Então, para evitar propagação

de sinais com velocidades superiores à da luz, impomos o limite superior $\alpha \leq 1$. Exigindo a estabilidade das perturbações adiabáticas implica que $\frac{\partial p}{\partial \rho} \geq 0$ e o limite inferior $\alpha \geq 0$ é obtido. O gás de Chaplygin original, com $\alpha = 1$ é o caso extremo, onde a velocidade do som é igual à velocidade da luz.

Para o caso não adiabático, onde as perturbações de entropia são permitidas, os limites para α discutidos acima não são mais válidos. O único requerimento será $\alpha > -1$, já que a quartessência deve ter $w \simeq 0$ para $\rho \rightarrow \infty$.

Até aqui, introduzimos o modelo de gás de Chaplygin generalizado de um ponto de vista fenomenológico. Mas existem algumas motivações teóricas que levam à mesma equação de estado. Do ponto de vista da teoria de campos, algumas motivações são discutidas em [27, 28, 44]. A equação de estado do gás de Chaplygin pode ser obtida a partir de uma descrição hidrodinâmica de um campo escalar com a Lagrangiana de Born-Infeld (que será vista no próximo capítulo) [47]. O gás de Chaplygin também pode ser associado a um táquion com potencial constante [48]. Já a equação de estado do gás de Chaplygin generalizado pode ser obtida a partir de um modelo de k-essência [28].

Várias previsões teóricas deste modelo foram testadas usando dados observacionais. Mostrou-se que para um grande intervalo de parâmetros este modelo é consistente com os dados observacionais [36, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56]. Também verificou-se que o gás de Chaplygin ($\alpha = 1$) é descartado como candidato para a energia escura assim como para unificar a matéria escura [56, 57, 58].

Considerando-se perturbações adiabáticas, foi mostrado em [41] que, a menos que α seja muito próximo de zero (que corresponde ao limite que reduz o modelo ao modelo Λ CDM), o espectro de potências da matéria apresenta instabilidades e oscilações. Este problema pode ser evitado se permitirmos perturbações de entropia, de tal forma que a velocidade do som, dada por (2.15), possa se anular. Dessa forma, o modelo volta a ser consistente com os dados observacionais [42].

Quartessência exponencial

Se a forma da equação de estado for mais íngreme, a velocidade do som adiabática, que está relacionada com a inclinação da curva $p = p(\rho)$, pode ter um valor alto somente em

um pequeno intervalo de ρ . Com esta motivação, em [43] foi proposto um novo modelo de quartessência, chamado quartessência exponencial, cuja equação de estado é dada por

$$p = -M^4 \exp\left(-\frac{\alpha\rho}{M^4}\right), \quad (2.22)$$

onde, novamente, M tem dimensão de massa e α é um parâmetro adimensional. O caso $\alpha = 0$ corresponde ao modelo Λ CDM.

Nesse caso, c_s^2 também será uma função exponencial, que decai rapidamente para valores grandes de ρ . Dessa forma, a velocidade do som terá valores altos somente para densidades de energia próximas a ρ_v , onde ela é máxima.

Também em [43], mostrou-se que este modelo sofre dos mesmos problemas do gás de Chaplygin generalizado e que a introdução de perturbações não adiabáticas pode resolvê-los.

Quartessência logarítmica

Motivado pelos resultados observacionais para o gás de Chaplygin generalizado, que mostram que α deve ser próxima de zero [41], ou seja, que a equação de estado é uma lei de potência muito suave, em [43] foi proposto uma nova equação de estado para a quartessência,

$$p = -\frac{M^4}{\left[\ln\left(\frac{\rho}{M^4}\right)\right]^\alpha}, \quad (2.23)$$

na tentativa de obter um modelo cujos parâmetros estivessem em um intervalo mais abrangente, distinto daquele do modelo Λ CDM. Este modelo é conhecido como quartessência logarítmica.

Como o modelo anterior, a quartessência logarítmica apresenta os mesmos problemas do gás de Chaplygin generalizado e perturbações adiabáticas podem solucioná-los.

A raiz dos problemas deste modelo e dos outros dois discutidos acima, cujas equações de estado são convexas, está no fato de que a velocidade do som adiabática é máxima no estado de densidade mínima. Dessa forma, a época de expansão acelerada coincide com o período em que a velocidade do som adiabática é alta, o que causa oscilações e outros problemas com o espectro de potências, como mencionado na seção 2.3.1.

2.3.3 Quartessência do tipo degrau

Os modelos convexos discutidos acima apresentam a desvantagem de possuir velocidade do som adiabática máxima no estado de densidade mínima, o que pode causar oscilações e outros problemas com o espectro de potências. Na tentativa de evitar estes problemas, em [59] foram discutidos modelos nos quais a concavidade da equação de estado varia de tal forma que a velocidade do som adiabática é desprezível em $\rho \simeq \rho_v$. Este modelo foi chamado de quartessência do tipo degrau. Um exemplo de equação de estado é dada por

$$p = -M^4 \left(\frac{1}{1 + \exp \left[\beta \left(\frac{\rho}{M^4} - \frac{1}{\sigma} \right) \right]} \right) \quad (2.24)$$

e está representada na Figura 2.2.

Nesse caso, há três parâmetros livres: M está relacionado com $\rho_v = -M^4$, σ está relacionado com o valor de ρ no momento da transição do regime $p \simeq 0$ para $p \simeq -M^4$ ($\rho_{trans} = M^4/\sigma$) e β controla o valor máximo da velocidade do som. Em [59] também mostrou-se que este modelo é compatível com um grande conjunto de dados observacionais se a transição entre os dois estados assintóticos tivesse ocorrido em um alto desvio para o vermelho ($z > 38$), o que o torna novamente indistingüível do modelo Λ CDM na prática.

Outra forma de resolver os problemas discutidos acima é introduzir modelos baseados em Lagrangianas do tipo k-essência, o que será discutido a seguir e em todo o Capítulo 3.

2.4 Quartessência a partir de k-essência puramente cinética

A k-essência puramente cinética é uma classe da k-essência na qual a Lagrangiana não depende explicitamente do campo escalar, ou seja,

$$\mathcal{L} = F(X). \quad (2.25)$$

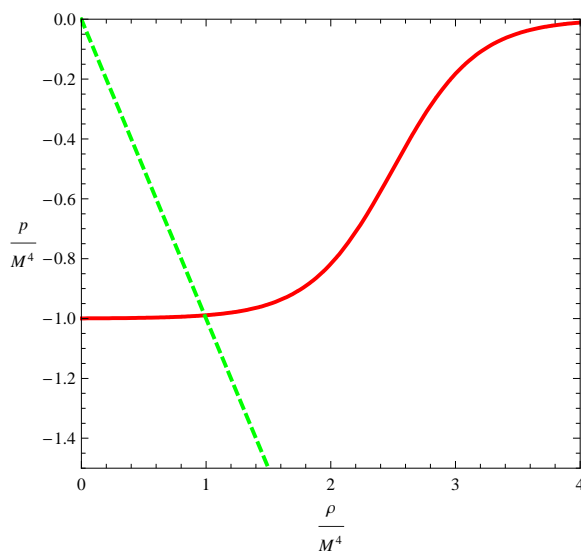


Figura 2.2: Equação de estado para quartessência tipo degrau com $\beta = 3$ e $\sigma = 0, 4$. A linha tracejada corresponde a $p = -\rho$.

Assim, pode-se considerar o termo potencial como constante.

Como ρ e p , dadas por (2.6), serão funções somente de X , uma vez que $V(\phi)$ é constante, uma dessas relações pode ser invertida para obter $p = p(\rho)$. Isto mostra que a dinâmica dada por qualquer Lagrangiana puramente cinética é equivalente àquela de um fluido perfeito, tanto em seu tensor de energia-momentum, como mostrado na seção 2.2.1, quanto na equação de estado.

Em [29] mostrou-se que modelos de k-essência puramente cinética com um extremo local na Lagrangiana apresentam uma densidade de energia que é uma soma de uma componente de poeira não relativística com equação de estado $w = 0$ e uma componente do tipo constante cosmológica, com $w = -1$, ou seja,

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3. \quad (2.26)$$

Outra característica deste modelo é que ele produz velocidades do som baixas, $c_s^2 \ll 1$, permitindo que o componente de poeira se aglomere como matéria escura.

Assim, a k-essência puramente cinética produz a unificação da energia escura e da matéria escura, ou seja, é um modelo de quartessência. Esta unificação é feita através de uma equação de estado idêntica à da matéria escura mais uma constante cosmológica, mas

com características distintas dos modelos anteriores de quartessência, como velocidade do som pequena em todas as épocas. Esta última propriedade evita os problemas associados ao gás de Chaplygin generalizado, que foram discutidos anteriormente. Entretanto, este modelo apresenta uma desvantagem: para que a evolução da matéria escura seja um fenômeno transitório, os parâmetros do modelo devem ser finamente ajustados.

Outros modelos de k-essência puramente cinética foram propostos na literatura como unificadores de matéria escura e energia escura, como, por exemplo, em [33]. Em [30] foi proposto um modelo com estas características baseado em uma extensão da ação de Born-Infeld para um campo escalar, cuja Lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = -\sqrt{\alpha X^2 + \beta X + \gamma}. \quad (2.27)$$

Este modelo é chamado de Born-Infeld Estendido. Ele apresenta propriedades bastante interessantes e, para $\gamma = 0$, mostrou-se compatível com dados observacionais [30].

Este modelo será o objeto de estudo desta dissertação e será discutido em detalhes no capítulo a seguir.

Capítulo 3

O modelo de Born-Infeld Estendido e a sua dinâmica em um Universo homogêneo

3.1 Lagrangiana de Born-Infeld estendida

No capítulo anterior vimos que o gás de Chaplygin é um modelo de quartessência muito estudado. Ele pode ser descrito através da Lagrangiana de Born-Infeld [47]

$$\mathcal{L}_{BI} = -\sqrt{\beta X + \gamma}, \quad (3.1)$$

onde $X = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}$ é o termo cinético e β e γ são constantes.

Como o tensor energia-momentum obtido a partir desta Lagrangiana é equivalente ao de um fluido perfeito, a densidade de energia e a pressão são

$$\rho = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta X + \gamma}}, \quad (3.2)$$

$$p = -\sqrt{\beta X + \gamma}, \quad (3.3)$$

e foram obtidas a partir de (2.6). Dessa forma, a equação de estado é

$$p = -\frac{\gamma}{\rho} \quad (3.4)$$

e é equivalente à expressão (2.17) com $\alpha = 1$.

Entretanto, este modelo foi descartado por observações [56, 57, 58]. Uma generalização da Lagrangiana de Born-Infeld foi proposta em [28] e leva ao chamado gás de Chaplygin generalizado [27, 28, 45, 46]. Entretanto, este modelo apresenta os mesmos problemas que o próprio gás de Chaplygin [41].

Alguns aspectos que mostram que o modelo de Born-Infeld é um candidato a unificação da matéria escura com a energia escura motivaram a procura por outros modelos que ainda mantenham a sua simplicidade e ao mesmo tempo poderiam evitar seus problemas. Um exemplo, que já foi mencionado no capítulo anterior, é dado pela Lagrangiana de Born-Infeld estendida, que foi proposta em [30] e é dada por

$$\mathcal{L} = -\sqrt{\alpha X^2 + \beta X + \gamma}. \quad (3.5)$$

Este modelo é chamado de Born-Infeld Estendido.

O caso particular da Lagrangiana (3.5) com $\gamma = 0$ leva ao chamado modelo de Milne-Born-Infeld e foi estudado em detalhes em [30]. Este modelo foi assim chamado porque permite uma solução que representa um Universo vazio ($\rho = 0$) em expansão, que é chamada de solução de Milne. A sua equação de estado depende efetivamente de um só parâmetro livre. Foi mostrado que este modelo é consistente com dados de SnIa e que ele fornece um ajuste aos dados tão bom quanto o modelo Λ CDM supondo um Universo plano.

Para que \mathcal{L} seja definida em um intervalo finito de X , exigimos que α seja negativo e que $\beta^2 > 4\alpha\gamma$. Assim, X é definido entre as duas raízes de (3.5), dadas por

$$X_{min} = -\frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \quad (3.6)$$

$$X_{max} = -\frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}. \quad (3.7)$$

O modelo de Born-Infeld Estendido é um modelo de k-essência puramente cinética pois a Lagrangiana que o descreve apresenta termo cinético não canônico e não depende explicitamente do potencial. Além disso, a Lagrangiana apresenta um extremo, devido à exigência de que ela seja definida entre um valor máximo e um valor mínimo. Dessa forma, usaremos os resultados das seções 2.2 e 2.4 para descrevê-lo.

O tensor energia-momentum é dado por (2.4). Escolhendo o referencial comoviente com o gradiente do campo, onde a 4-velocidade é dada por (2.5), o tensor energia-momentum é equivalente àquele de um fluido perfeito. A densidade de energia e a pressão, dadas por (2.6), para este modelo serão

$$\rho = -\mathcal{L} + \frac{X(\beta + 2\alpha X)}{\mathcal{L}}, \quad (3.8)$$

$$p = \mathcal{L}. \quad (3.9)$$

Além disso, como ρ e p são dados em função somente de X , uma dessas expressões pode ser invertida para obter $p = p(\rho)$ e a dinâmica deste modelo será equivalente à de um fluido perfeito.

A equação de movimento para o campo escalar é obtida variando-se a ação (2.3) para a Lagrangiana (3.5) em relação a ϕ , o que leva a

$$\left(\frac{(\beta + 2\alpha X)}{2\mathcal{L}} \phi^{;\mu} \right)_{;\mu} = 0. \quad (3.10)$$

Uma solução particular de (3.10) para a dinâmica do campo escalar é dada por um valor constante de X ,

$$X_v := -\frac{\beta}{2\alpha}. \quad (3.11)$$

Assim, de (3.8) e (3.9) temos

$$\rho_v = -\mathcal{L} \quad \text{e} \quad p_v = \mathcal{L} \quad \rightarrow \quad \rho_v = -p_v.$$

e o tensor de energia-momentum, dado por (2.4), se torna identicamente igual à distribuição de energia de uma constante cosmológica. Chamamos tal configuração de *estado fundamental* ou *vácuo* ou também de estado de de Sitter [30].

A equação (3.10) também permite a solução trivial $\phi^{;\mu} = 0$, que corresponde a outro estado de vácuo. Nesse caso $X_e = 0$ e de (3.8) e (3.9) temos

$$\rho_e = -\mathcal{L} \quad \text{e} \quad p_e = \mathcal{L} \quad \rightarrow \quad \rho_e = -p_e.$$

Entretanto, esta configuração de vácuo é diferente do vácuo caracterizado pelo estado fundamental. No estado fundamental temos um vácuo “dinâmico”, pois $X_v \neq 0$, enquanto que a configuração com $X_e = 0$ representa um vácuo “estático”, já que ϕ é igual a uma

constante. Veremos adiante que, dependendo das considerações sobre os sinais de α , β e γ de (3.5), o vácuo relevante fisicamente é o dado pelo estado fundamental (3.11) ou pelo estado com $X_e = 0$.

Note que, próximo das raízes de \mathcal{L} , (3.6) e (3.7), o campo escalar atua como matéria sem pressão devido à (3.9). A presença de \mathcal{L} no denominador de (3.8) mostra que, quando este é muito pequeno, a pressão é igualmente pequena e a densidade de energia é muito grande. Dessa forma, o campo escalar se comporta como poeira em regiões de alta densidade.

Como veremos adiante, o intervalo relevante de X para que o campo escalar exiba comportamento de quartessência é $X_{max} > X > X_v(X_e)$. Nesse caso, temos a possibilidade de uma componente de matéria-energia que interpola entre poeira, próximo a X_{max} , e uma configuração do tipo constante cosmológica, no estado de vácuo (que será dado por X_v ou X_e dependendo do caso em consideração).

É interessante notar que se a evolução do campo escalar iniciar em algum valor de X contido neste intervalo, então a dinâmica não permitirá que X saia dele. O intervalo $X_v(X_e) > X > X_{min}$ corresponde ao comportamento fantasmagórico, pois $(\rho+p) < 0$. No entanto, modelos de k-essência fantasmagóricos possuem uma série de problemas, como, por exemplo, instabilidades [60].

Investigaremos o modelo de Born-Infeld Estendido como quartessência de forma detalhada nas próximas seções. Nossa análise se dividirá em duas partes, baseada no sinal de β em (3.5).

3.2 Modelo de Born-Infeld Estendido com $\beta > 0$ - Caso 1

Nesta seção nos restringiremos ao caso em que o sinal de β na Lagrangiana (3.5) é positivo. Como já exigimos que o sinal de α fosse negativo, podemos escrever $\alpha = -|\alpha|$.

O sinal de γ é arbitrário. Dessa forma, a Lagrangiana (3.5) é dada por

$$\mathcal{L} = -\sqrt{-|\alpha|X^2 + |\beta|X + \gamma}. \quad (3.12)$$

É mais conveniente escrever a Lagrangiana acima em termos de variáveis adimensionais. Definindo

$$A := \sqrt{|\alpha|}, \quad \Sigma^2 := \frac{\beta}{|\alpha|}, \quad \Gamma := \frac{\gamma|\alpha|}{\beta^2} \quad \text{e} \quad W := \frac{X}{\Sigma^2},$$

podemos reescrever a Lagrangiana (3.12) como

$$\mathcal{L} = -A\Sigma^2\sqrt{W(1-W) + \Gamma}. \quad (3.13)$$

Para este caso, o espectro de valores admissíveis para W está contido no intervalo

$$W_{min} := \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+4\Gamma}}{2} < W < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4\Gamma}}{2} =: W_{max}.$$

O estado fundamental, definido por (3.11), corresponde a $W_v = 1/2$. Vemos que o sinal de Γ é determinado pelo sinal de γ e que este parâmetro deve satisfazer a $\Gamma > -1/4$.

Apresentamos na Figura 3.1 o comportamento da Lagrangiana (3.13) para três valores de Γ . Conforme a discussão da seção anterior, o intervalo $W_{max} > W > W_v$ é o que corresponde ao comportamento de quartessência para o Caso 1 deste modelo. Dependendo do valor de Γ , o estado de vácuo W_e também pode existir. Entretanto ele nunca é atingido pois há uma barreira do vácuo em W_v , que é atingido primeiro. No Caso 2, que será visto adiante, ocorre o contrário: W_e é atingido antes que W_v e, portanto, este é o estado de vácuo relevante.

3.2.1 Equação de estado

Para determinarmos a equação de estado é preciso calcular a densidade de energia e a pressão. A densidade de energia pode ser escrita, a partir de (3.8) como

$$\rho = \frac{A\Sigma^2(W^2 + \Gamma)}{\sqrt{W(1-W) + \Gamma}}. \quad (3.14)$$

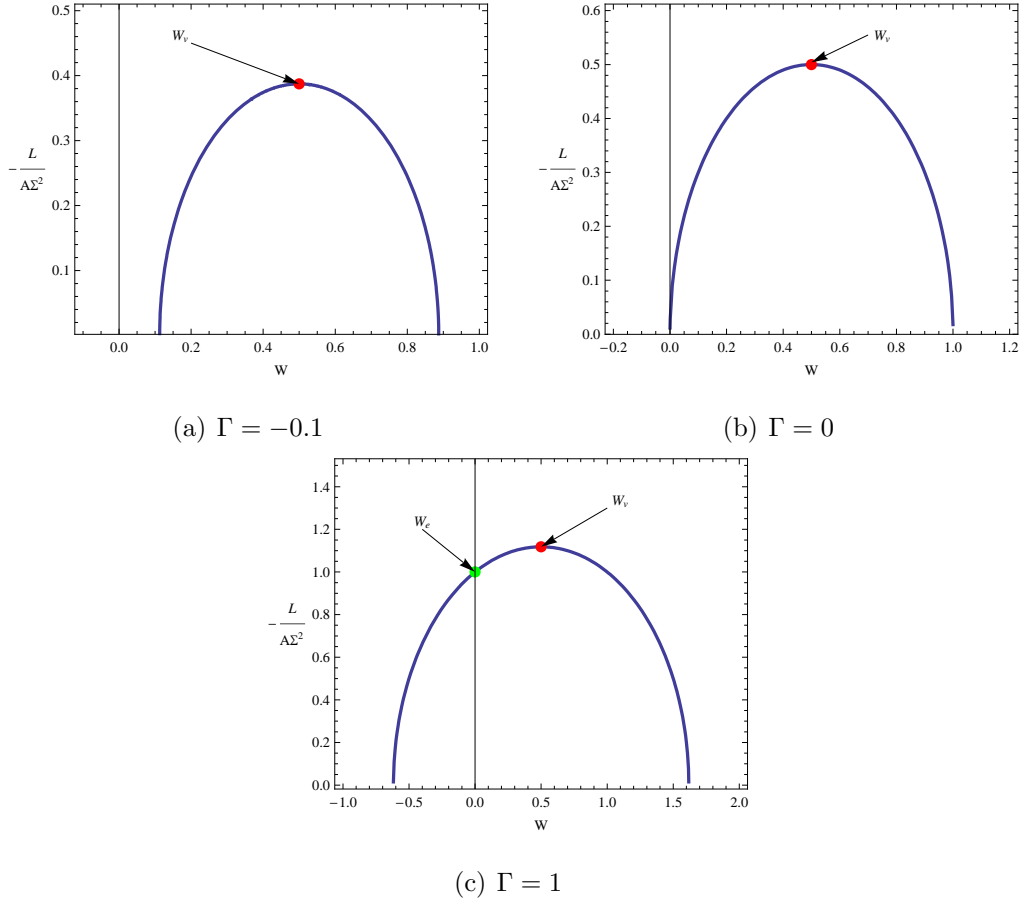


Figura 3.1: Dependência da Lagrangiana do modelo de Born-Infeld Estendido com $\beta > 0$ em relação a Γ .

É mais conveniente definir a quantidade adimensional

$$\rho' := \frac{\rho}{A\Sigma^2} = \frac{(W^2 + \Gamma)}{\sqrt{W(1 - W) + \Gamma}}. \quad (3.15)$$

Da mesma forma, a pressão pode ser escrita a partir de (3.9) como

$$p = -A\Sigma^2 \sqrt{W(1 - W) + \Gamma}, \quad (3.16)$$

ou, na sua forma adimensional

$$p' := \frac{p}{A\Sigma^2} = -\sqrt{W(1 - W) + \Gamma}. \quad (3.17)$$

Como ρ e p são funções somente de W , podemos inverter uma delas para encontrar $p' = p'(\rho')$. Entretanto, esta expressão é um tanto complicada e é mais conveniente

escrever ρ' em função de p' :

$$\rho' = -\frac{1 - 2p'^2 + 4\Gamma + \sqrt{1 - 4p'^2 + 4\Gamma}}{2p'}. \quad (3.18)$$

Note que, para o limite $p' \ll 1$, $p' \propto -1/\rho'$ e o campo escalar se comporta como gás de Chaplygin, de acordo com a equação (3.4).

A densidade de energia e a pressão no estado fundamental são dadas por

$$\rho'_v = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\Gamma} = -p'_v. \quad (3.19)$$

Na Figura 3.2 mostramos p' em função de ρ' no intervalo $W_{max} > W > W_v$, para vários valores de Γ . Já na Figura 3.3, apresentamos um gráfico da equação de estado para este mesmo intervalo, porém ρ e p estão normalizadas em relação a ρ_{MBI} e p_{MBI} do modelo de Milne-Born-Infeld [30], respectivamente, que corresponde a $\Gamma = 0$. Em ambas as figuras notamos que a equação de estado apresenta o comportamento típico de quartessência. Além disso, a curva é mais abrupta para valores altos de Γ . Esta última propriedade também se manifestará no comportamento da velocidade do som ao quadrado que será estudada na seção subsequente.

3.2.2 Velocidade do som

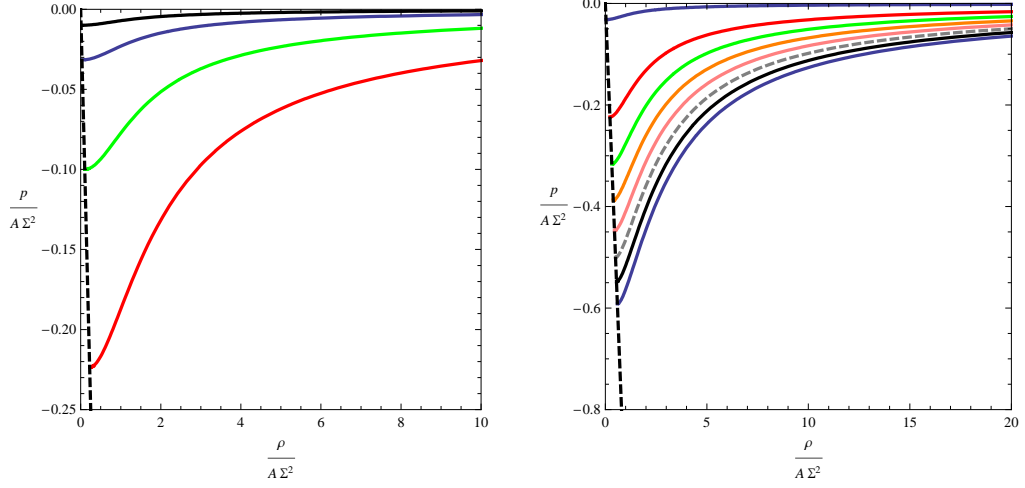
Uma quantidade importante que controla a evolução das perturbações de densidade e, em particular, a sua estabilidade é a velocidade do som, definida pela equação (A.72). No caso em que p é função só de ρ , ou seja, para o caso adiabático, esta quantidade é dada pela equação (A.74) e pode ser escrita como¹

$$c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{(\partial p / \partial X)}{(\partial \rho / \partial X)} = \frac{(\partial p' / \partial W)}{(\partial \rho' / \partial W)}, \quad (3.20)$$

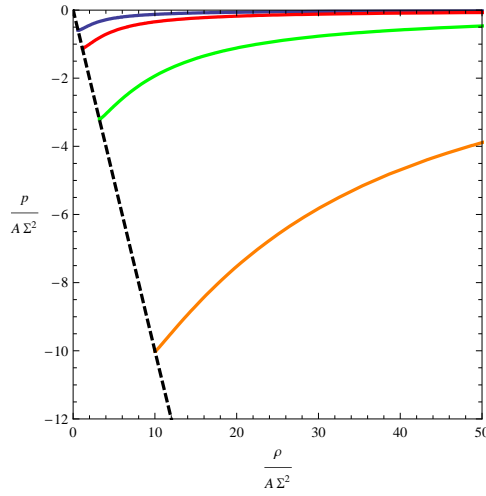
que para este caso do modelo fica

$$c_s^2 = \frac{(W^2 - W - \Gamma)(2W - 1)}{2W^3 - 3W^2 - 6\Gamma W + \Gamma}. \quad (3.21)$$

¹Mesmo no caso em que a Lagrangiana depende explicitamente de ϕ e X e no qual não podemos escrever p como função só de ρ (caso não adiabático), a velocidade do som ainda é dada pelo lado direito da equação (3.20) [35].



(a) De cima para baixo: $\Gamma = -0,2499$; $\Gamma = -0,249$; $\Gamma = -0,24$ e $\Gamma = -0,2$.
 (b) De cima para baixo: $\Gamma = -0,249$ e $\Gamma = 0,20$ a $\Gamma = 0,10$ em intervalos de $0,05$. A curva tracejada representa $\Gamma = 0$.



(c) De cima para baixo: $\Gamma = 0,1$; $\Gamma = 1$; $\Gamma = 10$ e $\Gamma = 100$.

Figura 3.2: Equação de estado para o modelo Born-Infeld Estendido com $\beta > 0$ para vários valores de Γ . A linha tracejada representa a equação de estado para o vácuo.

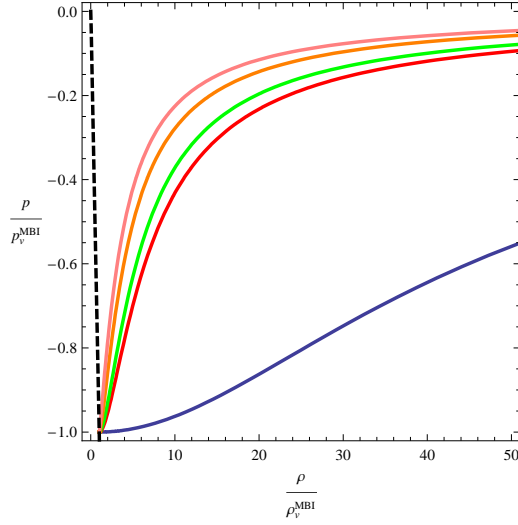


Figura 3.3: Equação de estado para o modelo Born-Infeld Estendido com $\beta > 0$ onde p e ρ são normalizadas por p e ρ do modelo Milne-Born-Infeld para vários valores de Γ : $\Gamma = -0,249$ (azul), $\Gamma = -0,12$ (vermelho), $\Gamma = 0$ (verde), $\Gamma = 1$ (laranja) e $\Gamma = 10$ (rosa). A linha tracejada mostra a equação de estado para o vácuo.

A Figura 3.4, mostra a velocidade do som ao quadrado c_s^2 em função de W no intervalo $W_{max} > W > W_v$, ou seja, da poeira para o estado de de Sitter. Verificamos que, neste intervalo, c_s^2 é sempre positiva, independentemente do valor de Γ (desde que este obviamente respeite a condição $\Gamma > -1/4$). Também podemos notar que nos extremos deste intervalo $c_s^2 = 0$.

O fato de c_s^2 ser positiva no intervalo $W_{max} > W > W_v$ implica que o fluido é mecanicamente estável neste intervalo, uma vez que $\partial p'/\partial \rho' > 0$. É interessante notar que no intervalo $W < W_v$, que corresponde ao comportamento fantasmagórico, o fluido é mecanicamente instável.

O valor máximo de c_s^2 é dado por

$$c_{s_{max}}^2 = \frac{-\sqrt{\Gamma(1+4\Gamma)} \left(1 + 8\Gamma + 4\sqrt{\Gamma(1+4\Gamma)}\right)^{1/3} \left(-1 + \left(1 + 8\Gamma + 4\sqrt{\Gamma(1+4\Gamma)}\right)^{1/3}\right)}{6\Gamma} + \frac{\left(1 - \left(1 + 8\Gamma + 4\sqrt{\Gamma(1+4\Gamma)}\right)^{1/3} + \left(1 + 8\Gamma + 4\sqrt{\Gamma(1+4\Gamma)}\right)^{2/3}\right)}{3} \quad (3.22)$$

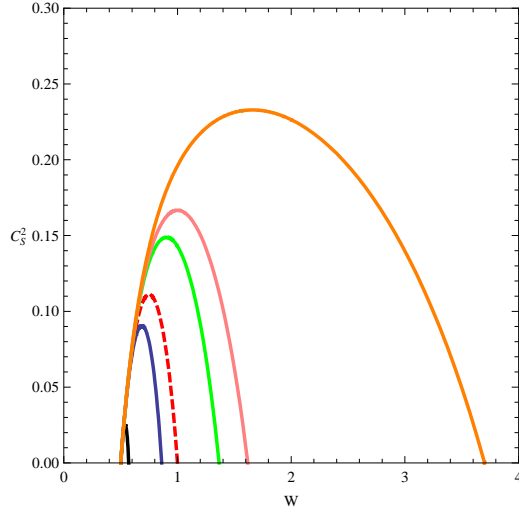


Figura 3.4: Velocidade do som ao quadrado c_s^2 em função de W no intervalo $W_{max} > W > W_v$, para os seguintes valores de Γ : $-0,245$; $-0,12$; 0 ; $0,05$; 1 e 10 (da curva inferior à superior, onde a curva tracejada representa $\Gamma = 0$).

e ocorre em

$$W_s = \frac{1}{4} + \frac{1}{4(1 + 8\Gamma + 4\sqrt{\Gamma + 4\Gamma^2})^{1/3}} + \frac{1}{4} \left(1 + 8\Gamma + 4\sqrt{\Gamma + 4\Gamma^2}\right)^{1/3}. \quad (3.23)$$

Na Figura 3.5 mostramos o comportamento de c_{smax}^2 em função de Γ . Verificamos também que, a partir de (3.22), $c_{smax}^2 \rightarrow 1/3$ quando $\Gamma \rightarrow \infty$.

Mostramos a velocidade do som ao quadrado em função da densidade de energia adimensional na Figura 3.6. É interessante apontar algumas características deste modelo relacionadas à velocidade do som. A mais importante é que, próximo ao estado de de Sitter (estado fundamental), a partir do qual todas as curvas iniciam, a velocidade do som é zero, independentemente do valor de Γ . Uma velocidade do som grande em um modelo é indesejada pois produz oscilações fortes no espectro da matéria fazendo com que este modelo seja incompatível com os dados atuais, como mencionado na seção 2.3.1. De acordo com as evidências de expansão acelerada, o Universo está atualmente se aproximando deste estado de de Sitter, então, é de se esperar que a velocidade do som no tempo atual derivada de um modelo que queira explicar tal fenômeno seja pequena, para evitar problemas relacionados à formação de estruturas. Isto está em contraste com a maioria

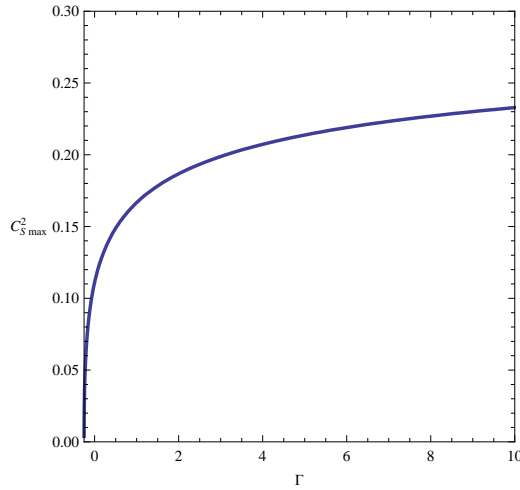


Figura 3.5: Velocidade do som ao quadrado máxima $c_{s,max}^2$ em função de Γ .

dos modelos de quartessência estudados na literatura, onde a velocidade do som máxima é atingida precisamente no estado de de Sitter (veja seção 2.3.2 onde a quartessência convexa é discutida).

O modelo Born-Infeld Estendido pode evitar este problema uma vez que a velocidade do som é significativa somente em um intervalo limitado de densidades de energia. Além disso, como era de se esperar, a velocidade do som se aproxima de zero no estado tipo poeira. Devido a estas características, que podem ser vistas na Figura 3.6, neste modelo existe a possibilidade interessante de a velocidade do som atingir seu valor máximo depois do início da aceleração da expansão, o que será discutido na seção 3.2.3.

Velocidade do som e o parâmetro da equação de estado

É útil ver como a velocidade do som evolui como função do parâmetro da equação de estado w , definida pela equação (2.7). Ambos c_s^2 e w aparecem nas equações de evolução de perturbações na representação de fluido [37, 38, 39, 40, 41]. A relação $c_s^2 \times w$ é importante pois permite realizar comparações deste modelo com outros modelos de quartessência.

Para este caso, temos

$$w = -\frac{W(1-W) + \Gamma}{W^2 + \Gamma}, \quad (3.24)$$

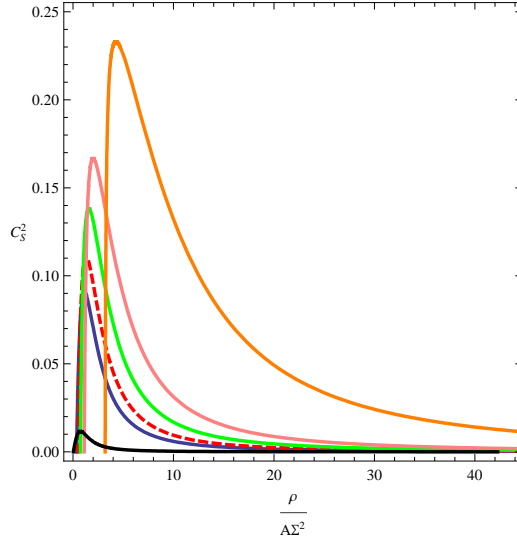


Figura 3.6: Velocidade do som ao quadrado c_s^2 em função de ρ' para os seguintes valores de Γ (de baixo para cima): $-0,24$; $-0,12$; 0 ; $0,3$; 1 e 10 , onde a curva tracejada representa $\Gamma = 0$.

de tal forma que podemos escrever c_s^2 como

$$c_s^2 = \frac{w \left(-1 + w + 4\Gamma(-1 + w + 2w^2) - 2w\sqrt{1 - 4\Gamma(-1 + w^2)} \right)}{1 - 3w + 4\Gamma(1 - 2w)^2(1 + w)}. \quad (3.25)$$

Na Figura 3.7 apresentamos c_s^2 como função de w para vários valores de Γ . Observamos que quanto mais negativos forem os valores de w quando ocorre o máximo da velocidade do som, maior é o valor de c_{smax}^2 . É importante ressaltar que, de acordo com a equação de Raychaudhuri para o caso homogêneo (A.81), em $w = -1/3$ a aceleração muda de sinal. Note que, no caso com $\Gamma = 0$, que corresponde ao modelo de Milne-Born-Infeld, o valor máximo da velocidade ocorre em $w = -1/3$.

3.2.3 A aceleração do Universo

De acordo com a equação de Raychaudhuri para o caso homogêneo (A.81), a aceleração do Universo é controlada pela densidade de energia e pela pressão. Usando as definições de ρ' e p' dadas por (3.15) e (3.17), respectivamente, a equação de Raychaudhuri é dada

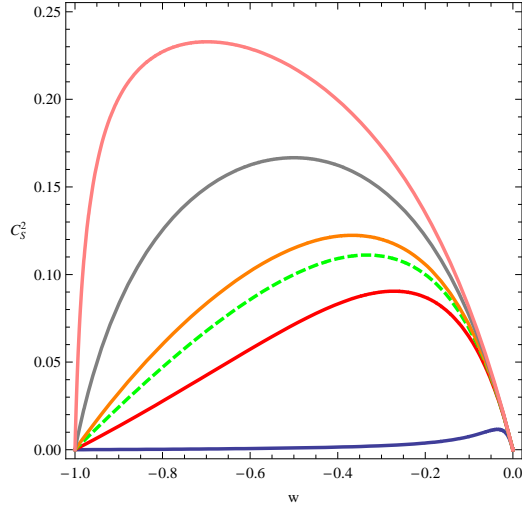


Figura 3.7: Velocidade do som ao quadrado c_s^2 em função do parâmetro da equação de estado w para os seguintes valores de Γ (de baixo para cima): $-0,249$; $-0,12$; 0 ; $0,1$; 1 e 10 , onde a curva tracejada representa $\Gamma = 0$.

para o Caso 1 do modelo por

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6} \left(\frac{4W^2 - 3W - 2\Gamma}{\sqrt{W - W^2 + \Gamma}} \right). \quad (3.26)$$

Começando com W próximo a W_{max} , ou seja, em um Universo dominado pela matéria, e indo em direção a W_v , vemos que a aceleração troca de sinal em

$$W_a = \frac{1}{8}(3 + \sqrt{9 + 3\Gamma}) \quad (3.27)$$

Apresentamos na Figura 3.8 W_a em função de Γ .

Se o campo escalar for o componente dominante da densidade de energia cosmológica, o Universo começará a acelerar quando W for próximo de W_a . Portanto, ao longo da transição entre um estado no qual a quartessência se comporta como poeira e outro no qual se comporta como vácuo, a expansão começa a acelerar, como esperado.

A Figura 3.9 mostra uma comparação entre W_s , valor no qual c_s^2 é máximo, e W_a , valor no qual a expansão começa a acelerar. Notamos que $W_a = W_s$ para $\Gamma = 0$. Para $\Gamma < 0$, W_a é menor do que W_s , indicando que c_s^2 atinge o seu valor máximo antes que a expansão comece a acelerar. Entretanto, quando a aceleração inicia, o valor de c_{smax}^2 é pequeno. Isto pode ser visto nas Figuras 3.7 e 3.10. Esta última figura mostra o comportamento

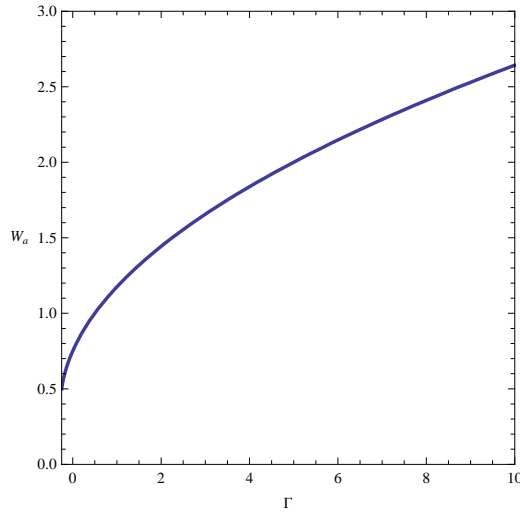


Figura 3.8: W_a em função de Γ .

de c_{smax}^2 e de c_s^2 no momento em que há troca de sinal da aceleração (W_a) em relação a Γ . O contrário acontece para $\Gamma > 0$, onde a aceleração inicia antes de c_s^2 atingir seu valor máximo. Porém, como é mostrado nas Figuras 3.7 e 3.10, tanto o valor de c_s^2 no momento em que a expansão começa a acelerar quanto o valor de c_{smax}^2 são altos nesta região de Γ e aumentam seu valor quando este também aumenta. De (3.21) e (3.8) verificamos que $c_s^2(W_a) \rightarrow 1/5$ quando $\Gamma \rightarrow \infty$, enquanto que, como visto anteriormente, $c_{smax}^2 \rightarrow 1/3$ neste mesmo limite de Γ .

3.2.4 Dinâmica de soluções espacialmente homogêneas

Vamos agora focar nossa atenção na dinâmica do modelo para configurações espacialmente homogêneas e isotrópicas. Neste caso, como discutido no Apêndice A, a dinâmica é determinada pela equação de Raychaudhuri (A.80) e pela equação de conservação de energia (A.70). Por simplicidade, consideramos um Universo composto somente pelo campo escalar (bárions serão adicionados no próximo capítulo) e escolhemos um sistema de unidades no qual $8\pi G = 1$. Estas considerações também serão usadas nas próximas seções.

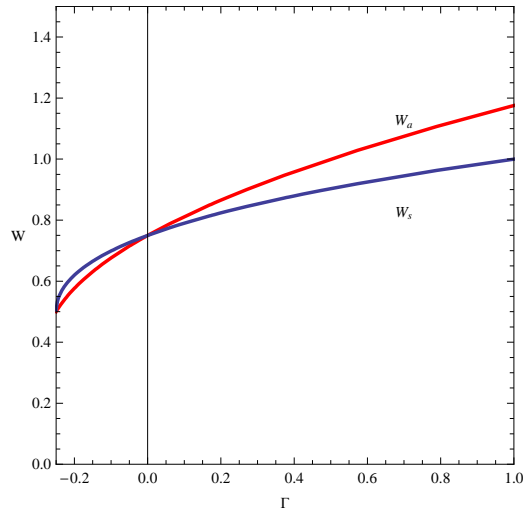


Figura 3.9: W_a e W_s em função de Γ . Ambos são iguais para $\Gamma = 0$.

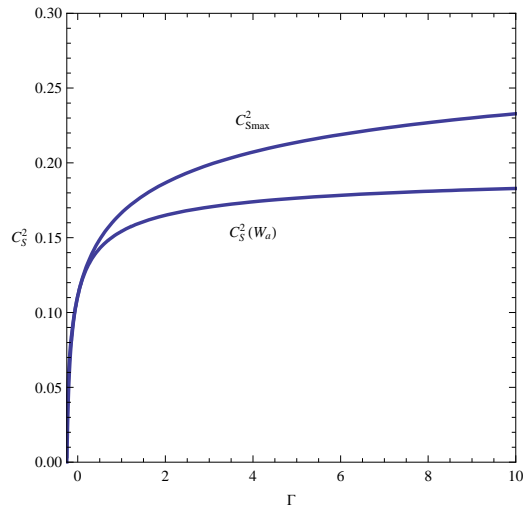


Figura 3.10: $c_s^2(W_a)$ e c_{smax}^2 em função de Γ .

Combinando as equações (A.80) e (A.70), obtemos o sistema dinâmico:

$$\frac{d\rho'}{dt} = F(\rho', \theta), \quad \frac{d\theta}{dt} = G(\rho', \theta), \quad (3.28)$$

com

$$F = -(\rho' + p')\theta = -\theta \frac{W(2W - 1)}{\sqrt{W - W^2 + \Gamma}}, \quad (3.29)$$

$$G = -\frac{1}{3}\theta^2 - \frac{1}{2}(\rho' + 3p') = -\frac{1}{3}\theta^2 + \frac{1}{2} \frac{3W - 4W^2 + 2\Gamma}{\sqrt{W - W^2 + \Gamma}}, \quad (3.30)$$

onde usamos as equações (3.15) e (3.17) para escrever ρ' e p' em função de W e para obter $W(\rho', \Gamma)$ invertemos a equação (3.15).

Encontramos os pontos estacionários $P(\rho', \theta)$ do sistema dinâmico (3.28)-(3.30). Dois deles correspondem ao estado fundamental W_v

$$P_1 = (\rho'_v, \sqrt{3\rho'_v}), \quad P_2 = (\rho'_v, -\sqrt{3\rho'_v}), \quad (3.31)$$

e outro corresponde a $\theta = 0$

$$P_3 = \left(\frac{3}{4} \sqrt{\frac{3}{2} + 8\Gamma + \frac{1}{2} \sqrt{9 + 32\Gamma}}, 0 \right), \quad (3.32)$$

onde ρ'_v é dado pela equação (3.19). Considerando o comportamento do sistema na vizinhança destes pontos verificamos que P_1 e P_2 são nós (estável e instável, respectivamente), enquanto que P_3 é um ponto de sela.

Nas Figuras 3.11 e 3.12 mostramos os diagramas de fase deste sistema no plano (ρ', θ) , bem como algumas trajetórias para valores de Γ distintos. A partir desta figura, podemos ver facilmente que qualquer trajetória que inicie com uma densidade menor do que a do estado fundamental permanecerá com $\rho' \leq \rho'_v$. Inversamente, trajetórias que iniciam com $\rho' > \rho'_v$, estão limitadas a ter $\rho' \geq \rho'_v$. É simples ver, a partir da equação de Friedmann (A.84), que a solução para o caso plano ($k = 0$) é $\rho = \theta^2/3$, a qual está representada na Figura 3.11 pela trajetória tracejada. Para o modelo de Milne-Born-Infeld estudado em [30], verificou-se que há uma trajetória que representa a solução de Milne, ou seja, com densidade de energia nula e expansão não nula.

A partir de agora, iremos nos concentrar no lado direito dos diagramas de fase das Figuras 3.11 e 3.12, referente a soluções em expansão. Como uma geometria aproximadamente plana é favorecida pelas atuais observações astrofísicas, iremos considerar somente

trajetórias próximas de $k = 0$. Da figura, claramente notamos que estas trajetórias terminam no estado fundamental P_1 . Em outras palavras, a solução de de Sitter é um atrator para as trajetórias de interesse cosmológico.

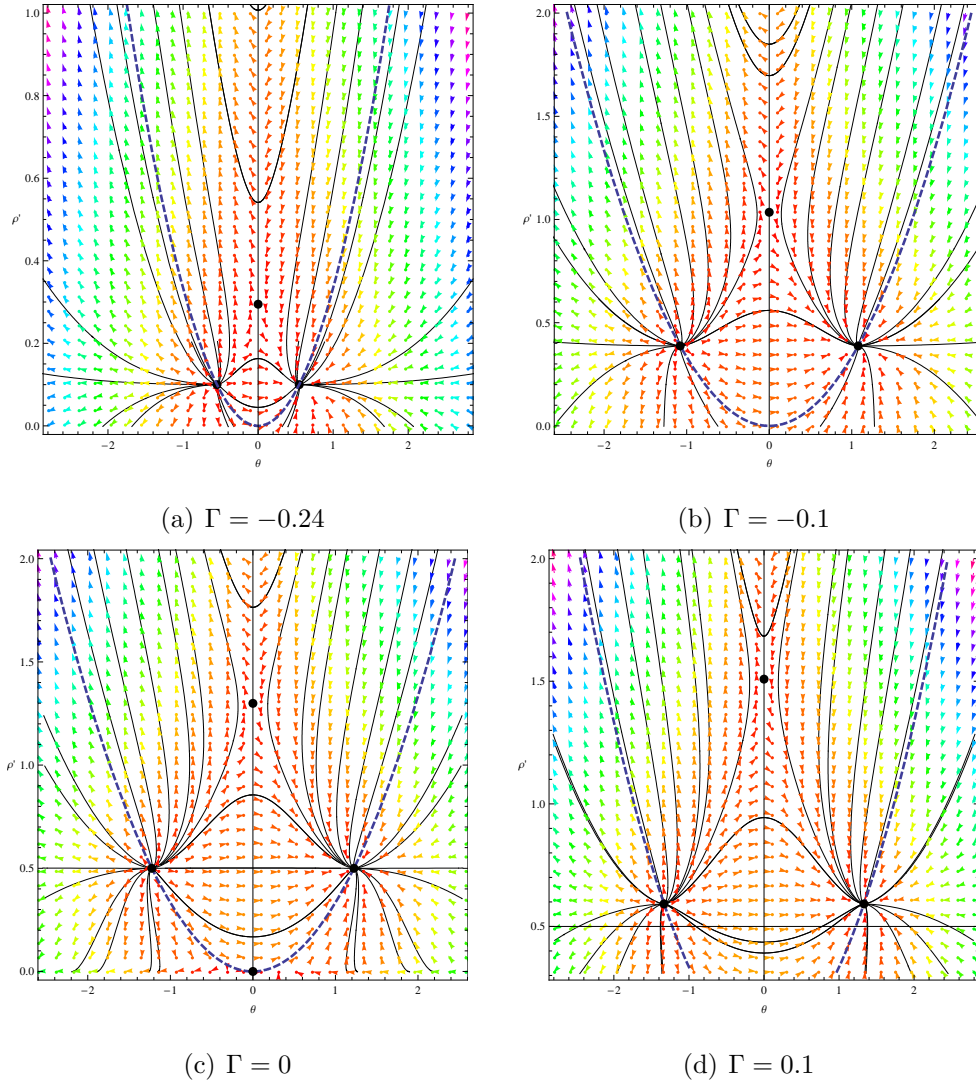


Figura 3.11: Diagramas de fase para o Caso 1 para vários valores de Γ .

3.3 Modelo de Born-Infeld Estendido com $\beta < 0$ - Caso 2

Nesta seção faremos o mesmo estudo que foi feito para o caso com $\beta > 0$, porém nos

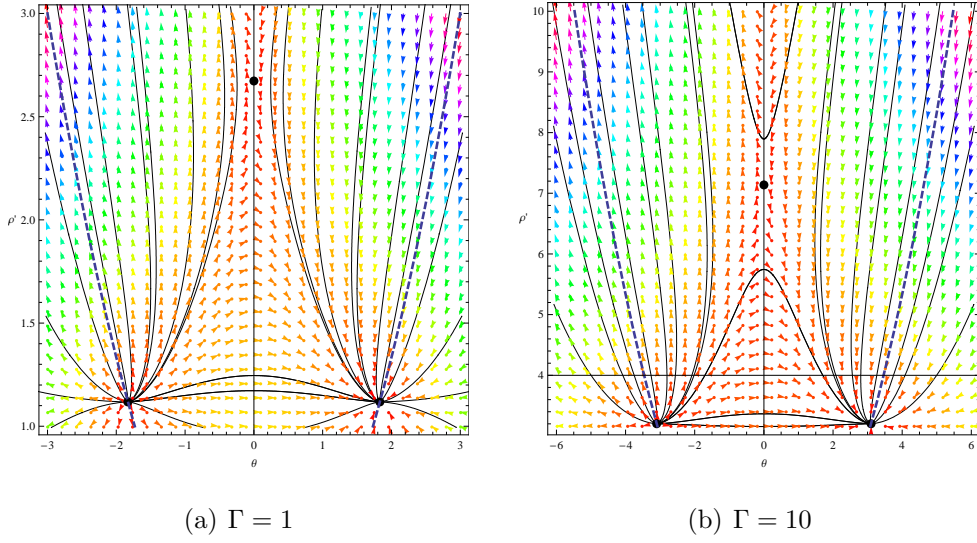


Figura 3.12: Diagramas de fase para o Caso 1 para vários valores de Γ .

restringiremos ao caso em que o sinal de β na Lagrangiana (3.5) é negativo. O sinal de α continua negativo e podemos escrever

$$\alpha = -|\alpha|, \quad \beta = -|\beta|$$

O sinal de γ é arbitrário. Assim, a Lagrangiana (3.5) é dada por

$$\mathcal{L} = -\sqrt{-|\alpha|X^2 - |\beta|X + \gamma}. \quad (3.33)$$

Como no caso anterior, é mais conveniente escrever a Lagrangiana acima em termos de variáveis adimensionais. Definimos

$$A := \sqrt{|\alpha|}, \quad \Sigma^2 := \frac{|\beta|}{|\alpha|}, \quad \Gamma := \frac{\gamma|\alpha|}{|\beta|^2} \quad \text{e} \quad W := \frac{X}{\Sigma^2}$$

e a Lagrangiana (3.33) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L} = -A\Sigma^2\sqrt{W(-1-W) + \Gamma}. \quad (3.34)$$

Para este caso, o espectro de valores admissíveis para W está contido no intervalo

$$W_{min} := -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+4\Gamma}}{2} < W < -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4\Gamma}}{2} := W_{max}.$$

O estado fundamental corresponde a $W_v = -1/2$ e o novo estado de vácuo corresponde a $W_e = 0$. Novamente, temos a restrição $\Gamma > -1/4$.

Apresentamos na Figura 3.13 o comportamento da Lagrangiana (3.34) para três valores de Γ . O vácuo $W_e = 0$ é o vácuo relevante porque, iniciando em um estado de poeira (W_{max}), ele é o primeiro a ser atingido. Além disso, precisamos ter $W > 0$, visto que W é proporcional $\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}$ e que o gradiente do campo normalizado é interpretado como uma 4-velocidade (veja a equação 2.5). Em virtude disto, só consideraremos o caso com Γ positivos. Portanto, para que o campo escalar se comporte como quartessência W deve estar contido no intervalo $W_{max} > W > W_e$ e Γ deve ser positivo.

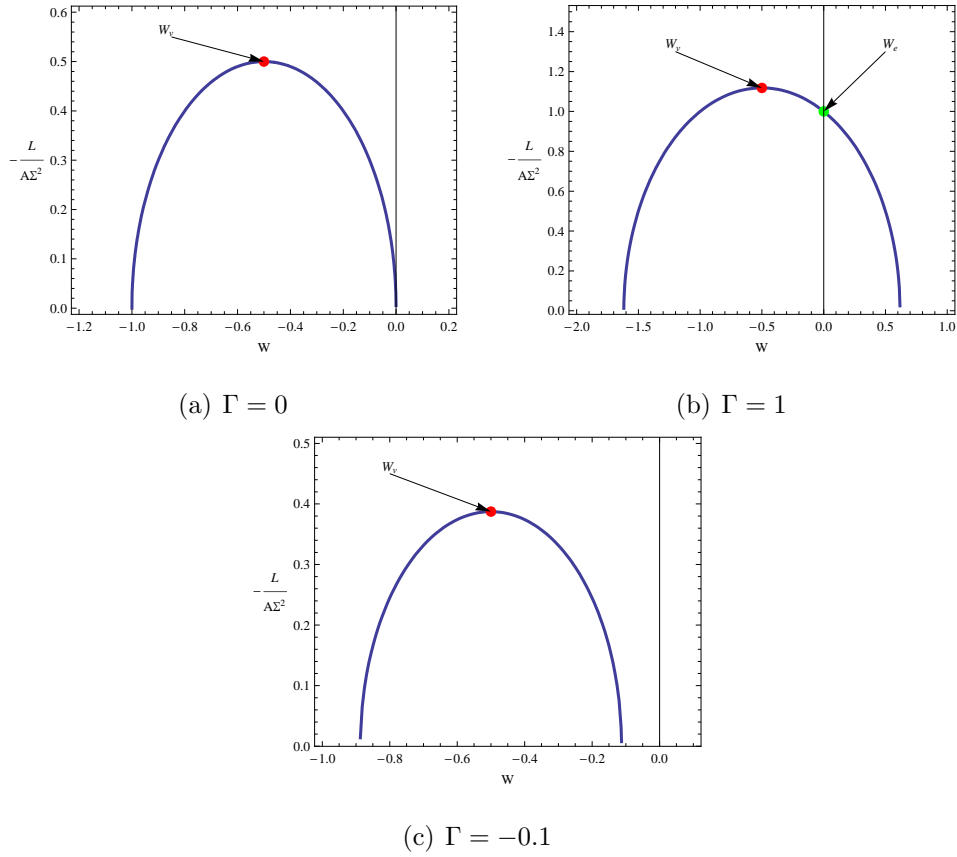


Figura 3.13: Dependência da Lagrangiana do modelo de Born-Infeld Estendido com $\beta < 0$ em relação a Γ .

3.3.1 Equação de estado

A densidade de energia adimensional pode ser escrita, a partir de (3.8), como

$$\rho' := \frac{\rho}{A\Sigma^2} = \frac{(W^2 + \Gamma)}{\sqrt{W(-1 - W) + \Gamma}}. \quad (3.35)$$

Da mesma forma, a partir de (3.9), a pressão adimensional pode ser escrita como

$$p' := \frac{p}{A\Sigma^2} = -\sqrt{W(-1 - W) + \Gamma}. \quad (3.36)$$

Note as diferenças de sinal nas expressões acima em relação às apresentadas em (3.15) e (3.17).

Com isso, já podemos determinar a equação de estado, que, por simplicidade será escrita na forma $\rho'(p')$

$$\rho' = \frac{-1 + 2p'^2 - 4\Gamma + \sqrt{1 - 4p'^2 + 4\Gamma}}{2p'}. \quad (3.37)$$

Novamente, obtemos o limite de gás de Chaplygin $p' \propto -1/\rho'$ para $p' \ll 1$. (veja equação 3.4).

A densidade de energia e pressão no estado fundamental serão dadas agora por

$$\rho'_v = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\Gamma} = -p'_v, \quad (3.38)$$

e para o estado de vácuo com $W_e = 0$ são dadas por

$$\rho'_e = \sqrt{\Gamma} = -p'_e. \quad (3.39)$$

No entanto, como discutido na seção anterior, W_e será o vácuo físico atingido.

Na Figura 3.14 mostramos p' em função de ρ' no intervalo $W_{max} > W > 0$, para vários valores positivos de Γ . Como no caso com $\beta > 0$, a curva que representa a equação de estado tem uma forma mais abrupta para valores altos de Γ . A diferença em relação ao caso anterior é a inclinação com a qual a curva atinge a reta tracejada. Isto será refletido no comportamento de c_s^2 , que será estudado na próxima seção.

3.3.2 Velocidade do som

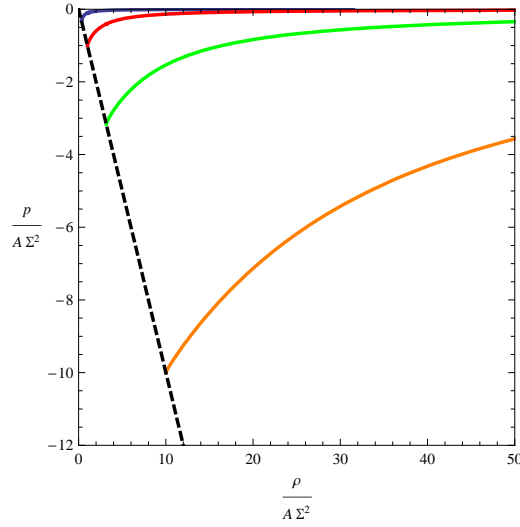


Figura 3.14: Equação de estado para o modelo Born-Infeld Estendido com $\beta < 0$ para os seguintes valores de Γ (da curva superior à inferior): 0, 1 ; 1 ; 10 ; 100. A reta tracejada representa a equação de estado para o vácuo.

De acordo com a equação (3.20) discutida na seção 3.2.2, a velocidade do som ao quadrado é dada neste caso por

$$c_s^2 = \frac{(W^2 + W - \Gamma)(2W + 1)}{2W^3 + 3W^2 - 6\Gamma W - \Gamma} \quad (3.40)$$

Na Figura 3.15 mostramos c_s^2 em função de W no intervalo $W_{max} > W > W_e$, ou seja, da poeira para o estado de de Sitter, para valores de Γ positivos. Verificamos que, neste intervalo, c_s^2 é sempre positiva, independentemente do valor de Γ . Para W_{max} , c_s^2 é sempre nula, independente de Γ . Entretanto, no outro extremo do intervalo, em W_e , $c_s^2 = 1$, atingindo seu valor máximo. Isto pode ser visto a partir do comportamento da curva $p' \times \rho'$ da Figura 3.14, onde a derivada de p' em relação a ρ' é máxima quando o estado de vácuo W_e (linha tracejada) é atingido. Assim vemos que este novo estado de vácuo apresenta propriedades qualitativamente distintas do vácuo que caracteriza o estado fundamental do caso anterior.

Portanto, o valor máximo de c_s^2 agora é 1 e ocorre em $W_e = 0$. Esta é uma importante desvantagem do modelo, mas é interessante relacionar isto com W_a , no qual a expansão acelerada inicia. Os pontos na Figura 3.15 indicam o valor de W_a para cada valor de Γ .

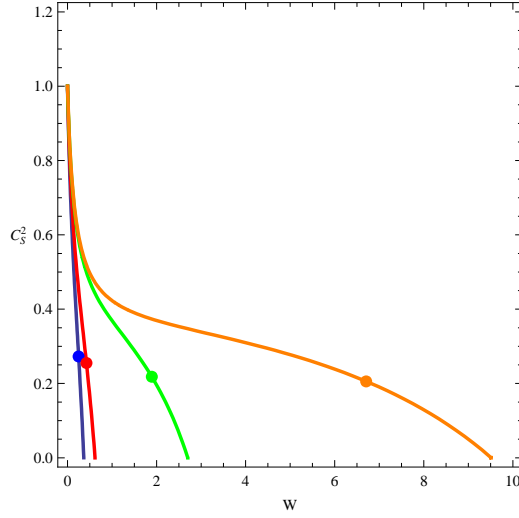


Figura 3.15: Velocidade do som ao quadrado c_s^2 em função de W para os seguintes valores de Γ : 0 ; 0,5 ; 1 ; 10 ; 100 (da esquerda para a direita).

Vemos que a expansão começa a acelerar antes de c_s^2 atingir o seu valor máximo.

Na Figura 3.16 mostramos c_s^2 em função de ρ' no intervalo $W_{max} > W > W_e$, para Γ positivos distintos. Vemos que quando ρ' se aproxima de $\rho'_e = \sqrt{\Gamma}$, c_s^2 se aproxima de 1. Seguindo a interpretação da figura anterior, isto provém do comportamento da curva $p' \times \rho'$ na Figura 3.14, onde a derivada de p' em relação a ρ' é máxima quando o estado de vácuo onde W_e (linha tracejada) é atingido. Este comportamento no qual c_{smax}^2 ocorre em $p = -\rho$ é típico de modelos de quartessência convexa [43], que foi discutida na seção 2.3.2.

Velocidade do som e o parâmetro da equação de estado

Novamente estudaremos como a velocidade do som ao quadrado c_s^2 evolui como função do parâmetro da equação de estado w . Para este caso, o parâmetro da equação de estado é dado por

$$w = -\frac{W(-1-W) + \Gamma}{W^2 + \Gamma}, \quad (3.41)$$

de tal forma que podemos escrever c_s^2 como

$$c_s^2 = \frac{w \left(-1 + w + 4\Gamma(-1 + w + 2w^2) + 2w\sqrt{1 - 4\Gamma(-1 + w^2)} \right)}{1 - 3w + 4\Gamma(1 - 2w)^2(1 + w)} \quad (3.42)$$

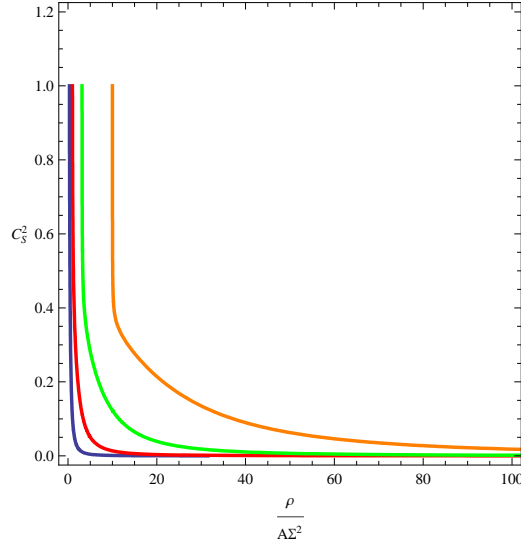


Figura 3.16: Velocidade do som ao quadrado c_s^2 em função de ρ' para os seguintes valores de Γ : 0, 1 ; 1 ; 10 ; 100 (da esquerda para a direita).

Apresentamos na Figura 3.17, um gráfico de c_s^2 como função de w para vários valores de Γ . O comportamento de c_s^2 em relação a w é claramente distinto daquele do caso anterior e reflete o fato de que o caso com $\beta < 0$ é quartessência do tipo convexa. Notamos que no limite $\Gamma \rightarrow 0$, a curva é idêntica à do gás de Chaplygin.

3.3.3 A aceleração do Universo

Da mesma forma que para o Caso 1, determinamos a aceleração do Universo através da equação de Raychaudhuri para o caso homogêneo (A.81), para verificar quando esta troca de sinal. Obtemos para o Caso 2

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6} \left(\frac{4W^2 + 3W - 2\Gamma}{\sqrt{-W - W^2 + \Gamma}} \right). \quad (3.43)$$

Começando com W próximo a W_{max} , ou seja, em um Universo dominado pela matéria, e indo em direção a W_e , vemos que a aceleração troca de sinal em

$$W_a = \frac{1}{8}(-3 + \sqrt{9 + 3\Gamma}). \quad (3.44)$$

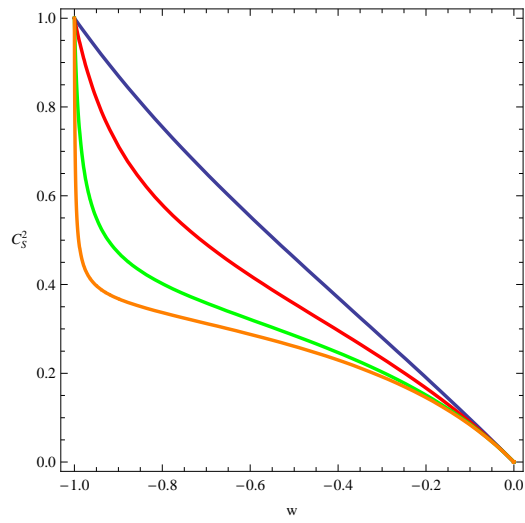


Figura 3.17: Velocidade do som ao quadrado c_s^2 em função do parâmetro da equação de estado w para os seguintes valores de Γ (da curva inferior à superior): 0, 1 ; 1 ; 10.

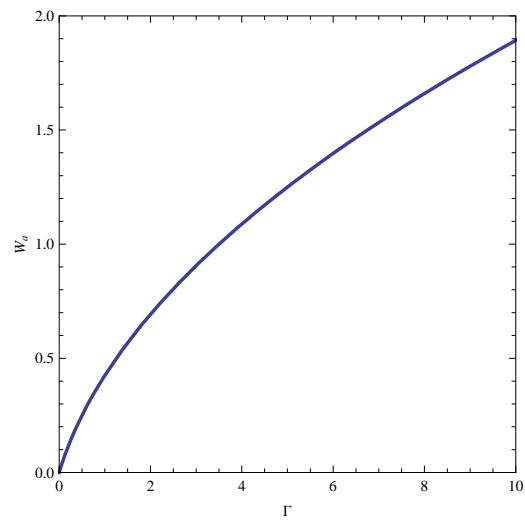


Figura 3.18: W_a em função de Γ .

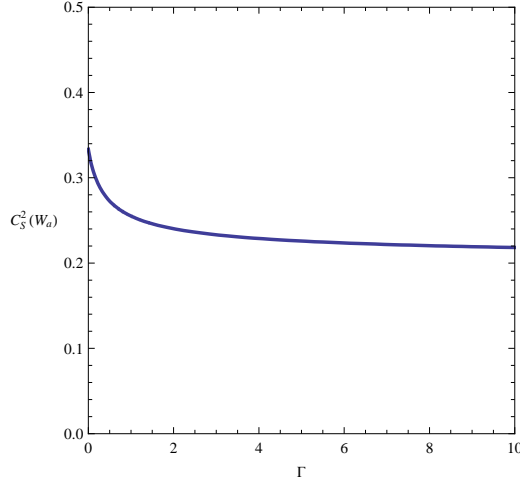


Figura 3.19: $c_s^2(W_a)$ em função de Γ .

Vemos na Figura 3.18 o comportamento de W_a em função de Γ no intervalo permitido para Γ neste caso. Se o campo escalar for o componente dominante da densidade de energia cosmológica, o Universo começará a acelerar quando W é próximo de W_a . Portanto, ao longo da transição de um Universo com poeira para um Universo de de Sitter, a expansão começa a acelerar, como esperado.

Na Figurar 3.19 mostramos c_s^2 em W_a , onde há troca de sinal da aceleração, em função de Γ . Verificamos que para $\Gamma \rightarrow \infty$, $c_s^2(W_a) \rightarrow 1/5$, enquanto que no limite $\Gamma \rightarrow 0$ temos $c_s^2(W_a) \rightarrow 1/3$.

3.3.4 Dinâmica de soluções espacialmente homogêneas

O sistema dinâmico obtido combinando-se as equações (A.80) e (A.70) para este caso é

$$\frac{d\rho'}{dt} = F(\rho', \theta), \quad \frac{d\theta}{dt} = G(\rho', \theta), \quad (3.45)$$

com

$$F = -\theta \frac{W(2W + 1)}{\sqrt{-W - W^2 + \Gamma}}, \quad (3.46)$$

$$G = -\frac{1}{3}\theta^2 + \frac{1}{2} \frac{3W + 4W^2 - 2\Gamma}{\sqrt{-W - W^2 + \Gamma}}. \quad (3.47)$$

Para obter $W = W(\rho', \Gamma)$ invertamos a equação (3.35).

Encontramos os pontos estacionários $P(\rho', \theta)$, sendo que dois deles correspondem ao estado de vácuo W_e ,

$$P_1 = (\rho'_e, \sqrt{3\rho'_e}), \quad P_2 = (\rho'_e, -\sqrt{3\rho'_e}), \quad (3.48)$$

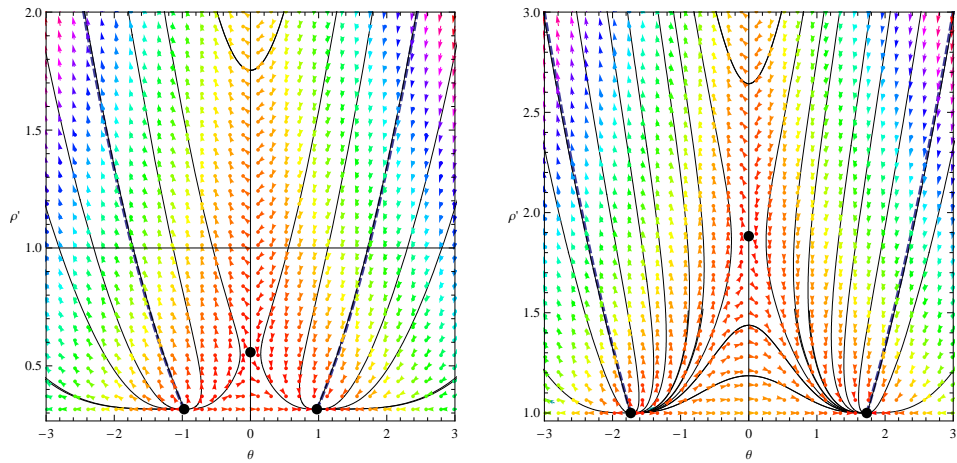
e um corresponde a $\theta = 0$

$$P_3 = \left(\frac{3}{4} \sqrt{\frac{3}{2} + 8\Gamma - \frac{1}{2} \sqrt{9 + 32\Gamma}}, 0 \right) \quad (3.49)$$

onde ρ'_e é dado pela equação (3.39). Considerando o comportamento do sistema na vizinhança destes pontos vemos que P_1 e P_2 são nós (estável e instável, respectivamente), enquanto que P_3 é um ponto de sela.

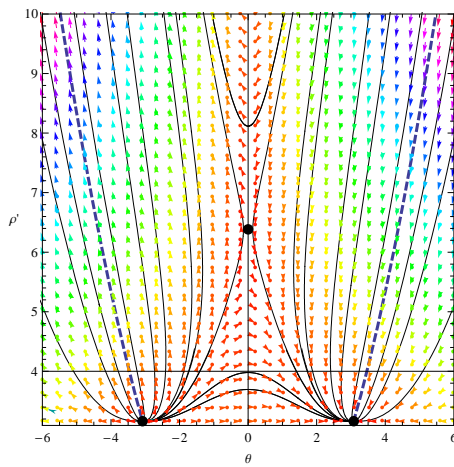
Na Figura 3.20 mostramos os diagramas de fase deste sistema no plano (ρ', θ) , bem como algumas trajetórias para valores de Γ positivos distintos. A partir desta figura, podemos ver facilmente que qualquer trajetória que inicie com uma densidade maior do que a do estado com W_e permanecerá com $\rho' \geq \rho'_e$. Novamente, a solução da equação de Friedmann para o caso plano ($k = 0$) está representada pela trajetória tracejada.

Como no caso anterior, iremos nos concentrar no lado direito dos diagramas de fase da Figura 3.20, referente a soluções que apresentam expansão. As trajetórias próximas da solução com $k = 0$, que é favorecida pelas observações astrofísicas, terminam sempre no estado com W_e , representado por P_1 . Em outras palavras, a solução de de Sitter é um atrator para as trajetórias de interesse cosmológico.



(a) $\Gamma = 0.1$

(b) $\Gamma = 1$



(c) $\Gamma = 10$

Figura 3.20: Diagramas de fase para o Caso 2 para diferentes valores de Γ .

Capítulo 4

Limites observacionais a partir Supernovas do tipo Ia no modelo de Born-Infeld Estendido

Vários modelos para a energia escura e para a unificação da matéria e energia escuras foram citados nos capítulos anteriores. Cada um destes modelos apresenta uma forma específica para o parâmetro de Hubble em função do desvio para o vermelho, $H(z)$, o que leva a diferentes expressões para a distância de luminosidade. Portanto, a determinação da distância de luminosidade, d_L , pode ser utilizada para testar a compatibilidade desses modelos com os dados observacionais e também para fazer uma discriminação entre eles.

Para determinar observacionalmente a distância de luminosidade são necessários indicadores de distância: objetos astronômicos para os quais é possível determinar a sua luminosidade absoluta. Um indicador de distância muito utilizado são as Supernovas do tipo Ia (SnIa). Estes objetos podem ser observados a altos desvios para o vermelho e são tão luminosos quanto as próprias galáxias que os hospedam. Além disto, as SnIa são velas padronizáveis e possuem propriedades bastante homogêneas.

Neste capítulo obteremos a expressão da distância de luminosidade do modelo de Born-Infeld Estendido para compará-la com as distâncias de luminosidades inferidas a partir de observações atuais de SnIa e, dessa forma, poder impor limites sobre os parâmetros deste

modelo. Também apresentaremos a análise estatística utilizada para limitar os parâmetros e construir os seus intervalos de confiança. Finalmente discutiremos os resultados obtidos com esta análise.

4.1 Propagação da luz e o desvio para o vermelho

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades da propagação da luz, definiremos o desvio para o vermelho em função do fator de escala e faremos uma conexão entre observável e modelo.

Considere um objeto cosmológico que emite um sinal luminoso no instante t_e que é detectado por um observador em um instante de tempo t_0 posterior. Escolhendo a posição do observador como a origem do sistema de coordenadas da métrica (A.75) e notando que fótons seguem geodésicas nulas ($ds = 0$), a trajetória dos fótons será radial, o que nos permite escrever

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r_e), \quad (4.1)$$

onde

$$f(r_e) = \begin{cases} \frac{\arcsen(\sqrt{kr_e})}{\sqrt{k}}, & \text{se } k > 0 \\ r_e, & \text{se } k = 0 \\ \frac{\text{arcsenh}(\sqrt{kr_e})}{\sqrt{k}}, & \text{se } k < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Consideraremos t_0 como o tempo atual medido pelo observador. Todas as quantidades que possuírem o subscrito 0 são medidas para este tempo.

Um sinal luminoso emitido em $t_e + \Delta t_e$ será detectado em $t_0 + \Delta t_0$ e, a partir de (4.1), podemos escrever

$$\int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (4.3)$$

uma vez que a coordenada r não muda, pois é uma coordenada comovente.

Subtraindo a equação (4.1) de (4.3) temos

$$\int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{t_e}^{t_e + \Delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (4.4)$$

Se Δt for o período típico de um sinal de luz, ou seja, o tempo entre duas cristas consecutivas da onda, que é da ordem de $10^{-14}s$ e notando que $a(t)$ não muda durante este intervalo Δt , a relação (4.4) leva a [61]

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}. \quad (4.5)$$

Sabendo que a frequência é inversamente proporcional ao período, podemos usar (4.5) para relacionar a frequência ν_0 observada com a frequência emitida ν_e da seguinte forma

$$\frac{\nu_0}{\nu_e} = \frac{\Delta t_e}{\Delta t_0} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)}. \quad (4.6)$$

O desvio para o vermelho z é definido por

$$z_e := \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (4.7)$$

onde o subscrito e foi colocado para indicar que este desvio para o vermelho refere-se à fonte luminosa que emite o sinal no tempo t_e . Como o comprimento de onda λ é inversamente proporcional à frequência ν , podemos reescrevê-lo como

$$z_e = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} - 1. \quad (4.8)$$

Para um tempo arbitrário t , teremos

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1. \quad (4.9)$$

Como o desvio para o vermelho é uma quantidade física que pode ser medida observacionalmente, esta equação nos dá uma relação entre um parâmetro modelo, através de $a(t)$, e um observável.

4.2 Distância de luminosidade

Considere um objeto com uma luminosidade absoluta L (energia emitida por unidade de tempo). Considere também um observador situado a uma distância d deste objeto.

Então, se a emissão de radiação é isotrópica, o fluxo de energia F (energia por unidade de tempo por unidade de área) detectado pelo observador, será

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}. \quad (4.10)$$

Em um Universo Euclidiano estático, não há ambigüidade na definição da distância d . No entanto, na Relatividade Geral não há uma definição unívoca de distância finita. Em geral, apenas distâncias infinitesimais são definidas de forma covariante. Entretanto, podemos definir distâncias adequadas a cada processo de medida. Se este processo envolver velas padrão, então é apropriado definir a distância de luminosidade, d_L , a partir da relação (4.10), como

$$d_L := \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}. \quad (4.11)$$

Dado um objeto com luminosidade L no tempo t_e , o fluxo integrado em uma casca esférica de raio r_e centrada neste objeto, será dado por

$$L' = AF, \quad (4.12)$$

onde A é a área da casca esférica e F o fluxo medido pelo observador situado à distância r_e no tempo t_e .

Em um Universo em expansão, cujo elemento de linha é dado por (A.75), a área é

$$A(t_0) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2(t_0)r_e^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 4\pi a^2(t_0)r_e^2. \quad (4.13)$$

Dessa forma, a equação (4.12) fica

$$L' = 4\pi a^2(t_0)r_e^2 F. \quad (4.14)$$

Agora vamos comparar L' e L para poder encontrar uma expressão para a distância de luminosidade em um Universo em expansão.

Da definição de luminosidade temos

$$L = \frac{dE_e}{dt_e} = \frac{d(N\epsilon_e)}{dt_e}, \quad (4.15)$$

onde N é o número de fótons e ϵ é a energia de cada fóton¹, dada por $\epsilon = h\nu$. Como o número de fótons é conservado, podemos escrever L' como

$$L' = \frac{dE_0}{dt_0} = \frac{d(N\epsilon_0)}{dt_0}. \quad (4.16)$$

Assim, conectando ϵ_e a ϵ_0 e dt_e a dt_0 , segundo as equações (4.5) e (4.6) obtemos

$$L' = \left(\frac{a(t_e)}{a(t_0)} \right)^2 L. \quad (4.17)$$

Isto significa que a luminosidade L' inferida a partir do fluxo F medido pelo observador, sofre uma redução de um fator $(a(t_e)/a(t_0))^2$ em relação à luminosidade emitida, já que $a(t_e) < a(t_0)$. Este fator, pode ser escrito como $(1+z)^{-2}$, a partir de (4.8).

Então, da definição de d_L (4.11) e utilizando as equações (4.14) e (4.17), encontramos que a distância de luminosidade em um Universo em expansão é dada por

$$d_L(z) = a(t_0)(1+z)r_e. \quad (4.18)$$

Entretanto, a distância de luminosidade $d_L(z)$ deve ser escrita somente em termos de quantidades observáveis independentemente do sistema de coordenadas. Assim, é preciso reescrever o termo $a(t_0)r_e$. Para isso usaremos o resultado obtido anteriormente para os fótons que viajam em geodésicas nulas radiais, dado por (4.1) e (4.2). Podemos reescrever a integral à esquerda de (4.1), que será denotada por χ , como

$$\chi := \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{a(t_0)} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (4.19)$$

onde usamos a relação entre a e z dada por (4.9) e a definição $H := \dot{a}/a$. A quantidade χ é chamada distância própria.

Dessa forma, de (4.1) e (4.2)

$$\chi = f(r_e) \quad \rightarrow \quad \sqrt{k}r_e = \text{sen}_k(\sqrt{k}\chi), \quad (4.20)$$

onde

$$\text{sen}_k(x) = \begin{cases} \text{sen}(x), & \text{se } k > 0 \\ x, & \text{se } k = 0 \\ \text{senh}(x), & \text{se } k < 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

¹Esta é uma visão simplificada pois pressupõe que todos os fótons emitidos possuem a mesma energia, quando sabemos que eles apresentam um espectro de energia. Entretanto, o mesmo argumento poderia ser usado no caso de uma distribuição, sem alterar os resultados.

Para expressar k em termos de quantidades observáveis, recorreremos à equação de Friedmann (A.84). Usando o resultado (A.86) aplicado para $t = t_0$ obtemos

$$\sqrt{k} = a(t_0)H_0\sqrt{\Omega_0 - 1}, \quad (4.22)$$

onde H_0 é a constante de Hubble e Ω_0 é o parâmetro de densidade atual.

De (4.20) e (4.22) podemos escrever

$$a(t_0)r_e = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_0 - 1}}\text{sen}_k \left(H_0\sqrt{\Omega_0 - 1} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right). \quad (4.23)$$

Finalmente, a distância de luminosidade será dada por

$$d_L(z) = (1+z) \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_0 - 1}}\text{sen}_k \left(H_0\sqrt{\Omega_0 - 1} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right) \quad (4.24)$$

e fica expressa somente em função de quantidades físicas independentes do sistema de coordenadas e que podem ser, em princípio, medidas observacionalmente.

Para determinar completamente a distância de luminosidade a partir de um modelo teórico é preciso calcular o parâmetro de Hubble $H(z)$ previsto por este. Com o auxílio da equação (4.9) podemos passar da variável z para a variável a . Assim, determinar $H(z)$ é equivalente a determinar $H(a)$, o que pode ser feito a partir da equação de Friedmann (A.84), que no caso de múltiplas componentes é escrita como

$$H^2(a) = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - \frac{k}{a^2} = H_0^2 \left(\sum_i \Omega_{i0} \frac{\rho_i}{\rho_{i0}} + \Omega_{k0} a^{-2} \right), \quad (4.25)$$

onde

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_{crit}} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_i \quad e \quad \Omega_{k0} = -\frac{k}{H_0^2}. \quad (4.26)$$

O subscrito i representa cada componente que contribui para a densidade de energia. A densidade de energia em função do fator de escala, $\rho(a)$, pode ser obtida a partir da equação da conservação de energia (A.82). Por exemplo, para a radiação temos

$$\frac{\rho_r}{\rho_{r0}} = \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4} \quad (4.27)$$

e para bárions

$$\frac{\rho_b}{\rho_{b0}} = \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3}. \quad (4.28)$$

A densidade de outra componente com equação de estado genérica será denotada por ρ_x para diferenciá-la das densidades de energia das outras componentes. Definimos

$$g_x(a) := \frac{\rho_x}{\rho_{x0}}, \quad (4.29)$$

e notamos que além do fator de escala, g_x também depende de outros parâmetros do modelo considerado para esta componente.

A contribuição da radiação para o parâmetro de Hubble (4.25) é desprezível para os desvios para o vermelho típicos de SnIa. Portanto, neste trabalho não incluiremos a contribuição da radiação e consideraremos apenas as contribuições da quartessência e de bárions.

Dessa forma, podemos reescrever o parâmetro de Hubble (4.25) como

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_{x0} g_x(a) + \Omega_{b0} a^{-3} + \Omega_{k0} a^{-2}}, \quad (4.30)$$

ou, usando a equação (4.9)

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{x0} g_x(z) + \Omega_{b0} (1+z)^3 + \Omega_{k0} (1+z)^2}, \quad (4.31)$$

onde

$$\Omega_{k0} = 1 - \Omega_0 = 1 - \Omega_{x0} - \Omega_{b0}. \quad (4.32)$$

Com isso determinamos completamente a distância de luminosidade prevista por um dado modelo teórico e, portanto, podemos compará-la com a distância de luminosidade observada para testar a consistência entre este modelo e as observações.

Entretanto, observacionalmente não se mede a distância de luminosidade diretamente. Ela é obtida a partir da magnitude aparente m medida e da magnitude absoluta M inferida. A magnitude absoluta é uma medida do brilho de um objeto astronômico e é definida como a magnitude aparente que este objeto teria se fosse visto a uma distância de 10 pc.

A diferença entre a magnitude aparente e a magnitude absoluta, que é chamada módulo de distância, é dada por

$$\mu := m - M = -2,5 \log_{10} \left[\frac{F(d_L)}{F(10\text{pc})} \right]. \quad (4.33)$$

Mas,

$$\frac{F(d_L)}{F(10\text{pc})} = \frac{\frac{L}{4\pi d_L^2}}{\frac{L}{4\pi(10\text{pc})^2}} = \left(\frac{10\text{pc}}{d_L}\right)^2. \quad (4.34)$$

Desta forma, o módulo de distância pode ser reescrito como

$$\mu = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{10\text{pc}} \right) = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{\text{Mpc}} \right) + 25. \quad (4.35)$$

4.3 Supernovas do tipo Ia

As Supernovas do tipo Ia são causadas por explosões termonucleares de uma anã branca e são caracterizadas pela ausência de hidrogênio em seu espectro. Elas ocorrem em anãs brancas que fazem parte de sistemas binários, no qual há transferência de massa da companheira, que preenche seu lóbulo de Roche² devido à expansão das camadas superiores ao longo de sua evolução, para a anã branca. Quando a anã branca atinge a massa limite de Schenberg-Chandrasekhar ($1,4M_{\odot}$), a pressão de degenerescência dos elétrons não é suficiente para suportar a gravidade, o que leva ao colapso e à subsequente expulsão das camadas externas em uma explosão que constitui a Supernova. A curva de luz, que é a variação da magnitude em função do tempo, apresenta um rápido aumento de até 9 magnitudes em um intervalo de tempo da ordem de dias e depois decai 3 ou 4 magnitudes em algumas semanas.

Esse tipo de Supernova pode proporcionar bons indicadores de distância para a Cosmologia devido ao seu caráter de vela padronizável. Por um lado, suas propriedades são bastante homogêneas e sua magnitude máxima é muito semelhante. Por outro lado, aplicando um fator de correção, as suas curvas de luz coincidem, dentro de suas margens de erro. De fato, em [7] verificou-se, para SnIa próximas, que existe uma dependência de um fator de esticamento na luminosidade absoluta da SnIa. As curvas de luz mais largas, que decrescem vagarosamente, correspondem a SnIa mais brilhantes, enquanto que as curvas de luz mais estreitas e que decrescem rapidamente, correspondem a SnIa mais

²O lóbulo de Roche delimita o volume em volta de um objeto dentro do qual a matéria está gravitacionalmente ligada a ele.

fracas. Mostou-se que contraindo as curvas de luz mais amplas enquanto o pico de luminosidade é reduzido e esticando curvas de luz mais estreitas enquanto aumenta-se o pico de luminosidade faz com que estas curvas fiquem iguais. Além do fator de esticamento, são levados em conta a extinção na radiação emitida provocada pelo meio intergaláctico e outras correções. Através deste processo, o pico de magnitude pode ser normalizado, tornando as SnIa velas padrão.

Uma dificuldade em usar SnIa é o problema da sua detecção, pois são eventos muito raros. Por exemplo, em galáxias espirais massivas, ocorrem à uma taxa aproximada de uma a cada 100 anos. Então, é importante desenvolver estratégias eficientes de busca por estes objetos. O método usado pelos projetos de busca de SnIa consiste em observar regiões do céu em dois momentos diferentes e subtrair as imagens. Uma vez que é descoberto uma SnIa, sua curva de luz é medida, assim como seu desvio para o vermelho ou o de sua galáxia hospedeira.

4.4 Estimativa dos parâmetros e intervalos de confiança para dados de Supernova do tipo Ia

Considere um conjunto de dados de N Supernovas contendo medidas dos módulos de distância $\mu_{obs,i}$ ($i = 1, \dots, N$), suas incertezas estimadas σ_i e os desvios para o vermelho z_i . Denotando $\mu_{t,i}$ como o módulo de distância teórico previsto por um dado modelo e dado pela equação (4.35), que depende do desvio para o vermelho z e de um conjunto de M parâmetros $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1, \dots, \theta_M)$, cujos valores são desconhecidos.

Supondo que as medidas $\mu_{obs,i}$ para cada z_i são independentes e que obedecem a uma distribuição gaussiana, a função verossimilhança $L(\boldsymbol{\theta})$ é dada pela função densidade de probabilidade conjunta, ou seja, pelo produto de N gaussianas [62]

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(\mu_{obs,i}(z_i) - \mu_{t,i}(z_i, \boldsymbol{\theta}))^2}{2\sigma_i^2}\right). \quad (4.36)$$

Tomando o logaritmo da função verossimilhança acima e ignorando os termos aditivos

que não dependem dos parâmetros, temos

$$\log L(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_{obs,i}(z_i) - \mu_{t,i}(z_i, \boldsymbol{\theta}))^2}{\sigma_i^2}. \quad (4.37)$$

Para estimar os valores dos parâmetros que fornecem o melhor ajuste para os dados, denotados por $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, devemos maximizar a função $L(\boldsymbol{\theta})$, o que é equivalente a minimizar a quantidade

$$\chi^2 := -2 \log L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_{obs,i}(z_i) - \mu_{t,i}(z_i, \boldsymbol{\theta}))^2}{\sigma_i^2}. \quad (4.38)$$

Geralmente utiliza-se o χ^2 dividido pelo número de graus de liberdade n_l (o número de dados observados N menos o número de parâmetros independentes ν) como uma medida da concordância entre o modelo e os dados. Se este valor for próximo da unidade, então o ajuste é considerado bom e os dados consistentes com o modelo. Se χ^2/n_l for muito menor do que um, então o ajuste é melhor do que o esperado dados os erros medidos. Isto não pode ser usado como uma evidência contrária ao modelo que está sendo testado, mas pode indicar que os erros foram superestimados. Se χ^2/n_l for muito maior do que um, então há razões para duvidar que este modelo é um bom candidato para explicar os dados.

Tendo considerado acima a estimativa dos parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ que melhor ajustam os dados, vamos agora discutir como determinar os intervalos de confiança que definem uma região no espaço de parâmetros em torno de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ com uma dada probabilidade de ocorrerem.

Para isso é preciso determinar a densidade de probabilidade para os parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, chamada $p(\boldsymbol{\theta})$. Considerando a hipótese de que esta densidade de probabilidade é proporcional à função verossimilhança $L(\boldsymbol{\theta})$ [62], temos que

$$p(\boldsymbol{\theta}) = \frac{L(\boldsymbol{\theta})}{\int L(\boldsymbol{\theta}') d\boldsymbol{\theta}'}, \quad (4.39)$$

onde a $L(\boldsymbol{\theta})$ foi normalizada para que $p(\boldsymbol{\theta})$ possa, de fato, ser associada a uma distribuição de probabilidades.

Para fins demonstrativos, consideraremos inicialmente o caso em que há somente um parâmetro livre, θ . Poderemos generalizar este caso para uma situação em que há mais parâmetros e isto será feito posteriormente.

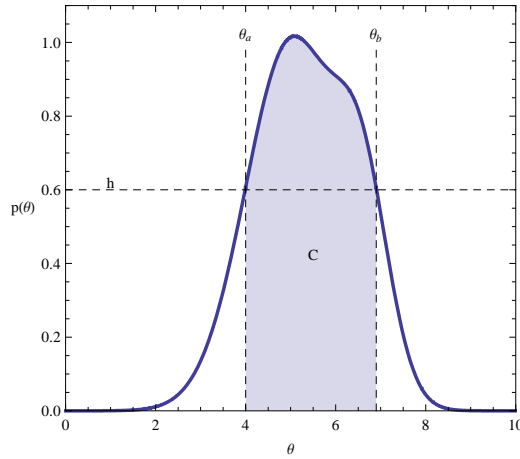


Figura 4.1: Função densidade de probabilidade $p(\theta)$. A área preenchida corresponde a valores de θ cuja probabilidade é dada pelo nível de confiança C .

A probabilidade de encontrarmos o parâmetro θ no intervalo $[\tilde{\theta}, \tilde{\theta} + d\tilde{\theta}]$ é dada por

$$P(\tilde{\theta} \leq \theta \leq \tilde{\theta} + d\tilde{\theta}) = p(\tilde{\theta})d\tilde{\theta}. \quad (4.40)$$

Dessa forma, a probabilidade de θ estar no intervalo $[\theta_a, \theta_b]$ é

$$P(\theta_a \leq \theta \leq \theta_b) = \int_{\theta_a}^{\theta_b} p(\theta)d\theta. \quad (4.41)$$

O nível de confiança C de um intervalo de confiança determina a probabilidade de que este intervalo contenha o valor verdadeiro do parâmetro θ . De acordo com a expressão (4.41), podemos associá-lo à área abaixo da curva $p(\theta)$, como pode ser visto na Figura 4.1. Dado um nível de confiança, determina-se a altura h que intercepta a curva em θ_a e θ_b , de tal forma que a área abaixo da curva $p(\theta)$ no intervalo $[\theta_a, \theta_b]$ seja equivalente à probabilidade desejada. Por exemplo, a escolha do nível $C = 0,95$ significa que o intervalo de confiança $[\theta_a, \theta_b]$ cobre 95% da área total sob a curva $p(\theta)$.

A função verossimilhança, dada por (4.36), pode ser escrita como

$$L(\theta) = \left[\prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \right] \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right), \quad (4.42)$$

sendo que o termo multiplicativo fora da exponencial não depende dos parâmetros. Então, diferenças do χ^2 em relação ao seu valor mínimo χ_{\min}^2 correspondem a diferentes probabilidades, ou diferentes níveis de confiança.

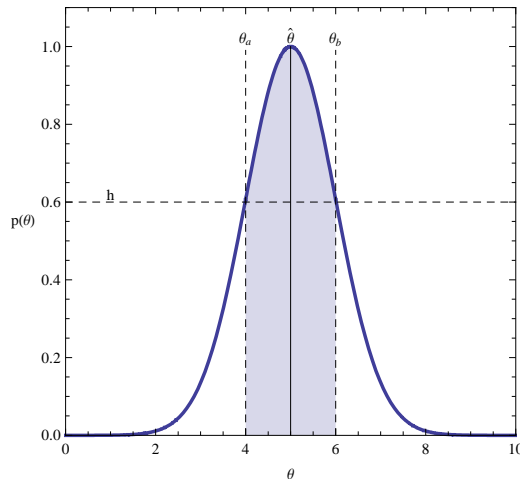


Figura 4.2: Função densidade de probabilidade $p(\theta)$ para o caso gaussiano. A área preenchida corresponde a valores de θ cuja probabilidade é dada pelo nível de confiança C .

Para o caso em que a função verossimilhança $L(\theta)$ e, conseqüentemente, a função densidade de probabilidade $p(\theta)$ são gaussianas no parâmetro θ (Figura 4.2), a determinação dos intervalos de confiança é bastante simples. Nesse caso, a função $p(\theta)$ é simétrica e θ_a e θ_b podem ser expressos em termos de $\hat{\theta} \pm n\sigma_{\hat{\theta}}$, onde $\sigma_{\hat{\theta}}$ é o desvio padrão e dá a meia largura da gaussiana a uma altura $h = 1/e$ e n é um número inteiro.

A relação entre os níveis de confiança e a quantidade $n\sigma_{\hat{\theta}}$ para o caso gaussiano é conhecida [63] e encontra-se na Tabela 4.1 para alguns valores de n . Nesta tabela encontram-se também os valores de $\Delta\chi^2$ em função dos níveis de confiança C e do número de parâmetros livres ν . Por exemplo, para o caso unidimensional, onde $\nu = 1$, o intervalo de confiança que representa o nível de confiança 68,27% é aquele dado para os valores de θ nos quais o $\Delta\chi^2 = \chi^2 - \chi_{\min}^2 = 1$.

Para generalizar estes resultados para o caso com M parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, devemos encontrar um intervalo de confiança M -dimensional $[\boldsymbol{\theta}_a, \boldsymbol{\theta}_b]$, construído de tal forma que represente a probabilidade (determinada pelo nível de confiança escolhido) de encontrarmos os parâmetros dentro de uma dada região do espaço de parâmetros. Isto define uma região de confiança no espaço de parâmetros M -dimensional para um dado nível de confiança. Como no caso unidimensional, esta região pode ser delimitada encontrando-se os valo-

res de $\boldsymbol{\theta}$ nos quais o χ^2 difere de seu valor mínimo χ_{\min}^2 por uma quantidade fixa, ou seja, $\Delta\chi^2 = A$, onde A é uma constante. Assim, todos os pontos contidos nessa região representam valores de $\boldsymbol{\theta}$ nos quais $\Delta\chi^2 \leq A$.

Suponha que estamos interessados em regiões de confiança para um subconjunto de ν parâmetros, onde $\nu < M$. Neste caso, as regiões são obtidas através da marginalização da função densidade de probabilidade $p(\boldsymbol{\theta})$ sobre os outros $M - \nu$ parâmetros. Isto equivale a integrar a função $p(\boldsymbol{\theta})$ sobre os $M - \nu$ parâmetros³. A partir de (4.39) e (4.42) podemos escrever a função densidade de probabilidade marginalizada $\tilde{p}(\boldsymbol{\theta})$ como

$$\tilde{p}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\int \dots \int e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\theta_{\nu+1} \dots d\theta_M}{\int \int \dots \int e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_M}. \quad (4.43)$$

Para o caso em que $p(\boldsymbol{\theta})$ é gaussiana nos parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, a relação entre o $\Delta\chi^2$ e os graus de liberdade ν (que representam os ν parâmetros livres) é dada na Tabela 4.1.

	$\Delta\chi^2$			
	C	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$
$1\sigma_{\hat{\theta}}$	0,6827	1,0	2,3	3,53
$2\sigma_{\hat{\theta}}$	0,9544	4,0	6,17	8,02
$3\sigma_{\hat{\theta}}$	0,9973	9,0	11,8	14,2

Tabela 4.1: $\Delta\chi^2$ em função dos níveis de confiança C e dos graus de liberdade ν .

Na seção a seguir utilizaremos o tratamento estatístico definido até aqui para obter limites observacionais a partir de SnIa nos parâmetros do modelo de Born-Infeld Estendido.

4.5 O parâmetro de Hubble para o modelo de Born-Infeld Estendido

³Não consideraremos aqui a utilização de informações a priori sobre os parâmetros, como pode ser feito segundo a estatística Bayesiana, pois este não é o escopo desta seção.

Como discutido no capítulo anterior, o modelo Born-Infeld Estendido é um modelo de unificação (quartessência) de matéria e energia escuras que pode ser interessante para descrever o conteúdo material do Universo, pois fornece uma explicação para a expansão acelerada, bem como para a formação de estruturas. Além disto, ele apresenta algumas vantagens em relação a outros modelos de quartessência, como baixa velocidade do som.

Nesta seção determinaremos, para os dois casos do modelo estudado, o parâmetro de Hubble $H(a)$ que será usado para calcular o módulo de distância μ_t . Na seção 4.6 utilizaremos os módulos de distância determinados pelas observações de um conjunto de SNIa, para impor vínculos nos parâmetros Γ e W_0 .

4.5.1 Caso 1

Concentraremos nossa atenção no intervalo $W_{max} > W > W_v$, que é o intervalo que tem sentido físico para este caso, onde o modelo se comporta como quartessência. Além disso, a dinâmica do modelo, estudada no capítulo anterior, nunca permite sair deste intervalo.

Para determinar a evolução do parâmetro de Hubble, a densidade de energia deve ser escrita em função do fator de escala. Para tanto, é preciso resolver a equação de conservação de energia (A.82), que é convenientemente expressa em termos de W . Usando a equação (3.15) obtemos,

$$\begin{aligned} -3\frac{\dot{a}}{a} &= \left(\frac{-3W^2 + 2W^3 + \Gamma - 6W\Gamma}{2W(-1 + 2W)(-W + W^2 - \Gamma)} \right) \dot{W} \\ &= \left(\frac{1}{2W} + \frac{2}{-1 + 2W} + \frac{1 - 2W}{2(-W + W^2 - \Gamma)} \right) \dot{W}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Integrando esta equação, obtemos

$$a^{-3} = \frac{\sqrt{W}(2W - 1)C_1}{\sqrt{W - W^2 + \Gamma}} \quad (4.45)$$

onde C_1 é uma constante de integração.

Considerando $a(t_0) = 1$, podemos escrever esta constante em termos de $W_0 = W(a = 1)$, através de

$$C_1 = \frac{\sqrt{W_0}(2W_0 - 1)}{\sqrt{W_0 - W_0^2 + \Gamma}}. \quad (4.46)$$

Note que a escolha do valor de $a(t_0)$ é arbitrária, pois, como discutido anteriormente, os resultados independem desta escala. Neste trabalho escolhemos $a(t_0) = 1$ para simplificar as expressões.

A partir das equações (4.45) e (4.46) temos o fator de escala a expresso em termos de W , W_0 e Γ . Portanto, invertendo em relação a W , é possível obter

$$W = W(a, W_0, \Gamma) \quad (4.47)$$

e então escrever, através da expressão (3.15), a densidade de energia como

$$\rho' = \rho'(a, W_0, \Gamma). \quad (4.48)$$

Essas expressões foram obtidas com o auxílio do aplicativo Mathematica [64] e, por serem expressões muito longas, não serão aqui reproduzidas.

Com o intuito de otimizar o tempo de cálculo e verificar o comportamento de ρ' em seus limites e também para eliminar possíveis erros numéricos devido a indeterminações, calculamos os limites de ρ' para $a \rightarrow 0$ e $a \rightarrow \infty$ e seus respectivos intervalos de validade. O procedimento para isso será descrito abaixo.

No limite $a \rightarrow 0$ (ou $W \rightarrow W_{max}$), obtemos a seguinte aproximação para a densidade de energia

$$\rho'_{a \rightarrow 0} = \frac{C_1 \sqrt{\sqrt{1 + 4\Gamma} + 1}}{\sqrt{2}a^3} - \frac{3a^3}{4\sqrt{2}C_1} \left(1 + \sqrt{1 + 4\Gamma}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad (4.49)$$

onde consideramos somente os dois termos dominantes (de mais baixa ordem). A constante C_1 é dada pela equação (4.46). Note que, para o primeiro termo, a dependência de ρ' com o fator de escala é a mesma que para a matéria escura, ou seja, $\rho' \propto a^{-3}$. Isto está de acordo com a idéia de quartessência, apresentada no capítulo anterior.

Para verificar quando a aproximação é válida, determinamos qual a contribuição do segundo termo em relação ao primeiro. Definindo ϵ como a razão entre o segundo termo e o primeiro, podemos quantificar isso. Se ϵ for pequeno significa que a contribuição do segundo termo é pequena e, conseqüentemente, as contribuições dos termos de mais alta ordem também serão. Dado um valor de ϵ podemos determinar o fator de escala a_t para o qual a condição acima é satisfeita, ou seja, quando o segundo termo é ϵ vezes o primeiro.

Desta forma,

$$a_t = \left(\frac{4 C_1^2 \epsilon}{3 (1 + \sqrt{1 + 4\Gamma})} \right)^{\frac{1}{6}} \quad (4.50)$$

e a aproximação é válida para $a \lesssim a_t$.

Para verificar se a aproximação é boa, calculamos a diferença entre as expressões completa (ρ') e aproximada ($\rho'_{a \rightarrow 0}$) através de

$$\Delta\rho' = \frac{|\rho' - \rho'_{a \rightarrow 0}|}{\rho'}. \quad (4.51)$$

Nos nossos cálculos usamos $\epsilon = 10^{-4}$, o que leva a um $\Delta\rho' \sim 10^{-4}$. O valor exato de $\Delta\rho'$ depende do valor de Γ e W_0 escolhidos.

Já no limite $a \rightarrow \infty$ (ou $W \rightarrow W_v$) obtemos

$$\rho'_{a \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{1}{4} + \Gamma} + \frac{C_1}{\sqrt{2}a^3}, \quad (4.52)$$

que, segundo o procedimento descrito acima, é válido para $a \gtrsim a_{ti}$, onde a_{ti} é dado por

$$a_{ti} = \left(\frac{\sqrt{2}C_1}{\epsilon\sqrt{1 + 4\Gamma}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (4.53)$$

Usando $\epsilon = 10^{-4}$ encontramos que $\Delta\rho' \sim 10^{-6}$. Novamente, o valor exato de $\Delta\rho'$ depende do valor de Γ e W_0 escolhidos.

Na Figura 4.3 mostramos as curvas $\rho'(a)$, $\rho'_{a \rightarrow \infty}(a)$ e $\rho'_{a \rightarrow 0}(a)$. No limite de $a \rightarrow \infty$ $\rho'(a)$ é uma constante, o que está de acordo com o fato de o campo escalar se comportar como uma constante cosmológica. Para $a \rightarrow 0$, a inclinação da curva é de -3 e está de acordo com o fato de o Universo ser dominado pela matéria neste período. Também vemos que para valores de a muito pequenos, a curva $\rho'(a)$ não corresponde ao valor exato esperado para $a \rightarrow 0$ devido às limitações do cálculo numérico em lidar com alguns tipos de limites que ficam indeterminados, mas que podem ser calculados analiticamente. Por causa disto e para otimizar o tempo de cálculo, usaremos neste trabalho as aproximações $\rho'_{a \rightarrow 0}(a)$ para $a < a_t$ e $\rho'_{a \rightarrow \infty}(a)$ para $a > a_{ti}$. Para $a_t < a < a_{ti}$, usaremos a expressão completa para $\rho'(a)$.

Tendo já definido a densidade de energia em função do fator de escala, podemos agora determinar o parâmetro de Hubble.

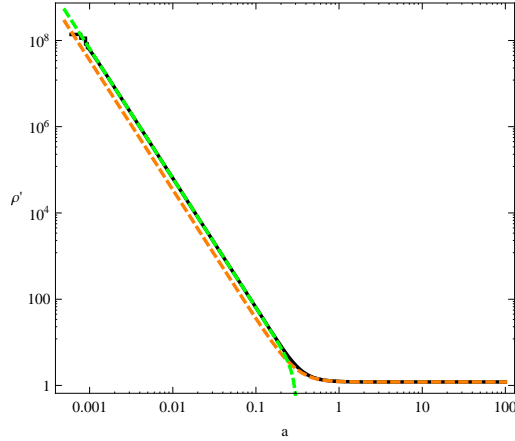


Figura 4.3: A curva sólida representa ρ' exato e as curvas tracejadas representam os limites para $a \rightarrow 0$ (verde) e $a \rightarrow \infty$ (laranja) para o caso em que $\Gamma = 1, 2$ e $W_0 = 0, 54$.

A densidade de energia do campo escalar ρ' será denotada a partir de agora por ρ'_{es} , para diferenciá-la das densidades de energia das outras componentes que serão introduzidas no cálculo do parâmetro de Hubble, como bárions.

Definindo

$$\frac{\rho'_{es}}{\rho'_{es0}} := g(a, \Gamma, W_0), \quad (4.54)$$

podemos reescrever (4.30) como

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_{es0} g(a, \Gamma, W_0) + \Omega_{b0} a^{-3} + \Omega_{k0} a^{-2}}, \quad (4.55)$$

onde

$$\Omega_{k0} = 1 - \Omega_{es0} - \Omega_{b0}. \quad (4.56)$$

A equação (4.55) pode ser escrita em função do desvio para o vermelho z usando (4.9). Substituindo $H(z)$ em (4.24) temos

$$d_L(z) = \frac{(1+z)}{H_0 \sqrt{\Omega_0 - 1}} \text{sen}_k \left(\sqrt{\Omega_0 - 1} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_{es0} g(z', \Gamma, W_0) + \Omega_{b0} (1+z')^3 + \Omega_{k0} (1+z')^2}} \right). \quad (4.57)$$

Resolvendo a integral, encontramos a distância de luminosidade teórica e logo o módulo de distância (4.35) que será usado para confrontar este modelo com as observações de SNIa nas próximas seções.

4.5.2 Caso 2

Para poder comparar as previsões teóricas do modelo para o caso com $\beta < 0$ com os dados observacionais, vamos seguir o mesmo procedimento descrito acima para o Caso 1.

Primeiramente, vamos determinar o parâmetro de Hubble. A equação equivalente à (4.44) será

$$\begin{aligned} -3\frac{\dot{a}}{a} &= -\left(\frac{-3W^2 - 2W^3 + \Gamma + 6W\Gamma}{2(W + 2W^2)(W + W^2 - \Gamma)}\right)\dot{W} \\ &= \left(\frac{1}{2W} + \frac{2}{1 + 2W} + \frac{-1 - 2W}{2(W + W^2 - \Gamma)}\right)\dot{W}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Integrando a equação acima, obtemos

$$a^{-3} = \frac{\sqrt{W}(2W + 1)C_2}{\sqrt{W(-1 - W) + \Gamma}} \quad (4.59)$$

onde C_2 é uma constante de integração. Através da escolha $a(t_0) = 1$ podemos escrevê-la em termos de $W_0 = W(a = 1)$ através de

$$C_2 = \frac{\sqrt{W_0}(2W_0 + 1)}{\sqrt{-W_0 - W_0^2 + \Gamma}}. \quad (4.60)$$

Assim, novamente temos o fator de escala a expresso em termos de W , W_0 e Γ e com isso é possível obter $W = W(a, W_0, \Gamma)$ e conseqüentemente $\rho'_{es} = \rho'_{es}(a, W_0, \Gamma)$. Essas expressões foram obtidas com o auxílio do aplicativo Mathematica e também não serão reproduzidas, devido ao seu grande tamanho.

Analogamente ao Caso 1, obtemos a seguinte aproximação para a densidade de energia no limite em que $a \rightarrow 0$ (ou $W \rightarrow W_{max}$)

$$\rho'_{a \rightarrow 0} = \frac{C_2 \sqrt{\sqrt{1 + 4\Gamma} - 1}}{\sqrt{2}a^3} - \frac{3a^3}{4\sqrt{2}C_2} \left(-1 + \sqrt{1 + 4\Gamma}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad (4.61)$$

onde C_2 é dado pela equação (4.60). Novamente, em primeira ordem ρ' escala com a da mesma forma que a matéria escura. Segundo o procedimento descrito para o Caso 1, a aproximação acima somente é válida para $a < a_t$, onde a_t é dado por

$$a_t = \left(\frac{4C_2^2 \epsilon}{3(-1 + \sqrt{1 + 4\Gamma})}\right)^{\frac{1}{6}}, \quad (4.62)$$

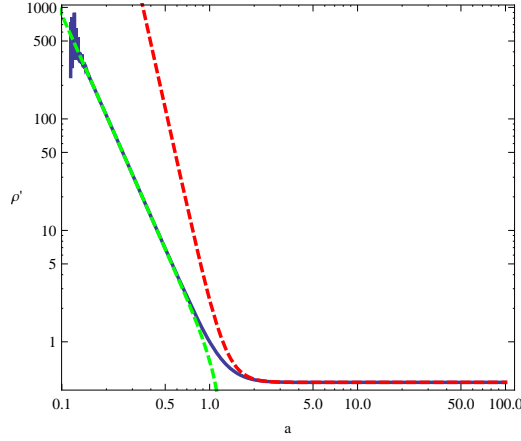


Figura 4.4: A curva s3lida representa ρ' exato e as curvas tracejadas representam os limites para $a \rightarrow 0$ e $a \rightarrow \infty$ para o caso em que $\Gamma = 3$ e $W_0 = 1$.

Em nossos c3lculos usamos $\epsilon = 10^{-5}$, que resulta em um $\Delta\rho' \sim 10^{-3}$.

J3a no limite $a \rightarrow \infty$ (ou $W \rightarrow W_e$) temos que

$$\rho'_{a \rightarrow \infty} = \sqrt{\Gamma} + \frac{C_2^2 \sqrt{\Gamma}}{2a^6}, \quad (4.63)$$

que 3e v3lido somente para $a > a_{ti}$, onde a_{ti} 3e dado por

$$a_{ti} = \left(\frac{C^2}{2\epsilon} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (4.64)$$

Usando $\epsilon = 10^{-4}$ encontramos que $\Delta\rho' \sim 10^{-6}$. Os valores exatos de $\Delta\rho'$ dependem de Γ e W_0 .

Na Figura 4.4 mostramos as curvas $\rho'(a)$, $\rho'_{a \rightarrow \infty}(a)$ e $\rho'_{a \rightarrow 0}(a)$. O comportamento da curva completa e dos limites 3e semelhante ao do caso anterior. Verificamos novamente que para valores de a muito pequenos, a curva completa se afasta do limite correto e apresenta muito ru3ido, devido aos problemas num3ricos mencionados anteriormente. Por causa disto e para otimizar o tempo de c3lculo, usaremos neste trabalho as aproxima33es $\rho'_{a \rightarrow 0}(a)$ para $a < a_t$ e $\rho'_{a \rightarrow \infty}(a)$ para $a > a_{ti}$. Para $a_t < a < a_{ti}$, usaremos a express3o completa para $\rho'(a)$.

O par3metro de Hubble ser3 dado neste caso por

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_{es0} f(a, \Gamma, W_0) + \Omega_{b0} a^{-3} + \Omega_{k0} a^{-2}}, \quad (4.65)$$

onde

$$f(a, \Gamma, W_0) = \frac{\rho'_{es}}{\rho'_{es0}}. \quad (4.66)$$

Obviamente, esta função é diferente da função g do caso anterior, devido ao fato de ρ'_{es} ser diferente.

Novamente, a equação (4.65) pode ser escrita em função do desvio para o vermelho z usando (4.9). Substituindo $H(z)$ em (4.24) encontramos a distância de luminosidade teórica para o Caso 2 do modelo.

4.6 Limites de Supernovas do tipo Ia no modelo de Born-Infeld Estendido

Para obter os limites observacionais de SnIa sobre os parâmetros do nosso modelo usamos o último conjunto de dados da amostra Gold compilado por Riess *et al* em [65]. Esta amostra contém 182 SnIa, com $z > 0.0233$.

Uma vez que as observações das anisotropias da radiação cósmica de fundo em microondas indicam que o Universo é aproximadamente plano [66, 67], na análise a seguir consideraremos o caso com curvatura nula, ou seja, $\Omega_k = 0$.

A fração de bárions Ω_b pode ser determinada a partir da abundância observada de elementos leves combinada com cálculos da nucleossíntese primordial [68], o que fornece um valor da combinação $\Omega_b h^2$. Estudos atuais resultam em $\Omega_b h^2 = 0,0214 \pm 0,0018$ [69, 70]. Este resultado é independente dos modelos de matéria e energia escuras⁴ e é compatível com os dados da radiação cósmica de fundo e da estrutura em grandes escalas. Combinando isto com o resultado obtido pelo Hubble Space Telescope key project [71], $h = 0,72 \pm 0,08$, obtém-se que $\Omega_b = 0,04$. Note que o impacto de Ω_b em $H(a)$ já é muito pequeno ($\sim 4\%$ da densidade de energia total) e, portanto, pequenas variações desse valor não causarão diferenças perceptíveis nos limites de SnIa. Portanto, na nossa análise, fixaremos Ω_b no valor citado acima.

⁴Desde que a energia escura e a matéria escura sejam desprezíveis frente à radiação no Universo primordial, o que é bastante natural.

Dessa forma, os únicos parâmetros do modelo de Born-Infeld Estendido que restaram após estas considerações são H_0 , Γ e W_0 . Entretanto, não estamos interessados em obter limites para o parâmetro H_0 . De acordo com a discussão da seção 4.4, devemos então marginalizar sobre este parâmetro, o que será feito a seguir. Assim, nos concentraremos somente nos parâmetros Γ e W_0 .

4.6.1 Marginalização analítica em H_0

Nesta seção apresentaremos o método para marginalizar sobre o parâmetro H_0 , mostrando que esta marginalização pode ser feita de forma analítica.

Partindo da distância de luminosidade escrita na forma

$$d_L = \frac{c}{H_0} \mathcal{D}_L \quad (4.67)$$

e podemos reescrever o módulo de distância, dado pela equação (4.35), como

$$\mu_t = \mu_t^* + 5 \log \left(\frac{h^*}{h} \right), \quad (4.68)$$

onde

$$\mu_t^* = 5 \log \mathcal{D}_L + 5 \log \left(\frac{h}{h^*} \right) + 42,384 \quad (4.69)$$

e $h := H_0 / (100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1})$. As quantidades denotadas por (*) indicam que foram calculadas para um dado h fixo. No nosso trabalho usamos $h^* = 0,65$. Entretanto, com a marginalização no parâmetro de Hubble todos os resultados obtidos se tornam independentes da escolha de h^* .

Substituindo (4.68) na definição de χ^2 dada por (4.38), obtemos [72]

$$\chi^2 = \chi_*^2 - 2C_1 x + C_2 x^2, \quad (4.70)$$

onde $x = 5 \log(h/h^*)$ e

$$\chi_*^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_{t,i}^* - \mu_{obs,i})^2}{\sigma_i^2}, \quad C_1 = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_{t,i}^* - \mu_{obs,i})}{\sigma_i^2}, \quad C_2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}. \quad (4.71)$$

A função densidade de probabilidade marginalizada $\tilde{p}(\boldsymbol{\theta})$ dada pela equação (4.43), para o caso da marginalização no parâmetro h , é escrita (a menos de termos constantes provenientes da normalização) como

$$\tilde{p}(\boldsymbol{\theta}) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right) dh = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\chi_*^2 - 10 \log\left(\frac{h}{h^*}\right) C_1 + 25 \log^2\left(\frac{h}{h^*}\right) C_2\right]\right\} dh \quad (4.72)$$

Esta integração pode ser feita analiticamente, reduzindo o tempo de cálculo. Como resultado, obtemos para $\tilde{p}(\boldsymbol{\theta})$ uma função com a mesma forma funcional de $p(\boldsymbol{\theta})$, ou seja

$$\tilde{p}(\boldsymbol{\theta}) \propto \exp\left(-\frac{\tilde{\chi}^2}{2}\right), \quad (4.73)$$

onde $\tilde{\chi}^2$ é dado por

$$\tilde{\chi}^2 = \chi_*^2 - \frac{C_1}{C_2} \left(C_1 + \frac{2}{5} \ln 10\right). \quad (4.74)$$

De acordo com a expressão (4.39), $\tilde{p}(\boldsymbol{\theta})$ é proporcional à função verossimilhança. Assim, conforme a discussão da seção 4.4, para determinar o melhor ajuste para os parâmetros W_0 e Γ e as regiões de confiança no espaço desses parâmetros é necessário maximizar esta função. Isto é equivalente a minimizar $\tilde{\chi}^2$.

4.6.2 Confrontamento do modelo de Born-Infeld Estendido com dados de SnIa

Vamos agora utilizar o método discutido acima e nas seções 4.2 e 4.4, juntamente com os resultados obtidos na seção 4.5 para o modelo de Born-Infeld Estendido, para verificar se este modelo é consistente com os dados de SnIa e para impor limites nos seus parâmetros.

Para começar devemos minimizar o $\tilde{\chi}^2$, processo este que pode ser um tanto demorado, uma vez que envolve somatórios e integrais. Para otimizar o tempo de processamento, calculamos uma grade com os valores de $\tilde{\chi}^2$, ou seja, um conjunto de valores de $\tilde{\chi}^2$ para um certo intervalo de W_0 e Γ . Após, interpolamos os valores de $\tilde{\chi}^2$ e minimizamos para encontrar o $\tilde{\chi}_{\min}^2$. Calculamos esta grade por dois métodos distintos: no primeiro

utilizamos um código desenvolvido em Fortran e no segundo utilizamos o aplicativo Mathematica. Comparamos os resultados dos dois métodos e verificamos que eles coincidem. A interpolação e a minimização foram feitas usando o aplicativo Mathematica.

Efetuada a minimização obtemos, para o Caso 1, que $\tilde{\chi}_{1\min}^2 = 157,6$, de modo que $\tilde{\chi}_{1\min}^2/n_l = 0,875$. Para o Caso 2, obtemos $\tilde{\chi}_{2\min}^2 = 156,9$ e $\tilde{\chi}_{2\min}^2/n_l = 0,871$. Concluímos, portanto, que os dois casos do modelo são compatíveis com os dados de SnIa.

Ao minimizarmos o $\tilde{\chi}^2$, verificamos que $\tilde{\chi}_{\min}^2$ é degenerado, ou seja, uma combinação de valores de Γ e W_0 fornece valores muito semelhantes para essa quantidade. Isso significa que a função verossimilhança e, conseqüentemente, a função densidade de probabilidade não possuem um pico bem definido, se estendendo e não se anulando para grandes valores dos parâmetros. Desta maneira não é possível normalizá-las e relacioná-las rigorosamente com probabilidades.

Para construir as regiões de confiança, seguimos o procedimento apresentado na seção 4.4 e fixamos alguns valores de $\Delta\tilde{\chi}^2$. Entretanto, não podemos relacionar o $\Delta\tilde{\chi}^2$ com probabilidades da mesma forma que no caso gaussiano, representado na Tabela 4.1. Isso porque a função densidade de probabilidade $p(\boldsymbol{\theta})$ para o nosso modelo, que após as considerações acima se reduz a $\tilde{p}(\Gamma, W_0)$, não é gaussiana nos parâmetros Γ e W_0 para ambos os casos 1 e 2, como pode ser inferido pela ausência de um pico bem definido. Então, se quiséssemos determinar a probabilidade associada a uma dada região de confiança (para um nível de confiança C) seria preciso integrar a função $\tilde{p}(\Gamma, W_0)$ para encontrar os limites do intervalo para cada parâmetro, de tal forma que eles forneçam a probabilidade desejada. Para isso, de acordo com (4.39), a função verossimilhança deve ser normalizável. No entanto, como dito acima, $\tilde{p}(\Gamma, W_0)$ não pode ser normalizada. Como estamos interessados em saber como os dados de SnIa da amostra considerada limitam os parâmetros do nosso modelo, fixaremos valores de $\Delta\tilde{\chi}^2$ para determinar regiões de confiança, mesmo que estas não estejam estritamente relacionadas com as probabilidades e os níveis de confiança conhecidos.

Para construir as regiões de confiança usamos o aplicativo Mathematica. Nas Figuras 4.5 e 4.6, apresentamos os resultados obtidos para o Caso 1 e 2, respectivamente. A região interna corresponde a $\Delta\tilde{\chi}^2 = 2,3$ e a externa $\Delta\tilde{\chi}^2 = 6,17$. No caso gaussiano esses valores

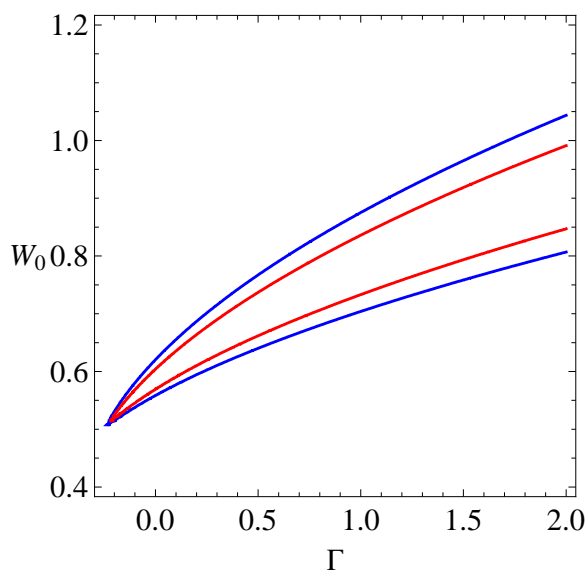


Figura 4.5: Contorno de confiança para $\Delta\tilde{\chi}^2 = 2, 3$ (interna) e $\Delta\tilde{\chi}^2 = 6, 17$ (externa) para o Caso 1.

correspondem aos níveis 1σ e 2σ . Como esperado, vemos claramente que os contornos de confiança não são elipses e nem são limitados, ou seja, $\tilde{p}(\Gamma, W_0)$ não é gaussiana. A forma dos contornos reflete a degenerescência em Γ e W_0 . Além disso, o intervalo permitido para W_0 aumenta com Γ . Portanto, W_0 é melhor determinado quanto menor for o Γ . Quase todo o intervalo de Γ é permitido e apenas valores assintoticamente próximos do mínimo ($\Gamma = -1/4$ e $\Gamma = 0$, para os casos 1 e 2, respectivamente) são excluídos.

Caso introduzíssemos outros observáveis, poderíamos quebrar a degenerescência e limitar mais a função verossimilhança de tal forma que a normalização fosse possível. Assim, poderíamos fazer uma análise estatística mais rigorosa e limitar melhor os parâmetros do modelo.

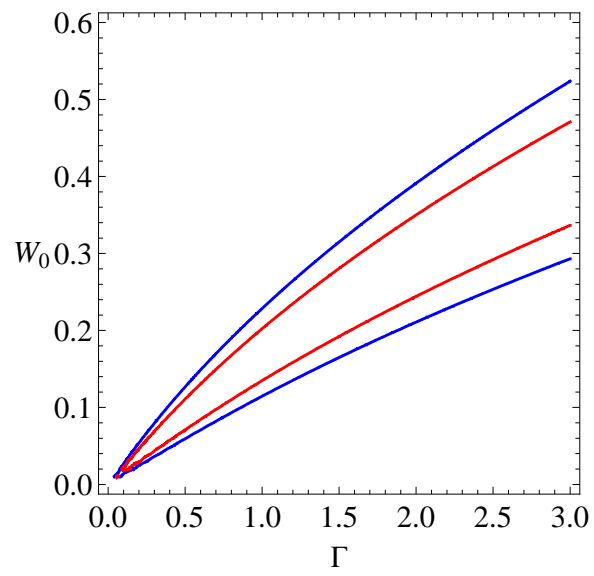


Figura 4.6: Contorno de confiança para $\Delta\tilde{\chi}^2 = 2, 3$ (interna) e $\Delta\tilde{\chi}^2 = 6, 17$ (externa) para o Caso 2.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas futuras

Motivados pela busca de um modelo viável de unificação da matéria e energia escuras, neste trabalho fizemos um estudo detalhado de um modelo baseado em uma extensão da Lagrangiana de Born-Infeld para um campo escalar. Este modelo, apresenta propriedades interessantes e pode evitar alguns problemas presentes em outros modelos de quartessência.

Dividimos o estudo em duas partes de acordo com as duas classes da Lagrangiana de Born-Infeld estendida. Mostramos que, em ambos os casos, o modelo pode ser descrito em termos de um fluido perfeito. Obtivemos a sua equação de estado e estudamos o comportamento da velocidade som em relação a diversos parâmetros do modelo. Verificamos que ela é muito pequena no regime no qual a quartessência se comporta como matéria escura. No estado com configuração de constante cosmológica, a velocidade do som é nula para o primeiro caso e igual à velocidade da luz para o segundo. Esta propriedade representa uma desvantagem da segunda classe em relação à primeira, pois a velocidade do som poderia ser alta no Universo atual causando problemas com a formação de estruturas. Para verificar o impacto da velocidade do som no Universo tardio, relacionamos o momento em que a velocidade do som atinge o seu valor máximo com o momento no qual a expansão começa a acelerar. Para a primeira classe, verificamos que a velocidade do som pode atingir o seu máximo antes ou depois da aceleração da expansão, dependendo do valor do parâmetro Γ . Além disso, quanto mais cedo a velocidade do som atingir o

seu máximo, menor será esse valor. A maior velocidade do som possível para essa classe é $c_s^2 = 1/3$ e ocorre para $\Gamma \rightarrow \infty$. Para a segunda classe verificamos que a expansão começa a acelerar sempre antes de a velocidade do som atingir seu valor máximo.

Para ambas as classes investigamos a dinâmica das soluções espacialmente homogêneas, através da determinação dos pontos estacionários e da construção de diagramas de fase. Verificamos que o estado no qual a quartessência se comporta como constante cosmológica é um atrator para as soluções em expansão, em um Universo com pequena curvatura.

Finalmente confrontamos as previsões teóricas deste modelo para o caso de um Universo plano com dados observacionais recentes de Supernovas do tipo Ia. Para isso, obtivemos o parâmetro de Hubble e a distância de luminosidade para o modelo de Born-Infeld Estendido. Verificamos que as duas classes são compatíveis com os dados observacionais, porém estes não permitem limitar significativamente os parâmetros do modelo. A inclusão de novos observáveis, como a escala acústica medida na radiação cósmica de fundo e na estrutura em grande escala, permitirá obter limites mais fortes sobre estes parâmetros. Isto será realizado como uma continuação deste trabalho.

Outro aspecto fundamental que deve ser estudado é o comportamento desse modelo em relação à formação de estruturas. Isto permitirá investigar se ele apresenta os mesmos problemas encontrados em outros modelos de quartessência adiabática. Só então poderemos verificar se este modelo constitui uma possibilidade competitiva para implementar a unificação entre matéria e energia escuras.

Apêndice A

Decomposição 1+3 covariante da Relatividade Geral

Neste apêndice revisaremos o formalismo 1 + 3 covariante da Relatividade Geral e apresentaremos algumas equações importantes que serão usadas nesta dissertação. Em especial, na seção A.1.2 discutiremos o caso particular de um Universo homogêneo e isotrópico e apresentaremos as relações relevantes que serão utilizadas quando considerarmos tal caso.

A.1 O tensor energia-momentum e as equações de movimento

Um modelo cosmológico é definido através da especificação de:

- uma geometria do espaço-tempo representada pela métrica $g_{\alpha\beta}(x^k)$ e que deve ter propriedades compatíveis com os resultados das observações astronômicas do Universo;
- um conteúdo material e seu comportamento físico, representados pelo tensor de

energia-momentum, equação de estado do fluido ou Lagrangiana associada às componentes de matéria e

- interação da geometria e da matéria, ou seja, como a matéria determina a geometria, que, por sua vez, determina o movimento da matéria. Supomos isso através das equações de Einstein ¹:

$$G_{\alpha\beta} := R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.1})$$

onde $T_{\alpha\beta}$ é o tensor de energia-momentum e $R_{\alpha\beta} := R^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta}$ e $R := R^\alpha{}_\alpha$ são, respectivamente, o tensor e o escalar de Ricci, obtidos através de contrações do tensor de curvatura de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Como será visto adiante, as identidades de Bianchi garantem a conservação local da energia-momentum total, isto é, de todas as componentes materiais combinadas²

$$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \quad \rightarrow \quad T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0. \quad (\text{A.2})$$

As escolhas mais usuais para a descrição da matéria em um modelo cosmológico envolvem a combinação de

- um fluido com uma equação de estado motivada fisicamente;
- uma mistura de fluidos, geralmente com 4-velocidades diferentes;
- um conjunto de partículas representada por uma descrição a partir da teoria cinética;
- um campo escalar ϕ , com um dado potencial $V(\phi)$;
- um campo eletromagnético descrito pela ação de Maxwell.

As considerações acima juntas determinam a evolução dinâmica do modelo. Esta descrição deve ser suficiente para determinar as relações observacionais previstas pelo modelo, que podem ser comparadas com observações astronômicas. Isto determina as soluções que podem ser consideradas como modelos cosmológicos viáveis para descrever o Universo real.

¹Neste trabalho, a menos que seja indicado, usaremos $c = 1$.

²O ponto e vírgula ; denota a derivada covariante.

O principal objetivo desta seção é introduzir as relações gerais válidas que serão usadas nesse trabalho, decompor o tensor de energia-momento em termos de seus componentes irreduzíveis e obter as equações de evolução dos parâmetros cinemáticos de interesse.

A.1.1 Decomposição 1+3 covariante da Relatividade Geral

Um espaço-tempo pode ser descrito por vários formalismos distintos. O formalismo mais usual é aquele em que o espaço-tempo é descrito por uma métrica $g_{\alpha\beta}(x^k)$ em um dado sistema de coordenadas, com suas propriedades diferenciais dadas pelos símbolos de Christoffel. Neste trabalho usaremos outro formalismo, que foi introduzido por Ehlers, Hawking e Ellis [73, 74, 75] e que resultou em uma descrição covariante dos campos gravitacionais e de matéria, onde a métrica não aparece explicitamente. Com este formalismo, o espaço-tempo é descrito por um conjunto de variáveis definidas a partir de uma decomposição espaço-temporal covariante, chamado decomposição 1 + 3 covariante da Relatividade Geral.

Nesse formalismo, as equações de Einstein são separadas em equações de evolução e equações de vínculo envolvendo apenas derivadas espaciais [76]. Essas equações são provenientes das identidades de Ricci e de Bianchi, com as equações de Einstein sendo incorporadas algebricamente pela substituição do tensor de Einstein pelo tensor energia-momentum. Em vez de equações para a métrica, temos equações para os parâmetros cinemáticos (aceleração, expansão, cisalhamento e vorticidade) e dinâmicos (densidade, pressão, tensão anisotrópica e fluxo de energia), e para as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl.

Uma das vantagens desta descrição é que todas as quantidades têm uma interpretação física ou geométrica direta, o que permite ter uma intuição maior sobre a dinâmica do sistema e facilita a analogia com a física newtoniana. Entre suas várias aplicações cosmológicas estão a teoria de perturbação linear, incluindo a análise das anisotropias da radiação cósmica de fundo (como usado no código CAMB [77]), o estudo de ondas gravitacionais [78], a análise de limites na anisotropia e heterogeneidade do Universo [79, 80, 81] e o estudo da formação de estruturas no regime não linear das perturbações de densidade

[82, 83, 84, 85].

Nesta seção seguiremos os passos das referências [76, 75, 86, 87].

A seguir vamos definir a 4-velocidade média da matéria e o tensor de projeção, que serão necessários para a decomposição covariante e conseqüente obtenção das quantidades cinemáticas.

4-velocidade média da matéria e o tensor de projeção

Em um espaço-tempo, dado um observador, definimos seu campo de velocidades como

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad u_\alpha u^\alpha = 1, \quad (\text{A.3})$$

onde τ é o tempo próprio medido ao longo das linhas de universo. Em cada ponto x^α deste espaço-tempo, u^α determina um sub-espaço tri-dimensional constituído de vetores ortogonais a ele.

Portanto, para um determinado observador, definido pelo seu campo de velocidades, todas as quantidades físicas podem ser decompostas em escalares e tensores projetados. O sub-espaço H , também chamado espaço de repouso, é determinado pelo conjunto de vetores ortogonais a u^α e constitui um referencial inercial para o observador correspondente. A componente de um tensor no espaço de repouso instantâneo de u^α é obtida através do tensor de projeção [76]

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta. \quad (\text{A.4})$$

É fácil verificar que ele possui propriedades de um projetor no tri-espaço ortogonal a u^α :

$$h^\alpha_\gamma h^\gamma_\beta = h^\alpha_\beta, \quad h^\alpha_\alpha = 3, \quad h_{\alpha\beta} u^\beta = 0. \quad (\text{A.5})$$

Este tensor é efetivamente a métrica espacial para observadores se movendo com 4-velocidade u^α . Mais precisamente, a equação (A.4) nos permite escrever o elemento infinitesimal de linha como:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + u_\alpha u_\beta dx^\alpha dx^\beta. \quad (\text{A.6})$$

Isso mostra como um observador se movendo com u^α em um ponto x^α designa para o ponto $x^\alpha + dx^\alpha$ uma separação espacial $dl = (h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta)^{1/2}$ e uma separação temporal

$dt = u_\alpha dx^\alpha$ em relação a ele. Assim, qualquer tensor pode ser decomposto em suas partes espaciais e temporais utilizando as suas projeções sobre u^α e $h_{\alpha\beta}$. Quando u^α é escolhido como a velocidade média de um elemento de fluido no Universo, esta separação adquire um caráter invariante. Ou seja, a existência de uma 4-velocidade única em cada ponto significa que todas as quantidades físicas podem ser separadas univocamente em componentes espaciais e temporais.

Antes de obter os parâmetros cinemáticos, vamos definir algumas quantidades importantes na decomposição $1 + 3$. Uma delas é o tensor de Levi-Civita projetado, definido a partir do tensor totalmente anti-simétrico de Levi-Civita $\varepsilon_{\delta\alpha\beta\gamma}$ através de

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{-g}\varepsilon_{\delta\alpha\beta\gamma} u^\delta, \quad (\text{A.7})$$

que define o elemento de tri-volume das superfícies ortogonais a u^α e tem um papel análogo ao símbolo de Levi-Civita no espaço euclidiano tridimensional. Em A.7, g é o determinante da métrica.

Outra quantidade relevante é a derivada temporal covariante ao longo das linhas de universo fundamentais

$$\dot{T}^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} := T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta;\sigma} u^\sigma. \quad (\text{A.8})$$

Também podemos definir a divergência e o rotacional espaciais covariantes de um vetor

$$\text{div } V := V^\alpha{}_{;\beta} h^\beta{}_\alpha = V^\alpha{}_{;\alpha} + \dot{V}^\alpha u_\alpha \quad (\text{A.9})$$

$$(\text{rot } V)_\alpha := \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V^\gamma{}_{;\delta} h^{\delta\beta} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V^{\beta;\gamma} \quad (\text{A.10})$$

e de um tensor de segunda ordem

$$(\text{div } S)^\alpha := S^{\gamma\delta}{}_{;\beta} h^\beta{}_\delta h^\alpha{}_\gamma \quad (\text{A.11})$$

$$(\text{rot } S)_{\alpha\beta} := \varepsilon_{\gamma\delta(\alpha} S_{\beta)}{}^\delta{}_{;\mu} h^{\mu\gamma} = -S_\mu{}^{\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta(\alpha} h_{\beta)}^\mu. \quad (\text{A.12})$$

onde usou-se a notação

$$X_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(X_{\alpha\beta} + X_{\beta\alpha}) \quad (\text{A.13})$$

para denotar a parte simétrica de um tensor. De maneira análoga, usamos

$$X_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}(X_{\alpha\beta} - X_{\beta\alpha}) \quad (\text{A.14})$$

para denotar a parte anti-simétrica de um tensor.

Usamos $\langle \rangle$ para denotar projeções ortogonais de vetores e partes de tensores sem traço e simétricas projetadas ortogonalmente

$$v^{(\alpha)} := h^\alpha_\beta v^\beta, \quad X^{\langle\alpha\beta\rangle} := \left[h^{(\alpha}_\gamma h^{\beta)}_\delta - \frac{1}{3} h^{\alpha\beta} h_{\gamma\delta} \right] X^{\gamma\delta}. \quad (\text{A.15})$$

Portanto, qualquer tensor $X^{\langle\alpha\beta\rangle}$ é simétrico, sem traço e pertence ao espaço de repouso, ou seja,

$$T^{\langle\alpha\beta\rangle} = T^{(\alpha\beta)}, \quad T^{\langle\alpha}_\beta\rangle = 0, \quad T^{\langle\alpha\beta\rangle} u_\beta = 0. \quad (\text{A.16})$$

Quantidades Cinemáticas

A decomposição ortogonal da derivada covariante de u_α é dada por

$$u_{\alpha;\beta} = v_{\alpha\beta} + a_\alpha u_\beta \quad (\text{A.17})$$

onde $v_{\alpha\beta} = h^\gamma_\alpha h^\delta_\beta u_{\gamma;\delta}$ e $a_\alpha := \dot{u}_\alpha = u^\beta u_{\alpha;\beta}$ (veja a definição A.8).

O vetor a_α é o chamado vetor de aceleração e representa os efeitos de forças não gravitacionais, ou seja, se anula quando uma partícula se move somente sob a influência de forças inerciais e gravitacionais (veja a equação de Euler A.71).

O tensor $v_{\alpha\beta}$ é a parte espacial do gradiente de velocidade e representa as velocidades relativas às partículas vizinhas.

Podemos agora separar o tensor $v_{\alpha\beta}$ acima em suas partes irredutíveis, definidas por suas propriedades de simetria. Este tensor pode ser decomposto em suas partes simétrica e anti-simétrica da seguinte forma:

$$v_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} \quad (\text{A.18})$$

onde $\theta_{\alpha\beta} = v_{(\alpha\beta)}$, $\omega_{\alpha\beta} = v_{[\alpha\beta]}$, $\theta_{\alpha\beta} u^\beta = 0$ e $\omega_{\alpha\beta} u^\beta = 0$. O tensor $\omega_{\alpha\beta}$ é chamado tensor de vorticidade e descreve a rotação da matéria em relação a um referencial não rotacional. Podemos separar $\theta_{\alpha\beta}$ em uma parte isotrópica (proporcional à matriz identidade) e outra parte sem traço através de

$$\theta_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \theta h_{\alpha\beta} \quad (\text{A.19})$$

onde o traço $\theta = u^\alpha{}_{;\alpha}$ é a taxa de expansão (volumétrica) do fluido e $\sigma_{\alpha\beta} = \theta_{\langle\alpha\beta\rangle} = u_{\langle\alpha;\beta\rangle}$ é a parte simétrica e sem traço, chamada de tensor de cisalhamento ($\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{(\alpha\beta)}$, $\sigma_{\alpha\beta}u^\beta = 0$, $\sigma^\alpha{}_\alpha = 0$) e descreve a taxa de distorção do fluxo de matéria.

O significado destas quantidades pode ficar mais claro a partir da equação de evolução para um vetor de posição relativo

$$\eta^\alpha_{;\perp} = h^\alpha{}_\beta \eta^\beta, \quad (\text{A.20})$$

onde η_α é o vetor de desvio da família de linhas de universo fundamentais, ou seja, obedece à relação

$$\eta^\alpha{}_{;\beta} u^\beta = u^\alpha{}_{;\beta} \eta^\beta. \quad (\text{A.21})$$

Escrevendo

$$\eta^\alpha_{;\perp} = \delta l e^\alpha, \quad e_\alpha e^\alpha = 1, \quad (\text{A.22})$$

onde e^α representa uma dada direção e substituindo em (A.21), encontramos que a distância relativa δl obedece à equação

$$\frac{(\delta l)^\cdot}{\delta l} = \frac{1}{3}\theta + (\sigma_{\alpha\beta} e^\alpha e^\beta), \quad (\text{A.23})$$

que é conhecida como lei de Hubble generalizada e é válida mesmo que a expansão seja anisotrópica. Já o vetor de direção relativa obedece à equação

$$\dot{e}^{(\alpha)} = (\sigma^\alpha{}_\beta - (\sigma_{\gamma\delta} e^\gamma e^\delta) h^\alpha{}_\beta + w^\alpha{}_\beta) e^\beta, \quad (\text{A.24})$$

que dá a taxa observada na mudança da posição no céu de galáxias distantes.

A partir de (A.23) e (A.24), vemos que o efeito de θ sozinho é mudar o volume de um elemento fluido sem alterar a orientação, isto é, representa expansão pura sem rotação ou distorção. Podemos definir uma escala média de comprimento l ao longo da linha de universo de uma partícula através de

$$\frac{\dot{l}}{l} = \frac{1}{3}\theta \quad (\text{A.25})$$

Assim, como θ está relacionado com a variação relativa do volume \dot{V}/V , então, de (A.25) vemos que o volume do elemento de fluido varia com l^3 . A partir disso podemos definir o *parâmetro de Hubble* H como

$$H := \frac{\dot{l}}{l} = \frac{1}{3}\theta. \quad (\text{A.26})$$

O efeito do tensor de cisalhamento é causar distorções, deixando, porém, o volume invariante (já que $\sigma^\alpha_\alpha = 0$). A magnitude σ de $\sigma_{\alpha\beta}$ é

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} \geq 0, \quad (\text{A.27})$$

e é positiva definida já que $\sigma_{\alpha\beta}$ é simétrico e sem traço.

Já o efeito do tensor de vorticidade é mudar a orientação, preservando o volume e a forma. O vetor vorticidade ω^α é definido por

$$\omega^\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\omega_{\beta\gamma} \quad \rightarrow \quad \omega^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\omega_\gamma \quad (\text{A.28})$$

e obedece a $\omega_\alpha u^\alpha = 0$ e $\omega_{\alpha\beta}\omega^\alpha = 0$. A magnitude ω da vorticidade é dada por

$$\omega^2 = \omega^\alpha\omega_\alpha = \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta} \geq 0. \quad (\text{A.29})$$

Os escalares ω e σ se anulam se e somente se, respectivamente, o vetor vorticidade ou o tensor de cisalhamento forem nulos.

Com isso, introduzimos os parâmetros cinemáticos de interesse, σ , ω e θ .

O tensor de energia-momentum

O tensor de energia-momentum $T_{\alpha\beta}$, assim como qualquer tensor simétrico de segunda ordem, pode ser decomposto em relação a u^α na seguinte forma

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta - p h_{\alpha\beta} + q_\alpha u_\beta + q_\beta u_\alpha + \pi_{\alpha\beta} \quad (\text{A.30})$$

onde, por definição

$$q_\alpha u^\alpha = 0, \quad \pi^\alpha_\alpha = 0, \quad \pi_{\alpha\beta} = \pi_{(\alpha\beta)}, \quad \pi_{\alpha\beta} u^\beta = 0 \quad (\text{A.31})$$

e

$$\rho := T_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta, \quad (\text{A.32})$$

$$p := -\frac{1}{3}T_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta}, \quad (\text{A.33})$$

$$q^\alpha := T_{\beta\gamma} u^\beta h^{\gamma\alpha}, \quad (\text{A.34})$$

$$\pi_{\alpha\beta} := T^{\gamma\delta} h_{\alpha\gamma} h_{\beta\delta} + p h_{\alpha\beta} = T_{\langle\alpha\beta\rangle}. \quad (\text{A.35})$$

Nesse caso, ρ representa a densidade de energia (relativística) total em relação a u^α , p é a pressão isotrópica, q^α é o fluxo de energia relativa a u^α e representa processos como condução de calor e difusão e $\pi_{\alpha\beta}$ é a pressão anisotrópica. Estes parâmetros são chamados *parâmetros dinâmicos*.

Além disso, é necessário, no caso de uma descrição termodinâmica em que ρ , p e a entropia s são as variáveis fundamentais, uma equação de estado que relacione estas quantidades. Particular ênfase será dada a “fluidos perfeitos”, caracterizados por ter somente pressão isotrópica ($\pi_{\alpha\beta} = 0$) e não apresentar fluxo de calor ($q^\alpha = 0$), ou seja, quando pudermos escrever

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta - p h_{\alpha\beta} \quad (\text{A.36})$$

Se supormos que $p = 0$, temos o caso mais simples que é chamado “poeira” ou “matéria escura fria”. Em outros casos, temos que especificar uma equação de estado que determina p a partir de ρ e outras variáveis termodinâmicas, como a entropia s .

O tensor de curvatura de Weyl

Na Relatividade Geral, a curvatura do espaço-tempo é representada pelo tensor de curvatura de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ que, devido a suas propriedades de simetria, pode ser decomposto em termos do tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$, do escalar de Ricci R e do tensor de Weyl $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$, que é definido por

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} := R_{\alpha\beta\gamma\delta} - (g_{\alpha[\gamma} R_{\delta]\beta} - g_{\beta[\gamma} R_{\delta]\alpha}) + \frac{1}{3} R g_{\alpha[\gamma} g_{\delta]\beta}. \quad (\text{A.37})$$

O tensor de Weyl $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ pode ser decomposto em relação a u^α nos tensores

$$E_{\alpha\beta} = C_{\alpha\mu\beta\nu} u^\mu u^\nu, \quad H_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\mu}{}^{\rho\sigma} C_{\rho\sigma\beta\nu} u^\mu u^\nu. \quad (\text{A.38})$$

que são simétricos e sem traço ($H_{\alpha\beta} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta = H_{\mu\nu} = H_{(\mu\nu)}$, $H_{\alpha\beta} u^\beta = 0$ e $E_{\alpha\beta} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta = E_{\mu\nu} = E_{(\mu\nu)}$, $E_{\alpha\beta} u^\beta = 0$) e contêm toda a informação do tensor de Weyl.

Os tensores $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$ são chamados, respectivamente, de parte elétrica e magnética do tensor de Weyl, devido à analogia entre a sua definição e a definição covariante dos campos elétricos e magnéticos a partir do tensor $F_{\mu\nu}$ [86].

O tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$ é a parte do tensor de curvatura que é determinada localmente pelo conteúdo de matéria, através da equação de Einstein (A.1). Já o tensor de Weyl não é determinado localmente, pois devido às suas simetrias, ele não contribui para $R_{\alpha\beta}$ e portanto não aparece explicitamente nas equações de Einstein. Dessa forma, o tensor de Weyl representa o campo gravitacional livre, ou seja, a parte do tensor de curvatura cujo valor em um ponto não é determinado pela matéria nesse ponto. No vácuo, apenas o tensor de Weyl por ser diferente de zero.

Identities of Ricci

Agora vamos deduzir algumas equações úteis no formalismo 1 + 3 covariante da Relatividade Geral, que resultam das equações de Einstein (A.1) e de identidades envolvendo o tensor de curvatura.

O primeiro conjunto de equações é obtido a partir das identidades de Ricci

$$u_{\alpha;\beta;\gamma} - u_{\alpha;\gamma;\beta} = -R_{\alpha\varepsilon\beta\gamma}u^\varepsilon. \quad (\text{A.39})$$

Multiplicando estas identidades por u^γ e projetando no espaço de repouso obtemos

$$h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu (u_{\alpha;\beta})^\cdot - h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu (a_{\alpha;\beta} - u_{\alpha;\gamma} u^\gamma{}_{;\beta}) = -R_{\mu\varepsilon\nu\gamma} u^\varepsilon u^\gamma, \quad (\text{A.40})$$

onde usou-se

$$u_{\alpha;\gamma;\beta} u^\gamma = a_{\alpha;\beta} - u_{\alpha;\gamma} u^\gamma{}_{;\beta}, \quad (\text{A.41})$$

e a relação (A.17). Substituindo esta relação em (A.40) obtemos

$$h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu v_{\alpha\beta}^\cdot + a_\mu a_\nu - h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu a_{\alpha;\beta} + v_{\mu\gamma} v^\gamma{}_\nu = -R_{\mu\varepsilon\nu\gamma} u^\varepsilon u^\gamma. \quad (\text{A.42})$$

Esta expressão contém toda a informação necessária para a obtenção da evolução dos parâmetros cinemáticos, como será visto a seguir. Decompondo (A.42) em seu traço e suas partes simétrica e anti-simétrica sem traço, e utilizando as equações de Einstein (A.1) e a definição de $E_{\alpha\beta}$ (A.38) obtemos as equações de evolução.

Contraíndo a equação (A.42) nos índices μ e ν e após alguma manipulação, obtemos

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 + 2(\sigma^2 - \omega^2) - a^\alpha{}_{;\alpha} = -R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu. \quad (\text{A.43})$$

Das equações de Einstein e da definição do tensor energia-momentum (A.30), temos

$$R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 8\pi G \frac{1}{2} (\rho + 3p). \quad (\text{A.44})$$

Assim, a equação (A.43) pode ser escrita como

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 + 2(\sigma^2 - \omega^2) - a^\alpha{}_{;\alpha} + \frac{1}{2}8\pi G (\rho + 3p) = 0, \quad (\text{A.45})$$

que é conhecida como equação de Raychaudhuri.

Pegando a parte simétrica da equação (A.42), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{\langle\alpha\beta\rangle} - h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu a_{(\alpha;\beta)} + a_\mu a_\nu + \omega_\mu \omega_\nu + \sigma_{\mu\gamma} \sigma^\gamma{}_\nu + \frac{2}{3}\theta \sigma_{\mu\nu} + \\ + h_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{3}\omega^2 - \frac{2}{3}\sigma^2 + \frac{1}{3}a^\alpha{}_{;\alpha} \right) - \frac{\pi_{\mu\nu}}{2} - E_{\mu\nu} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

que é chamada equação de evolução do cisalhamento.

E, finalmente, pegando a parte anti-simétrica a equação (A.42), obtemos

$$h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu (\omega_{\alpha\beta})^\cdot - \frac{1}{2}h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu (a_{\alpha;\beta} - a_{\beta;\alpha}) + \frac{2}{3}\theta \omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\gamma} \omega^\gamma{}_\nu - \sigma_{\nu\gamma} \omega^\gamma{}_\mu = 0 \quad (\text{A.47})$$

que é a equação de evolução de $\omega_{\alpha\beta}$. Multiplicando por $\varepsilon^{\sigma\mu\nu}$ obtemos

$$\dot{\omega}^{\langle\sigma\rangle} + \frac{2}{3}\theta \omega^\rho - \sigma^\rho{}_\nu \omega^\nu + \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\rho} a_{\alpha;\beta} = 0, \quad (\text{A.48})$$

que é a equação da propagação da vorticidade. Note que, se $a_\alpha = 0$ (que corresponde ao caso de um fluido de matéria escura, como será visto adiante) e a vorticidade em um tempo t_0 for nula, então a vorticidade será nula em qualquer tempo.

As equações (A.45)-(A.47) são análogas às equações da dinâmica Newtoniana de fluidos [75]. A equação de Raychaudhuri (A.45) é a equação básica da atração gravitacional e identifica $(\rho + 3p)$ como a densidade de massa gravitacional “ativa”. O fato de p atuar como fonte de campo gravitacional é um efeito relativístico que contribui para o problema do colapso gravitacional em Relatividade Geral. A equação (A.48) leva à conservação da vorticidade. A equação (A.46) mostra como o termo de pressão anisotrópica $\pi_{\alpha\beta}$ e a parte elétrica do tensor de Weyl $E_{\alpha\beta}$ induzem distorções em um fluxo de fluido. É interessante notar que $E_{\alpha\beta}$ possui uma analogia com as forças de maré no caso Newtoniano [86], que são dadas pela parte sem traço do tensor $\phi_{,i,j}$

$$E_{ij} := \phi_{,i,j} - \frac{1}{2}h_{ij}\phi^{,k}{}_{,k}, \quad (\text{A.49})$$

onde ϕ é o potencial gravitacional. Entretanto, a parte magnética do tensor de Weyl não tem nenhum análogo newtoniano [75].

Há mais um conjunto de equações que podem ser obtidas a partir das identidades de Ricci (A.39). Elas são chamadas de equações de vínculo para os parâmetros cinemáticos e são obtidas fazendo-se projeções de (A.39) no espaço de repouso de u^α .

Contraindo os índices α e β nas identidades de Ricci e projetando no espaço de repouso encontramos

$$h^\gamma{}_\lambda (u^\alpha{}_{;\alpha})_{;\gamma} - h^\gamma{}_\lambda u^\alpha{}_{;\gamma;\alpha} = -R_{\varepsilon\gamma} u^\varepsilon h^\gamma{}_\lambda. \quad (\text{A.50})$$

Usando a equação (A.17) obtemos

$$h^\gamma{}_\lambda (u^\alpha{}_{;\alpha})_{;\gamma} = \frac{1}{3}\theta_{,\alpha} h^\alpha{}_\lambda + h^\gamma{}_\lambda (\sigma^\alpha{}_\gamma + \omega^\alpha{}_\gamma)_{;\alpha} + a^\alpha (\sigma_{\lambda\alpha} + \omega_{\lambda\alpha}). \quad (\text{A.51})$$

Substituindo esta expressão em (A.50) e usando a definição de $\theta = u^\alpha{}_{;\alpha}$ chega-se a

$$\frac{2}{3}\theta_{,\alpha} h^\alpha{}_\lambda - (\sigma^\alpha{}_\gamma + \omega^\alpha{}_\gamma)_{;\alpha} h^\alpha{}_\lambda - a^\alpha (\sigma_{\lambda\alpha} + \omega_{\lambda\alpha}) = -R_{\varepsilon\gamma} u^\varepsilon h^\gamma{}_\lambda. \quad (\text{A.52})$$

Mas, da definição do tensor de energia-momentum (A.30) e das equações de Einstein

$$R_{\varepsilon\gamma} u^\varepsilon h^\gamma{}_\lambda = q_\lambda. \quad (\text{A.53})$$

Portanto, a primeira equação de vínculo é

$$\frac{2}{3}\theta_{,\alpha} h^\alpha{}_\lambda - (\sigma^\alpha{}_\gamma + \omega^\alpha{}_\gamma)_{;\alpha} h^\alpha{}_\lambda - a^\alpha (\sigma_{\lambda\alpha} + \omega_{\lambda\alpha}) = -q_\lambda. \quad (\text{A.54})$$

Passemos agora para a segunda relação de vínculo. Usando as identidade de Ricci sucessivamente

$$-(R_{\alpha\varepsilon\beta\gamma} + R_{\beta\varepsilon\gamma\alpha} + R_{\gamma\varepsilon\alpha\beta}) u^\varepsilon = (u_{\alpha;\beta} - u_{\beta;\alpha})_{;\gamma} + (u_{\gamma;\alpha} - u_{\alpha;\gamma})_{;\beta} + (u_{\beta;\gamma} - u_{\gamma;\beta})_{;\alpha} = 0, \quad (\text{A.55})$$

vemos que

$$(u_{\alpha;\beta} - u_{\beta;\alpha})_{;\gamma} = 0. \quad (\text{A.56})$$

Usando a expressão (A.17) obtemos que

$$u_{\alpha;\beta} - u_{\beta;\alpha} = 2\omega_{\alpha\beta} + a_\alpha u_\beta - a_\beta u_\alpha \quad (\text{A.57})$$

Usando isso em (A.56) e multiplicando esta por $\eta^{\alpha\beta\gamma\lambda}u_\lambda$ obtemos

$$\omega^\alpha{}_{;\alpha} + 2\omega^\alpha a_\alpha = 0 \quad (\text{A.58})$$

que é a segunda equação de vínculo.

Finalmente, vamos determinar a terceira equação de vínculo. Multiplicando as identidades de Ricci por $\eta_\rho{}^{\gamma\beta\varepsilon}u_\varepsilon$ encontramos

$$2u_{\alpha;\beta;\gamma}\varepsilon_\rho{}^{\gamma\beta} = -R_{\alpha\mu\beta\gamma}u^\mu\varepsilon_\rho{}^{\gamma\beta}. \quad (\text{A.59})$$

Usando a equação (A.17) podemos reescrever esta expressão como

$$\frac{1}{3}\theta_{,\gamma}\varepsilon_\rho{}^\gamma{}_\alpha - \frac{2}{3}\theta u_\alpha\omega_\rho + 2a_\alpha\omega_\rho + (\sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta})_{;\gamma}\varepsilon_\rho{}^{\gamma\beta} = -\frac{1}{2}R_{\alpha\mu\beta\gamma}u^\mu\varepsilon_\rho{}^{\gamma\beta}. \quad (\text{A.60})$$

Simetrizando em α e ρ obtemos

$$-\frac{2}{3}\theta u_{(\alpha}\omega_{\rho)} + 2a_{(\alpha}\omega_{\rho)} + (\sigma_{\beta(\alpha} - \omega_{\beta(\alpha})_{;\gamma}\varepsilon_{\rho)}{}^{\gamma\beta} = -\frac{1}{2}R_{\beta\gamma\mu(\alpha}\varepsilon_{\rho)}{}^{\gamma\beta}u^\mu. \quad (\text{A.61})$$

Mas

$$R_{\beta\gamma\mu(\alpha}\varepsilon_{\rho)}{}^{\gamma\beta}u^\mu = 2H_{\alpha\rho} \quad (\text{A.62})$$

Então temos

$$-\frac{2}{3}\theta u_{(\alpha}\omega_{\rho)} + 2a_{(\alpha}\omega_{\rho)} + (\sigma_{\beta(\alpha} - \omega_{\beta(\alpha})_{;\gamma}\varepsilon_{\rho)}{}^{\gamma\beta} + H_{\alpha\rho} = 0, \quad (\text{A.63})$$

que é a terceira equação de vínculo.

As equações de propagação para os parâmetros cinemáticos (A.45)-(A.47) juntamente com as equações de vínculo (A.54), (A.58) e (A.63) são totalmente equivalentes às identidades de Ricci (A.39) [75].

Identidade de Bianchi

O segundo conjunto de equações vem das identidades de Bianchi

$$R_{\alpha\beta[\gamma\delta;\varepsilon]} = 0. \quad (\text{A.64})$$

Contraindo esta equação uma segunda vez e usando a definição do tensor de Weyl, obtemos

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{;\delta} = R^{\gamma[\alpha;\beta]} - \frac{1}{6}g^{\gamma[\alpha}R^{\beta]}. \quad (\text{A.65})$$

Essas equações implicam nas identidades de Bianchi contraídas

$$R^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} = \frac{1}{2} R^{;\beta} \quad \leftrightarrow \quad G^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} = 0, \quad (\text{A.66})$$

que, pela equação de Einstein, são equivalentes à conservação do tensor de energia-momentum

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} = 0. \quad (\text{A.67})$$

Projetando essa equação paralelamente a u^α , obtemos

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta + q^\alpha{}_{;\alpha} + \dot{q}^\alpha u_\alpha - \pi^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = 0, \quad (\text{A.68})$$

e projetando ortogonalmente a u^α

$$(\rho + p)a_\gamma + h^\alpha{}_\gamma (-p_{;\alpha} + \dot{q}_\alpha + \pi^\beta{}_{\alpha;\beta}) + q^\alpha \left(\frac{4}{3}\theta h_{\gamma\alpha} + \sigma_{\gamma\alpha} + \omega_{\gamma\alpha} \right) = 0 \quad (\text{A.69})$$

A equação (A.68) é expressão relativística da conservação de energia e a equação (A.69) é o equivalente da equação de Navier-Stokes. Para um fluido perfeito ($q^\alpha = 0$ e $\pi^{\alpha\beta} = 0$), a equação (A.68) se reduz a

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = 0, \quad (\text{A.70})$$

enquanto (A.69) leva à equação de Euler relativística

$$(\rho + p)a_\gamma - \text{div } p = 0, \quad (\text{A.71})$$

onde $\text{div } p$ é dado por (A.9). Isto mostra que, no caso relativístico, $(\rho + p)$ é a densidade de massa inercial. No caso de um fluido sem pressão (poeira), temos que $a_\gamma = 0$ e as partículas seguem geodésicas.

A velocidade do som é definida por

$$c_s^2 = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \quad (\text{A.72})$$

e deve satisfazer a seguinte relação

$$0 \leq c_s^2 \leq 1, \quad (\text{A.73})$$

para manter a estabilidade local da matéria (limite inferior) e causalidade (limite superior).

No caso adiabático, a velocidade do som é dada por

$$c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}. \quad (\text{A.74})$$

Um terceiro conjunto de equações também pode ser obtido a partir das identidades de Bianchi (A.65). Usando a decomposição de $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ em $R_{\alpha\beta}$ e $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ e as equações de Einstein, encontramos duas novas equações de propagação para $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$ e duas equações de vínculo. Essas quatro equações são análogas às equações de Maxwell e, por isso, são conhecidas como equações quasi-maxwellianas. Estas equações mostram que, assim como no eletromagnetismo, no vácuo também existe uma dualidade entre as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl. Como estas equações não serão utilizadas nas discussões desta dissertação, não as reproduziremos aqui. Entretanto, elas podem ser encontradas, por exemplo, em [75].

A.1.2 O modelo de Friedmann

Historicamente, quando o modelo de Friedmann foi proposto ele pressupunha, por simplicidade, que o espaço-tempo podia ser fatiado em hipersuperfícies de tempo constante, onde cada hipersuperfície possui curvatura constante. Em outras palavras, o Universo é espacialmente homogêneo e isotrópico. Hoje, um vasto conjunto de observações complementares, em uma ampla gama de comprimentos de onda, cobrindo vários processos físicos, indica que, de fato a métrica e o conteúdo material são homogêneos e isotrópicos.

O elemento de linha que representa este espaço-tempo, no sistema de coordenadas comóveis (t, r, θ, ϕ) , é dado por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (\text{A.75})$$

onde $a(t)$ é o fator de escala.

Podemos definir um observador adaptado às simetrias do espaço-tempo, associando a ele uma 4-velocidade definida a partir do vetor de Killing dessa métrica,

$$u_\alpha = (1, 0, 0, 0). \quad (\text{A.76})$$

Nesse caso, o único parâmetro cinemático não nulo é θ .

Decompondo o tensor energia-momentum $T_{\alpha\beta}$ em relação a esse campo de velocidades, é possível mostrar que ele é equivalente ao tensor energia-momentum de um fluido perfeito (A.36), já que $\pi_{\alpha\beta}$ e q_α são nulos. Dessa forma, os únicos parâmetros dinâmicos que não se anulam são ρ e p .

Os parâmetros ρ , p e θ devem ter o mesmo valor em todos os pontos, ou seja, suas derivadas espaciais devem ser nulas

$$\rho_{,\alpha} h^\alpha_\beta = 0, \quad p_{,\alpha} h^\alpha_\beta = 0, \quad \theta_{,\alpha} h^\alpha_\beta = 0. \quad (\text{A.77})$$

Como mostrado anteriormente em (A.25), podemos introduzir uma distância entre observadores, que de agora em diante chamaremos de a ou fator de escala

$$\frac{\dot{a}}{a} := \frac{1}{3}\theta. \quad (\text{A.78})$$

Dessa forma o volume do elemento de fluido varia com a^3 e θ fornece a taxa de expansão deste volume. Escolhemos t de tal forma que

$$\dot{x} = x_{;\alpha} u^\alpha = \frac{\partial x}{\partial t}. \quad (\text{A.79})$$

O tempo t é o tempo medido por um observador comovente com a expansão média e é chamado de tempo cosmológico. Assim, a dinâmica vai ser inteiramente descrita por $\rho(t)$, $p(t)$ e $\theta(t)$.

Para este modelo, as únicas equações de evolução que não são triviais são a equação de Raychaudhuri (A.45)

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 + 4\pi G(\rho + 3p) = 0 \quad (\text{A.80})$$

e a equação da conservação da energia, dada por (A.70). Em termos de a , estas equações podem ser escritas, respectivamente, como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (\text{A.81})$$

e

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (\text{A.82})$$

As equações (A.81) e (A.82), juntamente com uma equação de estado $p = p(\rho)$, determinam completamente a evolução do Universo neste modelo. Combinando estas duas equações obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{a}^2) = \frac{4\pi G}{3} \frac{d}{dt}(a^2 \rho). \quad (\text{A.83})$$

Esta equação pode ser facilmente integrada para obter a chamada equação de Friedmann

$$H^2 := \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}, \quad (\text{A.84})$$

onde k é uma constante de integração. Pode-se mostrar que k é a curvatura espacial presente na métrica (A.75).

Resolvendo a equação de Friedmann podemos obter a evolução do fator de escala em função do tempo se soubermos a dependência de ρ em relação ao fator de escala, o que pode ser obtido através de (A.82).

Definindo o parâmetro de densidade como

$$\Omega := \frac{8\pi G}{3H^2} \rho, \quad (\text{A.85})$$

podemos reescrever a equação de Friedmann como

$$(\Omega - 1)a^2 H^2 = k, \quad (\text{A.86})$$

o que mostra que a curvatura espacial é nula se $\Omega = 1$.

Quando tivermos diversas componentes com densidades de energia ρ_i , teremos

$$\rho = \sum_i \rho_i \quad \rightarrow \quad \Omega = \sum_i \Omega_i = \frac{8\pi G}{3H^2} \sum_i \rho_i. \quad (\text{A.87})$$

Definindo a densidade de energia crítica como

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (\text{A.88})$$

de modo que

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_{crit}} \quad \rightarrow \quad \Omega = \sum_i \Omega_i = \frac{1}{\rho_{crit}} \sum_i \rho_i. \quad (\text{A.89})$$

Referências Bibliográficas

- [1] V. C. Rubin e W. K. Ford, *Astrophys. J.* **159**, 379 (1970)
- [2] F. Zwicky, *Astrophys. J.* **86**, 217 (1937)
- [3] L. J. Rosenberg e K. A. van Bibber, *Phys. Rep.* **325**, 1 (2000)
- [4] J. R. Ellis, J. S. Hagelin, D. V. Nanopoulos, K. A. Olive e M. Srednicki, *Nucl. Phys. B* **238**, 453 (1984)
- [5] J. R. Ellis, D. V. Nanopoulos e S. Sarkar, *Nucl. Phys. B* **259**, 175 (1985)
- [6] G. Bertone, D. Hooper e J. Silk, *Phys. Rep.* **405**, 279 (2005)
- [7] S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* **483**, 565 (1997)
- [8] A. G. Riess *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998)
- [9] C. Armendariz-Picon, T. Damour e V. Mukhanov, *Phys. Lett. B* **458**, 209 (1999)
- [10] R. R. Cadwell, R. Dave e P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1582 (1998)
- [11] P. J. Steinhardt, L. Wang e I. Zlatev, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 896 (1996)
- [12] X. Z. Li, J. G. Hao e D. J. Liu, *Class. Quantum Grav.* **19**, 6049 (2002)
- [13] R. R. Cadwell, *Phys. Lett. B* **545**, 23 (2002)
- [14] R. R. Cadwell, M. Kamionkowski e N. N. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 071301 (2003)

- [15] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov e P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. B **85**, 4438 (2000)
- [16] E. Copeland, M. Sami e S. Tsujikawa, Int. J. Mod. Phys. D **15**, 1753 (2006)
- [17] D. Bertacca, S. Matarrese e M. Pietroni, Mod. Phys. Lett. A **22**, 2893 (2007)
- [18] M. Born e L. Infeld, Proc. Roy. Soc. Lond. A **144**, 425 (1934)
- [19] W. Heisenberg, Zeitschrift fur Physik A Hadrons and Nuclei **113** (1939)
- [20] W. Heisenberg, Zeitschrift fur Physik A Hadrons and Nuclei **133** (1952)
- [21] P. A. M. Dirac, Royal Society of London Porceeding Series A **268**, 57 (1962)
- [22] D. Gross e E. Witten, Nucl. Phys. B **227**, 1 (1986)
- [23] J. Polchinski, *Superstrings*, Cambridge University Press (1998)
- [24] T. Chiba, T. Okabe e M. Yamaguchi, Phys. Rev. D **62**, 023511 (2000)
- [25] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov e P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D **63**, 103510 (2001)
- [26] T. Chiba, Phys. Rev. D **66**, 063514 (2002)
- [27] N. Bilič, G. B. Tupper e R. D. Viollier, Phys. Lett. B **535**, 17 (2002)
- [28] M. C. Bento, O. Bertolami e A. A. Sen, Phys. Rev. D **66**, 043507 (2002)
- [29] R. Scherrer, Phys. Rev. Lett. **93**, 011301 (2004)
- [30] M. Novello, M. Makler, L. S. Werneck e C. A. Romero, Phys. Rev. D **71**, 043515 (2005)
- [31] J. M. Aguirregabiria, L. P. Chimento e R. Lazkoz, Phys. Lett. B **631**, 93 (2005)
- [32] R. de Puter e E. V. Linder, Astropart. Phys. **28**, 263 (2007)
- [33] L. P. Chimento, Phys. Rev. D **69**, 123517 (2004)

- [34] W. Fang, H. Q. Lu e Z. G. Huang, *Class. Quantum Grav.* **24**, 3799 (2007)
- [35] J. Garriga e V. F. Mukhanov, *Phys. Lett. B* **458**, 219 (1999)
- [36] M. Makler, S. Q. Oliveira e I. Waga, *Phys. Lett. B* **555**, 1 (2003)
- [37] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press (2005)
- [38] J. M. Bardeen, *Phys. Rev. D* **22**, 1882 (1980)
- [39] H. Kodama, M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **78**, 1 (1984)
- [40] E. M. Lifshitz, *J. Phys. USSR* **10**, 116 (1946)
- [41] H. Sandvik, M. Tegmark, M. Zaldarriaga e I. Waga, *Phys. Rev. D* **69**, 123524 (2004)
- [42] R. R. R. Reis, I. Waga, M. O. Calvão e S. Jorás, *Phys. Rev. D* **68**, 061302 (2003)
- [43] R. R. R. Reis, M. Makler e I. Waga, *Class. Quantum Grav.* **22**, 353 (2005)
- [44] A. Kamenshchik, U. Moschella e V. Pasquier, *Phys. Lett. B* **511**, 265 (2001).
- [45] J. C. Fabris, S. V. B. Gonçalves e P. E. Souza, *Gen. Rel. Grav.* **34**, 2111 (2002)
- [46] M. Makler, *Dinâmica gravitacional da formação de estruturas no Universo*, tese de doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (2001)
- [47] R. Jackiw, [physics/0010042](#)
- [48] H. B. Benaoum, [hep-th/0205140](#)
- [49] J. C. Fabris, S. V. B. Gonçalves e P. E. Souza, [astro-ph/0207430](#)
- [50] P. P. Avelino, L. M. G. Beça, J. P. M. de Carvalho, C. J. A. P. Martins e P. Pinto, *Phys. Rev. D* **67**, 023511 (2003)
- [51] A. Dev, J. S. Alcaniz e D. Jain, *Phys. Rev. D* **67**, 023515 (2003)

- [52] R. Colistete Jr., J. C. Fabris, S. V. B. Gonçalves e P. E. de Souza, *Int. J. Mod. Phys. D* **13**, 669 (2004)
- [53] R. Colistete Jr. e J. C. Fabris, *Class. Quant. Grav.* **22**, 2813 (2005)
- [54] P. T. Silva e O. Bertolami, *Astrophys. J.* **599**, 829 (2003)
- [55] M. Makler, S. Q. de Oliveira e I. Waga, *Phys. Rev. D* **68**, 123521 (2003)
- [56] L. Amendola, F. Finelli, C. Burigana e D. Caturán, *JCAP* **07**, 005 (2005)
- [57] P. Wu e H. Yu, *JCAP* **03**, 015 (2007)
- [58] Z.-H. Zhu, *Astron. Astrophys.* **423**, 421 (2004)
- [59] L. Amendola, M. Makler, R. R. R. Reis e I. Waga, *Phys. Rev. D* **74**, 063524 (2006)
- [60] L. R. Abramo e N. P. Neto, *Phys. Rev. D* **73**, 063522 (2006)
- [61] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons (1972)
- [62] G. Cowan, *Statistical Data Analysis*, Oxford University Press (1998)
- [63] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling e B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 90*, Cambridge University Press (1996)
- [64] <http://www.wolfram.com>
- [65] A. G. Riess *et al.*, *Astrophys. J.* **659**, 98 (2007)
- [66] D. N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003)
- [67] B. Gold *et al.*, [arXiv:0803.0715](https://arxiv.org/abs/0803.0715) [astro-ph]
- [68] G. Steigman, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **57**, 463 (2007)
- [69] S. Burles, K. M. Nollett e M. S. Turner, *Astrophys. J.* **552**, L1 (2001)

- [70] D. Kirkman, D. Tytler, N. Suzuki, J. M. O'Meara e D. Lubin, *Astrophys. J. Suppl.* **149**, 1 (2003)
- [71] W. L. Freedman *et al.*, *Astron. J.* **553**, 47 (2001)
- [72] Y. Wang e P. M. Garnavich, *Astrophys. J.* **552**, 445 (2001)
- [73] J. Ehlers, *Gen. Rel. Grav.* **25**, 1225 (1993)
- [74] S. W. Hawking, *Astrophys. J.* **145**, 544 (1966)
- [75] G. F. R. Ellis, *Relativistic Cosmology*, em R. K. Sachs, *General Relativity and Cosmology*, proceedings of the XLVII Enrico Fermi Summer School, Academic Press (1971)
- [76] M. Novello, *Cosmologia Relativística*, em M. Novello, *II Escola de Cosmologia e Gravitação do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas*, J. Sasson e Cia (1970)
- [77] CAMB - Code for Anisotropies in the Microwave Background, <http://camb.info/>
- [78] P. K. S. Dunsby, B. Basset e G. F. R. Ellis, *Class. Quantum Grav.* **14**, 1215 (1997)
- [79] W. R. Stoeger, R. Maartens e G. F. R. Ellis, *Astrophys. J.* **443**, 1 (1995)
- [80] R. Maartens, G. F. R. Ellis e W. R. Stoeger, *Astron. Astrophys.* **309**, L7 (1996)
- [81] N. Mustapha, C. Hellaby e G. F. R. Ellis, *MNRAS* **292**, 817 (1997)
- [82] M. Bruni, S. Matarrese e O. Pantano, *Astrophys. J.* **445**, 958 (1995)
- [83] M. Bruni, S. Matarrese e O. Pantano, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1916 (1995)
- [84] E. Bertschinger e B. Jain, *Astrophys. J.* **431**, 486 (1994)
- [85] M. Makler, T. Kodama e M. O. Calvão, *Astrophys. J.* **557**, 88 (2001)
- [86] G. F. R. Ellis, *Relativistic Cosmology*, em E. Schatzman, *Cargèse Lectures on Physics*, Vol. 6, p. 1., Gordon and Breach, New York (1973)

- [87] G. F. R. Ellis e H. van Elst, NATO Adv.Study Inst.Ser.C.Math.Phys.Sci. **541**, 1 (1999)