Tese de Mestrado

Efeitos da Torção no Espectro da "Gravitação Topologicamente Massiva"

Leonardo Machado de Moraes

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUÍSAS FÍSICAS
Rio de Janeiro, fevereiro de 2000

Aos amigos ausentes...
"And I'm up while the dawn is breaking, even thought my heart is aching. I should be drinking a toast to absent friends instead of these comedians."
–Elvis Costello–

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais, pelo apoio e compreensão que sempre tiveram, e à minha prima Ingrid, pela amizade e carinho de tanto tempo.

Minhas considerações à CAPES, pela ajuda de custo para a elaboração da tese.

Meu muito obrigado à Miriam, sempre prestativa, paciente e bem humorada, nunca deixando qualquer problema sem solução, e sempre encaminhando tudo o mais prontamente possível. E ao Marcelo também.

À Rosângela e à Beth, sempre solícitas e dando "aquela mãozinha", sem a qual nada funciona.

Ao Prof. Caride pelas excelentes condições de trabalho que implantou na nossa pós-graduação.

Agradeço ao meu orientador, Helayël, pela paciência e compreensão pelos tempos difíceis que atravessei ao longo deste meu demorado período aqui no CBPF.

Meu muito obrigado também ao Boldo(Zé Luís); sem a sua ajuda, amizade e paciência, que transcenderam em muito as "questões de trabalho", provavelmente esta tese jamais teria saído.

Ao Nélson Panza, por suas discussões, também fica o meu obrigado.

Por último, mas nem por isto os menos importantes, deixo meu obrigado a todos que me aturaram por todo este tempo. O pessoal do "inferninho": Flávio, Mario, Felipe, Herman, Paulo, Luis, Armando, Vitor e Gege. O pessoal do "céu": Martin, André, Robson, Rafael, Ronaldo, Santini e mais a galera toda(são muitos!). E, claro, o pessoal aqui da "terra": Penna Firme, Daniel, Ozemar, Humberto, Mauro&Guida, Guilherme, Guilhermo, Álvaro "doidão", Cristine, Márcia, Vitor, Cd, Oswaldo, German, Leon, Tião e, em especial, Winder, Cláudio e Álvaro Nogue..

Ah, ia esquecendo, ao André Tenório&Paty Pimentinha, pela amizade e compreensão; acho que só as boas amizades é que conseguem passar pelas tantas "crises" que acontecem, e se manterem após isso. Meu abraço a vocês.

Resumo

Neste trabalho, consideramos o modelo da gravitação topologicamente massiva em (1+2)-D, levando em conta efeitos devido à torção e a termos quadráticos na curvatura. Para o tratamento pertubativo do problema, é necessário estendermos os operadores de spin de Barnes-Rivers. O espectro de excitações é analisado em detalhes e a unitaridade em "tree-level" é discutida em alguns casos especiais.

Abstract

We consider in this work the model for topologically massive gravity in (1+2)-D, taking into account torsion effects and adding up quadratic curvature terms. Envisaging a pertubative analysis of the problem, we extend the class of Barnes-Rivers spin operators. The spectrum of excitations is thoroughly analysed and the tree-level unitarity is discussed in some special cases.

Índice

Agradecimentos i

Resumo ii

Abstract iii

Índice iv

Introdução **1**

0.1 Gravitação e Unificação 1

0.2 Torção 2

0.2.1 Comentários gerais 2

0.2.2 Teoria das conexões com torção 3

0.3 Gravitação em (1+2)-D 4

0.4 Torção em (1+2)-D 5

1 A Ação e os Modos de Torção **7**

1.1 Propriedades Algébricas de $\mathcal{R}_{\alpha\mu\nu\beta}$ e Tensores Oriundos dos Mesmos. 8

1.2 Decomposição do Tensor de Torção 11

1.3 A Ação em Presença de Torção 13

2 Os Operadores de Spin da Gravitação em 3D. **24**

2.1 Os Operadores de Spin 24

2.2 A Ação em Termos dos Operadores de Spin 25

3 Propagadores e Espectro de Excitações **33**

3.1 Técnica de Inversão com Operadores de Spin 33

3.2 Propagadores, Excitações e Unitaridade em "Tree-level" 36

Conclusões Gerais **45**

A A Álgebra dos Operadores de Spin **46**

Bibliografia **50**

Introdução

0.1 Gravitação e Unificação

Com o advento da Teoria da Relatividade Geral de Einstein, em 1915, um novo horizonte abriu-se para o entendimento dos efeitos gravitacionais. Desde o seu surgimento, inúmeras tentativas foram feitas para colocá-la, juntamente com as outras teorias em voga na época, num único modelo unificado, que descrevesse completamente todas as propriedades, conhecidas ou não, da matéria.

Logo, a fenomenologia da época mostrou que pontos fundamentais ainda não haviam sido sequer tocados, e o projeto de uma teoria única foi um pouco eclipsado. Entretanto, o desenvolvimento das teorias para o comportamento da matéria ao nível microscópico foi veloz e, com o advento da Mecânica Quântica, em pouco tempo definiu, em linhas gerais, o cenário onde deveria ser tentada a unificação. Contudo, um sério problema persistia: a descrição das teorias de gravitação e das teorias de campos se davam com formulações bem distintas. Para contornar este problema, tentou-se, por um lado, o projeto de uma abordagem de teoria de campo da gravitação; por outro, dar uma formulação geométrica às teorias para os demais campos de forças conhecidos. Nenhum dos procedimentos deu a solução desejada e, hoje em dia, as teorias para objetos estendidos (como cordas e membranas) formuladas em 10 e 11 dimensões, parecem ser as mais promissoras para a resolução dos problemas da unificação.

Um procedimento alternativo e que, hoje se sabe, também não resolveu o problema (ao contrário, acrescentou-lhe novos aspectos), surge quando notamos o seguinte fato: a matéria, em nível microscópico, tem necessariamente dois parâmetros fundamentais: sua massa e seu spin. Entretanto, para a descrição dos efeitos gravitacionais, é necessário somente o conhecimento da distribuição de matéria existente (distribuição de energia). Observando-se isto, surge a questão: seria possível estender a Teoria da Relatividade Geral, de tal forma que a mesma acomodasse em sua formulação o spin da matéria e, assim, tivéssemos uma descrição da gravitação já com os parâmetros relevantes para a compreensão microscópica da mesma? A resposta é *sim*, sendo a **torção** do espaço-tempo o objeto que permite esta generalização.

0.2 Torção

0.2.1 Comentários gerais

Em 1921, Eddington sugeriu a introdução de uma conexão não-simétrica,[1], e observou que a mesma fazia com que paralelogramas infinitesimais fossem quebrados, isto é, não se fechassem. Élie Cartan, em 1922-25, começou a trabalhar com conexões cuja parte anti-simétrica era não-nula,[2, 3], e provou que a mesma transforma-se como um tensor, a que ele denominou tensor de torção. Cartan chegou a sugerir que o mesmo deveria estar associado a algum tipo de momentum angular intrínseco da matéria, mas não chegou a desenvolver profundamente a idéia, ficando a mesma esquecida durante certo tempo. Pouco depois, em 1925, surgia na Mecânica Quântica o conceito de spin (introduzido por Goudsmit e Uhlenbeck,[4]), que representa um momentum angular intrínseco da matéria. Anos após, consolidado o conceito, o trabalho de Cartan foi retomado,[5, 6, 7], e se mostrou que a torção do espaço-tempo era gerada pela distribuição da densidade de spin, e que a mesma poderia interagir somente por contato, através de interações tipo spin-spin,[8]. Estas interações contribuiriam para o tensor de energia-momentum, que, por sua vez, afetaria o campo gravitacional,[9, 10]. Com o passar do tempo, percebeu-se que o fato de não haver propagação da torção era uma prerrogativa muito mais devida às suposições históricas tomadas do que aos princípios fundamentais da teoria. Assim, as suposições iniciais foram levemente alteradas, de forma a permitir que houvesse propagação da torção. Desta forma, um férmion pode interagir com outro à distância também pelo efeito da torção,[11]. Vários problemas novos decorrem desta situação, mas um dos mais sérios (e que já afetava o modelo anterior) é o fato dos efeitos associados à torção serem tão fracos que nenhuma evidência experimental pôde ainda ser achada com os recursos tecnológicos hoje conhecidos,[12, 13]. Como os resultados previstos em teorias com torção diferem dos resultados usuais só em situações extremas (como buracos negros e Big-Bang), ou em escalas cosmológicas,[10], fica difícil dizer em definitivo se a generalização é válida ou não. A resposta provavelmente virá da comparação dos modelos cosmológicos ou das teorias de unificação.

0.2.2 Teoria das conexões com torção

Como mencionado anteriormente, o tensor de torção, $\tau_{\mu\nu}{}^{\lambda}$, é dado pela parte anti-simétrica da conexão afim, $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}$, ou, mais precisamente, por:

$$\tau_{\mu\nu}{}^{\lambda} = 2\,\Gamma_{[\mu\nu]}{}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}{}^{\lambda} \ . \tag{0.1}$$

Definindo o tensor de contorção,

$$K_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \frac{1}{2}(\tau_{\mu\nu}{}^{\lambda} + \tau^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \tau_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu}) \ , \tag{0.2}$$

pode-se mostrar que a conexão mais geral possível compatível com a métrica é dada por:

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} + K_{\mu\nu}{}^{\lambda} \ , \tag{0.3}$$

onde $\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu})$ é o símbolo de Christoffel, sendo $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico.

Desta forma, a equação de uma curva que autoparalelamente transporta seu vetor tangente será dada por:

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\alpha^2} + \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} \frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx^\nu}{d\alpha} + K_{(\mu\nu)}{}^{\lambda} \frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx^\nu}{d\alpha} = 0 \ , \tag{0.4}$$

que somente coincide com a equação usual de uma geodésica

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\alpha^2} + \{^{\lambda}_{\mu\nu}\}\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx^\nu}{d\alpha} = 0 \ , \tag{0.5}$$

se a parte simétrica da contorção for nula, ou seja $K_{(\mu\nu)}{}^{\lambda} = 0$.

Cabe, neste ponto, salientar que as equações de movimento de uma partícula, em geral, não coincidem com as equações das geodésicas, nem com as equações das curvas autoparalelas, pois no primeiro caso a trajetória das partículas-teste não seriam influenciadas pela torção, e no segundo todas as partículas seriam igualmente afetadas, de tal forma que mesmo partículas sem spin seguiriam trajetórias que se desviariam de uma geodésica.

Pode-se mostrar, seguindo-se o procedimento de Papapetrou,[14], usado na Relatividade Geral, que as equações de movimento para uma partícula têm a forma:

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} + \{^{\alpha}_{\mu\nu}\}p^\mu u^\nu + F^\alpha = 0 \ , \tag{0.6}$$

onde p^μ é o quadrimomentum da partícula, u^ν sua quadrivelocidade e F^α um termo de força que aparece da interação do spin da partícula com a geometria da variedade, sendo nulo se a partícula for escalar,[11]. No caso de partículas fermiônicas, é necessário se usar o formalismo das vierbeins (ou tetradas) para se obter as equações de movimento.

Quando se estuda a dinâmica dos campos gravitacional e de torção, as variações são feitas considerando-se estes campos independentes entre si. Neste caso, se considerarmos somente a ação de Einstein-Hilbert, a torção não apresenta dinâmica, sendo necessário acrescentarmos outros termos (potências da curvatura, por exemplo) para que isto se realize.

0.3 Gravitação em (1+2)-D

É de conhecimento geral que modelos de baixa dimensionalidade vêm sendo usados extensivamente em quase todas as áreas da Física; desde a Mecânica Quântica (onde modelos unidimensionais são usados para se introduzir conceitos de quantização de energia e tunelamento) até a Teoria de Campos (onde teorias bidimensionais são usadas para descrever efeitos como quebra espontânea de simetria e sólitons), bem como na Mecânica Estatística (onde o modelo de Ising bidimensional é um sistema completamente solúvel, apresentando transição de fase). Contudo, pouco interesse houve no passado em se desenvolver teorias de gravitação em dimensões mais baixas, talvez devido ao fato da teoria de Einstein não apresentar graus de liberdade dinâmicos nesses casos. Mais recentemente, entretanto, o interesse em tais teorias vem se consolidando, principalmente após se notar que a falta de um verdadeiro conteúdo dinâmico não impossibilita o aparecimento de aplicações interessantes, como se mostra no caso das teorias de Yang-Mills em 2-D. Ao contrário, gravitação em 3-D contém características em comum com gravitação em 4-D, tais como efeitos topológicos globais não-triviais. Além do mais, mostrou-se que a dinâmica pode aparecer se acrescentarmos termos tipo Chern-Simons,[15, 16], ou de ordem superior na curvatura (tipo escalar de curvatura ao quadrado ou Ricci ao quadrado). Descobriu-se, também, que a gravitação de Einstein-Chern-Simons em 3-D é renormalizável,[17, 18, 19], o que, pensou-se, poderia trazer alguma intuição para resolver o problema em 4-D.

0.4 Torção em (1+2)-D

No presente trabalho, consideraremos a introdução da torção na gravitação de Einstein-Chern-Simons, bem como de termos quadráticos no escalar de curvatura e no tensor de Ricci, e analisaremos as conseqüências disto sobre a teoria. Assim, no Capítulo 1, faremos uma breve revisão das propriedades do tensor de curvatura, quando considerado o termo de torção. Logo em seguida, decomporemos o tensor de torção em suas componentes irredutíveis em (1+2)-D, e proporemos uma ação para a descrição da dinâmica. No Capítulo 2, consideraremos uma generalização dos projetores de Barnes-Rivers em (1+2)-D para acomodarmos os termos provenientes da torção e de Chern-Simons, e escreveremos a ação bilinear nos campos em termos dos mesmos. No Capítulo 3, encontraremos os propagadores em "tree-level" dos campos e discutiremos as condições que devem ser impostas sobre os parâmetros da ação para assegurarmos a unitaridade (em "tree-level") da teoria. Seguem-se as Conclusões Gerais e, finalmente, inclui-se um Apêndice, onde é resumida a álgebra dos operadores de spin típicos de (1+2) dimensões.

Capítulo 1

A Ação e os Modos de Torção

Neste capítulo, veremos como ficam as propriedades algébricas do tensor de curvatura (e dos tensores dele obtidos), quando levamos em consideração uma conexão com parte anti-simétrica não-nula, sendo a mesma dada pelo tensor de torção. Em seguida, decomporemos a torção em suas componentes irredutíveis sob SO(1,2), expressando o tensor de Ricci e o escalar de curvatura em termos das mesmas. Uma vez de posse destas expressões, proporemos uma ação genérica para a descrição da dinâmica dos campos gravitacional e de torção em (1+2)-D. Considerando a aproximação de campo gravitacional fraco, e mantendo somente os termos bilineares nos campos, já que nosso objeto de análise é o espectro de excitações, obteremos a primeira expressão da nossa ação. Observando que o campo gravitacional tem as propriedades de um campo de gauge, é necessário acrescentar um termo de "gauge fixing" à ação, a fim de podermos proceder à quantização do modelo.

1.1 Propriedades Algébricas de $\mathcal{R}_{\alpha\mu\nu\beta}$ e Tensores Oriundos dos Mesmos.

O tensor de curvatura, $\mathcal{R}_{\alpha\mu\nu}{}^{\beta}$, é definido em termos da conexão afim pela expressão:

$$\mathcal{R}_{\alpha\mu\nu}{}^{\beta} = 2\partial_{[\alpha}\,\Gamma_{\mu]\nu}{}^{\beta} + 2\,\Gamma_{[\alpha|\gamma}{}^{\beta}\,\Gamma_{|\mu]\nu}{}^{\gamma} \quad . \tag{1.1}$$

Convém lembrar que, em teorias com uma conexão assimétrica, a conexão mais geral compatível com a métrica é dada por:

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \{^{\lambda}_{\mu\nu}\} + K_{\mu\nu}{}^{\lambda} \quad , \tag{1.2}$$

onde $\{^{\lambda}_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}(\partial_{\mu}g_{\kappa\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\kappa} - \partial_{\kappa}g_{\mu\nu})$ é a conexão (ou símbolo) de Christoffel e $K_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ o tensor de contorção, dado por:

$$K_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \frac{1}{2}(\tau_{\mu\nu}{}^{\lambda} + \tau^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \tau_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu}) \ , \tag{1.3}$$

sendo $\tau_{\mu\nu}{}^{\lambda} = 2\,\Gamma_{[\mu\nu]}{}^{\lambda}$ o tensor de torção.

Observe que a torção é anti-simétrica nos dois primeiros índices, $\tau_{\mu\nu}{}^{\lambda} = -\,\tau_{\nu\mu}{}^{\lambda}$, e que, em conseqüência disto, a contorção é anti-simétrica nos dois últimos índices, $K_{\mu\nu\lambda} = -K_{\mu\lambda\nu}$, com $K_{\mu\nu\lambda} = g_{\lambda\kappa}\,K_{\mu\nu}{}^{\kappa}$.

Substituindo (1.2) em (1.1), podemos escrever:

$$\mathcal{R}_{\alpha\mu\nu}{}^{\beta} = 2\partial_{[\alpha|}(\{^{\beta}_{|\mu]\nu}\} + K_{|\mu]\nu}{}^{\beta}) + 2(\{^{\beta}_{[\alpha|\gamma}\} + K_{[\alpha|\gamma}{}^{\beta})(\{^{\gamma}_{|\mu]\nu}\} + K_{|\mu]\nu}{}^{\gamma}) \ , \tag{1.4}$$

ou seja, temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\alpha\mu\nu}{}^{\beta} \quad = \quad & R_{\alpha\mu\nu}{}^{\beta} + \partial_{\alpha}\,K_{\mu\nu}{}^{\beta} - \{^{\gamma}_{\alpha\nu}\}\,K_{\mu\gamma}{}^{\beta} + \{^{\beta}_{\alpha\gamma}\}\,K_{\mu\nu}{}^{\gamma} \\ & -\partial_{\mu}\,K_{\alpha\nu}{}^{\beta} + \{^{\gamma}_{\mu\nu}\}\,K_{\alpha\gamma}{}^{\beta} - \{^{\beta}_{\mu\gamma}\}\,K_{\alpha\nu}{}^{\gamma} \\ & + K_{\alpha\gamma}{}^{\beta}\,K_{\mu\nu}{}^{\gamma} - K_{\mu\gamma}{}^{\beta}\,K_{\alpha\nu}{}^{\gamma} \ , \end{aligned} \tag{1.5}$$

onde $R_{\alpha\mu\nu}{}^{\beta} = 2\partial_{[\alpha}\{{}^{\beta}_{\mu]\nu}\} + 2\{{}^{\beta}_{[\alpha|\gamma}\}\{{}^{\gamma}_{|\mu]\nu}\}$ é o tensor de Riemann usual das teorias **sem torção** (é oportuno ressaltar a diferença notacional entre os dois tensores de curvatura: $\mathcal{R}_{\alpha\mu\nu}{}^{\beta}$ e $R_{\alpha\mu\nu}{}^{\beta}$).

Somando e subtraindo o termo $\{{}^{\gamma}_{\alpha\mu}\}\, K_{\gamma\nu}{}^{\beta}$ (e lembrando que $\{{}^{\gamma}_{\alpha\mu}\} = \{{}^{\gamma}_{\mu\alpha}\}$) em (1.5), ficamos com:

$$\mathcal{R}_{\alpha\mu\nu}{}^{\beta} = R_{\alpha\mu\nu}{}^{\beta} + D_{\alpha}\, K_{\mu\nu}{}^{\beta} - D_{\mu}\, K_{\alpha\nu}{}^{\beta} + K_{\alpha\gamma}{}^{\beta}\, K_{\mu\nu}{}^{\gamma} - K_{\mu\gamma}{}^{\beta}\, K_{\alpha\nu}{}^{\gamma} \ , \tag{1.6}$$

sendo $D_{\alpha}\, K_{\mu\nu}{}^{\beta} = \partial_{\alpha}\, K_{\mu\nu}{}^{\beta} - \{{}^{\gamma}_{\alpha\nu}\}\, K_{\mu\gamma}{}^{\beta} - \{{}^{\gamma}_{\alpha\mu}\}\, K_{\gamma\nu}{}^{\beta} + \{{}^{\beta}_{\alpha\gamma}\}\, K_{\mu\nu}{}^{\gamma}$, a derivada covariante usual das teorias sem torção, isto é, a derivada covariante sob transformações gerais de coordenadas com conexão de Christoffel.

A fim de se analisar as propriedades algébricas do tensor de curvatura, consideremos o tensor de Riemann totalmente covariante nos quatro índices, $\mathcal{R}_{\alpha\mu\nu\beta} = g_{\beta\gamma}\, \mathcal{R}_{\alpha\mu\nu}{}^{\gamma}$, ou explicitamente,

$$\mathcal{R}_{\alpha\mu\nu\beta} = R_{\alpha\mu\nu\beta} + D_{\alpha}K_{\mu\nu\beta} - D_{\mu}K_{\alpha\nu\beta} + K_{\alpha\gamma\beta}\, K_{\mu\nu}{}^{\gamma} - K_{\mu\gamma\beta}\, K_{\alpha\nu}{}^{\gamma} \ . \tag{1.7}$$

Lembremo-nos que $R_{\alpha\mu\nu\beta}$ tem as seguintes propriedades:

(a) $R_{\alpha\mu\nu\beta} = -R_{\mu\alpha\nu\beta} = -R_{\alpha\mu\beta\nu} = R_{\mu\alpha\beta\nu}$,

(b) $R_{\alpha\mu\nu\beta} = R_{\nu\beta\alpha\mu}$,

(c) $R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\nu\alpha\mu\beta} + R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$.

Temos, no nosso caso, com torção, que:

(i) $\mathcal{R}_{\alpha\mu\nu\beta} = -\mathcal{R}_{\mu\alpha\nu\beta} = -\mathcal{R}_{\alpha\mu\beta\nu} = \mathcal{R}_{\mu\alpha\beta\nu}$,

(ii) $\mathcal{R}_{\alpha\mu\nu\beta} = \mathcal{R}_{\nu\beta\alpha\mu} - 2D_{[\nu}K_{\beta]\alpha\mu} + 2D_{[\alpha}K_{\mu]\nu\beta} - 2K_{[\nu|\gamma\mu}\, K_{|\beta]\alpha}{}^{\gamma} + 2K_{[\alpha|\gamma\beta}\, K_{|\mu]\nu}{}^{\gamma}$,

(iii) $\mathcal{R}_{\alpha\mu\nu\beta} + \mathcal{R}_{\nu\alpha\mu\beta} + \mathcal{R}_{\mu\nu\alpha\beta} = 3(D_{[\alpha}\tau_{\mu\nu]\beta} + \tau_{[\mu\nu|}{}^{\gamma}\, K_{|\alpha]\gamma\beta})$.

Verifiquemos, também, como fica a identidade de Bianchi em presença de torção. Neste caso,

$$\begin{aligned} D_\lambda \mathcal{R}_{\alpha\mu\nu\beta} + D_\mu \mathcal{R}_{\lambda\alpha\nu\beta} + D_\alpha \mathcal{R}_{\mu\lambda\nu\beta} &= 3(K_{[\lambda|\nu}{}^{\gamma}\, \mathcal{R}_{|\alpha\mu]\gamma\beta} + K_{[\lambda|\beta}{}^{\gamma}\, \mathcal{R}_{|\alpha\mu]\nu\gamma}) \\ &= 3(K_{[\lambda|\nu}{}^{\gamma}\, R_{|\alpha\mu]\gamma\beta} + K_{[\lambda|\beta}{}^{\gamma}\, R_{|\alpha\mu]\nu\gamma}) \\ &\quad +6D_{[\lambda}(K_{\alpha|\gamma\beta}\, K_{|\mu]\nu}{}^{\gamma})\ . \end{aligned} \tag{1.8}$$

Vejamos, agora, como se modifica a expressão para o tensor de Ricci, $\mathcal{R}_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}\mathcal{R}_{\alpha\mu\nu\beta} = \mathcal{R}_{\alpha\mu\nu}{}^{\alpha}$:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + D_\alpha\, K_{\mu\nu}{}^{\alpha} - D_\mu\, K_{\alpha\nu}{}^{\alpha} + K_{\alpha\gamma}{}^{\alpha}\, K_{\mu\nu}{}^{\gamma} - K_{\mu\gamma}{}^{\alpha}\, K_{\alpha\nu}{}^{\gamma}\ . \tag{1.9}$$

Podemos facilmente observar, da expressão acima, que o tensor de Ricci não é simétrico na troca de seus índices. Usando a propriedade (ii) de $\mathcal{R}_{\alpha\mu\nu\beta}$, encontramos:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\nu\mu} - 2D_{[\nu}\, K^{\alpha]}{}_{\alpha\mu} + 2D_{[\alpha}\, K_{\mu]\nu}{}^{\alpha} - 2K_{[\nu|\gamma\mu}\, K^{|\alpha]}{}_{\alpha}{}^{\gamma} + 2\, K_{[\alpha|\gamma}{}^{\alpha}\, K_{|\mu]\nu}{}^{\gamma}\ . \tag{1.10}$$

O escalar de curvatura, $\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}$ assume a forma:

$$\mathcal{R} = R + 2D_\alpha\, K_\mu{}^{\mu\alpha} - K_\alpha{}^{\alpha}{}_{\gamma}\, K_\mu{}^{\mu\gamma} - K_{\mu\gamma}{}^{\alpha}\, K_\alpha{}^{\mu\gamma}\ . \tag{1.11}$$

Observando que: $K_\mu{}^{\mu\alpha} = -\, K_\mu{}^{\alpha\mu} = \frac{1}{2}(\tau_\mu{}^{\mu\alpha} + \tau^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\mu} - \tau_\mu{}^{\alpha\mu}) = \tau^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\mu}$, pois $\tau_\mu{}^{\mu\alpha} = 0$, e definindo o traço $t^\alpha = \tau^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\mu}$, podemos escrever:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + D_\alpha\, K_{\mu\nu}{}^{\alpha} + D_\mu t_\nu - t_\gamma\, K_{\mu\nu}{}^{\gamma} - K_{\mu\gamma}{}^{\alpha}\, K_{\alpha\nu}{}^{\gamma}\ . \tag{1.12}$$

Escrevendo $K_{\mu\gamma}{}^{\alpha}\, K_\alpha{}^{\mu\gamma}$ explicitamente em termos da torção, obtém-se que

$$K_{\mu\gamma}{}^{\alpha}\, K_\alpha{}^{\mu\gamma} = -\frac{1}{4}(2\tau_{\gamma\mu\alpha}\tau^{\gamma\alpha\mu} + \tau_{\gamma\alpha\mu}\tau^{\gamma\alpha\mu})\ ; \tag{1.13}$$

e, substituindo-os no escalar de curvatura, conclui-se que:

$$\mathcal{R} = R + 2D_\alpha t^\alpha - t_\alpha t^\alpha + \frac{1}{4}\tau_{\gamma\alpha\mu}\tau^{\gamma\alpha\mu} + \frac{1}{2}\tau_{\gamma\mu\alpha}\tau^{\gamma\alpha\mu} \ . \tag{1.14}$$

Todas estas expressões serão de extrema utilidade ao longo deste trabalho.

1.2 Decomposição do Tensor de Torção

O tensor de torção em (1+2)-D carrega consigo nove graus de liberdade, que podem ser descritos em termos de: um escalar, proveniente de sua representação completamente anti-simétrica; um trivetor, oriundo do traço da torção, e um tensor de segunda ordem, simétrico e de traço nulo. Em termos deles, o tensor de torção fica expresso como:

$$\tau_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varphi + \frac{1}{2}(g_{\gamma\beta}t_\alpha - g_{\gamma\alpha}t_\beta) + \varepsilon_{\alpha\beta\lambda}\, X^\lambda{}_\gamma \ , \tag{1.15}$$

onde $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ ($\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$) $= \sqrt{g}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ ($\frac{\epsilon^{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{g}}$) é o tensor covariante (contravariante) completamente anti-simétrico em (1+2)-D, sendo $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ ($\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$) a densidade tensorial de Levi-Civita do espaço plano, e $g_{\alpha\beta}$ a métrica do espaço-tempo.

Da definição do tensor de contorção,

$$K_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\tau_{\alpha\beta\gamma} + \tau_{\gamma\alpha\beta} - \tau_{\beta\gamma\alpha}) = \frac{1}{2}(3\tau_{[\alpha\beta\gamma]} + 2\tau_{\gamma\beta\alpha}) \ , \tag{1.16}$$

temos, usando a eq. (1.15),

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2}\{3\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varphi + 2[\varepsilon_{\gamma\beta\alpha}\varphi + \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta}t_\gamma - g_{\alpha\gamma}t_\beta) + \varepsilon_{\gamma\beta\lambda}\, X^\lambda{}_\alpha]\} \\ &= \frac{1}{2}[\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varphi + (g_{\alpha\beta}t_\gamma - g_{\alpha\gamma}t_\beta) + 2\varepsilon_{\gamma\beta\lambda}\, X^\lambda{}_\alpha] \ . \end{aligned} \tag{1.17}$$

Assim, podemos agora expressar, através destas relações, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura em termos de φ, t_α e $X_{\alpha\beta}$. Para isto vejamos primeiramente como ficam os produtos $K_{\mu\gamma}{}^\alpha\, K_{\alpha\nu}{}^\gamma$, $\tau_{\gamma\alpha\mu}\tau^{\gamma\alpha\mu}$ e $\tau_{\gamma\mu\alpha}\tau^{\gamma\alpha\mu}$ em termos dos mesmos.

Antes, porém, lembremos que em (1+2)-D valem as seguintes relações para $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\mu\nu\lambda} &= \delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta\delta^\lambda_\gamma - \delta^\mu_\alpha\delta^\lambda_\beta\delta^\nu_\gamma + \delta^\lambda_\alpha\delta^\mu_\beta\delta^\nu_\gamma - \delta^\lambda_\alpha\delta^\nu_\beta\delta^\mu_\gamma + \delta^\nu_\alpha\delta^\lambda_\beta\delta^\mu_\gamma - \delta^\nu_\alpha\delta^\mu_\beta\delta^\lambda_\gamma \ , \qquad (1.18)\\
\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\alpha\nu\lambda} &= \delta^\nu_\beta\delta^\lambda_\gamma - \delta^\lambda_\beta\delta^\nu_\gamma \ ,\\
\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda} &= 2\delta^\lambda_\gamma \ ,\\
\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} &= 6 \ .
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\tau_{\gamma\alpha\mu}\tau^{\gamma\alpha\mu} &= [\varepsilon_{\gamma\alpha\mu}\varphi + \frac{1}{2}(g_{\mu\alpha}t_\gamma - g_{\mu\gamma}t_\alpha) + \varepsilon_{\gamma\alpha\lambda}\, X^\lambda{}_\mu] \times \qquad (1.19)\\
&\quad \times[\varepsilon^{\gamma\alpha\mu}\varphi + \frac{1}{2}(g^{\mu\alpha}t^\gamma - g^{\mu\gamma}t^\alpha) + \varepsilon^{\gamma\alpha\kappa}\, X_\kappa{}^\mu]\\
&= 6\varphi^2 + t_\alpha t^\alpha + 2X_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta} \ ;
\end{aligned}$$

da mesma forma,

$$\begin{aligned}
\tau_{\gamma\mu\alpha}\tau^{\gamma\alpha\mu} &= [\varepsilon_{\gamma\mu\alpha}\varphi + \frac{1}{2}(g_{\alpha\mu}t_\gamma - g_{\alpha\gamma}t_\mu) + \varepsilon_{\gamma\mu\lambda}\, X^\lambda{}_\alpha] \times \qquad (1.20)\\
&\quad \times[\varepsilon^{\gamma\alpha\mu}\varphi + \frac{1}{2}(g^{\mu\alpha}t^\gamma - g^{\mu\gamma}t^\alpha) + \varepsilon^{\gamma\alpha\kappa}\, X_\kappa{}^\mu]\\
&= -6\varphi^2 + \frac{1}{2}t_\alpha t^\alpha + X_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta} \ .
\end{aligned}$$

O termo de contorção, por sua vez, lê-se como segue:

$$\begin{aligned}
K_{\mu\gamma}{}^\alpha\, K_{\alpha\nu}{}^\gamma &= \frac{1}{4}[\varepsilon_{\mu\gamma\alpha}\varphi + \frac{1}{2}(g_{\mu\gamma}t_\alpha - g_{\mu\alpha}t_\gamma) + 2\varepsilon_{\alpha\gamma\lambda}\, X^\lambda{}_\mu] \times \qquad (1.21)\\
&\quad \times[\,\varepsilon^\alpha{}_\nu{}^\gamma\,\varphi + \frac{1}{2}(g^\alpha{}_\nu\, t^\gamma - g^{\alpha\gamma}t_\nu) + 2\ \varepsilon^\gamma{}_\nu{}^\kappa\, X_\kappa{}^\alpha]\\
&= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi^2 - \frac{3}{4}\varepsilon_{\mu\nu\gamma}t^\gamma\varphi - \frac{1}{2}X_{\mu\nu}\varphi + \frac{1}{4}(t_\mu t_\nu - g_{\mu\nu}t_\alpha t^\alpha)\\
&\quad + \frac{1}{2}(\varepsilon_{\mu\nu\kappa}t_\alpha X^{\alpha\kappa} - 2\varepsilon_{\gamma\nu\kappa}t^\gamma\, X^\kappa{}_\mu) - X_\mu{}^\gamma\, X_{\gamma\nu} \ .
\end{aligned}$$

Substituindo esta última expressão juntamente com a eq.(1.17) na eq.(1.12), obtemos que o tensor de Ricci assume a seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha} D_\alpha\varphi + D_\mu t_\nu + g_{\mu\nu} D_\alpha t^\alpha + \varepsilon^{\alpha}{}_{\nu\lambda} D_\alpha X^{\lambda}{}_{\mu}) \\
&- \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\varphi^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\gamma} t^\gamma \varphi + \frac{1}{4}(t_\mu t_\nu - g_{\mu\nu} t_\alpha t^\alpha) \\
&- \frac{1}{2}(\varepsilon_{\mu\nu\kappa} t_\alpha X^{\alpha\kappa} - \varepsilon_{\gamma\nu\kappa} t^\gamma X^{\kappa}{}_{\mu}) + X_\mu{}^\gamma X_{\gamma\nu} \ .
\end{aligned} \tag{1.22}
$$

Do mesmo modo, substituindo as expressões para $\tau_{\gamma\alpha\mu}\tau^{\gamma\alpha\mu}$ e $\tau_{\gamma\mu\alpha}\tau^{\gamma\alpha\mu}$ na eq.(1.14), encontramos que o escalar de curvatura é dado por:

$$
\mathcal{R} = R + 2D_\alpha t^\alpha - \frac{3}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2} t_\alpha t^\alpha + X_{\alpha\beta} X^{\alpha\beta} \ . \tag{1.23}
$$

Com isto, passemos ao estudo da dinâmica destes campos.

1.3 A Ação em Presença de Torção

Consideremos, como ponto de partida para o estudo da dinâmica dos campos gravitacional e de torção em (1+2)-D, a seguinte ação:

$$
\mathcal{S} = \int d^3x \sqrt{g}(a_1\mathcal{L}_1 + a_2\mathcal{L}_2 + a_3\mathcal{L}_3 + a_4\mathcal{L}_4) \ , \tag{1.24}
$$

sendo $\mathcal{L}_1 = \mathcal{R}$, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{R}^2$, $\mathcal{L}_3 = \mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}$ e $\mathcal{L}_4$ o termo de Chern-Simons, dado por:

$$
\mathcal{L}_4 = \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\, \Gamma_{\lambda\sigma}{}^{\rho}\, (\partial_\mu\, \Gamma_{\rho\nu}{}^{\sigma} + \frac{2}{3}\, \Gamma_{\mu\tau}{}^{\sigma}\, \Gamma_{\nu\rho}{}^{\tau}) \ , \tag{1.25}
$$

Antes de começarmos a fazer nossas expansões, notemos que, quando substituirmos a eq.(1.23) na ação (1.24), obteremos o seguinte termo:

$$
\begin{aligned}
2a_1\sqrt{g} D_\alpha t^\alpha &= 2a_1\sqrt{g}(\partial_\alpha t^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\alpha} t^\beta) = 2a_1\sqrt{g}[\partial_\alpha t^\alpha + \partial_\beta(\ln\sqrt{g}) t^\beta] \\
&= 2a_1[\sqrt{g}\partial_\alpha t^\alpha + \partial_\alpha(\sqrt{g}) t^\alpha] = \partial_\alpha(2a_1\sqrt{g} t^\alpha) \ ,
\end{aligned} \tag{1.26}
$$

sendo o mesmo um termo de superfície e podendo, assim, ser desconsiderado na ação.

Em analogia com o caso quadridimensional, onde o campo gravitacional em geral é fraco o suficiente a ponto de não precisarmos considerar a forma exata de $g_{\mu\nu}$ e podermos, deste modo, considerar apenas uma pequena perturbação em relação ao espaço plano, faremos uso da expansão de campo fraco, e, assim, consideraremos a dinâmica dos campos num espaço-tempo de Minkowski. Lembremos que, na aproximação fraca, temos:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + kh_{\mu\nu} \text{ , onde } \eta_{\mu\nu} \text{ é, no nosso caso, dada por: } (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

e a inversa da métrica, $g^{\mu\nu}$, será $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - kh^{\mu\nu}$.

Nesta aproximação, teremos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &= [\det(\eta_{\mu\nu} + kh_{\mu\nu})]^{\frac{1}{2}} = [\det \eta_{\mu\alpha}(\delta^\alpha_\nu + k\, h^\alpha{}_\nu)]^{\frac{1}{2}} = [\det(\eta_{\mu\alpha}) \det(\delta^\alpha_\nu + k\, h^\alpha{}_\nu)]^{\frac{1}{2}} \\ &= [\det(\delta^\alpha_\nu + k\, h^\alpha{}_\nu)]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + k\, h_\alpha{}^\alpha}, \text{ onde } h_\alpha{}^\alpha \text{ é o traço de } h_{\mu\nu} \ . \end{aligned} \tag{1.27}$$

Expandindo $\sqrt{1 + k\, h_\alpha{}^\alpha}$ em série até a primeira ordem em $k\, h_\alpha{}^\alpha$, encontramos que:

$$\sqrt{g} = 1 + \frac{k}{2}\, h_\alpha{}^\alpha \ . \tag{1.28}$$

Com estas expressões em mãos, vejamos como fica a ação em termos dos campos $h_{\alpha\beta}$, φ, t_α e $X_{\alpha\beta}$. Para isto, consideraremos somente os termos que contribuirão bilinearmente nos campos.

A conexão de Christoffel, considerando-se a aproximação descrita acima, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \left\{ {}^{\alpha}_{\mu\nu} \right\} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma}(\partial_\mu g_{\gamma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma g_{\mu\nu}) = \frac{k}{2}\eta^{\alpha\gamma}(\partial_\mu h_{\gamma\nu} + \partial_\nu h_{\mu\gamma} - \partial_\gamma h_{\mu\nu}) \quad (1.29) \\ &= \frac{k}{2}(\partial_\mu\, h^\alpha{}_\nu + \partial_\nu\, h_\mu{}^\alpha - \partial^\alpha h_{\mu\nu}) \ , \end{aligned}$$

e, em particular, temos que:

$$\{^{\alpha}_{\alpha\nu}\} = \{^{\alpha}_{\nu\alpha}\} = \partial_\nu(\ln\sqrt{g}) = \partial_\nu[\ln(1+\frac{k}{2}\, h_\alpha{}^\alpha)] \simeq \partial_\nu(\frac{k}{2}\, h_\alpha{}^\alpha) = \frac{k}{2}\partial_\nu\, h_\alpha{}^\alpha \ . \qquad (1.30)$$

Assim, o termo $\sqrt{g}a_1\mathcal{L}_1$ fica, a menos de uma divergência total, igual a:

$$\begin{aligned}\sqrt{g}a_1\mathcal{L}_1 &= \sqrt{g}a_1\mathcal{R} = \sqrt{g}a_1[R(h) - \frac{3}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}t_\alpha t^\alpha + X_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta}] \qquad (1.31)\\ &= (1+\frac{k}{2}\, h_\alpha{}^\alpha)a_1[R(h) - \frac{3}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}t_\alpha t^\alpha + X_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta}]\\ &= a_1[R(h) + \frac{k}{2}\, h_\alpha{}^\alpha\, R(h) - \frac{3}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}t_\alpha t^\alpha + X_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta}]\ .\end{aligned}$$

Vemos, desta expressão, que o escalar de curvatura contribui somente com termos algébricos para os campos de torção, o que caracterizaria a torção como campo auxiliar (não-dinâmico). Achemos, agora, $R(h) + \frac{k}{2}\, h_\alpha{}^\alpha\, R(h)$ explicitamente em termos de $h_{\mu\nu}$. Para isto, usaremos as eqs.(1.29) e (1.30). Lembremos que $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ e, portanto,

$$\begin{aligned}R &= g^{\mu\nu}(\partial_\alpha\{^{\alpha}_{\mu\nu}\} - \partial_\mu\{^{\alpha}_{\alpha\nu}\} + \{^{\alpha}_{\alpha\gamma}\}\{^{\gamma}_{\mu\nu}\} - \{^{\alpha}_{\mu\gamma}\}\{^{\gamma}_{\alpha\nu}\}) \qquad (1.32)\\ &= (\eta^{\mu\nu} - kh^{\mu\nu})[\frac{k}{2}(\partial_\alpha\partial_\mu\, h^\alpha{}_\nu + \partial_\alpha\partial_\nu\, h_\mu{}^\alpha - \Box h_{\mu\nu}) - \frac{k}{2}\partial_\mu\partial_\nu\, h_\alpha{}^\alpha\\ &\quad + \frac{k^2}{4}\partial_\gamma\, h_\alpha{}^\alpha\,(\partial_\mu\, h^\gamma{}_\nu + \partial_\nu\, h_\mu{}^\gamma - \partial^\gamma h_{\mu\nu})\\ &\quad - \frac{k^2}{4}(\partial_\mu\, h^\alpha{}_\gamma + \partial_\gamma\, h_\mu{}^\alpha - \partial^\alpha h_{\mu\gamma})(\partial_\alpha\, h^\gamma{}_\nu + \partial_\nu\, h_\alpha{}^\gamma - \partial^\gamma h_{\alpha\nu})]\ .\end{aligned}$$

Após alguma álgebra, encontramos:

$$\begin{aligned}R &= -k(\Box\, h_\alpha{}^\alpha - \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}) + \frac{k^2}{4}(2h^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} + \partial_\alpha h^{\beta\gamma}\partial^\alpha h_{\beta\gamma} + 2h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\, h_\gamma{}^\gamma\\ &\quad + 2\partial_\alpha h^{\alpha\beta}\partial_\beta\, h_\gamma{}^\gamma - \partial_\gamma\, h_\alpha{}^\alpha\,\partial^\gamma\, h_\beta{}^\beta - 2\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\beta\, h_\alpha{}^\gamma - 4h^{\alpha\beta}\partial_\gamma\partial_\alpha\, h^\gamma{}_\beta)\ , \qquad (1.33)\end{aligned}$$

e, desta forma,

$$\begin{aligned}R(h) + \frac{k}{2}\, h_\alpha{}^\alpha\, R(h) &= -k(\Box\, h_\alpha{}^\alpha - \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}) + \frac{k^2}{4}(2h^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} + \partial_\alpha h^{\beta\gamma}\partial^\alpha h_{\beta\gamma} \qquad (1.34)\\ &\quad -2\, h_\alpha{}^\alpha\,\Box\, h_\beta{}^\beta + 2\, h_\alpha{}^\alpha\,\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} + 2h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\, h_\gamma{}^\gamma + 2\partial_\alpha h^{\alpha\beta}\partial_\beta\, h_\gamma{}^\gamma +\end{aligned}$$

$$-\partial_\gamma h_\alpha{}^\alpha \partial^\gamma h_\beta{}^\beta - 2\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\beta h_\alpha{}^\gamma - 4h^{\alpha\beta}\partial_\gamma\partial_\alpha h^\gamma{}_\beta) .$$

Tendo em mente que esta expressão está sujeita a uma integral sobre todo o espaço-tempo, faremos algumas integrações por partes, de tal forma a agruparmos e simplificarmos o maior número de termos que for possível. Desprezaremos os termos de superfície, que aparecerão das integrações devido à hipótese de que os campos vão a zero no infinito. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} R(h) + \frac{k}{2} h_\alpha{}^\alpha R(h) &= -k(\Box h_\alpha{}^\alpha - \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}) + \frac{k^2}{2}(\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h_\alpha{}^\alpha \Box h_\beta{}^\beta \\ &+ h_\alpha{}^\alpha \partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} - h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\gamma h^\gamma{}_\beta) . \end{aligned} \quad (1.35)$$

Notando que $-k(\Box h_\alpha{}^\alpha - \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}) = -\partial_\alpha[k(\partial^\alpha h_\beta{}^\beta - \partial_\beta h^{\alpha\beta})]$ também é um termo de superfície, ficamos com

$$R(h) + \frac{k}{2} h_\alpha{}^\alpha R(h) = \frac{k^2}{2}(\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h_\alpha{}^\alpha \Box h_\beta{}^\beta + h_\alpha{}^\alpha \partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} - h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\gamma h^\gamma{}_\beta) . \quad (1.36)$$

Temos, portanto:

$$\begin{aligned} \sqrt{g}a_1\mathcal{L}_1 &= a_1[\frac{k^2}{2}(\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h_\alpha{}^\alpha \Box h_\beta{}^\beta + h_\alpha{}^\alpha \partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} - h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\gamma h^\gamma{}_\beta) \\ &-\frac{3}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}t_\alpha t^\alpha + X_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta}] . \end{aligned} \quad (1.37)$$

Consideremos, agora, o segundo termo, $\sqrt{g}a_2\mathcal{L}_2$ (onde somente os termos que contribuem com partes bilineares nos campos serão mostrados):

$$\sqrt{g}a_2\mathcal{L}_2 = \sqrt{g}a_2\mathcal{R}^2 = a_2[R^2 + 4(\partial_\alpha t^\alpha)^2 + 4\partial_\alpha t^\alpha R] ; \quad (1.38)$$

mas,

$$\begin{aligned} R^2 &= k^2(\Box h_\alpha{}^\alpha - \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta})(\Box h_\gamma{}^\gamma - \partial_\gamma\partial_\delta h^{\gamma\delta}) \quad (1.39) \\ &= k^2(\Box h_\alpha{}^\alpha \Box h_\gamma{}^\gamma - 2\Box h_\alpha{}^\alpha \partial_\gamma\partial_\delta h^{\gamma\delta} + \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}\partial_\gamma\partial_\delta h^{\gamma\delta}) \end{aligned}$$

e

$$4\partial_\alpha t^\alpha R = -k(\Box\, h_\alpha{}^\alpha - \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta})\partial_\gamma t^\gamma \; . \tag{1.40}$$

Agrupando os termos, e fazendo integrações por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}\sqrt{g}a_2\mathcal{L}_2 &= a_2[k^2(h_\alpha{}^\alpha\,\Box^2\, h_\beta{}^\beta - 2\, h_\alpha{}^\alpha\,\Box\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma\partial_\delta h^{\gamma\delta}) \\ &\quad +4k(t^\alpha\Box\partial_\alpha\, h_\beta{}^\beta - t^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma}) - 4t^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta t^\beta] \; .\end{aligned} \tag{1.41}$$

Vejamos o próximo termo da ação $\sqrt{g}a_3\mathcal{L}_3$:

$$\begin{aligned}\sqrt{g}a_3\mathcal{L}_3 &= \sqrt{g}a_3\mathcal{R}_{\alpha\beta}\mathcal{R}^{\alpha\beta} = a_3(R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + \partial_\alpha t_\beta\partial^\alpha t^\beta + \partial_\gamma\, K_{\alpha\beta}{}^\gamma\,\partial_\delta K^{\alpha\beta\delta} \\ &\quad 2R_{\alpha\beta}\partial_\gamma K^{\alpha\beta\gamma} + 2R_{\alpha\beta}\partial^\alpha t^\beta + 2\partial_\gamma\, K_{\alpha\beta}{}^\gamma\,\partial^\alpha t^\beta) \; .\end{aligned} \tag{1.42}$$

Para escrevê-lo em função de $h_{\alpha\beta}$, φ, t_α e $X_{\alpha\beta}$, temos de usar a eq.(1.17) e o tensor de Ricci na aproximação fraca, que é dado por:

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{k}{2}(\Box h_{\alpha\beta} + \partial_\alpha\partial_\beta\, h_\gamma{}^\gamma - \partial_\alpha\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\beta - \partial_\beta\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\alpha) \; . \tag{1.43}$$

Assim,

$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} &= \frac{k^2}{4}(\Box h_{\alpha\beta} + \partial_\alpha\partial_\beta\, h_\gamma{}^\gamma - \partial_\alpha\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\beta - \partial_\beta\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\alpha)\times \\ &\quad \times(\Box h^{\alpha\beta} + \partial^\alpha\partial^\beta\, h_\delta{}^\delta - \partial^\alpha\partial_\delta h^{\delta\beta} - \partial^\beta\partial_\delta h^{\delta\alpha}) \\ &= \frac{k^2}{4}(\Box h_{\alpha\beta}\Box h^{\alpha\beta} + 2\Box h_{\alpha\beta}\partial^\alpha\partial^\beta\, h_\gamma{}^\gamma - 4\Box h_{\alpha\beta}\partial^\alpha\partial_\gamma h^{\gamma\beta} + \partial_\alpha\partial_\beta\, h_\gamma{}^\gamma\,\partial^\alpha\partial^\beta\, h_\delta{}^\delta \\ &\quad -4\partial_\alpha\partial_\beta\, h_\gamma{}^\gamma\,\partial^\alpha\partial_\delta h^{\delta\beta} + 2\partial_\alpha\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\beta\,\partial^\alpha\partial_\delta h^{\delta\beta} + 2\partial_\alpha\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\beta\,\partial^\beta\partial_\delta h^{\delta\alpha}) \; .\end{aligned} \tag{1.44}$$

Integrando por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} &= \frac{k^2}{4}(h_{\alpha\beta}\Box^2 h^{\alpha\beta} - 2\, h_\alpha{}^\alpha\,\Box\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} - 2\, h^\alpha{}_\beta\,\Box\partial_\alpha\partial_\gamma h^{\gamma\beta} \\ &\quad +2h^{\alpha\gamma}\partial_\alpha\partial_\gamma\partial_\beta\partial_\delta h^{\delta\beta} + h_\alpha{}^\alpha\,\Box^2\, h_\beta{}^\beta) \; .\end{aligned} \tag{1.45}$$

O termo $\partial_\gamma\, K_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\, \partial_\delta K^{\alpha\beta\delta}$ será:

$$
\begin{aligned}
\partial_\gamma\, K_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\, \partial_\delta K^{\alpha\beta\delta} \;&=\; \frac{1}{4}[\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial^\gamma\varphi + (\eta_{\alpha\beta}\partial^\gamma t_\gamma - \partial_\alpha t_\beta) + 2\epsilon_{\gamma\beta\lambda}\partial^\gamma\, X^\lambda{}_\alpha] \times \\
&\times[\epsilon^{\alpha\beta\delta}\partial_\delta\varphi + (\eta^{\alpha\beta}\partial^\delta t_\delta - \partial^\alpha t^\beta) + 2\epsilon^{\delta\beta\kappa}\partial_\delta\, X_\kappa{}^\alpha]\ .
\end{aligned}
\tag{1.46}
$$

Efetuando o produto e integrando por partes, como nos outros casos, acharemos:

$$
\begin{aligned}
\partial_\gamma\, K_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\, \partial_\delta K^{\alpha\beta\delta} \;&=\; -\frac{1}{4}(2\varphi\Box\varphi + 4\varphi\partial_\alpha\partial_\beta X^{\alpha\beta} + t^\alpha\Box t_\alpha + t^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta t^\beta \\
&-4\epsilon^{\alpha\beta\gamma}t_\beta\partial_\delta\partial_\alpha\, X_\gamma{}^\delta + 4X^{\alpha\beta}\Box X_{\alpha\beta} - 4\, X^\alpha{}_\beta\,\partial_\alpha\partial_\gamma X^{\gamma\beta})\ .
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

O próximo termo será:

$$
\begin{aligned}
2R_{\alpha\beta}\partial_\gamma K^{\alpha\beta\gamma} \;&=\; -\frac{k}{2}(\Box h_{\alpha\beta} + \partial_\alpha\partial_\beta\, h_\gamma{}^\gamma - \partial_\alpha\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\beta - \partial_\beta\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\alpha) \times \\
&\times[\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\gamma\varphi + (\eta^{\alpha\beta}\partial^\gamma t_\gamma - \partial^\alpha t^\beta) + 2\epsilon^{\gamma\beta\lambda}\partial_\gamma\, X_\lambda{}^\alpha]\ .
\end{aligned}
\tag{1.48}
$$

Integrando por partes e simplificando, obtemos:

$$
2R_{\alpha\beta}\partial_\gamma K^{\alpha\beta\gamma} = \frac{k}{2}(t^\alpha\Box\partial_\alpha\, h_\beta{}^\beta - t^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} + 2\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\, X_\gamma{}^\delta\,\Box\partial_\alpha h_{\delta\beta} - 2\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\, X_\gamma{}^\delta\,\partial_\alpha\partial_\delta\partial_\kappa\, h^\kappa{}_\beta)\ .
\tag{1.49}
$$

Passando ao próximo termo,

$$
2R_{\alpha\beta}\partial^\alpha t^\beta = -k(\Box h_{\alpha\beta} + \partial_\alpha\partial_\beta\, h_\gamma{}^\gamma - \partial_\alpha\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\beta - \partial_\beta\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\alpha)\partial^\alpha t^\beta\ ,
\tag{1.50}
$$

e fazendo a integração, conseguimos:

$$
2R_{\alpha\beta}\partial^\alpha t^\beta = k(t^\alpha\Box\partial_\alpha\, h_\beta{}^\beta - t^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma})\ .
\tag{1.51}
$$

Por fim, vejamos como fica $2\partial_\gamma\, K_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\, \partial^\alpha t^\beta$:

$$
2\partial_\gamma\, K_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\, \partial^\alpha t^\beta = \partial_\alpha t_\beta[\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\gamma\varphi + (\eta^{\alpha\beta}\partial^\gamma t_\gamma - \partial^\alpha t^\beta) + 2\epsilon^{\gamma\beta\lambda}\partial_\gamma\, X_\lambda{}^\alpha]\ ,
\tag{1.52}
$$

que, após as integrações e simplificações, assume a forma:

$$2\partial_\gamma\, K_{\alpha\beta}{}^\gamma\, \partial^\alpha t^\beta = t^\alpha \Box t_\alpha - t^\alpha \partial_\alpha \partial_\beta t^\beta - 2\epsilon^{\alpha\beta\gamma} t_\beta \partial_\delta \partial_\alpha\, X_\gamma{}^\delta\ . \tag{1.53}$$

Agrupando todos os termos, e realizando integrações por partes, bem como as oportunas simplificações, obtemos que:

$$\begin{aligned}
\sqrt{g}a_3\mathcal{L}_3 \ &= \ a_3[\frac{k^2}{4}(h_{\alpha\beta}\Box^2 h^{\alpha\beta} + h_\alpha{}^\alpha\, \Box^2\, h_\beta{}^\beta - 2\, h_\alpha{}^\alpha\, \Box\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} - 2\, h^\alpha{}_\beta\, \Box\partial_\alpha\partial_\gamma h^{\gamma\beta} \\
&\quad +2h^{\alpha\gamma}\partial_\alpha\partial_\gamma\partial_\beta\partial_\delta h^{\delta\beta}) + \frac{k}{2}(3t^\alpha\Box\partial_\alpha\, h_\beta{}^\beta - 3t^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} + 2\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\, X_\gamma{}^\delta\, \Box\partial_\alpha h_{\delta\beta} \\
&\quad -2\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\, X_\gamma{}^\delta\, \partial_\alpha\partial_\delta\partial_\kappa\, h^\kappa{}_\beta) - \frac{1}{4}(2\varphi\Box\varphi + 4\varphi\partial_\alpha\partial_\beta X^{\alpha\beta} + t^\alpha\Box t_\alpha + 5t^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta t^\beta \\
&\quad +4\epsilon^{\alpha\beta\gamma}t_\beta\partial_\delta\partial_\alpha\, X_\gamma{}^\delta + 4X^{\alpha\beta}\Box X_{\alpha\beta} - 4\, X^\alpha{}_\beta\, \partial_\alpha\partial_\gamma X^{\gamma\beta})]\ .
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Temos, agora, de expressar o termo de Chern-Simons em função dos campos $h_{\alpha\beta}$, φ, t_α e $X_{\alpha\beta}$. Levando em conta as nossas considerações, podemos escrever que:

$$\begin{aligned}
\sqrt{g}a_4\mathcal{L}_4 \ &= \ \sqrt{g}a_4\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\, \Gamma_{\gamma\sigma}{}^\rho\, (\partial_\alpha\, \Gamma_{\rho\beta}{}^\sigma + \frac{2}{3}\, \Gamma_{\alpha\tau}{}^\sigma\, \Gamma_{\beta\rho}{}^\tau) \qquad (1.55)\\
&= \ \epsilon^{\alpha\beta\gamma}(\{{}^\rho_{\gamma\sigma}\}\partial_\alpha\{{}^\sigma_{\rho\beta}\} + \{{}^\rho_{\gamma\sigma}\}\partial_\alpha\, K_{\rho\beta}{}^\sigma + K_{\gamma\sigma}{}^\rho\, \partial_\alpha\{{}^\sigma_{\rho\beta}\} + K_{\gamma\sigma}{}^\rho\, \partial_\alpha\, K_{\rho\beta}{}^\sigma)\ .
\end{aligned}$$

Procedendo como antes, vejamos como fica cada termo.

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\{{}^\rho_{\gamma\sigma}\}\partial_\alpha\{{}^\sigma_{\rho\beta}\} = \frac{k^2}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}(\partial_\gamma\, h^\rho{}_\sigma + \partial_\sigma\, h_\gamma{}^\rho - \partial^\rho h_{\gamma\sigma})(\partial_\alpha\partial_\rho\, h^\sigma{}_\beta + \partial_\alpha\partial_\beta\, h_\rho{}^\sigma - \partial_\alpha\partial^\sigma h_{\rho\beta})\ ; \tag{1.56}$$

fazendo as integrações e simplificando, obtemos:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\{{}^\rho_{\gamma\sigma}\}\partial_\alpha\{{}^\sigma_{\rho\beta}\} = \frac{k^2}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}(h_\gamma{}^\delta\, \Box\partial_\alpha h_{\delta\beta} - h_\gamma{}^\delta\, \partial_\alpha\partial_\kappa\partial_\delta\, h^\kappa{}_\beta)\ . \tag{1.57}$$

Passando ao termo seguinte,

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\{{}^\rho_{\gamma\sigma}\}\partial_\alpha\, K_{\rho\beta}{}^\sigma \ &= \ \frac{k}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}(\partial_\gamma h^{\rho\sigma} + \partial^\sigma\, h_\gamma{}^\rho - \partial^\rho\, h_\gamma{}^\sigma)\times \qquad (1.58)\\
&\quad \times[\epsilon_{\rho\beta\sigma}\partial_\alpha\varphi + (\eta_{\rho\beta}\partial_\alpha t_\sigma - \eta_{\rho\sigma}\partial_\alpha t_\beta) + 2\epsilon_{\sigma\beta\lambda}\partial_\alpha\, X^\lambda{}_\rho]\ ,
\end{aligned}$$

Integrando e fazendo as simplificações, obtemos:

$$\begin{aligned}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\{{}^{\rho}_{\gamma\sigma}\}\partial_\alpha\, K_{\rho\beta}{}^{\sigma} &= \frac{k}{2}(\varphi\Box\, h_\alpha{}^\alpha - \varphi\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} - X^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} \\ &\quad -X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\, h_\gamma{}^\gamma + X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\beta + X^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial_\gamma\, h_\alpha{}^\gamma)\ .\end{aligned} \tag{1.59}$$

Consideremos, agora, o termo:

$$\begin{aligned}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\, K_{\gamma\sigma}{}^{\rho}\,\partial_\alpha\{{}^{\sigma}_{\rho\beta}\} &= \frac{k}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}[\epsilon_{\gamma\sigma\rho}\varphi + (\eta_{\gamma\sigma}t_\rho - \eta_{\gamma\rho}t_\sigma) + 2\epsilon_{\rho\sigma\lambda}\, X^\lambda{}_\gamma] \times \\ &\quad \times(\partial_\alpha\partial_\rho\, h^\sigma{}_\beta + \partial_\alpha\partial_\beta\, h_\rho{}^\sigma - \partial_\alpha\partial^\sigma h_{\rho\beta})\ .\end{aligned} \tag{1.60}$$

Seguindo o procedimento padrão feito até aqui, encontramos:

$$\begin{aligned}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\, K_{\gamma\sigma}{}^{\rho}\,\partial_\alpha\{{}^{\sigma}_{\rho\beta}\} &= -\frac{k}{2}(\varphi\Box\, h_\alpha{}^\alpha - \varphi\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} + 2X^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} \\ &\quad +2X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\, h_\gamma{}^\gamma - 2X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\beta - 2X^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial_\gamma\, h_\alpha{}^\gamma)\ .\end{aligned} \tag{1.61}$$

O último termo lê-se:

$$\begin{aligned}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\, K_{\gamma\sigma}{}^{\rho}\,\partial_\alpha\, K_{\rho\beta}{}^{\sigma} &= \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}[\epsilon_{\gamma\sigma\rho}\varphi + (\eta_{\gamma\sigma}t_\rho - \eta_{\gamma\rho}t_\sigma) + 2\epsilon_{\rho\sigma\lambda}\, X^\lambda{}_\gamma] \times \\ &\quad \times[\,\epsilon^\rho{}_\beta{}^\sigma\,\partial_\alpha\varphi + (\eta^\rho{}_\beta\,\partial_\alpha t^\sigma - \eta^{\rho\sigma}\partial_\alpha t_\beta) + 2\,\epsilon^\sigma{}_{\beta\kappa}\,\partial_\alpha X^{\kappa\rho}]\ .\end{aligned} \tag{1.62}$$

Após alguma álgebra, integrando e simplificando, obtemos:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\, K_{\gamma\sigma}{}^{\rho}\,\partial_\alpha\, K_{\rho\beta}{}^{\sigma} = \frac{1}{4}(-2\varphi\partial_\alpha t^\alpha + \epsilon^{\alpha\beta\gamma}t_\beta\partial_\alpha t_\gamma - 4t_\alpha\partial_\beta X^{\alpha\beta} - 4\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\, X^\delta{}_\gamma\,\partial_\alpha X_{\delta\beta})\ . \tag{1.63}$$

Agrupando todos os termos e simplificando, conseguimos finalmente a forma reduzida:

$$\begin{aligned}\sqrt{g}a_4\mathcal{L}_4 &= a_4[\frac{k^2}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}(h_\gamma{}^\delta\,\Box\partial_\alpha h_{\delta\beta} - h_\gamma{}^\delta\,\partial_\alpha\partial_\kappa\partial_\delta\, h^\kappa{}_\beta) \\ &\quad -\frac{k}{2}(3X^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} + 3X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\, h_\gamma{}^\gamma - 6X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\beta) +\end{aligned} \tag{1.64}$$

$$-\frac{1}{4}(2\varphi\partial_\alpha t^\alpha - \epsilon^{\alpha\beta\gamma}t_\beta\partial_\alpha t_\gamma - 4X^{\alpha\beta}\partial_\alpha t_\beta + 4\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\, X^\delta{}_\gamma\,\partial_\alpha X_{\delta\beta})] \; .$$

Assim, o setor de nossa ação quadrático nos campos do modelo assume a forma que segue:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} \;=\; & \int d^3x\{a_1[\frac{k^2}{2}(\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,h_\alpha{}^\alpha\,\Box\,h_\beta{}^\beta + h_\alpha{}^\alpha\,\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} - h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\gamma\,h^\gamma{}_\beta) \\
& -\frac{3}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}t_\alpha t^\alpha + X_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta}] \\
& +a_2[k^2(h_\alpha{}^\alpha\,\Box^2\,h_\beta{}^\beta - 2\,h_\alpha{}^\alpha\,\Box\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma\partial_\delta h^{\gamma\delta}) \qquad (1.65)\\
& +4k(t^\alpha\Box\partial_\alpha\,h_\beta{}^\beta - t^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma}) - 4t^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta t^\beta] \\
& +a_3[\frac{k^2}{4}(h_{\alpha\beta}\Box^2 h^{\alpha\beta} + h_\alpha{}^\alpha\,\Box^2\,h_\beta{}^\beta - 2\,h_\alpha{}^\alpha\,\Box\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} - 2\,h^\alpha{}_\beta\,\Box\partial_\alpha\partial_\gamma h^{\gamma\beta} \\
& +2h^{\alpha\gamma}\partial_\alpha\partial_\gamma\partial_\beta\partial_\delta h^{\delta\beta}) + \frac{k}{2}(3t^\alpha\Box\partial_\alpha\,h_\beta{}^\beta - 3t^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} + 2\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\,X_\gamma{}^\delta\,\Box\partial_\alpha h_{\delta\beta} \\
& -2\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\,X_\gamma{}^\delta\,\partial_\alpha\partial_\delta\partial_\kappa\,h^\kappa{}_\beta) - \frac{1}{4}(2\varphi\Box\varphi + 4\varphi\partial_\alpha\partial_\beta X^{\alpha\beta} + t^\alpha\Box t_\alpha + 5t^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta t^\beta \\
& +4\epsilon^{\alpha\beta\gamma}t_\beta\partial_\delta\partial_\alpha\,X_\gamma{}^\delta + 4X^{\alpha\beta}\Box X_{\alpha\beta} - 4\,X^\alpha{}_\beta\,\partial_\alpha\partial_\gamma X^{\gamma\beta})] \\
& +a_4[\frac{k^2}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}(h_\gamma{}^\delta\,\Box\partial_\alpha h_{\delta\beta} - h_\gamma{}^\delta\,\partial_\alpha\partial_\kappa\partial_\delta\,h^\kappa{}_\beta) \\
& -\frac{k}{2}(3X^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} + 3X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\,h_\gamma{}^\gamma - 6X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\gamma\,h^\gamma{}_\beta) \\
& -\frac{1}{4}(2\varphi\partial_\alpha t^\alpha - \epsilon^{\alpha\beta\gamma}t_\beta\partial_\alpha t_\gamma - 4X^{\alpha\beta}\partial_\alpha t_\beta + 4\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\,X^\delta{}_\gamma\,\partial_\alpha X_{\delta\beta})]\} \; .
\end{aligned}$$

Lembrando agora que o campo gravitacional linearizado, $h_{\mu\nu}$, é um campo de gauge com a seguinte liberdade de transformação, $\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$, sendo ξ_μ uma função vetorial arbitrária, devemos acrescentar um termo de gauge-fixing à ação; no caso, adotamos o termo de gauge-fixing de De Donder, dado por:

$$\lambda F_\alpha F^\alpha \text{ onde } F_\alpha = \partial_\beta(h^\beta{}_\alpha - \frac{1}{2}\delta^\beta_\alpha\,h_\gamma{}^\gamma) \; . \qquad (1.66)$$

Assim,

$$\lambda F_\alpha F^\alpha = \lambda\partial_\beta(h^\beta{}_\alpha - \frac{1}{2}\delta^\beta_\alpha\,h_\gamma{}^\gamma)\partial_\delta(h^{\delta\alpha} - \frac{1}{2}\eta^{\delta\alpha}\,h_\kappa{}^\kappa) \; . \qquad (1.67)$$

Realizando o produto e integrando por partes, obtemos:

$$\lambda F_\alpha F^\alpha = \lambda(h_\alpha{}^\alpha\, \partial_\beta \partial_\gamma h^{\beta\gamma} - h^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\alpha - \frac{1}{4}\, h_\alpha{}^\alpha \,\Box\, h_\beta{}^\beta) \;. \tag{1.68}$$

Por motivos que só ficarão claros no Capítulo 3, acrescentaremos, também, um termo de acoplamento entre o campo $X_{\mu\nu}$ e o tensor de Ricci Riemanniano $R_{\mu\nu}$,

$$a_5 X^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = a_5[-\frac{k}{2}(X^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} + X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\, h_\gamma{}^\gamma - 2X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\beta)] \;, \tag{1.69}$$

Este termo é consistente com as simetrias do sistema e terá forte conseqüência no espectro dos modos de spin-2, como será visto posteriormente.

Com isto, encontramos que nossa ação será:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} \;=\; & \int d^3x\{a_1[\frac{k^2}{2}(\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, h_\alpha{}^\alpha \,\Box\, h_\beta{}^\beta + h_\alpha{}^\alpha\, \partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} - h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\beta) \\
& -\frac{3}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}t_\alpha t^\alpha + X_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta}] + \lambda(h_\alpha{}^\alpha\, \partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} - h^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\alpha - \frac{1}{4}\, h_\alpha{}^\alpha \,\Box\, h_\beta{}^\beta) \\
& +a_2[k^2(h_\alpha{}^\alpha\,\Box^2\, h_\beta{}^\beta - 2\, h_\alpha{}^\alpha\,\Box\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma\partial_\delta h^{\gamma\delta}) \\
& +4k(t^\alpha\Box\partial_\alpha\, h_\beta{}^\beta - t^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma}) - 4t^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta t^\beta] \\
& +a_3[\frac{k^2}{4}(h_{\alpha\beta}\Box^2 h^{\alpha\beta} + h_\alpha{}^\alpha\,\Box^2\, h_\beta{}^\beta - 2\, h_\alpha{}^\alpha\,\Box\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} - 2\, h^\alpha{}_\beta\,\Box\partial_\alpha\partial_\gamma h^{\gamma\beta} \\
& +2h^{\alpha\gamma}\partial_\alpha\partial_\gamma\partial_\beta\partial_\delta h^{\delta\beta}) + \frac{k}{2}(3t^\alpha\Box\partial_\alpha\, h_\beta{}^\beta - 3t^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} + 2\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\, X_\gamma{}^\delta\,\Box\partial_\alpha h_{\delta\beta} \\
& -2\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\, X_\gamma{}^\delta\,\partial_\alpha\partial_\delta\partial_\kappa\, h^\kappa{}_\beta) - \frac{1}{4}(2\varphi\Box\varphi + 4\varphi\partial_\alpha\partial_\beta X^{\alpha\beta} + t^\alpha\Box t_\alpha + 5t^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta t^\beta \\
& +4\epsilon^{\alpha\beta\gamma}t_\beta\partial_\delta\partial_\alpha\, X_\gamma{}^\delta + 4X^{\alpha\beta}\Box X_{\alpha\beta} - 4\, X^\alpha{}_\beta\,\partial_\alpha\partial_\gamma X^{\gamma\beta})] \\
& +a_4[\frac{k^2}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}(h_\gamma{}^\delta\,\Box\partial_\alpha h_{\delta\beta} - h_\gamma{}^\delta\,\partial_\alpha\partial_\kappa\partial_\delta\, h^\kappa{}_\beta) \\
& -\frac{k}{2}(3X^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} + 3X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\, h_\gamma{}^\gamma - 6X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\beta) \\
& -\frac{1}{4}(2\varphi\partial_\alpha t^\alpha - \epsilon^{\alpha\beta\gamma}t_\beta\partial_\alpha t_\gamma - 4X^{\alpha\beta}\partial_\alpha t_\beta + 4\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\, X^\delta{}_\gamma\,\partial_\alpha X_{\delta\beta})] \\
& +a_5[-\frac{k}{2}(X^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} + X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\, h_\gamma{}^\gamma - 2X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\beta)]\} \;.
\end{aligned} \tag{1.70}$$

Esta ação completa em seu setor quadrático será o ponto-de-partida para o que se discutirá nos capítulos sucessivos, quando desenvolveremos todo um formalismo de operadores de spin e derivaremos os propagadores de alguns modelos de gravitação em 3D, discutindo a viabilidade dos mesmos como possíveis teorias fisicamente consistentes.

Capítulo 2

Os Operadores de Spin da Gravitação em 3D.[1]

Neste capítulo, faremos uso dos operadores tensoriais de Barnes-Rivers,[20, 21] em sua versão (1+2)-D, [22], (bem como dos operadores que advirão dos termos de torção e de Chern-Simons) para escrever a ação quadrática do capítulo anterior de uma forma em que o propagador dos campos será dado pelo inverso do operador tensorial que aparecerá atuando num multiplete de campos tensoriais de "ranks" distintos.

2.1 Os Operadores de Spin

Sejam os operadores tensoriais de Barnes-Rivers em (1+2)-D:

$$\begin{aligned}
P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\theta_{\mu\alpha}\theta_{\nu\beta} + \theta_{\mu\beta}\theta_{\nu\alpha}) - \frac{1}{2}\theta_{\mu\nu}\theta_{\alpha\beta} \ , \\
P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\theta_{\mu\alpha}\omega_{\nu\beta} + \theta_{\mu\beta}\omega_{\nu\alpha} + \theta_{\nu\alpha}\omega_{\mu\beta} + \theta_{\nu\beta}\omega_{\mu\alpha}) \ , \\
P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\theta_{\mu\nu}\theta_{\alpha\beta} \ , \\
P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} &= \omega_{\mu\nu}\omega_{\alpha\beta} \ ,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

[1]**Veja também referência [23] para uma versão mais compacta do que é apresentado neste e nos próximos capítulos.**

$$
\begin{aligned}
P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\alpha\beta} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{\mu\nu}\omega_{\alpha\beta} \ , \\
P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\alpha\beta} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_{\mu\nu}\theta_{\alpha\beta} \ .
\end{aligned}
$$

E os operadores:

$$
A_{\mu\nu} = \epsilon_{\gamma\mu\nu}\partial^{\gamma} \ , \ B_{\mu,\alpha\beta} = \eta_{\mu\alpha}\partial_{\beta} + \eta_{\mu\beta}\partial_{\alpha} \text{ e } D_{\mu,\alpha\beta} = A_{\mu\alpha}\partial_{\beta} + A_{\mu\beta}\partial_{\alpha} \tag{2.2}
$$

que, juntamente com,

$$
S_{\mu\nu,\alpha\beta} = A_{\alpha\mu}\theta_{\nu\beta} + A_{\beta\mu}\theta_{\nu\alpha} + A_{\alpha\nu}\theta_{\mu\beta} + A_{\beta\nu}\theta_{\mu\alpha} \tag{2.3}
$$

e

$$
R_{\mu\nu,\alpha\beta} = A_{\alpha\mu}\omega_{\nu\beta} + A_{\beta\mu}\omega_{\nu\alpha} + A_{\alpha\nu}\omega_{\mu\beta} + A_{\beta\nu}\omega_{\mu\alpha} \ . \tag{2.4}
$$

formam (a menos de operadores do tipo $O_{i_1 i_2}\partial_{i_3}$, onde $O_{i_1 i_2}$ é um entre $A_{\mu\nu}$, $\theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$) uma álgebra fechada.

Lembremos que $\theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ são, respectivamente, os projetores transverso e longitudinal, dados por:

$$
\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu} \text{ e } \omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{\Box} \ . \tag{2.5}
$$

A álgebra de todos estes operadores é apresentada no Apêndice desta tese.

2.2 A Ação em Termos dos Operadores de Spin

Para escrever a ação em termos destes operadores, devemos fazer sucessivas simetrizações nos índices que os campos carregam. Por uma questão de organização, faremos a simetrização para cada um dos campos em separado e, posteriormente, consideraremos as simetrizações ditadas pelos produtos de campos nos termos quadráticos.

Comecemos com o campo $h_{\mu\nu}$:

$$
\mathcal{L}_{hh} = \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{1hh} + \mathcal{L}_{2hh} + \mathcal{L}_{3hh} + \mathcal{L}_{4hh} \ , \tag{2.6}
$$

$$\mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{1hh} = \lambda({h_\alpha}^\alpha \, \partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} - h^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial_\gamma \, {h^\gamma}_\alpha - \frac{1}{4}\, {h_\alpha}^\alpha \, \Box \, {h_\beta}^\beta) \qquad (2.7)$$
$$+a_1 k^2 (\frac{1}{4} h^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\, {h_\alpha}^\alpha \, \Box \, {h_\beta}^\beta + \frac{1}{2}\, {h_\alpha}^\alpha \, \partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\gamma \, {h^\gamma}_\beta) \; .$$

Após a simetrização, encontramos:

$$\mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{1hh} = \frac{1}{2} h^{\mu\nu}[\frac{k^2 a_1 \Box}{2} P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \lambda\Box P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{(k^2 a_1 + 2\lambda)\Box}{2} P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{\lambda\Box}{2} P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta}$$
$$+ \frac{\sqrt{2}\lambda\Box}{2}(P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\alpha\beta})]h^{\alpha\beta} \; . \qquad (2.8)$$

$$\mathcal{L}_{2hh} = a_2 k^2 ({h_\alpha}^\alpha \, \Box^2 \, {h_\beta}^\beta - 2\, {h_\alpha}^\alpha \, \Box\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma\partial_\delta h^{\gamma\delta}) \; . \qquad (2.9)$$

Assim,

$$\mathcal{L}_{2hh} = \frac{1}{2} h^{\mu\nu}(4k^2 a_2 \Box^2 P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta})h^{\alpha\beta} \; . \qquad (2.10)$$

$$\mathcal{L}_{3hh} = \frac{a_3 k^2}{4}(h_{\alpha\beta}\Box^2 h^{\alpha\beta} + {h_\alpha}^\alpha \, \Box^2 \, {h_\beta}^\beta - 2\, {h_\alpha}^\alpha \, \Box\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} \qquad (2.11)$$
$$-2\, {h^\alpha}_\beta \, \Box\partial_\alpha\partial_\gamma h^{\gamma\beta} + 2h^{\alpha\gamma}\partial_\alpha\partial_\gamma\partial_\beta\partial_\delta h^{\delta\beta}) \; ,$$

e, portanto,

$$\mathcal{L}_{3hh} = \frac{1}{2} h^{\mu\nu}(\frac{a_3 k^2 \Box^2}{2} P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{3}{2} a_3 k^2 \Box^2 P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta})h^{\alpha\beta} \; . \qquad (2.12)$$

$$\mathcal{L}_{4hh} = \frac{a_4 k^2}{2}(\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \, {h_\gamma}^\delta \, \Box\partial_\alpha h_{\delta\beta} - \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \, {h_\gamma}^\delta \, \partial_\alpha\partial_\kappa\partial_\delta \, {h^\kappa}_\beta) \; . \qquad (2.13)$$

Após simetrizar,

$$\mathcal{L}_{4hh} = \frac{1}{2} h^{\mu\nu}(\frac{a_4 k^2 \Box}{4} S_{\mu\nu,\alpha\beta})h^{\alpha\beta} \; . \qquad (2.14)$$

Agrupando todos os termos, obtemos:

$$\mathcal{L}_{hh} = \frac{1}{2} h^{\mu\nu}\{(\frac{k^2 a_1 \Box}{2} + \frac{a_3 k^2 \Box^2}{2})P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \lambda\Box P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \qquad (2.15)$$

$$-\frac{[(a_1k^2+2\lambda)\Box - 8k^2a_2\Box^2 - 3a_3k^2\Box^2]}{2}P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta}$$
$$-\frac{\lambda\Box}{2}P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{\sqrt{2}\lambda\Box}{2}(P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\alpha\beta}) + \frac{a_4k^2\Box}{4}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\}h^{\alpha\beta} .$$

Passemos agora ao campo escalar.

$$\mathcal{L}_{\varphi\varphi} = \mathcal{L}_{1\varphi\varphi} + \mathcal{L}_{3\varphi\varphi} = \varphi(-\frac{3a_1}{2} - \frac{a_3\Box}{2})\varphi = \frac{1}{2}\varphi(-3a_1 - a_3\Box)\varphi . \tag{2.16}$$

A parte do campo vetorial fica:

$$\mathcal{L}_{tt} = \mathcal{L}_{1tt} + \mathcal{L}_{2tt} + \mathcal{L}_{3tt} + \mathcal{L}_{4tt} , \tag{2.17}$$

com

$$\mathcal{L}_{1tt} = -\frac{a_1}{2}t_\alpha t^\alpha = \frac{1}{2}t^\mu(-a_1\theta_{\mu\alpha} - a_1\omega_{\mu\alpha})t^\alpha , \tag{2.18}$$

$$\mathcal{L}_{2tt} = -4a_2t^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta t^\beta = \frac{1}{2}t^\mu(-8a_2\Box\omega_{\mu\alpha})t^\alpha , \tag{2.19}$$

$$\mathcal{L}_{3tt} = -\frac{a_3}{4}(t_\alpha\Box t^\alpha + 5t^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta t^\beta) = \frac{1}{2}t^\mu(-\frac{a_3\Box}{2}\theta_{\mu\alpha} - 3a_3\Box\omega_{\mu\alpha})t^\alpha \tag{2.20}$$

e

$$\mathcal{L}_{4tt} = \frac{a_4}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}t_\beta\partial_\alpha t_\gamma = \frac{1}{2}t^\mu(\frac{a_4}{2}\epsilon_{\gamma\mu\alpha}\partial^\gamma)t^\alpha = \frac{1}{2}t^\mu(\frac{a_4}{2}A_{\mu\alpha})t^\alpha . \tag{2.21}$$

Agrupando os termos, obtemos:

$$\mathcal{L}_{tt} = \frac{1}{2}t^\mu[-\frac{2a_1 + a_3\Box}{2}\theta_{\mu\alpha} - (a_1 + 8a_2\Box + 3a_3\Box)\omega_{\mu\alpha} + \frac{a_4}{2}A_{\mu\alpha}]t^\alpha. \tag{2.22}$$

O termo do campo tensorial de rank-2 (e traço nulo) é dado a seguir:

$$\mathcal{L}_{XX} = \mathcal{L}_{1XX} + \mathcal{L}_{3XX} + \mathcal{L}_{4XX} , \tag{2.23}$$

com

$$\mathcal{L}_{1XX} = a_1X_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}X^{\mu\nu}(2a_1P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + 2a_1P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + 2a_1P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + 2a_1P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta})X^{\alpha\beta} , \tag{2.24}$$

$$\mathcal{L}_{3XX} = -a_3X^{\alpha\beta}\Box X_{\alpha\beta} + a_3X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\gamma\, X_\beta{}^\gamma = \frac{1}{2}X^{\mu\nu}(-2a_3\Box P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - a_3\Box P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} -a_3\Box P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{1}{2}a_3\Box P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta})X^{\alpha\beta} \tag{2.25}$$

e

$$\mathcal{L}_{4XX} = -a_4\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\, X_\gamma{}^\delta\, \partial_\alpha X_{\delta\beta} = \frac{1}{2}X^{\mu\nu}(-\frac{a_4}{2}S_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{a_4}{2}R_{\mu\nu,\alpha\beta})X^{\alpha\beta}\ . \tag{2.26}$$

Assim,

$$\mathcal{L}_{XX} = \frac{1}{2}X^{\mu\nu}[(2a_1 - 2a_3\Box)P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + (2a_1 - a_3\Box)P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + (2a_1 - a_3\Box)P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} +(2a_1 - \frac{a_3}{2})P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{a_4}{2}S_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{a_4}{2}R_{\mu\nu,\alpha\beta}]X^{\alpha\beta}\ . \tag{2.27}$$

Vejamos, agora, como ficam os termos mistos nos campos. Primeiramente, o termo de $h_{\mu\nu}$ com t_μ .

$$\mathcal{L}_{th} = \mathcal{L}_{2th} + \mathcal{L}_{3th}\ , \tag{2.28}$$

onde

$$\mathcal{L}_{2th} = 4ka_2(t^\alpha\Box\partial_\alpha\, h_\beta{}^\beta - t^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma}) = \frac{1}{2}t^\mu(8ka_2\Box\theta_{\alpha\beta}\partial_\mu)h^{\alpha\beta} \tag{2.29}$$

e

$$\mathcal{L}_{3th} = \frac{3ka_3}{2}(t^\alpha\Box\partial_\alpha\, h_\beta{}^\beta - t^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma}) = \frac{1}{2}t^\mu(3ka_3\Box\theta_{\alpha\beta}\partial_\mu)h^{\alpha\beta}\ . \tag{2.30}$$

Juntando estes dois termos,

$$\mathcal{L}_{th} = \frac{1}{2}t^\mu[(8a_2 + 3a_3)k\Box\theta_{\alpha\beta}\partial_\mu]h^{\alpha\beta}\ . \tag{2.31}$$

Trabalhemos, agora, o termo de $h_{\mu\nu}$ com $X_{\mu\nu}$.

$$\mathcal{L}_{Xh} = \mathcal{L}_{3Xh} + \mathcal{L}_{4Xh} + \mathcal{L}_{5Xh}\ , \tag{2.32}$$

com

$$\mathcal{L}_{3Xh} = ka_3\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\, X_\gamma{}^\delta\, \Box\partial_\alpha h_{\beta\delta} - ka_3\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\, X_\gamma{}^\delta\, \partial_\alpha\partial_\delta\partial_\lambda\, h^\lambda{}_\beta = \frac{1}{2}X^{\mu\nu}(\frac{ka_3}{2}\Box S_{\mu\nu,\alpha\beta})h^{\alpha\beta} \ , \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{4Xh} &= -\frac{3ka_4}{2}(X^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} + X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\, h_\gamma{}^\gamma - 2X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\beta) \\ &= \frac{1}{2}X^{\mu\nu}(-3ka_4\Box P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + 3ka_4\Box P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta})h^{\alpha\beta} \ .\end{aligned} \tag{2.34}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{5Xh} &= -\frac{ka_5}{2}(X^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} + X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\, h_\gamma{}^\gamma - 2X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\beta) \\ &= \frac{1}{2}X^{\mu\nu}(-ka_5\Box P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + ka_5\Box P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta})h^{\alpha\beta} \ .\end{aligned} \tag{2.35}$$

Agrupando:

$$\mathcal{L}_{Xh} = \frac{1}{2}X^{\mu\nu}[-k(3a_4+a_5)\Box P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + k(3a_4+a_5)\Box P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{ka_3}{2}\Box S_{\mu\nu,\alpha\beta}]h^{\alpha\beta} \ . \tag{2.36}$$

Passemos, em seguida, aos termos de φ com t_μ e φ com $X_{\mu\nu}$.

$$\mathcal{L}_{\varphi t} = \mathcal{L}_{4\varphi t} = -\frac{a_4}{2}\varphi\partial_\alpha t^\alpha = \frac{1}{2}\varphi(-a_4\partial_\alpha)t^\alpha \ . \tag{2.37}$$

$$\mathcal{L}_{\varphi X} = \mathcal{L}_{3\varphi X} = -a_3\varphi\partial_\alpha\partial_\beta X^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varphi(-2a_3\Box\omega_{\alpha\beta})X^{\alpha\beta} \ . \tag{2.38}$$

O último termo é:

$$\mathcal{L}_{tX} = \mathcal{L}_{3tX} + \mathcal{L}_{4tX} \ , \tag{2.39}$$

onde

$$\mathcal{L}_{3tX} = -a_3\epsilon^{\alpha\beta\gamma}t_\beta\partial_\alpha\partial_\delta\, X_\gamma{}^\delta = \frac{1}{2}t^\mu(-a_3A_{\mu\alpha}\partial_\beta - a_3A_{\mu\beta}\partial_\alpha)X^{\alpha\beta} \tag{2.40}$$

e

$$\mathcal{L}_{4tX} = a_4X_{\alpha\beta}\partial^\alpha t^\beta = \frac{1}{2}t^\mu(-a_4B_{\mu,\alpha\beta})X^{\alpha\beta} \ ; \tag{2.41}$$

assim,

$$\mathcal{L}_{tX} = \frac{1}{2}t^{\mu}[-a_3(A_{\mu\alpha}\partial_\beta + A_{\mu\beta}\partial_\alpha) - a_4 B_{\mu,\alpha\beta}]X^{\alpha\beta} \ . \tag{2.42}$$

Podemos agora escrever a ação como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} \;=\; & \int d^3x\{\frac{1}{2}h^{\mu\nu}\{(\frac{k^2a_1\Box}{2} + \frac{a_3k^2\Box^2}{2})P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \lambda\Box P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - [\frac{(a_1k^2+2\lambda)\Box - 8k^2a_2\Box^2}{2} \\
& -\frac{3}{2}a_3k^2\Box^2]P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{\lambda\Box}{2}P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{\sqrt{2}\lambda\Box}{2}(P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\alpha\beta}) + \frac{a_4k^2\Box}{4}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\}h^{\alpha\beta} \\
& +\frac{1}{2}\varphi(-3a_1 - a_3\Box)\varphi + \frac{1}{2}t^{\mu}[-\frac{2a_1+a_3\Box}{2}\theta_{\mu\alpha} - (a_1 + 8a_2\Box + 3a_3\Box)\omega_{\mu\alpha} + \frac{a_4}{2}A_{\mu\alpha}]t^{\alpha} \\
& +\frac{1}{2}X^{\mu\nu}[(2a_1 - 2a_3\Box)P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + (2a_1 - a_3\Box)P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + (2a_1 - a_3\Box)P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \\
& +(2a_1 - \frac{a_3}{2})P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{a_4}{2}S_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{a_4}{2}R_{\mu\nu,\alpha\beta}]X^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}t^{\mu}[(8a_2+3a_3)k\Box\theta_{\alpha\beta}\partial_\mu]h^{\alpha\beta} \\
& +\frac{1}{2}X^{\mu\nu}[-k(3a_4+a_5)\Box P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + k(3a_4+a_5)\Box P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{ka_3}{2}\Box S_{\mu\nu,\alpha\beta}]h^{\alpha\beta} \\
& +\frac{1}{2}\varphi(-a_4\partial_\alpha)t^{\alpha} + \frac{1}{2}\varphi(-2a_3\Box\omega_{\alpha\beta})X^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}t^{\mu}(-a_3D_{\mu,\alpha\beta} - a_4B_{\mu,\alpha\beta})X^{\alpha\beta}\} \ .
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Para concluirmos esta tarefa de nossa análise, podemos, finalmente, reescrever a ação sob a forma:

$$\mathcal{S} = \int d^3x(\frac{1}{2}\Psi^T M\Psi) \ , \tag{2.44}$$

sendo Ψ o multiplete definido como: $\Psi \equiv \begin{pmatrix} h^{\alpha\beta} \\ X^{\alpha\beta} \\ t^{\alpha} \\ \varphi \end{pmatrix}$, e o operador M tendo a estrutura abaixo:

$$M = \begin{pmatrix} hh & hX & ht & h\varphi \\ Xh & XX & Xt & X\varphi \\ th & tX & tt & t\varphi \\ \varphi h & \varphi X & \varphi t & \varphi\varphi \end{pmatrix} \ , \tag{2.45}$$

onde

$$
\begin{aligned}
hh &= \left(\frac{k^2a_1\Box}{2}+\frac{a_3k^2\Box^2}{2}\right)P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta}-\lambda\Box P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta}-\left[\frac{(a_1k^2+2\lambda)\Box-8k^2a_2\Box^2}{2}\right. \\
&\left.-\frac{3}{2}a_3k^2\Box^2\right]P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta}-\frac{\lambda\Box}{2}P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta}+\frac{\sqrt{2}\lambda\Box}{2}(P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\alpha\beta}+P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\alpha\beta})+\frac{a_4k^2\Box}{4}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\ ,
\end{aligned} \tag{2.46}
$$

$$
hX=Xh=-\frac{k}{2}(3a_4+a_5)\Box P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta}+\frac{k}{2}(3a_4+a_5)\Box P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta}+\frac{ka_3}{4}\Box S_{\mu\nu,\alpha\beta}\ , \tag{2.47}
$$

$$
ht=-th=-\frac{(8a_2+3a_3)k\Box}{2}\theta_{\alpha\beta}\partial_\mu\ , \tag{2.48}
$$

$$
h\varphi=\varphi h=0\ , \tag{2.49}
$$

$$
\begin{aligned}
XX &= (2a_1-2a_3\Box)P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta}+(2a_1-a_3\Box)P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta}+(2a_1-a_3\Box)P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \\
&+(2a_1-\frac{a_3}{2})P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta}-\frac{a_4}{2}S_{\mu\nu,\alpha\beta}-\frac{a_4}{2}R_{\mu\nu,\alpha\beta}\ ,
\end{aligned} \tag{2.50}
$$

$$
Xt=-\frac{a_3}{2}D_{\mu,\alpha\beta}+\frac{a_4}{2}B_{\mu,\alpha\beta}\ , \tag{2.51}
$$

$$
tX=-\frac{a_3}{2}D_{\mu,\alpha\beta}-\frac{a_4}{2}B_{\mu,\alpha\beta}\ , \tag{2.52}
$$

$$
X\varphi=\varphi X=-a_3\Box\omega_{\alpha\beta}\ , \tag{2.53}
$$

$$
tt=-\frac{2a_1+a_3\Box}{2}\theta_{\mu\alpha}-(a_1+8a_2\Box+3a_3\Box)\omega_{\mu\alpha}+\frac{a_4}{2}A_{\mu\alpha}\ , \tag{2.54}
$$

$$
t\varphi=-\varphi t=\frac{a_4}{2}\partial_\mu\ , \tag{2.55}
$$

$$
\varphi\varphi=-3a_1-a_3\Box\ . \tag{2.56}
$$

A conveniência de se pôr a ação sob esta forma deve-se ao fato do propagagor dos campos ser dado pelo operador inverso da matriz M considerada em blocos. Assim, temos agora de elaborar uma forma de inverter a matriz em questão. O fato das componentes da mesma serem operadores tensoriais complica um pouco o processo. Para tal, apresentaremos no capítulo que se segue, o método que elaboramos para obtermos, com auxílio dos operadores de spin, o conjunto de propagadores em presença de torção de forma geral e com base exclusivamente na álgebra apresentada no Apêndice.

Capítulo 3

Propagadores e Espectro de Excitações

Neste capítulo, realizaremos a inversão do operador matricial apresentado no final do capítulo anterior, encontrando, assim, os propagadores associados aos campos. Faremos a análise dos mesmos para diversas situações, e verificaremos a unitaridade a "tree-level" para alguns casos relevantes.

3.1 Técnica de Inversão com Operadores de Spin

O propagador dos campos, de forma genérica, é dado por:

$$< 0|T[\phi_\alpha(x)\phi_\beta(y)]|0 >= iM^{-1}\delta^3(x-y) \ , \tag{3.1}$$

onde o operador diferencial M^{-1} é o inverso do operador M que aparece nos termos quadráticos do Lagrangeano. No nosso caso, a forma de M é de uma matriz 4×4, e, a fim de invertermos esta matriz, cujos elementos são de natureza operatorial, teremos de quebrá-la em sub-blocos menores de mais fácil manipulação. Consideremos, então,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \text{ onde } A, B, C \text{ e } D \text{ são sub-matrizes.}$$

Considerando que a matriz inversa M^{-1} é dada por:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}, \text{ onde } X, Y, Z \text{ e } W \text{ também são sub-matrizes,}$$

teremos a seguinte relação:

$$MM^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

onde I é a matriz identidade.

Essa relação dá-nos que:

$$\begin{cases} AX + BZ = I \\ AY + BW = 0 \\ CX + DZ = 0 \\ CY + DW = I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = (A - BD^{-1}C)^{-1} \\ Y = -A^{-1}BW \\ Z = -D^{-1}CX \\ W = (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{cases}, \tag{3.3}$$

onde $(A - BD^{-1}C)^{-1}$ e $(D - CA^{-1}B)^{-1}$ são as inversas das matrizes $A - BD^{-1}C$ e $D - CA^{-1}B$, com A^{-1} e D^{-1} as inversas de A e D.

No nosso caso, é conveniente escrever A como sendo o termo hh, e a matriz D designa a matriz 3×3 com os termos de torção somente. Tal conveniência deve-se ao fato de que, desta forma, poderemos considerar um número maior de casos particulares de maneira mais direta, isolando completamente os efeitos da torção. Analogamente, para invertermos a submatriz D, é conveniente tomarmos a matriz 2×2 com os termos XX, Xt, tX e tt como sendo a matriz "A" e o termo de $\varphi\varphi$ como sendo a matriz "D". Assim, temos que nossos elementos da matriz M^{-1} são dados por:

$$\widetilde{hh} = \left[hh - \begin{pmatrix} hX & ht & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} XX & Xt & X\varphi \\ tX & tt & t\varphi \\ \varphi X & \varphi t & \varphi\varphi \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Xh \\ th \\ 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} , \tag{3.4}$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{Xh} \\ \widetilde{th} \\ \widetilde{\varphi h} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} XX & Xt & X\varphi \\ tX & tt & t\varphi \\ \varphi X & \varphi t & \varphi\varphi \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Xh \\ th \\ 0 \end{pmatrix} \widetilde{hh} \, , \tag{3.5}$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{XX} & \widetilde{Xt} & \widetilde{X\varphi} \\ \widetilde{tX} & \widetilde{tt} & \widetilde{t\varphi} \\ \widetilde{\varphi X} & \widetilde{\varphi t} & \widetilde{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} XX & Xt & X\varphi \\ tX & tt & t\varphi \\ \varphi X & \varphi t & \varphi\varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Xh \\ th \\ \varphi h \end{pmatrix} (hh)^{-1} \begin{pmatrix} hX & ht & h\varphi \end{pmatrix} \right]^{-1} , \tag{3.6}$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{hX} & \widetilde{ht} & \widetilde{h\varphi} \end{pmatrix} = - (hh)^{-1} \begin{pmatrix} hX & ht & h\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{XX} & \widetilde{Xt} & \widetilde{X\varphi} \\ \widetilde{tX} & \widetilde{tt} & \widetilde{t\varphi} \\ \widetilde{\varphi X} & \widetilde{\varphi t} & \widetilde{\varphi\varphi} \end{pmatrix} , \tag{3.7}$$

onde $\begin{pmatrix} XX & Xt & X\varphi \\ tX & tt & t\varphi \\ \varphi X & \varphi t & \varphi\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{XX} & \underline{Xt} & \underline{X\varphi} \\ \underline{tX} & \underline{tt} & \underline{t\varphi} \\ \underline{\varphi X} & \underline{\varphi t} & \underline{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} \underline{XX} & \underline{Xt} \\ \underline{tX} & \underline{tt} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} XX & Xt \\ tX & tt \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X\varphi \\ t\varphi \end{pmatrix} (\varphi\varphi)^{-1} \begin{pmatrix} \varphi X & \varphi t \end{pmatrix} \right]^{-1} , \tag{3.8}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{\varphi X} & \underline{\varphi t} \end{pmatrix} = - (\varphi\varphi)^{-1} \begin{pmatrix} \varphi X & \varphi t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{XX} & \underline{Xt} \\ \underline{tX} & \underline{tt} \end{pmatrix} , \tag{3.9}$$

$$\underline{\varphi\varphi} = \left[\varphi\varphi - \begin{pmatrix} \varphi X & \varphi t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} XX & Xt \\ tX & tt \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X\varphi \\ t\varphi \end{pmatrix} \right]^{-1} , \tag{3.10}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{X\varphi} \\ \underline{t\varphi} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} XX & Xt \\ tX & tt \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X\varphi \\ t\varphi \end{pmatrix} \underline{\varphi\varphi} \, , \tag{3.11}$$

com os elementos da inversa de $\begin{pmatrix} XX & Xt \\ tX & tt \end{pmatrix}$ dados por:

$$\begin{aligned} \widehat{XX} &= \left[XX - Xt\,(tt)^{-1}\,tX\right]^{-1} \, , \\ \widehat{Xt} &= -\,(tt)^{-1}\,tX\widehat{XX} \, , \\ \hat{tt} &= \left[tt - tX\,(XX)^{-1}\,Xt\right]^{-1} \, , \\ \widehat{tX} &= -\,(XX)^{-1}\,Xt\hat{tt} \, , \end{aligned} \tag{3.12}$$

sendo, agora, $(tt)^{-1}$ e $(XX)^{-1}$ o operador inverso dos elementos tt e XX de M. Os mesmos podem ser facilmente invertidos, usando-se a álgebra operatorial dada no Apêndice. De posse destas expressões, encontramos, após tedioso procedimento algébrico, a forma explícita para os propagadores dos campos em consideração.

3.2 Propagadores, Excitações e Unitaridade em "Tree-level"

Inicialmente, para irmos ganhando intuição dos efeitos provenientes da torção, consideremos o caso em que $a_2 = a_3 = a_5 = 0$, e façamos, também, $h = 0$, isto é, desprezamos as flutuações da métrica frente às flutuações da torção.

Neste caso, o Lagrangeano reduz-se a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{a_1}{2}(-3\varphi^2 - t_\mu t^\mu + 2X_{\mu\nu}X^{\mu\nu}) + \frac{a_4}{4}(-2\varphi\partial_\mu t^\mu + \epsilon^{\mu\nu\lambda}t_\nu\partial_\mu t_\lambda \\ &\quad +4X^{\mu\nu}\partial_\mu t_\nu - 4\epsilon^{\mu\nu\lambda}\,X_\lambda{}^\kappa\,\partial_\mu X_{\kappa\nu}) \, , \end{aligned} \tag{3.13}$$

e o campo componente φ passa a ser um campo auxiliar, dado por

$$\varphi = -\frac{a_4}{6a_1}\partial_\mu t^\mu \ . \tag{3.14}$$

Inserindo esta expressão do campo φ de volta no Lagrangeano, e usando o procedimento descrito acima, obtemos que os propagadores no espaço dos momenta serão dados por:

$$\begin{aligned} < \ XX >_{\mu\nu,\alpha\beta} = i \Bigg[& \frac{a_1}{2(a_1^2 - p^2 a_4^2)} P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{1}{2a_1}(P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta}) \\ & + \frac{12a_1^2 - p^2 a_4^2}{2a_1(12a_1^2 + 5p^2 a_4^2)} P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{a_4}{8(a_1^2 - p^2 a_4^2)} S_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{a_4}{8a_1^2} R_{\mu\nu,\alpha\beta} \Bigg] \ , \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$< Xt >_{\alpha,\mu\nu} = - < tX >_{\mu,\alpha\beta} = i \left[\frac{6a_4}{12a_1^2 + 5p^2 a_4^2} \omega_{\mu\nu}\partial_\alpha + \frac{a_4}{4a_1^2}(\theta_{\alpha\mu}\partial_\nu + \theta_{\alpha\nu}\partial_\mu) \right] \tag{3.16}$$

e

$$< tt >_{\mu\alpha} = i \left[-\frac{1}{a_1}\theta_{\mu\alpha} - \frac{12a_1}{12a_1^2 + 5p^2 a_4^2}\omega_{\mu\alpha} - \frac{a_4}{2a_1^2} A_{\mu\alpha} \right] \ . \tag{3.17}$$

Desta expressão, vemos que ocorre um pólo massivo, não-taquiônico, no setor de spin-2 do propagador $< XX >$; um pólo taquiônico no setor longitudinal de $< tt >$ e no termo de "mixing" de X com t. Saturando os propagadores com as correntes conservadas externas, temos que tanto $< tt >$ como os termos mistos em Xt não se acoplam com as mesmas e, assim, podemos nos concentrar exclusivamente em $< XX >$.

Sabemos que, de forma geral, analisando-se a parte imaginária dos resíduos dos propagadores saturados com as correntes externas compatíveis com as simetrias da teoria, podemos verificar a unitaridade em "tree-level" da mesma, e identificar que graus de liberdade são dinâmicos. Para isto, consideremos a corrente expandida em termos de uma base completa:

$$\begin{aligned} \tau_{\mu\nu} \ &= \ c_1 p_\mu p_\nu + c_2 p_\mu \tilde{p}_\nu + c_3 p_\mu \varepsilon_\nu + c_4 \tilde{p}_\mu p_\nu + c_5 \tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu \\ & \quad + c_6 \tilde{p}_\mu \varepsilon_\nu + c_7 \varepsilon_\mu p_\nu + c_8 \varepsilon_\mu \tilde{p}_\nu + c_9 \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu \ , \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde

$$p_\mu = (p_0, \overrightarrow{p}),\ \tilde{p}_\mu = (p_0, -\overrightarrow{p}) \text{ e } \varepsilon_\mu = (0, \overrightarrow{\epsilon})\ , \tag{3.19}$$

que satisfazem às condições,

$$\begin{aligned} p_\mu \tilde{p}^\mu &= (p_0)^2 + (\overrightarrow{p})^2 \neq 0\ , \\ p_\mu \varepsilon^\mu &= \tilde{p}_\mu \varepsilon^\mu = 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

e

$$\varepsilon_\mu \varepsilon^\mu = -1\ . \tag{3.21}$$

De acordo com a simetria da teoria ($\tau_{\mu\nu} = \tau_{\nu\mu}$) e com a condição $p_\mu \tau^{\mu\nu} = 0$, a corrente acima fica:

$$\begin{aligned} \tau_{\mu\nu} &= c_1[p_\mu p_\nu - a(p_\mu \tilde{p}_\nu + \tilde{p}_\mu p_\nu) + a^2 \tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu] \\ &\quad + c_3[p_\mu \varepsilon_\nu + \varepsilon_\mu p_\nu - a(\tilde{p}_\mu \varepsilon_\nu + \varepsilon_\mu \tilde{p}_\nu)] + c_9 \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu\ , \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde

$$a = \frac{p^2}{p_\mu \tilde{p}^\mu}\ . \tag{3.23}$$

A amplitude de transição no espaço dos momentos é o propagador saturado com as correntes,

$$\mathcal{A} = \tau^{*\mu\nu}(-p) < X(-p) X(p) >_{\mu\nu,\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta}(p)\ , \tag{3.24}$$

e, devido ao vínculo $p_\mu \tau^{\mu\nu} = 0$, somente os projetores $P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta}$, $P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ e $S_{\mu\nu,\alpha\beta}$ contribuirão para a amplitude, com

$$\begin{aligned} \tau^{*\mu\nu} P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta} &= \text{coeficiente} \times (|\tau_{\mu\nu}|^2 - \frac{1}{2} |\tau_\mu{}^\mu|^2)\ , \\ \tau^{*\mu\nu} P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta} &= \text{coeficiente} \times (\frac{1}{2} |\tau_\mu{}^\mu|^2)\ , \end{aligned} \tag{3.25}$$

e

$$\tau^{*\mu\nu} S_{\mu\nu,\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta} = \text{coeficiente} \times [-8ap^2(a^2-1)\,\mathrm{Im}(c_3^* c_1) \epsilon_{\gamma\alpha\mu} p^\gamma \tilde{p}^\alpha \varepsilon^\mu]\ . \tag{3.26}$$

Sendo

$$|\tau_{\mu\nu}|^2 = |c_9|^2 \ , \qquad (3.27)$$
$$|\tau_\mu{}^\mu|^2 = |c_9|^2 + |c_1|^2 p^4(a^2-1)^2 + 2i\,\mathrm{Im}(c_1^* c_9)p^2(a^2-1) \ .$$

Para uma excitação de massa nula, $p^2 = 0$, e para uma exitação massiva no seu referencial de repouso, $p_\mu = (m, 0, 0)$, $\tilde{p}_\mu = (m, 0, 0)$ (o que torna $a = 1$ e $a^2 - 1 = 0$). As expressões acima em ambos os casos ficam dadas por:

$$\tau^{*\mu\nu} P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta} = \text{coeficiente} \times (\frac{1}{2}|c_9|^2) \ , \qquad (3.28)$$
$$\tau^{*\mu\nu} P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta} = \text{coeficiente} \times (\frac{1}{2}|c_9|^2)$$

e

$$\tau^{*\mu\nu} S_{\mu\nu,\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta} = 0 \ . \qquad (3.29)$$

Assim, voltando ao nosso caso, temos que a amplitude será:

$$\mathcal{A} = \frac{i}{p^2 - (\frac{a_1}{a_4})^2} \left[-\frac{a_1}{4a_4} + \frac{p^2 - (\frac{a_1}{a_4})^2}{4a_1} \right] |c_9|^2 \ , \qquad (3.30)$$

e a parte imaginária do resíduo da amplitude fica:

$$\mathrm{Im}(res\mathcal{A}) = \mathrm{Im}\left(\lim_{p^2 \to (\frac{a_1}{a_4})^2} [p^2 - (\frac{a_1}{a_4})^2]\mathcal{A} \right) = -\frac{a_1}{4a_4^2} |c_9|^2 \ . \qquad (3.31)$$

Vemos, portanto, que para não violarmos a unitaridade, o coeficiente associado ao escalar de curvatura tem que satisfazer a $a_1 < 0$. O oposto do que é encontrado quando fazemos a teoria de Einstein-Chern-Simons,[15], sem levarmos em consideração os efeitos de torção. Devemos justificar, conceitualmente, por quê.

Consideremos agora o que acontece quando, ainda considerando $a_2 = a_3 = a_5 = 0$, incorporamos as flutuações da métrica. Neste caso, os propagadores ficarão:

$$< \ hh \ >_{\mu\nu,\alpha\beta}= i\left[-\frac{8a_1(4a_1^2+5a_4^2p^2)}{k^2p^2(4a_1^2-a_4^2p^2)^2}P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta}+\frac{2\alpha}{p^2}P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta}+\frac{8a_1}{k^2p^2(4a_1^2-9a_4^2p^2)}P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta}\right.$$
$$+\frac{4[4a_1+k^2\alpha(4a_1^2-9a_4^2p^2)]}{k^2p^2(4a_1^2-9a_4^2p^2)}P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta}+\frac{8\sqrt{2}a_1}{k^2p^2(4a_1^2-9a_4^2p^2)}(P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\alpha\beta}+P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\alpha\beta}) \quad (3.32)$$
$$\left.+\frac{2(8a_1^2+a_4^2p^2)}{k^2p^2(4a_1^2-a_4^2p^2)^2}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\right] ,$$

$$< \ hX \ >_{\mu\nu,\alpha\beta}= i\left[\frac{6a_4(4a_1^2+a_4^2p^2)}{k(4a_1^2-a_4^2p^2)^2}P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta}+\frac{6a_4}{k(4a_1^2-9a_4^2p^2)}P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta}\right. \quad (3.33)$$
$$\left.+\frac{6\sqrt{2}a_4}{k(4a_1^2-9a_4^2p^2)}P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\alpha\beta}-\frac{6a_1a_4}{k(4a_1^2-a_4^2p^2)^2}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\right] ,$$

$$< \ Xh \ >_{\mu\nu,\alpha\beta}= i\left[\frac{6a_4(4a_1^2+a_4^2p^2)}{k(4a_1^2-a_4^2p^2)^2}P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta}+\frac{6a_4}{k(4a_1^2-9a_4^2p^2)}P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta}\right. \quad (3.34)$$
$$\left.+\frac{6\sqrt{2}a_4}{k(4a_1^2-9a_4^2p^2)}P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\alpha\beta}-\frac{6a_1a_4}{k(4a_1^2-a_4^2p^2)^2}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\right] ,$$

$$< \ XX \ >_{\mu\nu,\alpha\beta}= i\left[\frac{2a_1(4a_1^2-7a_4^2p^2)}{(4a_1^2-a_4^2p^2)^2}P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta}+\frac{1}{2a_1}P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta}+\frac{2a_1}{4a_1^2-9a_4^2p^2}P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta}\right.$$
$$\left.+\frac{12a_1^2-a_4^2p^2}{2a_1(12a_1^2+5a_4^2p^2)}P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta}+\frac{a_4(2a_1^2+a_4^2p^2)}{(4a_1^2-a_4^2p^2)^2}S_{\mu\nu,\alpha\beta}+\frac{a_4}{8a_1^2}R_{\mu\nu,\alpha\beta}\right] , \quad (3.35)$$

$$< Xt >_{\alpha,\mu\nu}= - < tX >_{\alpha,\mu\nu}= i\left[\frac{6a_4}{12a_1^2+5a_4^2p^2}\omega_{\mu\nu}p_\alpha+\frac{a_4}{4a_1^2}(\theta_{\alpha\mu}p_\nu+\theta_{\alpha\nu}p_\mu)\right] , \quad (3.36)$$

$$< X\varphi >_{\mu\nu}= < \varphi X >_{\mu\nu}= i\left[-\frac{a_4^2p^2}{a_1(12a_1^2+5a_4^2p^2)}\right]\omega_{\mu\nu} , \quad (3.37)$$

$$< tt >_{\mu\alpha}= i\left[-\frac{1}{a_1}\theta_{\mu\alpha}-\frac{12a_1}{12a_1^2+5a_4^2p^2}\omega_{\mu\alpha}-\frac{a_4}{2a_1^2}A_{\mu\alpha}\right] , \quad (3.38)$$

$$< t\varphi >_{\mu}= - < \varphi t >_{\mu}= i\left[-\frac{2a_4}{12a_1^2+5a_4^2p^2}\right]p_\mu \quad (3.39)$$

e

$$< \varphi\varphi > = i\left[-\frac{2(2a_1^2 + a_4^2p^2)}{a_1(12a_1^2 + 5a_4^2p^2)}\right] . \qquad (3.40)$$

Vemos das expressões acima que os propagadores têm as seguintes caracteristicas a serem observadas:

(i) Existe um pólo duplo indesejável em $p^2 = (\frac{2a_1}{a_4})^2$ no setor de spin-2 dos campos h, X e de "mixing" entre eles.

(ii) Ocorre um modo massivo em $p^2 = (\frac{2a_1}{3a_4})^2$ no setor de spin-0 dos mesmos campos acima mencionados.

(iii) Um pólo taquiônico aparece em $p^2 = -(\frac{12a_1^2}{5a_4^2})$ no setor longitudinal dos campos X e t. O mesmo pólo aparece no campo escalar φ. Este pólo não contribui para o resíduo da amplitude, uma vez que as fontes são transversas.

Procuremos agora as restrições que devemos impor sobre os parâmetros da teoria de forma a obtermos uma matriz de resíduos positivo-definidos definida no pólo. Usando o procedimento utilizado no caso anterior, obtemos o seguinte resíduo dos propagadores saturados no pólo $p^2 = (\frac{2a_1}{3a_4})^2$

$$\mathrm{Im}(res\mathcal{A}) = \lim_{p^2 \to (\frac{2a_1}{3a_4})^2}\left[\begin{pmatrix} \tau^* & \sigma^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{8a_1}{k^2p^2} & -\frac{6a_4}{k} \\ -\frac{6a_4}{k} & -2a_1 \end{pmatrix} P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta}\begin{pmatrix} \tau \\ \sigma \end{pmatrix}\right] , \qquad (3.41)$$

onde τ é a corrente externa associada ao campo gravitacional e σ a corrente associada ao campo de torção de rank-2. Para garantirmos a positividade, devemos impor que o parâmetro a_1 seja negativo, correspondendo assim à propagação do pólo massivo de spin-0.

Vemos, portanto, que a inclusão do tensor de torção na teoria de Einstein-Chern-Simons, via substituição do símbolo de Christoffel pela conexão de Cartan gera uma teoria em que o propagador do setor de spin-2 contém polos de segunda ordem, levando conseqüentemente à violação da unitaridade. Para contornar esta situação indesejável, consideremos o efeito da introdução do termo proveniente de considerarmos $a_5 \neq 0$, e convenientemente escolhamos $a_5 = -3a_4$. Neste caso, ocorre o desacoplamento do termo gravitacional usual das partes provenientes da torção, e os propagadores ficam com a forma:

$$< \ hh >_{\mu\nu,\alpha\beta}= i \left[\frac{a_1}{2k^2 a_4 p^2 [p^2 - (\frac{a_1}{2a_4})^2]} P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{2\alpha}{p^2} P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{2}{k^2 a_1 p^2} P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \right. \tag{3.42}$$
$$\left. +4 \frac{k^2 a_1 \alpha + 1}{k^2 a_1 p^2} P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{2\sqrt{2}}{k^2 a_1 p^2} (P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\alpha\beta}) - \frac{a_4}{4k^2 a_4 p^2 [p^2 - (\frac{a_1}{2a_4})^2]} S_{\mu\nu,\alpha\beta} \right] ,$$

$$< \ XX >_{\mu\nu,\alpha\beta}= i \left[-\frac{a_1}{a_4^2 [p^2 - (\frac{a_1}{a_4})^2]} P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{1}{2a_1} (P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta}) \right. \tag{3.43}$$
$$\left. + \frac{12a_1^2 - p^2 a_4^2}{2a_1 (5a_4^2 p^2 + 12a_1^2)} P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{a_4}{8a_4^2 [p^2 - (\frac{a_1}{a_4})^2]} S_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{a_4}{8a_1^2} R_{\mu\nu,\alpha\beta} \ , \right]$$

$$< Xt >_{\alpha,\mu\nu}= - < tX >_{\alpha,\mu\nu}= i \left[\frac{6a_4}{12a_1^2 + 5a_4^2 p^2} \omega_{\mu\nu} \partial_\alpha + \frac{a_4}{4a_1^2} (\theta_{\alpha\mu} \partial_\nu + \theta_{\alpha\nu} \partial_\mu) \right] \tag{3.44}$$

e

$$< tt >_{\mu,\alpha}= i \left[-\frac{1}{a_1} \theta_{\mu\alpha} - \frac{12a_1}{12a_1^2 + 5a_4^2 p^2} \omega_{\mu\alpha} - \frac{a_4}{2a_1^2} A_{\mu\alpha} \right] . \tag{3.45}$$

Temos, assim, neste caso, três pólos distintos a serem analisados, um sem massa, no setor do campo h, e dois massivos, sendo um no setor de h e o outro no setor de X. Temos, também, um pólo taquiônico nos setores longitudinais de X e t, que não contribuem para a amplitude corrente-corrente.

Verifiquemos como fica a dinâmica e que condições devemos impor sobre os parâmetros para assegurar a unitaridade. No pólo de massa zero do setor gravitacional, obtemos:

$$\mathrm{Im}(res\mathcal{A}) = \mathrm{Im}\left(\lim_{p^2 \to 0} p^2 \mathcal{A} \right) = 0 \ , \tag{3.46}$$

e, portanto, a excitação não-massiva não possui dinâmica, não havendo propagação deste grau de liberdade. Consideremos agora a excitação massiva:

$$\mathrm{Im}(res\mathcal{A}) = \mathrm{Im}\left(\lim_{p^2\to(\frac{a_1}{2a_4})^2}[p^2-(\frac{a_1}{2a_4})^2]\mathcal{A}\right) = \frac{1}{k^2a_1}\left|c_9\right|^2 \ ; \tag{3.47}$$

para garantirmos a unitaridade, temos que ter $a_1 > 0$.

Verificando a excitação massiva de X, encontramos:

$$\mathrm{Im}(res\mathcal{A}) = \mathrm{Im}\left(\lim_{p^2\to(\frac{a_1}{a_4})^2}[p^2-(\frac{a_1}{a_4})^2]\mathcal{A}\right) = -\frac{a_1}{4a_4^2}\left|c_9\right|^2 \ , \tag{3.48}$$

e, para garantirmos propagação que não viole a unitaridade $a_1 < 0$. Vemos, portanto, que nesse caso é impossível satisfazer a condição simultaneamente para os dois casos em questão, não havendo propagação que preserve a unitaridade.

Quando consideramos a_1, a_2, a_3 e a_4 diferentes de zero, a expressão dos propagadores fica extremamente complicada, com termos de p^{12}. Vale como observação que o setor de spin-2 da teoria não tem o seu pólo alterado pelo acréscimo de tais termos, continuando como um pólo de segunda ordem em $p^2 = (\frac{2a_1}{a_4})^2$. Contudo, se fizermos $a_1 = 0$ e $a_5 = -3a_4$, obteremos, restringindo-nos ao setor de spin-2 tão somente (por motivo de simplicidade, já que os outros blocos não afetam esse setor) que:

$$\begin{aligned}< \ hh >_{\mu\nu,\alpha\beta} = i\Bigg[&\frac{2}{9k^2a_3p^2[p^2-(\frac{2a_4}{3a_3})^2]}P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{2\alpha}{p^2}P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{2}{k^2(8a_2+3a_3)p^4}P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \\ &+\frac{4(8a_2+3a_3)\alpha k^2p^2+4}{(8a_2+3a_3)k^2p^4}P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{2\sqrt{2}}{(8a_2+3a_3)k^2p^4}(P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\alpha\beta}) \\ &-\frac{3a_3^2p^2-2a_4^2}{18k^2a_3^2a_4[p^2-(\frac{2a_4}{3a_3})^2]}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\Bigg] \ ,\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$< hX >_{\mu\nu,\alpha\beta} = < Xh >_{\mu\nu,\alpha\beta} = i\left[-\frac{1}{9ka_4[p^2-(\frac{2a_4}{3a_3})^2]}P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{1}{18ka_3p^2[p^2-(\frac{2a_4}{3a_3})^2]}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\right] \tag{3.50}$$

e

$$< XX >_{\mu\nu,\alpha\beta} = i\left[\frac{2}{9a_3[p^2-(\frac{2a_4}{3a_3})^2]}P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{1}{a_3[p^2-(\frac{a_4}{a_3})^2]}P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \right. \tag{3.51}$$
$$+\frac{1}{a_3p^2}(P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + 2P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta}) + \frac{a_4}{2a_3^2p^2[p^2-(\frac{a_4}{a_3})^2]}R_{\mu\nu,\alpha\beta}$$
$$\left. -\frac{3a_3^2p^2-4a_4^2}{9a_4a_3^2[p^2-(\frac{2a_4}{3a_3})^2]}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\right].$$

Temos, então, um pólo massivo em $p^2 = (\frac{2a_4}{3a_3})^2$. Efetuando-se a análise usual até então feita aqui, obtemos, para o campo h:

$$\mathrm{Im}(res\mathcal{A}) = \lim_{p^2\to(\frac{2a_4}{3a_3})^2}\left[\begin{pmatrix} \tau^* & \sigma^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{9k^2a_3p^2} & -\frac{1}{9ka_4} \\ -\frac{1}{9ka_4} & \frac{2}{9a_3} \end{pmatrix} P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta}\begin{pmatrix} \tau \\ \sigma \end{pmatrix}\right], \tag{3.52}$$

A condição $a_3 = k^2a_4$ e $a_4 > 0$ sobre os parâmetros garantem que o pólo massivo em questão não se constitui num ghost.

Obeservamos também que a matriz de resíduo fornece 2 autovalores positivos, de forma que, neste modelo, ocorre a propagação de um grávitom de spin-2 massivo, bem como de um quantum de torção massivo e também com spin-2.

Vemos, assim, que os termos de ordem superior podem ser usados de forma a contornarmos o problema do pólo duplo no setor de spin-2, dando uma dinâmica mais interessante.

Conclusões Gerais

Analisamos, neste trabalho, que papel a torção desempenha na Gravitação em 3-D em presença do termo de massa topológico de Chern-Simons, no que concerne à unitaridade.

Várias peculiaridades foram encontradas, como a presença de um pólo duplo independente do gauge no setor de spin-2 dos propagadores de gravitação e torção, o que destrói a unitariedade do modelo. Foi visto também que a presença de potências mais altas da curvatura e de um termo de "mixing" entre o tensor de Ricci Riemanniano e o setor de spin-2 da torção podem ser usados para restaurar a unitaridade da teoria, uma vez escolhidos propriamente os parâmetros dos mesmos, o que leva à supressão do pólo duplo nos propagadores. Verificou-se a possibilidade de se truncar os graus de liberdade gravitacionais usuais e se considerar somente a propagação de torção num espaço plano. Em tal situação, não haveria problema com o pólo duplo e a unitaridade seria garantida.

Vimos que os diferentes setores de spin carregados pela torção em 3-D não possuem características comuns quando da consideração da sua dinâmica: no caso em que somente os termos de Chern-Simons e Einstein-Hilbert estão presentes, a parte escalar comporta-se como um campo auxiliar, enquanto que o setor de spin-1 propaga somente um táquiom em sua componente longitudinal, e o setor de spin-2 apresenta uma "boa" dinâmica.

Cabe verificar, em vista da finitude da gravitação pura descrita pelo termo de Chern-Simons (uma vez que sabemos como a torção se propaga e interage), se a finitude da teoria persiste quando os efeitos de torção são incluídos. Tal questão é uma proposta concreta que estamos analisando, no contexto da renormalização-BRS, como continuação dos trabalhos aqui iniciados.

Apêndice A

A Álgebra dos Operadores de Spin

Apresentamos abaixo a álgebra dos operados usados neste trabalho:

$$\theta_{\mu\kappa}\theta^{\kappa}_{\alpha} = \theta_{\mu\alpha} \ , \tag{A.1}$$

$$\omega_{\mu\kappa}\omega^{\kappa}_{\alpha} = \omega_{\mu\alpha} \ , \tag{A.2}$$

$$A_{\mu\kappa}A^{\kappa}_{\alpha} = -\Box\theta_{\mu\alpha} \ , \tag{A.3}$$

$$\theta_{\mu\kappa}A^{\kappa}_{\alpha} = A_{\mu\kappa}\theta^{\kappa}_{\alpha} = A_{\mu\alpha} \ , \tag{A.4}$$

$$\theta_{\mu\kappa}B^{\kappa}_{,\alpha\beta} = \theta_{\mu\alpha}\partial_{\beta} + \theta_{\mu\beta}\partial_{\alpha} \ , \tag{A.5}$$

$$\theta_{\mu\kappa}D^{\kappa}_{,\alpha\beta} = D_{\mu,\alpha\beta} \ , \tag{A.6}$$

$$\omega_{\mu\kappa}B^{\kappa}_{,\alpha\beta} = 2\omega_{\alpha\beta}\partial_{\mu} \ , \tag{A.7}$$

$$\omega_{\kappa\lambda}B^{\kappa\lambda}_{\mu,} = 2\partial_{\mu} \ , \tag{A.8}$$

$$A_{\mu\kappa}B^{\kappa}_{,\alpha\beta} = D_{\mu,\alpha\beta} \ , \tag{A.9}$$

$$A_{\mu\kappa}D^{\kappa}_{,\alpha\beta} = -\Box(\theta_{\mu\alpha}\partial_{\beta} + \theta_{\mu\beta}\partial_{\alpha}) \ , \tag{A.10}$$

$$\theta_{\kappa\lambda}\, P^{(0-s)}{}^{\kappa\lambda}_{,\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} \ , \tag{A.11}$$

$$\theta_{\kappa\lambda}\, P^{(0-sw)}{}^{\kappa\lambda}_{,\alpha\beta} = \sqrt{2}\omega_{\alpha\beta} \ , \tag{A.12}$$

$$\omega_{\kappa\lambda}\; P^{(0-w)\,\kappa\lambda}{}_{,\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}\ , \tag{A.13}$$

$$\omega_{\kappa\lambda}\; P^{(0-ws)\,\kappa\lambda}{}_{,\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{\alpha\beta}\ , \tag{A.14}$$

$$P^{(0-s)}_{\mu\nu,\kappa\lambda}\theta^{\kappa\lambda} = \theta_{\mu\nu}\ , \tag{A.15}$$

$$P^{(0-w)}_{\mu\nu,\kappa\lambda}\omega^{\kappa\lambda} = \omega_{\mu\nu}\ , \tag{A.16}$$

$$P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\kappa\lambda}\omega^{\kappa\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{\mu\nu}\ , \tag{A.17}$$

$$P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\kappa\lambda}\theta^{\kappa\lambda} = \sqrt{2}\omega_{\mu\nu}\ , \tag{A.18}$$

$$B_{\kappa,\mu\nu}B^{\kappa}_{,\alpha\beta} = 2\Box(P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + 2P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta})\ , \tag{A.19}$$

$$B_{\mu,\kappa\lambda}B^{\kappa\lambda}_{\alpha,} = 2\Box(\theta_{\mu\alpha} + 2\omega_{\mu\alpha})\ , \tag{A.20}$$

$$B_{\kappa,\mu\nu}D^{\kappa}_{,\alpha\beta} = -\Box R_{\mu\nu,\alpha\beta}\ , \tag{A.21}$$

$$B_{\mu,\kappa\lambda}D^{\kappa\lambda}_{\alpha,} = -2\Box A_{\mu\alpha}\ , \tag{A.22}$$

$$D_{\kappa,\mu\nu}B^{\kappa}_{,\alpha\beta} = \Box R_{\mu\nu,\alpha\beta}\ , \tag{A.23}$$

$$D_{\mu,\kappa\lambda}B^{\kappa\lambda}_{\alpha,} = 2\Box A_{\mu\alpha}\ , \tag{A.24}$$

$$D_{\kappa,\mu\nu}D^{\kappa}_{,\alpha\beta} = 2\Box^2 P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta}\ , \tag{A.25}$$

$$D_{\mu,\kappa\lambda}D^{\kappa\lambda}_{\alpha,} = 2\Box^2\theta_{\mu\alpha}\ , \tag{A.26}$$

$$B_{\mu,\kappa\lambda}\; P^{(1)\,\kappa\lambda}{}_{,\alpha\beta} = (\theta_{\mu\alpha}\partial_\beta + \theta_{\mu\beta}\partial_\alpha)\ , \tag{A.27}$$

$$B_{\mu,\kappa\lambda}\; P^{(0-w)\,\kappa\lambda}{}_{,\alpha\beta} = 2\omega_{\alpha\beta}\partial_\mu\ , \tag{A.28}$$

$$B_{\mu,\kappa\lambda}\; P^{(0-ws)\,\kappa\lambda}{}_{,\alpha\beta} = \sqrt{2}\theta_{\alpha\beta}\partial_\mu\ , \tag{A.29}$$

$$B_{\mu,\kappa\lambda}\; R^{\kappa\lambda}_{,\alpha\beta} = -2D_{\mu,\alpha\beta}\ , \tag{A.30}$$

$$D_{\mu,\kappa\lambda}\; P^{(1)\,\kappa\lambda}{}_{,\alpha\beta} = D_{\mu,\alpha\beta}\ , \tag{A.31}$$

$$D_{\mu,\kappa\lambda}\; R^{\kappa\lambda}_{,\alpha\beta} = 2\Box(\theta_{\mu\alpha}\partial_\beta + \theta_{\mu\beta}\partial_\alpha)\ , \tag{A.32}$$

$$P^{(1)}_{\mu\nu,\kappa\lambda}B^{\kappa\lambda}_{\alpha,} = \theta_{\alpha\mu}\partial_\nu + \theta_{\alpha\nu}\partial_\mu \ , \tag{A.33}$$

$$P^{(1)}_{\mu\nu,\kappa\lambda}D^{\kappa\lambda}_{\alpha,} = D_{\alpha,\mu\nu} \ , \tag{A.34}$$

$$P^{(0-w)}_{\mu\nu,\kappa\lambda}B^{\kappa\lambda}_{\alpha,} = 2\omega_{\mu\nu}\partial_\alpha \ , \tag{A.35}$$

$$P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\kappa\lambda}B^{\kappa\lambda}_{\alpha,} = \sqrt{2}\theta_{\mu\nu}\partial_\alpha \ , \tag{A.36}$$

$$R_{\mu\nu,\kappa\lambda}B^{\kappa\lambda}_{\alpha,} = 2D_{\alpha,\mu\nu} \ , \tag{A.37}$$

$$R_{\mu\nu,\kappa\lambda}D^{\kappa\lambda}_{\alpha,} = -2\Box(\theta_{\alpha\mu}\partial_\nu + \theta_{\alpha\nu}\partial_\mu) \ , \tag{A.38}$$

$$P^{(2)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} \ P^{(2)\,\kappa\lambda}_{\quad\ ,\alpha\beta} = P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \ , \tag{A.39}$$

$$P^{(1)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} \ P^{(1)\,\kappa\lambda}_{\quad\ ,\alpha\beta} = P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \ , \tag{A.40}$$

$$P^{(0-s)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} \ P^{(0-s)\,\kappa\lambda}_{\qquad ,\alpha\beta} = P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \ , \tag{A.41}$$

$$P^{(0-w)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} \ P^{(0-w)\,\kappa\lambda}_{\qquad ,\alpha\beta} = P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \ , \tag{A.42}$$

$$S_{\mu\nu,\kappa\lambda} \ S^{\kappa\lambda}_{\ ,\alpha\beta} = -16\Box P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \ , \tag{A.43}$$

$$R_{\mu\nu,\kappa\lambda} \ R^{\kappa\lambda}_{\ ,\alpha\beta} = -4\Box P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \ , \tag{A.44}$$

$$P^{(2)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} \ S^{\kappa\lambda}_{\ ,\alpha\beta} = S_{\mu\nu,\alpha\beta} \ , \tag{A.45}$$

$$P^{(1)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} \ R^{\kappa\lambda}_{\ ,\alpha\beta} = R_{\mu\nu,\alpha\beta} \ , \tag{A.46}$$

$$P^{(0-s)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} \ P^{(0-sw)\,\kappa\lambda}_{\qquad\ ,\alpha\beta} = P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \ , \tag{A.47}$$

$$P^{(0-w)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} \ P^{(0-ws)\,\kappa\lambda}_{\qquad\ ,\alpha\beta} = P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \ , \tag{A.48}$$

$$P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} \ P^{(0-w)\,\kappa\lambda}_{\qquad ,\alpha\beta} = P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \ , \tag{A.49}$$

$$P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} \ P^{(0-ws)\,\kappa\lambda}_{\qquad\ ,\alpha\beta} = P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \ , \tag{A.50}$$

$$P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} \ P^{(0-s)\,\kappa\lambda}_{\qquad ,\alpha\beta} = P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \ , \tag{A.51}$$

$$P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} \ P^{(0-sw)\,\kappa\lambda}_{\qquad\ ,\alpha\beta} = P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \ , \tag{A.52}$$

$$S_{\mu\nu,\kappa\lambda}\, P^{(2)}{}^{\kappa\lambda}_{,\alpha\beta} = S_{\mu\nu,\alpha\beta} \ , \tag{A.53}$$

$$R_{\mu\nu,\kappa\lambda}\, P^{(1)}{}^{\kappa\lambda}_{,\alpha\beta} = R_{\mu\nu,\alpha\beta} \ . \tag{A.54}$$

Bibliografia

[1] Eddington, A. S., Proc. R. Soc. Lond. A **99**, 104 (1921),
veja também:
Eddington, A. S., The Mathematical Theory of Relativity, 2nd ed, Cambridge University, Cambridge (1924).

[2] Cartan, É., C. R. Acad. Sci. (Paris) **174**, 593 (1922).

[3] Cartan, É., Ann. Ec. Norm. Sup. **40,** 325 (1923); **41** 1 (1924); **42**, 17 (1925).

[4] Goudsmit, S.; Uhlenbeck, G. E., Naturwiss **13**, 953 (1925); Nature **117**, 264 (1926).

[5] Kibble, T. W. B., J. Math. Phys. **2**, 222 (1961).

[6] Sciama, D. W., Recent Developments in General Relativity, Pergamon+DWN, Oxford, 415 (1962).

[7] Sciama, D. W., Rev Mod. Phys. **36**, 463 e 1103 (1964).

[8] Hehl, F. W., Gen. Relat. Grav. J. **4**, 333 (1973); **5**, 491 (1974).

[9] Hehl, F. W., Rep. Math. Phys. **9**, 55 (1976),
Veja também:
Bull. Am. Phys. **19**, 68 (1974).

[10] Hehl, F. W.; Heyde, P.; Kerlick, G. D., Rev. Mod. Phys. **48**, 393 (1976).
Veja também, para (1+2)-D:
Baekler, P.; Mielke, E. W.; Hehl, F. W., Nuovo Cimento **107** B, 91 (1992).

[11] de Sabbata, V.; Gasperini, M., Introduction to Gravitation, capítulo 10, World Scientific (1985).

[12] Carroll, S. M.; Field, G. B., Phy. Rev. D **50**, 3867 (1995).

[13] Hammond, R. J., Phy. Rev. D **52**, 6918 (1995).

[14] Papapetrou, A., Proc. R. Soc. Lond. A **209**, 248 (1951).

[15] Nunes F., C. P.; Pires, G. O., Phys. Lett. B **301**, 339 (1993).

[16] Deser, S.; Jackiw, R.; Templeton, A., Ann. Phys. **140**, 372 (1982).

[17] Deser, S.; Yang, Z., Class. Quantum Grav. **7**, 1603 (1990).

[18] Keszthelyi, B.; Kleppe, G., Phys. Lett. B **281**, 33 (1992).

[19] Buchbinder, I. C.; Odintsou, S. P.; Shapiro, I. L., Effective Action in Quantum Gravity, Bristol, IOP Publishing (1992).

[20] Rivers, R. J., Nuovo Cimento **34**, 386 (1964).

[21] Nieuwenhuizen, P., Nuc. Phys. B **60**, 478 (1973).

[22] Shapiro, I. L., comunicações restritas.

[23] Boldo, J. L.; de Moraes, L. M.; Helayël-Neto, J. A., Class. Quantum Grav. **17**, 813 (2000).

EFEITOS DA TORÇÃO NO ESPECTRO DA "GRAVITAÇÃO TOPOLOGICAMENTE MASSIVA"

Leonardo Machado de Moraes

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

J. A. Helayël - Neto.

José Abdalla Helayël – Neto - Presidente

Margarida Negrão.

Margarida Maria Rodrigues Negrão

R. Paounov

Roman Raykov Paounov

Sebastião Alves Dias

Sebastião Alves Dias - Suplente

Rio de Janeiro, 02 de março de 2000