

TESE DE
DOUTORADO

**Aspectos Geométricos e Resultados
Perturbativos em Física das
Interações Fundamentais**

ANDRÉ PENNA-FIRME

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF.

RIO DE JANEIRO, DEZEMBRO DE 1999.

Dedicatória

À minha esposa Sô e ao meu Zuquinha

meu pai Raul e minha mãe Maria

Agradecimentos

Quero agradecer antes de mais nada ao meu orientador e hoje grande amigo Jos'el Helay'el-Neto por tudo aquilo que fez por mim ao longo destes anos de trabalho no DCP/CBPF. Trabalhar com ele foi seguramente a melhor experi'encia que tive na F'isica. A 'unica coisa que lamento, foi n'ao ter trabalhado neste departamento com ele antes. Seu entusiasmo e sua for'ca s'ao impressionantes, praticamente ajudando e colaborando com todos aqueles que pedem a sua ajuda. Gostaria de ressaltar a import'ancia vital do trabalho de forma'cao que ele vem realizando junto aos estudantes que anualmente chegam ao CBPF. Embora algumas pessoas insistam em critica-lo, ele segue adiante formando uma gera'ao inteira de pesquisadores em F'isica Te'orica de Altas Energias. A maior prova disto foi a participa'ao massiva e importante dos estudantes do DCP no ultimo Encontro Nacional de F'isica de Part'iculas e Campos realizado em S'ao Louren'co .

Posso dizer, sem sombra de d'uv'ida, que aprendi absurdamente com ele, me ensinando quase tudo que eu precisava para realizar o nosso trabalho. Como se tudo isso n'ao bastasse, Prof. Helayel me ajudou muito numa fase dif'icil da minha vida, num momento de indefini'ao e de incerteza, demonstrando sempre confian'ca em mim. Meu trabalho

com ele sempre foi tranquilo e realizado com extremo prazer, principalmente pelo clima de descontração e amizade que ele consegue estabelecer com os estudantes, coisa rara hoje em dia. Outro fato marcante para mim no trabalho com ele é a relação de cooperação e liberdade que mantivemos, sempre respeitando e ouvindo o que a gente tem a dizer, mesmo que seja a maior bobagem. Por tudo isso, quero agradecer a ele, e espero continuar sempre por perto trabalhando e colaborando com ele. Helayel!! Aquele Abraço Cara!!!!!! Valeu!!!

Helayel apresentou-me ao Prof. Ilya Shapiro, com quem trabalhei em boa parte do doutorado, e que me ensinou uma barbaridade. Agradeço muito ao Professor Ilya Shapiro por todas as horas de trabalho juntos e por tudo aquilo que me ensinou. Sua disponibilidade em me receber em Juiz de Fora e suas vindas aqui ao CBPF, algumas vezes, somente para discutir e tirar minhas enormes dúvidas sobre tudo. Foi uma experiência fantástica trabalhar com ele, onde aprendi muito mais do que em toda minha vida antes. Quero agradecer pelas idéias que ele sugeriu para esta tese, que foram fundamentais. Espero continuar a trabalhar com ele após tudo isso.

Quero agradecer a minha Sôzinha pela paciência nestes últimos anos, por sua compreensão com as horas que passava a noite no CBPF e por tantos sábados indo a Petrópolis e as vezes a Juiz de Fora. Por aguentar algumas vezes minhas dúvidas, questionamentos e problemas. Um beijo!! Ao zuca-zuca pelo sorriso e principalmente aquele abraço gostoso que ele me dá quando chego em casa. A meus pais, simplesmente por tudo e mais um pouco. A eles devo praticamente tudo o que sou e que consegui na vida!! Meu pai pela formação ética e por me ensinar a amar a música. A minha santa mãpor me ajudar em tudo!! Principalmente com as aulas dos cursos de Pedagogia!! Como dizia Agnaldo

Timóteo: Alô Mamãe!!!! Um Beijo!!!!

Gostaria de agradecer ao pessoal do Departamento de Cooperação e Parceria (DCP)!!!! Ao amigão do peito Guilherme, e parceiro de Quantum Gravity; acho que formamos um bom grupo de dois patetas!!! Ao grande camarada Oswaldo pela força e pelo empurrão que me deu pra defender logo esta tese. Ao camarada de longa estrada, Mauro Negrão , e sua digníssima patroa e minha enorme e querida amiga Margarida Negrão . Ao Rubro-Nense Tião pela força na terceira e por seu apoio e solidariedade nesta fase dramática de nossas vidas de tri-rebaixados. Ao homem que não presta, Humberto, Guilherme e Roman. Quero agradecer a incrível Rosângela por todo o carinho e amizade!! A um certo rapaz portenho por me alertar para as patéticas gerais Hugão ; Claudio Sazaki, Leonardo, Nelson Panza o homem-aula e ao Boldo. Um agradecimento também especial ao Leon, Death-Metal, por ter me ajudado com as integrais no MAPLE. Outro grande abraço ao mineiro de Tarumirim, Winder, pela ajuda que me deu em fornecer os arquivos para a digitação da tese. Ao Rodolfo Casana, grande mestre nos computadores, pelo ajuda fundamental com o Latex e com o pacote para gerar os gráficos de Feynman.

Quero também lembrar uma das grandes amizades que fiz aqui o Alvaro Nogueira, considerado por muitos o cara mais gente boa do Brasil. A Marcia Moutinho, a Cristinne e seu inseparável 'não concordo'. A Beth e Elizeth; ao Prof. Caride pelas boas conversas e pela defesa do nosso departamento; Ao Ion por seus conselhos e amizade; temos um trabalho ainda pra terminar. Ao 'Ianque Go-Home' Patrick; Gentil e Carlos Chat, valeu pelas discussões sobre as idéias de Donoghue; Marco Aurélio Kneipp, Lucio, Marcelão . Javier, Ozemar, Marconi, Franco Toppan, a todos deixo o meu abraço . Quero também

agradecer especialmente ao Ronaldo, pela pressão para que terminássemos nossas teses junto, e também pelas excelentes discussões ; O cara é bom!!

Gostaria de fazer uma homenagem póstuma final ao nosso grande camarada Joaquim, que já não está mais entre nós, infelizmente. Uma tragédia lamentável, fruto da irresponsabilidade de uma certa empresa de segurança , levou-o do nosso convívio. Que voce ai de cima possa nos dar uma força aqui em baixo!! Valeu Cara!!! a gente vai se encontrar ainda!!!!

Gostaria de finalizar dizendo que estes foram seguramente os anos mais felizes da minha vida nesta etapa de convivência no DCP!! Espero que os que por aqui chegarem continuem fazendo deste departamento o que ele tem sido, mantendo o clima de amizade e cooperação , quase uma extensão da nossa casa!!

Aquela abraço !!!

Resumo

Diversos modelos de teoria de campos, apropriados para a análise das interações eletromagnética, forte e gravitacional, são contempladas de um ponto de vista geométrico e tratados num contexto perturbativo. Técnicas de renormalização são empregadas e correções radiativas de 1-loop são computadas, tendo em vista o futuro estudo das contribuições de baixas energias da Gravitação Quântica ao potencial de Newton.

Abstract

Field-theoretic models pointing towards electromagnetic strong and gravitational interactions are contemplated from a geometrical viewpoint and assessed within the framework of perturbation theory. Renormalization techniques are employed and 1-loop radiative corrections are computed envisaging to set the stage for future quantum-gravity contributions to Newton's potential.

Conteúdo

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vii
Índice	viii
Introdução	1
Capítulo 1	9
1 Renormalização em Superespaço da Teoria de Super-Yang-Mills Topológica-	
$N = 1$	9
1.1 Resumo	9
Introdução	10
1.2 Introdução	10
1.3 A Aproximação Clássica	12
1.3.1 A Identidade de Slavnov-Taylor.	19

1.3.2	As condições de Fixação de Gauge	20
1.3.3	As Equações de Ghost	20
1.3.4	As Equações Supersimétricas do Antighost	20
1.3.5	Invariância Rígida	22
1.4	A Cohomologia de BRS: o Contratermo Local	23
1.5	Conclusões	26

Capítulo 2 **28**

2	Modelos-Sigma Não -Lineares Acoplados a Multipletes-(2,0) de Yang-Mills	28
2.1	Resumo	28
	Introdução	29
2.2	Introdução	29
2.3	O setor de gauge	30
2.4	O acoplamento aos modelos- σ com supersimetria-(2,0)	39
2.5	Conclusões	45

Capítulo 3 **46**

3	Simetria Conforme e Ação Efetiva em Backgrounds de Gravitação com Torção	46
3.1	Resumo	46
3.2	Introdução	47

3.3	Breve revisão da teoria sem torção	50
3.4	Invariância conforme numa teoria incluindo métrica, campo escalar e torção	52
3.5	Divergências, anomalias e a ação efectiva induzida pela anomalia	61
3.6	Conclusões	66

Capítulo 4 **67**

4	Correções Quânticas ao Potencial Coulombiano na QED Escalar: Uma Prévía ao Caso da Gravitação	67
4.1	Resumo	67
4.2	Introdução	69
4.3	Regras de Feynman e o potencial Coulombiano	73
4.4	Diagramas de 1-Loop	76
4.5	Cálculo dos diagramas relevantes	81
4.6	Cálculo do potencial físico	86
4.7	Conclusões	90
	Apêndice	92
	Conclusões Gerais e Perspectivas Futuras	95
	Bibliografia	98

Introdução

A Teoria Quântica de Campos é o ambiente teórico criado para descrever as interações fundamentais das partículas elementares [1, 2, 3]. Pode-se dizer que este objetivo foi amplamente atingido com a elaboração do Modelo Padrão das interações fundamentais. Esta teoria, que inclui a descrição das interações eletrofracas e fortes, e que acomoda contemporaneamente o modelo de quarks através da QCD, tem passado, com sucesso, por uma série de diversos testes experimentais. Estes nos permitem realizar uma série de previsões e estabelecer uma série de limites superiores e inferiores sobre grandezas físicas, a exemplo da medição da massa do top quark e dos limites de varredura da massa prevista para o escalar de Higgs. Mesmo novas descobertas, como as oscilações de neutrinos, que indicam que estes têm massa, não acarretam uma mudança drástica desta teoria, podendo ser naturalmente acomodadas. O mecanismo de quebra espontânea de simetria é um elemento fundamental na elaboração de toda a teoria, e prevê a existência de uma partícula escalar que seria responsável pela geração de massa para os férmions, bem como para os bósons de gauge mediadores das interações eletrofracas, W^\pm e Z_0 . A procura do escalar de Higgs, no entanto, é ainda hoje um ponto crucial na consolidação

definitiva desta teoria e uma questão ainda em aberto, tanto do ponto vista teórico quanto experimental.

Ao mesmo tempo, tentativas de se averigüar alguma nova física além do Modelo Padrão são dificultadas devido, em primeiro lugar, à ausência de experimentos em escalas mais altas de energia, e também por problemas teóricos relacionados com inconsistências inerentes à Gravitação Quântica e à aplicabilidade do modelo a energias acima daquelas disponíveis atualmente nos principais aceleradores. Os chamados Modelos de Grande Unificação, que incorporam o Modelo Padrão e prevêem uma série de novos resultados na faixa dos $10^{15} - 10^{16}$ GeV, apresentam pontos vulneráveis, como a não verificação experimental do previsto decaimento do próton. É consenso, contudo, que a fenomenologia conhecida hoje parece nos indicar, de forma clara, que uma nova física está por vir ao se ampliar a escala de energia dos aceleradores, chegando à região do TeV com o NLC e o LHC. Neste sentido, poder-se-ia considerar o Modelo Padrão como uma teoria efetiva, válida até uma certa escala de energia típica, que pode ser na faixa do TeV.

Como resultado disto, nos últimos 30 anos, tem-se observado um número enorme de trabalhos em Física Teórica e Física Matemática que procuram desenvolver ferramentas matemáticas e subsídios teóricos para que seja possível buscar uma melhor resposta para questões principais, como por exemplo, a unificação das interações fundamentais com a inclusão definitiva da gravitação neste contexto.

Um dos aspectos teóricos mais importantes para a consolidação do programa das teorias de gauge foi o estudo da teoria da renormalização invariante de gauge [31]. As atividades nesta área levaram à prova geral da renormalizabilidade, a todas as ordens de

teoria de perturbação , das teorias de gauge não -Abelianas por t'Hooft Veltman [5, 6]. Para isto, utilizou-se a técnica de regularização dimensional, criada na época por Bollini e Giambiagi [4]. Posteriormente, foi possível a criação de um esquema de renormalização universal, independente de qualquer esquema de regularização . Este esquema é chamado de Renormalização Algébrica [31]. Esta técnica, na verdade, converte o problema da renormalização no estudo da cohomologia do operador nilpotente de BRST desenvolvido por Becchi-Rouct-Stora-Tyutin[27].

Uma das realizações mais importantes na busca de uma teoria unificada mais satisfatória do que o Modelo Padrão foi o desenvolvimento das teorias supersimétricas. Atualmente, a Supersimetria é considerada como uma parte natural da Física Teórica. A razão é que a Supermsimetria (susy) fornece muitas vantagens, como por exemplo no programa de unificação das constantes de acoplamento a energias da escala de Grande-Unificação e a solução do problema da trivialidade para $\lambda\phi^4$. A Supersimetria é bem-definida e profundamente estudada matematicamente, porém a questão da sua relação com a experiência, ou seja com a física real, permanece ainda em aberto. Dentre os diferentes aspectos de teorias supersimétricas, o grande interesse concentrou-se em desenvolvimentos formais das teorias de super-Yang-Mills acopladas a campos de matéria, como a questão da finitude no regime ultravioleta. Uma das conquistas mais recentes e relevantes neste âmbito foi a solução exata de Seiberg-Witten [41] para $N = 2$ -super-Yang-Mills.

Uma das principais questões abertas hoje é o problema da quantização do campo gravitacional. Este é um programa importante em Física Teórica, fundamental para a compreensão dos fenômenos ocorridos na escala de Planck, e também no sentido de

obtermos uma descrição mais completa e unificada da Natureza. Todas as tentativas de se encontrar um modelo que seja, ao mesmo tempo, renormalizável e unitário, como por exemplo modelos de supergravidade, falharam. Podemos, então, estabelecer uma analogia com a teoria de Fermi das interações fracas, que descreve razoavelmente bem o decaimento- β a baixas energias, mas que também era uma teoria não-renormalizável, como a Relatividade Geral. Mais tarde, mostrou-se que a Teoria de Fermi era, na verdade, uma teoria efetiva a baixas energias proveniente de uma teoria mais fundamental, o Modelo de Weinberg-Salam-Glashow.

Nos últimos quinze anos, vem surgindo uma nova abordagem ao problema da gravitação. Neste novo contexto, a gravitação não é mais fundamental, mas a manifestação de uma teoria mais geral e baseada em objetos não locais, como strings. O gráviton surge naturalmente ao quantizarmos as excitações destas strings. Neste sentido, uma série de trabalhos relativamente recentes tem proposto a idéia de tratar a Quantum Gravity no contexto de uma teoria efetiva, válida somente a baixas energias. Provou-se que, apesar da sua não-renormalizabilidade é possível fazer previsões quânticas completamente independentes da estrutura ultravioleta da teoria.

Sendo assim, compreendendo a relevância do problema da Gravitação Quântica no programa da unificação dos 4 campos de forças fundamentais, procura-se nesta tese atacar questões de interesse no que diz respeito a aspectos microscópicos da gravitação, os quais, como se sabe atualmente, mostram-se fundamentais para a compreensão da formação de estruturas de larga escala do Universo e em alguns problemas de Cosmologia.

No Capítulo 1 desta tese, procuramos estudar aspectos da renormalização da Teoria

Topológica de Super-Yang-Mills no Superespaço $-N = 1$. A abordagem ao problema utiliza as técnicas algébricas de BRST, independentes do esquema de regularização adotado, adaptadas ao caso de um modelo com supersimetria- $N = 1$. Obtivemos a expressão mais geral possível do contratermo local a todas as ordens da expansão perturbativa. Foi possível mostrar que as propriedades cohomológicas da teoria supertopológica não são afetadas por efeitos quânticos. Demonstramos, também, neste trabalho que a função $-\beta$ de Callan-Symanzik do modelo é nula, utilizando para isto uma nova identidade de Ward para o antighost supersimétrico.

Apresentamos, no Capítulo 2, o acoplamento de uma classe de multipletes estendidos de super-Yang-Mills-(2,0) (que acomodam um par de potenciais de gauge independentes em conexão com um único grupo de simetria) à matéria e modelos- σ não-lineares formulados no superespaço $-(2,0)$. A dinâmica e o acoplamento dos potenciais de gauge são discutidos aqui. Constatamos a presença de um potencial-de-gauge interagente e que apresenta propriedade de quiralidade do ponto de vista das coordenadas do cone-de-luz.

Os pontos de maior interesse nos desenvolvimentos formais em teoria quântica de campos em espaço s-tempo curvos e gravitação quântica são, na verdade, problemas internos da Relatividade Geral, em particular a existência de singularidades [97]. Na vizinhança destas singularidades, é necessário levar em conta efeitos quânticos e, talvez, aplicar uma teoria quântica da gravitação ainda não conhecida. Como já se disse antes, hoje em dia um ponto de vista comum é que a quantização da gravitação só pode ser realizada com a ajuda de teorias não-locais, como strings ou p-branes. Ao mesmo tempo, para a descrição de fenômenos quânticos a baixas energias, que na verdade podem ser muitas ordens de

grandeza maiores que as energias típicas do Modelo Padrão , a descrição adequada é feita por teorias quânticas de campos em presença de backgrounds clássicos curvos. Para estas altas energias, todas as partículas podem ser tratadas como não -massivas e, desta forma, encontramos campos de matéria conformes num "background" curvo. A invariância conforme é sempre violada em 4 dimensões por uma anomalia, e esta leva necessariamente a um grande número de aplicações , desde os primeiros modelos inflacionários até a descrição da radiação Hawking. É possível, além do estudo da anomalia num background exclusivamente de gravitação , considerar também alguns casos generalizados onde campos de fundo adicionais, como por exemplo dilaton ou torção , são considerados. A introdução da torção parece algo natural a ser proposto, uma vez que, nos instantes iniciais após o Big-Bang, a presença de férmions poderia gerá-la como um campo de fundo sem dinâmica.

Motivados por estes fatos, no Capítulo 3, estudamos aspectos da simetria conforme num modelo de campos escalares num background de gravitação com torção . Mostramos que, para uma escolha especial dos parâmetros da ação , a torção atua como um campo compensador e, assim, a teoria completa mostra-se conformalmente equivalente à Relatividade Geral. Após isto, calculamos explicitamente as divergências a 1-loop, bem como a expressão da anomalia do traço do tensor momento-energia, e a conseqüente ação efetiva induzida por esta anomalia.

A questão talvez mais intrigante ainda permanece no contexto da Gravitação Quântica que é, certamente, um elemento necessário de qualquer teoria quântica de campos próxima às singularidades espaço -temporais. Ainda não dispomos de uma teoria quântica fundamental para a gravitação e, provavelmente, a sua criação ainda não pode ser prevista.

No entanto, ao que tudo indica, a descrição dos efeitos quânticos da gravitação pode ser feita em termos de objetos extensos, não-locais, como strings. Contudo, apesar de não ser possível compreender a interação gravitacional a altas energias, é possível realizar previsões quânticas para o regime de baixas energias. Neste sentido, consideramos a Gravitação Quântica como uma teoria efetiva, que naturalmente só pode fazer algum sentido em regiões na escala de energia muito abaixo da escala de Planck. É possível, assim, realizar algumas previsões no limite de energias muito baixas, como, por exemplo, as correções quânticas ao potencial Newtoniano. No Capítulo 4 desta tese, exploramos a questão da consistência deste procedimento. Como toy model, consideramos a QED Escalar, que mostra muitas propriedades interessantes semelhantes à Gravitação Quântica Efetiva. Em particular, consideramos todos os possíveis gráficos de Feynman contribuindo para o espalhamento de duas partículas escalares no contexto da Eletrodinâmica Quântica Escalar, e buscamos, em primeiro lugar, compreender a eventual (não) dependência de gauge de um cálculo realizado para uma grandeza física no contexto de uma teoria efetiva, onde um conjunto significativo de gráficos é desconsiderado por não apresentar termos não-analíticos no regime de baixas energias. Em segundo lugar, encontramos explicitamente uma expressão para as correções quânticas de baixas energias ao potencial Coulombiano. Este estudo subsidia-nos, na verdade, com alguns resultados para a obtenção das correções quânticas de 1-loop ao potencial Newtoniano na Gravitação Quântica.

Finalmente, apresentamos as nossas Conclusões Gerais e uma análise crítica dos resultados produzidos ao longo desta tese.

Segue-se um Apêndice, no qual fornecemos todas as integrais de loop no espaço dos

momenta necessários ao cálculo das correções em \hbar ao potencial Coulombiano do Capítulo

4.

Capítulo 1

Renormalização em Superespaço da Teoria de Super-Yang-Mills Topológica- $N = 1$

1.1 Resumo

Discutem-se neste capítulo aspectos da renormalização da teoria de super-Yang-Mills em um superspaço $N=1$. Nossa abordagem ao problema utiliza as técnicas algébricas de BRS (independentes do esquema de regularização adotado), adaptadas ao caso de um modelo com supersimetria- $N = 1$. Obtivemos a expressão mais geral possível do contratermo local a todas as ordens da expansão perturbativa. Este contratermo aparece como um "BRS-

coboundary”, o que significa que as propriedades cohomológicas da teoria supertopológica não são afetadas por efeitos quânticos. Foi possível, também, demonstrar neste trabalho que a função $-\beta$ de Callan-Symanzik do modelo é nula, utilizando para isto uma nova identidade de Ward para o anighost supersimétrico.

O conteúdo deste capítulo encontra-se publicado em Nucl. Phys. **B477** 925 (1996)[?].

1.2 Introdução

Uma das conquistas mais interessantes da Física Teórica na última década foi a construção de uma teoria topológica de campos de Yang Mills proposta por Witten [10]. Na sua formulação original, estes modelos foram concebidos para fornecer uma ferramenta operacional para avaliação dos invariantes de Donaldson das variedades quadri-dimensionais [86].

As teorias topológicas são também bastante interessantes de um ponto de vista mais físico; conjectura-se que possam descrever a fase sem quebra da simetria de covariância geral na Gravitação Quântica [10]. Desta forma, parece-nos plenamente justificável uma análise detalhada do comportamento ultravioleta à ordem de 1-loop [12, 13, 14, 15, 16, 17] ou, até mesmo, a todas as ordens da expansão perturbativa [18, 19].

Por outro lado, tem-se o conhecimento das características de finitude ultravioleta apresentadas por uma vasta classe de modelos supersimétricos; teoremas de não-renormalizabilidade [20], cancelamentos surpreendentes de amplitudes [21, 22] e a completa anulação da função $-\beta$ de gauge de algumas teorias estendidas [23]. Levando todos estes fatores em consid-

eração , poderíamos eventualmente nos perguntar se a supersimetria manifesta causaria alguma melhora significativa nas propriedades de renormalização do modelo topológico de Witten. Entretanto, para investigar este problema mais detalhadamente, dever-se-ia verificar se a estrutura topológica da teoria é consistente com o formalismo supersimétrico, ou seja, se a sua generalização supersimétrica pode, de fato, ser realizada. Felizmente, em [24] Birmingham et al, esclareceram este último ponto, e conseguiram escrever um funcional de ação que gera equações supersimétricas (anti) auto-duais, correspondendo à teoria topológica de super Yang-Mills em termos dos campos componentes. Logo após isto, a versão completa do modelo nos superespaços $N = 1$ e $N = 2$ foi construída por Ader et al. em [25, 26], permitindo, assim, que se empregue toda a poderosa técnica de supercampos, que é conhecida por manter a supersimetria manifesta em todas as etapas do procedimento de renormalização .

Este, então , é o propósito deste primeiro capítulo: estudar a teoria topológica de super-Yang-Mills no regime ultravioleta, usando para isto as técnicas de renormalização algébrica de BRS [27, 28, 29] adaptadas para um superespaço $N = 1$ [30, 31]. Como resultado, determina-se o contratermo local mais geral possível a todas as ordens e de uma maneira independente de qualquer esquema de regularização . Observa-se que o número de monômios de campos aparecendo na expressão do contratermo é substancialmente reduzido quando comparado aos já existentes para os casos não -supersimétricos [18, 19]. Este fato é devido não só a presença da supersimetria, mas também a um conjunto adicional de vínculos advindos da simetria, que aparecem quando o gauge de Landau é utilizado no superespaço . Isto sugere que a supersimetria pode desempenhar um papel

interessante na teoria de perturbações de modelos topológicos. A nossa contribuição pode ser considerada como a conclusão do programa de renormalização algébrica do modelo de Witten iniciado na ref. [18].

1.3 A Aproximação Clássica

Iniciamos esta seção lembrando a notação e as convenções adotados por Ader et al. nas refs.[25, 26]. Para que se possa descrever adequadamente as configurações de (anti)-instantons supersimétricos, somos levados a definir a teoria em 4 dimensões Euclidianas. Como explicado em [25], o grupo de invariância geométrica que é relevante aqui é o $SO(4, \mathbb{R}) \sim SU(2, \mathbb{C}) \otimes SU(2, \mathbb{C})$, o que implica que é impossível conectar espinores "left" e "right" através de conjugação complexa. A consequência principal para a supersimetria é que, em princípio, os índices α e $\dot{\alpha}$ devem ser vistos como não tendo nenhuma relação. Além disto, todas as manipulações formais no superespaço $N = 1$ permanecem válidas neste caso.

Seguindo a construção padrão das teorias de gauge supersimétricas- $N = 1$, introduz-se o supercampo de gauge real, \mathcal{V} (o chamado prepotencial), que toma valores na representação adjunta de um grupo compacto arbitrário, \mathcal{G} . Na representação antiquiral, os dois tensores de "field strengths" independentes são dados por:

$$W_{\alpha} = e^{\mathcal{V}} \left[-\bar{D}^2 (e^{-\mathcal{V}} D_{\alpha} e^{\mathcal{V}}) \right] e^{-\mathcal{V}} \quad (1.1)$$

e

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = D^2 (e^{\nu} \bar{D}_{\dot{\alpha}} e^{-\nu}) \quad (1.2)$$

onde D_{α} e $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ são as duas derivadas covariantes de supersimetria. As quantidades (1.1) e (1.2) são, então, empregadas para definir um funcional de ação que vai generalizar a segunda classe de Chern no superespaço $-N = 1$, ou seja,

$$S_{inv.} = \frac{1}{128i} \text{Tr} \left\{ \int dS W^{\alpha} W_{\alpha} - \int d\bar{S} \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}} \right\}, \quad (1.3)$$

onde $dS \equiv d^4x D^2$ e $d\bar{S} \equiv d^4x \bar{D}^2$ são as medidas de integração quiral e antiquiral, respectivamente (ver refs.[30, 31]). Pode-se mostrar, de maneira convincente, que a ação invariante de gauge, $S_{inv.}$, é também um objeto topologicamente invariante pela introdução de uma deformação como abaixo:

$$s_1 \mathcal{V} = \Psi, \quad s_1 \Psi = 0, \quad (1.4)$$

em que Ψ representa o ghost topológico, um supercampo real pertencente à representação adjunta de \mathcal{G} e carregando uma unidade de carga de ghost de Fadeev-Popov. Desta forma, como pode ser diretamente visto, a operação s_1 age sobre (1.3) para dar:

$$s_1 S_{inv.} = \frac{1}{64i} \text{Tr} \left\{ \int dV (e^{\nu} s_1 e^{-\nu}) (\nabla^{\alpha} W_{\alpha} - \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}) \right\}, \quad (1.5)$$

onde $dV = d^4x D^2 \bar{D}^2$ é a medida de integração real sobre todo o superespaço. Sendo assim, a deformação dada em (1.5) é zero devido às identidades de Bianchi:

$$\nabla^{\alpha} W_{\alpha} = \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}, \quad (1.6)$$

as derivadas supercovariantes de gauge, ∇_α e $\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}$, sendo dadas, na representação antiquiral por:

$$\nabla_\alpha = D_\alpha, \quad \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} = e^\nu \bar{D}_{\dot{\alpha}} e^{-\nu}. \quad (1.7)$$

Vale a pena destacar aqui um outro aspecto importante sobre a ação clássica (1.3): $S_{inv.}$ é um termo de superfície puro no espaço Euclidiano plano, como é também seu parceiro bosônico (i.e. a segunda classe de Chern). Como consequência, este setor super-topológico não vai contribuir ao processo de renormalização que se pretende analisar. Na verdade, os "field-strengths" obedecem ao vínculo [32, 33]:

$$D^2 \text{Tr} (W^\alpha W_\alpha) - \bar{D}^2 \text{Tr} (\bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}) = \partial^m \Delta_m. \quad (1.8)$$

Agora, afim de se quantizar, o modelo é necessário introduzir supercampos adicionais da mesma forma que em [34, 35, 36]: um par de supercampos espinoriais antiquirais $(\bar{b}_{\dot{\alpha}}, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}})$ e dois pares de supercampos de ghost quirais e antiquirais (c_+, Φ) e $(\bar{c}_+, \bar{\Phi})$ respectivamente. Precisa-se, além disto, dos multiplicadores de Lagrange (B, β) e dos antighosts (c_-, Λ) tomados como supercampos quirais, e além de seus parceiros antiquirais $(\bar{B}, \bar{\beta})$ e $(\bar{c}_-, \bar{\Lambda})$. Todas as variáveis até aqui mencionadas tomam valores na álgebra de Lie de g e possuem dimensões e cargas de ghost de Fadeev Poppov dadas na Tabela 1.1 acima.

As transformações nilpotentes de BRS propostas em [25] escrevem-se como abaixo:

Tabela 1.1: Dimensões e carga de ghost de Faddeev-Popov dos supercampos.

	\mathcal{V}	Ψ	c_+	\bar{c}_+	Φ	$\bar{\Phi}$	$\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$	$\bar{b}_{\dot{\alpha}}$	Λ	$\bar{\Lambda}$	β	$\bar{\beta}$	c_-	\bar{c}_-	B	\bar{B}
<i>dim.</i>	0	0	0	0	0	0	3/2	3/2	2	2	2	2	2	2	2	2
\mathcal{N}_g	0	1	1	1	2	2	-1	0	-2	-2	-1	-1	-1	-1	0	0

$$\begin{aligned}
s\mathcal{V} &= \Psi + \frac{1}{2} [\mathcal{V}, c_+ + \bar{c}_+] + \sum_{n=0}^{\infty} h_{2n} (\mathcal{L}_{\mathcal{V}})^{2n} (c_+ - \bar{c}_+) \\
&= \Psi + (c_+ - \bar{c}_+) + \frac{1}{2} [\mathcal{V}, c_+ + \bar{c}_+] + \frac{1}{12} [\mathcal{V}, [\mathcal{V}, c_+ - \bar{c}_+]] + \dots, \\
s\Psi &= -\frac{1}{2} \{\Psi, c_+ + \bar{c}_+\} - \sum_{n=1}^{\infty} h_{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\mathcal{L}_{\mathcal{V}})^{i-1} \mathcal{L}_{\Psi} (\mathcal{L}_{\mathcal{V}})^{2n-i} (c_+ - \bar{c}_+) + \\
&\quad - \frac{1}{2} [\mathcal{V}, \Phi + \bar{\Phi}] - \sum_{n=0}^{\infty} h_{2n} (\mathcal{L}_{\mathcal{V}})^{2n} (\Phi - \bar{\Phi}) \\
&= -\frac{1}{2} \{\Psi, c_+ + \bar{c}_+\} - \frac{1}{12} \{\Psi, [\mathcal{V}, c_+ - \bar{c}_+]\} - \frac{1}{12} [\mathcal{V}, \{\Psi, c_+ - \bar{c}_+\}] + \dots + \\
&\quad - (\Phi + \bar{\Phi}) - \frac{1}{2} [\mathcal{V}, \Phi + \bar{\Phi}] - \frac{1}{12} [\mathcal{V}, [\mathcal{V}, \Phi + \bar{\Phi}]] + \dots, \\
sc_+ &= -\frac{1}{2} \{c_+, c_+\} + \Phi, & s\bar{\Phi} &= -[c_+, \bar{\Phi}], \\
s\bar{c}_+ &= -\frac{1}{2} \{\bar{c}_+, \bar{c}_+\} + \bar{\Phi}, & s\bar{\Phi} &= -[\bar{c}_+, \bar{\Phi}], \\
s\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} &= \bar{b}_{\dot{\alpha}}, & s\bar{b}_{\dot{\alpha}} &= 0, \\
s\Lambda &= \beta, & s\beta &= 0, \\
s\bar{\Lambda} &= \bar{\beta}, & s\bar{\beta} &= 0, \\
sc_- &= B, & sB &= 0, \\
s\bar{c}_- &= \bar{B}, & s\bar{B} &= 0,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

onde as constantes h_{2n} são dadas por ($h_0 = 1$, $h_2 = \frac{1}{12}$, $h_4 = -\frac{1}{720}$, ...) designa $\mathcal{L}_\mathcal{V}$ (ou \mathcal{L}_Ψ) o parêntese de Lie ¹, isto é

$$\mathcal{L}_\mathcal{V} \cdot = [\mathcal{V}, \cdot]. \quad (1.10)$$

O próximo passo consiste em introduzir um termo específico de gauge-fixing, de maneira a restringir o processo de quantização às configurações de (anti-)instantons do supercampo de gauge. A ação de gauge-fixing do tipo Landau a ser adotada aqui contém três partes BRS-exatas [25]:

$$\begin{aligned} S_{gf} &= \frac{1}{128} s \text{Tr} \left\{ \int d\bar{S} \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}} + \int dV (\Lambda + \bar{\Lambda}) \Psi + \int dV (c_- + \bar{c}_-) \mathcal{V} \right\} \\ &= \frac{1}{128} \text{Tr} \left\{ \int d\bar{S} [\bar{b}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}} - \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} D^2 ((s_1 e^\mathcal{V}) \bar{D}^{\dot{\alpha}} e^{-\mathcal{V}} + e^\mathcal{V} \bar{D}^{\dot{\alpha}} s_1 e^{-\mathcal{V}}) + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} [\bar{c}_+, \bar{W}^{\dot{\alpha}}]] + \right. \\ &\quad \left. + \int dV [(\beta + \bar{\beta}) \Psi + (\Lambda + \bar{\Lambda}) s \Psi + (B + \bar{B}) \mathcal{V} - (c_- + \bar{c}_-) s \mathcal{V}] \right\} \end{aligned} \quad (1.11)$$

, onde

$$\begin{aligned} s_1 e^\mathcal{V} &= e^{\mathcal{V} + \Psi} - e^\mathcal{V} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n (\mathcal{V})^{i-1} \Psi (\mathcal{V})^{n-i} + \mathcal{O}(\Psi^2). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Aqui, além do vínculo de autodualidade supersimétrico,

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = 0, \quad (1.13)$$

duas fixações de gauge livres de parâmetros [30] são impostas sobre o ghost topológico e o prepotencial, respectivamente. Em particular, as condições não-covariantes

¹Uma graduação deve ser entendida aqui, uma vez que Ψ é um supercampo anticomutante.

$$D^2\Psi = \bar{D}^2\Psi = 0, \quad (1.14)$$

são diferentes das escolhas padrão de gauge covariante ref. [25]. Deve-se enfatizar, entretanto, que neste capítulo nosso interesse são as propriedades ultravioleta do modelo, e as equações (1.14) são mais apropriadas para se realizar este objetivo, não podendo, certamente, alterar os resultados físicos (ver [19]). Deve-se observar que a fixação de gauge covariante no ghost topológico desempenha um papel crucial no cômputo dos observáveis topológicos da teoria [10]. Contudo, não iremos tentar obter estes últimos aqui.

Para traduzir a invariância de BRS do modelo numa identidade Slavnov-Taylor, introduzimos as fontes externas $(\mathcal{V}^*, \Psi^*, c^*, \bar{c}^*, \Phi^*, \bar{\Phi}^*)$ acopladas às partes específicas das leis de transformação em (1.9). O acoplamento externo é, então, dado por:

$$S_{ext.} = \text{Tr} \left\{ \int dV [\mathcal{V}^* \mathcal{P}(\mathcal{V}, c_+, \bar{c}_+) + \Psi^* s\Psi] + \int dS [c^* c_+ c_+ + \Phi^* s\Phi] + \int d\bar{S} [\bar{c}^* \bar{c}_+ \bar{c}_+ + \bar{\Phi}^* s\bar{\Phi}] \right\}, \quad (1.15)$$

no qual o polinômio

$$\mathcal{P}(\mathcal{V}, c_+, \bar{c}_+) = \frac{1}{2}[\mathcal{V}, c_+ + \bar{c}_+] + \sum_{n=0}^{\infty} h_{2n} (\mathcal{L}_{\mathcal{V}})^{2n}(c_+ - \bar{c}_+) \quad (1.16)$$

é a parte da transformação de gauge em $s\mathcal{V}$. Além disto, as fontes devem-se transformar como dubletes de BRS [18, 19]:

Tabela 1.2: Dimensões e cargas de ghost das fontes.

	\mathcal{V}^*	Ψ^*	c^*	\bar{c}^*	Φ^*	$\bar{\Phi}^*$
<i>dim.</i>	2	2	3	3	3	3
\mathcal{N}_g	-1	-2	-2	-2	-3	-3

$$\begin{aligned}
 s\mathcal{V}^* &= 0, & s\Psi^* &= -\mathcal{V}^*, \\
 sc^* &= 0, & s\Phi^* &= -c^*, \\
 s\bar{c}^* &= 0, & s\bar{\Phi}^* &= -\bar{c}^*.
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Observa-se que $S_{ext.}$ é, também uma pura variação de BRS:

$$S_{ext.} = -s\text{Tr} \left\{ \int dV (\Psi^* \mathcal{P}(\mathcal{V}, c, \bar{c})) + \int dS (\Phi^* c_+ c_+) + \int d\bar{S} (\bar{\Phi}^* \bar{c}_+ \bar{c}_+) \right\}. \tag{1.18}$$

Reunimos as dimensões e as cargas de ghost de Fadeev-Poppov das fontes no quadro 2.

A ação clássica invariante, Σ , completa é dada por

$$\Sigma = S_{g.f.} + S_{ext.}, \tag{1.19}$$

que é claramente um BRS-exato. Vale aqui destacar uma vez mais que, devido a eq.(1.8), nenhuma contribuição deve ser esperada de $S_{inv.}$. Na realidade, o vínculo (1.8), sendo quase óbvio num espaço -tempo de Minkowski, será tomado aqui como uma verdadeira condição de renormalização, especificando que, também no regime Euclidiano, $S_{inv.}$ é um invariante topológico, isto é, um número.

1.3.1 A Identidade de Slavnov-Taylor.

A identidade de Slavnov-Taylor obedecida pela ação completa Σ é:

$$S(\Sigma) = 0, \quad (1.20)$$

com

$$\begin{aligned} SS(\Sigma) = & \text{Tr} \left\{ \int dV \left[\Psi \frac{\delta \Sigma}{\delta \mathcal{V}} + \frac{\delta \Sigma}{\delta \mathcal{V}^*} \frac{\delta \Sigma}{\delta \mathcal{V}} + \frac{\delta \Sigma}{\delta \Psi^*} \frac{\delta \Sigma}{\delta \Psi} - \mathcal{V}^* \frac{\delta \Sigma}{\delta \Psi^*} \right] + \right. \\ & + \int dS \left[\Phi \frac{\delta \Sigma}{\delta c_+} - \frac{\delta \Sigma}{\delta c^*} \frac{\delta \Sigma}{\delta c_+} + \frac{\delta \Sigma}{\delta \Phi^*} \frac{\delta \Sigma}{\delta \Phi} + \beta \frac{\delta \Sigma}{\delta \Lambda} + B \frac{\delta \Sigma}{\delta c_-} - c^* \frac{\delta \Sigma}{\delta \Phi^*} \right] + \\ & \left. + \int d\bar{S} \left[\bar{\Phi} \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}_+} - \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}^*} \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}_+} + \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{\Phi}^*} \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{\Phi}} + \bar{b}_\alpha \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{\psi}_\alpha} + \bar{\beta} \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{\Lambda}} + \bar{B} \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}_-} - \bar{c}^* \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{\Phi}^*} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Da equação (1.20) acima, pode-se ler o operador nilpotente linearizado atuando em Σ :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Sigma = & \text{Tr} \left\{ \int dV \left[\Psi \frac{\delta}{\delta \mathcal{V}} + \frac{\delta \Sigma}{\delta \mathcal{V}^*} \frac{\delta}{\delta \mathcal{V}} + \frac{\delta \Sigma}{\delta \mathcal{V}} \frac{\delta}{\delta \mathcal{V}^*} + \frac{\delta \Sigma}{\delta \Psi^*} \frac{\delta}{\delta \Psi} + \frac{\delta \Sigma}{\delta \Psi} \frac{\delta}{\delta \Psi^*} - \mathcal{V}^* \frac{\delta}{\delta \Psi^*} \right] + \right. \\ & + \int dS \left[\Phi \frac{\delta}{\delta c_+} - \frac{\delta \Sigma}{\delta c^*} \frac{\delta}{\delta c_+} - \frac{\delta \Sigma}{\delta c_+} \frac{\delta}{\delta c^*} + \frac{\delta \Sigma}{\delta \Phi^*} \frac{\delta}{\delta \Phi} + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{\delta \Sigma}{\delta \Phi} \frac{\delta}{\delta \Phi^*} + \beta \frac{\delta}{\delta \Lambda} + B \frac{\delta}{\delta c_-} - c^* \frac{\delta}{\delta \Phi^*} \right] + \\ & + \int d\bar{S} \left[\bar{\Phi} \frac{\delta}{\delta \bar{c}_+} - \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}^*} \frac{\delta}{\delta \bar{c}_+} - \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}_+} \frac{\delta}{\delta \bar{c}^*} + \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{\Phi}^*} \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}} + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{\Phi}} \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}^*} + \bar{b}_\alpha \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_\alpha} + \bar{\beta} \frac{\delta}{\delta \bar{\Lambda}} + \bar{B} \frac{\delta}{\delta \bar{c}_-} - \bar{c}^* \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}^*} \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Após isto, vamos analisar as identidade de Ward clássicas adicionais do modelo super-topológico.

1.3.2 As condições de Fixação de Gauge

O primeiro conjunto de identidades consiste nas condições de gauge-fixing de Landau impostas sobre os supercampos Ψ and \mathcal{V} :

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta\beta} = \frac{1}{128}\bar{D}^2\Psi, \quad \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\beta}} = \frac{1}{128}D^2\Psi, \quad \frac{\delta\Sigma}{\delta B} = \frac{1}{128}\bar{D}^2\mathcal{V}, \quad \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{B}} = \frac{1}{128}D^2\mathcal{V}. \quad (1.23)$$

1.3.3 As Equações de Ghost

Tomando as identidades acima e (anti-)comutando com (1.20), obtêm-se as seguintes equações de ghost:

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta\Lambda} + \frac{1}{128}\bar{D}^2\frac{\delta\Sigma}{\delta\Psi^*} = 0, \quad \frac{\delta\Sigma}{\delta\Lambda} + \frac{1}{128}D^2\frac{\delta\Sigma}{\delta\Psi^*} = 0, \quad (1.24)$$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta c_-} + \frac{1}{128}\bar{D}^2\frac{\delta\Sigma}{\delta\mathcal{V}^*} = -\frac{1}{128}\bar{D}^2\Psi, \quad \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}_-} + \frac{1}{128}D^2\frac{\delta\Sigma}{\delta\mathcal{V}^*} = -\frac{1}{128}D^2\Psi.$$

1.3.4 As Equações Supersimétricas do Antighost

As equações dos antighosts são vínculos globais obedecidos por Σ , e podem ser derivadas sempre que um gauge de Landau é imposto [37, 38]. Aqui, lidamos com dois deles. A primeira equação controla o acoplamento de ambos os ghosts Φ e $\tilde{\Phi}$:

$$\mathcal{G}\Sigma = \Delta_{class.}^{\mathcal{G}}, \quad (1.25)$$

com

$$\mathcal{G} = \int dS \left(\frac{\delta}{\delta\Phi} + \left[\Lambda, \frac{\delta}{\delta B} \right] \right) + \int d\bar{S} \left(\frac{\delta}{\delta\bar{\Phi}} + \left[\bar{\Lambda}, \frac{\delta}{\delta\bar{B}} \right] \right), \quad (1.26)$$

e

$$\Delta_{class.}^{\Phi} = - \int dV [\Psi^*, \mathcal{V}] - \int dS [\Phi^*, c_+] - \int d\bar{S} [\bar{\Phi}^*, \bar{c}_+]. \quad (1.27)$$

Computando-se $\Delta_{class.}^{\Phi}$, com

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \int dS \left(\frac{\delta}{\delta c_+} - \left[\beta, \frac{\delta}{\delta B} \right] + \left[\Lambda, \frac{\delta}{\delta c_-} \right] + \left[c_+, \frac{\delta}{\delta\Phi} \right] - \left[\Phi^*, \frac{\delta}{\delta c^*} \right] \right) + \\ & + \int d\bar{S} \left(\frac{\delta}{\delta \bar{c}_+} - \left[\bar{\beta}, \frac{\delta}{\delta \bar{B}} \right] + \left[\bar{\Lambda}, \frac{\delta}{\delta \bar{c}_-} \right] + \left[\bar{c}_+, \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}} \right] - \left[\bar{\Phi}^*, \frac{\delta}{\delta \bar{c}^*} \right] \right) + \\ & + \int dV \left(\left[\mathcal{V}, \frac{\delta}{\delta \Psi} \right] - \left[\Psi^*, \frac{\delta}{\delta \mathcal{V}^*} \right] \right), \end{aligned} \quad (1.28)$$

e

$$\Delta_{class.}^{\mathcal{F}} = \int dV (-[\mathcal{V}^*, \mathcal{V}] + [\Psi^*, \Psi]) - \int dS ([c^*, c_+] + [\Phi^*, \Phi]) - \int d\bar{S} ([\bar{c}^*, \bar{c}_+] + [\bar{\Phi}^*, \bar{\Phi}]), \quad (1.29)$$

chega-se a uma identidade de Ward adicional:

$$\mathcal{F}\Sigma = \Delta_{class.}^{\mathcal{F}}, \quad (1.30)$$

A segunda equação de antighost está relacionada aos ghosts c_+ e \bar{c}_+ :

$$\mathcal{G}_-\Sigma = \Delta_{class.}^{\mathcal{G}_-}, \quad (1.31)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_- = & \int dS \left(\frac{\delta}{\delta c_+} - \left[\Lambda, \frac{\delta}{\delta \beta} \right] - \left[c_-, \frac{\delta}{\delta B} \right] \right) + \\ & + \int d\bar{S} \left(\frac{\delta}{\delta \bar{c}_+} - \left[\bar{\Lambda}, \frac{\delta}{\delta \bar{\beta}} \right] - \left[\bar{c}_-, \frac{\delta}{\delta \bar{B}} \right] + \left\{ \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}, \frac{\delta}{\delta \bar{b}_{\dot{\alpha}}} \right\} \right), \end{aligned} \quad (1.32)$$

e

$$\Delta_{class.}^{\mathcal{G}^-} = \int dV (-[\mathcal{V}^*, \mathcal{V}] + [\Psi^*, \Psi]) - \int dS ([c^*, c_+] + [\Phi^*, \Phi]) - \int d\bar{S} ([\bar{c}^*, \bar{c}_+] + [\bar{\Phi}^*, \bar{\Phi}]). \quad (1.33)$$

É importante ressaltar que as duas equações supersimétricas de antighost obtidas aqui, (1.25) e (1.31), são ambas classicamente quebradas, onde os termos de quebra são monômios integrados lineares nos campos quânticos, e não demandam nenhuma renormalização específica.

1.3.5 Invariância Rígida

Finalmente, a anticomutação da equação de antighost (1.31) com (1.20) leva-nos à invariância rígida de gauge exata do modelo. Além do mais, tem-se que:

$$W_{rig.}\Sigma = 0, \quad (1.34)$$

onde

$$\begin{aligned} W_{rig.} = & \int dV \left(\left[\mathcal{V}, \frac{\delta}{\delta \mathcal{V}} \right] + \left\{ \Psi, \frac{\delta}{\delta \Psi} \right\} + \left\{ \mathcal{V}^*, \frac{\delta}{\delta \mathcal{V}^*} \right\} + \left[\Psi^*, \frac{\delta}{\delta \Psi^*} \right] \right) + \\ & + \int dS \left(\left\{ c_+, \frac{\delta}{\delta c_+} \right\} + \left[\Phi, \frac{\delta}{\delta \Phi} \right] + \left[c^*, \frac{\delta}{\delta c^*} \right] + \left\{ \Phi^*, \frac{\delta}{\delta \Phi^*} \right\} + \right. \\ & \quad \left. + \left[\Lambda, \frac{\delta}{\delta \Lambda} \right] + \left\{ c_-, \frac{\delta}{\delta c_-} \right\} + \left\{ \beta, \frac{\delta}{\delta \beta} \right\} + \left[B, \frac{\delta}{\delta B} \right] \right) + \\ & + \int d\bar{S} \left(\left\{ \bar{c}_+, \frac{\delta}{\delta \bar{c}_+} \right\} + \left[\bar{\Phi}, \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}} \right] + \left[\bar{c}^*, \frac{\delta}{\delta \bar{c}^*} \right] + \left\{ \bar{\Phi}^*, \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}^*} \right\} + \left\{ \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}, \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}} \right\} + \right. \\ & \quad \left. + \left[\bar{\Lambda}, \frac{\delta}{\delta \bar{\Lambda}} \right] + \left\{ \bar{c}_-, \frac{\delta}{\delta \bar{c}_-} \right\} + \left[\bar{b}_{\dot{\alpha}}, \frac{\delta}{\delta \bar{b}_{\dot{\alpha}}} \right] + \left\{ \bar{\beta}, \frac{\delta}{\delta \bar{\beta}} \right\} + \left[\bar{B}, \frac{\delta}{\delta \bar{B}} \right] \right). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Na próxima seção, nossa preocupação maior será com a construção do contratermo local mais geral possível para a ação completa, dado em (1.19). Para atingir este objetivo, deveremos discutir a extensão quântica das identidades de Ward derivadas acima, e como também as identidades de Slavnov-Taylor (1.20).

1.4 A Cohomologia de BRS: o Contratermo Local

Nesta seção, seguiremos o mesmo procedimento das refs.[18, 19] para obter o contratermo geral. Numa primeira etapa, prova-se a renormalizabilidade das identidades de Slavnov-Taylor e das identidades de Ward da seção anterior. As condições de gauge (1.23), as equações de ghost (1.24) e as equações do antighost (1.25) e (1.31) são satisfetitas ao nível quântico, bastando para isto seguir os argumentos de [30, 37]. A identidade de Ward para transformações rígidas (1.34) é conhecida por ser renormalizável devido ao lema de Whitehead. Assim, concentramos nossa atenção na identidade de Slavnov-Taylor (1.20).

Para estudar a cohomologia do operador linearizado, \mathcal{B}_Σ , introduz-se....??

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} = & \int dV \left(\mathcal{V} \frac{\delta}{\delta \mathcal{V}} + \Psi \frac{\delta}{\delta \Psi} + \mathcal{V}^* \frac{\delta}{\delta \mathcal{V}^*} + \Psi^* \frac{\delta}{\delta \Psi^*} \right) + \\
& + \int dS \left(2c_+ \frac{\delta}{\delta c_+} + 2\Phi \frac{\delta}{\delta \Phi} + 2B \frac{\delta}{\delta B} + 2c_- \frac{\delta}{\delta c_-} + 2\beta \frac{\delta}{\delta \beta} + 2\Lambda \frac{\delta}{\delta \Lambda} \right) + \\
& + \int d\bar{S} \left(2\bar{c}_+ \frac{\delta}{\delta \bar{c}_+} + 2\bar{\Phi} \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}} + 2\bar{b}_\alpha \frac{\delta}{\delta \bar{b}_\alpha} + 2\bar{\psi}_\alpha \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_\alpha} + 2\bar{B} \frac{\delta}{\delta \bar{B}} + 2\bar{c}_- \frac{\delta}{\delta \bar{c}_-} + 2\bar{\beta} \frac{\delta}{\delta \bar{\beta}} + 2\bar{\Lambda} \frac{\delta}{\delta \bar{\Lambda}} \right),
\end{aligned} \tag{1.36}$$

que induz uma decomposição tal que

$$\mathcal{B}_\Sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_\Sigma^{(n)}, \quad (1.37)$$

e

$$[\mathcal{N}, \mathcal{B}_\Sigma^{(n)}] = n\mathcal{B}_\Sigma^{(n)}. \quad (1.38)$$

Fornecemos as expressões de $\mathcal{B}_\Sigma^{(0)}$ e $\mathcal{B}_\Sigma^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Sigma^{(0)} = & \int dV \left(\Psi \frac{\delta}{\delta \mathcal{V}} - \mathcal{V}^* \frac{\delta}{\delta \Psi^*} \right) + \int dS \left(\Phi \frac{\delta}{\delta c_+} + \beta \frac{\delta}{\delta \Lambda} + B \frac{\delta}{\delta c_-} - c^* \frac{\delta}{\delta \Phi^*} \right) + \\ & + \int d\bar{S} \left(\bar{\Phi} \frac{\delta}{\delta \bar{c}_+} + \bar{b}_\alpha \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_\alpha} + \bar{\beta} \frac{\delta}{\delta \bar{\Lambda}} + \bar{B} \frac{\delta}{\delta \bar{c}_-} - \bar{c}^* \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}^*} \right), \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Sigma^{(1)} = & \int dV \left((c_+ - \bar{c}_+) \frac{\delta}{\delta \mathcal{V}} - (\Phi - \bar{\Phi}) \frac{\delta}{\delta \Psi} - \frac{1}{128} (\bar{D}_\alpha \bar{b}^\alpha + B + \bar{B}) \frac{\delta}{\delta \mathcal{V}^*} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{128} (\beta + \bar{\beta} + c_- + \bar{c}_-) \frac{\delta}{\delta \Psi^*} \right) + \\ & + \int dS \left((\bar{D}^2 \mathcal{V}^*) \frac{\delta}{\delta c^*} + (\bar{D}^2 \Psi^*) \frac{\delta}{\delta \Phi^*} \right) + \int d\bar{S} \left((D^2 \mathcal{V}^*) \frac{\delta}{\delta \bar{c}^*} + (D^2 \Psi^*) \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}^*} \right). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Realizando uma simples inspeção, é possível verificar que o operador nilpotente $\mathcal{B}_\Sigma^{(0)}$ transforma campos e fontes de acordo com o padrão típico de um dublete de BRS. Desta forma a cohomologia de $\mathcal{B}_\Sigma^{(0)}$ é vazia [39]. Como consequência, a cohomologia de \mathcal{B}_Σ é também vazia também [40]:

$$\mathcal{H}^*(\mathcal{B}_\Sigma) = \emptyset. \quad (1.41)$$

A conclusão principal aqui é que a identidade de Slavnov-Taylor é não-anômala.

Para encontrar o contratermo mais geral, $\tilde{\Sigma}$, verificamos a partir da invariância de

BRS e de (1.41) que:

$$\tilde{\Sigma} = \mathcal{B}_\Sigma \Delta, \quad (1.42)$$

nde Δ é um funcional local integrado de dimensão 4 e carga de ghost (-1). Além do mais,

$\tilde{\Sigma}$ tem que obedecer os seguintes vínculos de estabilidade:

$$\frac{\delta \tilde{\Sigma}}{\delta \beta} = 0, \quad \frac{\delta \tilde{\Sigma}}{\delta \bar{\beta}} = 0, \quad \frac{\delta \tilde{\Sigma}}{\delta B} = 0, \quad \frac{\delta \tilde{\Sigma}}{\delta \bar{B}} = 0, \quad (1.43)$$

juntamente com

$$\frac{\delta \tilde{\Sigma}}{\delta \Lambda} + \frac{1}{128} D^2 \frac{\delta \tilde{\Sigma}}{\delta \Psi^*} = 0, \quad \frac{\delta \tilde{\Sigma}}{\delta \bar{\Lambda}} + \frac{1}{128} \bar{D}^2 \frac{\delta \tilde{\Sigma}}{\delta \Psi^*} = 0, \quad \frac{\delta \tilde{\Sigma}}{\delta c_-} + \frac{1}{128} D^2 \frac{\delta \tilde{\Sigma}}{\delta \mathcal{V}^*} = 0, \quad \frac{\delta \tilde{\Sigma}}{\delta \bar{c}_-} + \frac{1}{128} \bar{D}^2 \frac{\delta \tilde{\Sigma}}{\delta \mathcal{V}^*} = 0, \quad (1.44)$$

e

$$\mathcal{G}\tilde{\Sigma} = 0, \quad \mathcal{F}\tilde{\Sigma} = 0, \quad \mathcal{G}_-\tilde{\Sigma} = 0, \quad W_{rig}\tilde{\Sigma} = 0. \quad (1.45)$$

Portanto, a menos de redefinições do supercampo \mathcal{V} , o contratermo local expressando as potenciais divergências do modelo deve ser:

$$\tilde{\Sigma} = \mathcal{B}_\Sigma \text{Tr} \left\{ \int dV \left(a_1 \hat{\mathcal{V}}^* \mathcal{V} + a_2 \hat{\Psi}^* \Psi + a_3 \hat{\Psi}^* \Psi \mathcal{V} \right) \right\}, \quad (1.46)$$

onde,

$$\hat{\mathcal{V}}^* = \mathcal{V}^* - \frac{1}{128}(c_- + \bar{c}_-), \quad \hat{\Psi}^* = \Psi^* - \frac{1}{128}(\Lambda + \bar{\Lambda}), \quad (1.47)$$

e a_1 , a_2 e a_3 significam coeficientes arbitrários. A este ponto, observa-se que os efeitos quânticos não modificam o caráter cohomológico da teoria, como também o caso da teoria topológica puramente bosônica de Yang-Mills.

Como outra conclusão interessante, percebe-se que, analogamente ao caso bosônico [15, 16, 18, 19], a função $-\beta$ de Callan-Symanzik anula-se de fato aqui. Este último fato é inteiramente devido à equação de antighost supersimétrica (1.31), que dispensa o contratermo

$$\mathcal{B}_\Sigma \text{Tr} \int d\bar{S} (\bar{b}_\alpha \bar{\psi}^\alpha) = \text{Tr} \int d\bar{S} (\bar{W}_\alpha \bar{W}^\alpha) = \text{Tr} \int dS (W^\alpha W_\alpha), \quad (1.48)$$

onde a equação de movimento do supercampo \bar{b}_α e a eq.(1.8) foram usadas.

Fechamos aqui nossa investigação, mencionando uma vez mais que os resultados apresentados acima são independentes do esquema de regularização, e valem a todas as ordens da expansão perturbativa.

1.5 Conclusões

Neste capítulo estudamos alguns aspectos da renormalização da teoria de campos topológica de Yang-Mills definida em um superespaço $N = 1$. Usando as técnicas algébricas de BRS no superespaço, isto é, supersimetria renormalizada [30], é possível mostrar que muitas das conhecidas propriedades da teoria topológica bosônica de Yang-Mills manifestam-se também em sua extensão supersimétrica. De fato, o contratermo local mais geral encontrado no modelo supersimétrico é um polinômio integrado, BRS-exato, nos campos e nas fontes, indicando que a natureza cohomológica da teoria não é afetada por flutuações quânticas. Além disso, foi possível demonstrar que a função $-\beta$ de Callan-Symanzik anula-se devido a um vínculo específico de estabilidade, mais precisamente,

a equação de antighost (eq.(1.31)), que é vista como válida quando a fixação de gauge não-covariante de Landau é imposta sobre as equações do supercampo ghost topológico, eqs.(1.14). Acreditamos que o presente estudo possa ser de interesse em conexão com algumas teorias de gauge supertopológicas que têm sido propostas recentemente na literatura [41].

Capítulo 2

Modelos-Sigma Não -Lineares

Acoplados a Multipletes-(2,0) de

Yang-Mills

2.1 Resumo

Considerando-se uma classe de multipletes de super-Yang-Mills-(2,0) que acomodam um par de potenciais de gauge independentes em conexão com um único grupo de simetria, apresenta-se neste capítulo seu acoplamento à matéria e também a modelos- σ não-lineares em um superespaço $-(2,0)$. A dinâmica e o acoplamento dos potenciais de gauge são discutidos aqui. Constata-se a presença de um potencial-de-gauge interagente e que

apresenta uma peculiar propriedade de quiralidade do ponto de vista das coordenadas do cone-de-luz.

O conteúdo deste capítulo baseia-se no trabalho *(2,0)-Super-Yang-Mills Coupled to Non-Linear σ -Model* (*hep – th 9903126*, submetido para publicação no periódico *Journal of High Energy Physics*), escrito em colaboração com M.Negrão e M.R. Negrão [42].

2.2 Introdução

O grande interesse na investigação dos aspectos geométricos e no comportamento quântico de sistemas bidimensionais, tais como teorias de Yang Mills e modelos- σ não -lineares, especialmente quando apresentam alguma supersimetria, tem-se dado em função da análise das configurações de background das superstrings [44, 45] e do estudo de teorias de campo conformes e modelos integráveis.

Em relação às supersimetrias definidas em um espaço -tempo de duas dimensões , estas podem ser geradas por cargas de Majorana independentes, p cargas do tipo "left" e q cargas do tipo "right". Esta constitui a chamada supersimetria (p, q) [44, 46], e é de fundamental importância na formulação de superstrings heteróticas [47].

Motivados pela compreensão de alguns aspectos relacionados com a dinâmica dos campos de gauge na chamada superfície de mundo(world-sheet), e também pela possibilidade de se encontrar novos exemplos de teorias conformes, considerou-se a formulação em superespaço de um modelo de Yang-Mills-(2,0) [49, 50], ampliado com a introdução de um potencial de gauge extra que se transforma sob o mesmo grupo de gauge simples, tal

como os campos de Yang-Mills usuais das teorias de gauge.

Nos trabalhos das refs.[49, 50], estabeleceu-se o papel do potencial de gauge adicional com base numa discussão dos vínculos impostos sobre os supercampos "field-strength" na álgebra das derivadas covariantes de gauge no superespaço $-(2, 0)$. O acoplamento mínimo deste tipo de modelo de Yang-Mills menos vinculado aos supercampos de matéria foi realizado, e chegou-se à conclusão de que os potenciais de gauge adicionais correspondem a graus de liberdade que interagem mesmo no caso Abeliano. Para o caso de simetrias não -Abelianas, o campo de Yang-Mills extra acopla-se à matéria, além de apresentar auto-interações com o setor de gauge [49].

Assim, nossa proposta neste capítulo é encontrar um possível papel dinâmico para o potencial de gauge adicional, discutido nas refs.[49, 50], por meio de seu acoplamento aos supercampos de matéria que descrevem as coordenadas de uma variedade de Kähler, adotada como o espaço -alvo de um modelo- σ não -linear- $(2, 0)$ [51]. Para realizar esta investigação , é necessário realizar o gauging do grupo de isometria do modelo- σ a ser considerado, trabalhando num superespaço $-(2, 0)$; a seguir, o que se faz é acoplar os supermultipletes estendidos de Yang-Mills- $(2, 0)$ da ref.[49] aos supercampos que definem o modelo- σ $(2, 0)$ cuja isometria é feita local.

2.3 O setor de gauge

As coordenadas que se escolhe para parametrizar o superspaço $-(2, 0)$ são dadas por:

$$z^A \equiv (x^{++}, x^{--}; \theta, \bar{\theta}), \quad (2.1)$$

onde x^{++} , x^{--} são as coordenadas do cone-de-luz, e θ , $\bar{\theta}$ representam espinores de Weyl "right", complexos. As derivadas covariantes de supersimetria são dadas por:

$$D_+ \equiv \partial_\theta + i\bar{\theta}\partial_{++} \quad (2.2)$$

e

$$\bar{D}_+ \equiv \partial_{\bar{\theta}} + i\theta\partial_{++}, \quad (2.3)$$

onde ∂_{++} (ou ∂_{--}) significam as derivadas com respeito às coordenadas do espaço-tempo x^{++} (ou x^{--}). Estas satisfazem a seguinte álgebra:

$$D_+^2 = \bar{D}_+^2 = 0 \quad \{D_+, \bar{D}_+\} = 2i\partial_{++}; \quad (2.4)$$

com estas definições para D e \bar{D} , pode-se verificar que:

$$e^{i\theta\bar{\theta}\partial_{++}} D_+ e^{-i\theta\bar{\theta}\partial_{++}} = \partial_\theta, \quad (2.5)$$

$$e^{-i\theta\bar{\theta}\partial_{++}} \bar{D}_+ e^{i\theta\bar{\theta}\partial_{++}} = \partial_{\bar{\theta}}. \quad (2.6)$$

Os supercampos fundamentais de matéria aqui adotados são os supercampos quirais escalares e espinoriais "left-handed", cujas expressões para os respectivos campos componentes são dadas por:

$$\begin{aligned}
\Phi(x; \theta, \bar{\theta}) &= e^{i\theta\bar{\theta}\partial_{++}}(\phi + \theta\lambda), \\
\Psi(x; \theta, \bar{\theta}) &= e^{i\theta\bar{\theta}\partial_{++}}(\psi + \theta\sigma),
\end{aligned} \tag{2.7}$$

onde ϕ e σ são escalares, enquanto λ e ψ são, respectivamente, Weyl "left" e "right-handed". Este tipo de vínculo de quiralidade leva às seguintes expansões para os campos componentes, Φ^i and Ψ^i :

$$\begin{aligned}
\Phi^i(x; \theta, \bar{\theta}) &= \phi^i(x) + \theta\lambda^i(x) + i\theta\bar{\theta}\partial_{++}\phi^i(x), \\
\Psi^i(x; \theta, \bar{\theta}) &= \psi^i(x) + \theta\sigma^i(x) + i\theta\bar{\theta}\partial_{++}\psi^i(x).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

A ação mais geral no superespaço contendo Φ and Ψ com interações governadas por constantes de acoplamento sem dimensão, f_1 e f_2 , é dada por:

$$\begin{aligned}
S &= \int d^2x d\theta d\bar{\theta} [i(\bar{\Phi}\partial_{--}\Phi - \Phi\partial_{--}\bar{\Phi}) + \bar{\Psi}\Psi + \\
&+ m(\Phi\Psi + \bar{\Phi}\bar{\Psi}) + \\
&+ f_1 P(\Phi, \bar{\Phi})(\bar{\Phi}\partial_{--}\Phi - \Phi\partial_{--}\bar{\Phi}) + \\
&+ f_2 Q(\Phi, \bar{\Phi})\bar{\Psi}\Psi],
\end{aligned} \tag{2.9}$$

onde m é um parâmetro de massa, e P and Q denotam polinômios reais em Φ e $\bar{\Phi}$.

Supõe-se que, agora, Φ e Ψ se transformem arbitrariamente sob um grupo simples e compacto, \mathcal{G} , de acordo com:

$$\Phi' = R(\Lambda)\Phi, \quad \Psi' = S(\Lambda)\Psi \quad (2.10)$$

R e S são matrizes que representam, respectivamente, um elemento do grupo de gauge na representação sob a qual Φ e Ψ se transformam. Levando em conta o vínculo sobre Φ e Ψ , e tendo em mente a representação exponencial de R and S , encontra-se que os supercampos parâmetros de gauge Λ satisfazem ao mesmo tipo de vínculo. Este pode ser, então, expandido da seguinte forma:

$$\Lambda(x; \theta, \bar{\theta}) = e^{i\theta\bar{\theta}\partial_{++}}(\alpha + \theta\beta), \quad (2.11)$$

onde α é um escalar e β é um espinor "right handed".

A parte cinética da ação (2.9) pode ser posta em forma invariante sob as transformações locais (2.10) acoplando minimamente os supercampos potencial de gauge, $\Gamma_{--}(x; \theta, \bar{\theta})$ e $V(x; \theta, \bar{\theta})$ de acordo com

$$S_{inv} = \int d^2x d\theta d\bar{\theta} \{ i[\bar{\Phi} e^{hV} (\nabla_{--}\Phi) - (\nabla_{--}\Phi)^\dagger e^{hV}\Phi] + \Psi^\dagger e^{hV}\Psi \}. \quad (2.12)$$

Os supermultipletes de Yang-Mills são introduzidos por meio das derivadas covariantes de gauge que, conforme a discussão na ref. [49], são definidas abaixo:

$$\nabla_+ \equiv D_+ + \Gamma_+, \quad \bar{\nabla}_+ \equiv \bar{D}_+, \quad (2.13)$$

$$\nabla_{+-} \equiv \partial_{++} + \Gamma_{++} \quad \text{and} \quad \nabla_{--} \equiv \partial_{--} - ig\Gamma_{--}, \quad (2.14)$$

com as superconexões de gauge, Γ_+ , Γ_{++} e Γ_{--} , sendo 'Lie-algebra valued'. Os acoplamento de gauge, g e h , podem, em princípio, ser considerados diferentes; entretanto, isso não significaria que estamos realizando o gauging de duas simetrias independentes. Existe uma única simetria relacionada à um grupo de gauge simples, G , com apenas um superparâmetro de gauge, Λ . Importante ressaltar que devido à forma particular do acoplamento mínimo-(2, 0) (realizado pela exponenciação de V e da conexão presente em ∇_{--}) há a liberdade de associar-se parâmetros de acoplamento diferentes a V e Γ_{--} . As conexões Γ_+ e Γ_{++} podem ser expressas, ambas, em termos do supercampo escalar real $V(x; \theta, \bar{\theta})$, de acordo com:

$$\Gamma_+ = e^{-gV}(D_+e^{gV}) \quad (2.15)$$

e

$$\Gamma_{++} = -\frac{i}{2}\bar{D}_+[e^{-gV}(D_+e^{gV})]. \quad (2.16)$$

Assim, o "gauging" do grupo de isometria do modelo- σ deve ser alcançado por intermédio do acoplamento mínimo da ação do modelo- σ supersimétrico-(2, 0) aos supercampos V e Γ_{--} , como veremos em seguida.

Para estabelecer um contato com a formulação em campos componentes e para identificar a presença de um potencial de gauge adicional, escrevem-se as expansões $-\theta$ para V e Γ_{--} :

$$V(x; \theta, \bar{\theta}) = C + \theta\xi - \bar{\theta}\bar{\xi} + \theta\bar{\theta}v_{++} \quad (2.17)$$

e

$$\Gamma_{--}(x; \theta, \bar{\theta}) = \frac{1}{2}(A_{--} + iB_{--}) + i\theta(\rho + i\eta) + i\bar{\theta}(\chi + i\omega) + \frac{1}{2}\theta\bar{\theta}(M + iN). \quad (2.18)$$

A_{--} , B_{--} e v_{++} são as componentes, no cone-de-luz, dos campos potenciais-de-gauge; ρ, η, χ e ω são espinores de Majorana "left"; M, N e C são escalares reais e ξ é um espinor complexo "right-handed".

As transformações de gauge dos campos componentes acima são dadas por:

$$\begin{aligned} \delta C &= \frac{2}{h} \Im m \alpha, \\ \delta \xi &= -\frac{i}{h} \beta, \\ \delta v_{++} &= \frac{2}{h} \partial_{++} \Re \alpha, \\ \delta A_{--} &= \frac{2}{g} \partial_{--} \Re \alpha, \\ \delta B_{--} &= \frac{2}{g} \partial_{--} \Im m \alpha, \\ \delta \eta &= -\frac{1}{g} \partial_{--} \Re \beta, \\ \delta \rho &= \frac{1}{g} \partial_{--} \Im m \beta, \\ \delta M &= -\frac{2}{g} \partial_{++} \partial_{--} \Im m \alpha, \\ \delta N &= \frac{2}{g} \partial_{++} \partial_{--} \Re \alpha, \\ \delta \chi &= 0, \\ \delta \omega &= 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Estas transformações sugerem que se pode tomar $h = g$, de tal maneira que a componente v_{++} seria identificada como o parceiro no cone-de-luz de A_{--} ,

$$v_{++} \equiv A_{++}, \quad (2.20)$$

assim, constitui-se campo potencial de gauge de duas componentes $A^\mu \equiv (A^0, A^i)$ e $B_{--}(x)$. Até este ponto, deveríamos fazer uma importante observação :a componente $\theta\bar{\theta}$ de Γ_{--} deveria ser identificada como abaixo

$$M + iN = i\partial_{++}(A_{--} + iB_{--}), \quad (2.21)$$

de maneira a assegurar que $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ apareça como uma componente acomodada no "field-strength" do supercampo definido por:

$$[\nabla_+, \nabla_{--}] \equiv X = -igD_+\Gamma_{--} - \partial_{--}\Gamma_+. \quad (2.22)$$

Isto não quebra a supersimetria, pois χ e ω são graus-de-liberdade não -dinâmicos e saem do supercampo "field-strength" X . Na prática, após a identificação dada na equação (2.21), Γ_{--} carrega dois graus de liberdade bosônicos e dois fermiônicos.

Usando o "field-strength" definido em (2.22),pode-se construir o Lagrangeano cinético invariante de gauge:

$$S_{kin} = -\frac{1}{8g^2} \int d^2x d\theta d\bar{\theta} \bar{X} X. \quad (2.23)$$

Esta ação leva ao Lagrangeano componente como abaixo:

$$\mathcal{L}_{kin} = \mathcal{L}_{kin}(\rho, \eta, \xi) + \mathcal{L}_{kin}(A) + \mathcal{L}_{kin}(B_{--}, C), \quad (2.24)$$

onde

$$\mathcal{L}_{kin}(\rho, \eta, \xi) = \frac{i}{8}(\bar{\rho} - i\bar{\eta} - \partial_{--}\bar{\xi}) \overleftrightarrow{\partial}_{++} (\rho + i\eta - \partial_{--}\xi), \quad (2.25)$$

com $A \overleftrightarrow{\partial} B = (\partial A)B - A(\partial B)$;

$$\mathcal{L}_{kin}(A) = \frac{1}{2}A^\nu(\partial^2\eta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu)A^\mu = \frac{1}{2}A^\nu R_{\mu\nu}A^\mu, \quad (2.26)$$

e

$$\mathcal{L}_{kin}(B_{--}, C) = \frac{1}{8}(\partial_{++}B_{--} - \partial_{+\tau}\partial_{--}C)^2 = \frac{1}{8}(B_{--} - C)K(B_{--} - C)^\dagger. \quad (2.27)$$

Repara-se aqui, como já foi mencionado anteriormente, que χ e ω não estão presentes nos Lagrangeanos cinéticos (2.25).

Podemos ver que $R_{\mu\nu}$ e K são matrizes não -invertíveis; assim, é necessário escrever o Lagrangeano de "gauge-fixing" dado por:

$$\begin{aligned} S_{gf} &= k \int d^2x d\theta d\bar{\theta} \bar{G}G \\ &= -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{i}{4\alpha}(\bar{\rho} - i\bar{\eta} - \partial_{--}\bar{\xi})\partial_{++}(\rho + i\eta - \partial_{--}\xi) + \\ &\quad - \frac{1}{8\alpha}(\partial_{++}B_{--} + \partial_{--}\partial_{++}C) \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde $G = D_+\partial_{--}V - iD_+\Gamma_{--}$. Usando a fixação de gauge, eq.(2.28), juntamente com as equações (2.26) e (2.27), podem ser encontrados os propagadores para A , B_{--} e C :

$$\begin{aligned} \langle AA \rangle &= -\frac{2i}{\partial^2}(\theta^{\mu\nu} + \alpha\omega^{\mu\nu}), \\ \langle BB \rangle &= -\frac{8i}{\partial^2}(\alpha - 1)\partial_{--}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle BC \rangle &= -\langle CB \rangle = \frac{8i}{\partial^2}(\alpha + 1)\partial_{--}, \\
\langle CC \rangle &= \frac{8i}{\partial^2}(\alpha - 1)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

O campo- C exibe um caráter compensador, como indicam as equações (2.19). Por outro lado, a redefinição de campo, $\tilde{B}_{--} \equiv B_{--} - \frac{\hbar}{g}\partial_{--}C$, nos permite suprimir C da ação. De uma forma ou de outra, C se mostra um campo não físico. Aqui, nós adotamos a estratégia de manter C como compensador; sua eliminação é melhor realizada escolhendo-se o gauge de Wess-Zumino-(2,0), do que através da redefinição $B_{--} \mapsto \tilde{B}_{--}$. Expressando a ação da equação (2.12) em termos de campos componentes, e adotando a versão (2, 0) do gauge de Wess-Zumino, o setor de matéria-campo-de-gauge do Lagrangeano fica como abaixo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{comp} &= 2\phi\partial^2\phi^* - igA_{--}[\phi^*\partial_{++}\phi - c.c.] - igA_{++}[\phi^*\partial_{--}\phi - c.c.] + \\
&+ g\phi\phi^*\partial_{++}B_{--} - g^2A_{++}A_{--}\phi\phi^* + 2i\bar{\lambda}\partial_{--}\lambda + gA_{--}\bar{\lambda}\lambda + \\
&- ig\phi^*[(\chi + \bar{\rho} + i\omega - i\bar{\eta})\lambda - c.c.] - 2i\bar{\psi}\partial_{++}\psi - gA_{+}\bar{\psi}\psi + \\
&+ \sigma^*\sigma.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Verifica-se, imediatamente, que o campo de gauge extra B_{--} não desacopla do setor de matéria. Nosso ponto de vista de deixar a superconexão Γ_{--} como um supercampo complexo, naturalmente introduziu um potencial de gauge extra, em acréscimo ao campo de gauge usual A_μ : B_{--} comporta-se como um segundo campo de gauge. O fato de trazer um pólo não -massivo de ordem dois no espectro pode prejudicar a unitariedade. Entretanto, o mixing com a componente C de V , que é um campo compensador, indica que deveríamos acoplá-los às correntes externas e analisar a parte imaginária da amplitude corrente-corrente no pólo. Ao fazer isto, verificamos que esta parte imaginária é positivo

definido, e assim consequentemente, não haveriam ghosts presentes. Isto nos assegura afirmar que B_{--} comporta-se como um campo de gauge físico: possui dinâmica e acopla-se à matéria. A única peculiaridade reside na presença de uma única componente nas coordenadas do cone-de-luz. O campo B desempenha o papel de um potencial de gauge quiral. Apesar da presença de um par de campos-de-gauge, um termo de massa, invariante de gauge, não pode ser introduzido, uma vez que B não carrega a componente B_{++} , contrariamente ao que acontece com A^μ . Vamos passar, em seguida, ao acoplamento dos dois potenciais de gauge, A_μ e B_{--} , ao modelo- σ não linear.

2.4 O acoplamento aos modelos- σ com supersimetria- (2,0)

A nossa proposta mais importante daqui em diante será realizar o acoplamento de um modelo- σ -(2,0) aos supercampos de gauge relaxados da ref. [49], e mostrar que, neste caso, os graus de liberdade extra não desacoplam dos ramos de matéria (que são as coordenadas do espaço -alvo. O potencial de gauge extra, obtido ao se relaxar os vínculos, pode assim adquirir um significado dinâmico por meio do acoplamento entre o modelo- σ e os campos de Yang-Mills da ref.[49]. Além disto, este sistema pode fornecer outro exemplo de uma teoria de campos conforme e invariante de gauge.

A ação do modelo- σ -(2,0) supersimétrico, escrita em termos num superespaço (2,0),

assume a forma [51]:

$$S = -\frac{i}{2} \int d^2x d\theta d\bar{\theta} \left[K_i(\Phi, \bar{\Phi}) \partial_{--} \Phi^i - c.c. \right], \quad (2.31)$$

onde o vetor no espaço alvo $K_i(\Phi, \bar{\Phi})$ pode ser expresso como o gradiente de um potencial escalar real (Kähler), $K(\Phi, \bar{\Phi})$, sempre que não houver a presença do termo de Wess Zumino (*i.e.*, no caso livre de torção) [44]:

$$K_i(\Phi, \bar{\Phi}) = \partial_i K(\Phi, \bar{\Phi}) \equiv \frac{\partial}{\partial \Phi^i} K(\Phi, \bar{\Phi}). \quad (2.32)$$

Direcionemos nossa atenção agora para as variedades-alvo Kählerianas do tipo quociente, G/H . Os geradores do grupo de isometria, G , são denotados por Q_α ($\alpha = 1, \dots, \dim G$), enquanto o grupo de isotropia, H , tem seus geradores denotados por $Q_{\bar{\alpha}}$ ($\bar{\alpha} = 1, \dots, \dim H$). As transformações do grupo de isotropia são linearmente realizadas nos supercampos Φ e $\bar{\Phi}$, e agem como na multiplicação de matrizes, exatamente como nas variedades-alvo planas. As transformações de isometria, ao contrário, são não-lineares, e sua ação infinitesimal nos pontos de G/H pode ser escrita como:

$$\delta \Phi^i = \lambda^\alpha k_\alpha^i(\Phi) \quad (2.33)$$

e

$$\delta \bar{\Phi}_i = \lambda^\alpha \bar{k}_{\alpha i}(\bar{\Phi}), \quad (2.34)$$

onde $k_{\alpha i}$ e $\bar{k}_{\alpha i}$ são, respectivamente, os vetores de Killing holomórfico e anti-holomórfico

da variedade-alvo. As versões finitas das transformações de isometria acima são dadas por:

$$\Phi^i = \exp(\mathbf{L}_{\lambda, k}) \Phi^i \quad (2.35)$$

e

$$\bar{\Phi}^i = \exp(\mathbf{L}_{\lambda, \bar{k}}) \bar{\Phi}^i \quad (2.36)$$

com

$$\mathbf{L}_{\lambda, k} \Phi^i \equiv \left[\lambda^\alpha k_\alpha^i \frac{\partial}{\partial \Phi^j}, \Phi^i \right] = \delta \Phi^i. \quad (2.37)$$

Embora o potencial escalar de Kähler possa sempre ser tomado H -invariante, transformações de isometria induzem em K uma variação dada por:

$$\delta K = \lambda^\alpha [(\partial_i K) k_{\alpha i} + (\bar{\partial}^i K) \bar{k}_{\alpha i}] = \lambda^\alpha [\eta_\alpha(\Phi) + \bar{\eta}_\alpha(\bar{\Phi})], \quad (2.38)$$

onde as funções holomórficas e anti-holomórficas, η_α e $\bar{\eta}_\alpha$, podem ser determinadas, a menos de uma quantidade puramente imaginária, como abaixo:

$$(\partial_i K) k_\alpha^i \equiv \eta_\alpha + i M_\alpha(\Phi, \bar{\Phi}) \quad (2.39)$$

e

$$(\bar{\partial}^i K) \bar{k}_{\alpha i} \equiv \bar{\eta}_\alpha - i M_\alpha(\Phi, \bar{\Phi}). \quad (2.40)$$

As funções reais, M_α , juntamente com as funções holomórficas e anti-holomórficas, η_α e $\bar{\eta}_\alpha$, desempenham um papel crucial na discussão do "gauging" do grupo de isometria da variedade alvo [52, 53]. Assim, por meio da transformação (2.38) e dos vínculos impostos sobre Φ e $\bar{\Phi}$, pode ser verificado que a ação no superespaço (2.31) é *invariante* sob transformações globais de isometria.

Avançando ainda mais no estudo das isometrias, uma questão relevante no contexto dos modelos- σ -(2,0)-supersimétricos é o "gauging" do grupo de isometria, G , da variedade-alvo Kähleriana. Isso sugere que se poderia contemplar o acoplamento mínimo do modelo- σ -(2,0) aos supermultipletes de Yang-Mills de uma supersimetria-(2,0) [54]. Uma motivação eventual para se prosseguir numa análise deste tipo está relacionada às teorias de campos conformes bidimensionais. É conhecido que os modelos- σ -(2,0) definem teorias de campo conformes sempre que vínculos adequados sejam impostos sobre a geometria do espaço-alvo [44, 45]. Agora, o acoplamento desses modelos ao setor de Yang-Mills pode fornecer novas teorias de campo conforme de interesse.

O estudo das teorias de Yang-Mills supersimétricas-(2,0) foi realizado na ref.[54] e o "gauging" das isometrias do modelo- σ em um superespaço -(2,0) considerada na ref.[55]. Por outro lado, uma versão alternativa, menos vinculada, dos multipletes de gauge-(2,0) foi proposta e discutida nas refs. [49, 50]. Mostrou-se que a eliminação de alguns vínculos sobre as superconexões de gauge e sobre os supercampos "field-strength" leva ao surgimento de um potencial de gauge extra que compartilha um mesmo campo de gauge.

Para escrever a versão local das transformações de isometria (2.33) e (2.34), temos que substituir os parâmetros globais, λ^α , por um par de supercampos quirais e antiquirais

$\Lambda^\alpha(x; \theta, \bar{\theta})$ e $\bar{\Lambda}^\alpha(x; \theta, \bar{\theta})$, devido aos vínculos satisfeitos por Φ e $\bar{\Phi}$. Isto pode ser realizado de acordo com:

$$\Phi'^i = \exp(\mathbf{L}_{\Lambda, \bar{k}}) \Phi^i \quad (2.41)$$

e

$$\bar{\Phi}'^i = \exp(\mathbf{L}_{\bar{\Lambda}, \bar{k}}) \bar{\Phi}^i. \quad (2.42)$$

De maneira a se aproximar do caso das transformações globais, e para expressar todas as variações de gauge exclusivamente em termos dos parâmetros dos supercampos Λ^α , propomos uma redifinição de campo que consiste em substituir $\bar{\Phi}$ por um novo supercampo, $\tilde{\Phi}$, como segue abaixo:

$$\tilde{\Phi}_i \equiv \exp(i\mathbf{L}_{V, \bar{k}}) \bar{\Phi}_i. \quad (2.43)$$

Da expressão para a transformação de gauge do prepotencial V , pode-se mostrar que:

$$\exp(i\mathbf{L}_{V', \bar{k}}) = \exp(\mathbf{L}_{\Lambda, \bar{k}}) \exp(i\mathbf{L}_{V, \bar{k}}) \exp(-\mathbf{L}_{\bar{\Lambda}, \bar{k}}), \quad (2.44)$$

e $\tilde{\Phi}_i$, conseqüentemente transforma-se com o parâmetro de gauge Λ^α :

$$\tilde{\Phi}'_i = \exp(\mathbf{L}_{\Lambda, \bar{k}}) \tilde{\Phi}_i, \quad (2.45)$$

que na versão infinitesimal é dada por:

$$\delta \tilde{\Phi}_i = \Lambda^\alpha(x; \theta, \bar{\theta}) \bar{k}_{\alpha i}(\tilde{\Phi}). \quad (2.46)$$

Agora, uma transformação de isometria infinitesimal induz no potencial de Kähler modificado, $K(\Phi, \tilde{\Phi})$, uma variação dada por:

$$\delta K(\Phi, \tilde{\Phi}) = \Lambda^\alpha (\eta_\alpha + \tilde{\eta}_\alpha), \quad (2.47)$$

onde

$$\tilde{\eta}_\alpha = (\tilde{\partial}^i K) \bar{k}_{\alpha i}(\tilde{\Phi}) + i M_\alpha(\Phi, \tilde{\Phi}), \quad (2.48)$$

onde $\tilde{\partial}$ significa uma derivada parcial com respeito a $\tilde{\Phi}$. A variação de isometria, δK , computada acima parece-se exatamente com uma transformação de Kähler, e é uma consequência direta da existência do escalar real $M_\alpha(\Phi, \tilde{\Phi})$, como foi discutido nas refs. [52, 53].

A forma da variação de isometria de $K(\Phi, \tilde{\Phi})$ sugere a introdução de um par de supercampos *quiral* e *antiquiral*, $\xi(\Phi)$ e $\tilde{\xi}(\tilde{\Phi})$, cujas respectivas transformações de gauge são fixadas de tal maneira que compensem a mudança de K sob isometrias. Pode-se atingir esse objetivo por meio do Lagrangeano definido por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi &= \partial_i [K(\Phi, \tilde{\Phi}) - \xi(\Phi) - \tilde{\xi}(\tilde{\Phi})] \nabla_{--} \Phi^i + \\ &- \tilde{\partial}_i [K(\Phi, \tilde{\Phi}) - \xi(\Phi) - \tilde{\xi}(\tilde{\Phi})] \nabla_{--} \tilde{\Phi}^i, \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde as derivadas covariantes $\nabla_{--} \Phi^i$ e $\nabla_{--} \tilde{\Phi}^i$ são definidas em analogia com o que é feito no caso do modelo- σ bosônico:

$$\nabla_{--} \Phi_i \equiv \partial_{--} \Phi_i - g \Gamma_{--}^\alpha k_\alpha^i \quad (2.50)$$

e

$$\nabla_{--} \tilde{\Phi}_i \equiv \partial_{--} \tilde{\Phi}_i - g \Gamma_{--}^\alpha \bar{k}_{\alpha i}(\tilde{\Phi}). \quad (2.51)$$

Finalmente, tudo o que se tem a fazer agora para que o Lagrangeano, \mathcal{L}_ξ , dado acima seja invariante sob isometrias locais é fixar as variações de gauge dos supercampos escalares auxiliares, ξ e $\tilde{\xi}$. Se estes últimos são escolhidos tais que:

$$(\partial_i \xi) k_\alpha^i(\Phi) = \eta_\alpha(\Phi) \quad (2.52)$$

e

$$(\tilde{\partial}^i \tilde{\xi}) \bar{k}_{\alpha i}(\tilde{\Phi}) = \tilde{\eta}_\alpha(\tilde{\Phi}), \quad (2.53)$$

então, verifica-se diretamente que o potencial de Kähler transformado

$$[K(\Phi, \tilde{\Phi}) - \xi(\Phi) - \tilde{\xi}(\tilde{\Phi})] \quad (2.54)$$

é invariante por isometria, e o Lagrangeano \mathcal{L}_ξ da eq. (2.49) é simétrico sob o grupo de isometrias "gaugeado".

2.5 Conclusões

O ponto mais interessante que gostaríamos de destacar é que os graus de liberdade extra acomodados no campo componente $B_{--}(x)$ da superconexão Γ_{--} comporta-se como um genuíno campo de gauge que compartilha com A^μ o acoplamento à matéria, e também ao modelo- σ [49]. Este resultado pode ser explicitamente obtido do Lagrangeano dos campos componentes, retirado do Lagrangeano de supercampos, \mathcal{L}_ξ . Desta forma conclui-se que nossa teoria de gauge $(2,0)$, menos vinculada, implica num par de potenciais de gauge que naturalmente se transformam sob a ação de um grupo de gauge Abelian simples.

Capítulo 3

Simetria Conforme e Ação Efetiva em Backgrounds de Gravitação com Torção

3.1 Resumo

Considera-se, neste trabalho, alguns aspectos da simetria conforme num sistema com métrica-campo escalar e torsão . Mostra-se que, para algumas escolhas especiais da ação clássica, a torção age como um campo compensador e a teoria como um todo é conformalmente equivalente à Relatividade Geral. A presença da torção permite, para certos valores dos parâmetros, providenciar equivalência da teoria escalar conforme com torção

e a gravitação de Einstein, com ambas as teorias positivamente definidas. As divergências a 1-loop provenientes dos loops do campo escalar que aparecem são calculadas, como também a consequente anomalia e a ação efetiva induzida pela anomalia são derivadas.

Este capítulo baseia-se no trabalho *On Conformal symmetry for Metric-Scalar Gravity with Torsion*, gr – qc/9907081, submetido para publicação em *Physics Letters B*, escrito em colaboração com J.A. Helayel Neto (UCP e CBPF) e I.L. Shapiro (UFJF)[56].

3.2 Introdução

Os estudos de teorias de campos em backgrounds de gravitação com torção tem uma longa história e muitas conquistas interessantes. Particularmente, a relação entre torção e transformações conformes locais (ver, por exemplo, [57] para uma breve revisão) é um tópico de especial relevância. Nesse trabalho tem-se por objetivo investigar alguns detalhes da simetria conforme que aparecem em alguns sistemas com métrica, campo escalar e torção. Primeiramente, considera-se de forma breve, seguindo os trabalhos anteriores [58, 59, 60], um sistema semelhante sem torção. Após essa etapa parte-se para a investigação da teoria com torção, e avançando ainda mais, são obtidas as divergências a 1-loop, a anomalia conforme e a ação efetiva induzida pela anomalia.

Uma vez que vamos considerar aqui questões relacionadas com transformações conformes e com simetria conforme na Gravitação, vale a pena fazer alguns comentários gerais que considero relevantes. As transformações conformes na Gravitação podem ser utilizadas para duas diferentes propostas. Primeiro, por intermédio de transformações

conformes, pode-se mudar trocar o chamado "frame" conforme numa teoria de campo escalar acoplado à Gravitação . Além disso, essa escolha não é arbitrária, uma vez que as massas dos campos devem ser introduzidas. Existem, assim, muitas razões para escolher um ou outro "frame" como físico; pode-se encontrar uma discussão detalhada sobre este aspecto em [57]. Todas as teorias para as quais essa consideração se aplica usualmente não possui simetria conforme, mesmo antes das massas serem introduzidas. Em segundo lugar, pode-se considerar a teoria com simetria conforme.

Neste presente Capítulo, vamos discutir somente o segundo caso, ou seja, teorias sem massa com simetria conforme não quebrada. Assim, a mudança do "frame" conforme é tão somente uma escolha invariante das variáveis dinâmicas, ao menos a nível clássico. Vale mencionar que as teorias com simetria conforme tem um significado proeminente em muitas áreas da moderna Física teórica. O mais importante, ao menos para o caso de aplicações , é que a nível quântico essa simetria violada por uma anomalia. Podemos citar como alguns exemplos das aplicações da anomalia de traço , a obtenção das equações efetivas para strings em "backgrounds fields" que são, nada mais do que, condições necessárias para o cancelamento das anomalias [63, 71]; a derivação da evaporação de buracos negros numa abordagem semiclássica [64]; o primeiro modelo inflacionário [75], outros exemplos (recomendo [61] para um review geral da anomalia conforme). Recentemente, a aplicação de anomalias para $D = 4$ foi aprimorada através do uso de ação efetiva induzida pela anomalia (anomaly-induced effective action) obtida anteriormente [70, 71]. Em particular, isso levou a uma melhor compreensão da inflação gerada pela anomalia (anomaly-generated inflation) [77] e permitiu realizar uma classificação sistemática dos es-

tados de vácuo na abordagem semi clássica ao problema da evaporação de buracos negros. A ação efetiva induzida pela anomalia tem sido usada para desenvolver a teoria quântica do fator conforme [73] e para a consequente estudo da "back reaction" da Gravitação para os campos de matéria [65].

A generalização da anomalia e da ação induzida pela anomalia para o caso de uma torção completamente antissimétrica foi dado em [72]. Aqui, neste trabalho, nós investigamos as propriedades conformes não triviais de um sistema envolvendo campo escalar acoplado à Gravitação com torção, que modificam a identidade de Noether correspondente à simetria conforme. Essa modificação é devido ao fato de que, no modelo em discussão, a torção se transforma enquanto sua parte antissimétrica considerada acima [72] não sofre transformação. Como resultado desta nova características, a anomalia conforme não é mais a anomalia do traço do tensor Momento-Energia, mas diferentemente, o traço de alguma quantidade modificada. Entretanto, usando uma parametrização conveniente para os campos, pode-se, como será mostrado abaixo, reduzir o cálculo desta nova anomalia, e obter as expressões tanto para a anomalia quanto para a ação efetiva induzida pela anomalia, utilizando para isto resultados correspondentes de [70, 71, 72].

Buscando uma abordagem mais geral, todas as fórmulas clássicas são escritas para um espaço tempo de dimensão n , para $n \neq 2$ (ver apêndice de [60] para a discussão do caso especial da teoria em $n = 2$ com ausência de torção). As divergências e anomalias são todas calculadas em torno de $n = 4$.

3.3 Breve revisão da teoria sem torção

A nossa proposta aqui consiste em mostrar que o modelo n -dimensional com dilatons acoplados numa métrica de fundo, incluindo somente termos de derivada segunda, é conformalmente equivalente à Relatividade Geral. Essa equivalência foi originalmente demonstrada e bastante discutida em [58] para um campos escalar livre em quatro dimensões, e posteriormente generalizado em [59, 60] para o campo em interação em uma dimensão $n \neq 2$. Nesta seção vamos rever os resultados de [59] apresentando os cálculos numa maneira um pouco diferente. Uma consideração, de certa forma mais geral, que inclui reparametrização do campo escalar, pode ser também encontrada em [59, 60] (ver também [57] para uma revisão mais moderna das transformações conformes em relatividade clássica e [61] para uma revisão geral das anomalias conformes).

Nosso ponto de partida nesta análise será a ação de Einstein-Hilbert com constante cosmológica em dimensão $n \neq 2$.

$$S_{EH}[g_{\mu\nu}] = \int d^n x \sqrt{-\hat{g}} \left\{ \frac{1}{G} \hat{R} + \Lambda \right\}. \quad (3.1)$$

Essa ação depende da métrica, $\hat{g}_{\mu\nu}$, e assume-se que $\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \cdot e^{2\sigma}$, where $\sigma = \sigma(x)$. Para descrever a transformação conforme local na teoria, são necessárias algumas relações entre as quantidades geométricas dependentes respectivamente da métrica original e da métrica transformada:

$$\sqrt{-\hat{g}} = \sqrt{-g} e^{n\sigma}, \quad \hat{R} = e^{-2\sigma} [R - 2(n-1)((\partial)^2\sigma) - (n-2)(n-1)(\nabla\sigma)^2]. \quad (3.2)$$

Substituindo (3.2) em (4.1), após uma integração por partes, chega-se a:

$$S_{EH}[g_{\mu\nu}] = \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ \frac{(n-1)(n-2)}{G} e^{(n-2)\sigma} (\nabla\sigma)^2 + \frac{e^{(n-2)\sigma}}{G} R + \Lambda e^{n\sigma} \right\}, \quad (3.3)$$

onde $(\nabla\sigma)^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma$. Se definirmos o campo φ como:

$$\varphi = e^{\frac{n-2}{2}\sigma} \cdot \sqrt{\frac{8}{G} \cdot \frac{n-1}{n-2}}, \quad (3.4)$$

então, a ação (4.1) se transforma em

$$S = \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + \frac{n-2}{8(n-1)} R \varphi^2 + \Lambda \left(\frac{G}{8} \cdot \frac{n-2}{n-1} \right)^{\frac{n}{n-2}} \cdot \varphi^{\frac{2n}{n-2}} \right\}. \quad (3.5)$$

Assim, de forma natural chega-se a conclusão de que a Relatividade Geral com constante cosmológica é equivalente a teoria dilaton-métrica, descrita pela ação da eq. (3.5). É possível perceber, no entanto, que esta ação possui uma simetria conforme local extra que irá compensar um grau de liberdade de campo escalar adicional (com respeito a (4.1)). Além do mais, (3.5) é um caso particular de uma família de ações semelhantes, ligadas uma à outra através de reparametrização do campo escalar ou (c) da transformação conforme da métrica [60]. A transformação de simetria que deixa a ação (3.5) estável,

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \cdot e^{2\rho(x)}, \quad \varphi' = \varphi \cdot e^{(1-\frac{n}{2})\rho(x)}, \quad (3.6)$$

degenera em $n \rightarrow 2$ e essa é a razão pela qual este limite não pode ser trivialmente alcançado [60].

3.4 Invariância conforme numa teoria incluindo métrica, campo escalar e torção

Nesta seção , vamos construir a ação conformalmente simétrica com um campo de torção adicional. Nossa notações são semelhantes às adotadas em [97], para o caso $n = 4$. A torção é definida como:

$$\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} - \tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\alpha} = T_{\beta\gamma}^{\alpha},$$

onde $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}$ é a conexão afim não simétrica provenientes dos campos independentes da métrica e da torção . A derivada covariante, $\tilde{\nabla}_{\alpha}$, satisfaz a condição de metricidade, $\tilde{\nabla}_{\alpha}g_{\mu\nu} = 0$. O tensor de torção pode ser decomposto em três partes irreduzíveis:

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha,\beta\gamma} - \tilde{\Gamma}_{\alpha,\gamma\beta} = T_{\alpha,\beta\gamma} = \frac{1}{n-1} (T_{\beta}g_{\alpha\gamma} - T_{\gamma}g_{\alpha\beta}) - \frac{1}{3!(n-3)!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu_1\dots\mu_{n-3}} S^{\mu_1\dots\mu_{n-3}} + q_{\alpha\beta\gamma}. \quad (3.7)$$

aqui $T_{\alpha} = T^{\beta}_{\alpha\beta}$ é o traço do tensor de torção $T^{\beta}_{\alpha\gamma}$. O tensor $S^{\mu_1\dots\mu_{n-3}}$ é completamente antissimétrico e, no caso de uma torção puramente antissimétrica $T_{\alpha\beta\gamma}$ é o seu dual. $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu_1\dots\mu_{n-3}}$ a densidade tensorial maximamente antissimétrica num espaço tempo n -dimensional. O sinal do termo dependente S corresponde a n par. Percebemos que, em quatro dimensões , o tensor axial $S_{\mu_1\dots\mu_{n-3}}$ reduz-se ao vetor axial usual S_{μ} [97]. Em n dimensões , o número de componentes distintos do tensor $S_{\mu_1\dots\mu_{n-3}}$ é dado por $\frac{n^3-3n^2+2n}{6}$. O tensor $q^{\beta}_{\alpha\gamma}$ satisfaz, como no caso $n = 4$, os dois seguintes vínculos:

$$q^{\beta}_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{e} \quad q_{\alpha\beta\gamma} \cdot \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu_1\dots\mu_{n-3}} = 0$$

e possui $\frac{n^3-4n}{3}$ componentes distintas. Vamos denotar, como antes, a derivada covariante Riemanniana e o escalar de curvatura ∇_α e R respectivamente, e preservar a notação com tilda para as quantidades geométricas com torção .

A proposta deste trabalho é descrever e discutir a simetria conforme numa teoria com campo escalar acoplado a Gravitação em presença de torção . É bem conhecido que que a torção não apresenta interação não -mínima com campos escalares, mas pode-se formular esta interação de uma forma não -mínima (ver [97] para a introdução). Além disso, esta interação é um elemento necessário de uma teoria quântica de campos renormalizável, em espaço curvo com torção [66]. A situação é essencialmente a mesma do que no caso da interação não -mínima entre curvatura e campo escalar. Em [66], provou-se que a interação não -mínima mais importante é aquela entre a parte antissimétrica da torção (equivalente ao vetor axial S_μ) e o campo escalar. Ao mesmo tempo, pode-se construir uma ação não -mínima geral para o campo escalar acoplado a métrica e a torção [66] como mostrado abaixo:

$$S = \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{1}{2} \varphi^2 \xi_i P_i - \frac{\lambda}{4!} \varphi^{\frac{2n}{n-2}} \right\}. \quad (3.8)$$

Aqui, o setor não mínimo é representado por cinco diferentes estruturas:

$$P_1 = R, \quad P_2 = \nabla_\alpha T^\alpha, \quad P_3 = T_\alpha T^\alpha, \quad P_4 = S_{\mu_1 \dots \mu_{n-3}} S^{\mu_1 \dots \mu_{n-3}}, \quad P_5 = q_{\alpha\beta\gamma} q^{\alpha\beta\gamma}; \quad (3.9)$$

somente o termo em $\xi_1 R$ está presente no caso sem torção. ξ_i são os parâmetros não -mínimos que são típicos para uma teoria com um campo externo. A renormalização

destes parâmetros é necessária para remover-se as correspondentes divergências que realmente ocorrem na teoria com interação [66]. Podemos acrescentar ainda que a teoria renormalizável sempre inclui uma ação de vácuo. Esta ação deve incorporar todas as estruturas que aparecem nos contratermos. A expressão geral para a ação de vácuo no caso de um background com métrica e torção foi obtida em [67]; Ela possui 168 termos diferentes. Na verdade, pode-se sempre reduzir este número, porque nem todos os termos com a dimensão adequada realmente aparecem como contratermos. A discussão da renormalização do vácuo para o campo gravitacional externo com torção foi previamente dada em [72] para o caso de uma torção puramente antissimétrica. Neste presente trabalho, estamos interessados no caso especial da ação (3.8) que possui uma interessante simetria conforme. A expressão apropriada para a correspondente ação de vácuo será dada na seção (3.4), após derivarmos os contratermos de vácuo.

Usando a decomposição (3.7) dada acima, as equações de movimento para o tensor de torção podem ser separadas em três equações independentes escritas para as componentes

$T_\alpha, S_\alpha, q_{\alpha\beta\gamma}$; elas são dadas por:

$$T_\alpha = \frac{\xi_2}{\xi_3} \cdot \frac{\nabla_\alpha \varphi}{\varphi}, \quad S_\alpha = q_{\alpha\beta\gamma} = 0. \quad (3.10)$$

Substituindo esses resultados de volta na ação (3.8), obtém-se a expressão on-shell

$$S = \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_2^2}{\xi_3} \right) g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{1}{2} \xi_1 \varphi^2 R - \frac{\lambda}{4!} \varphi^{\frac{2n}{n-2}} \right\}, \quad (3.11)$$

que pode ser imediatamente reduzida a (3.5), por uma simples mudança de variáveis, sempre que

$$\xi_1 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\xi_2^2}{\xi_3} \right) \frac{n-2}{n-1}. \quad (3.12)$$

Dessa forma, percebe-se claramente que a versão da teoria Brans-Dicke com torção (3.8) é conformalmente equivalente a Relatividade Geral (4.1) desde que a nova condição (3.12) seja satisfeita e que fontes, para as componentes do tensor de torção T_α , $S_{\mu_1 \dots \mu_{n-3}}$ e $q_{\alpha\beta\gamma}$, não estejam incluídas. Para $\frac{\xi_2^2}{\xi_1} - 1 < 0$ temos a equivalência conforme com a teoria (4.1) estável $G < 0$. Na verdade, a introdução de fontes externas, conformalmente covariantes, para $S_{\mu_1 \dots \mu_{n-3}}$, $q^\alpha{}_{\beta\gamma}$ ou para a componente transversal de T_α não destrói ("spoil") a simetria conforme. A equação de movimento para T_α pode ser vista como um vínculo fixando a transformação deste vetor de uma forma consistente com a transformação da métrica e do campo escalar. Assim, ao invés de (3.6) tem-se:

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \cdot e^{2\rho(x)}, \quad \varphi' = \varphi \cdot e^{(1-\frac{n}{2})\rho(x)}, \quad T'_\alpha = T_\alpha + (1 - \frac{n}{2}) \cdot \frac{\xi_2}{\xi_3} \cdot \partial_\alpha \rho(x) \quad (3.13)$$

Agora, de modo a ter certeza acerca do número de graus de liberdade nessa teoria, vamos computar as equações de movimento para todo o conteúdo de campos. A partir deste instante nós consideramos teoria livre e colocamos a constante de acoplamento $\lambda = 0$, uma vez que a auto interação entre os escalares não leva a nenhuma mudança qualitativa nos resultados.

As equações dinâmicas para a teoria englobam as eqs. (3.10) juntamente com:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\xi_1\varphi^2 \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R \right) - \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}\nabla_\alpha\varphi\nabla_\beta\varphi \\ & + \frac{1}{2}\xi_2\varphi^2 \left(T_\alpha T_\beta - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T_\rho T^\rho \right) + \frac{1}{2}\xi_3\varphi^2 \left(\nabla_\alpha T_\beta - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\nabla_\lambda T^\lambda \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

e

$$(\square - \xi_1 R - \xi_2 \nabla_\lambda T^\lambda - \xi_3 T_\lambda T^\lambda) \varphi = 0. \quad (3.15)$$

No caso da torção on-shell (3.10), equações (3.14) reduzem-se a:

$$\frac{1}{8} \frac{n-2}{n-1} \phi^2 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi = 0, \quad (3.16)$$

$$\square\phi - \frac{1}{4} \left(\frac{n-2}{n-1} \right) R\phi = 0 \quad (3.17)$$

Tomando o traço da primeira equação, pode ser prontamente verificado que essa equação é exatamente a mesma equação escrita para o campo escalar. Isso, assim, justifica de fato o procedimento de substituir (3.10) na ação. É fácil perceber, por uma inspeção direta, que mesmo off-shell, a teoria com torção, satisfazendo a relação (3.12), pode ser conformalmente invariante se definir-se a lei de transformação para o traço da torção de acordo com (3.13): e também postular que as outras partes da torção, S_μ and $q^\sigma{}_{\beta\gamma}$ não se transformam. As quantidades $\sqrt{-g}$ e R transformam-se como em (3.2). Pode-se introduzir também na ação outros termos dependentes da torção que não quebrem a invariância conforme. Por exemplo:

$$S = -\frac{1}{4} \int d^n x \sqrt{-g} \varphi^{\frac{2(n-4)}{n-2}} T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}, \quad (3.18)$$

onde $T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha T_\beta - \partial_\beta T_\alpha$. Esse termo se reduz à ação usual de um campo vctorial quando $n \rightarrow 4$. Não é difícil encontrar outros termos conformalmente invariantes que contenham outras componentes do tensor de torção em (3.7).

Para completar esta parte de nossa consideração, vale aqui mencionar que a generalização direta da teoria de Einstein-Cartan incluindo um grau de liberdade escalar extra

pode ser conformalmente equivalente à Relatividade Geral, desde que o parâmetro não-mínimo assuma um valor apropriado. Para ver isso, utilizamos a seguinte relação :

$$\tilde{R} = R - 2\nabla_\alpha T^\alpha - \frac{n}{n-1} T_\alpha T^\alpha + \frac{1}{2} q_{\alpha\beta\gamma} q^{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3!(n-3)!} S^{\alpha_1 \dots \alpha_{n-3}} S_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-3}} \quad (3.19)$$

e a substituímos na ação "mínima"

$$S_{ECBD} = \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{1}{2} \xi \tilde{R} \varphi^2 \right\}. \quad (3.20)$$

É fácil ver que a condição (3.12) é satisfeita para o valor especial

$$\xi = \frac{n(n-2)}{8(n-1)}. \quad (3.21)$$

Particularmente, no caso de quatro dimensões, a versão simétrica da teoria corresponde a $\xi = \frac{1}{3}$, contrariamente ao famoso valor $\xi = \frac{1}{6}$ no caso sem a presença de torção. O efeito de mudar o valor de ξ devido a transformação não trivial da torção foi discutido antes em [?] (ver também outras referências lá).

Pode-se entender melhor esta equivalência entre a Relatividade Geral e a teoria campo escalar-métrica e torção (3.8), (3.12) após apresentar uma forma alternativa para a ação simétrica. Uma forma bastante conveniente é dividir o traço do tensor de torção T_μ em uma parte longitudinal e outra parte transversa:

$$T_\mu = T_\mu^\perp + \frac{\xi_2}{\xi_3} \partial_\mu T, \quad (3.22)$$

onde $\nabla^\mu T_\mu^\perp = 0$ e T é a componente escalar do traço da torção, T_μ . O coeficiente $\frac{\xi_2}{\xi_3}$ foi introduzido apenas por conveniência. Sob a transformação conforme (3.13), a parte

transversa é inerte enquanto a componente escalar transforma-se como $T' = T - \sigma$. Agora é possível ver que as componentes conformalmente invariantes, S, T^\perp and q , aparecem na ação (3.8) na seguinte combinação

$$\mathcal{M}^2 = \xi_3 (T_\mu^\perp)^2 + \xi_4 S_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n-3}} S^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n-3}} + \xi_5 q_{\mu\nu\lambda}^2, \quad (3.23)$$

que possui a transformação conforme,

$$\mathcal{M}^{2'} \rightarrow e^{(2-n)\rho(x)} \cdot \mathcal{M}^2,$$

semelhante à do quadrado do campo escalar. De fato, o papel compensador do traço da torção, T_μ , é acomodado no modo escalar T . Outras componentes do tensor de torção, incluindo T_μ^\perp , aparecem somente na forma (3.23) e permitem criar um tipo de "massa conformalmente covariante". Em mass-shell, essa massa desaparece porque todos os seus constituintes $T_\mu^\perp, S_{\mu_1 \dots \mu_{n-3}}$ e $q_{\mu\nu\lambda}$, se anulam.

Nossa próxima observação é que todos os termos dependentes de torção podem ser unificados na expressão

$$\begin{aligned} P &= -\frac{n-2}{4(n-1)} \frac{\xi_2^2}{\xi_3} R + \xi_2 (\nabla_\mu T^\mu) + \xi_3 T_\mu T^\mu + \xi_4 S_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n-3}}^2 + \xi_5 q_{\mu\nu\lambda}^2 \\ &= -\frac{n-2}{4(n-1)} \frac{\xi_2^2}{\xi_3} \left[R - \frac{4(n-1)}{n-2} (\nabla T)^2 - \frac{4(n-1)}{n-2} \square T \right] + \mathcal{M}^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

É fácil verificar que essa lei de transformação para essa quantidade P é a mesma do que para \mathcal{M}^2 . Usando novas definições, a ação invariante se torna

$$S_{inv} = \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{n-2}{8(n-1)} R \varphi^2 + \frac{1}{2} P \varphi^2 \right\}. \quad (3.25)$$

Fazendo uma mudança de variáveis na última ação :

$$T = \ln \psi ,$$

com uma lei de transformação $\psi' = \psi \cdot e^{-\sigma}$, para o novo escalar ψ . Após alguma álgebra, pode-se colocar a ação (3.25) na forma de um modelo-sigma, com duas componentes, conformalmente invariante:

$$S_{inv} = \frac{1}{2} \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ -\varphi \Delta_2 \varphi + \mathcal{M}^2 \varphi^2 + \frac{\xi_2^2}{\xi_3} (\varphi^2 \psi^{-1}) \Delta_2 \psi, \right\} , \quad (3.26)$$

onde

$$\Delta_2 = \square - \frac{n-2}{4(n-1)} R$$

é um operador com derivada segunda, conformalmente covariante atuando sobre os escalares. É fácil ver que, ao tomar, por exemplo, uma métrica conformalmente plana, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \cdot \chi^2(x)$, chega-se a um modelo-sigma não linear contendo três escalares, mas onde dois deles são dependentes. A última expressão para a ação (3.26) mostra explicitamente a invariância conforme da ação e também confirma a covariância conforme da quantidade P .

Pode-se construir um modelo-sigma trivial com dois escalares conformalmente equivalente Relatividade Geral, ao fazer uma substituição $\sigma \rightarrow \sigma_1 + \sigma_2$ na ação (3.3), e depois considerar $\sigma_1(x)$ e $\sigma_2(x)$ como campos distintos. Uma análise detalhada mostra que a teoria (3.26) não pode ser reduzida a um modelo sigma com dois escalares por meio de uma mudança de variáveis. Para se compreender isso melhor, é necessário uma representação a mais para a ação com métrica campo escalar e torção com simetria conforme local.

Vamos agora começar, novamente, da ação (3.8), (3.12) e realizar somente parte das transformações (3.13):

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi \cdot e^{(1-\frac{n}{2})\rho(x)}, \quad T_\alpha \rightarrow T'_\alpha = T_\alpha + (1 - \frac{n}{2}) \cdot \frac{\xi_2}{\xi_3} \cdot \partial_\alpha \rho(x). \quad (3.27)$$

É claro que se acrescentarmos (3.27) com a transformação da métrica, chegamos a (3.13) e a ação não se altera. Por outro lado, os resultados da seção 2 (ver também [59]) sugerem que (3.27) podem levar a uma descrição alternativa, conformalmente equivalente, da teoria. Tomando $\varphi \cdot e^{(1-\frac{n}{2})\rho(x)} = \frac{8(n-1)}{G(n-2)} \left(1 - \frac{\xi_2^2}{\xi_3}\right) = \text{const}$, nós obtemos, após alguma álgebra, a seguinte ação :

$$S = \frac{1}{G} \int d^n x \sqrt{-g} R + \frac{4(n-1)}{G(n-2)(1 - \xi_2^2/\xi_3)} \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ \xi_4 S_{\mu_1 \dots \mu_{n-3}}^2 + \xi_5 q_{\mu\nu\lambda}^2 + \xi_3 \left(T_\alpha - \frac{\xi_2}{\xi_3} \nabla_\alpha \ln \varphi \right)^2 \right\}. \quad (3.28)$$

Essa forma da ação não contém interação entre a curvatura e o campo escalar. Ao mesmo tempo, este último campo está presente até que nós utilizamos as equações de movimento (3.10) para torção . O traço da torção parece aqui como um multiplicador de Lagrange, e somente usando sua correspondente equação de movimento (também para as outras componentes da torção), podemos obter a ação da Relatividade Geral. Está claro que pode-se chegar a mesma ação (3.28) fazendo uso da transformação da métrica como em (3.13) ao invés de (3.27).

Na próxima seção veremos como a transformação conforme não trivial para a torção altera a identidade de Noether e a anomalia conforme quântica.

3.5 Divergências, anomalias e a ação efetiva induzida pela anomalia

Em quatro dimensões, ao integrarmos sobre o campo escalar livre (mesmo sem auto-interação), encontram-se divergências de vácuo e a consequente anomalia de traço quebra a invariância conforme. Como já foi mencionado na introdução deste capítulo, a anomalia e sua aplicação é um dos aspectos mais importantes das teorias conformes. A anomalia é, na verdade, uma consequência do processo de quantização, e aparece devido a inexistência de uma regularização completamente invariante. Em particular, a anomalia de traço está usualmente relacionada às divergências de 1-loop [69]. Ao mesmo tempo, deve-se ter cuidado, porque o uso não crítico desta relação pode, a princípio, levar a erros.

Consideremos a renormalização e anomalia para a teoria métrica campos escalar com torção formulada acima. A renormalizabilidade da teoria requer que a ação de vácuo seja introduzida, que tem que ser (como já mencionado na seção 3.3) da forma dos possíveis contratermos. A ação total em quatro dimensões incluindo o termo de vácuo será denotada por S_t . No caso da teoria conformalmente invariante que nós estamos interessados, esta ação pode ser apresentada como:

$$S_t = S_{inv} + S_{vac}, \quad (3.29)$$

onde S_{inv} foi dado em (3.25) e a forma da ação de vácuo será estabelecida posteriormente.

Antes de prosseguir aos cálculos das divergências e da anomalia, precisamos escrever uma forma funcional para a simetria conforme. É fácil ver que a identidade de Noether

correspondente a (3.13) é da forma

$$-\sqrt{-g}\mathcal{T} = 2g_{\mu\nu} \frac{\delta S_t}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\xi_2}{\xi_3} \partial_\mu \frac{\delta S_t}{\delta T_\mu} - \varphi \frac{\delta S_t}{\delta \varphi} = 0. \quad (3.30)$$

Agora, se estamos considerando simultaneamente a métrica e a torção como campos externos, e somente o campo escalar como campos quântico, no setor de vácuo nós encontramos os dois primeiros termos no R.H.S. de(3.30). Isso significa que (devido a invariância das divergências do vácuo) a ação de vácuo pode ser escolhida de tal maneira que

$$2g_{\mu\nu} \frac{\delta S_{vac}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\xi_2}{\xi_3} \partial_\mu \frac{\delta S_{vac}}{\delta T_\mu} = 0. \quad (3.31)$$

A nova forma (3.31) da identidade de Noether conforme indica uma séria modificação na anomalia conforme. Na teoria em discussão , a anomalia significaria $\langle \mathcal{T} \rangle \neq 0$ ao invés do usual $\langle T_\mu^\mu \rangle \neq 0$. Desta forma, a primeira vista, nós encontramos aqui algum caso especial e não pode-se usar diretamente a relação entre os contratermos de 1-loop e a anomalia conforme derivados em [69], porque esta relação não leva em conta a lei de transformação não trivial para o campo de torção . É razoável lembrar que, no caso da torção completamente antissimétrica discutida em [72], esse problema não apareceu exatamente porque S_μ é inerte sob transformações conformes.

Vamos formular uma afirmação geral sobre as transformações conformes e anomalias. Quando a métrica de background, clássica, é enriquecida por campos que não se transformam, a identidade de Noether correspondente à simetria conforme permanece a mesma do que para o caso de uma métrica de background pura.

Neste caso pode-se usar seguramente as relações padrão [69] entre as divergências e a anomalia conforme. Entretanto, se o novo campo de background possui uma lei

transformação não trivial, dev-se ter em mente possíveis modificações na identidade de Noether e conseqüente mudança na anomalia.

No nosso caso a anomalia é modificada, pois tem uma nova forma funcional, $\langle \mathcal{T} \rangle \neq 0$. Pode-se obter esta nova anomalia usando, por exemplo, os métodos descritos em [69] ou [97]. No entanto, é possível encontrar $\langle \mathcal{T} \rangle$ numa maneira mais econômica, utilizando uma especial decomposição dos campos de background. Como veremos, os cálculos de uma nova anomalia e mesmo da ação induzida pela anomalia podem ser reduzidos aos resultados conhecidos de [69, 70, 71] e especialmente [72], onde a teoria da torção antissimétrica foi investigada.

Nossa proposta é modificar as variáveis do background de forma que a transformação da torção seja absorvida pela transformação da métrica. A observação crucial é que P , de (3.24), transforma-se ¹ sob (3.13) como $P' = P \cdot e^{-2\rho(x)}$. Assim, a transformação não trivial da torção é completamente absorvida por P . Uma vez que P só depende dos campos de background, podemos apresentá-lo numa forma mais conveniente. Pode-se imaginar, por exemplo, que P seja da seguinte forma $P = g^{\mu\nu} \Pi_\mu \Pi_\nu$ onde o vetor Π_μ não se transforma, e assim o cálculo imediatamente reduz-se ao caso de uma torção antissimétrica [72]. Em particular, nós podemos agora usar resultados standards para a relação entre divergências e anomalias [69].

No contexto das técnicas de Schwinger-DeWitt, encontramos os contratermos a 1-loop

¹Como conseqüência, a ação $\int \sqrt{-g} P \phi^2$ é conformalmente invariante. Esse fato foi originalmente descoberto em [68].

na forma (aqui $C^2 = C_{\mu\nu\alpha\beta}C^{\mu\nu\alpha\beta}$ onde $C^{\mu\nu\alpha\beta}$ é o tensor de Weyl invariante conforme)

$$\Gamma_{div}^{(1)} = -\frac{\mu^{n-4}}{(4\pi)^2(n-4)} \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{120} C^2 - \frac{1}{360} E + \frac{1}{180} \square R + \frac{1}{6} \square P + \frac{1}{2} P^2 \right\} \quad (3.32)$$

Isso fornece, como sub-produto, a lista de todos os termos necessários na ação de vácuo. Levando em conta os argumentos apresentados acima, podemos imediatamente encontrar a nova anomalia de traço na forma

$$\langle \mathcal{T} \rangle = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{120} C_{\mu\nu\alpha\beta} C^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{360} E + \frac{1}{180} \square R + \frac{1}{6} \square P + \frac{1}{2} P^2 \right]. \quad (3.33)$$

Pode-se prosseguir e, seguindo [70, 71, 72], derivar a parte não invariante conforme da ação efetiva do vácuo, que é responsável pela anomalia (3.33). Levando em conta o nosso tratamento prévio da transformação conforme da torção, podemos considerá-la escondida dentro da quantidade P da equação (3.24), e novamente imaginar P da forma $P = g^{\mu\nu} \Pi_\mu \Pi_\nu$. Consequentemente a equação para a ação efetiva $\Gamma[g_{\mu\nu}, \Pi_\alpha]$ é dada por²:

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \Gamma}{\delta g_{\mu\nu}} = \langle \mathcal{T} \rangle. \quad (3.34)$$

Para se encontrar a solução para Γ , podemos fatorar a parte conforme da métrica $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} \cdot e^{2\sigma}$, onde $\bar{g}_{\mu\nu}$ possui determinante fixo, e aplicar a fórmula

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} A[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} e^{-4\sigma} \frac{\delta}{\delta \sigma} A[\bar{g}_{\mu\nu} e^{2\sigma}] |_{\bar{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \sigma \rightarrow 0}. \quad (3.35)$$

²Importante destacar aqui que esta equação é válida somente para a ação efetiva "artificial" $\Gamma[g_{\mu\nu}, \Pi_\alpha]$, enquanto a ação efetiva nas variáveis originais $g_{\mu\nu}, T_{\beta\gamma}^\alpha$ satisfaria a equação modificada(3.31). A forma padrão da equação para ação efetiva é obtida através de uma decomposição muito especial dos campos externos.

Usando os resultados de [70, 71, 72] (ver também [97]), podemos reobter (3.34) como abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Gamma}{\delta\sigma} = \sqrt{-\bar{g}} \left\{ \frac{1}{120} \bar{C}^2 - \frac{1}{360} (\bar{E} - \frac{2}{3} \bar{\nabla}^2 \bar{R}) + \frac{1}{90} \bar{\Delta}\sigma + \right. \\ \left. + \frac{1}{270} e^{-4\sigma} \square R + \frac{1}{2} \bar{P}^2 + \frac{1}{6} (\bar{\nabla}^2 \bar{P} - 2 \bar{\nabla}^\mu (\bar{P} \cdot \bar{\nabla}_\mu \sigma)) \right\}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde $P = \bar{P} e^{-2\sigma(x)}$. Esta equação pode ser de fato resolvida na forma

$$\begin{aligned} \Gamma = S_c[\bar{g}_{\mu\nu}; \bar{P}] - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{270(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{-g(x)} R^2(x) + \\ + \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left\{ \sigma \cdot \left[\frac{1}{120} \bar{C}^2 - \frac{1}{360} (\bar{E} - \frac{2}{3} \bar{\nabla}^2 \bar{R}) + \frac{1}{2} \bar{P}^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{180} \sigma \bar{\Delta}\sigma - \frac{1}{6} (\bar{\nabla}_\mu \sigma) \bar{\nabla}^\mu \bar{P} + \frac{1}{6} \bar{P} (\bar{\nabla}_\mu \sigma)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde $S_c[\bar{g}_{\mu\nu}; \bar{P}]$ é um funcional desconhecido da métrica $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ and \bar{P} , que age como uma constante de integração para qualquer solução de (3.34).

Agora, nós precisamos reescrever(3.37) em termos das variáveis de campo originais, $g_{\mu\nu}, T^\alpha_{\beta\gamma}$. Aqui, nós encontramos um pequeno problema, uma vez que só temos, até o momento, a definição $\Pi_\alpha = \bar{\Pi}_\alpha$ para a variável artificial Π_α , porém não para a torção . Usando o resultado prévio (3.13), nós podemos definir

$$T^\alpha_{\beta\gamma} = \bar{T}^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{1}{3} \cdot [\delta^\alpha_\gamma \partial_\beta \sigma - \delta^\alpha_\beta \partial_\gamma \sigma], \quad (3.38)$$

de forma que $\bar{T}^\alpha_{\beta\gamma}$ é um tensor arbitrário. Também, chamamos $\bar{T}^\alpha = \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{T}_\beta$ etc. Agora, nós podemos reescrever (3.37) em termos das componentes da métrica e da torção

$$\begin{aligned} \Gamma = S_c[\bar{g}_{\mu\nu}; \bar{T}^\alpha_{\beta\gamma}] - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{270(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{-g(x)} R^2(x) + \\ + \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left\{ + \frac{1}{180} \sigma \bar{\Delta}\sigma + \frac{1}{120} \bar{C}^2 \sigma - \frac{1}{360} (\bar{E} - \frac{2}{3} \bar{\nabla}^2 \bar{R}) \sigma \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{72} \sigma \left[-\frac{\xi_2^2}{\xi_3} \bar{R} + 6\xi_2 (\bar{\nabla}_\mu \bar{T}^\mu) + 6\xi_3 \bar{T}_\mu \bar{T}^\mu + 6\xi_4 \bar{S}_\mu \bar{S}^\mu + 6\xi_5 \bar{q}_{\mu\nu\lambda} \bar{q}^{\mu\nu\lambda} \right]^2 + \\
& \frac{1}{6} [(\bar{\nabla}^2 \sigma + (\bar{\nabla}_\mu \sigma)^2)] \cdot \left[-\frac{\xi_2^2}{\xi_3} \bar{R} + 6\xi_2 (\bar{\nabla}_\mu \bar{T}^\mu) + 6\xi_3 \bar{T}_\mu \bar{T}^\mu + 6\xi_4 \bar{S}_\mu \bar{S}^\mu + 6\xi_5 \bar{q}_{\mu\nu\lambda} \bar{q}^{\mu\nu\lambda} \right] \Big\} ,
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Esta ação efetiva é nada mais nada menos do que a generalização das expressões semelhantes de [70, 71, 72] para o caso de um background geral contendo métrica e torção e simetria conforme descritos na seção 3. A dependência na curvatura dos dois últimos termos aparece devido a lei de transformação não trivial para a torção .

3.6 Conclusões

Consideramos neste trabalho as propriedades da transformação conforme de uma teoria contendo dilaton acoplada a Gravitação com torção com derivadas segundas. Em particular, foi mostrado que o traço vetorial da torção pode desempenhar o papel de um campo compensador fornecendo a equivalência conforme clássica entre esta teoria e a Relatividade Geral. Na verdade, esta equivalência está baseada numa simetria conforme e que é violada se o tensor de energia-momento da matéria possui um traço não nulo. Por outro lado, teorias sem massa são usadas, por exemplo, como uma aproximação standard para a descrição da matéria no "Early Universe". Neste caso, como nós vimos, o campo de torção não leva a modificações sérias da ação clássica mas, ao mesmo tempo, pode produzir importantes modificações na anomalia e nas conseqüentes correções quânticas à ação clássica.

Capítulo 4

Correções Quânticas ao Potencial

Coulombiano na QED Escalar: Uma Prévia ao Caso da Gravitação

4.1 Resumo

Neste capítulo, calculam-se as correções quânticas de longas distâncias ao potencial Coulombiano entre duas partículas escalares carregadas, levando-se em conta efeitos de 1-loop (ordem- \hbar) na QED Escalar.

O potencial é obtido considerando-se todos os diagramas de Feynman que contribuem para a amplitude de espalhamento à ordem mais baixa de teoria de perturbação . Nestes

cálculos, foi possível verificar a inexistência de uma correção clássica, como por exemplo ocorre em Quantum Gravity, de acordo com os resultados da ref. [86]. Obtém-se que a contribuição efetiva encontrada é completamente independente da particular escolha de fixação de gauge, o que de certa forma garante o caráter físico do potencial. Encontramos uma escala típica, dada pelo comprimento de onda Compton da partícula massiva carregada, em torno da qual estas correções seriam apreciáveis do ponto de vista experimental. Em particular, usando estes cálculos na QED Escalar foi possível evidenciar o tratamento incompleto de estudos anteriores propostos para tratar o caso da Quantum Gravity.

O objetivo maior de se considerar o caso da QED Escalar é, na verdade, usá-la como uma preparação ao caso da Gravitação Quântica, onde devemos calcular as correções de ordem- \hbar ao potencial Newtoniano. Tal problema vem sendo, recentemente, tratado na literatura, porém existem divergências quanto às classes de diagramas levados em conta, bem como faltam cálculos realizados em um gauge covariante arbitrário. Já temos cálculos preliminares realizados na Gravitação Quântica; entretanto, o caso da QED Escalar, que muito nos aproxima da Gravitação, está concluído e nos elucidou uma série de aspectos técnicos a serem aplicados ao cálculo das correções ao potencial Newtoniano.

O conteúdo deste capítulo baseia-se no trabalho *Scalar QED \hbar -Corrections to Coulomb Potential*, hep-th 9910080, submetido para publicação no *Journal of High Energy Physics*, escrito em colaboração com J.A. Helayel e I.L. Shapiro. Aceito para publicação [79].

4.2 Introdução

A não-renormalizabilidade da Relatividade Geral [80, 81] deu origem a estudos de diversos modelos alternativos para a Quantum Gravity. Sabe-se que qualquer teoria de campo local com altas derivadas é inconsistente com os requisitos simultâneos de unitariedade e renormalizabilidade (ver também [83] sobre a discussão do espectro da Gravitação Quântica local de ordem superior) e assim a ênfase principal concentrou-se em objetos não-locais como strings e p -branas. Desta forma, enquanto os efeitos de alta energia são descritos por strings, no regime de baixas energias encontra-se a ação efetiva de gravitação, que pode ser Einstein-Hilbert ou incluir outros campos adicionais, como dilatons por exemplo. Já foi discutido por S. Weinberg em [84] que a Quantum Gravity baseada na Relatividade Geral pode ser consistente como uma teoria quântica no restrito domínio de baixas energias.

A idéia de uma abordagem efetiva para a Quantum Gravity é proposta no recente trabalho de F. Donoghue [86], que aplicou este formalismo a um cálculo prático de correções quânticas de longas distâncias ao potencial gravitacional de Newton ¹.

Este trabalho despertou grande interesse e trouxe a esperança de se poder aplicar toda a abordagem de teorias de campos efetivas a outros problemas [?]. Entretanto, no que diz respeito especificamente aos cálculos originais em Quantum Gravity [86], algumas questões ainda permanecem sem resposta. Este procedimento de cálculo implica em duas suposições importantes. Primeiro ponto: a separação dos efeitos de longas distâncias, rela-

¹Ver também [85] para uma explanação geral da abordagem efetiva.

cionados à parte não-local da ação efetiva, da parte divergente no ultravioleta, que pode ser sempre subtraída pela adição de um contratermo local. De fato, estes contratermos possuem altas derivadas, mas podem ser removidos pela renormalização dos correspondentes termos com altas derivadas na ação. Estes termos, por outro lado, são invisíveis a baixas energias, uma vez que os graus de liberdade correspondentes têm massas muito altas.

Em relação ao segundo ponto, alguma parte das contribuições de longas distâncias dos diagramas de Feynmann são proporcionais às bem-conhecidas divergências ultravioleta, e isso pode reduzir bastante o volume de cálculos [86]. Esta parte é composta pelo termo logarítmico, não-analítico, (tipo- L em [86]), e são provenientes dos diagramas contendo somente linhas internas não-massivas. Ao mesmo tempo, existem outros diagramas que produzem um outro tipo de contribuição não-analítica (tipo- S em [86]), e são absolutamente independentes das divergências ultravioleta. De fato, este tipo de termo fornece a contribuição principal às correções quânticas de longas distâncias. Após os trabalhos originais, [86], houve uma série de trabalhos dedicados a estas correções e à sua respectiva verificação. Em particular, [91] indicou o erro realizado nos cálculos das correções a 1-loop da função de vértice, enquanto [90] encontrou outros diagramas mais relevantes, que não foram contados em [86].² Ao mesmo tempo, [93, 94] aplicaram os métodos funcionais

²Infelizmente, os autores não fornecem detalhes suficientes de seus cálculos. Aqui, calculamos os mesmos diagramas considerados em [90]. Nossa consideração será mais geral, uma vez que usamos as condições de fixação de gauge dependendo de um parâmetro arbitrário, e também apresentamos todos os detalhes técnicos. Do nosso ponto de vista um cálculo deste tipo é essencialmente não trivial e seus detalhes técnicos devem ser manifestados explicitamente.

para os mesmos cálculos. Infelizmente, estes conseguiram extrair somente os termos não-analíticos tipo- L , que podem ser facilmente obtidos das divergências logarítmicas a 1-loop. Os termos não-locais predominantes, tipo- S , não podem ser encontrados dessa forma, e deve-se usar diagramas apropriados. Pode-se perceber que estes termos não-locais tipo- S aparecem devido aos loops em que tanto linhas internas massivas e não-massivas estão presentes, e que também não estão sujeitas ao teorema de Appelquist e Carazzone [89]. Assim, atualmente dispomos de um conjunto de resultados alternativos para a mesma quantidade física (a correção quântica ao potencial Newtoniano), que se contradizem.

Um ponto bastante sutil em todos estes procedimentos está relacionado com a independência de gauge dos resultados. Por exemplo, o cálculo original de [86] usou o tensor de polarização obtido em [80], mas é bem conhecido que este objeto é dependente do gauge [87, 88]. Pode-se argumentar que, sendo relacionadas com alguma amplitude de espalhamento, correções quânticas ao potencial deveriam ser independente de gauge. Assim, espera-se que a dependência da fixação de gauge do tensor de polarização deve cancelar-se com a dependência proveniente do vértice. Entretanto, aspectos peculiares da abordagem efetiva fazem com que a verificação explícita da dependência do gauge seja relevante. Vale aqui mencionar que uma verificação bem sucedida deste tipo foi realizada em [93], porém somente para os termos tipo- L , enquanto a questão para os termos tipo- S permanece aberta.

Cálculos práticos em Gravitação Quântica Efetiva encontram basicamente dois tipos de dificuldades técnicas. Primariamente, existem problemas com a extração das partes

não -analíticas dos diagramas com linhas internas massivas (termos tipo- S). A complexidade desta operação aumenta consideravelmente com o número de inserções massivas. O segundo problema é a quantidade enorme de álgebra necessária para os cálculos de diagramas na Quantum Gravity, especialmente em gauges gerais não -mínimos. Em virtude disto, neste Capítulo, propomos começar com o modelo de cálculos na Eletrodinâmica Quântica Escalar (SQED), onde o volume de trabalho é essencialmente reduzido. É muito importante, pois a SQED tem quase todos os diagramas que se encontram na Quantum Gravity, e também estes diagramas possuem o mesmo power-counting na região infravermelha. Assim, ao longo destes cálculos, é possível aprender melhor a selecionar os diagramas relevantes e também desenvolver técnicas de extrair as partes não -locais a partir destes diagramas.

Esse capítulo está organizado da seguinte forma: na próxima seção, apresentamos a base do modelo incluindo as regras de Feynmann e a derivação do potencial Coulombiano clássico a partir da amplitude a tree-level. A Seção 3 contém a lista total de diagramas a 1-loop e sua classificação com respeito às contribuições de baixa energias. Na seções 4 e 5, apresentamos os detalhes dos diagramas e discutimos os cancelamentos das partes dependentes do gauge. A Seção 6 é dedicada à obtenção das correções quânticas ao potencial, e na última seção teremos as nossas conclusões finais.

4.3 Regras de Feynman e o potencial Coulombiano

Consideremos a SQED, partindo da ação que inclui o termo de gauge fixing:

$$S_{tot} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{\alpha} (\partial_\rho A^\rho)^2 + g^{\mu\nu} (D_\mu \phi)(D_\nu \phi)^* - m^2 \phi \phi^* \right\}, \quad (4.1)$$

onde α representa um parâmetro arbitrário de fixação de gauge. A seguir, vamos considerar a interação devido à troca de fótons entre duas partículas escalares de mesma massa, m , e carga elétrica e . A interação efetiva no caso estático é encontrada avaliando-se a amplitude de espalhamento entre essas duas cargas pesadas, no limite de pequenos momentos transferidos, $q^2 \rightarrow 0$. Isso pode ser diretamente verificado pelo fato de que, com um dado potencial, V , o elemento de matriz-S é dado por:

$$S = 1 - 2\pi i \delta(E_i - E_f) \langle f|V|i \rangle - 2\pi i \delta(E_i - E_f) \frac{\langle f|V|n \rangle \langle n|V|i \rangle}{E_i - E_n} + \dots \quad (4.2)$$

onde E_i, E_f são as energias dos estados assintóticos inicial e final.

Designando os momentos incidentes e emergentes das partículas 1 e 2 por p_1, p_2, p_3 e p_4 respectivamente e normalizando o vetor de estado segundo a relação

$$\langle p_3 p_4 | p_1 p_2 \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p_1 - p_3) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p_2 - p_4), \quad (4.3)$$

então

$$\langle p_3 p_4 | V | p_1 p_2 \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \int V(r) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3r, \quad (\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_3). \quad (4.4)$$

Em termos da matriz de reatância, a matriz-S pode ser parametrizada por:

$$S_{ij} = \delta_{ij} - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) T(\vec{q}), \quad (4.5)$$

fornecendo a seguinte expressão para o potencial

$$V(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int T(\vec{q}) e^{-i\vec{q}\vec{r}} d^3\vec{r}. \quad (4.6)$$

Uma das grandes vantagens de se trabalhar com a SQED é que esta possui regras de Feynman consideravelmente simples de se trabalhar, e, ao mesmo tempo, apresenta alguns diagramas semelhantes com a Quantum Gravity. As regras de Feynmann para o vértice fóton-matéria e para os propagadores em um gauge-fixing arbitrário são dadas por:

$$\mu \text{---} \text{wavy} \text{---} \nu = -\frac{i}{q^2} \left\{ \eta_{\mu\nu} - (1 + \alpha) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right\} \quad (4.7)$$

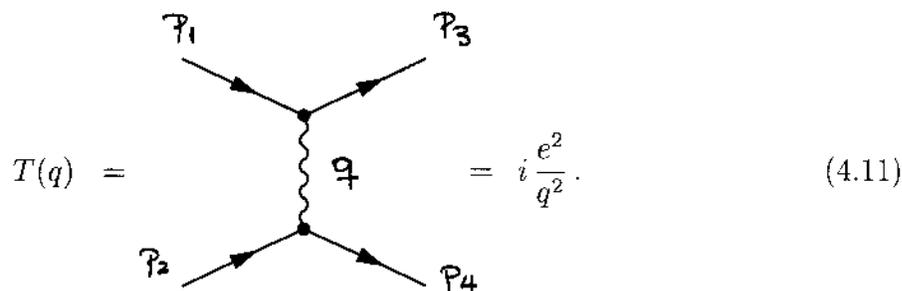
$$\text{---} \xrightarrow{p} \text{---} = \frac{i}{p^2 - m^2} \quad (4.8)$$

$$\mu \text{---} \text{wavy} \text{---} \bullet \begin{cases} \nearrow p \\ \searrow p' \end{cases} = -ie(p_\mu + p'_\mu) \quad (4.9)$$

$$\begin{cases} \nearrow \\ \searrow \end{cases} \bullet \begin{cases} \text{wavy} \mu \\ \text{wavy} \nu \end{cases} = 2ie^2 \eta_{\mu\nu}. \quad (4.10)$$

Fig.1: Regras de Feynman para a SQED.

O cálculo do gráfico a "tree-level" no limite estático leva a uma amplitude de espalhamento proporcional a $\frac{1}{q^2}$, o que dá origem ao potencial Coulombiano clássico. Em virtude da conservação da corrente, pode ser imediatamente verificado que este resultado é completamente independente de qualquer procedimento de fixação de gauge. O mesmo pode ser, de fato, obtido através das regras de Feynman acima. A amplitude a "tree-level" tem a seguinte forma:



$$T(q) = \text{Diagram} = i \frac{e^2}{q^2}. \quad (4.11)$$

Fig.2 Diagrama "Tree-level", gerando potencial Coulombiano.

No limite estático, $q^0 = 0$, e conseqüentemente $q^2 = -\vec{q}^2$, após realizarmos uma transformação de Fourier dada por

$$\int \frac{1}{\vec{q}^2} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r} = \frac{1}{4\pi r}, \quad (4.12)$$

obtém-se, como esperado, o potencial Coulombiano.

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi r}, \quad (4.13)$$

que é a aproximação a "tree-level" ao potencial de interação entre duas fontes estáticas.

Antes de prosseguir com os cálculos específicos, è possível antecipar a forma das correções quânticas de ordem mais baixa ao potencial Coulombiano, baseados em análise dimensional somente:

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} \left(1 + \hbar e^2 \cdot \frac{\Gamma}{r} + \hbar e^2 \frac{\Lambda}{r^2} \right), \quad (4.14)$$

onde Γ é um coeficiente com dimensão de comprimento, e Λ um outro coeficiente com as dimensões de comprimento ao quadrado.

4.4 Diagramas de 1-Loop

Nesta seção, a nossa tarefa consiste em extrair uma correção ao potencial não-relativístico proveniente das flutuações quânticas simultaneamente do campo de gauge e do campo escalar. Convém repetir que as contribuições de escalares massivos não podem ser descartadas, a menos que formem um loop fechado sem a inserção de vetores não-massivos. Na verdade, o único caminho para distinguir os diagramas relevantes e não-relevantes é checar se o referido gráfico possui divergência infravermelha no limite de momento q indo a zero. Nas situações em que um gráfico possua comportamento analítico neste limite, este pode ser abandonado. Esta regra de seleção corresponde exatamente ao resultado de [89]. Nesse ponto, concordamos com algumas das publicações anteriores [86, 90, 91] e discordamos de outras [94] e [93], onde escalares foram tomados como fontes puramente clássicas.

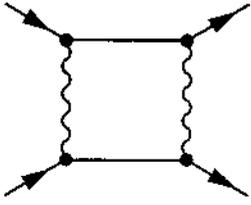
Vamos considerar a interação advinda da contribuição a 1-loop da amplitude de espalhamento entre duas partículas escalares pesadas, ($q^2 \ll m^2$), de mesma massa m . A interação efetiva no limite estático é, então, determinada pela avaliação da amplitude de espalhamento, de magnitude e^4 , no limite de momento transferido muito baixos $q^2 \rightarrow 0$. Para extrair correções de baixas energias a 1-Loop, as amplitudes são computadas no espaço dos momenta como funções do momento transferido total, q^2 . Para encontrar tais

termos não -analíticos, é necessário separar a parte finita (ultravioleta) das integrais de loop, usando, por exemplo, regularização dimensional. Esta parte finita contém toda a informação sobre o comportamento de baixa energia da amplitude, enquanto as divergências ultravioleta têm uma estrutura local, e podendo portanto ser desconsideradas em vista da renormalização .

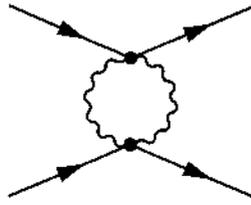
Para o cálculo das integrais de loop necessárias, utilizamos a representação paramétrica de Feynman para combinar os termos provenientes dos propagadores. O resultado final, então , é obtido após realizar as integrações necessárias sobre os momenta e sobre os parâmetros. Para algumas integrais mais complicadas, como por exemplo aquelas que apresentam mais de 3 propagadores no interior do loop, foi fundamental a utilização do software Maple V. Para pequenos valores do momento transferido, q^2 , as contribuições provenientes de cada diagrama podem ser separadas em dois tipos de termos, basicamente $\ln(-\bar{q}^2)$ e $\frac{\pi^2 m}{\sqrt{q^2}}$, sendo este último proveniente exclusivamente de loops contendo simultaneamente matéria escalar massiva e vetores não -massivos. As correções ao potencial no espaço das coordenadas são obtidas dos cálculos no espaço dos momenta, após uso das seguintes transformadas de Fourier [86], similares a (4.12):

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-i\bar{q}\cdot\bar{r}} \frac{1}{\sqrt{\bar{q}^2}} = \frac{1}{2\pi^2 r^2}, \quad (4.15)$$

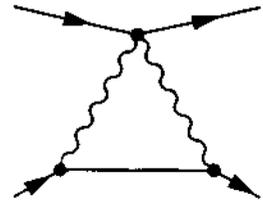
$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-i\bar{q}\cdot\bar{r}} \ln \bar{q}^2 = -\frac{1}{2\pi^2 r^3}. \quad (4.16)$$



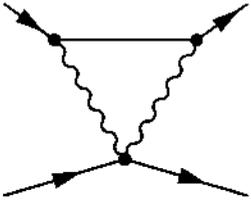
(a)



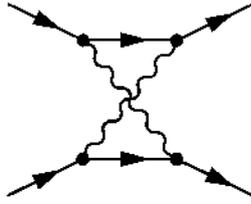
(b)



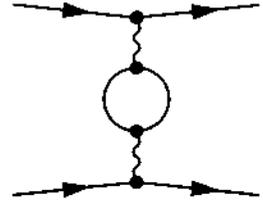
(c)



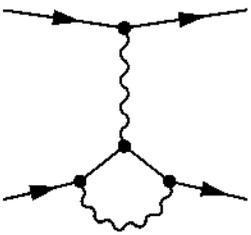
(d)



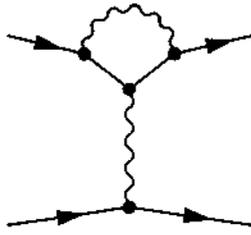
(e)



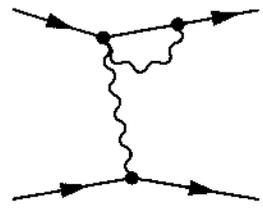
(f)



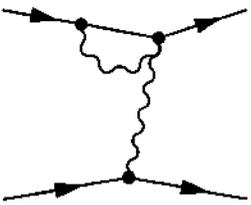
(g)



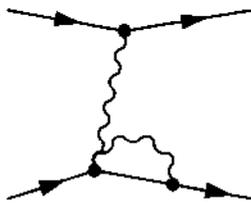
(h)



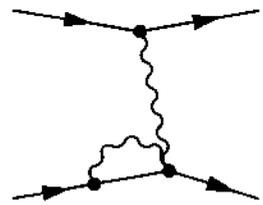
(i)



(j)



(k)



(l)

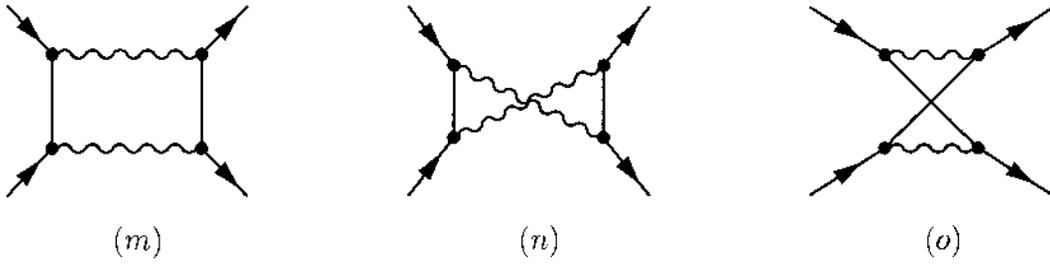


Figure 3 Todos os possíveis diagramas de Feynman de ordem e^4 .

Podemos classificar todos estes diagramas usando a sua não analiticidade em $q \rightarrow 0$ como critério. O primeiro grupo de gráficos é constituído pelos diagramas (2a)–(2e), que realmente contribuem ao potencial no limite estático, e serão considerados em detalhes na próxima seção. O segundo grupo é composto pelos gráficos (2f)–(2l). Um destes diagramas, (2f), tem comportamento analítico em $q \rightarrow 0$, já que contém somente partículas massivas no interior do loop. A contribuição deste diagrama no limite $q \rightarrow 0$ é proporcional a $\ln(m^2)$, e conseqüentemente, não contribui para a força a longas distâncias. Os diagramas (2g)–(2l) possuem divergências infravermelhas, mas estas não dependem do momento transferido, q e desta forma não contribuem para a força a longas distâncias. Esta é a situação a que nos referimos usualmente como "soft photons", e pode ser tratada, acrescentando contratermos divergentes no infravermelho [95]. A princípio, por conveniência, não vamos considerar estas divergências infravermelhas triviais, porque estas se cancelam após somarmos todos os gráficos. O terceiro grupo é formado pelos diagramas representados nas figuras (2m), (2n) e (2o). Estes não fornecem nenhuma contribuição no limites de baixo momento transferido, uma vez que introduzem apenas correções quânticas ao gráfico "tree-level" da figura 4 e, conseqüentemente, estão sujeitos às mesmas restrições

cinemáticas.

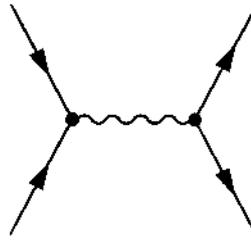


Fig.4: O diagrama do processo no canal $-t$, irrelevante no limite infravermelho.

O diagrama da figura 4 descreve aniquilação de duas partículas massivas em um fóton, com seu subsequente decaimento, criando um outro par massivo. Obviamente, o momento transferido satisfaz à condição de energia $\vec{q}^2 \geq 2m^2$. Claramente, este diagrama anula-se para o caso de baixo momento transferido e, assim, não pode contribuir para a força de longa distância.

Uma questão que não fica clara, ao se desprezar um número tão expressivo de diagramas, é se a invariância de gauge da matriz-S preserva-se nesta usual definição para o potencial de interação. Desta forma, toda a análise será no sentido de investigar este fato e, posteriormente, encontrar a correta expressão para as correções quânticas à lei de Coulomb.

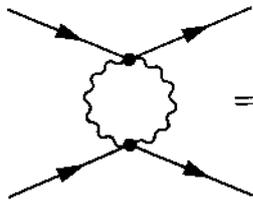
Uma questão importante, que surge ao se desprezar um conjunto tão importante de diagramas diferentes, é a invariância de gauge do subconjunto de diagramas que contribuem ao potencial. Não é *a priori* estabelecido se esta simetria é preservada, ou não, nesta definição usual do potencial.

4.5 Cálculo dos diagramas relevantes

Usando as regras de Feynmann dadas anteriormente, juntamente com as condições de "mass-shell", pode-se derivar as contribuições às amplitudes de espalhamento para cada um dos gráficos relevantes. As condições de "mass-shell" para os momenta externos e para o momento transferido têm a seguinte forma:

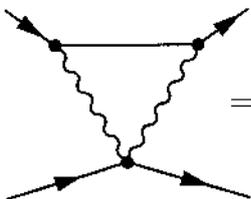
$$\begin{aligned}
 p_1 \cdot p_3 = q &\Rightarrow p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4 = m^2 - \frac{q^2}{2}, \\
 p_1 \cdot q = -p_2 \cdot q = -p_3 \cdot q = p_4 \cdot q &= \frac{q^2}{2}, \\
 p_1 \cdot p_2 = p_3 \cdot p_4 &= m^2 - \frac{q^2}{2}, \\
 p_1 \cdot p_4 = p_3 \cdot p_2 &= m^2.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Agora, tendo por base a nossa análise realizada na seção anterior, vamos considerar somente os diagramas (2a) – (2e), que possuem partes não -analíticas essenciais. A expressão para o diagrama (2b) é a mais simples de ser obtida, uma vez que envolve somente dois propagadores não -masivos.



$$\begin{aligned}
 &= 16e^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k-q)^2} - 8e^4(1+\alpha) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k-q)^2} + \\
 &+ 4e^4(1+\alpha) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\lambda(k-q)^\lambda k_\tau(k-q)^\tau}{k^2(k-q)^2}.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

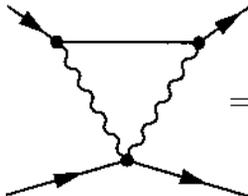
As expressões para o diagrama (2d) contêm um propagador massivo adicional:



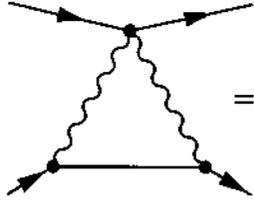
$$= -2e^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2p_1 - k)_\lambda (p_1 + p_3 - k)^\lambda}{k^2(k-q)^2[(k-p_1)^2 - m^2]}$$

$$\begin{aligned}
& + 2e^4(1+\alpha) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p_1+p_3-k)_\lambda (k-q)^\lambda (2p_1-k)_\sigma (k-q)_\sigma}{k^2 (k-q)^4 [(k-p_1)^2 - m^2]} \\
& + 2e^4(1+\alpha) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\lambda (p_1+p_3-k)^\lambda k_\sigma (2p_1-k)_\sigma}{k^4 (k-q)^2 [(k-p_1)^2 - m^2]} \\
& - 2e^4(1+\alpha)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\lambda (k-q)^\lambda (k-q)_\tau (p_1+p_3-k)^\tau k_\rho (2p_1-k)^\rho}{k^4 (k-q)^4 [(k-p_1)^2 - m^2]}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

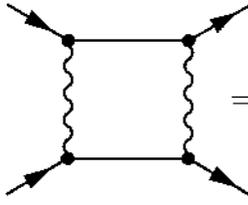
Em todas as integrais proporcionais aos fatores dependentes da fixação de gauge, $(1+\alpha)$ e $(1+\alpha)^2$, foi possível mostrar que um termo no numerador dos integrandos cancela exatamente um propagador massivo, tendo sido usado para isto as condições de "mass-shell". Para se compreender melhor este cancelamento, observa-se que o termo do tipo $(p_1+p_3-k)_\lambda (k-q)^\lambda$ é igual a $(k^2 - 2k \cdot p_1)$, que é exatamente o denominador proveniente do propagador do escalar massivo, devido à condição de "mass-shell", $p_1^2 = m^2$. Nas próximas integrais para este gráfico, usamos a relação $k \cdot (2p_1 - k) = (k - p_1)^2 - m^2$. Percebe-se, também, que $(p_2 + p_4 + k)_\sigma (k - q)^\sigma$ é igual a $(k^2 - 2k \cdot p_2)$. Assim, usando as expressões (4.17), chega-se às seguintes expressões para os diagramas:



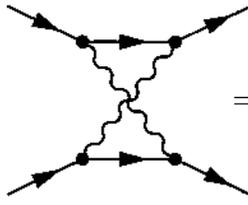
$$\begin{aligned}
& = -2e^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2p_1-k)_\lambda (p_1+p_3-k)^\lambda}{k^2 (k-q)^2 [(k-p_1)^2 - m^2]} \\
& - 2e^4(1+\alpha) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2p_1-k)_\sigma (k-q)_\sigma}{k^2 (k-q)^4} \\
& - 2e^4(1+\alpha) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\lambda (p_1+p_3-k)^\lambda}{k^4 (k-q)^2} \\
& + 2e^4(1+\alpha)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\lambda (k-q)^\lambda (k-q)_\tau (p_1+p_3-k)^\tau}{k^4 (k-q)^4},
\end{aligned} \tag{4.20}$$



$$\begin{aligned}
&= -2e^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2p_2 + k)_\lambda (p_2 + p_4 + k)^\lambda}{k^2 (k - q)^2 [(k + p_2)^2 - m^2]} \\
&+ 2e^4 (1 + \alpha) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2p_2 + k)_\lambda (k - q)^\lambda}{k^2 (k - q)^4} \\
&+ 2e^4 (1 + \alpha) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\lambda (p_2 + p_4 - k)^\lambda}{k^4 (k - q)^2} \\
&- 2e^4 (1 + \alpha)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\lambda (k - q)^\lambda (k - q)_\tau (p_2 + p_4 + k)^\tau}{k^4 (k - q)^4}, \quad (4.21)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= e^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2p_1 - k)_\lambda (2p_2 + k)^\lambda (p_2 + p_4 + k)_\tau (p_1 + p_3 - k)^\tau}{k^2 (k - q)^2 [(k - p_1)^2 - m^2] [(k + p_2)^2 - m^2]} \\
&+ e^4 (1 + \alpha) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2p_1 - k)_\lambda (2p_2 + k)^\lambda}{k^2 (k - q)^4} \\
&+ e^4 (1 + \alpha) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(p_2 + p_4 + k)^\lambda (p_1 + p_3 - k)^\lambda}{k^4 (k - q)^2} \\
&- 2e^4 (1 + \alpha)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(p_2 + p_4 + k)_\lambda (k - q)^\lambda (k - q)_\tau (p_1 + p_3 - k)^\tau}{k^4 (k - q)^4}, \quad (4.22)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= e^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2p_1 - k)_\lambda (k - 2p_4)^\lambda (k - p_2 - p_4)_\tau (p_1 + p_3 - k)^\tau}{k^2 (k - q)^2 [(k - p_1)^2 - m^2] [(k - p_4)^2 - m^2]} \\
&+ e^4 (1 + \alpha) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2p_1 - k)_\lambda (k - 2p_4)^\lambda}{k^2 (k - q)^4} \\
&+ e^4 (1 + \alpha) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k - p_2 - p_4 + k)^\lambda (p_1 + p_3 - k)^\lambda}{k^4 (k - q)^2}
\end{aligned}$$

$$- 2e^4(1 + \alpha)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k - p_2 - p_4)_\lambda (k - q)^\lambda (k - q)_\tau (p_1 + p_3 - k)^\tau}{k^4 (k - q)^4}. \quad (4.23)$$

É imediato verificar que as expressões para as integrais na parte da amplitude dependente de gauge apresentam um aspecto semelhante. Nosso procedimento para mostrar a independência de gauge consiste em agrupar todas as integrais proporcionais a $(1 + \alpha)$ e $(1 + \alpha)^2$, sem, no entanto, resolvê-las. Após isto fazemos uso somente das condições de "mass-shell" e realizamos as apropriadas redefinições de momenta de forma a verificar se a expressão como um todo se anula. Assim, expandindo para um parâmetro α arbitrário,

$$T(q) = T_0(q) + (1 + \alpha)T_1(q) + (1 + \alpha)^2T_2(q), \quad (4.24)$$

podemos reunir todos os resultados anteriores e verificar que:

$$\begin{aligned} T_1(q) = & -8 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k - q)^2} - 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p_1 + p_3 - (k - q))_\alpha (k - q)^\alpha}{k^2(k - q)^4} \\ & - 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p_1 + p_3 - k)_\alpha k^\alpha}{k^4(k - q)^2} + 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p_2 + p_4 + (k - q))_\alpha (k - q)^\alpha}{k^2(k - q)^4} \\ & + 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p_2 + p_4 + k)_\alpha k^\alpha}{k^4(k - q)^2} \\ & + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p_1 + p_3 - (k - q))_\alpha (p_2 + p_4 + (k - q))^\alpha}{k^2(k - q)^4} \\ & + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p_1 + p_3 - k)_\alpha (p_2 + p_4 + k)^\alpha}{k^4(k - q)^2} \\ & + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p_1 + p_3 - (k - q))_\alpha ((k - q) - p_2 - p_4)^\alpha}{k^2(k - q)^4} \\ & + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p_1 + p_3 - k)_\alpha (k - p_2 - p_4)^\alpha}{k^4(k - q)^2}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Analisando cuidadosamente estas expressões, é possível eliminar todas as integrais da

forma

$$\int \frac{(p_1 + p_3) \cdot k}{k^n (k - q)^m} \text{ ou } \int \frac{(p_2 + p_4) \cdot k}{k^n (k - q)^m},$$

uma vez que estas integrais necessariamente dependem linearmente de q_μ , como pode ser visto no Apêndice. É direto ver que $(p_1 + p_3) \cdot q = 0$ e $(p_2 + p_4) \cdot q = 0$, uma vez que $q = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$. O mesmo argumento pode se aplicado aos termos semelhantes como $(p_2 + p_4) \cdot (k - q)$, porque, após realizar uma redefinição de momento do tipo $k \rightarrow k + q$, chegamos à mesma situação anterior. Finalmente, da expressão completa para $T_1(q)$ sobram somente os seguintes termos, que se anulam após incluímos os fatores de simetria convenientes para cada um dos gráficos:

$$T_1(q) = e^4(1 + \alpha) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k - q)^2} \cdot (-4 + 8 - 4) = 0. \quad (4.26)$$

Considerando, agora, a parte proporcional a $(1 + \alpha)^2$, e agrupando todas as integrais, obtemos que:

$$\begin{aligned} T_2(q) &= 4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{[k_\lambda(k - q)^\lambda]^2}{k^4(k - q)^4} + 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(p_1 + p_3 - k)_\alpha(k - q)^\alpha k_\lambda(k - q)^\lambda}{k^4(k - q)^4} \\ &- 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(p_2 + p_4 + k)_\alpha(k - q)^\alpha k_\lambda(k - q)^\lambda}{k^4(k - q)^4} \\ &- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(p_2 + p_4 + k)_\alpha(k - q)^\alpha (p_1 + p_3 - k)_\lambda(k - q)^\lambda}{k^4(k - q)^4} \\ &- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k - p_2 - p_4)_\alpha(k - q)^\alpha (p_1 + p_3 - k)_\alpha(k - q)^\alpha}{k^4(k - q)^4}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Utilizando o mesmo procedimento anterior, encontramos que este termo também se anula:

$$T_2(q) = e^4(1 + \alpha)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{[k \cdot (k - q)]^2}{k^4(k - q)^4} \cdot (2 - 4 + 2) = 0. \quad (4.28)$$

Como vimos, foi possível demonstrar o completo cancelamento da dependência de gauge na definição do potencial. Não foi necessário, entretanto, resolver explicitamente as integrais de loop. Apenas buscamos uma simplificação conveniente para as expressões algébricas dos diagramas, usando as condições "on-shell" para as pernas externas. Este procedimento relativamente simples de encontrar o cancelamento da parte não-física do potencial não é tão óbvio ao se tratar o mesmo problema na "Quantum Gravity", que é de fato, o nosso objetivo futuro maior. Acreditamos que este cancelamento na SQED seja um bom sinal, no sentido de que o mesmo ocorra na gravitação. Ao menos agora, é possível afirmar que a definição do potencial, como o limite não-relativístico da amplitude de espalhamento, e o nosso método de tratar as contribuições não-analíticas sejam procedimentos consistentes com a independência do gauge.

4.6 Cálculo do potencial físico

Agrupando a parte restante da amplitude de espalhamento, de modo a extrair as correções quânticas ao potencial clássico de Coulomb, encontramos:

$$T_0(q) = 8e^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k-q)^2} - 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p_1 + p_3 - (k-q)) \cdot (p_1 + p_3 - k)}{k^2(k-q)^2[(k-p_1)^2 - m^2]} -$$

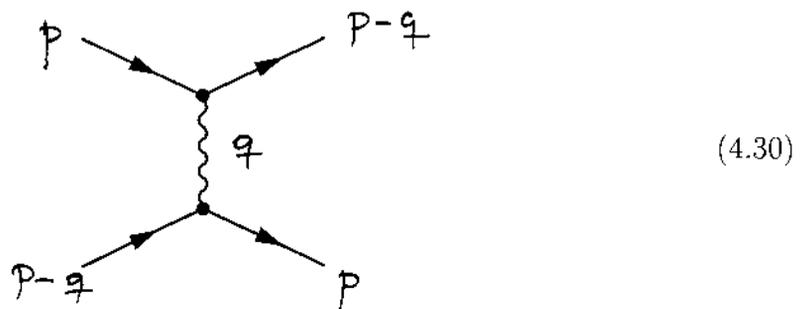
$$- 2e^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p_2 + p_4 + (k-q))_\lambda (p_2 + p_4 + k)^\lambda}{k^2(k-q)^2[(k+p_2)^2 - m^2]} +$$

$$\begin{aligned}
& +e^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(p_2 + p_4 + k)_\lambda (p_1 + p_3 - k)^\lambda (p_2 + p_4 + (k - q))_\tau (p_1 + p_3 - (k - q))^\tau}{k^2 (k - q)^2 [(k - p_1)^2 - m^2] [(k + p_2)^2 - m^2]} + \\
& +e^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k - (p_2 + p_4))_\lambda (p_1 + p_3 - k)^\lambda ((k - q) - (p_2 + p_4))_\tau (p_1 + p_3 - (k - q))^\tau}{k^2 (k - q)^2 [(k - p_1)^2 - m^2] [(k - p_4)^2 - m^2]}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Para extrair os termos não -analíticos, é preciso isolar a parte finita das integrais via um esquema de regularização dimensional. As integrais provenientes dos loops com 2 partículas vetoriais não massivas são relativamente fáceis de serem computadas. No entanto, as integrais com um propagador massivo adicional, além dos 2 propagadores sem massa presentes, por exemplo, nos gráficos das figuras (2c) e (2d), são extremamente complicadas. Foi crucial para a sua solução, a utilização de programa de computação algébrica MapleV, uma vez que dipunhamos de uma integral dupla nos 2 parâmetros de Feynman necessários para a sua resolução. Trabalhando com estas integrais paramétricas apesar de muito complicadas, foi possível encontrar as correções quânticas dominantes, ou seja, aquelas que são realmente importantes no limite considerado de baixos momentos transferidos, $q^2 \rightarrow 0$. O caso das integrais contendo 4 propagadores no denominador, 2 massivos e dois não -massivos, provenientes dos gráficos (2a) e (2e), foi, de fato, uma tarefa árdua, de tal modo que a integração direta sobre os 3 parâmetros de Feynman era, a princípio, impossível de ser realizada e seu calculo exigiu esforço s adicionais. Não era trivial a obtenção da parte não -analítica destas integrais, a despeito de sua parte analítica já ter sido calculada na QED espinorial para o processo de espalhamento fóton-fóton

puramente quântico.[96]

O caminho para a solução deste problema baseou-se na suposição de que o potencial no limite estático não deveria, a princípio, ser dependente de velocidades. Assim, consequentemente, baseado nesta hipótese foi possível adotar uma configuração mais adequada para os momenta externos, levando em consideração a sua conservação em cada vértice separadamente. Este tratamento mostrou-se útil para que se calculassem as integrais de loop com quatro propagadores. A configuração adotada foi aquela mostrada no diagrama da figura abaixo:



Com esta configuração, vemos que o momento $p_4 = p_1 = p$, e, assim, nas integrais referentes ao gráfico (2f), os propagadores massivos são exatamente iguais. Neste caso, temos, então, uma situação com três propagadores, sendo um deles quadrado. A expansão paramétrica neste caso é um pouco diferente, sendo necessária somente a utilização de dois parâmetros de Feynman. Para este tipo de integral, foi possível encontrar a solução.

Nas integrais do gráfico da figura (2a), temos agora que $p_1 = p$ e $p_2 = p - q$. Neste caso, é possível encontrar uma decomposição em frações parciais proporcional ao integrando de que necessitamos. Uma tabela com as integrais calculadas e os comentários apropriados

é dado no Apêndice.

Uma observação importante a ser acrescentada aqui é que algumas integrais podem ser imediatamente desconsideradas, porque não apresentam contribuições não-analíticas. É relativamente fácil de se mostrar que os integrandos com k^2 ou $(k - q)^2$ no numerador não são dependentes de q^2 e, assim, não fornecem absolutamente qualquer contribuição ao potencial. Isto está relacionado ao fato de que esses mesmos termos aparecem no denominador, representando propagadores não-massivos e, conseqüentemente, ao se cancelarem, ficamos com uma integral independente de q^2 .

Vamos, agora, agrupar todos os termos provenientes de todas as integrais calculadas, considerando-se somente as correções quânticas principais. Após obter o resultado final reescrevemos a expressão para o potencial no espaço de coordenadas, por meio de uma transformada de Fourier, o que nos conduz ao seguinte resultado final:

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} \left(1 - \frac{3}{64\pi^2} \frac{e^2}{m} \frac{1}{r} + \frac{5}{48\pi^4} \frac{e^2}{m^2} \frac{1}{r^2} \right)$$

Reconstituindo as dimensões de \hbar e c , chegamos à seguinte forma final:

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} \left(1 - \frac{3}{64\pi^2} e^2 \hbar \frac{L_c}{r} + \frac{5}{48\pi^4} e^2 \hbar \frac{L_c^2}{r^2} \right), \quad (4.31)$$

onde $L_c = \frac{\hbar}{mc}$ é o parâmetro que traduz uma escala de comprimento típica que aparece devido à existência de um parâmetro de massa apropriado na SQED. Importante aqui destacar que há dois parâmetros deste tipo na Quantum Gravity para o potencial gravitacional de Newton, a saber: o raio de Schwarzschild para as correções ditas clássicas

provenientes dos termos tipo- S e o comprimento de Planck para as correções quânticas, vindas dos termos não locais tipo- L . Vale ressaltar que, em (1.32), um ds fatores \hbar vem dos cálculos a 1-loop, enquanto que os outros mesmos fatores são provenientes simplesmente da massa na equação de Klein-Gordon.

Na SQED, portanto, há somente uma única escala para as correções quânticas, além de não aparecerem correções "clássicas", o que de certa forma era de se esperar, uma vez que não existe uma teoria clássica para mais altas energias, em relação à qual, a SQED seja sua teoria efetiva a baixas energias. Este é o caso exatamente da gravitação Newtoniana em relação a Relatividade Geral. Na verdade a SQED é a teoria efetiva de si mesma.

Pode-se perceber deste potencial que, contrariamente aos cálculos realizados em Gravitação Quântica para o potencial Newtoniano, todas as correções aqui contêm os fatores de \hbar escondidos em L_c , que é o comprimento de onda Compton da partícula carregada, onde as contribuições quânticas ao potencial tornam-se significativas.

4.7 Conclusões

Calculamos as correções quânticas de baixas energias ao potencial Coulombiano na SQED. Embora seja uma teoria renormalizável, a SQED simula boa parte das propriedades de uma teoria efetiva para a Quantum Gravity. Verificamos que é, realmente, possível separar diferentes escalas para a teoria. Desta maneira, pode-se afirmar que esta física de baixas energias é completamente independente de qualquer parâmetro de renormalização que contabiliza os efeitos de altas energias. Como era de se esperar, vimos que, qualquer

que seja a teoria fundamental válida a alta energias, é possível fazer previsões quânticas no contexto das chamadas teorias de campos efetivas. No caso da SQED, que é uma teoria de campos renormalizável, ela é a sua própria teoria efetiva. Neste sentido, esperamos realizar o mesmo programa para a Quantum Gravity; em particular, a questão da independência das correções quânticas ao potencial de qualquer escolha de gauge, como demonstrado neste trabalho para caso da SQED. Destacamos, também, que, ao contrário da investigação prévia [93], nossos cálculos envolvem todos os digramas relevantes, mesmo aqueles que possuem linhas internas massivas. Ainda mais, para as contribuições dos loops não -massivos, os mesmos resultados podem ser obtidos facilmente, usando-se métodos funcionais. Por exemplo, sendo as divergências ultravioleta e infravermelha proporcionais no caso não -massivo (o momento transferido, q_μ , desempenha o papel de um parâmetro regulador no IR), pode-se simplesmente aplicar a independência de gauge "on-shell" das divergências a 1-loop (ver, por exemplo, a demonstração pedagogicamente adaptada em [97] ou a consideração direta ou 1-loop simplificada em [88] ou [98]). Para o caso das não -localidades mais complicadas tipo- S os digramas de Feynman permanecem sendo um recurso importante, o que esperamos aplicar no caso da gravitação .

Apêndice

Vamos apresentar aqui as integrais de loop que foram usadas ao longo de ba parte deste texto. Todas as integrais contendo 2 e 3 propagadores podem ser avaliadas usando-se diretamente o método dos parâmetros de Feynman. Quanto às integrais com quatro propagadores, foi possível decompor os seus integrandos em frações parciais, contendo três propagadores cada um, como indicado abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{k^2(k-q)^2[(k-p)^2-m^2][(k+p-q)^2-m^2]} &= \frac{1}{k^2[(k-p)^2-m^2][(k+p-q)^2-m^2]} + \\ + \frac{1}{(k-q)^2[(k-p)^2-m^2][(k+p-q)^2-m^2]} &- \frac{1}{k^2(k-q)^2[(k+p-q)^2-m^2]} + \\ - \frac{1}{k^2(k-q)^2[(k-p)^2-m^2]} &. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Integrando os dois primeiros termos, é possível verificar que não há nenhuma contribuição não -analítica. Este fato foi visto ao calcular as integrais para os diagramas das figuras $(2f) \rightarrow (2m)$, que apresentam integrais extamente como estas. Assim, nosso interesse fica restrito aos últimos dois termos. Estes, por sua vez, podem ser calculados perfeitamente, usando o método dos parâmetros de Feynman e o software MAPLE V. Todas as integrais necessárias para nossos cálculos são mostradas abaixo. Estas, como

pode-se observar, contém somente as partes não -analíticas das integrais. Em alguns casos omitimos as divergências infravermelhas triviais, mencionadas na Seção 4.

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k-q)^2} &= -\frac{i}{16\pi^2} \ln(-q^2) + \dots \\
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{k^2(k-q)^2} &= -\frac{i}{16\pi^2} q_\mu \ln(-q^2) + \dots \\
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2(k-q)^2} &= \frac{i}{16\pi^2} q_\mu q_\nu \ln(-q^2) + \dots \\
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{k^2(k-q)^4} &= \frac{i}{16\pi^2} q_\mu \frac{\ln(-q^2)}{q^2} + \dots \\
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{k^4(k-q)^4} &= \frac{i}{16\pi^2} q_\mu q_\nu \frac{\ln(-q^2)}{q^4} + \dots \\
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k-q)^2[(k-p_1)^2 - m^2]} &= -\frac{i}{32\pi^2 m^2} \left(\ln(-q^2) + \frac{\pi^2 m}{\sqrt{-q^2}} \right) \dots \\
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{k^2(k-q)^2[(k-p)^2 - m^2]} &= \frac{i}{32\pi^2 m^2} \left\{ q_\mu (-\ln(-q^2) + \right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{2} \frac{\pi^2 m}{\sqrt{-q^2}}) + p_{1\mu} \ln(-q^2) \right\} \\
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k-q)^2[(k-p)^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]} &= \frac{-i}{32\pi^2 m^2} \frac{1}{q^2} \int_0^1 \frac{dy}{y} \\
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{k^2(k-q)^2[(k-p)^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]} &= \frac{-i}{32\pi^2 m^2} \left\{ q_\mu \left(-\frac{1}{q^2} \int_0^1 \frac{dy}{y} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. -\frac{1}{4m^2} \frac{\pi^2 m}{\sqrt{-q^2}} - \frac{1}{2m^2} \ln(-q^2) \right) + p_\mu \left(\frac{1}{2m^2} \frac{\pi^2 m}{\sqrt{-q^2}} + \frac{1}{m^2} \ln(-q^2) \right) \right\} \\
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2(k-q)^2[(k-p)^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]} &= \frac{i}{32\pi^2 m^2} \left\{ q_\mu q_\nu \left(\frac{1}{q^2} \int_0^1 \frac{y-1}{y} dy + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. -\frac{3}{8m^2} \frac{\pi^2 m}{\sqrt{-q^2}} - \frac{1}{m^2} \ln(-q^2) \right) - p_\mu p_\nu \frac{1}{m^2} \ln(-q^2) + (p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) \left(\frac{1}{4m^2} \frac{\pi^2 m}{\sqrt{-q^2}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{1}{m^2} \ln(-q^2) \right) + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \ln(-q^2) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{k^2(k-q)^2[(k-p)^2 - m^2][(k+p-q)^2 - m^2]} &= \frac{i}{32\pi^2 m^2} \left\{ \frac{2}{q^2} \left(\ln(q^2) + \frac{\pi^2 m}{\sqrt{-q^2}} \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{4m^2} \cdot \frac{\pi^2 m}{\sqrt{-q^2}} + \frac{1}{3m^2} \ln(-q^2) \right\} \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Conclusões Gerais e Perspectivas

Futuras

Nesta tese, foram apresentadas diversas linhas de pesquisa em Teorias Quânticas de Campos. Os trabalhos aqui reunidos abrangem uma vasta área de atuação no contexto da Física Teórica de Altas Energias. Foram contempladas técnicas de Renormalização Algébrica de BRST aplicadas a uma teoria topológica de Super-Yang-Mills $N = 1$, com tratamento realizado inteiramente no Superespaço, o que requer o desenvolvimento de novos aspectos técnicos para se lidar com as transformações de BRST diretamente em termos de Supercampos, eliminando, porém, as extensas manipulações algébricas inerentes ao cálculo em termos de campos componentes. Uma perspectiva natural de extensão deste resultados seria o estudo dos modelos topológicos com supersimetrias $N = 2$ e $N = 4$ em termos dos superespaços $N = 1$, ou através da formulação dos superespaços estendidos correspondentes. Mereceria também destaque o estudo da Renormalização Algébrica dos Modelos- σ Topológicos com supersimetria em 2 dimensões.

Estes foram particularmente estudados em conexão com supersimetrias heteróticas

do tipo-(2,0). Procedendo-se a uma formulação geométrica por meio da imposição de vínculos nos superespaço s , a teoria de Yang-Mills-(2,0) é reproposta com um conjunto alternativo de vínculos, de onde emerge um campo de gauge quiral cuja dinâmica e cujas interações são detalhadamente estudadas no caso do acoplamento com matéria e modelos- σ não-lineares.

Rumo a um maior envolvimento com aspectos da Gravitação Quântica em 4 dimensões, propusemo-nos a estudar um modelo de teorias de campos num background curvo no qual a gravitação traz graus de liberdade de torção. Procdeu-se a obtenção da Ação Efetiva para campos escalares em al tipo de background. Caberia aqui ressaltar que um modelo mais completo com escalares e fermions acoplados mereceria atenção futura, em vista da possível influência da torção no mecanismo de quebra espontânea de eventuais simetrias de gauge, e nos procesos envolvendo fermions (Quarks e Leptons), através dos quais se poderia impor um conjunto de limites experimentais sobre a torção, através de experimentos nos aceleradores de Altas Energias.

E, finalmente, talvez o estudo mais relevante apresentado nesta tese seja a obtenção das correções quânticas ao potencial de Coulomb, na QED escalar considerada como Teoria Efetiva a baixas energias. Este trabalho na verdade é um aquecimento ao mesmo problema referente às correções quânticas ao potencial de Newton na Gravitação Quântica, já que os calculos perturbativos envolvidos na obtenção do potencial sejam, do pontode vista diagramático, muito semelhantes nas duas teorias. Certamente, o caso da Gravitação Quântica comporta não só um maior volume de cálculos algébricos, devido à extensão dos propagadores e dos vértices, mas também uma discussão mais complexa a respeito da

estrutura de divergências infravermelhas inevitáveis na aproximação de baixas energias de teorias com Bósons intermediários de massa nula, como é o caso dos gravitons. A motivação para concentrarmos grande parte do esforço desta tese nesta questão deve-se, em primeiro lugar, a uma série de resultados conflitantes existentes na literatura especializada. Nosso estudo detalhado da contrapartida eletromagnética via QED Escalar deu-nos um direcionamento prático sobretudo na abordagem das divergências infravermelhas e na verificação da independência de gauge do potencial obtido, quando pudemos manipular de maneira oportuna integrais de Loop altamente não triviais. Uma discussão interessante que emerge neste contexto é a possibilidade de se extrair mais do que um tipo de potencial a partir de uma teoria de campos fundamental, em conexão com o setor de estados ligados ou com os estados assintóticos em processos de espalhamento. Tal questão merece uma reflexão especial no âmbito de teorias mais complexas como é o caso da Gravitação Quântica. O nosso estudo já se encontra em fase avançada de cálculos e os resultados mais conclusivos deverão ser publicados brevemente.

Bibliografia

- [1] C. Itzykson, J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (New York: Mc-Graw Hill, 1980);
P.Ramond *Field Theory: A Modern Primer*, (Massachussetz: Benjamin Reading, 1981)
- [2] S. Weinberg, *What is Quantum Field Theory and What Did We Thing It is*, hep-th/9702027
- [3] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields - Volume I: Foundations*, Cambridge University Press, 1995
- [4] C. G. Bolini, J.J. Giambiagi, *Nuovo Cimento* B 12, 1972, 20
- [5] G. 't Hooft, M. Veltman, *Nuclear Physics* B 44, 189
- [6] G. 't Hooft, M. Veltman, *Nuclear Physics* B 50, 318
- [7] J.C.Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, 1984
- [8] O. Piguet, S. Sorella, *Algebraic Renormmalization*, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, 1995

- [9] M. Werneck e A. Penna-Firme, *Nucl. Phys.* **B477** 925 (1996)
- [10] E. Witten, *Commun. Math. Phys.* 117 (1988) 353;
- [11] S.K. Donaldson, *J. Diff. Geom.* 18 (1983) 269; *J. Diff. Geom.* 26 (1987) 397;
Topology 29 (1990) 257;
- [12] R. Brooks, D. Montano and J. Sonnenschein, *Phys. Lett.* B214 (1988) 91;
- [13] J.H. Horne, *Nucl. Phys.* B318 (1989) 22;
- [14] D. Birmingham, M. Rakowski and G. Thompson, *Nucl. Phys.* B329 (1990) 83;
- [15] D. Birmingham, M. Blau and G. Thompson, *Int. J. Mod. Phys.* A5 (1990) 4721;
- [16] D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski and G. Thompson, *Phys. Rep.* 209 (1991) 129;
- [17] J.O. Madsen, *Mod. Phys. Lett.* A5 (1990) 1013;
- [18] M.W. de Oliveira, *Phys. Lett.* B307 (1993) 347;
- [19] A. Brandhuber, O. Moritsch, M.W. de Oliveira, O. Piguet and M. Schweda, *Nucl. Phys.* B431 (1994) 173;
- [20] J. Ilioupoulos and B. Zumino, *Nucl. Phys.* B76 (1982) 129;
- [21] P. West, *Phys. Lett.* B136 (1984) 371;
- [22] D.R.T. Jones and L. Mezincescu, *Phys. Lett.* B138 (1984) 293;
- [23] M. Sohnius and P. West, *Phys. Lett.* B100 (1981) 45;

- [24] D. Birmingham, M. Rakowski and G. Thompson, *Phys. Lett.* B212 (1988) 187;
- [25] J.P. Ader, F. Gieres and J.C. Wallet, *Phys. Lett.* B226 (1989) 302;
- [26] J.P. Ader and F. Gieres, *Z. Phys.* C46 (1990) 285;
- [27] C.M. Becchi, A. Rouet and R. Stora, *Commun. Math. Phys.* 42 (1975) 127; *Annu. Phys. (N.Y.)* 98 (1976) 287;
- [28] C.M. Becchi, “The renormalization of Gauge Theories”, in Proc. Les Houches Summer School 1983, eds. B.S. de Witt and R. Stora (North Holland, Amsterdam, 1984);
- [29] O. Piguet and A. Rouet, *Phys. Rep.* 76 (1981) 1;
- [30] O. Piguet and K. Sibold, “Renormalized Supersymmetry”, series “Progress in Physics”, vol. 12 (*Birkhäuser Boston Inc.*, 1986);
- [31] O. Piguet, “Supersymmetry, Supercurrent and Scale Invariance”, unpublished lecture notes, Rio de Janeiro, 1995;
- [32] W. Siegel, *Phys. Lett.* B80 (1979) 220;
- [33] M.T. Grisaru, M. Rocek and W. Siegel, *Nucl. Phys.* 159 (1979) 429;
- [34] L. Baulieu and I.M. Singer, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* 5 (1988) 12;
- [35] J.M.F. Labastida and M. Pernici, *Phys. Lett.* B212 (1988) 91;
- [36] S. Ouvry, R. Stora and P. van Baal, *Phys. Lett.* B220 (1989) 159;
- [37] A. Blasi, O. Piguet and S.P. Sorella, *Nucl. Phys.* B356 (1991) 154;

- [38] O. Piguet and S.P. Sorella, “The Antighost Equation in N=1 Super-Yang-Mills Theories”, CBPF preprint, NF-072-1995;
- [39] F. Brandt, N. Dragon and M. Kreuzer, *Phys. Lett.* 231 (1989) 263;
- [40] J.A. Dixon, “Cohomology and Renormalization of Gauge Theories”, Imperial College preprints (1977); *Commun. Math. Phys.* 139 (1991) 495;
- [41] N. Seiberg and E. Witten, *Nucl. Phys.* B426 (1994) 19;
- [42] M.S. Negrão , M.R. Negrão e A. Penna-Firme *hep-th/9903128*; submetido à *Journal of High Energy Physics*.
- [43] J.A. Helayel-Neto, M.S. Negrão , e A. Penna-Firme *hep-th/9808174*;
- [44] C. M. Hull and E. Witten, *Phys. Lett.* **160B**(1985) 398.
- [45] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B258**(1985) 46;
C. M. Hull, *Nucl. Phys.* **B260**(1985) 182 and *Nucl. Phys.* **B267**(1986) 266;
A. Sen, *Phys. Rev.* **D32**(1985) and *Phys. Rev. Lett.* **55**(1985) 1846.
- [46] M. Sakamoto, *Phys. Lett.* **B151**(1985) 115.
- [47] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. J. Martinec and R. Rohm, *Phys. Rev. Lett.* **54**(1985) 502.
- [48] M. Porrati and E. T. Tomboulis, *Nucl. Phys.* **B 315**(1989) 615;
J. Quackenbush, *Phys. Lett.* **B234**(1990) 285.

- [49] N. Chair, J. A. Helayël-Neto and A. William Smith, *Phys. Lett.***B 233**(1989) 173.
- [50] C. A. S. Almeida and R. M. Doria, **CBPF-NF-032-90**
- [51] M. Dine and N. Seiberg, , *Phys. Lett.***180B**(1986) 364.
- [52] J. Bagger and E. Witten, *Phys. Lett.***118B**(1982) 103.
- [53] C. M. Hull, A. Karlhede, U. Lindström and M. Roček, *Nucl. Phys.***B266**(1986) 1.
- [54] R. Brooks. F. Muhammad and S. J. Gates Jr., *Nucl. Phys.***B268**(1986) 599.
- [55] C. A. S. Almeida, J. A. Helayël-Neto and A. William Smith, *Mod. Phys. Lett.***A6**(1991) 1397 and *Phys. Lett.***279B**(1992) 75.
- [56] J.A. Helayel Neto, A. Penna-Firme and I.L. Shapiro, *gr – qc/9907081*, submetido à *Physics Letters B*
- [57] V. Faraoni, E. Gunzig e P. Nardone, *gr – qc/9807066*. A ser publicado em *Fundamentals of Cosmic Physics*.
- [58] S. Deser, *Ann.Phys. (NY)* **59** (1970) 248.
- [59] I.L. Shapiro e H. Takata, *Phys.Lett.* **361 B** (1996) 31.
- [60] I.L. Shapiro, *Class. Quantum Grav.* **14** (1997) 391.
- [61] M.J. Duff, *Class.Quant.Grav* **11** (1994) 1387.
- [62] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity* (Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia) 1992.

- [63] C. Calam, D. Friedan, E. Martinec and M.Perry, *Nucl. Phys.***272B**, 593 (1985)
- [64] R. Balbinot, A. Fabri and I.L. Shapiro *Phys. Rev. Lett.***83**, 1494 (1999)
- [65] I.L. Shapiro and G. Cognola *Phys. Rev.* **51D**, 2775 (1995); *Class. Quant. Grav.***15** (1998) 787 3411
- [66] I.L. Buchbinder and I.L. Shapiro, *Phys. Lett.***151B**, 263 (1985); *Class. Quant. Grav.***7** 1197 (1990)
- [67] S.M. Christensen, *J. Phys. A: Math. Gen.***13**, 3001 (1980)
- [68] Yu.N. Obukhov, *Phys.Lett.* **90A** (1982) 13.
- [69] M.J. Duff, *Nucl.Phys.* **B125** (1977) 334.
- [70] R.Y. Reigert, *Phys.Lett.* **134B**(1984) 56.
- [71] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Phys.Lett.* **134B** (1984) 187.
- [72] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Phys.Lett.* **162B** (1985) 92.
- [73] I. Antoniadis and E. Mottola, *Phys. Rev.* **45D** (1992) 2013.
- [74] I.L. Shapiro and G. Cognola, *Phys.Rev.* **51D** (1995) 2775; *Class. Quant. Grav.* **15** (1998) 787; 3411.
- [75] A.A. Starobinski, *Phys.Lett.* **91B** (1980) 99; S.G. Marnaev and V.M. Mostcpanenko, *Sov.Phys. - JETP* **51** (1980) 9 (see also [76] for the earlier work on the anomaly-induced cosmology).

- [76] M.V. Fischetti, J.B. Hartle and B.L. Hu, *Phys.Rev.* **D20** (1979) 1757.
- [77] J.C. Fabris, A.M. Pelinson, I.L. Shapiro, *Anomaly-induced effective action for gravity and inflation*. gr-qc/9810032.
- [78] R. Balbinot, A. Fabbri and I.L. Shapiro, Anomaly induced effective actions and Hawking radiation. hep-th/9904074; Vacuum polarization in Schwarzschild space-time by anomaly induced effective actions and Hawking radiation. Hep-th/9904162.
- [79] J.A. Helayel Neto, A. Penna-Firme e I.L. Shapiro, *hep - th/9910080*; submetido à *Journal of High Energy Physics* e aceito para publicação .
- [80] G. t'Hooft and M. Veltman, *Ann.Inst.H.Poincare.* **A20**, 69 (1974).
- [81] S. Deser and P. van Nieuwenhuizen, *Phys.Rev.* **bf D** (1974).
- [82] K.S.Stelle *Phys.Rev.***16D** (1977) 953.
- [83] Asorey M., López J.L. and Shapiro I.L., *Int.Journ.Mod.Phys. A*, **12** (1997) 5711.
- [84] S. Weinberg, *In: General Relativity*. Editors: S.W. Hawking and W. Israel. (Cambridge Univ. Press, 1979).
- [85] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol I., Vol II (Cambridge Univ. Press, 1995/1996).
- [86] J. Donoghue, *Phys. Rev. Lett.***72**, 2996(1994); *Phys. Rev.* **D50**, 3874(1994).
- [87] R.E. Kallosh, O.V. Tarasov and I.V. Tyutin, *Nucl.Phys.***B137** (1978) 145.

- [88] Barvinsky A.O., Vilkovisky G.A., *Phys.Repts.* **119** (1985) 1.
- [89] T. Appelquist and J. Carazzone, *Phys.Rev.* **D11** (1975) 2856.
- [90] H. W. Hamber and S. Liu, *Nucl.Phys.* **B472** (1996) 447-480.
- [91] Akhundov, A. Bellucci and A. Shiekh,
Phys.Lett. **B395** (1997) 16-23.
- [92] Y. Iwasaki, *Prog. Theor. Physics* **5** (1971) 1587.
- [93] D. Dalvit, F. Mazzitelli, *Phys. Rev.* **D56** (1997) 7779.
- [94] I. Muzinich, S. Vokos, *Phys.Rev.* **D52** (1995) 3472.
- [95] J.D. Bjorken and S. Drell, *Relativistic Quantum Field Theory*, (McGraw-Hill, New York, 1964).
- [96] C. Itzuber and J. Zuber, *Quantum Field Theory*, (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [97] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity*. - IOP Publishing, (Bristol, 1992).
- [98] I.L. Shapiro and A.G. Jacksenaev, *Phys. Lett.B* **324 B** (1994) 284 - 292.
- [99] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).

“ASPECTOS GEOMÉTRICOS E RESULTADOS PERTURBATIVOS EM FÍSICA DAS INTERAÇÕES FUNDAMENTAIS”

ANDRÉ BESSADAS PENNA-FIRME

Tese apresentada no Centro Brasileiro de
Pesquisas Física, fazendo parte da Banca
examinadora os seguintes Professores:

José Abdala Helayel Neto/CBPF

Ilia Chapiro/UFJF

Wilson Oliveira/ UFJF

Francisco Caruso Neto/CBPF

Sebastião Alves Dias/CBPF

Oswaldo Monteiro Delcima/CBPF

Marco Aurélio Cattacin Kneipp

Rio de Janeiro, 21 de dezembro de 1999