TESE DE

DOUTORADO

Auto-dualidade, Bosonização e Teorias Topologicamente Massivas com Dimensões e Grupos Arbitrários.

MARCELO ANGEL NICOLAS BOTTA CANTCHEFF.

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, JULHO DE 2002

...Primero hay que saber sufrir, después amar, después partir, y al fin andar sin pensamientos. Perfume de naranjo en flor, promesas vanas de un amor que se escaparon con el viento.

Después, qué importa del después, si toda mi vida es el ayer que se detiene en el pasado, eterna y vieja juventud que me ha dejado acobardado como un pájaro sin luz....

Fragmento del Tango Naranjo en Flor.

a mi padre.

Agradeço

Ao CBPF, paradigma de Pós-Graduação no Brasil, pela liberdade de pesquisa, verdadeira semente da ciência básica.

Ao CNPq, pela bolsa recebida.

A Jose A. Helayël-Neto por sua amizade, preocupação, sua orientação sempre estimulante e pelos conhecimentos que me transmitiu.

Ao Professor Anibal Caride por sua confiança e estímulo, mesmo sabendo que eu teria apenas dois anos para realizar esta tese.

À minha Mãe, por seu amor, paciência e sacrifício.

A Daniele, por seu amor e constante apoio.

A Álvaro L. M. A. Nogueira por sua amizade sincera.

À Madre María Antonia Azcune e ao Padre Pedro Paulo Alves dos Santos: sem a ajuda de ambos, não teria sido possível a minha permanência no Brasil, nem a realização desta tese.

Ao pessoal do GFT- Petrópolis e da CCP-CBPF em geral, meus amigos.

A Myriam Simões Coutinho, pela amabilidade e competência com que nos atende na CFC.

Ao pessoal da biblioteca, pela ajuda na procura de livros e papers, e pela gentileza com que nos tratam; em geral, a todos os funcionarios do CBPF. A Rosângela e Elisete pelo incansável apoio de secretaria.

Aos profesores do CBPF, pelos conhecimentos que me transmitiram.

Resumo

Investigamos diferentes modelos e suas conexões em três dimensões, estabelecendo novos resultados. O chamado Modelo Auto-Dual, introduzido por Townsend, Pilch e van Nieuwenhuizen, está conectado, por dualidade, ao modelo (Abeliano) topologicamente massivo (MCS); isto pode ser demonstrado na abordagem da Ação Mestra (AAM). Adaptamos esta prova às generalizações não-lineares deste modelo e, também, para o caso de um grupo de *gauge* não-Abeliano. Para este fim, revemos a AAM, combinando-a com um esquema perturbativo.

Por outro lado, estas teorias estão conectadas ao modelo de férmions interagentes (Modelo de Thirring), através da técnica de Bosonização. Também generalizamos esta técnica ao caso geral não-linear, obtendo uma forma manifesta para a correspondência com os modelos bosônicos. Finalmente, provamos que a maior parte desta estrutura pode ser *estendida a qualquer dimensionalidade*, a partir da introdução da noção de auto-dualidade em uma dimensão arbitrária, e para dubletes de formas de *gauge* com diferentes (arbitrários) ordens tensoriais. Esta é a nossa construção central.

Em um último passo, motivados pela possibilidade de um procedimento alternativo ao mecanismo de Higgs, propomos estender esta noção de auto-dualidade, em 4-dimensões, ao caso *não-Abeliano*, e assim, via dualidade, obter uma teoria topologicamente massiva viável e compatível com o espectro do Modelo Eletrofraco.

Abstract

We investigate a number of models and their connections in three dimensions , establishing new results. The so-called Self-Dual Model, introduced by Townsend, Pilch e van Nieuwenhuizen, is connected by duality, to the (Abelian) topologically massive model (MCS); this can be proven with the help of the Parent Action Approach (PAA). We adapt this proof to the non-linear generalizations of this model and furthermore, to the case of non-Abelian gauge groups. To carry out this task, we modify the PAA by combining it with a perturbative scheme.

On the other hand, these theories are connected to models of interacting fermions (Thirring Models), by means of the Bosonization procedure. We also generalize this technique to include arbitrary non-linearities and obtain an explicit form for a correspondence with the bosonic models. Finally, we show that most of this structure may be *extended to an arbitrary dimensionality*, by introducing the concept of self-duality in general dimensions to account for doublets of different gauge forms. This is our central achievement.

Motivated by the possibility of working out an alternative procedure to the Higgs mechanism, our last step is the extension of the idea of self duality to 4-dimensions, with a *non-Abelian* symmetry, and so, via duality, we may propose a suitable topologically massive gauge theory, consistent with the spectrum of the electroweak model.

Índice

Introdução

Vários mecanismos paradigmáticos e uma rica estrutura de correspondências aparecem nas teorias de campo em três dimensões, cuja extensão a dimensões mais altas, principalmente a 4D, seriam extremamente importantes para a Física de Partículas. Mencionemos, por exemplo, o mecanismo de massa topológica para grupos de gauge arbitrários, devido à necessidade de propor alternativas ao Modelo Padrão, que envolve o bóson de Higgs, ainda não detectado experimentalmente.

O ponto mais importante desta tese, que abre o caminho para construir esta generalização a dimensões superiores, é a proposta de definir a operação de dualidade em dimensão arbitrária, envolvendo formas de gauge de qualquer ordem, de tal forma que o vínculo de auto-(anti-auto)dualidade esteja bem definido.

Ao longo do nosso trabalho, oscilaremos entre as estruturas em três dimensões, a fim de enriquecê-las, e a correspondente extensão a dimensões mais altas, utilizando a mencionada proposta.

A equivalência efetiva entre modelos, uma vez que descrevem os mesmos fenômenos físicos, é também chamada, simplesmente, de Dualidade. Esta simetria tem um papel muito importante na Física atual. Diversos assuntos foram recentemente revistos à luz da dualidade [1, 2, 3, 4].

O conceito de dualidade pode ser usado para derivar resultados exatos (não-perturbativos), uma vez que as constantes de acoplamento se invertem sob a dualização, e se tem, assim, informação sobre os regimes de acoplamento forte e fraco de uma hipotética (não-perturbativa) teoria. Esta é uma caraterística invariável da dualidade.

Atualmente, este assunto encontra-se bem motivado [3]. O papel da dualidade na investigação de sistemas físicos é muito apreciada. Tem fundamental importância na compreensão de vários aspectos não-perturbativos das teorias de partículas e de objetos estendidos.

Esta "simetria da dualidade", fundamental no atual entendimento da Teoria de Campos, da Mecânica estatística e da
Teoria das Cordas, é um conceito geral, que relaciona quantidades físicas em diferentes regiões do espaço de parâmetros. Ela relaciona um modelo, num regime de acoplamento forte, a um outro, num regime de acoplamento fraco, fornecendo um mecanismo para investigar modelos que interagem fortemente.

A abordagem da AM [5] é uma das técnicas que permite mostrar, de forma manifesta, a dualidade (equivalência clássica) entre modelos físicos aparentemente diferentes. Nosso estudo terá especial ênfase neste procedimento.

Nos anos 80 [6], Deser e Jackiw desenvolveram a abordagem da AM , e provaram a dualidade que existe entre a chamada teoria Auto-Dual (AD) em três dimensões [7], de Townsend, Pilch e van Nieuwenhuizen, e o modelo topologicamente massivo de Maxwell-Chern-Simons (MCS). Mostraremos que, a partir da generalização da operação de dualidade aqui proposta, não há dificuldade operacional para se adaptar o procedimento a dimensões arbitrárias, estendendo-se esta adaptação a muitas outras técnicas já existentes em três dimensões, que permitem provar correspondências (dualidades) entre diversos modelos físicos.

Existe um outro tipo de correspondência, estabelecido mediante um procedimento conhecido como *Bosonização*.

A Bosonização é um mapeamento de uma teoria quântica de férmions em uma teoria equivalente de bósons interagentes. Esta técnica é crucial para o estudo das seguintes àreas e suas interrelações: Teoria Quântica de Campos e sistemas em Física da Matéria Condensada.

A bosonização é realizada, exatamente, em $1+1$ dimensões. Durante muito tempo, achou-se que isto fosse uma propriedade exclusiva desta dimensionalidade, onde o spin é ausente e não há uma distinção real entre bósons e férmions. No entanto, este mapeamento é possível também em três dimensões, embora de modo não-exato, e somente pode ser realizado para o setor de baixas energias de um sistema (auto-interagente) de férmions massivos. Polyakov [8] foi o primero a discutir este mapeamento, que mais tarde foi estendido por Deser e Redlich [9]. Estes autores discutiram a equivalência entre a ação efetiva eletromagnética do modelo CP^1 e a de um férmion massivo carregado, na ordem mais baixa na massa do férmion, seguindo as idéias da referência [8]. A discussão abrange também o contexto da transmutação de spin e estatística em três dimensões. Mostra-se que uma partícula escalar massiva, acoplada a um campo de *gauge* de Chern-Simons, torna-se um férmion de Dirac massivo para uma escolha apropriada do valor da constante de acoplamento de Chern-Simons. Como tal, esta transmutação Bose-Fermi é uma propriedade que vale para grandes distâncias (grandes comparadas com o comprimento de onda da partícula). Em termos de integral de caminho, esta propriedade vale para caminhos longos e "suaves". O procedimento de bosonização é muito promissor no entendimento da condutância de Hall em sistemas de férmions em autointeração [12].

Em três dimensões, a bosonização de um modelo de férmions massivos que interagem entre si, chamado modelo de Thirring, resulta, neste contexto, numa teoria bosônica AD, que, via correspondência AD-MCS, pode ser representado como uma teoria invariante de gauge. Isto foi posteriormente generalizado ao caso não-Abeliano por Fradkin e Schaposnick; o resultado da bosonização é, de novo, a versão não-Abeliana da teoria AD. No entanto, há dificuldades técnicas para se mostrar a equivalência dual entre este modelo e uma teoria de gauge (Yang-Mills-Chern-Simons (YMCS)), tal como acontece no caso Abeliano; e, também, para estabelecer uma identidade de bosonização que dualize o modelo de Thirring numa teoria de gauge.

Nosso trabalho está organizado da seguinte maneira: No Capítulo 1, introduzimos a noção de auto-dualidade em uma dimensão geral, definida para dubletes formados por diferentes formas de gauge [13, 14], já que este será o ponto de partida para a eventual extensão a qualquer dimensão. No Capítulo 2, voltamos a nos aprofundar nas teorias em 3d, na bosonização de sistemas fermiônicos muito gerais e na generalização da correspondência (Abeliana) AD-MCS a versões não-lineares destas teorias[16]. Estas estruturas são estendidas a uma dimensão D (considerando dubletos), com interessantes conseqüências novas abordadas no Capítulo 3. No Capítulo 4, lidaremos com o caso não-Abeliano (a correspondência AD-YMCS) em 3d, completando o programa de bosonização iniciado por Fradkin-Schaposnick [15]. Na última seção deste capítulo, discutimos a generalização desta estrutura para 4 dimensões; esta é uma promissora proposta inicial e encontra-se em andamento atualmente [17]. As conclusões finais são apresentadas no Capítulo 5.

Capítulo 1

Auto(anti-auto)-dualidade para p-formas em dimensões arbitrárias.

Freqüëntemente, afirma-se [1] que a operação de dualidade (tipo Hodge) está definida somente em espaços-tempo com dimensões pares, e que a auto-dualidade é restrita a teorias em que o espaço-tempo tem dimensão da forma $2(2n+1)$. O intuito deste capítulo é reavaliar e estender tanto a noção de simetria dual como a de auto-dualidade.

Considerando os dubletes tensoriais, introduzimos uma nova noção bem-definida de auto-dualidade, baseada na operação de dualidade tipo-Hodge, em dimensões arbitrárias e para qualquer ordem dos tensores.

Assim, uma Ação Auto-Dual generalizada é definida, e as equações de movimento são as ditas relações auto-duais generalizadas.

A estratégia, para isto, é examinar a estrutura implícita na definição da operação de dualidade e explorar suas liberdades, a fim de construir modelos auto- e anti-auto-duais de modo consistente[2].

Freqüentemente, define-se a operação DualidADe-Hodge (DH) pela contração pelo símbolo ϵ, totalmente anti-simétrico. Há, também, uma extensão desta operação em 2+1 dimensões *, proposta por Townsend, Pilch e van Nieuwenhuizen, que é basicamente um funcional (operADor) rotacional:

$$^*f_\mu = \frac{\chi}{m}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda}\,\partial^\nu f^\lambda\,, \tag{1.0.1}$$

onde m é uma constante que deixa a *-operação ADimensinal. Chamamos isto de DualidADe Diferencial de Hodge (DDH) e, em todos os casos, definimos *auto(anti-auto)-dualidade*, quando as relações $^*f = \pm f$ são (respectivamente) satisfeitas.

O chamado Modelo Auto-Dual (AD) [7, 11, 6] é dado pela seguinte ação,

$$S_{AD}(f) = \int d^3x\left(\frac{\chi}{2m}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda}\,f^\mu\,\partial^\nu f^\lambda - \frac{1}{2}\,f_\mu f^\mu\right). \tag{1.0.2}$$

A equação de movimento é a relação de auto-dualidade:

*E que tem a mesma forma em qualquer espaço-tempo com dimensão ímpar.

$$f_\mu = \frac{\chi}{m}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda}\,\partial^\nu f^\lambda\,, \tag{1.0.3}$$

Este modelo é dito "quiral", e a "quiralidade" $\chi = \pm 1$ é definida, precisamente, por esta auto-dualidade.

Há necessidade, na literatura, de uma boa definição da noção de auto (e anti-auto)-dualidade, do tipo Hodge, entre campos tensoriais com diferentes ordems. Este conceito é importante em si mesmo; pode ser usado, como já foi sugerido, para dar uma generalização formal da noção de "quiralidade".

A possibilidade da definição de auto-dualidade e, não meramente, da dualidade entre dois sistemas é criticamente importante também na análise de configurações topológicas; em particular, pode fornecer uma noção generalizada de ínstantons.

A questão que gostaríamos de resolver relaciona-se com a possibilidade de impor-se auto-dualidade em dimensões gerais. Isso será respondido afirmativamente, como será mostrado a seguir.

O problema pode ser melhor descrito assim:

Considere uma q-forma geral

$$F_{\mu_1\cdots\mu_q}. \tag{1.0.4}$$

O campo Hodge-dual é definido como,

$$^*F^{\mu_{q+1}\cdots\mu_d} = \frac{1}{q!}\,\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_d}F_{\mu_1\cdots\mu_q} \tag{1.0.5}$$

Note que, em princípio, somente em $d = 2q$ dimensões é possível definir-se auto-dualidade, desde que o campo de q-forma, F, tenha a mesma ordem que o seu dual. Este é o tipo de dualidade presente em teorias do tipo Maxwell, onde F é uma diferencial exata, isto é $F = df$ para uma $(q-1)$-forma, f.

Neste contexto, a equação de campo e a identidade de Bianchi, na ausência de fontes são, respectivamente:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{\mu_1} F^{\mu_1 \cdots \mu_q} \\ 0 &= \partial_{\mu_1} {}^*F^{\mu_1 \cdots \mu_q}. \end{aligned} \tag{1.0.6}$$

A equação de campo e a identidade de Bianchi são da mesma forma, de modo que a transformação dual $F \leftrightarrow {}^*F$ é uma simetria que, em geral, não está presente a nível dos campos tensoriais. A dependência com a dimensionalidade é crucial.

É bem conhecido o problema de se definir a dualidade de Hodge para todas as dimensões; por exemplo, no espaço-tempo quadri-dimensional de Lorentz, a principal obstrução para a auto-dualidade vem da relação de dupla-dualização para um tensor de ordem 2:

$$^{**}F = (-1)^s \, F \,, \tag{1.0.7}$$

onde s é a assinatura da métrica de Minkowski. Para o caso da métrica de Lorentz, onde s é um número ímpar, o conceito de autodualidade parece ser inconsistente com a operação de dupla dualização, devido ao sinal menos em (1.0.7). Este problema persiste para uma dimensionalidade da forma $d = 4m$ ($m \in Z_+$) [18] [19] [20], em contraste, esta ausente para $d = 4m - 2$.

Então, a auto-dualidade é dita ser bem-definida (somente) nesta dimensionalidade. A auto-dualidade presente em $d = 4m - 2$ dimensões atraiu grande atenção porque parece exercer um importante papel em muitos modelos teóricos [4]. A possibilidade discutida neste trabalho deve permitir a extensão destas aplicações.

Este capítulo será organizado da seguinte forma: na Seção 1.1 (seguinte), estas dificuldades e sua resolução são esclarecidas e a noção de dualidade é generalizada, permitindo que se construa uma ação generalizada manifestamente auto-dual; a seguir, na Seção 1.2, discutimos a relação desta ação com a chamada ação mestra, que interpola entre vários "pares" de modelos equivalentes (duais) [5]. Finalmente, na Seção 1.3, como uma aplicação, construímos a dualidade-Hodge em 2+1 dimensões, de maneira similar à teoria de Maxwell do Eletromagnetismo. Esta construção também é nova.

1.1 Generalização de DH (-DDH) e auto(anti-auto)-dualidade.

Com o intuito de desfazer a inconsistência entre a operação de dualidade e a condição de auto-dualidade, imposta pela presença do sinal de menos em (1.0.7), exploramos a existência de uma ambigüidade na operação dual dupla, proveniente do fato de que a operação de dualidade é um mapeamento do espaço de $d/2$-formas no seu co-espaço, $* : \Lambda_{(0,d/2)} \rightarrow \Lambda_{(d/2,0)}$, sendo que o mapeamento inverso não está automaticamente definido. Isto deixa algum espaço para alternativas diferentes, com interessantes consequências. Primeiro, lembremos que (1.0.7) levou ao julgamento de que a teoria de Maxwell não possuiria soluções auto-duais manifestas. A solução para este obstáculo veio com o reconhecimento de uma estrutura bi-dimensional interna oculta nos espaços de potenciais. Transformações neste espaço de dualidade interna estendem o conceito de auto-dualidade para este caso e é normalmente conhecido pelos nomes de Schwarz e Sen[22]; este conceito profundamente unificador também foi apreciado por outros [23, 24]. As ações obtidas correspondem às representações auto-dual e anti-auto-dual de uma dada teoria, e faz uso do conceito de espaço interno. A operação de dualidade agora, é definida para incluir o índice bi-dimensional interno (α, β):

$$\tilde{F}^{\alpha} = e^{\alpha\beta}\, {}^{*}F^{\beta}\,, \tag{1.1.8}$$

onde a matriz 2×2, e, depende da assinatura e dimensão do espaço-tempo como abaixo:

$$e^{\alpha\beta} = \begin{cases} \sigma_1^{\alpha\beta}, & \text{if } d = 4m - 2 \\ \epsilon^{\alpha\beta}, & \text{if } d = 4m, \end{cases} \tag{1.1.9}$$

com $\sigma_1^{\alpha\beta}$ sendo a primeira das matrizes de Pauli e $\epsilon^{\alpha\beta}$, uma matriz-2×2 totalmente antisimétrica com $\epsilon^{1,2} = 1$.

A operação de dupla dualização,

$$\hat{\hat{F}} = F, \tag{1.1.10}$$

generaliza (1.0.7) para permitir a consistência com a auto-dualidade. Na referência [25], mostra-se como a prescrição (1.1.8) funciona na construção de ações de Maxwell auto-duais. A maioria das discussões sobre transformações duais, vistas como simetrias para ações, e a existência de auto-dualidade são baseadas nestes conceitos.

É bom ressaltar que, até agora, esta estrutura sempre foi definida apenas para objetos tensoriais onde o campo tem a mesma ordem tensorial que seu correspondente dual.

Agora, generalizamos estas idéias, introduzindo dubletes mais gerais. Este conceito é novo e constitui nossa contribuição principal neste capítulo.

Os problemas de consistência descritos acima podem ser evitados com a dualidade-Hodge (DH) e uma dualidade diferencial-Hodge (DDH), para dubletes tensoriais numa forma matricial. Seja uma p-forma (um tensor totalmente anti-smétrico do tipo $(0;p)$) num espaço-tempo d-dimensional com assinatura s †, $f_{\mu_1,\ldots,\mu_p}$; um parceiro natural poderia ser qualquer $((d-p);0)$-tensor, $g_{\mu_1,\ldots,\mu_{d-p}}$. Construímos, assim, o dublete de tensores $F := (f,g)$.

Dualidade de Hodge (DH):

Definamos agora a operação-Hodge *generalizada* ‡ $(^*())$ para este objeto,

---

† i.e, este é o número de sinais menos que ocorrem na métrica

‡ Para conveniência notacional, a fim de evitar índices explícitos, nas linhas seguintes,

pela regra:

$$ {}^*F := ({}^*g\,,\, S^*f), \tag{1.1.11} $$

onde

$$ ({}^*f)^{\mu_{p+1}\cdots\mu_d} = \frac{1}{p!}\,\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_d} f_{\mu_1\cdots\mu_p}\,, \tag{1.1.12} $$

e S é um número definido pela dupla dualização:

$$ {}^*({}^*f) = Sf\,. \tag{1.1.13} $$

Isso depende da assinatura (s) e da dimensão do espaço-tempo na forma $S = (-1)^{s+p[d-p]}$, que claramente inclui o caso $p = d/2$ descrito acima.

Esta auto (anti-auto)-dualidade *é bem definida*, desde que

$$ {}^*F = \pm F \tag{1.1.14} $$

seja consistente com o requerimento de dupla dualização, ${}^*({}^*F) = F$.

Dualidade Diferencial de Hodge (DDH):

Além disso, a DDH também pode ser definida da seguinte maneira: consideremos dubletes $F = (f_{\mu_1,\ldots,\mu_p}; g_{\mu_1,\ldots,\mu_{d-p-1}})$; então, em termo de formas, DDH é definida como

$$ {}^*F \equiv K^{-1}\,{}^*dF\,, \tag{1.1.15} $$

onde $d(f,g) = (df, dg)$ e a matriz $K = diag[k_f; k_g]$, que pode ser considerada

---

desconsideramos que a operação de dualidade deve ser definida como um mapeamento de um espaço no seu co-espaço.

diagonal por simplicidade, é introduzida por razões dimensionais [§].

Portanto, auto (anti-auto)-dualidade está também bem-definida neste caso, desde que as relações

$$^{\star}F = \pm F \tag{1.1.16}$$

possam ser consistentes com o requerimento de dupla dualização, $^{\star}(^{\star}F) = F$.

A relação de autodualidade, neste caso é lida como

$$F = (\chi K^{-1})\ ^{\star}dF, \tag{1.1.17}$$

onde $\chi = \pm 1$. Como pode ser trivialmente verificado, a consistência de auto-dualidade requer que F satisfaça à equação de Proca com massa $m = \sqrt{|k_f k_g|}$. De fato, aplicando uma vez mais o operador * em (1.1.17), temos:

$$[\partial^2 + m^2]F = 0. \tag{1.1.18}$$

O próximo passo é obter uma ação que expresse a auto-dualidade neste sentido generalizado. Então, fornecemos a ação abaixo, que é um Modelo Auto-Dual *generalizado* (AD-gen) em d dimensões [¶] :

$$\mathcal{S}_{AD-gen}[F] = \int d^dx \left(\frac{\chi}{2} F \ .\ ^{\star}dF + \frac{1}{2} F\ K\ F \right) \quad . \tag{1.1.19}$$

[§] i.e k_f e k_g devem ter dimensão de massa e o sinal relativo apropriado.

[¶] O duplo produto interno de pares "." é naturalmente dado por $(f,g).(f',g') \equiv f_{\mu_1\cdots\mu_p} f'^{\mu_1\cdots\mu_p} + g_{\mu_1\cdots\mu_q} g'^{\mu_1\cdots\mu_q}$, onde f, f' são quaisquer p-formas, e g, g' quaisquer q-formas.

Este é um objeto central neste trabalho. É direto se observar que as equações de movimento são, precisamente, as relações de auto-dualidade (1.1.17).

Esta ação assemelha-se à ação AD em três dimensões, Eq. (1.0.2), e aqui reside sua maior importância, já que a estrutura destas teorias (em 2+1) pode ser estendida naturalmente para dimensões arbitrárias. Resultados baseados neste assunto, no contexto de teorias topologicamente massivas, [14], e bosonização em dimensões generalizadas [8], estão descritos nos próximos capítulos.

Além disso, como mostraremos abaixo, podemos obter (tomando ou não, limites apropriados das constantes $(k_f; k_g)$), ações que determinam de forma manifesta alguma correspondência dual entre entre modelos de aparência diferente. Isto é, para diferentes fixações da matriz K, a ação (1.1.19) tipicamente fornece uma Ação Mestra que revela importantes dualidades (ver [5] e suas referências).

1.2 Ações Mestras a partir do Modelo AD-gen.

Como foi motivado, nesta seção iremos argumentar que muitas das ações mestras que descrevem dualidade entre modelos fisicamente relevantes podem ser obtidas a partir do AD-GEN, por uma fixação diferente do dublete tensorial, e a matriz de acoplamentos K. No final, uma hipótese baseada neste fato comum será enunciada.

Uma rica estrutura de dualidades emerge desta elegante análise. Dependendo dos K-parâmetros que tomamos, algumas conseqüências são obtidas. Por exemplo, se $k_g = k_f = 0$, obtemos uma teoria topológica. Se, em contraste, K é não-singular, esta será a ação mestra entre dois modelos de Procca, para ambos f e g. Mostraremos isto mais tarde.

Um caso particularmente interessante é obtido considerando somente $k_g = 0$ (ou $k_f = 0$). Este modelo reflete uma espécie de semi-auto-dualidade, como devemos mostrar, e nos fornece a ação mestra entre modelos de gauge não-massivos. Ilustraremos este resultado através de um exemplo simples e, na subseção seguinte, daremos uma prova geral. Tudo isto será útil, nesta parte inicial da tese, com o objetivo de introduzir o leitor à abordagem de Ações Mestras.

Exemplo: Dualidade Escalar-Tensor.

Este é um exemplo de dualidade entre dois sistemas descritos por campos não-massivos de diferentes tipos tensoriais. De acordo com nossa prescrição, devemos mostrar que auto-dualidade não pode ser definida para este sistema; no seu lugar, aparece um vínculo entre os campos, que resulta em um limite apropriado da matriz K (singular), cuja ação é precisamente a ação mestra para este problema. Este exemplo foi discutido de uma forma bastante ilustrativa por Hjelmeland e Lindström[5]:

Considere a ação para o campo de Klein-Gordon livre e sem massa, ϕ, em $d = 4$:

$$S(\phi) = \frac{1}{2}\int d^4x \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \,. \tag{1.2.20}$$

A equação de campo e a identidade de Bianchi, são, respetivamente :

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi \;=\; 0 \tag{1.2.21}$$

$$\partial_\mu {}^*\phi^{\mu\nu\rho}(\phi) \;=\; 0\,, \tag{1.2.22}$$

onde ${}^*\phi^{\mu\nu\rho} \equiv \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\sigma\phi$.

Por outro lado, a ação para uma 2-forma livre e sem massa, $A_{\mu\nu}$, é

$$S(A) = \frac{1}{3!}\int d^4x \partial_{[\mu}A_{\nu\rho]}\partial^{[\mu}A^{\nu\rho]}\,. \tag{1.2.23}$$

Agora, escrevamos a identidade de Bianchi e as equações de campo, respectivamente:

$$\partial_\mu {}^*A^\mu \;=\; 0 \tag{1.2.24}$$

$$\partial_\mu \partial^{[\mu}A^{\nu\rho]} \;=\; 0\,, \tag{1.2.25}$$

onde ${}^*A^\mu \equiv \frac{1}{3!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_{\nu\rho}$.

O ponto principal é que a equação de campo para o campo livre de Klein-Gordon aparece como a identidade de Bianchi para o campo anti-simétrico livre, e vice-versa.

A mudança de uma descrição para outra troca os papéis das equações de campo e as identidades de Bianchi. No nível clássico, existem dois modelos representando a mesma física. Para mostrar isto explicitamente, costuma-se introduzir a chamada *ação mestra*:

$$S_p(F_{\mu\nu\rho}, \phi) = \frac{1}{3!}\int d^4x \left(F_{\mu\nu\rho}F^{\mu\nu\rho} + \sqrt{2}\phi\partial_\mu {}^*F^\mu\right), \tag{1.2.26}$$

onde ϕ e $F_{\mu\nu\rho}$ são campos independentes. Variando esta ação com respeito a ϕ, temos:

$$0 = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu F_{\nu\rho\sigma}. \tag{1.2.27}$$

Portanto, existe um campo de 2-forma, $A_{\rho\sigma}$, tal que $F_{\nu\rho\sigma} = \partial_{[\nu}A_{\rho\sigma]}$. Pondo isto de volta na ação, (1.2.26), recuperamos a ação (1.2.23).

Logo, temos que (1.2.26) equivale (classicamente) a (1.2.23).

A substituição de soluções nas equações de campo da ação mestra requer que a consistência ao nível de equações de movimento seja verificada; no entanto, isso não é um sério problema neste caso, e a equivalência (*on-shell*) entre a ação mestra e (1.2.23) é verificada.

Agora, a fim de mostrar que (1.2.26) também é equivalente a (1.2.20), variemos (1.2.26) com respeito a $F_{\mu\nu\rho}$; logo:

$$F^{\mu\nu\rho} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\rho\kappa}\partial_\kappa\phi. \tag{1.2.28}$$

Substituindo este resultado em $S_p(F,\phi)$ obtemos

$$S_p(F[\phi],\phi) = S(\phi) = \frac{1}{2}\int d^4x \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi. \tag{1.2.29}$$

Mostramos, usando ação mestra, que $S(\phi)$ e $S(A)$ são duais entre si; as duas ações descrevem o mesmo sistema físico, mas a representação é dada utilizando diferentes campos.

De acordo com a estrutura de dubletes apresentada na seção precedente, definamos o dublete $\mathcal{F} = (\phi, F)$; e as relações de auto-dualidade para este sistema podem ser descritas por duas equações simultâneas:

$$F^{\mu\nu\rho} = -\frac{1}{k_F}\epsilon^{\mu\nu\rho\kappa}\partial_\kappa\phi, \tag{1.2.30}$$

$$\phi = \frac{1}{k_\phi}\epsilon^{\mu\nu\rho\kappa}\partial_\kappa F_{\mu\nu\rho}, \tag{1.2.31}$$

as quais podem ser derivadas de uma teoria com a foma AD-gen (Equação (1.1.19)),

$$S_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}) = \int d^4x \mathcal{F}[.^*d + K]\mathcal{F}, \tag{1.2.32}$$

onde $K = diag(k_F; k_\phi)$. Todavia, se tomarmos $k_\phi = 0$ e $k_F = \sqrt{2}$, claramente obteremos relações,

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{\mu\nu\rho\kappa}\partial_\kappa\phi = F^{\mu\nu\rho}, \tag{1.2.33}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\kappa}\partial_\kappa F_{\mu\nu\rho} = 0, \tag{1.2.34}$$

$$
\begin{tikzcd}
& S_{\mathcal{F}} \arrow[dl, "\delta F_{\mu\nu\rho}"'] \arrow[dr, "\delta\phi"] & \\
S(\phi) \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{dualidade}"'] & & S(A)
\end{tikzcd}
$$

Figura 1.1:

ao invés de (1.2.30) e (1.2.31), as quais pode ser interpretada como uma espécie de semi-AD. De fato, a ação (1.2.32) nos dita a forma da ação mestra:

$$
\begin{aligned}
S_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}) &= \int d^4x \left(F_{\mu\nu\rho}\sqrt{2}F^{\mu\nu\rho} + \phi\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}\partial_\mu F_{\nu\rho\alpha} - F_{\nu\rho\alpha}\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}\partial_\mu\phi \right) \\
&\equiv \frac{3}{\sqrt{2}} S_p(F_{\mu\nu\rho}, \phi). \qquad (1.2.35)
\end{aligned}
$$

Esta estrutura é ilustrada na Fig.1.1.

Por outro lado, notadamente obtemos a ação mestra (1.2.26). Ações mestras não são únicas, assim como os dubletes possíveis numa dada dimensão.

Abaixo, mostramos que, em quatro dimensões, um outro dublete pode ser escolhido: $\mathcal{G} = (A_{\nu\rho}, f_\mu)$, resultando na mesma dualidade.

Logo, tomando $k_f = \frac{1}{\sqrt{2}}; k_A = 0$, a outra ação mestra, que também mostra que S_ϕ e S_A são duais entre si, lê-se como segue:

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}) &= \int d^4x \mathcal{G}[.^*d + K]\mathcal{G} \\ &= \int d^4x \left(\mathcal{G}\, .^*d\mathcal{G} + \frac{1}{\sqrt{2}} f_\mu f^\mu \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^4x \left(\frac{1}{2} f_\mu f^\mu + \sqrt{2} A_{\mu\nu} \epsilon^{\rho\mu\nu\sigma} \partial_\rho f_\sigma \right) , \end{aligned} \qquad (1.2.36)$$

onde f e A são campos independentes.

Variando esta ação com respeito a $A_{\mu\nu}$, obtemos

$$0 = \epsilon^{\rho\mu\nu\sigma} \partial_\rho f_\sigma. \qquad (1.2.37)$$

De novo, isto implica que existe um campo escalar ϕ (pelo menos, localmente) tal que $f_\mu = \partial_\mu \phi$

Substituindo esta expressão em (1.2.36), obtemos:

$$S_{\mathcal{G}} = \frac{1}{\sqrt{2}} S(\phi). \qquad (1.2.38)$$

Variando agora a ação mestra com respeito a f_μ,

$$f^\mu = -\sqrt{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu A_{\rho\sigma}. \qquad (1.2.39)$$

$$\begin{tikzcd} & S_{\mathcal{G}} \arrow[dl, "\delta A_{\mu\nu}"'] \arrow[dr, "\delta f_\mu"] & \\ S(\phi) \arrow[rr, leftrightarrow, "\textbf{dualidade}"'] & & S(A) \end{tikzcd}$$

Figura 1.2:

Pondo este resultado de novo em $S_{F,A}$, tem-se

$$S_{\mathcal{G}}(f[A], A) = \frac{1}{\sqrt{2}} S(A) = \frac{1}{3!\sqrt{2}} \int d^4x \partial_{[\mu} A_{\nu\rho]} \partial^{[\mu} A^{\nu\rho]}. \tag{1.2.40}$$

Esta equivalência dual é ilustrada na Figura 1.2. Referimo-nos a estes modelos como do tipo-Maxwell, porque suas ações têm a forma $S(f) \sim \int (df)^2$, são não-massivas invariantes de gauge. Como veremos detalhadamente a seguir, ações semi-auto-duais, com dualidade DDH, descrevem dualidades entre estes tipo de teorias em geral.

Outra dualidade importante, envolvendo o outro possível dublete $\mathcal{G}$ deve ser discutida. A ação (1.2.36), com K não-singular, dada por

$$S(\mathcal{G}) = \int d^4x \left(\frac{m}{6} f_\sigma \epsilon^{\sigma\rho\mu\nu} \partial_{[\rho} A_{\mu\nu]} + \frac{m^2}{2} f_\sigma f^\sigma - \frac{m^2}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} \right), \qquad (1.2.41)$$

também revela a conexão entre o modelo de Proca,

$$S_{Proca} = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \partial_{[\rho} f_{\mu]} \partial^{[\rho} f^{\mu]} + m^2 f_\mu f^\mu \right), \qquad (1.2.42)$$

e o modelo de Kalb-Ramond [21], cuja ação é dada por,

$$S_{K-R} = \int d^4x \left(\frac{1}{6} \partial_{[\rho} A_{\mu\nu]} \partial^{[\rho} A^{\mu\nu]} - \frac{1}{6} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} \right). \qquad (1.2.43)$$

Observemos, finalmente, que a ação (1.2.41) é manifestamente *auto-dual* para o objeto $\mathcal{G}$.

1.3 Semi-Auto-Dualidade e teorias do tipo-Maxwell.

Um sistema será dito ser Semi-Auto-Dual se

$$^*dF = \chi K P_i F, \qquad (1.3.44)$$

onde $P_i; i = 1, 2.$ representam os dois projetores sobre o espaço interno bi-dimensional (o espaço de dubletes).

Estas relações podem ser derivadas a partir de uma ação AD quando a matriz de massa é singular, de maneira que $k_{j\neq i} = 0$. Considere o dublete (f, g); logo, esta ação é[||]:

$$L_p = F\,.{}^*dF + k_g g^2. \tag{1.3.45}$$

Agora, devemos mostrar que esta ação constitui uma Ação Mestra que interpola entre duas teorias de campo tipo-Maxwell (não massivas). Sem perder generalidade, tomemos $k_g = 1$.

Se variarmos a Ação Mestra com respeito a g, as equações de movimento para (1.3.45) serão:

$${}^*df = g\,. \tag{1.3.46}$$

Integrando por partes a Ação Metsra, tem-se:

$$L_p = g\,{}^*df + Sf\,{}^*dg + g^2 = [1 - S]g\,{}^*df + g^2 + \text{D.T.}, \tag{1.3.47}$$

onde $D.T.$ significa "divergência total". Substituindo por (1.3.46), obtemos finalmente:

$$L_p(F) = [2S - 1](df)^2 + \text{D.T.}. \tag{1.3.48}$$

Por outro lado, se variarmos com respeito a f:

$${}^*dg = 0; \tag{1.3.49}$$

[||]Tomamos por exemplo, $k_1 = k_f = 0$.

como conseqüência disto, existe $\bar{g}$ tal que

$$g = d\bar{g}. \tag{1.3.50}$$

Integrando por partes mais uma vez (no sentido oposto) :

$$L_p = g\,{}^*df - Sf\,{}^*dg + g^2 = [S-1]f\,{}^*dg + g^2 + \text{D.T.}. \tag{1.3.51}$$

A AM pode ser expressa como uma função de $\bar{g}$. Substituindo aqui pela equação de movimento (1.3.49) e (1.3.50), temos:

$$L_p = (d\bar{g})^2 + \text{D.T.}. \tag{1.3.52}$$

Isto mostra a dualidade entre dois modelos tipo-Maxwell, (1.3.48) e (1.3.52), obtendo, *on-shell*, as duas ações duais:

$$L_p(F(f)) = [2S-1][df]^2, \tag{1.3.53}$$

e

$$L_p(F(\bar{g})) = [d\bar{g}]^2 \tag{1.3.54}$$

Alternativamente, tomando $k_g = 0$ (e não k_f), o resultado é outra dualidade entre dois modelos (também tipo-Maxwell) para os campos g e $\bar{f}$, onde $f = d\bar{f}$

1.4 Equivalência dual entre modelos de Proca

Considere nossa AM dada por (1.1.19), com matriz não-singular, K. Ao tomar a variação com respeito a f, obtemos:

$$^{*}df = k_g g; \tag{1.4.55}$$

logo, aplicando * a ambos lados desta equação,

$$df = Sk_g {}^{*}g. \tag{1.4.56}$$

Substituindo (1.4.55) e (1.4.56) na ação, o resultado final é

$$L(f, g[f]) = \frac{2S-1}{k_g} df^2 + k_f f^2. \tag{1.4.57}$$

Da variação com respeito a g, obtém-se

$$L(g, f[g]) = \frac{2S-1}{k_f} dg^2 + k_g^2 g^2. \tag{1.4.58}$$

Isto constitui, a partir da teoria (??), a prova da equivalência dual entre duas teorias explicitamente massivas de tipo Proca.

1.5 Uma Hipótese

Motivados por todos estes fatos, podemos sugerir a seguinte hipótese [13]:

"Toda Ação Mestra que interpola entre dois modelos duais, descreve algum vínculo explícito de autodualidade" ; em outras palavras, toda dualidade no nível das ações clássicas está associada a algum manifesto vínculo (de dualidade) entre os campos envolvidos nestas ações.

1.6 (2+1)-dimensões: Teoria de Maxwell e DH manifesta.

Evidentemente, DDH parece ser mais interessante por possuir incidência na dinâmica das teorias. No entanto, a estrutura de dubletes permite-nos formular DH em algumas dimensões em que isto parecia não ser permitido. Por exemplo, a dualidade Eletrico-Magnética em três dimensões. Assim, com o intuito de mostrar uma das muitas possíveis aplicações da estrutura de dubletes, vamos descrever brevemente DH em 3D, a qual seria a versão tri-dimensional da dualidade Elétrico-Magnética. Isto também já foi discutido em outros contextos [20, 25].

Como mencionamos na Introdução em relação à equação (1.0.5), auto-dualidade de Hodge em (2+1)-dimensões está mal definida, a menos que usemos dubletes de diferentes ordens tensoriais, como veremos abaixo; caso contrário, podemos trabalhar meramente com a já conhecida DDH, descrita pela ação (1.0.2).

Consideremos a teoria de Maxwell em três dimensões:

$$S = \int dx^3 \mathcal{F}^2 \,, \tag{1.6.59}$$

onde $\mathcal{F}$ é um dublete,

$$\mathcal{F} = (F_{\mu\nu}; f_\rho), \tag{1.6.60}$$

sendo $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$ e $\mathcal{A} = (A_\mu; a)$.

Note que este é o único dublete que pode ser escolhido tal que suas componentes sejam a diferencial de algum campo-potencial.

Agora, a auto-dualidade (DH) é bem-definida **:

$$\mathcal{F} = {}^*\mathcal{F}, \tag{1.6.61}$$

isto significa que as duas relações simultâneas

$$f_\rho = \epsilon_{\mu\nu\rho} F^{\mu\nu}, \tag{1.6.62}$$

$$F_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho} f^\rho, \tag{1.6.63}$$

são satisfeitas.

As partes Elétrica e Magnética, para ambos f, F, podem ser definidas na forma usual e as relações (1.6.62) e (1.6.63) conectam uma com a outra.

**Em (2+1)-dimensões, a métrica possui dois sinais de menos, logo $S = 1$.

As equações de movimento (1.6.59) lêem-se

$$div\mathcal{F} = 0. \tag{1.6.64}$$

Como conseqüência das relações DH, (1.6.62) e (1.6.63), uma destas (duas) equações resulta ser uma *identidade* (a identidade de Bianchi). Contudo, essas relações DH não emergem da ação como conseqüência das equações de movimento.

A fim de tornar esta dualidade manifesta, novamente podemos usar nossa DH e redefinir a estrutura de dublete como sendo do tipo potencial-campo.

Tomemos

$$\mathcal{B} = (a, F_{\mu\nu})\,; \tag{1.6.65}$$

devemos mostrar que esta teoria pode ser descrita por uma ação semi-auto-dual (uma vez mais), incluindo relações auto-duais.

A ação semi-AD proposta é

$$S = \int d^3x \,(\mathcal{B}\,.^{*}d\mathcal{B} + F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\,, \tag{1.6.66}$$

e as equações de movimento são

$$F_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho}\partial^{\rho}a \tag{1.6.67}$$

e

$$\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial^{\rho}F^{\mu\nu}=0. \tag{1.6.68}$$

O que implica que $divF=0$ e que existe A_μ tal que $F_{\mu\nu}=\partial_{[\mu}A_{\nu]}$; então, definindo $f_\mu=\partial_\mu a$, a partir de (1.6.67), obtemos:

$$f_\rho=\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial^{\nu}A^{\rho}, \tag{1.6.69}$$

e, logo, $divf=0$. As equações de movimento (1.6.64) são verificadas e as DH-relações são recuperadas (equações (1.6.67) e (1.6.69)).

Em quatro dimensões, esta construção é mais óbvia, já que é possível definir um dublete de tensores de Maxwell e a correspondente auto-dualidade DH [22, 23, 24]; e, além disso, *DDH também pode ser definido* em quatro dimensões. Realizações em quatro dimensões com DDH manifesta são precisamente as ações $S_{\mathcal{F}}$ e $S_{\mathcal{G}}$ (com K genérico), discutidas na Seção 1.2. Em [21, 27, 28], é discutida a equivalência destes modelos com a eletrodinâmica de Proca e teorias de Kalb-Ramond massivas.

Capítulo 2

Bosonização em três dimensões, teorias de gauge não-lineares e auto-dualidade.

A dualidade possui uma importância fundamental para o nosso entendimento de vários aspectos não-perturbativos das teorias de partículas puntiformes e das teorias de cordas.

Há alguns anos atrás [6], Deser and Jackiw desenvolveram uma abordagem via ação mestra [5] e mostraram a dualidade entre a chamada teoria auto-dual (AD)[7] em três dimensões e a teoria topologicamente massiva de gauge, referida aquí como Maxwell-Chern-Simons (MCS). Além disso, foi mostrado [10] que o modelo AD está relaciondo, através da técnica de bosonização, ao modelo de Thirring,

$$S^{(ferm)}(\psi,\bar{\psi}) \equiv \int d^3x \left(\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - \frac{g^2}{2} j^\mu j_\mu \right), \qquad j^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \qquad (2.0.1)$$

Por sua vez a bosonização é o mapeamento entre uma teoria de campos quânticos para férmions que interagem e uma teoria equivalente para bósons que também interagem.

Recentemente, Tripathy e Khare [37] consideraram uma modificação deste modelo, substituindo o termo de Maxwell por $\sqrt{1-F^2}$, a densidade Lagrangeana de Born-Infeld [38]. A bosonização e correspondências duais desta versão topologicamente massiva, a teoria Born-Infeld-Chern-Simons [39, 40], foram recentemente estudadas, uma vez que estas teorias aparecem no contexto das Dp-branas [41]; cujas dinâmicas são descritas pelas ações de Born-Infeld-Chern-Simmons em $d = (p+1)$ dimensões.

Em particular, a D2-brana é descrita pelo modelo 3d-Born-Infeld-Chern-Simons. Este fato pode ser uma boa motivação para investigar tanto as generalizações destes modelos em dimesões arbitrárias (d) como as não-linearidades mais gerais (funções arbitrárias do quadrado do "field-strength"). Este é o objetivo principal desta seção, o qual será alcançado quando aplicarmos as idéias explicadas no capítulo anterior.

Este capítulo está organizado como explicado a seguir:
na Seção 2, apresentamos uma breve revisão de bonização em três dimensões num modelo AD e a dualidade AD-MCS. Na Seção 3, generalizamos para o

caso de não-linearidades arbitrárias no termo de Maxwell: mostramos que isto sempre equivale a um modelo AD no sentido geral, e encontramos uma expressão que relaciona as teorias desta correspondência. A seguir, utilizamos um procedimento direto para bosonizar um modelo Thirring genérico com acoplamento corrente-corrente arbitrário e conectá-lo à não-linearidade de suas representações bosônicas.

2.1 Uma Breve Revisão Introdutória.

Vamos brevemente revisar como o setor de baixas energias de uma teoria de férmions massivos, eletricamente carregados e auto-interagintes (o modelo de Thirring massivo) em $(2+1)$-dimensões pode ser bosonizado numa teoria de gauge, a teoria de Maxwell-Chern-Simons [6, 10]. Primeiramente, iremos mostrar a bem-conhecida dualidade AD-MCS. Esta estrutura será o modelo que tentaremos, ao longo da tese, generalizar em vários sentidos.

Dualidade AD-MCS:

Como visto no capítulo anterior, em 2+1-dimensões, define-se a operação de dualidade por,

$$^{\star}a_{\mu} = \frac{\chi}{m}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda}\,\partial^{\nu}a^{\lambda}\,, \qquad (2.1.2)$$

onde m é um parâmetro que serve para definir a operação, $\star$, sem unidades. Refere-se à *auto(anti-auto)-dualidade*, quando as relações $^{\star}a = \pm a$, são satisfeitas.

Estas são as equações do chamado modelo AD (Townsend, Pilch e van

Nieuwenhuizen [7]), descrito pela seguinte ação,

$$S_{AD}(a) = \int d^3x \left(\frac{\chi}{2m} \epsilon_{\mu\nu\lambda} a^\mu \partial^\nu a^\lambda - \frac{1}{2} a_\mu a^\mu \right); \qquad (2.1.3)$$

suas equações de movimento são, de fato, estas relações de auto-dualidade:

$$a_\mu = \frac{\chi}{m} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\nu a^\lambda . \qquad (2.1.4)$$

Por outro lado, tem-se a combinação invariante de gauge de um termo de Maxwell e uma ação de Chern-Simons, a chamada teoria de Maxwell-Chern-Simons (MCS)

$$S_{MCS}[A] = \int d^3x \left(\frac{1}{4m^2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\chi}{2m} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda \right). \qquad (2.1.5)$$

Esta é uma teoria topologicamente massiva, equivalente ao modelo AD (2.1.3), como é bem conhecido [6]. O tensor de campo (de Maxwell), $F_{\mu\nu}$, é,

$$F_{\mu\nu}[A] \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]} . \qquad (2.1.6)$$

Esta equivalência pode ser verificada com a abordagem de AM [5]. Escrevamos a AM proposta por Deser e Jackiw em [6] para provar esta equivalência:

$$\mathcal{S}_{Mestra}[A, a] = \chi\, \mathcal{S}_{CS}[A] - \int d^3x \left[\epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda}[A] a_\mu + m\, a_\mu a^\mu \right], \qquad (2.1.7)$$

onde

$$\mathcal{S}_{CS}[A] \equiv \int d^3x \, \epsilon^{\mu\nu\lambda} \left(A_\mu \partial_\nu A_\lambda \right), \tag{2.1.8}$$

é a ação de Chern-Simons [11]*.

Bosonização e correspondência Thirring-MCS:

Por outro lado, a função de partição fermiônica (no espaço Euclideano) para o modelo de Thirring tridimensional é lida por:

$$Z^{(ferm)} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \; e^{-\int \left(\bar{\psi}(\not{\partial}+m)\psi - \frac{g^2}{2} j^\mu j_\mu \right) d^3x}, \tag{2.1.11}$$

com a constante de acoplamento g^2 tendo dimensões de inverso da massa, e m é a massa do férmion.

É bem conhecido que este modelo pode ser bosonizado no modelo AD [10],

$$Z^{(ferm)} \approx Z^{AD}, \tag{2.1.12}$$

no limite de baixas energias.

Então, devido à equivalência entre (2.1.3) e (2.1.5), podemos estabelecer

*De fato, variando esta com respeito a f, e eliminando também f da ação por utilizar a equação de movimento, recupera-se $S_{AD}(a^\mu)$. Variando $\mathcal{S}_{Mestra}$ com respeito a a, obtemos

$$a^\mu = -\frac{1}{2m} \epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda}[A]; \tag{2.1.9}$$

pondo isto de novo em (2.1.7), e usando

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha} \epsilon_{\mu\nu\lambda} = 2\, \delta^\alpha_\lambda, \tag{2.1.10}$$

recuperamos a ação MCS, Eq.(2.1.5).

a seguinte identidade de bosonização:

$$Z^{(ferm)} \approx Z^{MCS}. \tag{2.1.13}$$

Esta equação, juntamente com (2.1.12) as duas conectadas pela dualidade AD-MCS (2.1.7) constituem o objeto do trabalho apresentado a partir deste capítulo. A nossa principal proposta é estudar as generalizações desta estrutura ao longo de três grandes linhas *independentes*:

- para modelos do tipo-Thirring, com forma arbitrária para o acoplamento corrente-corrente: deve-se obter uma regra de correspondência com AD (não-linear) e teorias de gauge que são versões não-lineares de MCS.

- para dimensões arbitrárias: modelos fermiônicos do tipo-Thirring em d-dimensões, correspondem a teorias topologicamente massivas, tal como em 3d †. E por último,

- para o caso não-Abeliano.

Claramente, todas estas linhas de generalização podem ser compostas umas com a outras.

---

†Em dimensão geral, o campo de gauge Abeliano generaliza-se a um par ordenado de campos (formas).

2.2 Dualidade entre AD-não-Linear e Modelos de Gauge em 3d.

Nesta Seção, vamos generalizar a correspondência AD-MCS para o caso de existirem não-linearidades arbitrárias no modelo. Mostraremos que o modelo de gauge, com não-linearidade dada por uma função $U(F^2)$[‡],

$$S_{U(F^2)}[A] = \int d^3x \left(U(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) - \chi\, \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda \right), \tag{2.2.14}$$

corresponde ao, também geral, modelo AD não-linear, com não-linearidade dada por um potencial $V(a^2)$:

$$\mathcal{S}_{V(a^2)}[a] = \int d^3x \, \left(V\left(a_\mu a^\mu\right) - \chi \mathcal{S}_{CS}[a] \right) , \tag{2.2.15}$$

a qual é a versão não-linear da teoria AD introduzida na ref. [7]. Vamos nos referir a esta teoria como Modelo Auto-Dual Não-Linear.

É de utilidade verificar brevemente por que as propriedades de auto-dualidade podem ser atribuídas a este modelo. As equações de movimento derivadas desde Eq.(2.2.15) são dadas por

$$a_\mu = \frac{\chi}{2\,V'}\, \epsilon_{\mu\nu\lambda}\, \partial^\nu a^\lambda \, , \tag{2.2.16}$$

onde a linha denota uma derivada com respeito ao argumento, como usual-

[‡]Quando U é linear a teoria chama-se MCS.

mento. Este modelo apresenta uma noção bem-definida de auto-dualidade, da mesma maneira que no caso linear. Isto pode ser verificado como segue. Defina um campo, ${}^{\star}a_\mu$, dual a a_μ, como

$$
{}^{\star}a_\mu \equiv \frac{1}{2\,V'}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda}\,\partial^\nu a^\lambda\,; \tag{2.2.17}
$$

repetindo esta operação, e como conseqüência das equações de movimento, obtemos que (2.2.16),

$$
{}^{\star}\left({}^{\star}a_\mu\right) = a_\mu. \tag{2.2.18}
$$

Correspondências duais para este tipo de sistemas não-lineares têm sido recentemente estudadas no caso particular de Born-Infeld [40], e também em outros casos específicos na ref. [43] (por exemplo, uma lei de potência $U(z) = z^r\,,\, r\epsilon Q)$, que usa um método recentemente proposto [44], baseado na idéia tradicional de um "lifting" local de uma simetria global, que pode ser obtida pela incorporação iterativa de contra-termos de Noether. Essas abordagens tratam das não-linearidades introduzindo campos auxiliares. Nesta seção, iremos confirmar os resultados anteriores, adotando a abordagem via ação mestra e as generalizaremos *sem* introduzir campos auxiliares; obviamente, isto reforça a evidência em favor do método de "gaugeamento" de Noether [44], como um procedimento de dualização bastante útil.

Para derivar os nossos resultados, consideremos a seguinte generalização não-linear da AM de Deser-Jackiw [6]:

$$\mathcal{S}_{Mestra}[A,a] = \chi \mathcal{S}_{CS}[A] - \int d^3x \left[\epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda}[A] a_\mu + V(a_\mu a^\mu)\right] . \qquad (2.2.19)$$

Variando esta ação com respeito a A^μ,

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\nu [A^\lambda - a^\lambda] = 0 \,, \qquad (2.2.20)$$

podemos escrever a solução como

$$A^\lambda = a^\lambda + \Delta^\lambda, \qquad (2.2.21)$$

onde $\Delta^\lambda = \partial^\lambda \Delta$ é um puro gauge. Substituindo esta decomposição de volta em (2.2.19), recuperamos $S_{V(a^2)}[a]$, como na equação (2.2.15).

Agora, continuando com o procedimento usual da abordagem de AM[5], devemos variar a AM com respeito a A^μ, e usar a equação resultante para resolver A^μ em termos dos outros campos, a^μ. Finalmente, elimina-se A^μ da AM.

Variando $\mathcal{S}_{Mestra}$ com respeito a a^μ, obtemos

$$-2V'(a^2) a^\mu = \epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda}[A], \qquad (2.2.22)$$

e disto segue que

$$-2a^2 V'(a^2) = a_\mu \epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda}[A] \qquad (2.2.23)$$

e

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda}[A] \, \epsilon_{\mu\rho\alpha} F_{\rho\alpha}[A] = 2F^2 = 4a^2[V'(a^2)]^2. \qquad (2.2.24)$$

Formalmente, podemos resolver para a^2 em termos de $F^2[A]$, e aplicar este resultado de volta em (2.2.19) para expressar esta ação em termos do campo A^μ, o que resulta numa teoria de gauge. Definindo a função W através da sua inversa (quando esta existe),

$$W^{-1}(v) \equiv 2v \, (V'(v))^2, \qquad v \epsilon I\!R, \qquad (2.2.25)$$

e substituindo na AM pela eq. (2.2.23), recuperamos a teoria de gauge não-linear: a combinação de um termo de Chern-Simons com um termo de Maxwell não-linear,

$$S_{MCS}[A] = \int d^3x \left(U(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) - \chi \, \epsilon^{\mu\nu\lambda} \, A_\mu \, \partial_\nu A_\lambda \right), \qquad (2.2.26)$$

onde o funcional U está relacionado a V (que carateriza a não-linearidade do modelo AD) como segue:

$$U(q) = -2W(q)V'(W(q)) + V(W(q)), \qquad (2.2.27)$$

com $q \epsilon I\!R^+$.

No final da próxima seção, mencionaremos alguns exemplos mais relevantes de soluções desta equação.

2.3 Bosonisação do modelo de Thirring com acoplamento arbitrário (corrente-corrente) em $d = 3$.

Nesta Seção, obteremos identidades de bosonização para o modelo de Thirring (fermiônico) mais geral (com dependência arbitrária na corrente fermiônica); isto corresponde marcadamente a uma versão de MCS com *a mesma* dependência do quadrado do tensor de Maxwell [12]. Usaremos o procedimento tradicional de bosonização em três dimensões [10].

O caso particular de Born-Infeld-Chern-Simons já foi estudado na literatura recente [37, 40]; claramente, estes resultados estão contidos no esquema geral apresentado aqui.

De fato, considere a generalização do modelo de Thirring, com um termo arbitrário de dependência com a corrente j^μ. Por invariância relativística, a única possibilidade é:

$$Z_{T(j^2)}^{(ferm)} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \; e^{-\int \left(8\pi\,\bar{\psi}(\not{\partial}+m)\psi - T(\frac{j^\mu j_\mu}{2})\right)d^3x}, \qquad (2.3.28)$$

onde a função T é analítica e real.

Eliminemos agora a interação não-linear introduzindo um campo vetorial, a^μ, e usando a identidade:

$$e^{\int d^3x\, T(\frac{j^\mu j_\mu}{2})} = \int \mathcal{D}a_\mu e^{-\int d^3x\, tr(V(a^\mu a_\mu)+j^\mu a_\mu)}, \qquad (2.3.29)$$

onde V está relacionada a T. Obteremos esta relação variando o expoente do lado direito com respeito ao a:

$$-2V'(a^\nu a_\nu)a^\mu = j^\mu; \qquad (2.3.30)$$

do qual seguem as seguintes relações,

$$-2a^2V'(a^2) = a_\mu j^\mu, \qquad (2.3.31)$$

e

$$j^\mu j_\mu = 4a^2[V'(a^2)]^2. \qquad (2.3.32)$$

Em princípio, podemos resolver para a (ou a^2) a partir de (2.3.32) em termos de j^2, e substituir o resultado de volta em (2.3.29), para expressar esta ação em termos da corrente j e, assim, recuperar o modelo de Thirring não-linear. Definamos de novo a função W através da sua inversa, supondo que esta tem a forma:

$$W^{-1}(v) = 2v[V'(v)]^2; \qquad (2.3.33)$$

então, $W(q) = v$. Usando (2.3.29), reobtemos o modelo de Thirring não-linear, eq. (2.3.28), onde T é dado por

$$T(q) = -2W(q)V'(W(q)) + V(W(q)). \qquad (2.3.34)$$

Note que, devido a (2.3.33), a eq. (2.3.34) coincide com (2.2.27); logo, obtemos:

$$T(q) = U(q), \qquad q \epsilon I\!\!R^+, \tag{2.3.35}$$

em coincidência com a regra de correspondência formal [12], $j \rightarrow {}^*F$ [§]. Isto nos fornece uma identidade de bosonização geral que relaciona modelos fermiônicos muito gerais com teorias de gauge.

Então, graças a este resultado, podemos representar o modelo de Thirring generalizado como:

$$\mathcal{Z}_{T(j^2/2)} = \int \mathcal{D}a_\mu \; \det(i\partial\!\!\!/ + m + a\!\!\!/)\, e^{-\int d^3x\, V(a^\mu a_\mu)}. \tag{2.3.36}$$

Agora, procedemos da mesma forma que no caso típico (onde $T(j^2/2)$ é linear) para calcular o determinante. O determinante do operador de Dirac não é limitado e requer regularização.

Para $d = 3$, a cálculo deste determinante resulta em alguns termos que preservam a paridade e outros que a violam, expandidos em potências do inverso da massa fermiônica,

$$\ln\det(i\partial\!\!\!/ + m + a\!\!\!/) = \frac{\chi}{16\pi}\mathcal{S}_{CS}[a] + I_{PC}[a] + O(\partial^2/m^2)\,. \tag{2.3.37}$$

Aqui,

$$\mathcal{S}_{CS}[a] = \int d^3x \; i\epsilon^{\mu\nu\lambda}\,(F_{\mu\nu}a_\lambda); \tag{2.3.38}$$

é a ação (Abeliana) de Chern-Simons. As contribuições que preservam pari-

[§] $()^*$ é a operação de Hodge usual.

dade, à primeira ordem, levam à ação de Maxwell

$$I_{PC}[a] = -\frac{1}{24\pi m}\, tr \int d^3x\, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \tag{2.3.39}$$

No regime de baixas energias [10], somente a ação de Chern-Simons sobrevive, conduzindo a uma expressão fechada para o determinante:

$$\ln \det(i\partial\!\!\!/ + m + a\!\!\!/) = \frac{\chi}{16\pi} \mathcal{S}_{CS}[a] + o(m^{-1}). \tag{2.3.40}$$

Usando este resultado, podemos escrever:

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{Z}^{(ferm)}_{T(j^2)/2} = \int \mathcal{D}a_\mu \exp(-\mathcal{S}_{V(a^2)}[a]), \tag{2.3.41}$$

onde $\mathcal{S}_{V(a^2)}$ é a versão não-linear do modelo AD [7],

$$\mathcal{S}_{V(a^2)}[a] = \int d^3x\, V\,(a_\mu a^\mu) - \chi \mathcal{S}_{CS}[a] \tag{2.3.42}$$

Desta forma, até a ordem principal em $1/m$, estabelecemos a identificação com o modelo AD (não-linear):

$$\mathcal{Z}^{(ferm)}_{T(j^2)/2} \approx \mathcal{Z}_{V(a^2)}. \tag{2.3.43}$$

Finalmente, lembrando que o modelo com dinâmica definida pela ação AD ($\mathcal{S}_{V(a^2)}$) equivale a uma teoria de gauge não-linear ($\mathcal{S}_{U(F[a]^2)}$), usamos a relação (2.3.35) para estabelecer a identidade de Bosonização relacionando o mais geral modelo de Thirring com uma teoria de gauge não-linear, a partir da identificação dos potenciais, isto é

$$\mathcal{Z}^{(ferm)}_{U(j^2/2)} \approx \mathcal{Z}_{U(F^2)} \,. \tag{2.3.44}$$

Em alguns casos, é relativamente simples resolver a equação (2.3.33) (ou, em virtude de (2.3.35), eq. (2.2.27)). Como ilustração, podemos mencionar alguns exemplos mais relevantes:

Tomemos um modelo de Thirring com interação corrente-corrente descrita por uma função $T(j^2) \propto (j^\mu j_\mu)^k$; este é equivalente ao modelo AD com não-linearidade dada por outra lei de potências: $V(a^2) \propto (a^\mu a_\mu)^{\frac{k}{(2k-1)}}$, e, em virtude de (2.3.35), o correspondente modelo de gauge tem o termo de Maxwell substituído por $U(F^2) \propto (F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})^k$. Uma simples inspeção mostra que este resultado coincide com o obtido em [43], o qual reforça a validade do método ali proposto.

O exemplo de Born-Infeld-Chern-Simons constitui um caso especial. Como pode ser diretamente verificado a partir da eq. (2.2.27), a forma funcional dos três modelos *coincide* [37, 43, 44], i.e, $T(q) = U(q) \propto V(q) \propto \sqrt{1-(const \cdot q^2)}$, para todo $q \epsilon \mathbb{R}$.

Capítulo 3

Massa Topológica e Teorias Auto-Duais de primeira ordem em dimensões arbitrárias.

O aparente conflito entre uma simetria de gauge e a existência de bósons de gauge massivos é evitada no contexto de teorias topologicamente massivas, como é o caso dos bem conhecidos modelos de Chern-Simons [11] e Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond (CSKR) [26, 35, 36, 50]. Estes ilustram como pode ser atribuída massa física aos bósons de gauge Abelianos, sem a necessidade de se introduzir escalares de Higgs e se remeter à quebra espontânea da simetria. Esta é a motivação fundamental para estudar esse tipo de teorias em diferentes dimensões espaço-temporais.

Este estudo apresenta dois objetivos: construir formulações de primeira ordem para teorias topologicamente massivas que envolvem-termos BF (acoplamento topológico entre diferentes formas de gauge [26, 35]) em dimensões arbitrárias e com todas as possíveis ordens tensoriais; também, argumentar que, por considerar dubletos de campos-formas [13], estas formulações de primeira ordem (não-invariantes de gauge) constituem modelos auto-duais, próximos em espírito ao sistema auto-dual em $(2+1)$-dimensões, introduzido pela primeira vez por Townsend, Pilch e van Nieuwenhuizen [7].

Há alguns trabalhos recentes [27, 28, 29], apontando que os modelos Cremmer-Sherk-Kalb-Ramond em dimensão quatro, que incluem termos BF em suas lagrangeanas, correspondem a teorias de primeira ordem (não invariantes de gauge). Estes autores utilizam o procedimento de "imersão" Hamiltoniana de Batalin, Fradkin e Tyutin [51]. A dualização desses modelos também foi estudada por Smailagic e Spallucci [52] com resultados diferentes aos nossos.

O paralelo entre estas teorias BF de primeira ordem, em qualquer dimensão do espaço-tempo, e as teorias auto-duais (AD) em $(2+1)$, que se explora nesta tese, foi recentemente sugerido por Harikumar et al [27] no caso 4-dimensional; no entanto, estes autores mencionam que a dificuldade em estabelecer esta conexão deve-se à impossibilidade de definir auto-dualidade em dimensões que não são da forma $d = 4k - 1$ $(k \in Z_+)$. Aqui, esta objeção é contornada desde o início ao definirmos a operação dual no espaço de pares ordenados de formas de gauge.

Na presente abordagem, vamos além na utilização deste paralelismo para definir um modelo AD em uma dimensão arbitrária e adaptamos a prova proposta por Deser e Jackiw em 2 + 1-d [6] a fim de mostrar, de forma manifesta, a correspondência dual entre modelos topologicamente massivos gerais (CSKR) e as já mencionadas teorias AD em d-dimensões [14].

Finalmente, confirmaremos com nossa abordagem o (recente) resultado apresentado na ref. [27], válido em quatro dimensões, como caso particular e generalizá-lo para todas as dimensões. Para dimensões gerais é possível definir auto e anti-dualidade para pares (dubletes) de campos-formas com diferentes ordens [13]; portanto, um paralelo desta estrutura com a de d dimensões pode ser observada.

Vamos brevemente lembrar a estrutura de doubletes e apresentar alguns pontos de maneira mais simples.

Seja um espaço-tempo d-dimensional com assinatura s: consideremos o dublete tensorial,

$$\mathcal{F} := (f_{\mu_1\cdots\mu_p}, g_{\mu_1\cdots\mu_{d-p-1}}), \tag{3.0.1}$$

onde f é uma $p(< d)$-forma (um tensor do tipo totalmente antisimétrico $(0;p)$) , e g é uma $(d-p-1)$-forma. $\mathcal{F}$ é um elemento do espaço $\Delta_p \equiv \Lambda_p \times \Lambda_{d-[p+1]}$.

Há, como já vimos no primeiro capítulo, uma noção bem definida de auto (e anti-auto)-dualidade para os objetos neste espaço, baseada na usual operação Hodge, $^*()$, da mesma forma que em $(2+1)$-dimensões. Consideremos a ação com acoplamento topológico:

$$S_{AD-gen}[\mathcal{F}] \equiv \int dx^d \, [\frac{-2}{m} \left(g_{\mu_1 \cdots \mu_{d-p-1}} \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_d} \partial_{\mu_{d-p}} f_{\mu_{d-p+1} \cdots \mu_d} \right) +$$
$$+ [p+1]! \, g_{\mu_1 \cdots \mu_{d-p-1}} g^{\mu_1 \cdots \mu_{d-p-1}} + (-1)^s [d-p-1])! \, f_{\mu_1 \cdots \mu_p} f^{\mu_1 \cdots \mu_p}]. \quad (3.0.2)$$

Para uma notação mais concisa, em termos de formas, consideremos as seguintes definições: $d(f,g) \equiv (df \,, dg)$, e

$$^* \, (df \,, \; dg) \equiv (^* dg \,, \; (-1)^{p+1} S_{p+1} \; ^* df) \,, \quad (3.0.3)$$

onde S_q é um número definido através da dupla dualização, para alguma q-forma A: $^*(^* A) = S_q \, A$; este depende da assinatura (s) e a dimensão do espaço-tempo, na forma $S_q = (-1)^{s+q[d-q]}$.

Note que * aplicado a dubletes é definido de tal forma que suas componentes são trocadas, junto com uma mudança suplementar do sinal na segunda componente.

Desta forma, as equações de movimento derivadas da ação (3.0.2) são

$$\mathcal{F} = \frac{1}{m} \, ^* d\mathcal{F}, \quad (3.0.4)$$

onde m é um parâmetro de massa introduzido por argumentos dimensionais. Pode ser trivialmente verificado que estas equações requerem que $\mathcal{F}$ satisfaça à equação de Proca com massa m.

Observe, finalmente, que a equação (3.0.4) é vista como (2.1.4). Neste sentido, afirmamos que S_{AD-gen} descreve auto-dualidade de *dubletes*.

A outra notória semelhança deste modelo com AD (em $(2+1)$-d) é que este é dual a uma teoria topologicamente massiva (do tipo CSKR, com acoplamento BF [26] entre duas formas de gauge) da mesma maneira que a dualidade AD-MCS em três dimensões. Isto constitui o principal eixo de interesse, que confirma e generaliza alguns resultados recentes [27]. Abaixo, iremos provar esta correspondência.

Note que esta estrutura é insensível à dimensão do espaço-tempo e às ordens tensoriais das componentes do dublete. Logo, uma ação mestra inspirada na ação de Deser e Jackiw pode ser escrita em d dimensões espaço-temporais.

Considere o dublete de campos de gauge $\mathcal{A} \equiv (a_{\mu_1\cdots\mu_p}, b_{\mu_1\cdots\mu_{d-p-1}})$, junto com $\mathcal{F} = (f_{\mu_1\cdots\mu_p}, g_{\mu_1\cdots\mu_{d-p-1}})$; a AM proposta é:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_P[\mathcal{A},\mathcal{F}] = \mathcal{S}_{BF}[\mathcal{A}] &+ \\ - \int dx^d\, \epsilon^{\mu_1\cdots\mu_d} \left[b_{\mu_1\cdots\mu_{d-p-1}} \partial_{\mu_{d-p}} f_{\mu_{d-p+1}\cdots\mu_d} + g_{\mu_1\cdots\mu_{d-p-1}} \partial_{\mu_{d-p}} a_{\mu_{d-p+1}\cdots\mu_d} \right] &+ \\ + \int dx^d\, \frac{m}{2} \left([p+1]!\, g_{\mu_1\cdots\mu_{d-p-1}} g^{\mu_1\cdots\mu_{d-p-1}} + (-1)^s [d-p-1]!\, f_{\mu_1\cdots\mu_p} f^{\mu_1\cdots\mu_p} \right) &, \end{aligned} \tag{3.0.5}$$

onde

$$\mathcal{S}_{BF}[\mathcal{A}] \equiv \int dx^d \left[-b_{\mu_1\cdots\mu_{d-p-1}} \epsilon^{\mu_1\cdots\mu_d} \partial_{\mu_{d-p}} a_{\mu_{d-p+1}\cdots\mu_d} \right] \tag{3.0.6}$$

pode ser reconhecida como uma ação BF.

Variando $\mathcal{S}_P$ com respeito a $\mathcal{F}$, obtemos

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{m}\,{}^{*}d\mathcal{A}; \qquad (3.0.7)$$

pondo isto de volta em (3.0.5), recupera-se a ação topologicamente massiva (CSKR):

$$\mathcal{S}_{CSKR}[\mathcal{A}] = \mathcal{S}_{BF}[\mathcal{A}] - \int \frac{d^d x}{2m}\Big((-1)^s\,[d-p-1]!\,(\partial_{[\mu} a_{\mu_1\cdots\mu_p]})^2 + \\ + [p+1]!\,(\partial_{[\mu} b_{\mu_1\cdots\mu_{d-p-1}]})^2\Big)\,. \qquad (3.0.8)$$

Observemos que esta é invariante frente às transformações de gauge; $\mathcal{A} \to \mathcal{A}+d\mathcal{D}$, onde $d\mathcal{D}$ é um *dublete de formas exatas*, isto é, um par ordenado de diferenças de $(p-1, d-p-2)$-formas.

Agora, variando S_P com respeito a $\mathcal{A}$, obtemos:

$${}^{*}d(\mathcal{A}-\mathcal{F}) = 0; \qquad (3.0.9)$$

ou em componentes,

$$\begin{aligned} {}^{*}d(a-f) &= 0 \\ {}^{*}d(b-g) &= 0\,. \end{aligned} \qquad (3.0.10)$$

Isto implica que as diferências $a-f$ e $b-g$ podem ser escritas localmente como formas exatas; então, podemos expressar a solução destas equações como

$$\mathcal{A} = \mathcal{F} + d\mathcal{D}. \tag{3.0.11}$$

Colocando este resultado novamente na ação (3.0.5), reobtemos a teoria AD (3.0.2), a menos de termos topológicos. Isto completa a prova de nossa afirmação principal.

Como exemplo, particularizemos este resultado para a dimensionalidade especial, $d = 3 + 1$. Neste caso, somente dois dubletes podem ser escolhidos: $\mathcal{G} = (A_\mu, B_{\nu\rho})$ and $\mathcal{H} = (\phi, F_{\nu\rho\alpha})$. O primeiro descreve uma partícula massiva e com *spin*-1 (Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond) e, em virtude do resultado geral provado anteriormente, sua dinâmica é descrita alternativamente pelo modelo de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond,

$$S_{CSKR}(\mathcal{G}) = \int d^4x \left(\frac{1}{2m}\partial_{[\rho}A_{\mu]}\partial^{[\rho}A^{\mu]} - \frac{1}{2m}\partial_{[\rho}B_{\mu\nu]}\partial^{[\rho}B^{\mu\nu]} + B_{\mu\nu}\epsilon^{\rho\mu\nu\sigma}\partial_\rho A_\sigma \right), \tag{3.0.12}$$

ou pelo modelo de primeira ordem, AD:

$$S_{AD-gen}(\tilde{\mathcal{G}}) = \int d^4x \left(- \tilde{A}_\sigma \tilde{A}^\sigma + \tilde{B}_{\mu\nu}\tilde{B}^{\mu\nu} + \frac{1}{m}\tilde{A}_\sigma \epsilon^{\sigma\rho\mu\nu}\partial_{[\rho}\tilde{B}_{\mu\nu]} \right), \tag{3.0.13}$$

que não é invariante de gauge. Isto confirma outro resultado similar ohtido anteriormente [27]*.

*No entanto, em ref. [27], se mostra utilizando a técnica de Batalin, Fradkin e Tyutin[51].

O segundo possível dublete em quatro dimensões descreve um campo escalar (*spin*-0) massivo, cuja dinâmica pode ser descrita, pela ação topologicamnete massiva,

$$S_{TM}(\mathcal{H}) = \int d^4x \left(\frac{1}{2m} \partial_{[\mu} F_{\nu\rho\alpha]} \partial^{[\mu} F^{\nu\rho\alpha]} - 3! \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi + \phi \epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} \partial_\mu F_{\nu\rho\alpha} \right), \tag{3.0.14}$$

ou, alternativamente, por uma teoria de primeira ordem:

$$S_{AD-gen}(\tilde{\mathcal{H}}) = \int d^4x \left(\tilde{\phi}^2 - \frac{3!}{m} \tilde{F}_{\mu\nu\rho} \tilde{F}^{\mu\nu\rho} + \frac{2}{m} \tilde{\phi} \epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} \partial_\mu \tilde{F}_{\nu\rho\alpha} \right). \tag{3.0.15}$$

Como a dualidade foi definida de maneira similar a esta em $3d$, é de se esperar que haja uma longa lista de correspondências formais entre estruturas em $3d$ que envolvem auto-dualidade e modelos similares em dimensões gerais. Isto constitui uma aplicação importante deste formalismo, uma vez que, a princípio é possivel transportar as construções de $3d$ a qualquer dimensão.

3.1 Auto-dualidade de dubletes e teorias de gauge não-lineares: os modelos de Born-Infeld-Kalb-Ramond e Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond.

Nesta seção, generalizamos, para d dimensões, a estrutura analisada no Cap. 2 para 3 dimensões, adotando a abordagem via dubletes [16]. Em particular, uma formulação não convencional da técnica de bosonização em dimensões superiores (à maneira de $d = 3$) é proposta e, como aplicação, mostramos como representações fermiônicas (do tipo-Thirring) para os interessantes modelos topologicamente massivos em quatro dimensões (como Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond e Born-Infeld-Kalb-Ramond) podem ser construídas.

A generalização da estrutura de teorias não-lineares para dimensões superiores é o assunto desta seção. Mostraremos (para o caso particular de $d = 4$, mas indicando como generalizar para uma dimensão qualquer), que a bosonização pode ser implementada *da mesma maneira* que em 3d, via formalismo de dubletes [13, 14], resultando numa formulação alternativa da técnica de bosonização em quatro dimensões [42]. Como no caso de 3-d , os modelos fermiônicos bosonizam-se nos topologicamente massivos; em particular, concentramos nossa discussão em duas relevantes teorias de gauge topologicamente massivas em quatro dimensões: Born-Infeld-Kalb-Ramond e Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond [26, 35, 36].

Perseguimos aqui um duplo propósito: estabelecer tanto formulações bosônicas de primeira ordem (invariantes de gauge), quanto as fermiônicas do tipo-Thirring para teorias topologicamente massivas [26, 35, 36] em dimensões arbitrárias. Mostramos tais correspondências estendendo técnicas tipicamente usadas para dualidade e bosonização em modelos tridimensionais, via formalismo dos dubletes [13, 14], que se mostra insensível à dimensionalidade do espaço-tempo.

Finalmente, na subseção 3.1.3, observamos e enfatizamos os aspectos da bosonização que se relacionam com a generalização a dimensões arbitrárias que estamos procurando desenvolver.

No capítulo anterior, foram consideradas generalizações não-lineares de modelos Auto-Duais; no mesmo sentido, podemos substituir ρ [†] por $V(\rho)$ na ação (3.0.2), e obter generalizações não-lineares do modelo. Abaixo, provamos que estas teorias são equivalentes (duais) a generalizações também não-lineares (invariantes de gauge) das teorias topologicamente massivas. A forma desta correspondência deve resultar na mesma que no caso $d = 3$ (eq. (2.2.27)), a qual constitui uma motivação adicional para interpretar (3.0.2) como um sistema AD.

Consideremos o dublete de campos de gauge $\mathcal{A} \equiv (a_{\mu_1 \cdots \mu_p}, b_{\mu_1 \cdots \mu_{d-p-1}})$ em adição a $\mathcal{F} = (f_{\mu_1 \cdots \mu_p}, g_{\mu_1 \cdots \mu_{d-p-1}})$, e propondo a seguinte AM:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_P[\mathcal{A}, \mathcal{F}] = \mathcal{S}_{BF}[\mathcal{A}] - \int dx^d \, \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_d} \Big[b_{\mu_1 \cdots \mu_{d-p-1}} \partial_{\mu_{d-p}} f_{\mu_{d-p+1} \cdots \mu_d} + \\ + g_{\mu_1 \cdots \mu_{d-p-1}} \partial_{\mu_{d-p}} a_{\mu_{d-p+1} \cdots \mu_d} \Big] + \int dx^d \, V(\rho(\mathcal{F})),\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

[†]O qual contém os termos de massa explícita na forma

$$\rho(\mathcal{F}) \equiv \frac{1}{2}([p+1]! \, g_{\mu_1 \cdots \mu_{d-p-1}} g^{\mu_1 \cdots \mu_{d-p-1}} + (-1)^s [d-p]! \, f_{\mu_1 \cdots \mu_p} f^{\mu_1 \cdots \mu_p}). \tag{3.1.16}$$

onde

$$\mathcal{S}_{BF}[\mathcal{A}] \equiv \int dx^d \left[b_{\mu_1 \cdots \mu_{d-p-1}} \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_d} \partial_{\mu_{d-p}} a_{\mu_{d-p+1} \cdots \mu_d} \right] \qquad (3.1.18)$$

é a ação BF.

Variando $\mathcal{S}_P$ com respeito a $\mathcal{F}$, obtemos

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{V'(\rho)} {}^*d\mathcal{A}; \qquad (3.1.19)$$

que pode ser vista como a equação da auto-dualidade não-linear, eq. (2.2.16). Introduzindo esta relação de volta em (3.1.17), recupera-se a ação de gauge não-linear:

$$\mathcal{S}_{TM}[\mathcal{A}] = \mathcal{S}_{BF}[\mathcal{A}] - \int d^d x \; U(\theta), \qquad (3.1.20)$$

onde θ contém os termos do tipo Maxwell:

$$\theta \equiv \frac{1}{2} \left((-1)^s \, [d-p-1]! \, (\partial_{[\mu} a_{\mu_1 \cdots \mu_p]})^2 + [p+1]! \, (\partial_{[\mu} b_{\mu_1 \cdots \mu_{d-p-1}]})^2 \right). \quad (3.1.21)$$

Assim, as mesmas manipulações algébricas que as feitas no caso 3d, devem nos levar a relacionar de novo U e V pela equação (2.2.27).

Devemos, finalmente, observar que esta ação é também invariante sob transformações de gauge; $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} + d\mathcal{D}$, onde $d\mathcal{D}$ é um dublete de diferenciais exatos.

Agora, variamos S_P com respeito a $\mathcal{A}$ e obtemos:

$$^*d(\mathcal{A} - \mathcal{F}) = 0; \tag{3.1.22}$$

em componetes, isto é,

$$\begin{aligned} ^*d(a - f) &= 0, \\ ^*d(b - g) &= 0 . \end{aligned} \tag{3.1.23}$$

Isto implica que as diferenças $(a - f)$ e $(b - g)$ podem ser escritas localmente como formas exatas; logo, é possível expressar a solução destas equações como

$$\mathcal{A} = \mathcal{F} + d\mathcal{D}. \tag{3.1.24}$$

Substituindo na AM, dada por (3.1.17), obtemos a teoria AD generalizada, a menos de termos topológicos:

$$S_{AD-gen}[\mathcal{F}] \equiv \int dx^d \left[-\frac{1}{m} g_{\mu_1 \cdots \mu_{d-p-1}} \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_d} \partial_{\mu_{d-p}} f_{\mu_{d-p+1} \cdots \mu_d} + V(\rho(\mathcal{F})) \right] . \tag{3.1.25}$$

Quando V (ou U) é linear, temos a chamada teoria do tipo Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond, já analisada.

3.1.1 Não-linearidades mais gerais.

Não é um fato geral que $V = V(\rho(\mathcal{F}))$. Além do requerimento de invariância de Lorentz, podemos também requerer que não haja interação entre as duas formas de gauge que compõem o dublete, exceto pela interação topológica do termo BF.

Considere $\mathcal{F} \equiv (f_1, f_2)$ e $\mathcal{A} \equiv (a_1, a_2)$, ambos em Δ_p, e a não-linearidade dada por

$$V = V_1(N_2\ (f_1)^2) + (-1)^s V_2(N_1\ (f_2)^2); \tag{3.1.26}$$

onde $N_i \equiv \frac{[p_i+1]!}{2}$, $i = 1, 2$ e p_i denota o ordem f_i $(p_1 + p_2 + 1 = d)$ ‡.

Logo, a variação de (3.1.17) com respeito a $\mathcal{F}$ fornece:

$$\Big(V_1'(N_2\,(f_1)^{\ 2})\ f_1\ ;\ V_2'(N_1\,(f_2)^{\ 2})\ f_2 \Big) = -\,{}^*d\mathcal{A}\,. \tag{3.1.27}$$

Repetindo os cálculos prévios, podemos conferir a dualidade entre

$$\mathcal{S}_{V_1,V_2}[\mathcal{F}] = \mathcal{S}_{BF}[\mathcal{F}] + \int d^d x\ \Big(V_1(N_2\,(f_1)^{\ 2}) + V_2(N_1\,(f_2)^{\ 2}) \Big) \qquad , \tag{3.1.28}$$

e

$$\mathcal{S}_{U_1,U_2}[\mathcal{A}] = \mathcal{S}_{BF}[\mathcal{A}] - \int d^d x\ \Big(\ U_1(p_2!\,(da_1)^2) + U_2(p_2!\,(da_2)^2)\ \Big) \qquad . \tag{3.1.29}$$

Logo, obtém-se a já conhecida relação:

$$U_i(q) = -2W_i(q)V_i'\,(W_i(q)) + V_i(W_i(q))\,, \quad q \epsilon R^+\ , \tag{3.1.30}$$

‡ $(f_i)^2 \equiv f_{\mu_1 \cdots \mu_{p_i}} f_{\mu_1 \cdots \mu_{p_i}}$.

onde, as funções W_i estão definidas de novo por

$$W_i^{-1}(v) \equiv 2v[V_i'(v)]^2 \quad v \epsilon R^+ \ . \tag{3.1.31}$$

Em $d = 3 + 1$, uma interessante dualidade pode ser estabelecida pela aplicação deste resultado à combinação (invariante de gauge) de uma teoria de Born-Infeld com uma de Kalb-Ramond (que envolve um campo de ordem dois), acopladas por un termo topológico (BF). Esta pode ser chamada, então, de teoria de Born-Infeld-Kalb-Ramond, cuja forma é:

$$\begin{aligned} S_{BIKR}(\mathcal{A}) = \int d^4x \Big(&\beta^2 \sqrt{[1 - \frac{2}{\beta^2}\partial_{[\rho}A_{\mu]}\partial^{[\rho}A^{\mu]}]} + \\ &- \partial_{[\rho}B_{\mu\nu]}\partial^{[\rho}B^{\mu\nu]} + mB_{\mu\nu}\epsilon^{\rho\mu\nu\sigma}\partial_\rho A_\sigma \Big) \ , \end{aligned} \tag{3.1.32}$$

para o dublete de campos de gauge $\mathcal{A} = (A_\mu \, , B_{\mu\nu}))$ [§] , e equivalente-dual ao modelo de primeira ordem:

$$\begin{aligned} S_{AD-gen}(\tilde{\mathcal{A}} \equiv (\tilde{A}_\sigma, \tilde{B}_{\mu\nu})) = \int d^4x \Big(&-\beta^2 \sqrt{[1 + \frac{1}{\beta^2}\tilde{A}_\sigma \tilde{A}^\sigma]} + \\ &+ \tilde{B}_{\mu\nu}\tilde{B}^{\mu\nu} + \frac{1}{m}\tilde{A}_\sigma \epsilon^{\sigma\rho\mu\nu}\partial_{[\rho}\tilde{B}_{\mu\nu]} \Big) \ , \end{aligned} \tag{3.1.33}$$

a qual é uma teoria sem invariância de gauge, claramente associada a um vínculo de auto-dualidade não-linear.

[§]Aquí β é um parâmetro introduzido por motivos dimensionais.

3.1.2 Bosonização em (3+1)-d.

Aqui, apresentamos uma abordagem original à bosonização em $d = 3+1$, válida para escalas de comprimento longas, quando comparadas ao comprimento de onda de Compton para o férmion.

No nosso modelo fermiônico massivo (quadri-dimensional), com carga $U(1)$, define-se uma corrente $j^{\mu} \equiv \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$, onde ψ são N_f espinores de Dirac, cada um de quatro componentes¶.

Mas, por outro lado, pode-se também definir uma corrente de ordem-2, $j^{\mu\nu} \equiv \bar{\psi}\gamma_5[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]\psi$; vamos definir agora o dublete de correntes:

$$\mathcal{J} = (j^{\mu}, j^{\mu\nu}). \tag{3.1.34}$$

O aparecimento da matriz γ_5 em $j^{\mu\nu}$ segue da imposição de que tanto $j^{\mu\nu}$ quanto j^{μ} troquem o sinal sob conjugação da carga:

$$\bar{\psi}\gamma_5[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]\psi = -\bar{\psi}^C\gamma_5[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]\psi^C. \tag{3.1.35}$$

A seguir, escrevamos um modelo de Thirring massivo não-convencional (Euclideano) ‖ numa forma similar ao caso tri-dimensional:

¶Neste cálculo, N_f será simplesmente considerado como um parâmetro.

‖Num espaço-tempo, $j^{\mu\nu}$ é puramente imaginário; logo, a fim de fazê-lo real, podemos redefinir esta forma bilinear multiplicando-a por i.

$$\mathcal{Z}^{(ferm)} \equiv \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \; e^{-\int \left(\bar{\psi}(\partial\!\!\!/+m)\psi - \frac{g^2}{2N_f m}[2j_{\mu\nu}j^{\mu\nu} - j_\mu j^\mu]\right) d^4x}, \tag{3.1.36}$$

onde m é a massa do férmion e g a constante de acoplamento do modelo, tal que g^2 tem dimensão da inversa de massa. Esta teoria e não renormalizável mais nosso objetivo e considerar ele a baixas energías [10]. Vamos mostrar que isto bosoniza no modelo de CSKR, uma teoria de gauge topologicamente massiva.

Tal como no caso 3d, tem-se a identidade,

$$e^{-\frac{g^2}{2N_f m}\int d^4x\,[2j_{\mu\nu}j^{\mu\nu} - j_\mu j^\mu]} = \int \mathcal{D}\mathcal{A}\; e^{\int d^4x\, tr(\frac{1}{2}[\frac{1}{2}b_{\mu\nu}b^{\mu\nu} - a_\mu a^\mu] + \frac{g}{\sqrt{mN_f}}[b_{\mu\nu}j^{\mu\nu} - a_\mu j^\mu])}, \tag{3.1.37}$$

a qual introduz o dublete de campos bosônicos $\mathcal{A} \equiv (a_\mu, b_{\mu\nu})$.

Definindo o objeto

$$\mathcal{A}\!\!\!/ \equiv \gamma^\mu a_\mu + \gamma_5[\gamma^\mu, \gamma^\nu]b_{\mu\nu}\ , \tag{3.1.38}$$

a função de partição reduz-se a:

$$\mathcal{Z}^{(ferm)} = \int \mathcal{D}\mathcal{A}\ \det(i\partial\!\!\!/ + m + \mathcal{A}\!\!\!/)\, e^{\frac{1}{2}\int d^4x\,[\frac{1}{2}b_{\mu\nu}b^{\mu\nu} - a_\mu a^\mu]}. \tag{3.1.39}$$

Logo, podemos calcular este determinante. Uma expansão perturbativa convencional resulta em

$$S_{eff}[\mathcal{A}\, m] = N_f\, tr[\ln(\not{\partial} + m)] + N_f \frac{g}{\sqrt{N_f\, m}} tr\left(\frac{1}{\not{\partial} + m}\not{\mathcal{A}}\right) +$$

$$\frac{N_f}{2}\left(\frac{g^2}{N_f\, m}\right) tr\left(\frac{1}{\not{\partial} + m}\not{\mathcal{A}}\frac{1}{\not{\partial} + m}\not{\mathcal{A}}\right) + \ldots \qquad (3.1.40)$$

O primeiro termo é somente o caso livre ($A = 0$), o qual é subtraído, enquanto o segundo termo incorpora dois "tadpoles" acomodados no dublete. Logo, devemos concentrar nossa atenção no termo quadrático (nos campos bosônicos $\mathcal{A}$) na ação efetiva. No espaço de momentos, isto se lê como:

$$S_{eff}^{quad}[A, m] = \frac{g^2}{2m}\, tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\not{\mathcal{A}}(-p)\frac{i\not{p} + i\not{k} - m}{(p+k)^2 + m^2}\not{\mathcal{A}}(p)\frac{i\not{k} - m}{k^2 + m^2}\right]. \qquad (3.1.41)$$

Termos das formas $\not{\mathcal{A}}(-p)\not{k}\not{\mathcal{A}}(p)\not{k}$ e $\not{\mathcal{A}}(-p)\not{p}\not{\mathcal{A}}(p)\not{k}$ no numerador do integrando contribuirão com ordem-2 em p_μ **. Já que estamos estudando o limite de baixas energias, como no caso 3d, podemos aproximar esta expressão como abaixo:

$$S_{eff}^{quad}[A, m] \approx i\, \frac{g^2}{2m}\, tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\not{\mathcal{A}}(-p)\frac{(\not{p} + \not{k})\not{\mathcal{A}}(p) - \not{\mathcal{A}}(p)\not{k}}{[(p+k)^2 + m^2]\,[k^2 + m^2]}\right], \qquad (3.1.42)$$

usando também o fato de que o traço de um número ímpar de matrizes de

**Eles também cancelam os termos $tr\,[m^2\not{\mathcal{A}}(-p)\not{\mathcal{A}}(p)]$ que aparecem no numerador.

Dirac é nulo. Obtemos então somente uma contribuição topológica:

$$S_{eff}^{quad}[A,m] \approx \frac{g^2}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[a_\mu(-p)\Gamma^{\mu\nu\alpha}(p)b_{\nu\alpha}(p)\right], \qquad (3.1.43)$$

onde, em virtude da propriedade especial das matrizes-gamma (aqui Euclideanas) em $(3+1)$-d ,

$$tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5[\gamma^\rho,\gamma^\alpha]) = -8\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}, \qquad (3.1.44)$$

e o núcleo toma a forma:

$$\Gamma^{\mu\nu\alpha}(p,m) = \epsilon^{\mu\rho\nu\alpha}p_\rho\Pi(p^2,m), \qquad (3.1.45)$$

onde $\Pi(p^2,m)$ é a contribuição correspondente ao diagrama de auto-energia de um "loop" fermiônico.

Com o objetivo de computar a integral de "loop" e subtrair a parte divergente, vamos supor uma dimensão do espaço-tempo sendo $d = 4 - \epsilon$, de acordo com o procedimento de regularização dimensional (ver ref. [45]):

$$\begin{aligned} \Pi(p^2,m) &= (\mu)^\epsilon \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(p+k)^2+m^2][k^2+m^2]} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2}\left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma - ln\frac{p^2}{\mu^2} - I(\frac{p^2}{m^2})\right] + o(\epsilon), \end{aligned} \qquad (3.1.46)$$

μ é um parâmetro e a parte finita lê-se como abaixo:

$$\begin{aligned} I(\frac{p^2}{m^2}) &= a\,lna - (a-1)\,ln(a-1) + b\,ln|b| + (1-b)\,ln(1-b) - 2, \\ a(b) &= \frac{1}{2}[1 + (-)\sqrt{1 + 4\frac{m^2}{p^2}}. \end{aligned} \qquad (3.1.47)$$

No limite de grandes comprimentos de onda ($p \to 0$) e grandes massas ($m \to \infty$), $a \to \infty$, $b \to -\infty$; logo, pode-se verificar facilmente que $I \to -2$. Assim, obtém-se a parte finita do núcleo:

$$\Gamma^{\mu\nu\alpha}(p,m) \sim \frac{2}{(4\pi)^2}\,\epsilon^{\mu\rho\nu\alpha}p_\rho. \qquad (3.1.48)$$

Inserindo o termo principal na ação quadrática efetiva (3.1.43), e voltando ao espaço de configuração (Lorentziano), obtemos o termo BF induzido

$$S_{eff} = -8\frac{g^2}{(4\pi)^2}\int d^4x\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}a_\mu\partial_\nu b_{\rho\alpha} = -8\frac{g^2}{(4\pi)^2}\,\mathcal{S}_{BF}(\mathcal{A}). \qquad (3.1.49)$$

Inserindo este resultado de volta em (2.3.36), obtemos:

$$\mathcal{Z}^{(ferm)} \approx \int \mathcal{D}\mathcal{A}\; e^{\mathcal{S}_{BF}(\mathcal{A}) + \frac{1}{2}\int d^4x\,[\frac{1}{2}b_{\mu\nu}b^{\mu\nu} - a_\mu a^\mu]}, \qquad (3.1.50)$$

a qual, através da correspondência provada anteriormente, é equivalente ao modelo, invariante de gauge, de Cremer-Sherk-Kalb-Ramond, que descreve uma partícula massiva, com spin-1. A massa do bóson é dado pelo inverso do fator global aparecendo em $\mathcal{S}_{BF}$ na eq. (4.2.35), $m^{-1}_{boson} \sim \frac{g^2}{2\pi^2}$.

Observe também que, se o dublete de correntes é reescalado como $(j^\mu, j^{\mu\nu}) \to (sj^\mu, tj^{\mu\nu})$, o único efeito disto é que a massa do bóson também resulta reescalada como $m_{boson} \to m_{boson} / (st)$.

Finalmente, a *representação fermiônica* para o modelo CSKR é dada pela função de partição:

$$\mathcal{Z}^{(ferm)} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \; e^{-\int \left(\bar{\psi}(\partial\!\!\!/+m)\psi - \frac{g^2}{2N_f m}[2j_{\mu\nu}j^{\mu\nu} + j_\mu j^\mu]\right)d^3x} \approx \mathcal{Z}_{CSKR}. \quad (3.1.51)$$

Agora, repetindo os cálculos das seções prévias, podemos estudar as generalizações não-lineares do modelo dado por (3.1.51). De fato, substituindo $j_{\mu\nu}j^{\mu\nu} + j_\mu j^\mu \;\; \to \;\; U_1(j_{\mu\nu}j^{\mu\nu}) + U_2(j_\mu j^\mu)$ na expressão (3.1.51), podemos bosonizar isto numa teoria AD não-linear, dada por (3.1.28) ††, cujas não-linearidades estão relacionadas a $U_{1/2}$ pelas expressões (3.1.30). E, mais uma vez, compondo este resultado com a dualidade provada no capítulo anterior, chega-se a uma teoria de gauge topologicamente massiva (assim como na correspondência Thirring-MCS), dada pela ação (3.1.29).

Em particular, podemos escrever abaixo a versão fermiônica da teoria de gauge de Born-Infeld-Kalb-Ramond:

$$\mathcal{Z}_{BI-KR} \approx \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \; e^{-\int \left(\psi(\partial\!\!\!/+m)\psi - \frac{g^2}{2N_f m}[2j_{\mu\nu}j^{\mu\nu} + \beta^2\sqrt{1-\frac{j_\mu j^\mu}{\beta^2}}]\right)d^3x}. \quad (3.1.52)$$

Concluímos esta seção mencionando que a correspondência operatorial

††Por simplicidade, estamos discutindo o caso $d = 4$ e dubletes no espaço Δ_1.

subjacente nesta estrutura é lida como

$$\mathcal{J} \rightarrow {}^*d\mathcal{A}. \tag{3.1.53}$$

3.1.3 Algumas observações.

Apresentamos uma nova abordagem para o estudo da bosonização de um modelo de férmions que interagem, em termos de modelos topologicamente massivos, similar ao que ocorre em $d = 3$. Em geral, isto envolve dois campos de gauge com diferentes ordens tensoriais (teorias do tipo BF). Discutimos este ponto para $d = 4$, mas mostramos o caminho para reproduzir esta construção em dimensões superiores (deve-se simplesmente construir as "correntes" como elementos em algum Δ_p). Estes resultados foram enfatizados para teorias muito importantes na teoria de campos e/ou dinâmicas Dp-branes (teorias CSKR e BIKR).

Um comentário em relação à "corrente de dupla forma" que aparece no modelo Thirring, $j^{\mu\nu}$: pode parecer um tanto artificial, uma vez que não é necessariamente conservado. Contudo, tentamos aqui mostrar que isto é um aspecto natural do formalismo, já que está relacionado a modelos de gauge invariantes topologicamente massivos: é crucial para a obtenção de uma teoria bosônica topologicamente massiva no limite de massa fermiônica grande. Bosonização no caso de correntes fermiônicas não conservadas já foi contemplado por outros autores [46].

Concluímos esta parte do trabalho enfatizando a motivação para a proposta desta generalização da auto-dualidade para $d > 3$, via dubletes [13, 14]. Parece ser apropriado destacar este ponto: recupera-se os resultados bem conhecidos em $3d$, i.e, o dublete desaparece e se reduz a um simples campo auto-dual dinâmico.

De fato, para um modelo de Thirring em $3d$, com uma auto-interação $U(1)$, só podemos construir um dublete de correntes em Δ_1, $\mathcal{J} = (j^\mu, j^\mu)$, onde $j^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu \psi$. Logo, introduz-se, como usual, um dublete bosônico, $\mathcal{A} = (a_\mu, b_\mu)$. A função de partição pode ser escrita como

$$\mathcal{Z}_{(ferm)} \equiv \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}a\mathcal{D}b\; e^{-\int\left(\bar{\psi}(\partial\!\!\!/+m)\psi - \frac{g^2}{2} j^\mu\,[a_\mu + b_\mu] - (a^2+b^2)/2\right) d^4x} . \quad (3.1.54)$$

Mudando as coordenadas para $c^\pm_\mu \equiv \frac{a_\mu \pm b_\mu}{2}$, os campos c^+_μ aparecem desacoplados dos c^-_μ (o último sem dinâmica), cuja ação, induzida pelo modelo fermiônico, é dada precisamente por uma ação AD (eq. (4.1.1)), como era de se esperar. Este fato parece ser uma motivação adicional para se pensar nos dubletes (de correntes) como objetos mais gerais.

Capítulo 4

Generalização a Grupos Não-Abelianos.

4.1 Abordagem de AM para a dualidade entre os modelos Auto Dual (Não Abeliano) e Yang-Mills-Chern-Simons.

Segundo diversos autores, a abordagem via AM não pode ser utilizada para estabelecer a dualidade entre os modelos auto-duais em (2+1) Abelianos e não Abelianos e os modelos Yang-Mills-Chern-Simons, para todos os regimes de acoplamento. Neste trabalho, é proposto um ponto de vista alternativo. sendo demonstrado que, através dele, a equivalência pode ser obtida com abordagem via AM.

Há uma dualidade bem conhecida entre os modelos Maxwell-Chern-Simons em (2+1) dimensões e os modelos Abelianos auto-duais [6]: pode-se construir uma AM [5] para mostrar este resultado [6, 53, 54]. O mesmo assunto ser tratado aqui, através de um enfoque, porém, que permite a generalização para o caso no-Abeliano.

A versão não-Abeliana (NA) do tal modelo auto-dual [7] apresenta algumas dificuldades bem-conhecidas, em relação ao estabelecimento da equivalência dual à teoria YMCS [54] para todos os valores da constante de acoplamento.

A abordagem de AM, proposta primeiramente por Deser e Jackiw [6], mostrou-se útil ao exibir a equivalência dual no caso Abeliano; contudo, a situação é menos entendida no caso não-Abeliano, onde tal equivalência foi estabelecida somente em regimes de acoplamento fraco [54]. Em [53, 55], é mencionado que o uso da AM nesta situação não é eficaz para estabelecer esta dualidade, uma vez que YMCS (ou SD, reciprocamente) resulta em ser dual a uma teoria não-local.

Recentemente, demonstrou-se que uma técnica considerada alternativa [56] à abordagem da AM fornece o resultado esperado para o caso Abeliano; então, inferiu-se que também funciona para o caso não-Abeliano e para outros casos também [44, 56, 43].

Este método está baseado na idéia tradicional de *gaugeamento* de uma simetria global, e pode ser viabilizado pela incorporação de termos tipo-Noether. Todavia, quando aplicado ao caso não-Abeliano [43], este método não fornece uma prova, apenas uma sugestão para essa equivalência. O presente trabalho fornece uma prova direta baseada na abordagem via AM.

Este é o cenário atual do problema. Neste trabalho, aprofunda-se um pouco mais e é proposta uma nova maneira de se resolver as dificuldades com a AM, sugerida na Ref.[6], baseada numa análise perturbativa, além de apresentar a correspondência dual entre os modelos não-Abelianos SD e os YMCS, abrangendo todo o intervalo da constante de acoplamento, o que estende a prova proposta por Deser e Jakiw no domínio Abeliano.

Será mostrado que a AM proposta na Ref. [6], realmente, interpola YMCS com uma teoria (dual), cuja ação é auto-dual até a *quarta* ordem no campo.

O modelo Auto-Dual (AD) é dado pela ação,

$$S_{SD}[f] = \int d^3x \left(\frac{\chi}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda} f^{\mu} \partial^{\nu} f^{\lambda} + \frac{m}{2} f_{\mu} f^{\mu} \right) . \tag{4.1.1}$$

A combinação invariante de gauge de um termo de Chern-Simons com uma ação de Maxwell

$$S_{MCS}[A] = \int d^3x \left(\frac{1}{4m^2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\chi}{2m} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_{\mu} \partial_{\nu} A_{\lambda} \right) , \tag{4.1.2}$$

é uma teoria topologicamente massiva equivalente ao modelo autodual (4.1.1) [6], onde $F_{\mu\nu}$ é o usual tensor de Maxwell,

$$F_{\mu\nu}[A] \equiv \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]} . \tag{4.1.3}$$

Esta equivalência foi verificada com a abordagem de AM [6, 10]. Propomos, aqui, uma maneira alternativa para generalizar este ao caso não-Abeliano.

A versão não-Abeliana do modelo auto-dual (4.1.1), a qual é objeto de nosso estudo, é dada por

$$\mathcal{S}_{SD}[f] \equiv \int d^3x \, \frac{\chi}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \left(f_\mu{}^a \partial_\nu f_\lambda{}^a + \frac{\tau^{abc}}{3} f_\mu{}^a f_\nu{}^b f_\lambda{}^c \right) - \frac{m}{2} f_\mu{}^a f^{\mu a}, \quad (4.1.4)$$

onde $f_\mu = f_\mu^a \tau^a$ é um campo vetorial assumindo valores na álgebra de Lie do grupo de simetria G, e τ^a são matrizes representando os geradores do grupo de gauge subjacente, com $a = 1, \ldots, \dim G$; τ_{abc} são as constantes de estrutura do grupo *.

O tensor intensidade de campo agora se define como

$$F_{\mu\nu}[A] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu \, , A_\nu] \, . \quad (4.1.5)$$

A derivada covariante é $D_\mu = \partial_\mu + [A_\mu \, , \,]$, onde A_μ é também um campo vetorial na representação adjunta do grupo G. Isto pode ser escrito utilizando índices explícitos do grupo, usando $\left[\tau^a, \tau^b\right] = \tau^{abc}\tau^c$; o tensor de campo lê-se como

$$F_{\mu\nu}{}^a[A] = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \tau^{abc} A_\mu{}^b \, A_\nu{}^c \, . \quad (4.1.6)$$

Usando a AM , mostrou-se (na ref. [54]) que a ação (4.1.4) é equivalente à

*Estamos supondo que f_μ esteja na represent̤ção adjunta.

teoria (invariante de gauge) de Yang-Mills-Chern-Simons (YMCS):

$$\mathcal{S}_{YMCS}[A] = \int d^3x\, tr\left[\frac{1}{2m}\, F^{\mu\nu a}[A]\, F_{\mu\nu}{}^a[A] - \chi\, \epsilon^{\mu\nu\lambda}\left(A_\lambda{}^a\, \partial_\mu A_\nu{}^a + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\tau^{abc}}{3}\, A_\mu{}^a\, A_\nu{}^b\, A_\lambda{}^c\right)\right], \quad (4.1.7)$$

somente no limite de acoplamento fraco, $m^{-1} \to 0$, tal que o termo de Yang-Mills efetivamente se anula †. Com o objetivo de estabelecer a equivalência dual entre (4.1.4) e (4.1.7) para todos os regimes de acoplamento, escrevamos a AM,[6]:

$$\mathcal{S}_{Mestra}[A, f] = \mathcal{S}_{CS}[A] - \int d^3x\, \left[\epsilon^{\mu\nu\lambda}\, F_{\nu\lambda}{}^a[A] f_\mu{}^a + m f_\mu{}^a f^{\mu a}\right], \quad (4.1.8)$$

onde

$$\mathcal{S}_{CS}[A] \equiv \int d^3x\, \epsilon^{\mu\nu\lambda}\left(A_\mu{}^a \partial_\nu A_\lambda{}^a + \frac{\tau^{abc}}{3}\, A_\mu{}^a\, A_\nu{}^b\, A_\lambda{}^c\right). \quad (4.1.9)$$

Primeiramente, devemos observar que a Ação Mestra é invariante frente às transformações $A_\mu \to \Delta^{-1} A_\mu \Delta + \Delta_\mu$, $\quad f_\mu \to \Delta^{-1} f_\mu \Delta$. Δ_μ é um puro *gauge*: $\Delta_\mu := \Delta^{-1}\partial_\mu \Delta$, e Δ é um elemento do grupo. Podemos verificar isto diretamente, já que o termo de Chern-Simons, é, como se sabe, invariante de *gauge*, a menos de termos de fronteira, e o termo de acoplamento depende de A somente através do tensor de campo, o qual é invariante de *gauge*.

† A constante de acoplamento é dada pelo parâmetro de massa, $g^2 \equiv \frac{4\pi}{m}$.

De fato, considerando as redefinições $A_\mu = \Delta^{-1}\tilde{A}_\mu\Delta + \Delta_\mu$, $f_\mu = \Delta^{-1}\tilde{f}_\mu\Delta$, a menos de termos de fronteira obtém-se que,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{Mestra}[A,f] \equiv \mathcal{S}_{CS}[\tilde{A}] - \int d^3x Tr\,\Big(\epsilon^{\mu\nu\lambda}\,\Delta^{-1}\,F_{\nu\lambda}[\tilde{A}]\,\Delta\,f_\mu + \\ +m\,f_\mu f^\mu) = \mathcal{S}_{CS}[\tilde{A}] - \int d^3x Tr\,\Big(\epsilon^{\mu\nu\lambda}\,\Delta^{-1}F_{\nu\lambda}[\tilde{A}]\tilde{f}_\mu\Delta \\ +m\,\Delta^{-1}\tilde{f}_\mu\tilde{f}^\mu\Delta^{-1}\Big)\,. \qquad (4.1.10)\end{aligned}$$

Então,

$$\mathcal{S}_{Mestra}[A,f] \equiv \mathcal{S}_{Mestra}[\tilde{A},\tilde{f}]. \qquad (4.1.11)$$

Variando $\mathcal{S}_{Mestra}$ com respeito a f, obtemos

$$f^{\mu a} = -\frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\,F_{\nu\lambda}{}^a[A]; \qquad (4.1.12)$$

pondo este resultado de novo em (4.1.8), e usando a identidade

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha}\epsilon_{\mu\nu\lambda} = 2\,\delta^\alpha_\lambda, \qquad (4.1.13)$$

recuperamos a ação de YMCS, Eq. (4.1.7).

Agora, seguindo estritamente o programa padrão da AAM [5], devemos variar a AM com respeito a A, e usar a equação resultante para resolver A em termos do outro campo, f. Finalmente, deve-se eliminar A da ação. Desta forma, a variação com respeito ao campo A, nos dá:

$$2\epsilon^{\mu\nu\lambda}\left[\partial_{[\nu}A^{a}_{\lambda]}+\tau^{abc}A_{\nu}{}^{b}A_{\lambda}{}^{c}-\partial_{[\nu}f_{\lambda]}{}^{a}-2\tau^{abc}A_{\nu}{}^{b}f_{\lambda}{}^{c}\right]=0; \tag{4.1.14}$$

por usar (4.1.13), é possivel eliminar o símbolo de Levi-Civita, e a partir de (4.1.6), reescrever tal equação como

$$F_{\nu\lambda}{}^{a}[A_{\mu}-f_{\mu}]=\tau^{abc}f_{\nu}{}^{b}f_{\lambda}{}^{c}. \tag{4.1.15}$$

No caso Abeliano,

$$F_{\nu\lambda}[A_{\mu}-f_{\mu}]=0; \tag{4.1.16}$$

então, obtém-se

$$A_{\mu}=f_{\mu}+\Delta_{\mu}. \tag{4.1.17}$$

Colocando este resultado de volta na ação (4.1.8), recupera-se a teoria AD (4.1.1), a menos de termos de fronteira.

A solução para a equação geral (não-Abeliana) (4.1.15) é menos entendida; esta é a origem das dificuldades para estabelecer a correspondência dual com o modelo AD.

No caso Não-Abeliano, o tensor de campo não determina a diferença entre os potenciais $(A_{\mu}-f_{\mu})$, a menos de transformações de *gauge*; isto se conhece como a ambigüidade de Wu-Yang [58]. Em outras palavras, o operador F não pode ser invertido na equação (4.1.15) de forma unívoca ‡.

‡No *gauge* de Fock-Schwinger, a solução (não-local) de (4.1.15) é

Em [53], obtém-se uma solução, usando o *gauge* de Fock-Schwinger; esta é uma solução não-local (de segunda ordem em f).

Nós propomos uma forma alternativa para ver isto e contornar este problema como se verá a seguir. Lembremos que se deve obter uma solução *funcional,* $A_\mu = A_\mu[f_\nu]$, desta equação e substituí-la na ação (4.1.8), a qual resultará expressa em termos de f. Porém, podemos supor que existe uma solução, no mínimo, perturbativamente.

Vamos, então, supor uma expansão formal deste funcional, tendo a seguinte forma:

$$A_\mu = A_\mu^{(0)} + A_\mu^{(1)}[f_\nu] + A_\mu^{(2)}[f_\nu] + ... \qquad (4.1.18)$$

onde $A_\mu^{(0)}$ é independente de f_μ, e $A_\mu^{(1)}$ é de primeira ordem em f_μ. Então, este deve ser um funcional linear (pode ser um operador não-local) de f_μ; $A_\mu^{(2)}$ é de segunda ordem em f_μ, e assim por diante.

Realmente, estamos admitindo que o funcional $A_\mu[f_\nu]$ seja suficientemente analítico, de tal maneira que permita esta expansão (pelo menos até a primeira ordem). É possível aplicar uma análise perturbativa da solução e resolver esta equação ordem a ordem.

Inscrindo esta expansão na equação (4.1.8), e supondo que esta seja satisfeita a cada ordem, obtemos duas equações, para as ordens zero e um,

${A_\lambda}^a = {f_\lambda}^a + \int_0^1 dt\, t\, x^\nu (\tau^{abc}\, {f_\nu}^b\, {f_\lambda}^c)|_{tx^\mu}$, onde x^μ é o ponto do espaço-tempo [59]. Note que a parte não-local, é de segunda ordem em f.

respetivamente; a ordem zero é :

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda}[A_\mu^{(0)}] = 0. \tag{4.1.19}$$

Logo, usando mais uma vez (4.1.13), isto é

$$F_{\nu\lambda}[A_\mu^{(0)}] = 0, \tag{4.1.20}$$

conclui-se que a ordem zero corresponde a um puro gauge, que não contribui à ação (4.1.8). Assim, $A_\mu^{(0)}$ pode ser omitido da solução (4.1.18) §.

A primeira equação lê-se:

$$\partial_{[\nu}\left(A_{\lambda]}^{(1)\ a} - f_{\lambda]}^{\ a}\right) + \tau^{abc}\left(A_\nu^{(1)\ b} - f^{\ b}\right) A_\lambda^{(0)\ c} = 0. \tag{4.1.21}$$

Como estamos interessados em obter um modelo auto-dual cuja ação é de terceira ordem no campo potencial, vamos substituir a solução perturbativa (4.1.18) na ação mestre e manter os termos de terceira ordem em f:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{Mestra}[A^{(1)}, f] + \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu^{(2)}\partial_{[\nu}A_{\lambda]}^{(1)} + \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu^{(1)}\partial_\nu A_\lambda^{(2)} - 2\epsilon^{\mu\nu\lambda} f_\mu \partial_{[\nu}A_{\lambda]}^{(2)} + o^4(f). \tag{4.1.22}$$

§Como foi mostrado antes, pode-se redefinir $(A_\mu, f_\mu) \to (\Delta^{-1}\bar{A}_\mu\Delta + \Delta_\mu, \Delta^{-1}\tilde{f}_\mu\Delta)$, obtendo AM equivalente. Note também que estas transformações não alteram a ordem (em f) destas expressões.

Integrando por partes, tem-se:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{Mestra}[A^{(1)}, f] + \epsilon^{\mu\nu\lambda} 2[A_\mu^{(1)} - f_\mu]\partial_{[\nu}A_{\lambda]}^{(2)} + o^4(f). \tag{4.1.23}$$

Como conseqüência, podemos fazer uma observação crucial, a fim de obter a ação dual: *somente a primeira e segunda ordens contribuem à ação dual de terceira ordem.*

Calculemos, agora, a solução para a primeira ordem. Abaixo, devemos provar que a segunda ordem não será realmente necessária.

Como no caso Abeliano, podemos ver que

$$A_\mu^{(1)} = f_\mu\,, \tag{4.1.24}$$

e $A_\mu^{(0)} = \Delta_\mu$ é uma solução para (4.1.20) e (4.1.21) ¶.

Então, usando o fato discutido anteriormente, que um puro gauge é irrelevante para a ação, podemos escrever

$$A_\mu[f] = f_\mu + A_\mu^{(2)}[f]. \tag{4.1.25}$$

Substituindo este resultado em (4.1.23), vemos que o termo de segunda ordem anula-se identicamente e a segunda ordem, $A^{(2)}[f]$, contribuirá à ação

¶Note que (4.1.15) é equivalente a $F(A - f) = 0$ até segunda ordem. Isto implica que a diferença $A - f$, a segunda ordem, é um puro gauge. Então, podemos concluir que a solução (4.1.24) é essencialmente única.

somente na *quarta* ordem. Finalmente, temos:

$$\mathcal{S}[f] = \mathcal{S}_{Mestra}[f_\mu + A_\mu^{(2)}[f]\,, f_\mu] + o^4(f) = -\epsilon^{\mu\nu\lambda}\left[f_\mu{}^a \partial_\nu f_\lambda{}^a + \right.$$
$$\left. \frac{2\tau^{abc}}{3} f_\mu{}^a f_\nu{}^b f_\lambda{}^c - m\, f_\mu{}^a f^{\mu a}\right] + o^4(f). \quad (4.1.26)$$

Isto pode ser reescalado, $f_\mu \to \frac{1}{2} f_\mu$, e assim, a teoria AD é finalmente obtida,

$$\mathcal{S}[f] = -\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\left[f_\mu{}^a \partial_\nu f_\lambda{}^a + \frac{\tau^{abc}}{3} f_\mu{}^a f_\nu{}^b f_\lambda{}^c\right] - (\frac{m}{4}) f_\mu{}^a f^{\mu a} + o^4(f). \quad (4.1.27)$$

Isto completa a prova do argumento principal.

Pode-se concluir que YMCS é (dual) equivalente à teoria (descrita pelo campo f), que coincide com o modelo auto-dual para uma constante de acoplamento arbitrária, m^{-1}, até a quarta ordem em f. As bem-conhecidas contribuições não-locais apareceriam em ordens superiores em f. A abordagem perturbativa em f foi adotada como um artefato para resolver a equação gerada pela abordagem via AM. Realmente, a AM interpola as duas teorias a esta ordem em f; e isto é suficiente para assegurar a equivalência entre os modelos, visto que o modelo auto-dual já é de terceira ordem em f.

Este resultado tem conseqüência direta nas identidades de bosonização entre o modelo de Thirring massivo, quando os férmions carregam cargas não-Abelianas [10, 56, 57]; devido a que esta técnica supõe uma expansão da ação efetiva até terceira ordem no campo auxiliar f (um "loop" e três pernas externas).

Aqui, nossa estratégia foi um pouco diferente da análise usual. Atacamos este problema sob um ponto de vista perturbativo, o qual pode ser de ajuda para resolver problemas similares e estabelecer outras equivalências de dualidade entre modelos aparentemente diferentes, além da vantagem adicional de tornar mais direto o tratamento de estruturas matemáticas não-Abelianas. Esta é, talvez, a aplicação mais relevante deste estudo.

4.2 Bosonização e auto-dualidade em quatro dimensões para grupos não-Abelianos: fim do programa.

Nesta seção descrevemos um trabalho ainda em andamento. Por isto os resultados serão apresentados sem muito detalhe. Um modelo fermiônico massivo não-Abeliano do tipo-Thirring, em quatro dimensões, pode ser também bosonizado de acordo com a ideologia apresentada no Capítulo 3, resultando numa teoria que pode ser chamada de Auto-dual. Neste contexto, aparece naturalmente uma estrutura nova para os campos bosônicos, que os combina com matrizes de Dirac. Finalmente, se compusermos isto com o resultado da seção anterior, válido em três dimensões, obtém-se uma teoria com a forma de YMCS; a consistência e estrutura de gauge desta teoria devem, entretanto, ser melhor investigadas.

Bralić, Fradkin, Manias e Schaposnik realizaram a bosonização da versão não-Abeliana do modelo de Thirring tridimensional, que consiste simplesmente em considerar correntes fermiônicas que tomam valores na álgebra associada ao grupo de gauge em questão [54]. Aqui, seguimos a mesma ideologia para (de acordo com o esquema de bosonização que apresentamos no Capítulo anterior) estender a abordagem destes autore ao caso de quatro dimensões. Este cálculo será válido também em escalas de comprimento grandes comparadas com o comprimento de onda de Compton para o férmion.

Num modelo fermiônico massivo quadri-dimensional com carga de gauge não-Abeliana, tal como em 3d, define-se a corrente: $j_a^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\tau_a\psi$, onde ψ são N_f espinores de Dirac de quatro componentes ‖ na representação adjunta do grupo G. As correntes assumem valores na álgebra de Lie do grupo de simetria, G, e τ^a são as matrizes geradoras do grupo na representação adjunta, onde $a = 1, \ldots, \dim G$; e τ_{abc} são as constantes de estrutura.

Tal como no caso Abeliano, podemos definir uma corrente tensorial de ordem-2, $j_a^{\mu\nu} \equiv \bar{\psi}\gamma_5[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\tau^a\psi$; com esta, propomos o dublete:

$$\mathcal{J}_a = (j_a^\mu, j_a^{\mu\nu}). \tag{4.2.28}$$

De novo, $j_a^{\mu\nu}$ e j_a^μ são ímpares sob a conjugação da carga: $\bar{\psi}\gamma_5[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi = -\bar{\psi^C}\gamma_5[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi^C$.

Escrevamos, agora, o modelo de Thirring (não-Abeliano) em 4 dimensões

‖Neste cálculo, N_f será simplemente considerado como parâmetro.

Euclideanas **:

$$\mathcal{Z}^{(ferm)} \equiv \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \; e^{-\int\left(\bar{\psi}(\partial\!\!\!/+m)\psi-\frac{g^2}{2N_f m}[2\,j^a_{\mu\nu}j^{a\,\mu\nu}-j^a_\mu j^{a\mu}]\right)d^4x}, \tag{4.2.29}$$

onde m é a massa do férmion e g a constante de acoplamento do modelo, tal que g^2 tem dimensão de inversa de massa.

Analogamente ao caso Abeliano, tem-se a identidade,

$$e^{-\frac{g^2}{2N_f m}\int d^4x\,[2\,j^a_{\mu\nu}j^{a\mu\nu}-j^a_\mu j^{a\mu}]} = \int \mathcal{D}\mathcal{A}\; e^{\int d^4x\, tr(\frac{1}{2}[\frac{1}{2}b^a_{\mu\nu}b^{a\mu\nu}-a^a_\mu a^{a\mu}]+\frac{g}{\sqrt{mN_f}}[b^a_{\mu\nu}j^{a\mu\nu}-a^a_\mu j^{a\mu}])}, \tag{4.2.30}$$

a qual introduz o doublete de campos bosônicos na representação adjunta do grupo, $\mathcal{A}^a \equiv (a^a_\mu, b^a_{\mu\nu})$.

Definindo

$$\mathcal{A}\!\!\!/ \equiv \gamma^\mu a^a_\mu + \gamma_5[\gamma^\mu\,,\gamma^\nu]b^a_{\mu\nu} \;\equiv A^a_A\gamma^A, \tag{4.2.31}$$

onde

$$\gamma^A \equiv (\gamma^\mu, \gamma_5[\gamma^\mu\,,\gamma^\nu]). \tag{4.2.32}$$

A função de partição reduz-se a:

$$\mathcal{Z}^{(ferm)} = \int \mathcal{D}\mathcal{A}\;\det(i\partial\!\!\!/ + m + \mathcal{A}\!\!\!/)\, e^{\frac{1}{2}\int d^4x\,[\frac{1}{2}b^a_{\mu\nu}b^{a\mu\nu}-a^a_\mu a^{a\mu}]}. \tag{4.2.33}$$

A seguir, devemos calcular este determinante através do diagrama de um *loop* e 3 pernas fermiônicas. Isto está de acordo com o procedimento seguido

**Como antes, no espaço euclideano $j^{a\;\mu\nu}$ deve ser redefinido multiplicando-o por i.

por Bralić, Fradkin, Manias e Schaposnik em 3d.

Uma expanção perturbativa direta resulta em:

$$S_{eff}[\mathcal{A}, m] = N_f\, tr[\ln(\partial\!\!\!/ + m)] + N_f \frac{g}{\sqrt{N_f\, m}} tr\left(\frac{1}{\partial\!\!\!/ + m}\mathcal{A}\!\!\!/\right) +$$
$$\frac{N_f}{2}\left(\frac{g^2}{N_f\, m}\right) tr\left(\frac{1}{\partial\!\!\!/ + m}\mathcal{A}\!\!\!/\frac{1}{\partial\!\!\!/ + m}\mathcal{A}\!\!\!/\right) +$$
$$\frac{N_f}{2}\left(\frac{g^2}{N_f\, m}\right)^{3/2} tr\left(\frac{1}{\partial\!\!\!/ + m}\mathcal{A}\!\!\!/\frac{1}{\partial\!\!\!/ + m}\mathcal{A}\!\!\!/\frac{1}{\partial\!\!\!/ + m}\mathcal{A}\!\!\!/\right) + o^4(\mathcal{A}\!\!\!/) \quad (4.2.34)$$

Como no Capítulo anterior, consideramos os termos quadráticos nos campos bosônicos externos e os cálculos do caso Abeliano são repetidos integralmente; obtém-se, também, o termo BF:

$$S^{quad}_{eff}[A] = -8\frac{g^2}{(4\pi)^2}\int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} a^a_\mu \partial_\nu b^a_{\rho\alpha} = -8\frac{g^2}{(4\pi)^2}\mathcal{S}_{BF}(\mathcal{A}). \quad (4.2.35)$$

Se considerarmos a contribuição de terceira ordem (diagrama de três pernas), a ação induzida total fica:

$$S_{eff}[\mathcal{A}] = \mathcal{S}_{CS}[\mathcal{A}] + o^4(\mathcal{A}) \equiv \int d^3x\, Tr\left(\mathcal{A}\!\!\!/^a \partial\!\!\!/ \mathcal{A}\!\!\!/^a + \frac{\tau^{abc}}{3}\mathcal{A}\!\!\!/^a \mathcal{A}\!\!\!/^b \mathcal{A}\!\!\!/^c\right) + o^4(\mathcal{A}). \quad (4.2.36)$$

onde

$$\mathcal{S}_{CS}[A] \equiv \int d^4x\, Tr\left(\mathcal{A}\!\!\!/^a \partial\!\!\!/ \mathcal{A}\!\!\!/^a + \frac{\tau^{abc}}{3}\mathcal{A}\!\!\!/^a \mathcal{A}\!\!\!/^b \mathcal{A}\!\!\!/^c\right). \quad (4.2.37)$$

Deste ponto de vista, é legítimo chamar esta ação de "Chern Simons" e

$$\mathcal{S}_{AD}[A] \equiv \mathcal{S}_{CS}[A] + \int d^4x\, Tr\, (\mathcal{A}^a \mathcal{A}^a)\,, \tag{4.2.38}$$

de Auto-Dual. Para o caso não abeliano, observe que esta se reduz à nossa conhecida ação AD, quando o grupo considerado é o $U(1)$. Note que a ação AD em 3d também pode ser escrita desta forma, só que neste caso os doubletes não são necessários; então, deve-se tomar $\mathcal{A} \equiv \gamma^\mu A^a_\mu$.

Variando (4.2.37), podemos definir o que seria o dual ao tensor de campo para $\mathcal{A}$:

$$\tilde{F}^{a\,A}[A] \equiv \frac{\delta S_{CS}}{\delta A_{a\,A}} = 2Tr\left(\gamma^A\,[\not{\partial}\mathcal{A}^a + \tau^{abc}\mathcal{A}^b\,\mathcal{A}^c]\right). \tag{4.2.39}$$

Substituindo (4.2.37) em (4.2.33); podemos ver diretamente que a ação (bosonizada) efetiva final é, *a menos de termos de quarta ordem em* $\mathcal{A}^a$, a ação AD definida na eq. (4.2.38).

Note que a teoria escrita sob a forma sugestiva:

$$\mathcal{S}_T[A] = \int d^4x\, \frac{1}{2m}\,[\tilde{F}^{a\,A}\,\tilde{F}^a_A] - \chi\,\mathcal{S}_{CS}[A]\,, \tag{4.2.40}$$

aparece como YMCS (em 4d); isto, então, seria uma teoria massiva, envolvendo um doublete em D_1 e invariante de gauge, apesar de importantes objeções que podem ser feitas a este tipo de modelos, especialmente quando a quantização é considerada [60].

Apesar disto, é possível mostrar a correspondência da ação (4.2.40) com o modelo AD achado anteriormente. Isto pode ser verificado com uma AM da forma:

$$\mathcal{S}_{Mestra}[A,f] = \mathcal{S}_{CS}[A] - \int d^4x\, Tr\, \left[[\partial\!\!\!/ \mathcal{A}^a + \tau^{abc} \mathcal{A}^b \mathcal{A}^c] f^a + m f^a f^a \right] \tag{4.2.41}$$

Variando $\mathcal{S}_{Mestra}$ com respeito a f, obtemos

$$f^{a\,A} = -\tilde{F}^{a\,A}\,[A]; \tag{4.2.42}$$

substituindo isto de novo em (4.2.41), é fácil recuperar a ação (4.2.40).

Agora, utilizamos a técnica perturbativa explicada no seção anterior (em 3d) para resolver A em termos de f. E, como é de se esperar, o resultado é a ação (4.2.38) para o campo f ††.

Finalmente, mencionemos que é possível estabelecer uma identidade de bosonização com esta teoria, tal como acontece em três dimensões:

$$\mathcal{Z}_{(ferm)} \sim \int \mathcal{D}\mathcal{A} \exp S_T[\mathcal{A}]. \tag{4.2.43}$$

Apesar deste argumento, algumas objeções conceituais aparecem neste ponto, e devem ser melhor investigadas. É possível realmente associar esta teoria com YMCS? Estamos lidando com uma teoria de gauge razoável?

††A menos de termos de quarta ordem, o qual é consistente com a ordem considerada na bosonização desde o início.

Entre estas objeções, encontra-se o chamado teorema "NO-GO" que estabelece que uma teoria com as propriedades da S_T, não pode ser quantizada.

Uma outra objeção é se a simetria desta teoria, constitui realmente uma simetria de gauge; em particular, poderiamos associar a cada uma destas transformações um elemento em alguma representação do grupo de gauge em questão?

No que diz respeito a estas linhas, estamos progredindo, e os resultados devem ser anunciados em breve.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas.

O programa de generalização da correspondência Thirring-AD-MCS, mencionado no resumo, foi quase completamente realizado. Como resultado, uma enorme classe de teorias puramente fermiônicas, auto-interagindo com cargas Abelianas ou não-Abelianas, pode ser relacionada a teorias bosônicas de primeira ordem (AD), as quais resultam, também, conectadas a teorias de gauge muito gerais (lineares e/ou não-lineares).

Como explicado no capítulo anterior, alguns problemas formais apresentam-se no caso não-Abeliano em quatro dimensões, principalmente em relação à estrutura de grupo associada com a simetria do campo de Kalb-Ramond; no entanto, um importante progresso vem sendo feito recentemente para esclarecer este ponto [61]. Esta é uma questão fundamental, cuja resposta tem implicações não apenas no contexto desta tese, já que o campo de Kalb-Ramond aparece, por exemplo, como um objeto fundamental no limite de baixas energias da teorias das cordas fechadas.

Referências

[1] P. Pasti, D. Sorokin and M. Tonin, Phys. Lett. B352 (1995) 59; Phys. Rev. D52 (1995) R4277; S. Deser, Lectures given at 7th Mexican School of Particles and Fields and 1st Latin American Symposium on High-Energy Physics, Merida, Yucatan, Mexico, 1996, hep-th/9701157; D.I. Olive, Introduction to Duality, in *Cambridge 1997, Duality and supersymmetric theories* 62-94.

[2] O D.I. Olive, Exact electromagnetic duality, Nucl. Phys. B(Proc. Suppl.) 58 (1997) 43, hep-th/9508089; GH C. Gomez and R. Hernandez, Electric-magnetic duality and effective field theories, hep-th/9510023.

[3] E. Witten, Electric Magnetic Duality in Four-Dimensional Gauge Teories, 11th International Conference on Mathematical Physics: New Problems in the General Theory of Fields and Particles, Paris, France, 25-28 Jul 1994.

[4] J. Schwarz, Lectures on superstring and M theory dualities, Nucl. Phys.

Proc. Suppl. 55B (1997) 1; Elias Kiritsis, Lectures given at NATO Advanced Study Institute: TMR Summer School on Progress in String Theory and M-Theory , Cargese, hep-ph/9911525.

[5] A título de revisão sobre o uso da Ação Mestra: S. E. Hjelmeland, U. Lindström, UIO-PHYS-97-03, May 1997. e-Print Archive: hep-th/9705122 e referências que aí se encontram.

[6] S. Deser and R. Jackiw, Phys. Lett. B 139 (1984) 2366.

[7] P. K. Townsend, K. Pilch and P. van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. B 136 (1984) 38.

[8] A.M.Polyakov, Mod.Phys.Lett. A3 (1988) 325.

[9] S. Deser and A. N. Redlich, Phys. Rev. Lett. 61 (1988) 1541.

[10] E. Fradkin and F. A. Schaposnik, Phys. Lett. B338 (1994) 253.

[11] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, Ann. Phys. 140 (1982) 372.

[12] D.G.Barci, L.E.Oxman and S.P.Sorella, Nucl. Phys. B580 (2000) 721; J.C. Le Guillou, C. Nunez , F.A. Schaposnik, Annals Phys. 251 (1996) 426.

[13] M. Botta Cantcheff, Eur. Phys. Jour. C6 vol.4 (2002), 1-14 (e-Print Archive: hep-th/0107123).

[14] M. Botta Cantcheff, Phys. Lett. B 533 (2000) 126.

[15] M. Botta Cantcheff, Phys. Lett. B 528 (2000) 283.

[16] M. Botta Cantcheff, J. A. Helayel-Neto, " Bosonization and Duality in Arbitrary Dimensions: New Results " ; e-Print Archive: hep-th/0204057 ; aceito para publicação no Phys. Rev. D.

[17] M. Botta Cantcheff, *Non-Abelian Self-Duality and Topological Mass in Four Dimensions.*, trabalho em andamento.

[18] S. Deser, A. Gomberoff, M Henneaux and C. Teitelboim, *Duality, Self-Duality, Sources and Charge Quantization in Abelian N-Form Theories*, hep-th/9702184.

[19] C. Wotzasek, Phys.Rev.D58 (1998) 125026.

[20] Rabin Banerjee, Clovis Wotzasek, Phys.Rev.D63 (2001) 045005.

[21] Banerjee, N. and Banerjee, R., Mod. Phys. Lett. A11 (1996) 1919.

[22] J. Schwarz and A. Sen, Nucl. Phys. B411 (1994) 35.

[23] D. Zwanziger, Phys. Rev. D3 (1971) 880.

[24] S. Deser and C. Teitelboim, Phys. Rev. D13 (1976) 1592.

[25] R.Banerjee and C.Wotzasek, Nucl.Phys B527 (1998) 402.

[26] A. Aurulia and Y. Takahashi, Prog. Theor. Phys. 66 (1981) 693; Phys. Rev. D23 (1981) 752; T. J. Allen, M. J. Bowick and A. Lahiri, Mod. Phys. Lett. A6 (1991) 559.

[27] E. Harikumar, M. Sivakumar, Nucl. Phys. B 565 (2000) 385, e referências aí encontradas.

[28] E. Harikumar, M. Sivakumar, Mod.Phys Lett A 15 (2000) 121.

[29] E. Harikumar, M. Sivakumar, "Hamiltionian vs Lagrangian embedding of massive spin one theory involving two form field." ,hep-th/0104107.

[30] S. J. Gates Jr, C. M. Hull and M. Roček, *Twisted Multiplets and New Supersymmetric Non-Linear Sigma Models*, Nucl. Phys. B248 (1984) 157.

[31] M. Roček, K. Schoutens and A. Sevrin, *Off-shell WZW Models in Extended Superspace*, Phys. Lett. B265 (1991) 303.

[32] H. Gustafsson, S.E. Hjelmeland, U. Lindstrom, Phys.Scripta 60 (1999) 305.

[33] L.J. Romans, Phys.Lett.B169 (1986) 374.

[34] Bergshoeff, M. de Roo, M.B. Green, G. Papadopoulos, P.K. Townsend, Nucl.Phys.B470 (1996) 113.

[35] E. Cremer and J. Scherk, Nucl. Phys. B72 (1974) 117.

[36] M. Kalb and P. Ramond, Phys. Rev. D9 (1974) 2273.

[37] P. K. Tripathy and A. Khare, Phys.Lett. B504 (2001) 152.

[38] M. Born and M. Infeld, Proc. R. Soc. London A 144 (1934) 425.

[39] G.W. Gibbons, D.A. Rasheed; Nucl. Phys. B 454 (1995) 185; Phys. Lett. B 365 (1996) 46 .

[40] E. Harikumar, Avinash Khare, M. Sivakumar, Prasanta K. Tripathy Nucl.Phys.B618 (2001) 570 ,(hep-th/0104087).

[41] Para uma revisão veja A. A. Tseytlin; hep-th/9908105; Yuri Golfand memorial volume, ed. M. Shifman, World Scientific, 2000.

[42] R. Banerjee, E.C. Marino, Nucl.Phys.B507 (1997) 501; R. Banerjee, Nucl.Phys.B465 (1996) 157; C.P. Burgess, C.A. Lutken, F. Quevedo Phys.Lett.B336 (1994) 18; Kenji Ikegami, Kei-ichi Kondo, Atsushi Nakamura Prog.Theor.Phys.95 (1996) 203 .

[43] A. Ilha and C. Wotzasek, Nucl.Phys. B604 (2001) 426.

[44] M. A. Anacleto, A. Ilha, J. R. S. Nascimento, R. F. Ribeiro and C. Wotzasek, Phys. Lett. B504 (2001) 268.

[45] J. A. Helayel-Neto, Nuovo Cim. A81 (1984) 533.

[46] Cortes J. , Rivas E. , Velazquez L. , Phys.Rev. D53 (1996) 5952 (hep-th/9503194).

[47] M.Lüscher, Nucl. Phys. B326 (1989) 557.

[48] E. C. Marino, Phys. Lett. B263 (1991) 63.

[49] R. Banerjee, C. Marino, Phys. Rev. D56 (1997) 3763.

[50] T.J. Allen, M.J. Bowick, and A. Lahiri, Mod. Phys. Lett. A6 (1991) 559; R. Amorim and J. Barcelos-Neto, Mod. Phys. Lett. A10 (1995) 917.

[51] I. A. Batalin and E. S. Fradkin, Nucl. Phys. B279 (1987) 514; I. A. Batalin and I. V. Tyutin, Int. J. Mod. Phys. A6 (1991) 3255.

[52] E.Smailagic, E. Spallucci, Phys. Rev. D61 (2000) 067701.

[53] A. Karlhed, U. Lindström, M. Roček and P. van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. B 186 (1987) 96.

[54] N. Bralić, E. Fradkin, V. Manias and F. A. Schaposnik, Nuc. Phys. B 446 (1995) 144.

[55] N. Banerjee, R.Banerjee and S.Ghosh, Nucl. Phys. B 527 (1998) 402.

[56] D. Bazeia, A. Ilha, J.R.S. Nascimento, R.F. Ribeiro, C. Wotzasek Phys.Lett.B510 (2000) 329.

[57] J.C. Le Guillou, E.F. Moreno, C. Nunez, F.A. Schaposnik, Mod. Phys. Lett. A12 (1997) 2707.

[58] T. T. Wu and C. N. Yang, Phys.Rev. D 12 (1965) 3843.

[59] V. A. Fock, Sov. Phys. 12 (1937) 404; J. Schwinger, Phys. Rev. 82 (1952) 684.

[60] M. Henneaux, V. Lemes, C.A.G. Sasaki, S. Sorella, O. Ventura, L. Vilar; Phys. Lett. B 410 (1997) 195.

[61] M. Botta Cantcheff, *On the group structure of the Kalb-Ramond gauge theory.*, hep-th/0207167, trabalho submetido para publicação.

“Auto-Dualidade, Bosonização e Teorias Topologicamente Massivas com Dimensões e Grupos Arbitrários”

Marcelo Angel Nicolas Botta Cantcheff

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Física, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

José Abdalla Helayel Neto – Presidente/CBPF

Álvaro de Souza Dutra – UNESP-Guaratinguetá

Carlos Farina de Souza – UFRJ

Adolfo Pedro Carvalho Malbouisson – CBPF

Sebastião Alves Dias - CBPF

Rio de Janeiro 25 de dezembro de 2002