TESE DE

DOUTORADO

Quebra de Lorentz em Teorias de Gauge: Aplicações a Fenômenos Planares e Conseqüências da Supersimetria

HUMBERTO BELICH JÚNIOR

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, JUNHO DE 2003

Dedicatória

Agradecimentos

A *José Abdallah Helayël-Neto* pela contribuição em minha formação, pela sua orientação, amizade, generosa ajuda e incentivo, sem os quais este trabalho não seria possível.

Ao Prof. Sebastião Alves Dias pela contribuição em minha formação, ajuda, incentivo, e exemplo de Coragem e Desprendimento.

Ao meu grande amigo e irmão Manoel Messias Ferreira Júnior, pelo companheirismo, pela valorosa colaboração e grande amizade.

Ao Colatto pela revisão da tese, e grande ajuda no latex.

Aos Companheiros Guillermo Cuba, Marco Tadeu, Antônio Scarpelli, J. L. Boldo, Álvaro Nogueira, e Luis Paulo Colatto, por ter aguentado esta mala que vos escreve.

Aos Companheiros do DCP: André Pena-Firme,Álvaro Ferreira, Hugo Christianse, Guilherme Berredo, Mauro e Guida, Marco Aurélio, Ricardo Pascoal, Gustavo Dourado, Thales Soares, Leonardo Moraes, Leonardo de Assis (Coronel), Marcelo Bota, Roger, Moises, Francisco Augusto, Edson da Graça, Marco A. De Andrade (Marquinho), Claudio e Daniel Sasaki.

Aos amigos que tive oportunidade de conviver no CBPF, e que partiram: Marcelo Lima, João Felipe Medeiros, Danilo Alves, Winder, Ion, Casana, Gino, Marco Flores, German, Francisco, Julio, Gilmar, Marcelo Sarandi.

A grande colaboração e amizade: Rosângela, Eliseth, Beth e Regina,

A CFC, Mírian e Ricardo pela Paciência.

Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, por ter dado esta oportunidade e pelos vários anos de bons relacionamentos.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta tese investigamos a proposta de quebra da Simetria de Lorentz, e Simetria CPT. Com este objetivo tomamos uma estensão particular do termo de Chern-Simos em $D = 1+2$, estabelecendo uma teoria de Maxwell-Chern-Simons em $D = 1+3$. A constante de acoplamento transforma-se em um quadrivetor de fundo que fica contraído com o quarto índice do tensor de Levi-Civita, e tem a forma

$$c_\mu \, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu F_{\alpha\beta}.$$

Na teoria de Maxwell-Chern-Simons observamos uma propriedade curiosa: a birrefringência, que é típica de Meios Magnetizados, torna-se um efeito do vazio! Também verificamos, via redução dimensional deste modelo, a anisotropia gerada pelo quadrivetor de fundo c_μ. Neste contexto, encontramos soluções de onda clássica para o trivetor c_μ sendo do tipo-espaço, e do tipo-tempo. Os aspectos de causalidade, unitaridade do modelo são cuidadosamente analisados, em ambas as formas de c_μ.

Realisamos um estudo de consistência de causalidade, unitaridade da Eletrodinâmica de Maxwell-Chern-simons com o mecanismo de quebra espontânea de simetria em $D = 1+3$. Obtemos uma solução de Nielsen-Olesen de vórtice estendida deste modelo, devido ao termo de quebra. Por fim, construímos uma estensão supersimétrica da teoria de Maxwell-Chern-Simons e obtivemos novos termos advindo desta supersimetrização.

Summary

In this thesis we analyze the purpose of breaking of Lorentz and CPT symmetries. To this aim we have taken a particular extension of the $D = 1 + 2$ Chern-Simons term, to plug into Maxwell-Chern-Simons in $D = 1+3$. The coupling constant generated becomes a fourvector contracted to the fourth index of the Levi-Civita tensor in the form

$$c_\mu \, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu F_{\alpha\beta}.$$

In the Maxwell-Chern-Simons theory we have observed a curious property, the birefringence, a typical effect of Magnetized Environments on the vacuum. We also verify that in the planar system obtained by dimension reduction the appearance of an anisotropy.

We observe that this breaking of symmetry is naturally generated by the fourvector c_μ. In this context we find classical solutions of the wave equations to the three-vector being space- and time-like. The aspects of unitarity, causality and stability of this model, in both forms of c_μ, are carefully studied.

We have proposed to verify the consistency of a Abelian Maxwell-Chern-Simons Electrodynamics with spontaneous symmetry breaking mechanism in $D = 1 + 3$.

We have obtained an extended solution of Nilsen-Olesen vortex in this model due to the breaking terms.

Finally, we have constructed a supersymmetric extension of the Maxwell-Chern-Simons theory and we have obtained a new coupling term generated by the superfield background.

Índice

Introdução

A idéia de que o espaço-tempo possa envolver coordenadas não-comutativas vem despertando um crescente interesse, já que este cenário surge naturalmente em teoria de cordas [1]. O comutador das coordenadas x^μ seria:

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \tag{1}$$

sendo $\theta^{\mu\nu}$ real e anti-simétrico. Um tema central em qualquer teoria não-comutativa realística seria a violação da simetria de Lorentz, em virtude de $\theta^{\mu\nu}$, na Eq. (1), não ser nulo. O estudo dessas possibilidades de quebra de Lorentz foi motivado, inicialmente, pelas propostas de violoação que surgiram nos últimos anos em QED: a quebra proposta pelos modelos é realizada através de um ou vários índices, que são rígidos perante transformações ativas de Lorentz. Estes índices, sob "boosts" passivos, comportam-se de maneira covariante. A QED seria uma teoria de campos efetiva , um limite a baixas energias de uma teoria fundamental. A presença de índices de fundo, que não sentem "boosts" ativos de Lorentz, seria a manifestação de que estamos numa teoria que não é fundamental, pois não consegue explicar a origem dessa influência de fundo. Os índices de θ apresentam este comportamento.

A conexão de teorias não-comutativas com as teorias usuais é realizada através do Mapeamento de Seiberg - Witten. A novidade é que surgem os termos usuais da QED contraídos com θ [2]. Há evidências que sugerem que a constante de estrutura fina α - uma medida da intensidade da interação eletromagnética entre fótons e elétrons - está lentamente aumentando em uma escala de tempo cosmológica [17]. Como $\alpha = \frac{e^2}{c\hbar}$ (sendo e a carga elétrica, $\hbar$ a constante de Plank e **c** a velocidade da luz), entra em questão qual destas três constantes fundamentais seria realmente constante. Em [3], considera-se a possibilidade de se verificar, via teste de consistência, através da termodinâmica de Buracos Negros[1], qual constante poderia variar sem violar a Segunda Lei da Termodinâmica.

Evidências de violação de simetria de Lorentz vêm da observação de raios cósmicos, para energias além do limite GZK, $E_{GZK} \simeq 4 \times 10^{19}\ eV$ [4]. De acordo com as teorias vigentes, este raios, que superam o limite GZK, deveriam decair antes de chegar em nossa galáxia; portanto, uma possível explicação é que estes raios sejam supra-luminais.

Um outro problema que reforça a possibilidade de violação de simetria de Lorentz são observações sobre a polarização de ondas E.M. que vêm de uma região espaço. Medidas de emissão de ondas de rádio vindas de galáxias distantes e quasares verificaram que o vetor de polarização dessas ondas não é orientado de maneira aleatória.

Quando uma onda com polarização plana (que pode ser encarada como a composição de duas ondas circularmente polarizadas) entra em um meio magnetizado, pode ocorrer uma diferença de velocidade de um dos modos circulares em relação ao outro. Essa diferença provoca uma rotação no plano de polarização: esta propriedade é conhecida como efeito magnéto-ótico. A luz que é observada ser proveniente de outras galáxias tem uma rotação maior do que previsto por este efeito! Uma possível explicação sería devido a uma birrefringência do vácuo provocada por um termo de Chern-Simons em $(1+3)$ dimensões [5]. No próximo capítulo, vamos fazer uma descrição fenomenológica de como aparece este efeito em meios magnetizados; estudaremos como o termo de Chern-Simons induz também uma birrefringência no vácuo, e iremos comparar estes dois tipos de birefrigências.

Esta tese encontra-se organizada segundo a disposição que se segue. No Capítulo

[1]No caso de um buraco negro não-girante, com carga elétrica Q e massa M, a área do horizonte de evento é $A_H = 4\pi r^2$; $r = \frac{G}{c^2}\left(M + \sqrt{M^2 - \frac{Q^2}{G}}\right)$. A entropia é dada por $S_H = \left(\frac{kc^3}{4G}\right) A_H$, sendo k a const. de Boltzmann, e G const. gravitacional. A entropia fica da forma:
$S_H = \frac{k\pi G}{\hbar c}\left(M + \sqrt{M^2 - \frac{Q^2}{G}}\right)^2$.

1 situamos o problema da quebra da simetria de Lorentz, analisando as alterações da Eletrodinâmica Livre de Maxwell em presença de um termo massivo, e em seguida com o termo de Chern-Simons em 4-D. Verificamos como surge o efeito de birrefringência em Matéria Condensada, e comparamos com a birrefringência no vácuo provocada pelo termo de Chern-Simons. No Capítulo 2 analisamos a consistência de uma teoria de Maxwell-Chern-Simons com quebra espontânea de simetria, e chegamos a uma solução de vórtice. No Capítulo 3 é feita uma redução dimensional e obtemos a contribuição do quadrivetor de fundo em uma teoria de Maxwell-Chern-Simons em 1 + 2 dimensões. No Capítulo 4 realizamos uma estensão supersimétrica minimal que gera naturalmente o termo de Chern-Simons em 4-D e outras contribuições. A influência desses novos termos na massa do gaugino é analisada. Finalmente, apresentamos as conclusões gerais e as Perspectivas Futuras.

Capítulo 1

Fundamentos dos Modelos de Gauge com Quebra da Simetria de Lorentz e CPT

A Relatividade Especial está firmemente estabelecida no panorama descrito pela Física atual, e é experimentalmente confirmada sem nenhuma exceção. Contudo, o desenvolvimento da tecnologia de alta precisão leva-nos a indagar se este princípio é apenas aproximadamente verdadeiro, e se poderíamos ter um mecanismo que a violasse.

As simetrias são um guia fundamental quando se pretende iniciar o estudo das invariâncias de uma teoria. A Teoria Qûantica de Campos apresenta duas importantes simetrias: uma relacionada com a invariância de Lorentz e outra relacionada com a simetria chamada de CPT, propriedades estas que também são respeitadas pelo Modelo Padrão. A quebra destas simetrias sugere que pode haver uma teoria mais fundamental - pesquisas nesta direção são rotuladas como Física Além do Modelo Padrão. Uma descrição do Modelo Padrão incorporando estas duas quebras foi desenvolvida simultaneamente por Colladay e Kostelecky[6, 7], e por Coleman e Glashow [8, 9]. O termo que provoca estas violações é uma extensão natural do termo de Chern-Simons proposta por Jackiw[10], que transforma a constante de acoplamento num quadrivetor. O termo, então, aparece na ação como

$$\Sigma_{CS} = -\frac{1}{4}\int dx^4 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} c_\mu A_\nu F_{\alpha\beta}, \tag{1.1}$$

sendo que o quadrivetor c_μ é dado por $c_\mu = (m, \vec{c})$. Vamos analisar como a simetria de gauge determina as características do quadrivetor c_μ.

As invariâncias de *gauge* e Lorentz são duas simetrias fundamentais da Eletrodinâmica de Maxwell. As propriedades da radiação eletromagnética, tanto as observadas "in natura", como em laboratórios de altas energias são descritas por uma dinâmica que é invariante de Lorentz. A invariância de *gauge* está ligada ao fato do fóton não ter massa. Então, à primeira vista, uma maneira de se quebrar a simetria de *gauge* seria incluir um termo massivo tipo Proca:

$$\Sigma = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + M^2 A_\mu A^\mu \right\}. \tag{1.2}$$

Observamos que a invariância de *gauge* dada por:

$$A_\alpha \to A_\alpha + \partial_\alpha \Lambda \tag{1.3}$$

é claramente perdida.

O Mecanismo de Higgs implementa este termo de massa sem a quebra de simetria de gauge. Nesta prescrição, em uma teoria invariante de gauge local para uma aproximação a baixas energias, o fóton ganha massa e a simetria de gauge fica escondida. O vácuo não-trivial induz o surgimento de um "background" (um meio dielétrico [11]) e o fóton se propaga neste meio com uma velocidade diferente em relação ao vácuo trivial. Acrescentando-se o termo (1.1) à ação (1.2), isto implica em um acoplamento com o campo eletromagnético através de um vetor c_μ, ainda não especificado.

Em fenômenos onde o campo eletromagnético está confinado a um plano, como no Efeito Hall Quântico, e na supercondutividade a altas temperaturas, supomos que não existe alguma dinâmica na direção perpendicular ao plano. Então, o vetor externo, c_μ, pode ser escolhido livremente no sentido perpendicular ao plano e, assim, reduzimos o problema a uma não-convencional Eletrodinâmica, que é invariante de gauge e Lorentz no espaço-tempo de dimensão $(2+1)$, ou seja, "boosts" restritos ao plano deixam a dinâmica invariante. Neste contexto, o termo de Chern-Simons foi inicialmente tomado como um termo de "massa topológica" para campos de gauge no espaço-tempo $(2+1)$ dimensional. Os modelos nos quais somente aparece o termo de Chern-Simons na ação vêm encontrando aplicações no Efeito Hall Quântico, e Supercondutividade a Altas Temperaturas.

Vamos investigar sob que condições o termo Σ_{CS} é invariante de gauge. A variação funcional $\delta\mathcal{L}_{CS}$ em relação ao campo de gauge $\delta A_\alpha = \partial_\alpha\Lambda$ fica:

$$\delta\Sigma_{CS} = \frac{1}{8}\int dx^4 \Lambda \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}(\partial_\mu c_\nu - \partial_\nu c_\mu). \tag{1.4}$$

A invariância de gauge impõe que o termo acima se anule para um parâmetro arbitrário Λ. Portanto, temos que impor que o rotacional de c_μ seja nulo, isto é, que c_μ seja o gradiente de um campo escalar. Mas, este campo escalar não apresenta dinâmica. Vamos considerar o caso em que o quadrivetor c_μ seja constante. Este quadrivetor define uma direção preferencial no espaço-tempo. Especificamente, a componente espacial não-nula viola a invariância rotacional, e a componente c_0 destrói a invariância relacionada aos "boosts" de Lorentz. Pode-se demonstrar que este termo origina uma atividade ótica no vácuo[10, 12]. Medidas astrofísicas [13, 14] envolvendo a isotropia do espaço, contudo, tem imposto um limite na magnitude do quadrivetor c_μ.

Uma discussão interessante tem surgido a partir da investigação sobre a possibilidade desse termo de Chern-Simons ser gerado radiativamente no setor fermiônico de uma QED tradicional, particularmente quando o termo axial $b_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi$, o qual viola as simetrias de Lorentz e CPT, é acrescentado ao modelo[16, 15].

Vamos realizar uma análise cuidadosa das situações-limite em que o quadrivetor c_μ poderia ser tomado, e verificar se há a consistência física nestas situações. Em [12], foi analisada a consistência da quantização de uma teoria Abeliana com inclusão de Σ_{CS}. Foram estudadas as implicações sobre unitaridade e causalidade nos casos onde, para pequenas magnitudes, o quadrivetor c_μ é de tipo-tempo e, também de tipo-espaço. A análise mostrou que o comportamento físico desta teoria depende da direção determinada por c_μ, indicando o comportamento de uma onda eletromagnética propagando-se em um meio anisotrópico. Foi mostrado que para c_μ puramente de tipo-espaço, é encontrado um propagador de Feynman bem-comportado para o campo de gauge; unitaridade e micro-causalidade são mantidas. Por outro lado, para um c_μ de tipo-tempo unitaridade e a causalidade são destruídas. Entretanto, não tem sido feitas análises dos pólos e resíduos destes modelos. Dentro desta perspectiva, no Capítulo 2 vamos fazer uma análise mais primitiva das propriedades acima citadas, a qual não leva em conta a saturação da corrente associada à invariância de gauge. Realizaremos essa análise em um modelo com quebra espontânea de simetria, onde surgirá um aspecto intrigante: mesmo com a quebra espontânea aparecem modos de massa nula.

Analisaremos a consistência do processo de quantização de uma teoria Abeliana que incorpora o termo que viola a simetria de Lorentz e CPT, juntamente com o mecanismo de quebra espontânea de simetria. A análise é feita investigando a analiticidade e causalidade da matriz-S. Faremos o cálculo da parte imaginária do resíduo do pólo da matriz S. Cosideraremos a situações nas quais o quadrivetor c_μ pode ser de tipo-espaço, tipo-tempo e nulo. A quebra espontânea de simetria é interessante nesta última situação, porque o mecanismo de geração de massa para o campo de gauge pressupõe que a teoria seja invariante de Lorentz. Entretanto existe a possibilidade de violação deste mecanismo, de tal forma que a massa do bóson de Higgs não seja gerada. Em tal situação, também estudamos a formação de vórtices, analisando a influência da direção escolhida para c_μ no espaço-tempo. A presença do termo de Chern-Simons produzirá modificações interessantes na equação de movimento, as quais iremos analisar no próximo Capítulo.

1.1 A Eletrodinâmica de Maxwell-Proca em $(1+3)D$

Vamos recuperar as equações de Maxwell, tanto na notação compacta covariante de Lorentz, como na notação vetorial. Os campos elétrico e magnético $(\vec{E}, \vec{B})$ são as componentes do tensor anti-simétrico de segunda ordem $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, ou também do seu dual $F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \quad \text{ou} \quad \partial_\mu \mathrm{F}^{*\mu\nu} = 0; \tag{1.5}$$

podemos exprimir os campos em termos do potencial vetor $A^\mu = (\phi, \vec{A})$, por combinações que são invariantes sob transformações de gauge:

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda, \qquad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda, \tag{1.6}$$

que na forma compacta se escrevem:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \Lambda. \tag{1.7}$$

Em termos dos campos,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \tag{1.8}$$

o chamado "field-strenght" é escrito como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{1.9}$$

O segundo conjunto das equações de Maxwell, que apresenta fontes de densidade de carga e corrente $\vec{j}$, $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$, é dado por:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \quad \vec{\nabla}.\vec{E} = 4\pi\rho \tag{1.10}$$

ou na forma covariante:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}\, j^\nu , \tag{1.11}$$

o qual pode ser derivado da densidade de Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \rho\phi + \frac{1}{c}\vec{j}.\vec{A} = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}j^\mu A_\mu \ , \tag{1.12}$$

sendo que a variável básica é o quadrivetor potencial, sendo o campo eletromagnético expresso em termos deste. Pela equação de movimento, chegamos à equação de continuidade

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}.\vec{j} = 0 \ . \tag{1.13}$$

Vamos adicionar um termo para a massa do fóton (Proca) $\frac{\mu^2}{2}A_\mu A^\mu = \frac{\mu^2}{2}\phi^2 - \frac{\mu^2}{2}\vec{A}^2$ onde μ tem dimensão do inverso do comprimento. Na nova equação de movimento, enfatizamos que $-\mu^2\vec{A}$ é acrescentado a j^μ, e a relação de dispersão que se obtém[1] no caso em que $j^\mu = 0$, é dado por:

$$k^\alpha k_\alpha = \mu^2. \qquad \omega = c\sqrt{\mathrm{k}^2 + \mu^2.} \tag{1.14}$$

Este termo não viola a simetria de Lorentz - a expressão matemática do Princípio da Relatividade - mas destrói a razão física que levou Einstein a fundar a Relatividade Especial: a luz passa a não mais viajar com uma velocidade universal em todos os referenciais, e "c" se torna uma velocidade limite misteriosa, que não está ligada a qualquer partícula física conhecida. A invariância de gauge, como já vimos, é violada, entretanto sabemos que o princípio de gauge pode ficar escondido por um mecanismo de quebra espontânea de simetria. Em resumo, verificamos que resolvendo as equações de movimento sem fonte, obtemos campos eletromagnéticos os quais ficam distorcidos pelo termo de massa. Vamos revisitar este mecanismo no próximo Capítulo.

---

[1]Lembrando que $e^{-ik_\alpha x^\alpha} = e^{-i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$, $k^\alpha = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$, $k \equiv |\vec{k}|$

1.2 A Eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons em $(1+3)D$

Vamos, então. analisar a proposta sugeridas por Jackiw nos trabalhos[34, 42]. Primeiramente, observamos que além de um termo do tipo $-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \vec{E}^2 - \vec{B}^2$, um outro escalar de Lorentz, quadrático nos campos, pode ser sempre construído: $-\frac{1}{4}F^{*}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \vec{E}.\vec{B}$. A adição deste último termo no Lagrangeano não afeta as equações de movimento, pois este termo, quando expresso através dos potenciais, que são as variáveis dinâmicas em uma formulação Lagrangeana, envolve derivadas totais, que não contribuem dinamicamente. Ou explicitamente,

$$F^{*}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \partial_{\mu}(\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_{\nu}F_{\alpha\beta}), \tag{1.15}$$

que na forma vetorial se apresenta como:

$$-4\vec{E}.\vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}.\vec{B}) + \vec{\nabla}.(\phi\vec{B} - \vec{A}\times\vec{E}) \tag{1.16}$$

No trabalho [34], no entanto $\vec{E}.\vec{B}$ é multiplicado por um outro campo dependente do espaço-tempo, $\theta(t,\vec{r})$. Neste caso, o recurso de reduzir o termo a uma derivada total não é mais válido. Quando tentamos fazer esta redução, verificamos que a adição de um termo $\theta F^{*}F$, a menos de uma derivada total, é equivalente a adicionar $-\partial_{\mu}\theta\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_{\nu}F_{\alpha\beta}$. Se θ fosse um campo dinamico, então este eletromagnetismo estendido (acrescentando θ), permaneceria invariante de Lorentz. Observamos, contudo, que a densidade de Lagrangeano não aparecem ao mesmo tempo θ e $\partial_{\mu}\theta$. Portanto, levando em conta somente o termo $\partial_{\mu}\theta$, o momento canonicamente conjugado a θ é conservado, não sendo mais uma variável dinâmica. Em resumo, ao invés de $\partial_{\mu}\theta$ temos um quadri-vetor constante $c_{\mu} = (m, \vec{c})$. Este, por sua vez, é implementado como um vetor de fundo, caracterizando, assim, uma direção preferencial no espaço-tempo, e portanto violando a invariância de Lorentz. Vamos, então, considerar uma teoria eletromagnética, onde a densidade de Lagrangeano convencional de Maxwell é modificada, acrescentando,

$$\mathcal{L}_{CS} = -c_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} c_\mu F^{*\mu\nu} A_\nu = -\frac{1}{2} m \vec{A}.\vec{B} + \frac{1}{2} \vec{c}.(\phi \vec{B} - \vec{A} \times \vec{E}). \tag{1.17}$$

Observamos que as equações sem fonte não mudam. As equações com fonte são escritas na forma

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} j^\nu + c_\mu F^{*\mu\nu} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} - m\vec{B} + \vec{c} \times \vec{E}, \\ \vec{\nabla}.\vec{E} &= 4\pi\rho - \vec{c}.\vec{B} \end{aligned} \tag{1.18}$$

Note que as equações de campo são invariantes de gauge, enquanto que a densidade de Lagrangeano não. As quantidades $\vec{c}$ e m têm dimensão do inverso do comprimento; m quebra a invariância frente aos "boosts" de Lorentz, e $\vec{c}$ quebra a invariância rotacional, selecionando uma direção no espaço[2]. Notamos que a paridade é também quebrada, já que o campo magnético aparece multiplicado pelo elétrico. Com isto observamos que apesar da conjugação de carga e da inversão temporal permanecem intactas a simetria CPT é quebrada.

Num espaço-tempo (1 + 2)-dimensional, o tensor de Levi-Civita tem somente três índices, e neste caso o termo de Chern-Simons pode ser introduzido sem o quadrivetor externo , c_μ; então, a simetria de Lorentz é preservada por $\delta\mathcal{L} = \delta\left(-m\epsilon^{\nu\alpha\beta}A_\nu F_{\alpha\beta}\right) = 0$. Isto se verifica pela anti-simetria de $\epsilon^{\nu\alpha\beta}$, e pela consequente anulação do termo de fronteira.

Analisando o caso quando $\vec{c}$ se anula, na ausência de fontes, e com campo elétrico nulo ($\vec{E} = 0$), as equações de Maxwell modificadas ficam:

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

[2]Um caso interessante pode ser verificado quando $\vec{c}$ se anula, neste caso recuperamos a isotropia do espaço

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -m\vec{B}. \tag{1.19}$$

Estas equações aparecem também na Magnetostática. Elas coincidem com as equações de Maxwell convencionais em presença de fontes neutras e corrente estacionária ($\rho = 0$, $\vec{\nabla}.\vec{j} = 0$), e se assemelham à lei de Ampère convencional, quando se impõe que $\vec{j}$ é proporcional a $\vec{B}$.

Neste momento, uma pergunta pode ser feita: Qual a conseqüência da quebra de invariância de Lorentz?

Para responder vamos, primeiramente, examinar a relação de dispersão na ausência de fontes ($\rho = \vec{j} = 0$, $j^\mu = 0$):

$$(k^\alpha k_\alpha)^2 + (k^\alpha k_\alpha)(c^\beta c_\beta) = (k^\alpha c_\alpha)^2 \tag{1.20}$$

Desta equação, pode-se ver que o surgimento de c^α provoca o "splitting" da dinâmica do fóton em dois modos de polarização, cada um viajando com diferentes velocidades $\frac{\omega}{k}$ - evidência da quebra da invariância de Lorentz e da paridade. Podemos observar isto, considerando c^α do tipo-tempo, num referencial de repouso implicando que $\vec{c} = 0$. Neste caso, a equação (1.20) fica

$$\omega^2 = ck(ck \pm mc). \tag{1.21}$$

Observe que ω pode se tornar imaginário para modos onde $k < m$. Isto significa que há soluções instáveis. Entretanto, isto não contraria o princípio da conservação de energia, apenas a energia, ε, não é mais uma expressão positiva da teoria de Maxwell, $\frac{1}{2}\int d^3r$ $(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$. Temos, de fato:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\int d^3r \left[\vec{E}^2 + \left(\vec{B} + \frac{m}{2}\vec{A}\right)^2\right] - \frac{m^2}{8}\int d^3r \vec{A}^2, \tag{1.22}$$

com dois tipos de soluções instáveis contribuindo para ε crescer indefinidamente. Este ponto será revisitado quando da introdução do termo de Proca no próximo Capítulo.

1.3 O Efeito Magneto-Ótico

Podemos expressar matematicamente uma onda eletromagnética linearmente polarizada como sendo a superposição de duas componentes circularmente polarizadas. Quando um feixe luminoso proveniente do vácuo entra num meio magnetizado, podem entrar em cena dois processos. Primeiro, os dois modos podem apresentar diferentes velocidades, o que acarreta uma diferença de fase à medida que a onda, referente a este feixe, se propaga, resultando numa rotação do plano de polarização. Este comportamento foi descoberto por Faraday, e é conhecido como efeito Magneto-Ótico. O segundo, seria provocado por diferentes taxas de absorção do meio em relação aos dois modos, o que influencia na elipticidade da propagação. Em geral, ambos os efeitos podem existir em um meio magnetizado. Para materiais transparentes, a o processo de rotação do plano de polarização usualmente domina sobre a elipticidade. Para materiais metálicos ocorre o inverso. Para outros casos em relação a materiais magnetizados, em geral, ambos os efeitos aparecem.

Uma descrição macroscópica do Efeito Magneto-Ótico, que está baseada na análise do tensor dielétrico, pode implicar em diferentes índices de refração para modos "left" e "right" [21].

1.3.1 Descrição Fenomenológica

A resposta de um meio a um campo elétrico externo pode ser descrita pelo tensor dielétrico, ε_{ij}, com $i, j = 1, 2, 3$. Este tensor reduz-se a uma constante dielétrica multiplicada por uma matriz unitária no caso do meio ser isotrópico. Em geral, o tensor dielétrico pode ser decomposto em uma parte simétrica e outra anti-simétrica. Diagonalizando a parte simétrica, se os três autovalores são iguais, o meio é isotrópico. Contudo, para a luz se propagando ao longo desses três eixos principais, o plano de polorarização não sofre mudança, ou seja, a parte simétrica de ε não gera o efeito Faraday. Portanto, vamos supor esta parte como sendo isotrópica com constante dielétrica ε_0. Para ver o efeito da parte anti-simétrica, vamos considerar um feixe de luz movimentando-se ao longo do eixo z, em um meio com tensor dielétrico da forma:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & iQ & 0 \\ -iQ & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.23}$$

sendo Q o parâmetro de acoplamento magneto-ótico, tambem conhecido como constante de Voigt.

É fácil observar que para o modo "left"$(E_y = iE_x)$, temos $\varepsilon_l = \varepsilon(1 - Q)$, e para o modo "right" $(E_y = -iE_x)$, temos $\varepsilon_r = \varepsilon(1 + Q)$. O índice de refração de um meio é $n = (\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$. Para uma dada freqüência observamos que a diferença de fase entre os dois modos quando a luz percorre uma distância L é: $\Delta\theta = L\frac{2\pi}{\lambda}(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}Q$.

Em três dimensões espaciais, o tensor dielétrico fica sob a forma:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & iQ_z & -iQ_y \\ -iQ_z & 1 & iQ_x \\ iQ_y & -iQ_x & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.24}$$

sendo que os modos normais são circularmente polarizados "left" e "right", com índices de refração $n_L = n(1 - \frac{1}{2}\vec{Q}.\hat{k})$ e $n_R = n(1 + \frac{1}{2}\vec{Q}.\hat{k})$.lembrando que $n = \sqrt{\varepsilon}$, $\vec{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)$ é conhecido como vetor de Voigt, e $\hat{k}$ é o vetor unitário dos momentos ao longo da propagação da onda. Então a rotação referente ao efeito Faraday total, quando a luz percorre uma distância L resulta ser dada por:

$$\theta = \frac{\pi L}{\lambda}(n_L - n_R) = -\frac{\pi L}{\lambda}\vec{Q}.\hat{k}, \tag{1.25}$$

sendo que a parte real da expressão acima gera a rotação, enquanto que a parte imaginária fornece a elipticidade. É interessante observar que o campo magnético externo tem uma influência determinante no comportamento da polarização da luz, e, por sua vez, o campo elétrico tem influência desprezível. A parte anti-simétrica do tensor ε é gerada pelo campo magnético, e é por isto que o campo magnético interfere fortemente na polarização. Sob a operação de reversão temporal, o campo elétrico não se altera, mas o campo magnético muda de sinal. Em geral, qualquer quantidade que quebre simetria de reversão temporal poderia, a princípio, gerar uma parte anti-simétrica não-nula para ε e, portanto, aparecer um efeito de rotação de Faraday. Por isto, no início dos anos 90, foram realizados experimentos para detecção de efeito magneto-ótico em supercondutores a alta-temperatura[18], para verificar a existência de excitações de campo chamadas "anyons", que violam a simetria de reversão temporal.[19].

Retornando para solução de onda plana (1.20), vamos verificar o que ocorre no caso geral ($\vec{p} \neq 0$). Obtemos como solução:

$$\frac{\omega}{c} = \pm k, \tag{1.26}$$
$$\frac{\omega}{c} = \pm\sqrt{k^2 + \vec{p}^2 - m^2}. \tag{1.27}$$

Fazendo a aproximação para $p_\alpha p^\alpha$ pequeno, temos que: $\frac{\omega}{c} = k + \frac{1}{2}(\frac{\vec{p}^2 - m^2}{k})$, o que implica numa defasagem θ quando o pulso avança um comprimento L de:

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{p}^2 - m^2}{k}\right) L = \frac{\lambda L}{4\pi}\left(\vec{p}^2 - m^2\right). \tag{1.28}$$

Pela expressão acima notamos que o efeito de birrefringência provocado pela teoria de Maxwell-Chern-Simons é diferente daquela que aparece em meios magnetizados.

1.4 O Teorema CPT: Violação

As transformações discretas de inversão espacial (P), inversão temporal (T), e conjugação de carga (C), são simetrias exatas para teorias de campos livres. Na presença de termos de interação não podemos afirmar a priori se estas simetrias permanecem válidas; depende da forma destes termos. De maneira inocente, poderíamos esperar que estas simetrias, assim como a invariância de Lorentz, seriam mantidas em todas as teorias físicas. Entretanto a quebra da simetria de paridade, verificada em 1957, foi uma grande surpresa: experimentos revelaram que elétrons emitidos no decaimento-beta predominantemente apresentavam quiralidade *left-handed*. Hoje, aceitamos que as simetrias (P, C, T) possam ser quebradas. A Natureza faz distinção entre esquerda e direita, entre partícula e anti-partícula, entre se mover para frente ou para trás no tempo. Isto revela distinções absolutas, do ponto de vista microscópico.

Se estas simetrias discretas são quebradas ou não, isto deve ser determinado via experimento; teorias de campo podem incorporar ambas possibilidades igualmente bem. Contudo, há uma simetria que está solidamente estabelecida nas bases da teoria, e constitui-se numa prescrição de fundamento das teorias de quânticas de campos: a simetria CPT. O Teorema CPT afirma que qualquer Teoria Quântica de Campos deve ser invariante sob uma operação combinada de conjugação de Carga (C), transformação de Paridade (P), e inversão temporal (T); o Hamiltoniano H é invariante sob CPT.[20]:

$$(CPT)H(x)(CPT)^{-1} = H(-x) \tag{1.29}$$

O Teorema é válido se as duas condições são satisfeitas:

(*i*) A teoria deve ser local, possuir um lagrangeano Hermitiano, e ser invariante sob transformações de Lorentz próprias.

(*ii*) A teoria deve ser quantizada com comutadores para campos com spin inteiro, e anti-comutadores para spin semi-inteiro.

As simetrias podem ser violadas separadamente, mas qualquer teoria de campos que obedece às condições acima deve ser invariante perante as três transformações.

Em (1+3) dimensões, a transformação conjunta de CPT realiza as seguintes alterações:

1 - As coordenadas de de espaço-tempo mudam como:

$$x^{\mu} \;\to\; -x^{\mu}, \tag{1.30}$$

$$\partial^{\mu} \;\to\; -\partial^{\mu} \tag{1.31}$$

2 - O campo de gauge se transforma como:

$$
\begin{aligned}
PA_\mu(x^0,x^i)P^{-1} &\rightarrow A_\mu(x^0,-x^i), &(1.32)\\
CA_\mu(x^0,x^i)C^{-1} &\rightarrow -A_\mu(x^0,x^i),\\
TA_\mu(x^0,x^i)T^{-1} &\rightarrow A_\mu(-x^0,x^i). &(1.33)
\end{aligned}
$$

ou seja:

$$(CPT)A(x)(CPT)^{-1} = -A(-x) \tag{1.34}$$

3 - A anti-linearidade da operação de inversão temporal prescreve que, sob CPT, todo parâmetro do Lagrangeano é levado em seu conjugado complexo.

4 - Qualquer tensor de posto par se transforma no seu Hermitiano conjugado, e todo tensor de posto ímpar é se transforma no oposto do seu Hermitiano conjugado.

Aplicando estas transformações, verificamos que o Lagrangano deve se comportar da forma:

$$(CPT)L(x)(CPT)^{-1} = L(-x). \tag{1.35}$$

Para análise de teoria tratada nesta tese, vamos supor que o vetor de fundo comporta-se como:

$$
\begin{aligned}
C(v^0,v^i)C^{-1} &\rightarrow (v^0,v^i), &(1.36)\\
P(v^0,v^i)P^{-1} &\rightarrow (v^0,-v^i), &(1.37)\\
T(v^0,v^i)T^{-1} &\rightarrow (v^0,v^i). &(1.38)
\end{aligned}
$$

Portanto temos:

$$(CPT)\,(v^0,v^i)\,(CPT)^{-1} \rightarrow (v^0,-v^i). \tag{1.39}$$

Este comportamento do quadrivetor de fundo acarreta que, para v^μ de tipo-espaço, a simetria CPT é verificada. No caso em que v^μ ser de tipo-tempo, ocorre violação da simetria CPT!

Analisando o comportamento do termo de Maxwell frente à tranformação de CPT: $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, portanto é invariante. Na análise do termo de Chern-Simons,

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}v_{\mu}A_{\nu}\partial_{\alpha}A_{\beta},$$

tomando $\mu = 0$, observamos que $(\varepsilon^{0\nu\alpha\beta}v_0 A_{\nu}\partial_{\alpha}A_{\beta} \rightarrow -\varepsilon^{o\nu\alpha\beta}v_0 A_{\nu}\partial_{\alpha}A_{\beta})$; para $\nu = 0$ temos que $(\varepsilon^{\mu 0\alpha\beta}v_{\mu}A_0\partial_{\alpha}A_{\beta} \rightarrow \varepsilon^{\mu 0\alpha\beta}v_{\mu}A_0\partial_{\alpha}A_{\beta})$, e da mesma forma para $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Portanto, concluímos que, se o quadriveror v_{μ} apresentar componente temporal, a simetria CPT é violada!

No capítulo seguinte, veremos que no caso em que v^{μ} tipo-espaço obtemos uma teoria unitária. Para v^{μ} tipo-tempo, a teoria fica contaminada por "ghosts"! A condição mais aceitável seria aquela em que não ocorre a violação do Teorema CPT! Mas, no entanto, a nossa teoria quebra a simetria de Lorentz, portanto uma das condições de validade deste teorema não é satifeita, entã este teorema pode ser violado.

Capítulo 2

Resultados da Eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons em $(1+3)D$ com Quebra Espontânea de Simetria

Neste capítulo, introduzindo um novo termo de massa advindo de uma quebra espontânea de simetria, realizamos um estudo, ao nível clássico, do modelo de Maxwell-Chern-Simons introduzido no capítulo anterior. Vamos discutir a consistência de uma possível quantizaç ão, estimando condições para a forma do vetor de fundo para se chegar a uma teoria sem táquions e "ghosts". Em seguida partimos para o estudo de soluções de vórtice e obtemos o análogo da solução do vórtice de Nielsen-Olesen [22], mas com uma diferença: o vórtice aqui tratado tem carga elétrica. Iremos fazer esta análise começando da seguinte ação:

$$\Sigma = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \left(D_\mu \phi \right)^* D^\mu \phi - V\left(\phi\right) \right\} + \Sigma_\psi + \Sigma_{cs}, \tag{2.1}$$

onde Σ_ψ é a ação fermiônica, e

$$\Sigma_{cs} = -\frac{\mu}{4} \int d^4x \, \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} v_\mu A_\nu F_{\kappa\lambda} \tag{2.2}$$

é o termo de Chern-Simons estendido. μ é um parâmetro de massa, e v_μ é um quadrivetor arbritrário de módulo unitário que seleciona uma direção preferencial no espaço-tempo. V, dado por,

$$V(\phi) = m^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4 \tag{2.3}$$

é o potencial de Higgs mais geral em 4D. Impomos sinais convenientes aos parâmetros de maneira que o campo escalar ϕ assuma um valor esperado não-trivial no vácuo, e em torno desse vácuo espandimos o campo, dando a interpretação de que os campos físicos são as pequenas oscilações em torno desse vácuo. No caso da Matéria Condensada, este vácuo pode ser criado através de uma cadeia de spins, quando estes são alinhados em uma direção preferencial. O bóson não-massivo que surge deste mecanismo (bóson de Goldstone) está ligado ao fato de que todos os elementos desta cadeia de spins se vêem. Em teoria de campos, numa quebra de simetria local, este bóson gera massa para o campo de gauge, e o campo de Higgs é minimalmente acoplado ao campo eletromagnético pela derivada covariante dada por

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ieQA_\mu \phi. \tag{2.4}$$

A simetria de gauge local é quebrada espontaneamente e o vácuo não-trivial é

$$\langle 0|\phi|0\rangle = a. \tag{2.5}$$

sendo

$$a = \left(-\frac{m^2}{2\lambda}\right)^{1/2} \quad \text{com} \quad m^2 < 0. \tag{2.6}$$

Como usual, adotamos a parametrização polar.

$$\phi = \left(a + \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) e^{i\rho/\sqrt{2}a}, \tag{2.7}$$

onde σ e ρ são as flutuações quânticas. Como estamos interessados na análise do espectro de excitações escolhemos o gauge unitário, que é caracterizado impondo-se que $\rho = 0$. A ação de gauge fica dada por:

$$\Sigma_g = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\mu}{4} v_\mu A_\nu F_{\kappa\lambda}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} + \frac{M^2}{2} A_\mu A^\mu \right\}, \tag{2.8}$$

com $M^2 = 2e^2Q^2a^2$. A quebra espontânea de simetria gera o termo de massa M^2 além do termo topológico, que quebra a invariância de Lorentz. μ, como veremos neste capítulo é o efeito da massa gerada por quebra da simetria de Lorentz que simplesmente desloca o polo induzido pelo quadrivetor v^μ. Suprimindo a quebra espontânea (Mecanismo de Higgs), fazendo , portanto $a = 0$, reproduzimos o espectro dado em [23]. Um outro tópico relevante para ser analisado é o estudo da matriz dos resíduos nos pólos, que nos informa sobre a eventual existência de norma negativa nos estados de uma partícula ("ghosts"). Escolhas convenientes dos parâmetros serão adotadas com o objetivo de se evitar modos com táquions (estados com massa imaginária) e "ghosts" no espectro. Reescrevendo ,agora, a ação linearizada (2.8) numa forma conveniente,

$$\Sigma_g = \frac{1}{2} \int d^4x A^\mu \mathcal{O}_{\mu\nu} A^\nu, \tag{2.9}$$

onde $\mathcal{O}_{\mu\nu}$ é o operador de onda, o propagador pode ser lido da expressão:

$$\langle 0 | T \left[A_\mu(x) A_\nu(y) \right] | 0 \rangle = i \left(\mathcal{O}_{\mu\nu} \right)^{-1} \delta^4(x - y). \tag{2.10}$$

É conveniente escrever $\mathcal{O}_{\mu\nu}$ em termos dos operadores de projeção de spin:

$$\mathcal{O}_{\mu\nu} = \left(\Box + M^2 \right) \theta_{\mu\nu} + M^2 \omega_{\mu\nu} + \mu S_{\mu\nu}, \tag{2.11}$$

sendo que $\theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ são respectivamente os operadores de projeção transverso e longitudinal

$$\theta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\Box}, \quad \omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\Box}, \tag{2.12}$$

e

$$S^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} v_\kappa \partial_\lambda. \tag{2.13}$$

Fazendo a contração deste último operador com ele mesmo:

$$S_{\mu\alpha} S^{\alpha}{}_{\nu} = \left[v^2 \Box - \lambda^2\right] \theta_{\mu\nu} - \lambda^2 \omega_{\mu\nu} - \Box \Lambda_{\mu\nu} \tag{2.14}$$

$$+\lambda \left(\Sigma_{\mu\nu} + \Sigma_{\nu\mu}\right) \equiv f_{\mu\nu}. \tag{2.15}$$

Para se inverter o operador de onda, precisamos acrescentar dois outros novos operadores, pois os que temos não formam uma álgebra fechada. Então, colocamos dois novos operadores, Σ e Λ, cujas definições são escritas como:

$$\Sigma_{\mu\nu} = v_\mu \partial_\nu, \quad \lambda \equiv \Sigma_\mu^{\ \mu} = v_\mu \partial^\mu, \quad \Lambda_{\mu\nu} = v_\mu v_\nu. \tag{2.16}$$

A algebra dos operadores é, então mostrada na Tabela 1.

	$\theta^{\alpha}{}_{\nu}$	$\omega^{\alpha}{}_{\nu}$	$S^{\alpha}{}_{\nu}$	$\Lambda^{\alpha}{}_{\nu}$	$\Sigma^{\alpha}{}_{\nu}$	$\Sigma_{\nu}{}^{\alpha}$
$\theta_{\mu\alpha}$	$\theta_{\mu\nu}$	0	$S_{\mu\nu}$	$\Lambda_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{\Box}\Sigma_{\nu\mu}$	$\Sigma_{\mu\nu} - \lambda\omega_{\mu\nu}$	0
$\omega_{\mu\alpha}$	0	$\omega_{\mu\nu}$	0	$\frac{\lambda}{\Box}\Sigma_{\nu\mu}$	$\lambda\omega_{\mu\nu}$	$\Sigma_{\nu\mu}$
$S_{\mu\alpha}$	$S_{\mu\nu}$	0	$f_{\mu\nu}$	0	0	0
$\Lambda_{\mu\alpha}$	$\Lambda_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{\Box}\Sigma_{\mu\nu}$	$\frac{\lambda}{\Box}\Sigma_{\mu\nu}$	0	$v^2\Lambda_{\mu\nu}$	$v^2\Sigma_{\mu\nu}$	$\lambda\Lambda_{\mu\nu}$
$\Sigma_{\mu\alpha}$	0	$\Sigma_{\mu\nu}$	0	$\lambda\Lambda_{\mu\nu}$	$\lambda\Sigma_{\mu\nu}$	$\Lambda_{\mu\nu}\Box$
$\Sigma_{\alpha\mu}$	$\Sigma_{\nu\mu} - \lambda\omega_{\mu\nu}$	$\lambda\omega_{\mu\nu}$	0	$v^2\Sigma_{\nu\mu}$	$v^2\Box\omega_{\mu\nu}$	$\lambda\Sigma_{\nu\mu}$

Tabela 1: Formada pela regra de multiplicação de $\theta, \omega, S, \Lambda$ e Σ. Os produtos obedecem a uma ordem de multiplicação: primeiro os elementos da linha e depois os da coluna.

Usando a álgebra dos projetores de spin mostrada na Tabela 1, invertemos o operador $\mathcal{O}$, e assim obtemos o propagador, que apresenta a seguinte forma,

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = \frac{i}{D}\left\{-(k^2 - M^2)\theta_{\mu\nu} + \left(\frac{D}{M^2} - \frac{\mu^2(v\cdot k)^2}{(k^2 - M^2)}\right)\omega_{\mu\nu}\right. \tag{2.17}$$

$$\left. - i\mu S_{\mu\nu} - \frac{\mu^2 k^2}{(k^2 - M^2)}\Lambda_{\mu\nu} + \frac{\mu^2(v\cdot k)}{(k^2 - M^2)}\left(\Sigma_{\mu\nu} + \Sigma_{\nu\mu}\right)\right\}, \tag{2.18}$$

sendo $D(k) = (k^2 - M^2)^2 + \mu^2 v^2 k^2 - \mu^2 (v\cdot k)^2$ a relação de dispersão característica do modelo. O resultado acima nos permite discutir a natureza das excitações que correspondem aos pólos do propagador, presentes no espectro. À primeira vista, como o denominador $(k^2 - M^2)$ aparece em conexão com os operadores ω, Λ, Σ, e também multiplica o denominador geral D, poderia dar origem a perigosos pólos multiplos, contaminando o espectro quântico com "ghosts". Por esta razão, um estudo mais cuidadoso faz-se necessário. É aconselhável separar esta discussão em três casos: v_μ tipo-tempo, nulo, e tipo-espaço. No caso em que v_μ é do tipo-tempo, pode-se constatar que será sempre possível encontrar momento k_μ tal que $k^2 = M^2$ apareça como pólo duplo no setor transverso (θ and S), e um pólo triplo nos setores ω, Λ e Σ. Isto mostra que, neste caso, estados não-físicos estão presentes - estados de uma partícula com norma negativa. Portanto, não se faz necessário discutir a matríz dos resíduos nesses pólos, já que estes não correspondem a partículas físicas. No caso de v_μ nulo, pode-se ver que pólos taquiônicos (que são pólos simples) sempre surgem; isto invalida o modelo na sua versão quântica, pois excitações supraluminais estarão sempre presentes no espectro. Contudo, se v_μ for um vetor tipo-espaço, não aparecem pólos de ordem mais alta; pode ser mostrado que $k^2 = M^2$ não é raiz de $D(k)$, logo se apresenta como um pólo simples para os setores ω, Λ and Σ. Portanto, o modelo apresenta excitações massivas não taquiônicas associadas a 3 pólos simples: 2 deles vindos diretamente de $D(k)$ e o outro sendo $k^2 = M^2$. O fato de que somente o caso tipo-espaço seja fisicamente aceitável confirma o estudo detalhado feito por Adam e Klinkhammer no trabalho da ref.[23]. Contudo, devemos ainda investigar os resíduos nestes pólos para ter certeza de que "ghosts" não estão presentes. Isto deverá ser feito na próxima seção.

2.1 A Análise da Unitaridade no Caso Tipo-Espaço

Vamos verificar os pólos presentes para v_μ tipo-espaço. Sabendo que são 3 diferentes pólos, temos que fazer um estudo da matriz dos resíduos do propagador para os pólos (k tipo-tempo) $k^2 = M^2$, $k^2 = \widetilde{m}_1{}^2$ e $k^2 = \widetilde{m}_2{}^2$, onde $\widetilde{m}_1$ e $\widetilde{m}_2$ correspondem a zeros de $D(k)$, isto é, M^2, $\widetilde{m}_1{}^2$ e $\widetilde{m}_2{}^2$ correspondem às massas físicas na aproximação de árvore. Para inferir sobre a natureza física dos pólos simples, precisamos calcular os autovalores da matriz dos resíduos de cada um dos pólos. Antes de efetuar este cálculo, vamos, sem perda de generalidade, fixar o vetor externo como $v^\mu = (0; 0, 0, 1)$. O propagador no espaço dos momenta é expresso em termos de k^μ que é a variável de integração de Fourier. Como estamos interessados em propagação causal tomamos os momenta de maneira que $k^2 > 0$. Faremos uma análise dos resíduos no caso $k^\mu = (k^0; 0, 0, k^3)$. Com $k_0{}^2 = m_1^2$, temos que

$$m_1^2 = \frac{2\left(M^2 + k_3{}^2\right) + \mu^2 + \mu\sqrt{\mu^2 + 4\left(M^2 + k_3{}^2\right)}}{2}. \tag{2.19}$$

A matriz dos resíduos fica,

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 4\left(M^2 + k_3{}^2\right)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1^2 - \left(M^2 + k_3{}^2\right) & i\mu m_1 & 0 \\ 0 & -i\mu m_1 & m_1^2 - \left(M^2 + k_3{}^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Calculamos seus autovalores e encontramos que apenas um deles é não-nulo:

$$\lambda = \frac{2\,|m_1|}{\sqrt{\mu^2 + 4\left(M^2 + k_3{}^2\right)}} > 0. \tag{2.21}$$

O mesmo procedimento é feito e as mesmas conclusões valem para a segunda raiz de $D(k)$ $\left(k^2 = \overline{m}_2^2 \text{ com } \mathrm{k_0}^2 = \mathrm{m}_2^2\right)$:

$$k_0{}^2 = m_2^2 = \frac{2\left(M^2 + k_3{}^2\right) + \mu^2 - \mu\sqrt{\mu^2 + 4M^2}}{2}; \qquad (2.22)$$

resulta que temos tambem um único autovalor $\left(\lambda = \frac{2|m_2|}{\sqrt{\mu^2 + 4\left(M^2 + k_3{}^2\right)}} > 0\right)$ como anteriormente. Os cálculos acima confirmam os resultados encontrados pelos autores da Ref.[23] para um v^μ tipo-espaço. Neste caso verificou-se que cada pólo de $D(k)$ respeita a causalidade (não é taquiônico) e corresponde a estado de 1−partícula fisicamente aceitável, pois apresenta 1 grau de liberdade, já que a matriz dos resíduos apresenta um único autovalor positivo. Finalmente, vamos analisar o pólo $k_0{}^2 = \left(M^2 + k_3{}^2\right)$. Neste caso a matriz dos resíduos é dada por:

$$R_M = \begin{pmatrix} -\frac{\mu^2}{M^2} k_3{}^2 \left(M^2 + k_3{}^2\right) & 0 & 0 & -\frac{\mu^2}{M^2} |k_3| \left(M^2 + k_3{}^2\right)^{\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu^2}{M^2} |k_3| \left(M^2 + k_3{}^2\right)^{\frac{3}{2}} & 0 & 0 & -\frac{\mu^2}{M^2} \left(M^2 + k_3{}^2\right)^2 \end{pmatrix}, \qquad (2.23)$$

e, novamente, obtemos apenas um autovalor positivo não nulo, ou seja,

$$\lambda = \frac{1}{M^2}\left(M^2 + 2k_3{}^2\right) > 0.$$

Disto, resulta uma conclusão muito interessante: o pólo M^2, que aparece no setor longitudinal $(w_{\mu\nu})$, descreve um modo escalar fisicamente realizável. Estamos diante de um resultado muito peculiar: O potencial vetor acomoda 3 excitações físicas (com massas $m_1{}^2$, $m_2{}^2$, e M^2), cada uma delas carregando um único grau de liberdade; então, a influência do vetor de fundo provoca no campo de gauge uma mudança drástica no seu conteúdo físico: ao invés de descrever um quadrivetor com 3-graus de liberdade e, portanto descrevendo excitações massivas vetoriais, o campo de gauge descreve, na verdade, três excitações massivas escalares, cada um carregando um grau de liberdade. É interessante reportarmos mais uma possibilidade. Como é conhecido, o mecanismo de Higgs, o qual é responsável pela geração de massa dos bósons de gauge, pressupõe a invariância de Lorentz da teoria. Entretanto esta invariância não é mais observada neste caso. Mostraremos que, para um vetor de fundo fixo do tipo-espaço, v^μ, podem aparecer modos sem massa dependendo da direção de propagação da onda, implicando numa frustração no processo de geração de massa do mecanismo de Higgs. De fato, a condição de pólo sem massa, $D(k) = 0$ com $k^2 = 0$, pode ser escrita como,

$$c \cdot k = \pm M^2. \tag{2.24}$$

Tomando um c_μ do tipo-espaço, da forma $c_\mu = (0; \vec{c})$, a condição acima fica,

$$\vec{c} \cdot \vec{k} = \mp M^2. \tag{2.25}$$

Com $k^2 = 0$, $|\vec{k}| = k^0$, sempre que $k^0 > 0$; então, vemos que

$$\vec{c} \cdot \hat{k} = -\frac{M^2}{k^0}. \tag{2.26}$$

Assim, dado $\vec{c}$, sempre podemos encontrar um k^μ tal que $k^2 = 0$ sendo compatível com a condição acima. Para isto acontecer, a propagação deve ser ao longo de uma direção com um ângulo maior do que 90^o em relação ao vetor $\vec{c}$. Podemos resumir que, de acordo com a direção de propagação da onda, um pólo sem massa sempre pode ser encontrado. Isto confirma a quebra de isotropia do espaço e ilustra que, apesar da quebra espontânea de simetria local, excitações sem massa poderiam estar presentes no espectro.

Vamos, então verificar a unitaridade deste modelo. No artigo da Ref. [23], os autores fazem uma análise da unitaridade e concluem que, exclusivamente para um v^μ tipo-espaço, o Hamiltoniano admite uma extensão auto-adjunta semi-positiva, dando origem portanto, a um operador de evolução unitário. Aqui, a unitaridade referida não é no sentido de extensão auto-adjunta, mas na análise do espaço de Hilbert dos estados de partícula. Esta análise revela a existência do estado de 1-partícula com norma negativa, isto é, estados de "ghosts" de 1-partícula, sempre que v^{μ} for tipo-tempo ou luz. Por outro lado, quando v^{μ} é tipo-espaço, os pólos do propagador vetorial são fisicamente aceitáveis, e o modelo pode ser adotado como uma teoria consistente deste ponto-de-vista.

2.2 Configurações de Vórtice

Uma vez discutidas as perspectivas de uma possível quantização do modelo, vamos agora enfocar a possibilidade do surgimento de uma configuração do tipo-vórtice em presença do termo de quebra da simetria de Lorentz. O Lagrangeano para a Eletrodinâmica com quebra espontânea de simetria representa, em sua versão relativística, a energia livre de Landau-Ginzburg . Este Lagrangano,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_{\mu}\varphi)^{*} D^{\mu}\varphi, \tag{2.27}$$

descreve a supercondutividade. Em nosso caso, com o termo de Chern-Simons incluído, obtemos, da ação (2.1), sem o termo fermiônico, e as seguintes equações de movimento

$$\begin{aligned} D^{\mu}D_{\mu}\varphi &= -m^{2}\varphi - 2\lambda\varphi|\varphi|^{2} && (2.28)\\ \partial_{\nu}F^{\mu\nu} &= ie(\varphi\partial^{\mu}\varphi^{*} - \varphi^{*}\partial^{\mu}\varphi) + 2e^{2}A^{\mu}|\varphi|^{2} + \mu\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}v_{\nu}\partial_{\kappa}A_{\lambda}. && (2.29)\end{aligned}$$

Com as quais derivamos explicitamente as equações de Maxwell com modificações provocadas pelo termo de quebra,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}.\vec{E} &= -ie(\varphi\dot{\varphi}^{*} - \varphi^{*}\dot{\varphi}) + 2e^{2}|\varphi|^{2}\Phi - \mu\vec{v}\cdot\vec{B}, && (2.30)\\ \vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, && (2.31)\\ \vec{\nabla}.\vec{B} &= 0, && (2.32)\\ -\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\vec{B} &= ie(\varphi\vec{\nabla}\varphi^{*} - \varphi^{*}\vec{\nabla}\varphi) - 2e^{2}|\varphi|^{2}\vec{A} + \end{aligned}$$

$$-\mu v_0\vec{B} + \mu\vec{v}\times\vec{E}. \tag{2.33}$$

Porém, antes de se analisar a configuração de vórtice, iremos verificar se as equações de Maxwell modificadas acima (eqs.(2.30)-(2.33)) permitem a presença de monopólos magnéticos de Dirac no modelo. Com este propósito, removemos o campo escalar e verificamos que a presença de um monopólo estático conduz a que

$$v_0\vec{B} = \vec{v}\times\vec{E}. \tag{2.34}$$

Aplicando o operador $\vec{\nabla}$ a esta equação, chegamos a uma contradição direta com a eq.(2.32). Portanto, as equações de Maxwell modificadas (2.30)-(2.33) não suportam a presença de um monopólo magnético de Dirac. O comportamento assintótico de Φ deverá ser estabelecido pelas equações de campo, como será mostrado. O campo magnético apresenta simetria cilíndrica, implicando que

$$\varphi = \chi(r)e^{in\theta}. \tag{2.35}$$

Para evitar a singularidade devido ao sistema de coordenadas adotado (não existe uma singularidade física), quando $r\to 0$, e conservando a solução assintótica, fazemos

$$\lim_{r\to 0}\chi(r) \;=\; 0 \tag{2.36}$$

$$\lim_{r\to\infty}\chi(r) \;=\; a. \tag{2.37}$$

No caso estático, a equação (2.28), depois de se somar sobre os componentes, temos

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\chi}{dr}\right) - \left[\left(\frac{n}{r}+eA\right)^2 + m^2 + 2\lambda\chi^2 - e^2\Phi^2\right]\chi = 0, \tag{2.38}$$

enquanto que as equações de Maxwell tomam a forma

$$\vec{\nabla}^2\Phi + 2e^2\chi^2\Phi - \mu\vec{v}\cdot\vec{B} \;=\; 0, \tag{2.39}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rA)\right) + 2e\chi^2\left(\frac{n}{r} - eA\right) - \mu v_3 \frac{d\Phi}{dr} = 0. \tag{2.40}$$

Nas regiões assintóticas, as equações (2.39) e (2.40) reduzem-se a

$$\nabla^2\Phi - 2a^2e^2\Phi = 0, \tag{2.41}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rA)\right) - 2e^2a^2A - \mu v_3\frac{d\Phi}{dr} = 0, \tag{2.42}$$

onde $\vec{B}$ tende assintoticamente a zero, pois $\vec{A}$ é um gradiente no infinito. Encontramos, desta forma,

$$\Phi = C'e^{-\sqrt{2a^2e^2}\, r}. \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned} A(r) &= CK_1\left(\sqrt{2}a\,|e|\,r\right) + \\ &- i\sqrt{2}\mu v_3\, aeK_1\left(\sqrt{2}a\,|e|\,r\right)\int rdrI_1\left(\sqrt{2}a\,|e|\,r\right)e^{-\sqrt{2}a|e|r}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Portanto, ambos Φ e A tendem a zero exponencialmente nas regiões assintóticas. Note que, assintoticamente, o campo escalar complexo $\varphi = \chi(r)e^{in\theta}$ tende ao vácuo não-trivial e assume a forma $\varphi = ae^{in\theta}$. Então, a topologia da variedade de vácuo é S^1.

Fazendo uma análise a respeito da estabilidade da configuração de vórtice, verificamos que esta questão deve ser adequadamente respondida de posse da expressão da energia do sistema. Seguindo os resultados do trabalho ([10]), entendemos que, uma vez escolhido v^μ como tipo-espaço (e, de acordo com os resultados de nossa discussão na Sec.3, esta é a única possibilidade viável), a energia é limitada inferiormente, o que atribui a nossos vórtices o "status" de configuração estável. Extendendo o caso dos vórtices de Nielsen-Olesen [22], a eq. (2.39) desempenha um papel importante para gerar campo elétrico. Se o campo magnético que gera o vórtice (dado que assume a forma $\vec{B} = B\hat{z}$) é ortogonal ao vetor externo $\vec{v}$, então $\Phi = 0$ é sempre uma solução trivial que é compatível com todo o conjunto de equações de campo. Contudo, sempre que $\vec{v} \cdot \vec{B} \neq 0$, Φ deve necessariamente ser não-trivial, e um campo elétrico aparece ligado ao fluxo magnético. Com o potencial escalar não-nulo, na região assintótica Φ cai exponencialmente, como é mostrado na eq. (2.43). O surgimento de um campo eletrostático ligado ao vórtice magnético, sempre que $\vec{v} \cdot \vec{B} \neq 0$, não é surpresa. Isto se deve ao termo de quebra de Lorentz: de fato, sendo um termo de Chern-Simons, o problema eletrostático induz um campo magnético e o regime magnetostático demanda um campo elétrico também. Então, um Φ não nulo, portanto campo $\vec{E}$ não-trivial é um efeito do termo que quebra Lorentz.

2.3 Conclusões Preliminares

A principal proposta deste capítulo foi investigar dois aspectos: o primeiro, a possibilidade de quantização do modelo que viola a simetria de Lorentz e CPT na fase em que ocorreu quebra espontânea da simetria de "gauge"; o outro, referente ao estudo de configurações clássicas de vórtice presentes no modelo. A primeira análise foi feita com ajuda dos propagadores, derivados por uma álgebra estendida dos operadores de spin, revelando que a unitaridade é sempre violada para v^μ tipo-tempo ou nulo. Sempre que o vetor externo for do tipo-espaço, podem ser encontradas excitações fisicamente consistentes, que apresentam um único grau de liberdade cada uma. A análise de configuração de vórtices clássicos mostra alguns aspectos interessantes. Primeiramente, se o campo magnético do vórtice é ortogonal ao plano que contém o vetor constante, v^μ, então uma solução trivial para o potencial escalar, $\Phi = 0$, é permitida. Nesse caso, a configuração de vórtice será similar ao modelo Abeliano usual (vórtice de Nielsen-Olesen). Contudo, se $\vec{v} \cdot \vec{B} \neq 0$, temos uma solução não-trivial para Φ, e um campo elétrico aparece em conexão com o fluxo magnético. Como ressaltamos, o surgimento de um campo elétrico ligado ao vórtice magnético não é surpresa. Isto é exatamente o que ocorre em uma teoria de Chern-Simons em 3 dimensões. Neste caso o problema eletrostático induz um campo magnético e o regime magnetostático requer um campo elétrico também. Em conexão com este fenômeno, a análise da dinâmica de partículas eletricamente carregadas, monopólos magnéticos e neutrinos na região fora do núcleo do vórtice torna-se uma idéia estimulante, devido à presença do campo elétrico que agora interfere (ao menos para partículas carregadas e monopólos) e enriquece as informações físicas sobre concentração de partículas na região dominada pelos vórtices. Finalmente, em vista do interessante resultado apresentado por Berger e Kostelecký em [30], seria interessante incorporar o termo (invariante de gauge) que quebra Lorentz na ação (1.1), na versão supersimétrica e estudar o parceiro fermiônico (gaugino) desse termo. O Capítulo 4 versará sobre este tema.

Capítulo 3

A Redução Dimensional de Chern-Simons de $(1+3)$ para $(1+2)D$

A descoberta de cerâmicas supercondutoras de altas temperaturas, na década de 80, e do efeito Hall Quântico Fracionário, na década de 90, fizeram do estudo de modelos com duas dimensões espaciais uma importante fonte de investigação para se desvendar o comportamento dos elétrons que ficam confinados no plano. Modelos planares em teorias de campos surgem naturalmente seguindo a prescrição da redução dimensional. Este procedimento consiste em, literalmente, "congelar" uma dimensão espacial e, no nosso caso, ir de $(1+3)$ para $(1+2)$ dimensões. Vamos partir, então, de um modelo de Maxwell-Chern-Simons puro, tomando como termo de quebra da simetria de Lorentz e CPT o termo $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}v_\mu A_\nu F_{\kappa\lambda}$, proposto por Jackiw no início dos anos 90 [10], e que, como vimos, é responsável por induzir atividade ótica do vácuo - birefringência - entre outros efeitos. Naquele trabalho, contudo, é mostrado, através de medidas astrofísicas, que a birefringência tem limites bastantes restritos devido a norma do quadrivetor v_μ, reduzindo a ser uma correção desprezível. Conclusões similares, também baseadas em dados astrofísicos, foram confirmados por Goldhaber & Timble [31]. Em seguida, Colladay and Kostelecky [6, 7] adotaram um ponto-de-vista de teoria de campos analisando a quebra de CPT e Lorentz, denominando-a de violação espontânea. Estes autores construíram uma extensão do Modelo Padrão que mantém invariante a estrutura de gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ usual, e incorporaram a violação de CPT do ponto de vista ativo (mudança do sistema de referência da partícula) em uma teoria de campos a baixas energias. Partiram de uma teoria usual invariante de CPT- e Lorentz, definindo este comportamento como válido na escala de Planck [24, 25, 26], e à medida que a energia diminui, ocorre uma quebra espontânea de ambas as simetrias. Na fase quebrada, a covariância de Lorentz é preservada em uma transformação do ponto-de-vista passivo (mudança do sistema de referência do observador). Para entender melhor a covariância (comportamento vetorial) do ponto-de-vista passivo e a invariância (comportamento escalar) por uma transformação ativa, tomamos como exemplo ilustrativo um elétron submetido a um campo magnético constante, em movimento circular, e um observador em repouso em relação a este campo. Se for aplicado um "boost" sobre a partícula (portanto um "boost" ativo), o elétron altera sua órbita e o campo magnético permanece constante (é um escalar sob esta transformação). Porém, se é o observador que sofre um "boost", o elétron ganha um movimento de translação, além da rotação, então o novo observador "vê" um campo elétrico acelerando o elétron. Portanto, este campo magnético se comporta covariantemente. Observe que a covariância de Lorentz é perdida por transformação do referencial da partícula. Esta quebra de covariância manifesta-se quando, analisando a relação de dispersão, extraímos o resíduo associado ao pólo do propagador, conforme visto no capítulo anterior.

A análise de unitaridade, causalidade e consistência de uma TQC com violação da simetria de Lorentz e CPT (induzidas pelo termo de Chern-Simons) foi realizada por Adam & Klinkhamer [23]. Como resultado, foi verificado que a unitaridade e a causalidade, neste tipo de modelo, podem ser preservadas quando o quadrivetor de fundo é do tipo-espaço, enquanto que nos casos de quadrivetores nulos ou tipo-tempo, estas 2 propriedades fundamentais são perdidas, equivalentemente ao que foi obtido no capítulo anterior e na Ref.[12].

A pesquisa de teorias em que ocorre estas quebras de simetria conduz a uma pergunta natural: será que estas teorias indicam comportamento das partículas similar ao caso quando aplicamos a redução de $D = 1 + 3$ para um modelo similar em $D = 1 + 2$? No processo de redução, vemos que aparece, além do termo de Chern-Simons planar, um termo misto que quebra a invariância de Lorentz. Nosso objetivo neste capítulo é chegar a um modelo planar e investigar algumas características através dos propagadores e das equações de movimento ou relações de dispersão como a causalidade, a estabilidade e a unitaridade.

Mais especificamente, realizamos a redução dimensional para $D = 1 + 2$ a partir de um modelo Abeliano invariante de gauge em $D = 1 + 3$, com quebra de Lorentz e CPT [10, 23] induzida pelo termo $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}v_{\mu}A_{\nu}F_{\kappa\lambda}$, que resultará numa teoria de campos invariante de gauge planar (QED_3) composta pelo campo de gauge de Maxwell-Chern-Simons (MCS) (A_{μ}), por um campo escalar (φ), por um parâmetro escalar (s) sem dinâmica (a massa de Chern-Simons), e um trivetor fixo (v^{μ}).

Além do setor de MCS, este Lagrangeano apresenta um setor sem massa, representado pelo campo φ, que também aparece acoplado, via o termo de Chern-Simons, como se fosse uma constante de acoplamento, ao campo de gauge e ao trivetor, v^{μ} (como se um dos campos de gauge fosse substituidos por v^{μ}). Este termo quebra a simetria de Lorentz. Portanto, o Lagrangeano reduzido é formado por três setores: um setor de MCS, um setor de Klein-Gordon sem massa e um termo misto que viola a simetria Lorentz. Como é bem conhecido, o setor MCS quebra as simetrias de paridade e de reversão temporal, mas preserva Lorentz e CPT. O termo escalar preserva todas as simetrias discretas e a covariância de Lorentz, e o setor misto, como será visto, quebra invariância de Lorentz (em relação a mudança do referencial da partícula), preservando simetria de paridade e conjugação de carga, mas pode, ou não, preservar simetria de reversão temporal. Ou seja, podem ocorrer ambas as simetrias para o caso em que v^{μ} puramente tipo-espaço), e violação de CPT para o caso em que v^{μ} é do tipo-tempo ou do tipo-luz.

Neste capítulo, esquematicamente veremos na Seção I a realização da redução dimensional que nos conduz ao modelo reduzido. Tendo estabelecido um novo Lagrangeano planar, vamos estudar os propagadores obtidos no setor de gauge e escalar. A técnica utilizada requer que encontremos uma álgebra de operadores que se fecha. Isto é feito através de um algorítimo algébrico construindo uma tabela de produtos de operadores (Tabela II que se encontra no Apêndice). Na Seção II, analisamos as equações clássicas de movimento (as equações de Maxwell estendidas) e as equações de onda (para o potencial A^{μ}) correspondentes ao Lagrangeano reduzido. Onde observamos, então, que as equações têm estrutura similar à do caso usual de MCS, com extensões vindas do termo de fundo. Resolvendo estas equações, obtemos soluções que diferem das usuais de MCS pelos termos da extensão dependentes de v^{μ}. Com relação ao surgimento de anisotropia, (efeito induzido pelo quadrivetor de fundo no caso de soluções do tipo-tempo), nenhum efeito se constata para este caso. Contudo, no caso de v^{μ} ser puramente do tipo-espaço, as soluções apresentam uma dependência explícita no âgulo formado com o vetor momento $\vec{k}$. Neste caso estudamos a estabilidade, a causalidade, e a unitaridade da teoria. Discutimos a causalidade observando diretamente a relação de dispersão obtida de acordo com o tipo de vetor de fundo. Na Seção III analisamos o problema da estabilidade, da causalidade e da unitaridade da teoria. A causalidade é observada diretamente nas relações de dispersão obtidas nos pólos do propagador. Os modos causais e não-causais que surgem, apresentam energia positiva em relação a qualquer referencial de observador, o que implica em estabilidade. A análise de unitaridade é baseada no cálculo da matriz dos resíduos nos pólos. Enfatizamos que o modelo pode apresentar problemas de unitaridade quando v^{μ} é do tipo-tempo, ou tipo-luz, o que será analizado. Na Seção IV tecemos conclusões parciais.

3.1 O Modelo Reduzido

Partimos do Lagrangeano de Maxwell em $D = 1 + 3$[1], com o termo em que o quadrivetor de fundo $v^{\hat{\mu}}$ é acoplado ao tensor dual eletromagnético, como aparece na ref. [10]:

$$\mathcal{L}_{1+3} = \left\{ -\frac{1}{4}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{1}{2}\epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}}v_{\hat{\mu}}A_{\hat{\nu}}F_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}} + A_{\hat{\nu}}J^{\hat{\nu}} \right\}, \tag{3.1}$$

com a presença do acoplamento entre o campo de gauge e uma corrente externa, $A_{\hat{\nu}}J^{\hat{\nu}}$. Este modelo em sua versão livre é invariante de gauge, mas não preserva as simetrias de Lorentz e de CPT em relação à mudança do referencial da partícula. Em relação aos sistemas referenciais dos observadores, o termo de Chern-Simons transforma-se covariantemente: $v^{\hat{\mu}} \longrightarrow v^{\hat{\mu}'} = \Lambda^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\alpha}}v^{\hat{\alpha}}$. Em relação a sistemas de partículas, contudo, quando se aplica um "boost" ativo, o quadrivetor de fundo permanece inalterado - comporta-se como um conjunto de quatro escalares, quebrando, portanto, a covariância de Lorentz. O termo Chern-Simons também quebra a simetria de paridade, mas mantém invariância sob conjugação de carga e sob a reversão temporal.

Vamos analisar estas simetrias no processo de redução dimensional. Este, por sua vez, consiste efetivamente em se adotar o seguinte "ansatz" em relação a qualquer quadrivetor: (i) as dimensões temporal e as duas espaciais permanecem inalteradas, pois não participam do processo; (ii) a terceira dimensão espacial é "congelada", resultando assim, num novo espaço onde moram trivetores. Este processo exige que as novas quantidades, (χ), definidas em $D = 1 + 2$, não dependam da terceira dimensão espacial, ou seja, $\partial_3\chi = 0$. Aplicando esta prescrição ao quadrivetor $A^{\hat{\mu}}$, e ao quadrivetor externo, $v^{\hat{\mu}}$, e, também, à quadricorrente, $J^{\hat{\mu}}$, temos:

$$A^{\hat{\mu}} \longrightarrow (A^{\mu};\ \varphi), \tag{3.2}$$

$$v^{\hat{\mu}} \longrightarrow (v^{\mu};\ s), \tag{3.3}$$

[1]Lembrando da nossa convenção: $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = (+,-,-,-)$ em $D = 1 + 3$, e $g_{\mu\nu} = (+,-,-)$ em $D = 1 + 2$. As letras gregas (com chapéu) $\hat{\mu}$, variam de 0 a 3, enquanto que as sem chapéu, μ, variam de 0 a 2.

$$J^{\hat{\mu}} \longrightarrow (J^{\mu};\ J). \tag{3.4}$$

sendo: $A^{(3)} = \varphi$, $v^{(3)} = s$, $J^{(3)} = J$ e $\mu = 0, 1, 2$. Observamos que deste processo dois escalares entram em cena: o campo escalar, φ, que apresenta dinâmica, e s, um escalar sem dinâmica (constante). Com este esquema de redução, tomando o Lagrangeano (3.1), o Lagrangeano reduzido obtido é escrito por:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{1+2} \quad &= \quad -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \frac{s}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\kappa}A^\mu\partial^\nu A^\kappa + \\ &\quad +\varphi\,\epsilon_{\mu\nu\kappa}v^\mu\partial^\nu A^\kappa - \frac{1}{2\alpha}\,(\partial_\mu A^\mu)^2 + A_\mu J^\mu + \varphi J,\end{aligned} \tag{3.5}$$

sendo que o "gauge-fixing" é adicionado após a redução dimensional. O campo escalar, φ, exibe a dinâmica de um termo de Klein-Gordon sem massa, e também acopla o quadrivetor v^μ ao setor de gauge do modelo, que é representado pelo termo $\varphi\epsilon_{\mu\nu k}v^\mu\partial^\nu A^k$. Apesar de covariante na forma, este termo quebra a simetria de Lorentz via transformações de referenciais de partículas, já que o trivetor, v^μ, não sente estas transformações, comportando-se como um conjunto de três escalares.

O Lagrangeano (3.1), originalmente proposto por Carroll-Field-Jackiw [10], tem a propriedade de quebrar a simetria de paridade, apesar de conservar a simetria de reversão temporal e a de conjugação de carga, resultando em não-conservação de simetria de CPT. Simultaneamente, a invariância de Lorentz é perdida, já que o quadrivector fixo, v^μ, quebra a invariâcia rotacional e a invariância por "boosts". Por outro lado, o modelo reduzido dado pela eq.(3.5) não necessariamente quebra simetria CPT, este comportamento é regulado pelo vetor fixo v^μ. A transformação de paridade ($\mathcal{P}$) em $D = 1 + 2$ é realizada pela reversão de um eixo espacial somente, ou seja, $x^\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} x'^\mu = (x^0, -x^1, x^2)$, o mesmo sendo válido para o tripotencial: $A^\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} A'^\mu = (A^0, -A^1, A^2)$. A operação de reversão temporal ($\mathcal{T}$) deve manter a dinâmica do sistema; então, devemos fazer: $x^\mu \xrightarrow{\mathcal{T}} x'^\mu = (-x^0, x^1, x^2)$, $A^\mu \xrightarrow{\mathcal{T}} A'^\mu = (A^0, -A^1, -A^2)$, enquanto que a conjugação de carga determina: $x^\mu \xrightarrow{\mathcal{C}} x'^\mu = x^\mu$, $A^\mu \xrightarrow{\mathcal{C}} A'^\mu = -A^\mu$. Sabemos que o termo de Chern-

Simons quebra a simetria de paridade e a de reversão temporal mas mantém a simetria de conjugação de carga. determinadas escolhas do quadrivetor v^μ podem assegurar uma invariância global de CPT. Para isto, primeiramente, verificamos que o termo $\varphi\,\varepsilon_{\mu\nu\kappa}v^\mu\partial^\nu A^\kappa$ manifesta comportamento não-simétrico frente à transformação $\mathcal{T}$, portanto se tomarmos o vetor externo sendo do tipo-espaço ($v^\mu = (0, \vec{v})$) asseguramos conservação da simetria $\mathcal{T}$. Observe que esta simetria é quebrada se v^μ é do tipo-tempo. Por outro lado, por transformação de paridade e conjugação de carga (CP), este termo evidencia a não-invariância para qualquer v^μ adotado. Entretanto, pode-se verificar que ocorre a conservação de CPT quando v^μ é tipo-espaço, e a violação CPT nos outros casos. Observamos, também que o campo φ é considerado poder ter comportamento de um escalar sob transformação de paridade. Contudo, se este campo se comporta como um pseudo-escalar[2], a simetria CPT é assegurada para v^μ tipo-tempo. Para v^μ tipo luz, observa-se a não-invariância por reversão temporal e, conseqüentemente, a violação de CPT.

A menos de termos de superfície, podemos escrever a ação em uma forma explícita, ou seja,

$$\Sigma_{1+2} = \int d^3x \frac{1}{2}\Big\{A^\mu [M_{\mu\nu}] A^\nu - \varphi\Box\varphi + \varphi\left[\epsilon_{\mu\alpha\nu}v^\mu\partial^\alpha\right] A^\nu + A^\mu\left[\epsilon_{\nu\alpha\mu}v^\nu\partial^\alpha\right]\varphi\Big\}, \qquad (3.6)$$

que pode ser rearranjada na forma matricial que segue:

$$\Sigma_{1+2} = \int d^3x \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A^\mu & \varphi \end{pmatrix}\begin{bmatrix} M_{\mu\nu} & T_\mu \\ -T_\nu & -\Box \end{bmatrix}\begin{pmatrix} A^\nu \\ \varphi \end{pmatrix}, \qquad (3.7)$$

onde $T_\mu = \epsilon_{\nu\alpha\mu}v^\nu\partial^\alpha$. A ação (3.7) apresenta uma matriz quadrada, que chamaremos de P, composta pelos operadores da ação inicial. As dimensões de massa dos elementos da eq.(3.6) são $[A^\mu] = [\varphi] = 1/2$, $[v^\mu] = [s] = 1$, $[T_\mu] = [M_{\mu\nu}] = 2$. Em termos de operadores

[2]A adoção do campo como um pseudo-escalar pode ser justificada atendo-se ao comportamento do tri-vetor potencial ($\vec{A} \xrightarrow{P} -\vec{A}$) antes da redução dimensional. Se supusermos que o campo escalar, φ, herda o mesmo comportamento da componente (A^3), temos um pseudo-escalar.

de projeção temos:

$$
\begin{aligned}
M_{\mu\nu} &= \Box\theta_{\mu\nu} + sS_{\mu\nu} + \frac{\Box}{\alpha}\omega_{\mu\nu}, \qquad T_\mu = S_{\mu\nu}v^\mu, &(3.8)\\
S_{\mu\nu} &= \varepsilon_{\mu\kappa\nu}\partial^\kappa, \; \theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu}, \quad \omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box}, &(3.9)
\end{aligned}
$$

onde $\theta_{\mu\nu}$, $\omega_{\mu\nu}$, $S_{\mu\nu}$ são respectivamente os projetores transverso, longitudinal, e de Chern-Simons, enquanto que $M_{\mu\nu}$ é o operador associado ao setor de MCS. O inverso da matriz quadrada, P, dada pela ação (3.7), representa os propagadores dos campos de "gauge" e escalar, que tambem é escrito, na forma matricial, como a matriz-propagador (Δ):

$$
\Delta = P^{-1} = \frac{-1}{(\Box M_{\mu\nu} - T_\mu T_\nu)} \begin{bmatrix} -\Box & T_\nu \\ -T_\mu & M_{\mu\nu} \end{bmatrix}, \tag{3.10}
$$

Os propagadores do campo de "gauge", Δ_{11}, e do escalar, Δ_{22}, são escritos como:

$$
\begin{aligned}
(\Delta_{11})^{\mu\nu} &= \left[\Box\theta_{\mu\nu} + s\,\mathrm{S}_{\mu\nu} + \frac{\Box}{\alpha}\omega_{\mu\nu} - \frac{1}{\Box}\mathrm{T}_\mu\mathrm{T}_\nu\right]^{-1}, &(3.11)\\
(\Delta_{22}) &= -\frac{M_{\mu\nu}}{\Box}\left[\Box\theta_{\mu\nu} + s\,\mathrm{S}_{\mu\nu} + \frac{\Box}{\alpha}\omega_{\mu\nu} - \frac{1}{\Box}\mathrm{T}_\mu\mathrm{T}_\nu\right]^{-1}, &(3.12)
\end{aligned}
$$

enquanto que os termos Δ_{12}, Δ_{21} são os propagadores mistos $\langle\varphi A_\mu\rangle$, $\langle A_\mu\varphi\rangle$, os quais podem ser escritos como:

$$
\begin{aligned}
(\Delta_{12})^\nu &= -\frac{T_\nu}{\Box}\left[\Box\theta_{\mu\nu} + s\,\mathrm{S}_{\mu\nu} + \frac{\Box}{\alpha}\omega_{\mu\nu} - \frac{1}{\Box}\mathrm{T}_\mu\mathrm{T}_\nu\right]^{-1}, &(3.13)\\
(\Delta_{21})^\nu &= \frac{T_\mu}{\Box}\left[\Box\theta_{\mu\nu} + s\,\mathrm{S}_{\mu\nu} + \frac{\Box}{\alpha}\omega_{\mu\nu} - \frac{1}{\Box}\mathrm{T}_\mu\mathrm{T}_\nu\right]^{-1}, &(3.14)
\end{aligned}
$$

Para comparações futuras, é útil apresentar o inverso do tensor $M_{\mu\nu}$, que é o propagador do Lagrangeano de MCS puro:

$$
(M_{\mu\nu})^{-1} = \frac{1}{\Box + s^2}\theta^{\mu\nu} - \frac{s}{\Box(\Box + s^2)}S^{\mu\nu} + \frac{\alpha}{\Box}\omega^{\mu\nu}. \tag{3.15}
$$

Para se obter explicitamente estes propagadores, é necessário inverter os componentes matriciais individualmente. Precisamos criar, então, uma base de operadores que formem uma álgebra fechada, como é mostrado abaixo:

$$
\begin{aligned}
S_{\mu\nu}T^{\nu}T^{\alpha} &= \Box v_{\mu}T^{\alpha} - \lambda T^{\alpha}\partial_{\mu} = \Box Q_{\mu}{}^{\alpha} - \lambda \Phi^{\alpha}{}_{\mu}, && (3.16)\\
Q_{\mu\nu}Q^{\alpha\nu} &= T^2 v^{\alpha} v_{\mu} = T^2 \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}, && (3.17)\\
Q_{\mu\nu}\Phi^{\nu\alpha} &= T^2 v_{\mu}\partial^{\alpha} = T^2 \Sigma_{\mu}{}^{\alpha}, && (3.18)
\end{aligned}
$$

onde os novos operadores são:

$$
Q_{\mu\nu} = v_{\mu}T_{\nu}, \quad \Lambda_{\mu\nu} = v_{\mu}v_{\nu}, \quad \Sigma_{\mu\nu} = v_{\mu}\partial_{\nu}, \quad \Phi_{\mu\nu} = T_{\mu}\partial_{\nu}, \qquad (3.19)
$$

$$
\lambda \equiv \Sigma_{\mu}{}^{\mu} = v_{\mu}\partial^{\mu}\ , \quad T^2 = T_{\alpha}T^{\alpha} = (v^2\Box - \lambda^2). \qquad (3.20)
$$

Suas dimensões de massa são: $[\Lambda_{\mu\nu}] = 2$, $[Q_{\mu\nu}] = 3$, $[\Sigma_{\mu\nu}] = 2$, $[\Phi_{\mu\nu}] = 3$. Três destes novos termos exibem comportamento não-simétrico, são eles: $Q_{\mu\nu}$, $Q_{\nu\mu}$, $\Sigma_{\mu\nu}, \Sigma_{\nu\mu}$, $\Phi_{\mu\nu}$ e $\Phi_{\nu\mu}$. A inversão do operador Δ_{11} é feita seguindo a prescrição tradicional,

$$
\left(\Delta_{11}^{-1}\right)_{\mu\nu}(\Delta_{11})^{\nu\alpha} = \delta_{\mu}^{\alpha},
$$

onde o operador $(\Delta_{11})^{\nu\alpha}$ é composto por todas as possíveis combinações de tensores (de ordem 2) envolvendo T_{μ}, v_{μ}, ∂_{α}. A base de operadores que fecha a álgebra é composta por 11 operadores. Portanto, o propagador que será calculado terá uma decomposição em 11 termos, como segue:

$$
\begin{aligned}
(\Delta_{11})^{\nu\alpha} = {} & a_1\theta^{\nu\alpha} + a_2\omega^{\nu\alpha} + a_3 S^{\nu\alpha} + a_4\Lambda^{\nu\alpha} + a_5 T^{\nu}T^{\alpha} + \\
& + a_6 Q^{\nu\alpha} + a_7 Q^{\alpha\nu} + a_8\Sigma^{\nu\alpha} + a_9\Sigma^{\alpha\nu} + a_{10}\Phi^{\nu\alpha} + a_{11}\Phi^{\alpha\nu}, \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

onde os operadores do lado direito da equação acima têm sua álgebra especificada através da Tabela II (ver Apêndice). Usando as informações contidas na Tabela II, pode-se calcular o propagador do campo de "gauge" que assume a forma:

$$
\begin{aligned}
(\Delta_{11})^{\mu\nu} \; = \; & \frac{1}{\Box + s^2}\theta^{\mu\nu} + \frac{\alpha(\Box + s^2)\diamond - \lambda^2 s^2}{\Box(\Box + s^2)\diamond}\omega^{\mu\nu} - \frac{s}{\Box(\Box + s^2)}S^{\mu\nu} + \\
& - \frac{s^2}{(\Box + s^2)\diamond}\Lambda^{\mu\nu} + \frac{1}{(\Box + s^2)\diamond}T^{\mu}T^{\nu} - \frac{s}{(\Box + s^2)\diamond}Q^{\mu\nu} + \\
& + \frac{s}{(\Box + s^2)\diamond}Q^{\nu\mu} + \frac{\lambda s^2}{\Box(\Box + s^2)\diamond}\Sigma^{\mu\nu} + \frac{\lambda s^2}{\Box(\Box + s^2)\diamond}\Sigma^{\nu\mu} + \\
& - \frac{s\lambda}{\Box(\Box + s^2)\diamond}\Phi^{\mu\nu} + \frac{s\lambda}{\Box(\Box + s^2)\diamond}\Phi^{\nu\mu},
\end{aligned}
$$

sendo $\diamond = (\Box^2 + s^2\Box - T^2)$. Pelo mesmo procedimento, encontramos os propagadores:

$$
(\Delta_{12})^{\nu} = -\frac{T_{\mu}}{\Box}(\Delta_{11})^{\mu\nu}. \tag{3.22}
$$

que podem ser escritos da seguinta forma:

$$
(\Delta_{12})^{\nu} = -\frac{1}{\diamond}\left[T^{\nu} + sv^{\nu} - \frac{s\lambda}{\Box}\partial^{\nu}\right]. \tag{3.23}
$$

O propagador $(\Delta_{21})^{\nu}$ resulta ser exatamente igual a $(\Delta_{12})^{\nu}$. O propagador do campo escalar assume a forma.

$$
(\Delta_{22}) = -\frac{1}{\Box}\left[1 - \frac{1}{\Box}T_{\mu}\left(M_{\mu\nu}\right)^{-1}T_{\nu}\right]^{-1}, \tag{3.24}
$$

fazendo o uso do inverso do tensor $M_{\mu\nu}$, dado pela eq. (3.15), tal que: $T_{\mu}(M^{-1})^{\mu\nu}T_{\nu} = (\Box + s^2)^{-1}T^2$. Deste modo, o propagador escalar fica na forma compacta:

$$
(\Delta_{22}) \; = -\frac{\Box + s^2}{\diamond}. \tag{3.25}
$$

No espaço dos momenta, o propagador do fóton assume a expressão final:

$$
\begin{aligned}
\langle A^{\mu}(k)\, A^{\nu}(k)\rangle \; = \; & i\Big\{-\frac{1}{k^2-s^2}\theta^{\mu\nu} - \frac{\alpha(k^2-s^2)\diamondsuit(k)+s^2\,(v_\alpha k^\alpha)^2}{k^2(k^2-s^2)\diamondsuit(k)}\omega^{\mu\nu} + \\
& -\frac{s}{k^2(k^2-s^2)}S^{\mu\nu} + \frac{s^2}{(k^2-s^2)\diamondsuit(k)}\Lambda^{\mu\nu} + \\
& -\frac{1}{(k^2-s^2)\diamondsuit(k)}T^{\mu}T^{\nu} + \frac{s}{(k^2-s^2)\diamondsuit(k)}Q^{\mu\nu} + \\
& -\frac{s}{(k^2-s^2)\diamondsuit(k)}Q^{\nu\mu} + \frac{is^2\,(v_\alpha k^\alpha)}{k^2(k^2-s^2)\diamondsuit(k)}\Sigma^{\mu\nu} + \\
& +\frac{is^2\,(v_\alpha k^\alpha)}{k^2(k^2-s^2)\diamondsuit(k)}\Sigma^{\nu\mu} - \frac{is\,(v_\alpha k^\alpha)}{k^2(k^2-s^2)\diamondsuit(k)}\Phi^{\mu\nu} + \\
& +\frac{is\,(v_\alpha k^\alpha)}{k^2(k^2-s^2)\diamondsuit(k)}\Phi^{\nu\mu}\Big\}; \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

os demais propagadores lêem-se:

$$
\langle\varphi\varphi\rangle \; = \frac{i}{\diamondsuit(k)}\left[k^2-s^2\right], \qquad (3.27)
$$

$$
\langle\varphi A^{\alpha}(k)\rangle = -\frac{i}{\diamondsuit(k)}\left[T^{\alpha} + sv^{\alpha} - \frac{s\,(v_\mu k^\mu)}{k^2}k^{\alpha}\right], \qquad (3.28)
$$

sendo: $\diamondsuit(k) = \left[k^4 - (s^2 - v^2)\,k^2 - (v_\mu k^\mu)^2\right]$. Pelas expressões acima, nota-se que o operador $\diamondsuit$ está presente no denominador de todos os propagadores, de tal modo que os campos escalar e de "gauge" compartilham a mesma estrutura de pólos e, conseqüentemente, as mesmas excitações físicas associadas aos pólos do $\diamondsuit(k)$. É observado que esta dependência em $1/\diamondsuit$ conduz a similaridades na estrutura causal dos setores escalar e de "gauge" desse modelo, como será discutido na Seção III.

3.2 Equações de Onda Clássica e Soluções

Vamos considerar agora o modelo reduzido, dado pelo Lagrangeano (3.5), sem o termo de "gauge-fixing":

$$
\mathcal{L}_{1+2} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{s}{2}\epsilon_{\mu\nu k}A^\mu\partial^\nu A^k + \varphi\varepsilon_{\mu\nu k}v^\mu\partial^\nu A^k + A_\mu J^\mu + \varphi J, \qquad (3.29)
$$

que apresenta termo de Chern-Simons (tendo s como parâmetro de massa topológica) e o termo de quebra de Lorentz, que acopla o trivector fixo, v^μ, ao vetor de "gauge" A^μ. Associados a este Lagrangeano, há duas equações de movimento:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{s}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho - \varepsilon^{\mu\nu\rho} v_\nu \partial_\rho \varphi - J^\mu, \tag{3.30}$$

$$\Box\varphi = \epsilon_{\mu\nu k} v^\mu \partial^\nu A^k - J. \tag{3.31}$$

Então as equações de Maxwell modificadas, obtidas deste Lagrangeano, são:

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} + \partial_t B = 0, \tag{3.32}$$

$$\partial_t \overrightarrow{E} - \nabla^* B = -\overrightarrow{j} + s\overrightarrow{E}^* + \left(\overrightarrow{v}^*\partial_t\varphi + v_0\overrightarrow{\nabla}^*\varphi\right), \tag{3.33}$$

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E} + sB = \rho - \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\nabla}\varphi. \tag{3.34}$$

$$\Box\varphi - \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{E} = -v_0\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} - J. \tag{3.35}$$

A primeira equação resulta da identidade de Bianchi[3] ($\partial_\mu F^{\mu *} = 0$), enquanto que as duas seguintes vêm da eq. (3.30); a última é derivada da eq. (3.31). Explicitamente, nota-se que a eq. (3.31) pode ser escrita como duas equações mais simples, se o vetor v^μ é do tipo-espaço ou do tipo-tempo: $\Box\varphi = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{E} - J$, para $v^\mu = (0, \overrightarrow{v})$; $\Box\varphi = -v_0\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} - J$, para $v^\mu = (v_0, \overrightarrow{0})$. Aplicando o operador diferencial, ∂_μ, à eq. (3.30), chega-se à seguinte equação para a corrente de gauge:

$$\partial_\mu J^\mu = -\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu v_\nu \partial_\rho \varphi,$$

que se reduz à convencional lei de conservação de corrente, $\partial_\mu J^\mu = 0$, quando v^μ é constante ou tem rotacional nulo quando $\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu v_\nu = 0$. Estas condições correspondem exatamente ao requisito para a invariância de "gauge" [10].

[3] Em $D = 1+2$, o tensor dual tem a forma $F^{\mu *} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\nu\alpha}$, é um trivetor dado por: $F^{\mu *} = (B, -\overrightarrow{E}^*)$. Adotamos a seguinte convenção: $\epsilon_{012} = \epsilon^{012} = \epsilon_{12} = \epsilon^{12} = 1$. O símbolo (*), de um modo geral, designa também o dual de um 2-vetor: $(E_i)^* = \epsilon_{ij}E_j \longrightarrow \overrightarrow{E}^* = (E_y, -E_x)$.

Manipulando as equações de Maxwell, nota-se que os campos B, $\overrightarrow{E}$, satisfazem a uma equação de onda não-homogênea:

$$(\square + s^2)B = s\rho + \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{j} - s\overrightarrow{v} \times \nabla\varphi - \partial_t (\nabla\varphi) \times \overrightarrow{v}^* + v_0\nabla^2\varphi, \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}(\square + s^2)\overrightarrow{E} &= -\overrightarrow{\nabla}\rho - \partial_t \overrightarrow{j} - s\overrightarrow{j}^* - s\overrightarrow{v}(\partial_t\varphi) - sv_o\overrightarrow{\nabla}\varphi + \\ &+ \overrightarrow{v}^*\partial_t^2\varphi + v_0\overrightarrow{\nabla}^*(\partial_t\varphi) + \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\nabla\varphi}),\end{aligned} \tag{3.37}$$

que, no regime estacionário, reduzem-se a:

$$(\nabla^2 - s^2)B = -s\rho - \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{j} + s\overrightarrow{v} \times \nabla\varphi - v_0\nabla^2\varphi, \tag{3.38}$$

$$(\nabla^2 - s^2)\overrightarrow{E} = s\overrightarrow{j}^* + \overrightarrow{\nabla}\rho + sv_o\overrightarrow{\nabla}\varphi - \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\nabla\varphi}). \tag{3.39}$$

De forma similar ao comportamento clássico do potencial de MCS, as componentes $(A_0, \overrightarrow{A})$ obedecem a equações de onda de quarta ordem:

$$\begin{aligned}\square(\square + s^2)A_0 &= \square\rho - \square(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\nabla}\varphi) - s\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{j} + \\ &+ s\left(\partial_t\overrightarrow{\nabla}\varphi\right) \times \overrightarrow{v} - sv_o\nabla^2\varphi,\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}\square(\square + s^2)\overrightarrow{A} &= s\partial_t\overrightarrow{j}^* + s\overrightarrow{\nabla}^*\rho + s\overrightarrow{v}\left(\partial_t^2\varphi\right) + \\ &+ sv_o\overrightarrow{\nabla}(\partial_t\varphi) - s\left[\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\nabla}\varphi\right)\right]^* + \\ &+ \square\left(\overrightarrow{j} - \overrightarrow{v}\partial_t\varphi - v_0\overrightarrow{\nabla}^*\varphi\right),\end{aligned} \tag{3.41}$$

que apresentam um setor não-homogêneo mais complexo, devido à presença dos termos com $\overrightarrow{v}$ e φ no Lagrangeano (3.29). É instrutivo ressaltar que as equação de onda (3.36), (3.37), (3.40) e (3.41) reduzem-se à forma clássica de MCS [33] ao se tomar os limites $v^\mu \to 0$ e $\varphi \to 0$. Assim:

$$(\square + s^2)B = s\rho + \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{j}; \quad (\square + s^2)\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\rho - \partial_t\overrightarrow{j} - s\overrightarrow{j}^*; \tag{3.42}$$

$$\square(\square + s^2)A_0 = \square\rho - s\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{j}; \quad \square(\square + s^2)\overrightarrow{A} = s\partial_t\overrightarrow{j}^* + s\overrightarrow{\nabla}^*\rho + \square\overrightarrow{j}. \tag{3.43}$$

As eqs. de onda acima apresentam as seguintes soluções [33] (para uma distribuição de carga pontual e corrente nula):

$$B(r) = (e/2\pi)\,K_0(sr); \quad \vec{E} = (e/2\pi)\,sK_1(sr)\,\hat{r}; \tag{3.44}$$

$$A_0(r) = (e/2\pi)\,K_0(sr); \quad \vec{A}(r) = (e/2\pi)\,[1/r - srK_1(sr)]\,\hat{r}^* . \tag{3.45}$$

Até agora, a eq. (3.31) não foi usada na derivação da equação de onda para os campos e potenciais, esta será apropriadamente utilizada nas soluções subseqüentes.

3.2.1 Soluções para os Potenciais Escalar, Elétrico e Magnético no Limite Estático

A equação de onda que rege a dinâmica do potencial escalar, A_0, já foi obtida. A eq. (3.40), contudo, não está totalmente escrita em termos de A_0, visto que o campo escalar, φ, tem sua própria dinâmica descrita pela eq. (3.35), e deve ser levada em conta para fornecer a solução correta da equação de onda. A eq. (3.40) apresentará duas soluções diferentes, dependendo do caráter do vetor fixo v^μ.

Caso 1: Vetor Externo sendo Tipo-Tempo: $v^\mu = (v_0; 0)$.

Supondo que o sistema alcance o regime estacionário, a eq. (3.40) reduz-se a

$$\nabla^2(\nabla^2 - s^2)A_0 = -\nabla^2\rho - s\vec{\nabla} \times \vec{j} - sv_o\nabla^2\varphi + \nabla^2\left(\vec{v} \times \vec{\nabla}\varphi\right). \tag{3.46}$$

Neste caso, o campo φ satisfaz à equação: $\nabla^2\varphi = v_0 B + J$. Com o uso da eq. (3.32), a eq. (3.46) assume a forma:

$$\nabla^2(\nabla^2 - s^2 + v_0^2)A_0 = -\nabla^2\rho - s\vec{\nabla} \times \vec{j} - v_0^2\rho - J. \tag{3.47}$$

Partindo da distribuição de densidade de carga puntiforme, $\rho(\vec{r}) = e\delta^2(\vec{r})$, anulando a densidade de corrente, $\vec{j} = 0$, $J = 0$, e propondo a seguinte integral de Fourier para o potencial escalar, $A_0(r) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2\vec{k}\, e^{i\vec{k}.\vec{r}}\tilde{A}_0(k)$, obtemos a solução,

$$A_0(r) = \frac{e}{(2\pi)w^2}\left[s^2 K_0\left(wr\right) + v_0^2 \ln r\right], \tag{3.48}$$

sendo: $w^2 = s^2 - v_0^2$. Se $s^2 > v_0^2$, o potencial torna-se sempre repulsivo. Contudo, é imediato ver que, no limite $v_0 \to 0$, recuperamos o potencial escalar associado à Eletrodinâmica de MCS dada pela eq. (3.45). Fica, então, claro que o termo com dependência em $\ln r$ é a contribuição que vem do vetor de fundo. O campo elétrico, derivado da eq. (3.48), assume a forma

$$\overrightarrow{E}(r) = \frac{e}{(2\pi)}\left[\frac{s^2}{w}K_1\left(wr\right) - \left(\frac{v_0^2}{w^2}\right)\frac{1}{r}\right]\hat{r}, \tag{3.49}$$

que, comparado com o MCS correspondente (eq. (3.44)) manifesta a presença de um termo adicional, $1/r$, que, certamente, surge como contribuição do campo de fundo, do mesmo modo que ocorre na eq. (3.48). No limite de pequenas distâncias $(r \ll 1)$, o potencial escalar (3.48) e o campo elétrico ficam reduzidos às formas:

$$A_0(r) = -\frac{e}{(2\pi)}\left[\ln r + \frac{s^2}{w^2}\ln w\right]; \qquad \overrightarrow{E}(r) = \left(\frac{e}{2\pi}\right)\frac{1}{r}\hat{r}, \tag{3.50}$$

o que revela o caráter repulsivo da expressão (3.48) e o comportamento radial $1/r$ do campo elétrico próximo da origem.

Na ausência de correntes, o campo magnético que é regido pela eq. (3.38), assume a forma: $(\nabla^2 - s^2 + v_0^2)B = -s\rho$. Esta equação diferencial apresenta uma solução simples:

$$B(r) = \left(\frac{es}{2\pi}\right)K_0(wr). \tag{3.51}$$

Comparando o campo magnético acima com o da eq. (3.44), não se observa nenhum termo adicional. Neste caso, a influência do campo de fundo fica totalmente absorvida no fator de decaimento w. Podemos observar que os resultados aqui obtidos não exibem qualquer anisotropia, o que é consistente com a adoção do vetor $\overrightarrow{v}$ nulo, já que este vetor é o elemento responsável pela escolha de uma direção espacial privilegiada. A anisotropia, portanto, deve se manifestar quando v^{μ} for do tipo-espaço.

Caso 2: Vetor Externo Tipo-Espaço: $v^{\mu} = (0, \vec{v})$

Neste caso, a equação de movimento para o campo escalar, $\nabla^2\varphi = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{E}$, pode ser escrita em termos do potencial escalar: $\nabla^2\varphi = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\nabla} A_0 + J = (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla}^*)A_0 + J$. Levando em conta esta relação, a eq. (3.40), no regime estacionário, fica reformulada como:

$$\left[\nabla^2(\nabla^2 - s^2) - (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla}^*)(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla}^*)\right] A_0 = -\nabla^2\rho - s\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{j} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla}^*)J, \tag{3.52}$$

ressaltando que foi usada a relação: $\nabla^2(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\nabla}\varphi) = (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla}^*)\nabla^2\varphi = (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla}^*)(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla}^*)A_0$, no caso em que $\overrightarrow{v}$ é um vetor constante.

Tomando a densidade de carga da forma, $\rho(\vec{r}) = e\delta^2(\vec{r})$, e tomando $\overrightarrow{j} = 0$ propomos novamente o mesmo tipo de integral de Fourier para o potencial escalar, obtemos:

$$A_0(r) = -\frac{e}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty} kdk \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{e^{ikr\cos\varphi}}{\left[(\overrightarrow{k}^2 + s^2) + \overrightarrow{v}^2\sin^2\alpha\right]} \right\}, \tag{3.53}$$

sendo α o ângulo definido por: $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{k} = vk\cos\alpha$. Um resultado exato para esta integral não foi encontrado. Mas, uma aproximação pode ser feita com o intuito de resolvê-la algebricamente. Como há um vetor externo, $\overrightarrow{v}$, que fixa uma direção no espaço e, assim, podemos determinar um ângulo com o vetor posição, $\overrightarrow{r}$, onde se mede o campo. Então, consideremos que o ângulo entre $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{r}$ seja dado por: $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{r} = vr\cos\beta$, onde $\beta = cte$. Considerando esta informação, e trabalhando num limite em que $s^2 \gg v^2$, a integração torna-se possível, e obtemos (em primeira ordem de v^2/s^2):

$$A_0(r) = \frac{e}{(2\pi)}\left[K_0(sr) - \frac{(1-\cos^2\beta)}{2s}v^2 r K_1(sr) + \frac{v^2}{2s^2}\left(1-\cos^2\beta\right)K_2(sr)\right]. \tag{3.54}$$

Nesta expressão, nota-se uma clara dependência do potencial em relação ao ângulo β. Esta é a manifestação inequívoca da anisotropia imposta ao sistema pelo vetor de fundo.

Próxima da origem, a função K_2 domina frente aos outros termos, tal que, a pequenas distâncias, o potencial comporta-se efetivamente como:

$$A_0(r) = \frac{e}{(2\pi)}\left[\left(1-\cos^2\beta\right)\frac{v^2}{s^2}\frac{1}{r^2}\right], \tag{3.55}$$

o que mostra que o potencial é sempre repulsivo na origem. A expressão (3.54) pode exibir uma região atrativa, para grandes valores de r, dependendo dos valores do parâmetro s. Disto, emerge a possibilidade de ocorrer formação de pares condensados: duas partículas interagindo atrativamente por meio deste campo de "gauge". Este tema pode ser mais propriamente investigado no contexto de espalhamento de duas patículas a baixas energias, cuja amplitude pode ser convertida em potencial de interação por intermédio de uma transformação de Fourier.

Tomando a expressão (3.41) para o potencial vetorial, observa-se a presença do termo $\vec{\nabla}(\vec{v}\times\vec{\nabla}\varphi)$ não pode ser tomado como diretamente dependente de $\vec{A}$. Este fato parece impedir a obtenção de uma solução para $\vec{A}$ mesmo na versão estacionária da equação diferencial, sendo este, portanto, um impedimento para se determinar o campo magnético. Contudo, estamos interessados, de fato, em obter uma expressão para campo magnético; e alguma solução simples pode surgir da eq. (3.33) que, no regime estático, fica simplificada sob a forma: $\nabla B = -s\vec{E} - v_0\vec{\nabla}\varphi$. Para um vetor v^{μ} tipo-espaço, a equação reduz-se a $\nabla B = -s\vec{E} = s\nabla A_0$, sendo que uma solução que vincula o campo magnético e o potencial escalar é dada por $B = sA_0 + cte$. Tomando, então, a eq. (3.54), encontramos as seguintes expressões para os campos:

$$\begin{aligned}\vec{E}(r) &= \frac{e}{(2\pi)}\left[sK_1(sr) + \left(1-\cos^2\beta\right)\frac{v^2}{2}\left[r-\frac{2}{s^2r}\right]K_0(sr)+\right.\\ &\quad\left.+\left(1-2\cos^2\beta\right)\frac{v^2}{2s}\left[1-\frac{4}{s^2r^2}\right]K_1(sr)\right]\hat{r},\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}B(r) &= \frac{e}{(2\pi)}\left[sK_0(sr) - \left(1-\cos^2\beta\right)\frac{v^2}{2}rK_1(sr)+\right.\\ &\quad\left.+\frac{v^2}{2s}\left(1-\cos^2\beta\right)K_2(sr)\right].\end{aligned} \tag{3.57}$$

Observe que o efeito do vetor de fundo, $\vec{v}$, aparece mais claramente nas soluções destes campos. Quando estas são comparadas com os campos de MCS (B e $\vec{E}$), aparecem termos adicionais proporcionais a $\cos^2 \vartheta$, responsáveis pela anisotropia.

Uma maneira direta de achar uma expressão para a densidade de energia associada a esta teoria, consiste na manipulação direta das equações de Maxwell. Vamos definir intensidades de campo Z e $\vec{T}$ associadas ao potencial φ sendo $Z = \partial_t \varphi$ e $\vec{T} = \nabla\varphi$, e assim escrever as equações de Maxwell (3.32)-(3.33) em termos de Z e $\vec{T}$. Trabalhando com estas equações de modo a obter uma derivada temporal aplicada a soma de quadrados dos campos ($B^2 + \vec{E}^2 + Z^2 + \vec{T}^*.\vec{T}$), chegamos a uma expressão análoga ao teorema de Poynting (que relaciona a densidade de energia e o vetor de Poynting), ou

$$\partial_t U + \vec{\nabla}.\vec{S} = \vec{E}.(\vec{T}^* - \vec{j}) + Z\frac{v_0}{s}\vec{v} \times \vec{T} - Z\frac{v_0}{s}\rho + (\vec{T}.\vec{\nabla})Z, \tag{3.58}$$

sendo $U = \frac{1}{2}\left[B^2 + \vec{E}^2 + Z^2 + \vec{T}^*.\vec{T}\right]$ e $\vec{S} = \left[B\vec{E}^* - Z\vec{T} - \frac{v_0}{s}Z\vec{E}\right]$, respectivamente a densidade de energia e o vetor de Poynting. A densidade de energia é positivo-definida. Na próxima seção, vamos discutir a estabilidade da teoria sob a perspectiva das relações de dispersão. Estes resultados confirmam a estabilidade da teoria, na medida em que a densidade de energia satisfaz ao critério de positividade.

3.3 Relações de Dispersão, Estabilidade e Causalidade

A estabilidade, a causalidade e a unitaridade são temas que têm sido tratados em diversas referências recentes na literatura sobre teorias que violam Lorentz e CPT [23, 27, 29]. A causalidade é usualmente tratada como uma característica quântica que requer relações de comutação entre os observáveis separados por intervalos do tipo-espaço. Este requisito é conhecido como microcausalidade em teorias de campo [32]. Nesta seção, iremos analisar a causalidade sob uma perspectiva clássica (à "tree-level"), que está baseada na positividade dos pólos dos propagadores. O ponto de partida de nossa análise é o propagador cujos pólos estão associados com as relações de dispersão (RD). Estes pólos fornecem informação sobre a estabilidade e a causalidade do modelo. A análise da causalidade está relacionada com o sinal dos pólos do propagador, dados em termos de k^2, de tal modo que devemos ter $k^2 \geq 0$ para preservar causalidade (evitar táquions). Do ponto de vista da segunda quantização, a estabilidade está relacionada à energia positiva dos estados físicos no espaço de Fock para qualquer momentum. Enfatizamos que neste caso a estabilidade está diretamente associada à positividade da energia para cada modo originado da RD.

Os propagadores dos campos, dados pelas eqs. (3.26), (3.28) e (3.27) apresentam três famílias de pólos em termos de k^2:

$$\begin{aligned} k^2 &= 0; \\ k^2 - s^2 &= 0; \\ k^4 - (s^2 - v^2)k^2 - (v.k)^2 &= 0, \end{aligned} \tag{3.59}$$

os quais obtemos da RD derivada do Lagrangeano (3.5):

$$\begin{aligned} k^2_{0(1)} &= \overrightarrow{k}^2; \\ k^2_{0(2)} &= \overrightarrow{k}^2 + s^2; \\ k^2_{0(3)} &= \overrightarrow{k}^2 + \frac{1}{2}\left[\left(s^2 - v^2\right) \pm \sqrt{\left(s^2 - v^2\right)^2 + 4\left(v.k\right)^2}\right]. \end{aligned} \tag{3.60}$$

A primeira relação de dispersão, $k_{0(1)} = \pm|\overrightarrow{k}|$, representa o modo sem massa do fóton, que não carrega nenhum grau de liberdade, já que o Lagrangeano (3.5) envolve um fóton massivo (um grau de liberdade). A segunda relação de dispersão representa o modo massivo de Chern-Simons, $k_{0(2)} = \pm\sqrt{s^2 + |\overrightarrow{k}|^2}$, que tem somente um grau de liberdade (na Eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons, o campo escalar magnético contém toda informação do campo eletromagnético, o que justifica a existência de um único grau de liberdade). Estes dois primeiros pólos respeitam a condição de causalidade, já que

$k^2 \geq 0$ em ambos. Uma vez que a causalidade está garantida, a estabilidade vem como conseqüência direta.

Com relação à terceira RD, que corresponde às raízes de $\diamondsuit(k)$, esta pode fornecer ambos os pólos - modos massivos e sem massa para valores específicos de $\overrightarrow{k}$ porém, em geral, fornece o modo massivo. Como $\overrightarrow{k}$ é o momentum transferido, o qual é integrado de zero a infinito, concluímos que não faz sentido fixar qualquer valor de $\overrightarrow{k}$ para obter um caso particular desta RD. Observavamos que o termo $\diamondsuit(k)$ é comum a todos os propagadores, como está explícito nas eqs. (3.26), (3.27) e (3.28). Concluímos que a estrutura causal que envolve os pólos $1/\diamondsuit$ é comum aos três propagadores. Especificamente, para o trivetor tipo-espaço, $v^{\mu} = (0, \overrightarrow{v})$, esta RD fica,

$$k_{0\pm}^2 = \overrightarrow{k}^2 + \frac{1}{2}\left[\left(s^2 + \overrightarrow{v}^2\right) \pm \sqrt{\left(s^2 + \overrightarrow{v}^2\right)^2 + 4\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{k}\right)^2}\right]. \qquad (3.61)$$

Uma análise simples desta expressão indica que k_{0+}^2 e k_{0-}^2 são modos de energia, ambos positivos para qualquer valor de $\overrightarrow{k}$ (para quaisquer referenciais de Lorentz conectados por transformação ativa), o que assegura a estabilidade destes modos. Este fato sugere que a estrutura causal do setor tipo-espaço deste modelo permanece preservada, como observado por Adam & Klinkhamer [23] no contexto quadridimensional. Esta teoria é dotada de uma relação de dispersão muito similar à eq. (3.61) (isto também é respaldado pela análise da velocidade de grupo associada a esta RD ser menor que 1). Analisando os pólos, contudo, temos $k_{+}^2 > 0$ para $\overrightarrow{k}$ arbitrário e $k_{-}^2 < 0$ (a menos que $\overrightarrow{k} \perp \overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{k} = 0$, o que implica $k_{-}^2 = 0$). Indicando que, enquanto que os modos k_{+}^2 preservam a causalidade e a estabilidade, os modos k_{-}^2 são estáveis e, em geral, são não-causais, preservando causalidade somente quando $\overrightarrow{k} \perp \overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{k} = 0$.

No caso de um trivector tipo-tempo, $v^{\mu} = (v_0, \overrightarrow{0})$, esta RD assume a forma:

$$k_{0\pm}^2 = \frac{1}{2}\left[\left(s^2 + 2\overrightarrow{k}^2\right) \pm \sqrt{s^4 + 4v_0^2\overrightarrow{k}^2}\right], \qquad (3.62)$$

onde observa-se um comportamento análogo, ou seja, os modos k_{0+}^2 apresentam estabilidade e causalidade, enquanto que os modos k_{0-}^2 apresentam energia positiva para qualquer valor de $\overrightarrow{k}$ somente se a condição $(s^2 - v_0^2 > 0)$ é satisfeita. Este último modo é não-causal para qualquer $\overrightarrow{k} \neq 0$. Entretanto, supondo que os coeficientes do vetor de fundo são pequenos frente à massa de Chern-Simons $(s^2 \gg v_0^2, |\overrightarrow{v}|^2)$, obtemos uma teoria totalmente causal. Este fato é consistente com resultados obtidos na Ref. [29], onde foram analisadas teorias quânticas que contêm termos que violam Lorentz. Temos, desta forma, que a causalidade é preservada quando os coeficientes do vetor de fundo são pequenos.

Portanto podemos concluir que os modos $k_{0\pm}^2$ apresentam energia positiva nos casos do tipo-espaço e do tipo-tempo, sendo que os dois modos podem ser expandidos em termos de freqüências positivas e negativas. Esta separação permite a definição de estados de partícula e anti-partícula, uma condição necessária para quantização desse modelo. Contudo para inferir sobre a quantização do modelo devem ser analisada a unitaridade da teoria. O que será explorado na próxima secção.

Finalmente, enfatizamos que em sistemas de referência covariante de Lorentz k^2 é um escalar de Lorentz, o que assegura um único valor para todos os referenciais (de Lorentz). Deste modo, se k^2 representa um modo causal para um observador, então o representará para todos.

3.4 Análise da Unitaridade

Para a análise do modelo ao nível clássico, novamente utilizamos a técnica de saturação por correntes externas. O fato de nosso modelo possuir dois setores (o escalar, e de "gauge") implica que devemos saturar ambos separadamente. Desta forma, escrevemos os propagadores saturados como:

$$\begin{aligned} SP_{\langle A_\mu A_\nu \rangle} &= J^{*\mu} \langle A_\mu(k) A_\nu(k) \rangle \; J^\nu, \\ SP_{\langle \varphi\varphi \rangle} &= J^* \langle \varphi\varphi \rangle J. \end{aligned}$$

e a corrente J^μ deve obedecer à lei de conservação válida para o setor de "gauge" do sistema[4]. Observamos, contudo que a corrente escalar, J, não está sujeita a um vínculo deste tipo.

Para a análise de unitaridade vamos utilizar novamente o método baseado nos resíduos de SP, ou seja, a unitaridade ficará assegurada com a positividade da parte imaginária nos resíduos de SP dos pólos de cada propagador.

3.4.1 Setor Escalar

Vamos iniciar nossa análise pelo setor escalar, com a amplitude saturada dada por: $SP_{\langle\varphi\varphi\rangle} = J^*\langle\varphi\varphi\rangle J$, ou mais explicitamente:

$$SP_{\langle\varphi\varphi\rangle} = J^* \frac{i(k^2 - s^2)}{\diamond(k)} J. \tag{3.63}$$

Esta expressão apresenta dois pólos, k_+^2 e k_-^2, que são raízes de $\diamond(k) = 0$. No caso de um vetor de fundo puramente tipo-espaço, $v^\mu = (v_0, \overrightarrow{0})$, estes pólos são exatamente dados pela eq. (3.62): $k_\pm^2 = \frac{1}{2}\left[s^2 \pm \sqrt{s^4 + 4v_0^2\overrightarrow{k}^2}\right]$. Calculando os resíduos de $SP_{\langle\varphi\varphi\rangle}$ no pólo referente a k_+^2, encontramos um valor imaginário positivo, enquanto que no pólo referente a k_-^2 asseguramos um valor real positivo com a condição $\overrightarrow{k}^2 < (v_0^2 + s^2)$. Deste modo, concluímos que a unitaridade do setor escalar no caso tipo-tempo não está garantida. Considerando o caso puramente tipo-espaço, $v^\mu = (0, \overrightarrow{v})$, os pólos de $SP_{\langle\varphi\varphi\rangle}$ são dados pela eq. (3.61): $k_\pm^2 = \frac{1}{2}\left[\left(s^2 + \overrightarrow{v}^2\right) \pm \sqrt{\left(s^2 + \overrightarrow{v}^2\right)^2 + 4\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{k}\right)^2}\right]$. Os resíduos associados a estes dois pólos têm parte imaginária positiva; portanto, podemos afirmar que a unitaridade do setor escalar, no caso tipo-espaço, é preservada sem nenhuma restrição.

[4]Aplicando o operador diferencial, ∂_μ, na equação de movimento derivada do Lagrangeano (3.5), resulta a seguinte equação para a corrente de gauge: $\partial_\mu J^\mu = -\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu v_\nu \partial_\rho \varphi$, que se reduz a uma conservação de corrente usual, $\partial_\mu J^\mu = 0$, devido ao fato do rotacional de v^μ ser nulo ($\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu v_\nu = 0$), já que o vetor de fundo é constante.

3.4.2 Setor do Campo de "Gauge"

A equação de continuidade, $\partial_\mu J^\mu = 0$, no espaço dos momenta toma a forma $k_\mu J^\mu = 0$; isto permite escrever a corrente como sendo da forma: $J^\mu = (j^0, 0, \frac{k_0}{k_2} j^{(0)})$. O vínculo de conservação, $j^{(2)} = \frac{k_0}{k_2} j^{(0)}$, aparece sempre que adotamos $k^\mu = (k_0, 0, k_2)$. A lei de conservação de corrente também reduz para seis o número de termos do propagador do fóton que contribuem para o cálculo dos pólos do propagador saturado:

$$\begin{aligned} SP_{\langle A_\mu A_\nu \rangle} &= J_\mu^*(k) \Big\{ \frac{i}{D} \Big(\Box \Diamond g^{\mu\nu} - s \Diamond S^{\mu\nu} - s^2 \Box \Lambda^{\mu\nu} + \\ &\quad + \Box T^\mu T^\nu - s \Box Q^{\mu\nu} + s \Box Q^{\nu\mu} \Big) \Big\} J_\nu(k), \end{aligned} \tag{3.64}$$

sendo $D = \Box(\Box + s^2)\Diamond$. Escrevendo esta expressão no espaço dos momenta, obtemos:

$$SP_{\langle A_\mu A_\nu \rangle} = J^{*\mu}(k) \Big\{ i B_{\mu\nu} \Big\} J^\nu(k), \tag{3.65}$$

com $iB_{\mu\nu}$ o operador entre parênteses na eq. (3.64) nos espaço dos momenta, sendo que $D(k) = k^2(k^2 - s^2)\Diamond$, e $\Diamond(k) = k^4 - (s^2 - v.v)k^2 - (v.k)^2$.

Vamos analisar unitaridade para os casos possíveis dos vetores de fundo.

Caso Vetor de Tipo-Tempo com $v^\mu = (v^0, \vec{0})$

Neste caso, o tensor de posto 2, $B_{\mu\nu}$, que representa a matriz de resíduos pode ficar na forma:

$$B_{\mu\nu}(k) = \tfrac{1}{D(k)} \times$$

$$\begin{bmatrix} k^2(s^2 {v_0}^2 - \Diamond) & ik^{(2)}\left(s\Diamond - {v_0}^2 s^2 k^2\right) & ik^{(1)}(-s\Diamond + {v_0}^2 s^2 k^2) \\ ik^{(2)}\left(-s\Diamond + {v_0}^2 s^2 k^2\right) & k^2\left(\Diamond + {v_0}^2 {k^{(2)}}^2\right) & is\Diamond k^{(0)} - {v_0}^2 k^2 k^{(1)} k^{(2)} \\ ik^{(1)}(s\Diamond - {v_0}^2 s^2 k^2) & -is\Diamond k^{(0)} - {v_0}^2 k^2 k^{(1)} k^{(2)} & k^2\left(\Diamond + {v_0}^2 {k^1}^2\right) \end{bmatrix} \tag{3,66}$$

sendo $\Diamond = k^4 - (s^2 - v_0^2)k^2 - {k^{(0)}}^2$.

Para o caso em que o pólo $k^2 = 0$, com $k^\mu = (k_0, 0, k_0)$, a matriz de resíduos é escrita como

$$B_{\mu\nu}|_{(k^2=0)} = \frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} 0 & -isk_0 & 0 \\ isk_0 & 0 & -isk_0 \\ 0 & isk_0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.67}$$

que se reduz a uma matriz nula, quando saturada pela conservação de corrente, $J^\mu = (j^0, 0, \frac{k_0}{k_2} j^{(0)})$, implicando, então, numa saturação nula ($SP = 0$). Este fato indica que o modo associado com o pólo $k^2 = 0$ não carrega graus de liberdade dinâmicos, e isto não compromete a unitaridade da teoria.

Para o caso do pólo $k^2 = s^2$, com $k^\mu = (k_0, 0, k_2)$, a matriz de resíduos toma a forma:

$$B_{\mu\nu}\ |_{(k^2=s^2)} = -\frac{1}{s^2 k_2^2}\begin{bmatrix} s^2 k_0^2 & -isk^{(2)}k_0^2 & 0 \\ isk^{(2)}k_0^2 & 0 & -isk_0k_2^2 \\ 0 & isk_0k_2^2 & -s^2k_2^2 \end{bmatrix}. \tag{3.68}$$

Esta matriz, sempre que saturada com a corrente externa $J^\mu = (j^0, 0, \frac{k_0}{k_2} j^{(0)})$, conduz a uma saturação trivial, ($SP = 0$), o que é compatível com a exigência de unitaridade. O fato da amplitude corrente-corrente se anular indica que a excitação massiva $k^2 = s^2$ não é dinâmica para o vetor de fundo do tipo-tempo.

No caso do pólo $k_+^2 = \frac{1}{2}\left[s^2 + \sqrt{s^4 + 4v_o^2 \overrightarrow{k}^2}\right]$, a matriz dos resíduos fica:

$$B_{\mu\nu}\ |_{(k^2=k_+^2)} = \frac{v_0^2}{(k_+^2 - s^2)(k_+^2 - k_-^2)}\begin{bmatrix} s^2 & -is^2k^{(2)} & 0 \\ is^2k^{(2)} & k_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.69}$$

que apresenta autovalores $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = k_2^2 + s^2$. Conseqüentemente, temos que $SP > 0$, ou seja, a unitaridade é preservada. No caso do pólo k_-^2 um comportamento similar ocorre onde obtemos a matriz dos resíduos análoga ao caso anterior. A única diferença está no coeficiente que aparece em frente da matriz que neste caso é $\frac{1}{D(k_-)} =$

$v_0^2[(k_-^2 - s^2)(k_-^2 - k_-^2)]^{-1} > 0$. O fato deste último coeficiente ser positivo, indica que a unitaridade é preservada no pólo $k^2 = k_-^2$, uma vez que temos os mesmos auto-valores. Temos, então, uma diferença em relação ao comportamento do modelo em $D = 1 + 3$ analisado pelos trabalhos [23, 28], nos quais, para o vetor de fundo tipo-tempo, o setor de gauge apresenta sempre estados de "ghost" que não podem ser removidos por alguma escolha de "gauge", o que viola a unitaridade.

Caso Vetor de Tipo-Espaço com $v^\mu = (0; 0, v)$

Neste caso, o tensor $B_{\mu\nu}$ fica dado como segue:

$$B_{\mu\nu}(k) = \tfrac{1}{D(k)}\times$$

$$\begin{bmatrix} -k^2(\diamond - v^2k_1^2) & is\diamond k^{(2)} - k^2v^2k_0k^{(1)} & ik^{(1)}(-s\diamond - sk^2v^2) \\ -is\diamond k^{(2)} - k^2v^2k_0k^{(1)} & k^2(\diamond + v^2k_0^2) & isk_0(\diamond + v^2k^2) \\ ik^{(1)}(s\diamond + sk^2v^2) & -is\diamond k_0 + iskv^2k_0 & k^2\left(\diamond + v^2s^2\right) \end{bmatrix}, \quad (3.70)$$

sendo $\diamond = k^4 - (s^2 - v^2)k^2 - v^2k_2^2$.

Para o caso do pólo $k^2 = 0$, com $k^\mu = (k^0, 0, k^0)$, obtemos a mesma matriz que aparece no caso tipo-tempo, dado pela eq. (3.67). Pela mesma razão apresentada na seção anterior, podemos afirmar que a unitaridade é preservada neste pólo.

Para o caso do pólo $k^2 = s^2$ com $k^\mu = (k^0, 0, k^2)$, a matriz resultante é idêntica a dada em (3.68), logo, a conclusão estabelecida no caso tipo-tempo também é válida neste caso. O fato do propagador saturado ser nulo no pólo $k^2 = s^2$ em ambos os casos, indica que as excitações massivas $k^2 = s^2$ não são dinâmicas no nosso modelo.

Para o caso do pólo $k_+^2 = \frac{1}{2}\left[\left(s^2 + \overrightarrow{v}^2\right) \pm \sqrt{\left(s^2 + \overrightarrow{v}^2\right)^2 + 4\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{k}\right)^2}\right]$, com $k^\mu =$

$(k_0, 0, k_2)$, a matriz dos resíduos fica reduzida a:

$$B_{\mu\nu}|_{(k^2=k_+^2)} = \frac{v^2}{(k_+^2 - s^2)(k_+^2 - k_-^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_0^2 & isk_0 \\ 0 & -isk_0 & s^2 \end{bmatrix}, \tag{3.71}$$

sendo $(k_+^2 - k_-^2) = \sqrt{(s^2+v^2)^2 + 4v^2k_2^2}$. Os auto-valores dessa matriz são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = k_0^2 + s^2$, o que conduz a uma saturação positiva ($SP > 0$) e a unitaridade fica garantida neste pólo. Para o pólo k_-^2, a unitaridade é também assegurada analogamente ao caso tipo-tempo.

Então, para o setor de gauge do modelo, vimos que a unitaridade fica preservada nos casos do vetor de fundo tipo-espaço e tipo-tempo (em todos os pólos do propagador de "gauge") sem qualquer restrição. No setor escalar, observamos que a teoria preserva unitaridade somente no caso tipo-espaço, já que existe restrição de unitaridade no caso tipo-tempo. É importante ressaltar que a unitaridade do setor de "gauge" é garantida mesmo nos pólos não-causais k_-^2, o que confirma a consistência do modelo.

3.5 Conclusões Preliminares

Neste capítulo realizamos a redução dimensional para $D = 1 + 2$ do modelo de Maxwell-Chern-Simons com o termo de Carroll-Field-Jackiw, $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} v_\mu A_\nu F_{\kappa\lambda}$, e obtivemos um Lagrangeano de Maxwell-Chern-Simons planar com a preseuça do termo que quebra Lorentz e um campo escalar sem massa. Em relação à simetria de CPT, esta é mantida somente no caso em que v^μ tipo-espaço. Os propagadores da teoria apresentam uma estrutura causal comum (ou seja todos apresentam o termo $1/\diamondsuit$). Os pólos dos propagadores são utilizados como ponto de partida de nossa análise de causalidade, unitaridade, e estabilidade. Pela análise das relações de dispersão, verificamos que os modos têm energia positiva, o que assegura estabilidade. A causalidade é garantida para todos os modos da teoria, exceto para k_-^2. A unitaridade do modelo é estudada nos setores escalar e de "gauge" separadamente, por intermédio da saturação da matriz dos resíduos. O setor de gauge revela-se ser unitário nos casos do vetor de fundo ser do tipo-espaço e do tipo-tempo. Já o setor escalar preserva unitaridade somente no caso tipo-espaço. É interessante observar, que no caso reduzido, $D = 2 + 1$, o setor de v^μ tipo-tempo não apresenta "ghosts" , o que é condição fundamental para uma quantização consistente para qualquer teoria. Portanto, uma vez assegurada a unitaridade, abre-se caminho para estudar propriedades de anisotropia em sistemas planares (incluindo as teoria efetivas de campo que aparecem em Matéria Condensada).

O processo de quebra de Lorentz em $D = 1 + 2$ no contexto em que há quebra espontânea de simetria está em fase inicial de elaboração e fará parte de um próximo artigo.

Neste trabalho, realizamos a redução dimensional do modelo apresentado no Capítulo 2 que é na Ref. [28]. O modelo reduzido encontrado é composto por dois campos escalares (um vindo da redução dimensional, e o outro correspondente ao escalar de Higgs), por um campo de gauge de Maxwell-Chern-Simons-Proca, e por um termo misto que viola a simetria Lorentz. A inclusão do setor de Higgs coloca em contato nosso modelo com configurações topológicas de tipo vórtice em sistemas planares.

Capítulo 4

Supersimetria em Modelos com Violação da Simetria de Lorentz

Teorias supersimétricas têm a peculiar propriedade de relacionar campos com diferentes spins e estatísticas através de transformações chamadas de supersimétricas, ou de outra maneira, podemos dizer que a supersimetria relaciona simetrias internas com simetrias externas. Nos modelos não-supersimétricos, bósons (como o fóton) e férmions (como o elétrons) são tratados como partículas de natureza fundamentalmente diferente: bósons atuam como "portadores" de interações, enquanto que os férmions representam a matéria interagente. Essa distinção tem sido particularmente reforçada com o sucesso das teorias de gauge, onde os campos bosônicos definidos como campos de gauge são diretamente relacionados com o grupo de simetria interna da teoria, enquanto que os férmions são introduzidos heuristicamente, sendo alocados em representações fundamentais deste mesmo grupo. Somente em teorias supersimétricas é possível relacionar matéria e interação removendo, assim, a distinção entre elas. Nessas teorias, bósons e férmions são organizados em (super-)multipletes.

Apesar de ainda não ter sido observada confirmação fenomelógica da existência da supersimetria, várias propriedades interessantes do ponto-de-vista teórico e de consistência física tem sido encontradas, sugerindo uma possibilidade eminente de sua existência. Uma destas propriedades vem do fato de essas teorias poderem controlar as divergências que surgem naturalmente em teorias de campos, via cancelamentos entre os setores bosônicos e fermiônicos. O cancelamento de divergências em teorias supersimétricas estimulou tentativas de se construir uma teoria quântica da gravidade (Supergravidade), já que todas as tentativas anteriores haviam-se deparado com um obstáculo intransponível: a não-renormalizabilidade da interação gravitacional, se os quanta da interação são exclusivamente bósons (grávitons, com spin 2). A Supersimetria tem-se firmado como uma idéia central na tentativa de se construir uma teoria de campos que combina todas as interações, incluindo a interação gravitacional.

Estudos de modelos supersimétricos e da própria supersimetria têm sido amplamente tratados na literatura básica da moderna física das altas energias [52, 53, 54, 55], nas aplicações à temas mais complexos como "strings", "D-branes" e "M-Theory" [56, 57, 58], bem como em tópicos de pesquisa ligados a modelos em diferentes dimensões com estrutura topológica ou não, à renormalização e vários outros aspectos relevantes para o aprofundamento do desenvolvimento da supersimetria [?].

Com o intuito de se analisar a extensão supersimétrica do modelo estudado nos capítulos anteriores vamos realizar a extensão supersimétrica do termo de Chern-Simons em (1 + 3 dimensões), e vamos verificar que, com nesta nova versão, aparecem contribuições do campo de "background" para a massa do gaugino, parceiro supersimétrico do bóson de "gauge". Além disto, iremos apresentar uma generalização imediata dotada de acoplamentos não-polinomiais.

4.1 Extensão Supersimétrica da QED de Maxwell-Chern-Simons: Formulação em Supercampos

Uma primeira proposta de supersimetrização de um modelo com quebra de Lorentz foi realizada na Ref. [49]. Naquele trabalho, o objetivo é investigar se algumas das propriedades que um modelo supersimétrico apresenta poderiam ser mantidas, notadamente, o cancelamento das divergências e a validade da prescrição da quebra espontânea de simetria interna, apesar da quebra da simetria Lorentz. A quebra da simetria de Lorentz, sem violar a simetria CPT, via um tensor $k_{\mu\nu}$ real, simétrico, e de traço nulo foi proposta originalmente por Colladay [6, 7]. Por outro lado, trabalhando em um modelo de Wess-Zumino modificado, os autores de [49] demonstraram que uma mudança conveniente da álgebra de supersimetria (*susy*) das cargas fermiônicas, e na expressão da derivada co-variante de *susy*, seria suficiente para definir uma invariância de supersimetria de uma teoria de partida com quebra de Lorentz. A modificação da álgebra de supersimetria foi escolhida com a adição de um novo termo (carga central), que contém o tensor $k_{\mu\nu}$. De posse destes elementos, estes autores construíram uma teoria com campos de matéria e álgebra de *susy* modificada que quebra simetria de Lorentz. Nosso trabalho vai investir em um novo ponto de vista. Vamos propor que a quebra de simetria de Lorentz através de termo introduzido na dinâmica do modelo (setor de gauge) sem modificar de partida a álgebra. Vamos partir com o intuito de construir uma extensão supersimétrica mínima do termo de Chern-Simons [10],

$$\Sigma_{CS} = -\frac{1}{4}\int dx^4 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} c_\mu A_\nu F_{\alpha\beta}, \tag{4.1}$$

preservando a álgebra de *susy* **original**. A quebra da supersimetria segue o mesmo esquema para se quebrar a simetria de Lorentz visto nos capítulos anteriores, ou seja, impondo-se um vetor de fundo, c_μ constante (do ponto-de-vista dos referenciais de partícula), que quebra a simetria de Lorentz e, como conseqüência, quebra *susy*. Estabelecendo a extensão supersimétrica para o termo de fundo, estamos evitando o surgimento de excitações com spins mais altos. Observa-se o surgimento de acoplamentos interessantes no setor de gauge, o que contribui para massa do gaugino.

Adotando a formulação de superespaço[1] propomos a seguinte extensão mínima da

[1] Para efeito de maior clareza, é conveniente mencionar que todas as convenções para a supersimetrização seguem da Ref. [51]

expressão (4.1):

$$A = \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \left\{ W^a (D_a V) S + \bar{W}_{\dot{a}} (\bar{D}^{\dot{a}} V) \bar{S} \right\}, \tag{4.2}$$

sendo que os supercampos W_a, V, S (e seus complexos conjugados) e as derivadas susy-covariantes D_a e $\bar{D}_{\dot{a}}$ apresentam-se na forma:

$$\begin{aligned} D_a &= \frac{\partial}{\partial \theta^a} + i\sigma^\mu{}_{a\dot{a}} \bar{\theta}^{\dot{a}} \partial_\mu \\ \bar{D}_{\dot{a}} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{a}}} - i\theta^a \sigma^\mu{}_{a\dot{a}} \partial_\mu; \end{aligned}$$

das propriedades dos campos e tensores envolvidos temos que

$$\begin{aligned} \overline{D}_{\dot{b}} W_a \left(x, \theta, \bar{\theta} \right) &= 0 \\ D^a W_a \left(x, \theta, \bar{\theta} \right) &= \overline{D}_{\dot{a}} \overline{W}^{\dot{a}} \left(x, \theta, \bar{\theta} \right), \end{aligned} \tag{4.3}$$

o que nos informa que a expressão para o tensor W pode ser encontrada como

$$W_a(x, \theta, \bar{\theta}) = -\frac{1}{4} \overline{D}^2 D_a V. \tag{4.4}$$

Explicitando em campos componentes, temos:

$$\begin{aligned} W_a(x, \theta, \bar{\theta}) = {} & \lambda_a(x) + i\theta^b \sigma^\mu{}_{b\dot{a}} \bar{\theta}^{\dot{a}} \partial_\mu \lambda_a(x) - \frac{1}{4} \bar{\theta}^2 \theta^2 \Box \lambda_a(x) \\ & + 2\theta_a D(x) - i\theta^2 \bar{\theta}^{\dot{a}} \sigma^\mu{}_{a\dot{a}} \partial_\mu D(x) \\ & + \sigma^{\mu\nu}{}_a{}^b \theta_b F_{\mu\nu}(x) - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu}{}_a{}^b \sigma^\alpha{}_{b\dot{a}} \theta^2 \overline{\theta}^{\dot{a}} \partial_\alpha F_{\mu\nu}(x) \\ & - i\sigma^\mu{}_{a\dot{a}} \partial_\mu \overline{\lambda}^{\dot{a}}(x) \theta^2, \end{aligned}$$

lembrando que $V = V^\dagger$. No gauge de Wess-Zumino [51], V assume a forma:

$$V_{WZ} = \theta \sigma^\mu \bar{\theta} A_\mu(x) + \theta^2 \overline{\theta \lambda}(x) + \bar{\theta}^2 \theta \lambda(x) + \theta^2 \bar{\theta}^2 D. \tag{4.5}$$

com isto a ação (4.2) fica invariante por simetria de gauge. O supercampo de fundo é escolhido como sendo quiral. Este vínculo estabelece que o campo componente do supercampo de fundo com $s = \frac{1}{2}$ é o que tem o spin mais alto e que tem como parceiro supersimétrico um campo escalar sem dimensão. Enfatizamos que o supercampo S deve ser sem dimensão. Sabendo que $\bar{D}_{\dot{a}}S(x) = 0$, expansão em supercampos para S fica:

$$S(x) = s(x)+i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}s(x)-\frac{1}{4}\Box\bar{\theta}^{2}\theta^{2}s(x)+\sqrt{2}\theta\psi(x)+\frac{i}{\sqrt{2}}\theta^{2}\bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x)+\theta^{2}F(x). \quad (4.6)$$

A ação residual obtida da integração em θ da ação supersimétrica (4.2) é dada por:

$$\begin{aligned} A_{comp.} = \int d^4x \quad & \Big\{-\frac{1}{2}(s+s^*)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\partial_{\mu}(s-s^*)\varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu}F_{\alpha\beta}A_{\nu} + 4D^2(s + s^*) \\ & -2is\lambda\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\lambda} - 2is^*\bar{\lambda}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\lambda - \sqrt{2}\lambda\left(\sigma^{\mu\nu}\right)F_{\mu\nu}\psi + \sqrt{2}\bar{\lambda}\left(\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right)F_{\mu\nu}\bar{\psi} \\ & + \lambda\lambda F + \bar{\lambda}\bar{\lambda}F^* - 2\sqrt{2}\lambda\psi D - 2\sqrt{2}\bar{\lambda}\bar{\psi}D\Big\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como podemos ver, na primeira linha aparece o termo de Chern-Simons em $D = 1+3$, equivalente ao que foi apresentado na eq. (1.20), sendo que o quadrivetor c_{μ} é da eq. (1.20) é representado pelo gradiente da componente imaginária de um campo escalar de fundo na eq. (4.7), ou seja, $c_{\mu} = \partial_{\mu}\sigma$, para $s = \xi + i\sigma$. A redução do vetor ao gradiente de um campo escalar é imposta pela invariância de gauge[2] e da supersimetria.

Uma outra característica interessante é a presença de auto-acoplamentos para o setor de gauge: o campo de fundo fermiônico, ψ, intermedia o acoplamento do bóson de gauge (através do tensor intensidade de campo) com o gaugino. Usando a equação de Euler-Lagrange para o campo auxiliar de gauge, D, chegamos a um acoplamento quártico nos campos fermiônicos - $\lambda\lambda\psi\psi$ -, e a natureza de fundo de ψ indica uma contribuição para a massa do gaugino.

[2] A invariância de gauge da ação (4.2) se tornará claramente manifesta quando reescrevermos a supersimetrização do termo de Chern-Simons em $D = 1+3$ em uma formulação restrita ao setor com campos quirais e anti-quirais do superespaço que será visto na próxima seção.

4.2 Generalização Não-Polinomial

Observamos que a integração nas medidas Grassmanianas $d^2\bar{\theta}$ (ou $d^2\theta$) na super-ação (4.2) pode ser representada como o quadrado da derivada covariante de *susy* (a menos de um fator de normalização), $\bar{D}^2$ (ou D^2). Desprezamos termos de fronteira, e levamos em conta que o único fator do produto dos supercampos $W(DV)S$ (ou $\bar{W}(\bar{D}V)\bar{S}$) que não se anula sob a ação de $\bar{D}^2$ (ou D^2) é o fator DV (ou $\bar{D}V$). Tal manipulação gera um Lagrangeano da forma $d^4x\left(d^2\theta W^a(\bar{D}^2 D_a V)S + d^2\bar{\theta}\bar{W}_{\dot{a}}(D^2\bar{D}^{\dot{a}}V)\bar{S}\right)$, e então podemos reescrever (4.2) sob a seguinte forma:

$$A = h\int d^4x\left\{d^2\theta\left[W^a W_a S\right] + d^2\bar{\theta}\left[\bar{W}_{\dot{a}}\bar{W}^{\dot{a}}\bar{S}\right]\right\}, \tag{4.8}$$

com um parâmetro h adimensional inserido sugerindo que podemos tomá-lo como uma perturbação. Reassaltamos que esta inclusão não compromete a renormalizabilidade do modelo sob o ponto-de-vista da contagem de potências. Assim, obtemos uma versão supersimétrica do modelo incluindo o termo cinético de Maxwell e o termo de Chern-Simons em $d+1+3$ [28], chegando à seguinte combinação:

$$\begin{aligned} A_{Max.+C.S.} = \quad & \frac{1}{4}\int d^4x\left\{d^2\theta[W^a W_a] + d^2\bar{\theta}\left[\bar{W}_{\dot{a}}\bar{W}^{\dot{a}}\right]\right\} + \\ + \quad & \frac{h}{4}\int d^4x\left\{d^2\theta[W^a W_a S] + d^2\bar{\theta}\left[\bar{W}_{\dot{a}}\bar{W}^{\dot{a}}\bar{S}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Esta expressão induz naturalmente a uma generalização não-polinomial:

$$A_{non-pol.} = \frac{1}{4}\int d^4x\{d^2\theta[W^a W_a \exp(hS)] + d^2\bar{\theta}[\bar{W}_{\dot{a}}\bar{W}^{\dot{a}}\exp(h\bar{S})]\}, \tag{4.10}$$

o que representa, em nosso modelo, um comportamento perturbativo em ordens de h. De fato, a ação (4.10) inclui, em ordem zero, uma teoria supersimétrica de Maxwell; em primeira ordem, surge o termo de Chern-Simons em $D = 1+3$ (exatamente os termos de (4.7)), e também contribuições de ordem mais alta. A parametrização em campos componentes da ação (4.10) fica:

$$
\begin{aligned}
A_{non-pol.} &= \frac{1}{4}\int d^4x \left\{ \exp(hs)\left[-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{i}{2}\widetilde{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda} + 4D^2 + \right.\right. \\
& \left.\left. + h\left(-2\sqrt{2}\lambda\psi D + \lambda\lambda F - \sqrt{2}\lambda\left(\sigma^{\mu\nu}\right)F_{\mu\nu}\psi\right) - \frac{h^2}{2}\lambda\lambda\psi\psi\right] + h.c.. \right\}
\end{aligned}
$$

A versão exponencial do termo de Chern-Simons aparece na forma $-\frac{i}{8}\exp(hs)\widetilde{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} +$ $h.c.$, requer uma integração por partes para reproduzir a expressão $\partial_\mu(s-s^*)\varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu}F_{\alpha\beta}A_\nu$. Devemos observar que o acoplamento quártico com campos fermiônicos já está presente em ordem de h^2, já que a equação de movimento para o campo auxiliar D não foi usada para eliminá-lo. É interessante, também, observarmos como as componentes do *background* s, ψ e F, influenciam na massa física do *gaugino*.

4.3 Conclusões Preliminares

Trabalhando com o setor de gauge de uma teoria com quebra de Lorentz gerada pelo termo de Chern-Simos em $D = 1 + 3$, realizamos uma extensão mínima supersimétrica, e em seguida uma generalização não-polinomial compatível com *susy* $N = 1$. Baseados nesta extensão mínima, verificamos a presença de um novo acoplamento induzido pelas componentes do supercampo de fundo. A suposição de que a quebra de Lorentz é implementada por um vetor constante de fundo (do ponto-de-vista dos referenciais de observador), encontra sua contrapartida supersimétrica sustentada em um conjunto de exigências particulares na dependência das componentes do supercampo de fundo S com relação as coordenadas do espaço-tempo. Devido à invariância de "gauge", o campo componente escalar s resulta ser linearmente dependente de x^μ, da mesma maneira temos que o campo espinorial ψ é constante. Estes resultados impõem que os termos de acoplamento sejam vistos como termos de massa. Estretanto uma análise mais abrangente da estrutura dos propagadores para os supermultipletos de "gauge", tanto no superespaço como em campos componentes é necessária.

Conclusões Gerais e Perspectivas Futuras

Vamos apresentar no presente capítulo o sumário dos principais resultados obtidos e iniciar discussões sobre algumas questões em aberto, que serão objetos de futuros projetos e colaborações.

No Capítulo 1 estudamos como o termo de Chern-Simons em $D = 1+3$ quebra simetria CPT e gera uma birrefringência diferente daquela que aparece em Meios Magnetizados.

No Capítulo 2 investigamos dois aspectos:

1- A possibilidade de quantização do modelo que viola a simetria de Lorentz e CPT, na fase em que ocorreu quebra espontânea da simetria de "gauge". Vimos que a unitaridade é sempre violada para v^{μ} do tipo-tempo ou nulo. Sempre que o vetor externo for do tipo-espaço, podem ser encontradas excitaç ões fisicamente consistentes, que apresentem um único grau de liberdade cada.

2-A possibilidade de se ter configurações clássicas de campo de tipo vórtice. Vimos que se o campo magnético do vórtice é ortogonal ao plano que contém o vetor constante, v^{μ}, então uma solução trivial para o potencial escalar, ou seja, $\Phi = 0$, é permitida. Nesse caso, a configuração de vórtice será similar ao modelo Abeliano usual (vórtice de Nielsen-Olesen). Contudo, obtemos que se $\vec{v} \cdot \vec{B} \neq 0$, temos uma solução não-trivial para Φ e um campo elétrico aparece em conexão ao fluxo magnético.

No Capítulo 3 realizamos a redução dimensional do modelo de Maxwell-Chern-Simons em $D = 1 + 3$ para $D = 1 + 2$, e obtivemos um Lagrangeano de Maxwell-Chern-Simons planar com a presença do termo que quebra Lorentz e um campo escalar sem massa. A simetria de CPT é mantida somente no caso de v^μ tipo-espaço. Os propagadores da teoria revelaram-se ter uma estrutura causal comum (ou seja apresentam o fator $1/\Diamond$ em comum). Os pólos dos propagadores foram utilizados como ponto de partida de nossa análise da causalidade, da unitaridade e da estabilidade. Pela análise das relações de dispersão verificamos que os modos têm energia positiva, o que assegura estabilidade. Obtemos que a causalidade fica garantida para todos os modos da teoria, exceto para k_-^2. A unitaridade do modelo foi estudada nos setores escalar e de gauge, separadamente, por intermédio da saturação da matriz dos resíduos. O setor de gauge revelou ser unitário no caso do vetor de fundo tipo-espaço e tipo-tempo. Contudo, obtemos que o setor escalar preserva a unitaridade somente no caso tipo-espaço. Um resultado importante encontrado é, que no caso do modelo reduzido $D = 1 + 2$, o setor de v^μ do tipo-tempo não apresenta "ghosts". Observamos que uma vez assegurada a unitaridade poderemos estudar as propriedades de anisotr opia em sistemas planares via teoria efetivas de campo que surgem no contexto da Matéria Condensada.

No Capítulo 4 observamos que a quebra de Lorentz encontra sua contrapartida supersimétrica em um conjunto de exigências na dependência das componentes do supercampo de fundo S em releção ao espaço-tempo. Obtemos que o campo escalar s se apresenta linearmente dependente de x^μ da mesma maneira que observamos a constância do campo espinorial ψ surge em conseqüência da invariância de "gauge", e estes resultados impõem que os termos de acoplamento advindos da supersimetria sejam vistos como termos de massa para o gaugino.

Uma série de estudos e problemas permanecem em aberto, e nos deixam a possibilidade de muitos outros encaminhamentos e continuações deste trabalho. No âmbito dos modelos com quebra de Lorentz, mas sem supersimetria, a mais interessante contribuição seria o cálculo das componentes de ondas-p e -d para o estado ligado $e^- - e^-$ correspondente a um par condensado em sistemas supecondutores planares. Uma outra possibilidade é estudar o comportamento de sistemas físicos utilizando um acoplamento não mínimo (via

v^μ). Isto acarreta uma correção na fôrça de Lorentz, e poderíamos investigar que tipo de contribuição estas correções teríam para o Efeito Magneto-Ótico. Entendemos que estes pontos podem fonte ser uma relevante incursão dos modelos de "gauge" em sistemas de Física da Matéria Condensada.

Com relação a teorias não-comutativas, estamos iniciando um estudo do análogo ao termo de Carrol-Field-Jackiw que será obtido via Mapeamento de Seiberg-Witten [50]. Pretendemos verificar a influência dos parâmetros-θ nas propriedades de birefringência.

No que diz respeito à supersimetria, abrem-se muitas possibilidades de trabalhos que testarão uma série de características marcantes do "background" fermiônico associado à quebra da simetria de Lorentz. Primeiramente, a questão de como o condensado fermiônico de fundo interfere na massa do gaugino nas situações em que o vetor que quebra a simetria de Lorenz é tipo-tempo, tipo-luz, ou tipo-espaço. A relação de dispersão para o setor fermiônico do supercampo de gauge será rica de possibilidades e peculiaridades no caso de se escolher um gauge covariante sob supersimetria, ao invés de se adotar o gauge de Wess-Zumino. A esta discussão, adicionam-se as características não-triviais das soluções de monopólo do tipo 't Hooft- Polyakov no caso de uma teoria de super-Yang-Mills. Esta discussão abre uma rica linha de investigações que passam pela questão das cargas centrais, da dualidade e dos modos-zero fermiônicos, parceiros das soluções de monopólos e de cordas cósmicas para a versão supersimetrizada do modelo de JCF. Os resultados das investigações iniciadas nesta tese encorajam o investimento em várias frentes a serem iniciadas, e já mencionadas acima, no rico panorama de análises teóricas e aplicações fenomenológicas das teorias de gauge com violação das simetrias de Lorentz e CPT.

Apêndice A

Tabela II do Produto de Operadores

	$\theta_{\mu\nu}$	$\omega_{\mu\nu}$	$S_{\mu\nu}$	$\Lambda_{\mu\nu}$	$T_\mu T_\nu$	$Q_{\mu\nu}$	$Q_{\nu\mu}$	$\Sigma_{\mu\nu}$	$\Sigma_{\nu\mu}$	$\Phi_{\mu\nu}$	$\Phi_{\nu\mu}$
$\theta^{\nu\alpha}$	${\theta_\mu}^\alpha$	0	${S_\mu}^\alpha$	${\Lambda_\mu}^\alpha + -\frac{\lambda}{\Box}{\Sigma_\mu}^\alpha$	$T_\mu T^\alpha$	${Q_\mu}^\alpha$	$Q^\alpha_\mu + -\frac{\lambda}{\Box}{\Phi_\mu}^\alpha$	0	${\Sigma^\alpha}_\mu + -\lambda\Box{\omega^\alpha}_\mu$	0	${\Phi^\alpha}_\mu$
$\omega^{\nu\alpha}$	0	${\omega_\mu}^\alpha$	0	$\frac{\lambda}{\Box}{\Sigma_\mu}^\alpha$	0	0	$\frac{\lambda}{\Box}{\Phi_\mu}^\alpha$	${\Sigma_\mu}^\alpha$	$\lambda{\omega^\alpha}_\mu$	${\Phi^\alpha}_\mu$	0
$S^{\nu\alpha}$	${S_\mu}^\alpha$	0	$-\Box{\theta_\mu}^\alpha$	${Q_\mu}^\alpha$	$\lambda{\Phi_\mu}^\alpha + -\Box Q^\alpha_\mu$	$\lambda{\Sigma_\mu}^\alpha + -{\Lambda_\mu}^\alpha\Box$	$-T_\mu T^\alpha$	0	$\partial_\mu T^\alpha$	0	$\Box({\omega_\mu}^\alpha - -{\Sigma^\alpha}_\mu)$
$\Lambda^{\nu\alpha}$	${\Lambda_\mu}^\alpha + -\frac{\lambda}{\Box}{\Sigma^\alpha}_\mu$	$\frac{\lambda}{\Box}{\Sigma^\alpha}_\mu$	$-{Q^\alpha}_\mu$	$v^2{\Lambda_\mu}^\alpha$	0	0	$v^2{Q^\alpha}_\mu$	$\lambda{\Lambda_\mu}^\alpha$	$v^2{\Sigma^\alpha}_\mu$	$\lambda{Q^\alpha}_\mu$	0
$T^\nu T^\alpha$	$T_\mu T^\alpha$	0	$\Box{Q_\mu}^\alpha + -\lambda{\Phi^\alpha}_\mu$	0	$T^2 T_\mu T^\alpha$	$T^2 Q^\alpha_\mu$	0	0	0	0	$T^2{Q_\mu}^\alpha$
$Q^{\nu\alpha}$	${Q_\mu}^\alpha + -\frac{\lambda}{\Box}{\Phi^\alpha}_\mu$	$\frac{\lambda}{\Box}{\Phi^\alpha}_\mu$	$-T_\mu T^\alpha$	$v^2{Q_\mu}^\alpha$	0	0	$v^2 T_\mu T^\alpha$	$\lambda{Q_\mu}^\alpha$	$v^2\partial_\mu T^\alpha$	$\lambda T_\mu T^\alpha$	0
$Q^{\alpha\nu}$	${Q^\alpha}_\mu$	0	$\Box{\Lambda_\mu}^\alpha + -\lambda{\Sigma^\alpha}_\mu$	0	$T^2{Q^\alpha}_\mu$	$T^2{\Lambda^\alpha}_\mu$	0	0	0	0	$T^2{\Sigma^\alpha}_\mu$
$\Sigma^{\nu\alpha}$	${\Sigma_\mu}^\alpha + -\lambda{\omega_\mu}^\alpha$	$\lambda{\omega_\mu}^\alpha$	$-{\Phi_\mu}^\alpha$	$v^2{\Sigma_\mu}^\alpha$	0	0	$v^2{\Phi_\mu}^\alpha$	$\lambda{\Sigma_\mu}^\alpha$	$v^2{\Lambda_\mu}^\alpha$	$\lambda{\Phi_\mu}^\alpha$	0
$\Sigma^{\alpha\nu}$	0	${\Sigma^\alpha}_\mu$	0	$\lambda{\Lambda_\mu}^\alpha$	0	0	$\lambda{Q^\alpha}_\mu$	$\Box{\Lambda_\mu}^\alpha$	$v^2{\Lambda_\mu}^\alpha$	$\Box{Q_\mu}^\alpha$	0
$\Phi^{\nu\alpha}$	${\Phi_\mu}^\alpha$	0	$\Box({\Sigma_\mu}^\alpha + -\lambda{\omega_\mu}^\alpha)$	0	$T^2{\Phi_\mu}^\alpha$	$T^2{\Sigma_\mu}^\alpha$	0	0	0	0	$\Box T^2\omega^\alpha_\mu$
$\Phi^{\alpha\nu}$	0	${\Phi^\alpha}_\mu$	0	$\lambda{\Phi^\alpha}_\mu$	0	0	$\lambda T_\mu T^\alpha$	$\Box{\Phi^\alpha}_\mu$	$\lambda{\Phi^\alpha}_\mu$	$\Box T_\mu T^\alpha$	$0.$

Tabela II: Álgebra Multiplicativa dos operadores θ, ω, S, Λ,TT, Q, Σ e Φ. O produto obedece à seguinte ordem: linha "versus" coluna.

Referências

[1] A. Connes, M. Douglas e A. Schwarz, JHEP **02**, 003 (1998). Revisões recentes em N.A. Nekrasov, hep-th/0011095; A. Konechny and A. Schwarz, hep-th/0012145; J.A. Harvey, hep-th/0102076.

[2] Sean M.Carrol, A. Alan Kostelecký, Charles D. Lane, and T. Okamoto. Hep-th/0105082.

[3] P. C. W. Davies, T. M.Davies & C. H. Lineweaver, Nature, **418**, 602 - 603 (2002).

[4] Orfeu Bertolami hep-ph/0301191; J. W. Moffat hep-th/0211167.

[5] V. B. Bezerra, H. J. Mosquera, C. N. Ferreira, *Phys. Rev.* ***D*** **67**, 0440XX (2003), *hep-th/02100052*.

[6] D. Colladay and V. A. Kostelecký, *Phys. Rev.* ***D*** **58**, 116002 (1998).

[7] D. Colladay and V. A. Kostelecký, *Phys. Rev.* ***D*** **55**,6760 (1997).

[8] A. Coleman an S. L. Glashow,*Phys. Lett.* ***B*** **405**, 249 (1997).

[9] A. Coleman an S. L. Glashow,*Phys. Rev.* ***D*** **59**, 116008 (1999)

[10] S. Carroll, G. Field and R. Jackiw, *Phys. Rev.* ***D*** **41**, 1231 (1990).

[11] W. Greiner, B. Muller, Gauge Theory Of Weak Interactions, 1993. Editora: Springer International, Berlin.

[12] A. P. Baêta Scarpell, M. Sampaio, B. Hiller and M. C. Nemes, *Phys. Rev.* ***D*** **64**, 046013 (2001).

[13] R. Jackiw and S. Templeton, *Phys. Rev.* ***D*** **23**, 2291 (1981).

[14] A. A. Andrianov and R. Soldati, *Phys. Rev.* ***D*** **51**, 5961 (1995).

[15] A. P. Baêta Scarpelli, M. Sampaio and M. C. Nemes, *Phys. Rev.* ***D*** **63**, 046004 (2001), aceito p/ publicação no *Phys. Rev.* ***D***.

[16] A. A. Andrianov and R. Soldati, *Phys. Lett.* ***B*** **435**, 449 (1998).

[17] A Songaila . & L L Cowie, Nature **39**8, 667-668 (1999).

[18] R. F. Kiefl, et al.,, *Phys. Rev. Lett.* B**64**, 2082 (1990);K. B. Lyons, et al., ibid, **64**, 2949 (1990); S. Spielman, et al., ibid, **65**, 123 (1990) .

[19] F. Wilczek, *Scientifc American*, May (1991).

[20] M. Kaku, Quantum Field Theory - A Modern Introduction, 1993. Editora: Oxford University Press.

[21] K. H. Bennemann, Nonlinear Optics in Metals, International Series of Monographs On Physics-1998, Editora: Oxford Science Publications.

[22] H. B. Nielsen and P. Olesen, *Nucl. Phys.* ***B*** **61**, 45 (1973).

[23] C. Adam and F. R. Klinkhamer, *Nucl. Phys.* ***B*** **607**, 247 (2001).

[24] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Phys. Rev.* **D3**9, 683 (1989).

[25] V. A. Kostelecky and R. Potting, *Nucl. Phys.* B**359**, 545 (1991).

[26] V. A. Kostelecky and R. Potting, *Phys. Rev.* **D51**, 3923 (1995).

[27] A.A. Andrianov, R. Soldati and L. Sorbo, *Phys. Rev.* D59, 025002 (1999).

[28] A. P. Baêta Scarpelli, H. Belich, J.L. Boldo and J. A. Helayël-Neto, hept-th/0204232, *Phys. Rev.* ***D*** 67, 085021 (2003).

[29] V.A. Kostelecky and R. Lehnert, *Phys. Rev.* D **63**, 065008 (2001).

[30] M. S. Berger and V. Alan Kostelecký, hep-th/0112243.

[31] M. Goldhaber and V. Trimble, *J. Astrophys. Astron.* **17**, 17 (1996).

[32] W. Pauli, *Phys. Rev.* **58**, 716 (1940).

[33] W. A. Moura-Melo and J. A. Helayël-Neto, *Phys.Rev.* D**63**, 065013 (2001).

[34] R. Jackiw, *hep-th/9811322.*

[35] R. Jackiw and V. A. Kostelecký, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3572 (1999).

[36] W. F. Chen, *Phys. Rev.* ***D*** **60** 085007 (1999).

[37] M. Pérez-Victoria, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2518 (1999).

[38] J. M. Chung, *Phys. Rev.* ***D*** **60**, 127901 (1999).

[39] J. M. Chung, *Phys. Lett.* ***B*** **461**, 138 (1999).

[40] W. F. Chen and G. Kunstatter, *Phys. Rev.* ***D*** **62**, 105029 (2000).

[41] G. Bonneau, *Nucl. Phys.* ***B*** **593**, 398 (2001).

[42] O. A. Battistel and G. Dallabona, *Nucl. Phys.* ***B*** **610**, 316 (2001).

[43] M. Pérez-Victoria, *JHEP* **0104**, 032 (2001).

[44] A. A. Andrianov, P. Giacconi and R. Soldati, *JHEP* **0202**, 030 (2002).

[45] J. M. Chung and B. K. Chung *Phys. Rev.* ***D*** **63**, 105015 (2001).

[46] A. L.M.A Nogueira, H. Belich, J. L. Boldo and L. P. Colatto, work in progress.

[47] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayël-Neto and M.T.D. Orlando, Dimensional Reduction of a Lorentz and CPT-violating Maxwell-Chern-Simons Model, hep-th/0212330, aceito p/ publicação no *Phys. Rev.* ***D***.

[48] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J. A. Helayël-Neto and M.T.D. Orlando, Classical Solutions in a Lorentz-violating Maxwell-Chern-Simons Electrodynamics, *hep-th/0301224*.

[49] M. S. Berger and V. A. Kostelecký, *Phys.Rev.* **65**, 091701 (2002).

[50] H. Belich and M. B. Cantcheff, work in progress.

[51] A. Wiedemann and H. J. W. Muller-Kirsten, Supersymmetry: An Introduction With Conceptual and Calculational Details, World Scientific, Notes in Physics (1986), Vol 7.

[52] Lewis H. Ryder, Quantum Field Theory, Cambridge Univ. Pr. (1985) 2^a Edição;

[53] J. Wess, J. Bagger, SUPERSYMMETRY AND SUPERGRAVITY, Princeton Univ. Pr. (1992);

[54] S.J. Gates, M.T. Grisaru, M. Rocek, W. Siegel, SUPERSPACE OR ONE THOUSAND AND ONE LESSONS IN SUPERSYMMETRY, Front.Phys.58 (1983)1-548;

[55] S.P. Misra, INTRODUCTION TO SUPERSYMMETRY AND SUPERGRAVITY, Wiley Eastern (1992) (SERC schools series),

[56] J. Polchinski, String Theory: An Introduction to the Bosonic String (Vol. 1 e 2) Cambridge Univ. Pr. (1998);

[57] M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten, Introduction to Superstring Theory, (vol. 1 e 2), Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987);

[58] W. Siegel, INTRODUCTION TO STRING FIELD THEORY, Adv.Ser.Math.Phys. (1988) 1-244;

[59] H. Belich, J. L. Boldo, L. P. Colatto, J.A. Helayël-Neto and A.L.M.A. Nogueira, *hep-th/0304166.*

"Quebra de Lorentz em Teorias de Gauge: aplicações a fenômenos planares e consequências da Supersimetria"

Humberto Belich Junior

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

José Abdalla Helayel Neto – Presidente/CBPF

Ivan da Cunha Lima – USP

Marcos Tadeu D'Azeredo Orlando – UFES

Aníbal Omar Caride – CBPF

Ivan dos Santos Oliveira Junior – CBPF

Rio de Janeiro, 16 de junho de 2003