TESE DE DOUTORADO

Aspectos Estruturais de Modelos de Campos Quantizados: Uma Abordagem Axiomática

Caio Marcello Mota Polito

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rio de Janeiro, junho de 2004

TESE DE DOUTORADO

Aspectos Estruturais de Modelos de Campos Quantizados: Uma Abordagem Axiomática

Caio Marcello Mota Polito

Tese submetida à Coordenação de Campos e Partículas
como requisito para a obtenção do grau
de Doutor em Física

Orientador
Dr. Daniel H.T. Franco

Dedico esta tese a minha família.

"O comportamento de um físico em relação à Matemática é similar ao de um ladrão inteligente em relação ao código penal: ele estuda apenas o suficiente para evitar as punições."

I.M. Gelfand

Agradecimentos

Agradeço:

Aos meus amigos, não em ordem de importância, pelo companheirismo despendido: Frank, André Penna, Washington, Wytler, Amílcar, Ronan, Ebert, André Oliveira, Dedé e Eduardo;

Ao Prof. Dr. José A. Helayël-Neto (CBPF), a quem admiro muito, pelas discussões e pela motivação, mostrando-se um exemplo a ser seguido, devido ao seu profissionalismo e dedicação ao trabalho, mesmo quando as circunstâncias se mostraram hostis;

Ao Prof. Olivier Piguet (UFES), pela motivação apresentada;

Com respeito ao trabalho propriamente dito, ao meu orientador, Prof. Dr. Daniel H.T. Franco, por sua orientação eficiente, pelas discussões e idéias interessantes colocadas, de modo a tornar todo o trabalho bem mais prazeroso e também pela hospitalidade, quando muitas vezes precisei estar em sua casa, em Belo Horizonte (neste caso agradeço também a sua esposa, Luciene);

A minha família: minha mãe Jane e meus irmãos Antony e Cassius. Faço aqui um agradecimento em especial a meu pai, falecido no período do desenvolvimento do trabalho, por todo o incentivo;

À CAPES, pelo apoio financeiro;

E por fim, a minha esposa Alzira e sua família, pela dedicação e carinho dispensados.

Resumo

Estudamos alguns aspectos estruturais de modelos de campos quantizados via a abordagem axiomática. Primeiramente propomos a extensão de alguns aspectos fundamentais que têm tido certo sucesso em sua aplicação no desenvolvimento de uma Teoria Quântica de Campos (TQC) propagando em uma variedade geral de espaço-tempo, de forma a incluir modelos de supercampos em uma supervariedade.

Restringimos o estudo às classes de supervariedades que admitem uma estrutura de variedade corpo suave. Nossas considerações iniciam-se com os trabalhos de A. Rogers, e baseiam-se na abordagem de Catenacci-Reina-Teofillatto-Bryant para supervariedades. Em particular, mostramos que a classe de variedades de Bonora-Pasti-Tonin satisfazem certos critérios garantindo que uma supervariedade admite uma variedade corpo Hausdorff. Esta construção é a mais próxima do ponto de vista dos físicos os quais consideram o superespaço como sendo uma variedade dotada de certas coordenadas anti-comutantes, cujo setor ímpar é topologicamente trivial. Uma nova construção de superdistribuições e resultados úteis do conjunto de frente de ondas são apresentados. Ainda, uma generalização da condição espectral é formulada, usando-se o conjunto de frente de ondas de superdistribuições, que é equivalente à exigência de que todas as componentes de campo satisfazem, na variedade corpo, a condição espectral microlocal proposta por Brunetti-Fredenhagen-Köhler.

Em uma outra etapa, propomos uma descrição axiomática alternativa para Teorias de Campos Não-Comutativas (TQCNC), descritas por Álvarez-Gaumé e M.A. Vázquez-Mozo, baseados nas idéias de Soloviev para campos não locais. O axioma da comutatividade local é substituído pela condição, mais fraca, de que os campos comutam à uma separação espacial suficientemente grande, denominada de comutatividadade assintótica. Uma generalização da condição espectral para TQCNC, chamada condição espectral microlocal analítica (aμSC), é formulada usando a noção de conjunto de frente de ondas das distribuições à la Brunetti-Fredenhagem-Köhler, que é equivalente a condição de que a energia seja positiva definida. A questão de uma possível violação dos teoremas de CPT e *Spin*-Estatística, causada pela não localidade das relações de comutação

$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$, é investigada. Apesar de sua inerente localidade, mostramos que a comutatividade assintótica, juntamente com a aμSC, são suficientes para garantir a validade destes teoremas para a TQCNC no caso de não-comutatividade espaço-espaço. Nos restringimos ao caso mais simples do campo escalar.

Abstract

We study some structural aspects of quantized field models through an axiomatic approach. Firstly, we propose the extension of some structural aspects that have successfully been applied in the development of the theory of quantum fields propagating on a general spacetime manifold so as to include superfield models on a supermanifold. We only deal with the limited class of supermanifolds which admit the existence of a smooth body manifold structure. Our considerations are based on the A. Rogers and Catenacci-Reina-Teofillatto-Bryant approach to supermanifolds. In particular, we show that the class of supermanifolds constructed by Bonora-Pasti-Tonin satisfies the criterions which guarantee that a supermanifold admits a Hausdorff body manifold. This construction is the closest to the physicist's intuitive view of superspace as a manifold of some anticommuting coordinates, where the odd sector is topologically trivial. A new construction of superdistributions and useful results on the wavefront set of such objects are presented. Moreover, a generalization of the spectral condition is formulated using the notion of the wavefront set of superdistributions, which is equivalent to the requirement that all of the component fields satisfy, on the body manifold, a microlocal spectral condition proposed by Brunetti-Fredenhagen-Köhler. Secondly, we propose an alternative axiomatic description for non-commutative field theories (NCFT), described by A. Gaumé and V. Mozo, based on some ideas by Soloviev to nonlocal quantum fields. The local commutativity axiom is replaced by the weaker condition that the fields commute at sufficiently large spatial separations, called asymptotic commutativity. A generalization of the spectral condition for NCFT, namely analytic microlocal spectral condition (aμSC), is formulated by using the notion of the wavefront set of distributions *à la* Brunetti-Fredenhagen-Köhler, which is equivalent to the condition that the energy is positive-definite. The question of a possible violation of the CPT and *Spin*-Statistics theorems caused by nonlocality of the commutation relations $[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$ is investigated. In spite of this inherent nonlocality, we show that the asymptotic commutativity, in addition to the aμSC, is sufficient to ensure the validity of these theorems for NCFT in the case of space-space non-commutativity. We restrict ourselves to the simplest case of a scalar field.

Conteúdo

Apresentação

A metodologia da física-matemática no estudo de pontos fundamentais em Teoria Quântica de Campos (TQC) possui *status* de destaque, quando analisamos o processo de desenvolvimento desta teoria: questões relativas à sua construção e interpretação certamente são abordadas via ferramentas da física-matemática. Podemos ver isto, como nas teorias quânticas de campos relativísticos que devem satisfazer um conjunto de propriedades matemáticas gerais, como as formuladas por Garding e Wightman nos anos 50', conhecidas como os axiomas de Wightman. O estudo dos axiomas de Wightman e suas consequências matemáticas é comumente conhecido por Teoria Axiomática dos Campos Quantizados. Do ponto de vista da estrutura axiomática da TQC, assume-se a existência de classes de modelos satisfazendo os axiomas de Wightman [45, 48]. Resultados estruturais acerca dos campos, livres ou interagentes, são então derivados a partir destes modelos. Nesta linha, esta tese objetiva estudar de forma analítica, com o auxílio de uma ferramenta matemática denominada Análise Microlocal, estruturas fundamentais subjacentes às teorias de campo supersimétricas (assunto que não é abordado sistematicamente, salvo em alguns trabalhos, como em [34]–[43]) e alguns pontos importantes em teorias não locais, como a Teoria Quântica de Campos Não-Comutativa (TQCNC).

A teoria dos campos quantizados é a teoria das partículas elementares e suas interações fundamentais. Um dos exemplos mais importantes, o Modelo Padrão, que descreve as interações eletromagnética, fraca e forte das partículas elementares observadas, apesar de seu sucesso, não incorpora a gravitação, e o motivo é a ausência de uma solução para a quantização da gravidade. Do ponto de vista teórico, muitas as tentativas de se incluir a gravitação no programa de quantização falharam até este momento. Propostas alternativas como as teorias da Supergravidade, de Kaluza-Klein, das Supercordas, e mais recentemente, das teorias de Branas, da Gravidade Quântica com *Loops*, da Geometria não-Comutativa e a teoria dos Topos, têm contribuído muito para revelar a estrutura básica da teoria da gravidade quântica, sem, contudo, fornecer resultados conclusivos. Por outro lado, uma vez que a escala de energia do Modelo Padrão, ou de qualquer de suas extensões supersimétricas, está bem abaixo da escala típica da gravidade quântica, parece razoável tratar, em um passo intermediário, alguns aspectos da gravitação em uma teoria quântica de campos, considerando o formalismo que descreve a interação dos campos de matéria e gravitacional como uma teoria quântica de campos em um espaço-tempo curvo. Neste cenário semi-clássico, o campo gravitacional é descrito como um campo-de-fundo clássico, sem dinâmica, enquanto os campos de matéria comportam-se de acordo com a teoria quântica, sendo quantizados como campos de Wightman. Em outras palavras, as flutuações quânticas da métrica devem ser pequenas se comparadas com aquelas da matéria. Aqui o quadro não é tão completo, mas esta estrutura tem grande aplicabilidade em Física, a mais proeminente sendo a descoberta de que um buraco-negro formado pelo colapso de estrelas massivas emite radiação térmica – efeito-Hawking [2] de criação de partículas na vizinhança de buracos-negros. Todavia, mesmo esta modesta maneira de se considerar os efeitos da gravitação nos leva a algumas dificuldades. Devemos lembrar que para se quantizar um campo clássico Φ, é preciso definir um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ de estados físicos e uma distribuição $\Phi(f)$, com caráter operatorial que atua sobre $\mathscr{H}$, e que estão sujeitos aos axiomas de Wightman. O problema é que, enquanto a maioria dos axiomas de Wightman pode ser implementada em um espaço-tempo curvo, a condição de espectro (que expressa a positividade da energia) representa um sério problema conceitual: a invariância de Poincaré, em particular, as translações, não são definidas globalmente sobre um espaço-tempo curvo genérico. Assim, em geral, nenhuma noção útil de estado de vácuo e consequentemente de partículas existe.

Uma possível solução para este problema é escolher uma outra quantidade que não tenha o caráter de partícula e que sirva para rotular estados quânticos. Esta foi a proposta sugerida por Wald [3], encontrando-se para isto o valor esperado do vácuo do tensor energia-momentum. Sua proposta nos levou ao conceito de estados de Hadamard: os candidatos ideais para se descrever estados físicos [4] para uma teoria quântica de campos livres sobre um espaço-tempo curvo (uma revisão geral sobre o assunto pode ser encontrada nas Refs. [5]–[7]). Coube a M.J. Radzikowski [8], aluno de Wightman, tornar a conexão entre os estados de Hadamard e a condição espectral muito mais transparente. Explorando a análise microlocal, mais especificamente a noção do conjunto de frente de ondas, WF,[1] de uma distribuição [12, 13], ele provou uma conjectura de Kay [9] propondo que a condição de Hadamard local implica a condição de Hadamard global. Sua prova foi fundamentada sobre uma condição espectral geral sobre o conjunto de frente de ondas de uma distribuição de 2-pontos. A nova caracterização de estados quânticos físicos proposta por Radzikowski abriu uma via promissora no estudo de TQC sobre uma variedade curva genérica, assim uma considerável quantidade de trabalhos devotados a

[1] WF é a abreviação do inglês para o conjunto de frente de ondas, isto é, *wavefront set*.

este assunto [10]-[19] vem enfatizando a importância da técnica microlocal para resolver problemas até então não solucionados.

Do ponto de vista da Supersimetria, assunto de considerável interesse entre físicos e matemáticos, não vemos esforços consideráveis no seu tratamento pelas abordagens acima mencionadas. Esta é uma teoria conjectural da Física de Partículas Elementares e da teoria das Supercordas que afirma que bósons e férmions existem aos pares, cada componente tendo a mesma massa. Mesmo depois de quase três décadas de seu aparecimento, existe ainda a crença que ela possa desempenhar um papel fundamental para a "*Teoria Unificada,*" que incorporaria a Mecânica Quântica, a Relatividade Geral e as diversas teorias de partículas e forças conhecidas. De fato, apesar de ainda não se revelar verdadeira em nosso mundo, a idéia da supersimetria parece necessária para que a maior parte das versões da teoria das Cordas produzam respostas coerentes.[2] Além disso, cálculos e análises fenomenológicas de modelos supersimétricos são bem justificados com vistas à nova geração de aceleradores, que em breve entrarão em funcionamento, como o novo super *Collider* LHC que está sendo construído no CERN, em Genebra, e que terão energia suficiente para revelar algumas das partículas supersimétricas preditas, tais como os neutralinos, sleptons e provavelmente, de forma indireta, dos squarks. Ela tem provado também ser uma importante ferramenta de ligação entre a teoria quântica de campos e a geometria não-comutativa [21, 22].

A supersimetria pode vir descrita de diversas formas. Uma delas é considerar que o espaço-tempo possui dimensões extras além daquelas em que vivemos. Este é o formalismo baseado no conceito de superespaço introduzido por Salam-Strathdee. Em contraste a um espaço-tempo ordinário, um superespaço genérico é um espaço que, além das coordenadas usuais do espaço-tempo, é composto de coordenadas extras anticomutantes. As últimas são chamadas de coordenadas de Grassmann, porque são valoradas de acordo com as variáveis de Grassmann, em vez de se utilizar números reais comuns. No entanto, a formulação usual de um superespaço [52] é altamente insatisfatória do ponto de vista matemático. Uma das principais objeções ao formalismo convencional é a falta de uma definição rigorosa das propriedades topológicas dos superespaços. Esta dificuldade despertou o interesse de alguns físicos para a necessidade de se procurar um formalismo alternativo que permitisse um tratamento matemático rigoroso de superespaços gerais – supervariedades.

Contribuições significativas ao desenvolvimento sobre a estrutura topológica de supervariedades foram dadas por Alice Rogers [25]. O trabalho de Rogers está fundamentado

[2]Teorias de cordas não-supersimétricas revelaram ser instáveis em seus estados fundamentais, o que não acontece se a supersimetria está presente na escala de energia onde as interações gravitacionais tornam-se importantes – a escala de Planck, da ordem de 10^{19} GeV.

no assim chamado formalismo da superanálise funcional, desenvolvido com base na teoria de espaços e álgebras de Banach. A idéia é fixar uma álgebra de Grassmann $\mathscr{G}_L$ e equipá-la com uma estrutura de Banach. Com isso, é possível estender as proposições essenciais da análise clássica (construindo a superanálise) fornecendo aplicações em teoria de campos. Seguimentos importantes foram alcançados também por alguns autores [26, 27], tendo como ponto de partida o trabalho de Rogers. Assim, na primeira parte do trabalho, nossa proposta é desenvolver um formalismo que permita estender os recentes resultados obtidos para as teorias de campos ordinárias sobre um espaço-tempo curvo para uma formulação supersimétrica em supervariedades, partindo-se da abordagem de Rogers. Estamos dando especial atenção para a análise matematicamente rigorosa de alguns aspectos estruturais destes modelos.

Dentro do contexto da teoria quântica dos campos não-comutativos (TQCNC), uma formulação axiomática tem sido desenvolvida de modo a abarcar adaptações que comportem os axiomas de Wightman. Mais recentemente, passos nesta direção foram dados por Álvarez-Gaumé e Vázquez-Mozo [64], com o objetivo de examinar propriedades gerais de uma TQCNC bastante restrita, como veremos mais tarde, modificando-se alguns dos axiomas de Wightman padrão. Basicamente, com o intuito de manter invariante a relação de comutatividade para as coordenadas $[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$, foi adotado como grupo de simetria do espaço-tempo o subgrupo $O(1,1) \times SO(2)$, gerado a partir da redução do grupo de simetria de Lorentz $SO(1,3)$. Isso introduz a noção do "*wedge*" de luz associado ao fator $O(1,1)$ do grupo de simetria. Acrescentando, foi relaxada a relação de comutatividade local com o objetivo claro de tornar a nova relação compatível com a estrutura causal necessária para a formulação de uma teoria coerente. Isto foi suficiente para provar a validade do teorema ligado à invariância CPT (simetria associada à conjugação de carga, paridade e tempo) no caso de uma TQCNC com não-comutatividade tipo espaço-espaço. Foi ainda observado por eles que uma fonte de dificuldades na formulação axiomática das TQCNC que se propõem a satisfazer os axiomas adaptados está intimamente relacionada ao aparecimento indesejável de um vínculo entre divergências ultravioletas e infravermelhas, o que provavelmente se configura como a característica mais surpreendente destas teorias. Na verdade, a existência de singularidades infravermelhas no setor não planar, induzida por divergências quadráticas ultravioletas, pode resultar em dois tipos de problemas: na destruição da natureza temperada das funções de Wightman e/ou na introdução de estados taquiônicos no espectro, de forma que o postulado modificado da comutatividade local não é preservado. Somos, então, levados a sugerir que talvez a TQCNC abordada nos trabalhos acima citados necessite de uma análise matemática fundamentada sobre um outro conjunto de princípios. Por causa das relações de comutação $[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$, devemos primeiramente observar que uma TCQNC comporta-se como uma teoria essencialmente *não local*, o que acarreta implicações profundas nas propriedades físicas por ela descritas. Como exemplo, na formulação de propriedades gerais da teoria dos campos, a localizabilidade desempenha um papel fundamental na concreta realização local dos operadores de campo definidos sobre o espaço de coordenadas e também na condição espectral (no espaço de energia-momento), que é alcançada através da *localização das funções testes*. Por este motivo, os campos são considerados como funcionais temperados sobre o espaço de funções testes $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, que nada mais é que o espaço de funções de Schwartz com rápido decaimento. Entretanto, a característica não local das interações das TQCNC parece sugerir que existam boas razões para esperarmos que os campos talvez não sejam temperados e isto imporia certas dificuldades na definição do que seja a condição espectral. Do ponto de vista funcional, uma classe mais apropriada de distribuições para se descrever uma TQCNC foi explorada por Lücke [69]-[71] e por Soloviev [72]-[75]. Estes autores mostraram que uma solução adequada para o tratamento de uma TQC com interações não locais pode ser implementada tomando-se os valores médios dos campos com funções testes pertencentes ao espaço $S^0(\mathbb{R}^n)$, que na verdade consiste nas restrições de funções totais[3] analíticas em $\mathbb{C}^n$ para o espaço $\mathbb{R}^n$, cuja transformada de Fourier é justamente o espaço de Schwartz $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ de funções C^∞ cujo suporte é compacto. O espaço $S^0(\mathbb{R}^n)$ é o menor espaço entre os espaços de Gelfand-Shilov [76], $S^\beta(\mathbb{R}^n)$, onde $0 \leq \beta < 1$, o qual nos permite tratar naturalmente a teoria como uma teoria de *campos não localizáveis*. Os elementos do espaço dual S'^0 do espaço de funções totais são chamados funcionais analíticos. Uma vez que os elementos de S^0 são funções totais, o axioma da localidade não comporta formulação de modo usual, ou seja, não existe uma noção adequada de suporte para distribuições em S'^0. Portanto, em princípio, resultados físicos como a condição espectral e causalidade devem ser vistos com bastante cuidado. Consequentemente, aspectos estruturais que dependem dos resultados acima citados não podem, *a priori*, ser mais garantidos, uma vez que uma nova análise deve ser levada em consideração. Tal análise será o principal objeto de estudo na segunda parte do presente trabalho. Frisamos aqui, mais particularmente, que os aspectos de interesse se reportam basicamente à possibilidade da existência de uma simetria CPT e de uma conexão *Spin*-Estatística para estas teorias.

A presente tese possui a seguinte estrutura: no primeiro capítulo faremos uma breve revisão da literatura, no que diz respeito ao formalismo matemático de variedades, distribuições em geral, análise microlocal e apresentaremos também alguns resultados rele-

[3] O termo função total foi traduzido do seu respectivo em inglês "*entire*," significando que a função é definida em todo o espaço de referência.

vantes sobre a teoria de campo axiomática; no segundo capítulo, faremos uma formulação supersimétrica da teoria quântica de campos sobre variedades gerais, pautados no formalismo axiomático; o capítulo terceiro contém uma nova análise da TQCNC à luz dos trabalhos de Soloviev e Lücke, com suas consequências mais relevantes; finalizando, o conjunto dos apêndices (de A a D) trazem alguns tópicos mais bem detalhados (como a apresentação de alguns teoremas e algumas demonstrações).

Capítulo 1

Modelos de Campos Ordinários sobre uma Variedade Geral

Este capítulo é devotado a uma breve revisão de alguns conceitos que desempenham papel importante no desenvolvimento desta tese. Alguns outros conceitos matemáticos úteis relacionados às estruturas topológicas adotadas no decorrer deste trabalho (como por exemplo a continuidade, os espaços métricos, os conjuntos normados e etc.) podem ser encontrados no Apêndice B.

1.1 Definição e Estrutura de Variedades

O estudo de variedades é bem estabelecido matematicamente e podemos encontrá-lo facilmente na literatura matemática corrente, seja em livros sobre Análise, seja em livros devotados ao estudo de Topologia e Geometria Diferencial.

De uma forma tácita e simples, podemos definir que uma variedade de dimensão m é um espaço topológico geral que localmente apresenta um isomorfismo com o espaço métrico $\mathbb{R}^m$. A definição matematicamente mais rigorosa se está apresentada a seguir:

Definição 1.1.1. *$\mathcal{M}$ é uma variedade diferencial de dimensão m se:*

(i) $\mathcal{M}$ é um espaço topológico;

(ii) $\mathcal{M}$ é provido de uma família (atlas) de pares (as suas cartas) $\{(U_i, \phi_i)\}$, onde U_i é uma vizinhança de coordenada;

(iii) $\{U_i\}$ é uma família de conjuntos abertos os quais cobrem $\mathcal{M}$, ou seja, $\bigcup_i U_i = \mathcal{M}$ e ϕ_i é um homeomorfismo de U_i em um conjunto aberto $U_i' \in \mathbb{R}^m$;

(iv) Dados U_i e U_j tais que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, o mapa $\psi_{ij} = \phi_i \phi_j^{-1}$ de $\phi_j(U_i \cap U_j)$ para

$\phi_i(U_i \cap U_j)$ é infinitamente diferenciável ou da classe C^∞ este mapa é comumente conhecido como mapa "overlapping."

A função ϕ_i é chamada função coordenada ou simplesmente coordenada de um ponto p, sendo também representada por m funções $\{x^1(p), ..., x^m(p)\}$. Cada um dos termos $x^\mu(p)$ chamamos também de coordenada. Um ponto da variedade não depende de como a coordenada é escolhida.

A união de dois atlas $\{(U_i, \phi_i)\}$ e $\{(V_j, \psi_j)\}$, que por sua vez também é um atlas, é dita compatível. A compatibilidade é uma relação de equivalência e sua classe de equivalência é uma estrutura diferenciável. Dizemos então que atlas mutuamente compatíveis fornecem a mesma estrutura diferenciável para a respectiva variedade.

Um mapa relacionando uma variedade m dimensional com uma outra n dimensional, digamos, $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é dito diferenciável ou suave em um ponto p se ao tomarmos uma carta (U, ϕ) em $\mathcal{M}$ e outra carta (V, ψ) em $\mathcal{N}$, com $p \in U$ e respectivamente $f(p) \in V$, tivermos a representação:

$$\psi f \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \ ,$$

como integrante da classe C^∞ com relação a cada coordenada $x^\mu(p)$. Para vermos que a diferenciabilidade de f não depende do sistema de coordenadas, considere duas cartas (U_1, ϕ_1) e (U_2, ϕ_2) que se intersecciонam. Seja p um ponto da intersecção, cujas coordenadas via ϕ_1 são $\{x_1^\mu\}$ e via ϕ_2 são $\{x_2^\nu\}$. Note que quando expressamos f em termos de $\{x_1^\mu\}$, ela assume a forma $\psi f \phi_1^{-1}$, e se expressarmos em termos de $\{x_2^\nu\}$, temos que $\psi f \phi_2^{-1} = \psi f \phi_1^{-1}(\phi_1 \phi_2^{-1})$. A função de transição $\psi_{ij} = \phi_1 \phi_2^{-1}$ é infinitamente diferenciável, visto que estamos trabalhando com variedades diferenciáveis. Assim, utilizando uma forma de representação mais simples e usual $(y = f(x))$, temos que se $f(x_1)$ é C^∞ com respeito a x_1^μ e $x_1(x_2)$ é C^∞ com respeito a x_2^ν, então $y = f(x_1(x_2))$ é também C^∞ com respeito à x_2^ν.

Se $y = \psi f \phi^{-1}$ é contínua e possui inversa também contínua, $\mathcal{M}$ é homeomórfica a $\mathcal{N}$ e y é um homeomorfismo. Agora, se $y = \psi f \phi^{-1}$ é C^∞ e inversível com sua inversa também de mesma classe, então estamos tratando de um difeomorfismo, e dizemos que $\mathcal{M}$ é difeomórfica a $\mathcal{N}$. Evidentemente, se duas variedades são difeomórficas entre si, elas também compartilham da mesma dimensão. Para uma maior clareza de interpretação, podemos facilmente diferenciar os espaços difeomórficos, aqueles que podemos deformar um no outro de forma suave, dos homeomórficos, os quais podemos deformar um no outro também, porém, de maneira contínua.

Apresentamos agora um exemplo simples [1] de espaço topológico que é uma varie-

[1] Na verdade, o exemplo mais simples é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^m$, onde uma carta simples cobre todo

dade diferenciável: o S^2. Podemos identificar uma esfera bidimensional no espaço de três dimensões pela restrição:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

e as vizinhanças de coordenadas por

$$\begin{aligned} U_{x+} &= \{(x,y,z) \in S^2 |\ x > 0\} \\ U_{y+} &= \{(x,y,z) \in S^2 |\ y > 0\} \\ U_{z+} &= \{(x,y,z) \in S^2 |\ z > 0\} \\ U_{x-} &= \{(x,y,z) \in S^2 |\ x < 0\} \\ U_{y-} &= \{(x,y,z) \in S^2 |\ y < 0\} \\ U_{z-} &= \{(x,y,z) \in S^2 |\ z < 0\} \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Definimos também os mapas de coordenadas dos U_+'s $\rightarrow \mathbb{R}^2$ como:

$$\begin{aligned} \phi_{x+}(x,y,z) &= (y,z) \\ \phi_{y+}(x,y,z) &= (x,z) \\ \phi_{z+}(x,y,z) &= (x,y) \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

e da mesma forma para os U_-'s $\rightarrow$ em $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \phi_{x-}(x,y,z) &= (y,z) \\ \phi_{y-}(x,y,z) &= (x,z) \\ \phi_{z-}(x,y,z) &= (x,y) \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Desta forma, construímos as funções de transição, como por exemplo, $\phi_{y-}\phi_{x+}^{-1}$ dada por:

$$\phi_{y-}\phi_{x+}^{-1} : (y,z) \rightarrow (-(1 - y^2 - z^2)^{1/2}, z)$$

que é infinitamente diferenciável na intersecção de U_{x+} com U_{y-}.

O exemplo acima foi de caráter apenas ilustrativo, nas próximas seções definiremos algumas propriedades de interesse físico relevante que culminará na escolha de uma variedade, na qual podemos desenvolver uma teoria de campo evitando alguns problemas de

o espaço e podemos identificar ϕ como um mapa identidade.

ordem prática. Com este objetivo, é interessante lembrar que uma variedade que venha a ser candidata a representar um espaço-tempo em física moderna deve corresponder a uma estrutura diferenciável equipada com uma métrica (ver Apêndice B, que se refere ao detalhamente das estruturas de Espaços Topológicos) Lorentziana, visto que é a métrica que impõe uma estrutura particular causal ao espaço-tempo. Na seção seguinte nos deteremos nestes detalhes.

1.1.1 Variedade Globalmente Hiperbólica

Do ponto de vista de se construir uma teoria quântica de campos sobre um espaço-tempo de fundo curvo, torna-se imprescindível escolher uma variedade que venha modular este espaço, sem que a mesma forneça (física e matematicamente) problemas que prejudiquem a consistência e coerência de suas interpretações. Um exemplo claro que podemos levantar é o caso de possíveis variedades que suportam a existência de curvas do tempo fechadas. Em um suposto experimento formulado por K. Thorne [97], em que duas cordas cósmicas (objetos topológicos macroscópicos resultantes das soluções das equações de Einstein com simetria cilíndrica) passam uma pela outra com velocidade relativa próxima à velocidade luminar, cria-se um espaço-tempo na região de fronteira onde existe energia suficiente para gerar curvas temporais fechadas. O problema então fica evidente: a) primeiramente precisaríamos eliminar todas as teorias fundamentadas na existência do princípio de causalidade e b) mesmo que abandonássemos por completo este princípio, chegaríamos ao absurdo de ter que considerar, em uma viagem numa curva temporal fechada, energias infinitas (devido ao constante e eterno desvio para o azul, regulamentado pelo efeito Dopler relativístico).

Portanto, vamos considerar que uma dada variedade possua o mínimo de condições para que uma formulação de teoria física faça sentido. As variedades ditas globalmente hiperbólicas são fortes candidatas a uma construção de teoria de campo em espaço-tempo curvo adequada. Estas consistem de variedades suaves (espaços topológicos) $\mathscr{M}$ que são espaços métricos quadri-dimensionais (na verdade, qualquer dimensão é possível) com suas métricas suaves $g's$ de assinatura tipo Lorentz $(+,-,-,-)$. Este espaço pode ser suavemente foliado por uma família de superfícies acausais, chamadas de Superfícies de Cauchy (SC) [6], significando que a referida variedade deve ser topologicamente equivalente ao produto cartesiano de $\mathbb{R}$ por hipersuperfícies suaves tipo espaço, que denotaremos Σ (uma SC). A hipersuperfície Σ intercepta qualquer curva tipo tempo inextensível (ilimitada) no máximo uma vez. Além disto, para cada $x \in \mathscr{M}$ podemos atribuir um cone do futuro e um do passado de forma contínua, ou seja, a variedade em questão é temporalmente orientável. Somando-se a isto, exigimos que a variedade $\mathscr{M}$ possa admitir uma estrutura espinorial, para que possamos definir espinores sobre a mesma. Observe que uma variedade com a propriedade de orientabilidade temporal admite, ao menos em quatro dimensões, uma estrutura de spin, como frisado por Geroch [31].

1.2 Campos e Distribuições sobre uma Variedade

Na Física Quântica, exatamente como na Física Clássica, o conceito de campo serve para implementar o princípio de localidade. Contudo, a simples definição dos campos como *funções assumindo valores em um certo ponto x, em um certo instante t*, como acontece no caso do campo eletromagnético clássico, pode produzir resultados nem sempre bem definidos. Um exemplo é o cálculo da energia potencial eletrostática. Na eletrostática clássica essa energia é expressa pela integral $U = \frac{1}{8\pi}\int d^3x\ |\mathbf{E}(x)|^2$, onde $|\mathbf{E}(x)|^2$ representa a densidade total de energia. Essa integral não é bem definida fisicamente, visto que a medida feita da quantidade em questão em torno de um ponto gera uma singularidade. Contudo, integrais como essa estão ligadas a uma determinada grandeza física e, portanto, devem ser "manipuladas" corretamente de tal modo a nos permitir extrair alguma resposta mensurável e fisicamente interpretável.

O problema das singularidades não está relacionado apenas à Física, mas também à maneira de incorporar a Matemática na descrição de suas teorias. Na realidade, o que se faz experimentalmente é uma medição de uma grandeza derivada dos campos em uma certa região, por menor que ela seja. Isso significa que os campos só podem atuar em regiões finitas do espaço-tempo. Essas dificuldades são contornadas assumindo-se os campos como distribuições, isto é, considerando-se somente a média no espaço-tempo dos campos com funções *suaves* $f(x)$ – as conhecidas funções teste – sobre a variedade onde a teoria é definida, ou seja:

$$\Phi\left(f\right) = \int dx\ \varphi\left(x\right) f\left(x\right) \ . \tag{1.2.1}$$

Na TQC, a escolha da classe dessas funções teste deve levar em conta o fato de que os campos devam satisfazer o princípio da causalidade de Einstein: operadores que são suavisados (ou do inglês "smeared") via funções teste, cujo suporte tem uma separação tipo-espaço, devem comutar no caso dos operadores de campos que respeitam a estatística de Bose (ou anticomutar no caso de operadores de campos que respeitam a estatística de Fermi). Isso, de certa forma, nos obriga a tomar o espaço das funções teste como sendo o espaço que contém somente elementos que desaparecem identicamente fora de uma região limitada. Paralelamente aos cuidados que a física exige, existe também por parte da matemática uma certa exigência formal de se ampliar o conceito de função para uma distribuição, permitindo assim tornar precisas várias manipulações matemáticas que não seriam possíveis via cálculo diferencial usual, como por exemplo a operação de diferenciação. A teoria das distribuições remedia tal incoveniente: o espaço das distribuições é essencialmente a menor extensão do espaço de funções contínuas onde a diferenciação é sempre bem definida. Funções "singulares", como a função δ de Dirac e suas derivadas, também ficam bem definidas do ponto de vista da teoria das distribuições, assim escrevemos

$$\int dx\ \delta(x)f(x) = f(0)\ , \quad \int dx\ \delta^{(n)}(x)f(x) = f^{(n)}(0)\ , \tag{1.2.2}$$

onde $f(x)$ é alguma função (sobre $\mathbb{R}$) suave apropriada.

Expressões como as que aparecem em (1.2.2) são conhecidas como funcionais. Os funcionais (ao contrário de uma função $f(x)$ sobre $\mathbb{R}^n$, que associa a cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ um número $y = f(x)$, que é o valor de f em x) associam um número $\int dx\ f(x)\varphi(x)$ para toda função $\varphi(x)$ pertencendo a uma certa classe $\mathscr{K}$. As funções em $\mathscr{K}$ são chamadas funções teste. Assim, em (1.2.2), a "função" δ e suas derivadas desempenham o papel de funcionais *lineares* associando um número a cada função teste $f(x)$ suficientemente bem comportada. Note que o quanto uma função teste deve ser suficientemente bem comportada depende do conjunto de distribuições que atuam sobre classes específicas dessas funções de modo a termos controle sobre as integrais.

Reversamente, classes diferentes de distribuições, por sua vez, exigem classes também diferentes de funções teste para que a integral do tipo $\int dx\ f(x)\varphi(x)$ seja bem definida. Como uma regra [34], é de suma importância analisar o comportamento da distribuição definida junto ao infinito. Por exemplo, se consideramos o espaço das distribuições formado por funções sem qualquer restrição ao seu crescimento no infinito, então, esse espaço é o dual do espaço composto por funções teste $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, que vem a ser o espaço das funções que são infinitamente diferenciáveis sobre $\mathbb{R}^n$ e desaparecerem fora de alguma região limitada, com condições severas de decrescimento no infinito para que o valor tomado na integral seja bem comportado. O espaço das distribuições pertencentes à esta classe é simbolizado por $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, e denotamos por extensão como sendo $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Uma classe mais ampla de funções teste, simbolizada por $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, é formada por funções $\varphi(x)$ que, ao invés de serem identicamente nulas fora de uma região limitada, decaem rapidamente a zero quando $x \to \infty$. Os correspondentes funcionais são chamados de distribuições temperadas, sendo que as funções que compõem esse espaço devem crescer no máximo polinomialmente no infinito. O espaço das distribuições temperadas é simbolizado por $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Agora, se consideramos o espaço das distribuições de suporte compacto, simbolizado por $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, o espaço sobre o qual essas distribuições atuam é composto por funções teste infinitamente diferenciáveis sobre $\mathbb{R}^n$. Representamos o espaço dessas funções por $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$. Assim, intuitivamente temos $\mathscr{E}' \subset \mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'$ e $\mathscr{D} \subset \mathscr{S} \subset \mathscr{E}$. Veremos em seguida onde serão aplicados estes conjuntos na teoria de campo.

Funções suaves[2] podem obviamente ser incluídas na classe das distribuições, uma vez que para toda função deste tipo a integral do produto de funções suaves com aquelas "suficientemente" bem comportadas é bem definida.

A escolha precisa do espaço das funções teste desempenha um papel importante na teoria quântica de campos relativísticos sobre um espaço-tempo plano convencional. Na composição de campos adota-se tradicionalmente, por razões bem conhecidas, o espaço de Schwartz (que anteriormente denotamos por $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$) de funções de classe suave (no sentido de ser infinitamente diferenciável) que vão a zero no infinito, junto com todas as suas derivadas, mais rápido do que qualquer potência de $1/|x|$. Em outras palavras, para toda função $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ as seminormas $\|f\|_{\alpha,\beta} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta f(x)\right|$ são finitas. Assim, o seu respectivo espaço dual $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ é composto pelas distribuições temperadas. A escolha de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ como o espaço das funções teste pode ser justificada essencialmente pela propriedade de dualidade sob a transformada de Fourier: como certas propriedades dos campos são formuladas no espaço dos momentos (como a *condição espectral*), é interessante que a transformada de Fourier das funções teste, $\widehat{f}(k)$, compartilhe de propriedades semelhantes da função $f(x)$. Assim $\widehat{f}(k)$ deve ser suave e desaparecer, junto com todas as suas derivadas, mais rápido que qualquer potência $1/|k|$ quando $k \to \infty$. No entanto, sobre um espaço-tempo curvo, em geral não existe um análogo do espaço $\mathscr{S}$. Torna-se importante a escolha de uma outra classe de funções teste.

Um espaço de funções teste que pode ser definido sobre uma variedade curva e que geralmente vem sendo adotado é o espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ de funções suaves de suporte compacto.[3] Usando as seminormas $\|f\|_{K,\alpha} = \sup_{x\in K} |D^\alpha f(x)|$, onde K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, podemos definir convergência em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ de uma sequência $\{f^k\}$, ou seja, para cada k temos que o supp $f^k \subset K$ tal que existe uma função $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz a condição $\|f^k - f\|_{K,\alpha} \to 0$ quando $k \to \infty$ para todo α. Esta noção de convergência gera uma topologia que torna $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ um espaço vetorial topológico. O seu

[2]Em geral, tratamos o termo suave aqui como funções ordinariamente integráveis, mas logo adiante falaremos sobre suavidade com o sentido de a função ser infinitamente diferenciável.

[3]O suporte de uma função é o formado pelo conjunto de pontos para os quais a função tem valor diferente de zero. Compacto significa aqui limitado e fechado.

respectivo dual, chamado espaço das distribuições sobre $\mathbb{R}^n$, é representado por $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, como vimos anteriormente.

A extensão das distribuções $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ para variedades será feita de acordo com Hörmander [30]. A variedade do espaço-tempo $\mathscr{M}_0$[4] é assumida ser um espaço de Hausdorff, coberto por cartas (X_α, k_α), onde os conjuntos abertos X_α são homeomórficos a conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$. Uma estrutura C^∞ sobre $\mathscr{M}_0$ é uma família $\mathcal{F} = \{(X_\alpha, k_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ de homeomorfismos k_α, conhecidos como funções coordenadas (chamadas também de mapas) de conjuntos abertos $X_\alpha \subset \mathscr{M}_0$ sobre conjuntos abertos $\widetilde{X}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, tal que (i) se $k_\alpha, k_\beta \in \mathcal{F}$, então o mapeamento $k_\beta \circ k_\alpha^{-1} : k_\alpha(X_\alpha \cap X_\beta) \to k_\beta(X_\alpha \cap X_\beta)$ é infinitamente diferenciável, (ii) $\mathscr{M}_0 \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$. Considere $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ como o conjunto de funções C^∞ de suporte compacto em $\widetilde{X}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$. Então, podemos representar cada f com a ajuda de funções $\bar{f}$ de suporte compacto em $\mathscr{M}_0$ por $f = \bar{f} \circ k_\alpha^{-1}$, para cada k_α, onde $\bar{f} \in C_0^\infty(\mathscr{M}_0)$. Elementos de $\mathscr{D}'(\mathscr{M}_0)$, o dual topológico de $C_0^\infty(\mathscr{M}_0)$, são distribuições u sobre $\mathscr{M}_0$, tais que podemos associar a elas coleções $\{u_{k_\alpha}\}_{k_\alpha \in \mathcal{F}}$ de distribuições $u_{k_\alpha} \in \mathscr{D}'(\widetilde{X}_\alpha)$ de forma que u é unicamente determinado por u_{k_α} e pelas relações $u = u_{k_\alpha} \circ k_\alpha$. Além disso, visto que para qualquer outro sistema de coordenadas se tem $u = u_{k_\beta} \circ k_\beta$ em $(X_\alpha \cap X_\beta)$, segue que $u_{k_\beta} = (k_\alpha \circ k_\beta^{-1})^* u_{k_\alpha} = u_{k_\alpha} \circ (k_\alpha \circ k_\beta^{-1})$ em $(X_\alpha \cap X_\beta)$.

1.3 Descrição Axiomática da Teoria Quântica dos Campos

A abordagem axiomática em TQC consiste em estudar as consequências de um conjunto de alguns postulados fundamentais da teoria, como a invariância relativística, a localidade, a existência e estabilidade do vácuo, para verificar se os princípios básicos sugeridos pelos dois pilares da física moderna, a Teoria da Relatividade e a Mecânica Quântica, são logicamente consistentes.

Existem duas linhas que fazem o papel de carro-chefe na descrição axiomática: a teoria de Wightman e a abordagem algébrica. Enquanto a última se preocupa principalmente com as relações algébricas entre as observáveis definidas via ajuda do espaço de Hilbert, a primeira se ocupa basicamente em fundamentar, física e matematicamente, a atuação de campos quânticos sobre o espaço de Hilbert. Comecemos agora a descrever aspectos relevantes da teoria de Wightman.

[4]Neste capítulo $\mathscr{M}_0$ denotará uma variedade ordinária, enquanto no capítulo seguinte, $\mathscr{M}$ denotará uma supervariedade.

1.3.1 Axiomas de Wightman

Um aspecto muito importante da teoria dos campos quantizados é o fato de muitas propriedades poderem ser expressas completamente partindo-se do valor esperado do vácuo de produtos de operadores de campos. Se Ω representa o vácuo, então o valor esperado no vácuo do produto $\Phi\left(f\right)\Phi\left(g\right)$ satisfaz a seguinte relação:

$$\begin{aligned}\left(\Omega, \Phi\left(f\right)\Phi\left(g\right)\Omega\right) &= \left(\Omega, \Phi^{-}\left(f\right)\Phi^{+}\left(g\right)\Omega\right)\\ &= \left[\Phi^{-}\left(f\right), \Phi^{+}\left(g\right)\right]\\ &= \frac{1}{i}\left(f\left(x\right), \Delta^{+}\left(x-y; m^2\right) g\left(y\right)\right) ,\end{aligned}$$

com $f,\, g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^4)$. $\Delta^{+}(x-y;m^2) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^4)$ é um tipo de distribuição de dois pontos (veja detalhes do desenvolvimento no Apêndice C). Então define-se:

$$\mathscr{W}_2(x,y) = (\Omega, \varphi(x)\varphi(y)\Omega)\frac{1}{i}\Delta^{+}(x-y;m^2) \ . \tag{1.3.1}$$

A distribuição $\mathscr{W}_2(x,y)$ é chamada a "função" de 2-pontos do campo escalar de massa m. Distribuições do tipo

$$\mathscr{W}_n\left(x_1,\ldots,x_n\right) = \left(\Omega, \varphi\left(x_1\right)\ldots\varphi\left(x_n\right)\Omega\right) \tag{1.3.2}$$

também podem ser consideradas. Os valores esperados do vácuo de produtos de operadores de campos como acima são chamados distribuições de Wightman e as correspondentes "funções" $\mathscr{W}_n\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, funções de Wightman de n-pontos.

Através do Teorema de Wick, verifica-se facilmente que a estrutura combinatória das funções de Wightman satisfazem as seguintes relações:

$$\mathscr{W}_{2n+1}(x_1,\ldots,x_n) = 0 \quad \text{for } n \geq 0 \ , \tag{1.3.3}$$

$$\mathscr{W}_{2n}(x_1,\ldots,x_n) \qquad \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_{2n}\\ i_k<j_k\\ i_1,\ldots,j_{2n}\ \text{distintos}}} \mathscr{W}_2(x_{i_1},x_{j_1})\mathscr{W}_2(x_{i_2},x_{j_2})\cdots\mathscr{W}_2(x_{i_{2n}},x_{j_{2n}}) \ , \tag{1.3.4}$$

para $n \geq 1$. Este fato nos permite concluir que se conhecemos as funções de 2-pontos, somos capazes de construir todas as funções de n-pontos, com $n > 2$, e assim obter informações relativas ao espectro da teoria.

Para muitos propósitos, a base da formulação de uma TQC inicia-se a partir de um dado conjunto de funções de Wightman que são assumidas satisfazerem as seguintes propriedades:

Ax.1 Funções de Wightman são distribuições temperadas;

Ax.2 Funções de Wightman são invariantes sob o grupo de Lorentz não homogêneo;

Ax.3 Condição espectral: as transformadas de Fourier das funções de Wightman possuem suporte na região

$$\left\{ (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{4n} \;\middle|\; p_1 \in V_+, p_1 + p_2 \in V_+, \ldots, \sum_{j=1}^{n-1} p_j \in V_+, \sum_{j=1}^{n} p_j = 0 \right\};$$

Ax.4 Comutividade local;

Ax.5 Condição de positividade definida.

A forma de se construir o espaço de Hilbert e operadores de campos a partir das funções de Wightman é bem conhecida [48]. Em termos do espaço de Hilbert e dos operadores de campos, as propriedades acima são equivalentes as seguintes condições:

Ax.1′ Existência de um espaço de Hilbert com uma métrica positiva definida;

Ax.2′ Existência de distribuições temperadas com valores de operadores de campos;

Ax.3′ Existência de uma representação unitária do grupo de Lorentz não homogêneo, tal que os operadores de campos são covariantes sob sua representação;

Ax.4′ O espectro do operador energia-momento está contido no cone (fechado) de luz do futuro. Esta condição é equivalente à condição de que os operadores p_0 e p^2 são ambos positivos;

Ax.5′ Os campos são campos locais;

Ax.6′ Existência e unicidade do estado de vácuo $|\Omega_o\rangle$ com as seguintes propriedades: (i) ele é o estado de mais baixa energia e é associado ao valor zero para o autovalor de p_0, (ii) ele é invariante à esquerda via a atuação de todos os operadores $U(\Lambda, a)$; e

Ax.7′ Ciclicidade do vácuo, significando que podemos construir um conjunto denso no espaço de Hilbert via a aplicação de produtos de operadores de campo neste estado. Esta condição garante que o espaço de Hilbert não é muito grande.

Como um comentário, lembramos que um conjunto de funções de Wightman que satisfazem o primeiro conjunto de axiomas acima, determina unicamente um modelo que possui todas as propriedades para uma formulação de uma TQC. Este resultado é a essência do teorema da reconstrução de Wightman [95].

1.3.2 Abordagem Algébrica da TQC

No tratamento de uma teoria quântica de campos em espaço-tempo plano, a existência de uma representação unitária do grupo de Poincaré restrito, $\mathscr{P}_+^\uparrow$, com geradores P_μ satisfazendo a condição espectral $\mathsf{sp}P_\mu \subset V_+$, torna-se crucial. Este operador unitário tem um papel chave na escolha de um estado de vácuo preferencial, ou seja, ele seleciona qual estado é invariante sob o grupo de translações. Escolhemos um sistema de estados físicos completo, com energias positivas, que vem a ser o ambiente adequado para se definir um estado de vácuo e consequentemente o espaço de Fock, $\mathscr{F}$. Definimos, então, observáveis como operadores em $\mathscr{F}$ que atuam sobre os estados. Entretanto, a caracterização do vácuo envolve aspectos globais e, no caso de um espaço-tempo curvo, não é evidente como se seleciona um estado preferencial. Como já mencionado na introdução, devido à falta de um grupo *global* de Poincaré, não existe um critério de seleção análogo em espaço-tempo geral: temos que lidar agora com o problema de como definir um estado de vácuo de referência adequado. Para entender o significado desta questão sobre outro ponto de vista, observamos primeiramente que uma teoria definida em uma variedade de Lorentz globalmente hiperbólica pode ser reduzida, ao menos localmente, ao espaço tangente a um dado ponto, onde negligenciamos os possíveis efeitos gravitacionais. A teoria no espaço tangente reduz-se a uma teoria quântica de campos livre em um espaço de Minkowski, a qual possui uma invariância local translacional e, consequentemente, um estado invariante preferencial pode ser implementado por uma mapeamento unitário *local*. Todavia, este operador uniário depende da região onde atua e não existe operador unitário que faça tal mapeamente para todas as regiões abertas simultanteamente. Assim se estabelece o problema de como caracterizar estados físicos. Para uma discussão do problema em uma variedade geral, uma formulação conhecida como abordagem algébrica para teoria quântica de campos (para maior clareza, veja [45, 6, 7]) foi desenvolvida de modo a tentar contornar este e mais alguns outros problemas, baseada no fato, de que agora, todos os estados devem ser tratados em pé de igualdade, em especial os estados que aparecem relacionados às representações inequivalentes unitárias, fazendo com que a escolha de estados preferenciais seja protelada.

A abordagem algébrica envolve, entre outros conceitos, a teoria de álgebras $*$, seus estados e ainda representações no espaço de Hilbert. Nesta formulação os objetos básicos são as álgebras geradas por observáveis localizadas em uma dada região do espaço-tempo. Em geral, os campos neste contexto são vistos como espécies de coordenadas das álgebras. A questão essencial aqui é que *toda a informação física* deve estar inserida na estrutura das observáveis locais. Haag e Kastler introduziram uma estrutura matemática para o conjunto de observáveis de um sistema físico, propondo uma seleção de axiomas (os chamadados de axiomas de Haag-Kastler [46]) para redes de álgebras C^* que mais tarde foram generalizados por Dimock [47] para observáveis locais em variedes globalmente hiperbólicas. Recentemente, uma nova abordagem para o modelo foi introduzida, de um modo independente, pelo grupo Brunetti-Fredenhagen-Verch [16] [20] de forma a incorporarem, no sentido local, os princípios de covariância da relatividade geral fornecendo assim uma maneira de abordar a teoria quântica de campos localmente covariante. O formalismo de Haag-Kastler-Dimock pode ser resgatado a partir desta nova abordagem como caso especial.

A seguir, apresentaremos alguns conceitos e resultados técnicos básicos relativos à abordagem algébrica.

Definição 1.3.1. *Por uma álgebra $\mathfrak{A}$ de classe C^* , entendemos uma álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$ dotada de uma operação chamada involução, que pode ser traduzida pelo mapa $A \mapsto A^*$ de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{A}$ colecionando as seguinte propriedades para todo elemento $A, B \in \mathfrak{A}$, e todo número $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:*

(i) $(A^*)^* = A$,

(ii) $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$,

(iii) $(AB)^* = B^* A^*$,

(iv) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ *e* $\|A^* A\| = \|A\|^2$.

As observáveis são descritas por uma rede de álgebras locais, as quais assinalam para cada conjunto aberto limitado $\mathscr{O} \subset \mathscr{M}$ (uma variedade geral) uma álgebra C^* $\mathfrak{A}(\mathscr{O})$. Definimos assim $\mathfrak{A}_{\text{tot}} \bigcup_{\mathscr{O}} \mathfrak{A}(\mathscr{O})$ como álgebra total de observáveis locais.

Definição 1.3.2. *Um estado ω de uma álgebra C^* $\mathfrak{A}$ é um funcional linear contínuo $\omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$, de forma que, se a álgebra passui um elemento identidade, $\omega(\mathbb{1}) = 1$ e $\omega(A^* A) \geq 0$ para todo $A \in \mathfrak{A}$.*

Definição 1.3.3. *Seja $\mathscr{H}$ um espaço de Hilbert e $S \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ um subconjunto de operadores limitados sobre o espaço de Hilbert. Um vetor $\Omega \in \mathscr{H}$ é dito cíclico em S se o conjunto de vetores $\{A\Omega, A \in S\}$ é denso em $\mathscr{H}$, ou seja, $A\Omega = \mathscr{H}$.*

Apresentaremos agora um importante resultado que explica como proceder à transição entre a abordagem usual da teorida quântica de campos e a sua abordagem algébrica respectiva: a construção chamada GNS (devido ao nome de seus inventores). Seja ω um estado de uma álgebra C^* $\mathfrak{A}$. Construímos um espaço de Hilbert $\mathscr{H}_\omega$, e uma representação da álgebra $\mathfrak{A}$ (álgebra de operadores limitados atuando sobre $\mathscr{H}_\omega$) denotada por π_ω, de forma que $\pi_\omega(A^*) = \pi_\omega(A)^*$, onde $(*)$ é o símbolo de involução para todo elemento $A \in \mathfrak{A}$. Se a álgebra possui elemento identidade, então existe $\Omega \in \mathscr{H}_\omega$ e $\omega(A) = \langle \Omega, \pi_\omega(A)\Omega \rangle_{\mathscr{H}_\omega}$. Este vetor é cíclico para $\pi_\omega(A)$. O espaço de Hilbert é o espaço dado pelo quociente $\mathfrak{A}/\mathcal{N}_\omega$, com $\mathcal{N}_\omega = \{N \in \mathfrak{A} \mid \omega(N^*N) = 0\}$ definido pela classe de equivalência $[A] = \{A + N \mid N \in \mathcal{N}_\omega, A \in \mathfrak{A}\}$. Assim, é possível definir um produto escalar como uma forma sesquilinear $\langle [A], [B] \rangle = \omega(A^*B)$ [5]. Isto significa que à cada estado no sentido algébrico corresponde um estado no sentido usual em alguma construção do espaço de Hilbert.

1.4 *Conjunto de Frente de Ondas de uma Distribuição*

O estudo de singularides das soluções de equações diferenciais torna-se simplificado e aprofundado quando utilizamos a ferramenta de análise microlocal. Ela nos leva à definição de conjunto de frente de ondas de uma distribuição, representado por WF, que é uma descrição refinada do espectro de singularidade. Noções similares foram desenvolvidas por Sato [55], Iagolnitzer [56] e Sjöstrand [57]. A definição mais comumente usada e a adotada aqui segue-se devido à Hörmander. A terminologia apresentada refere-se a uma analogia entre o estudo de propagação de singularidades e a construção clássica de propagação de ondas encontrado nos trabalhos de Huyghens.

O ponto chave da análise microlocal se reporta à transferência do estudo das singularidades de distribuições no espaço de configuração para sua análise somente no espaço de fase, explorando neste espaço de frequências as propriedades de decaimento das distribuições definidas no infinito e propriedades de suavidade de suas transformadas de Fourier. Para uma distribuição u introduzimos seu conjunto de ondas $WF(u)$ como um subconjunto definido no espaço de fase $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Devemos interpretar os pontos (x, k) no espaço de fase como determinantes daquelas direções singulares k de comportamento "ruim" da transformada de Fourier $\widehat{u}$, tomada no infinito, que são responsáveis pela não suavidade de u no ponto x do espaço de configurações. Então devemos em geral exigir que $k \neq 0$. Um ponto relevante é que $WF(u)$ é independente do sistema de coordenadas escolhido, podendo ser caracterizado localmente.

Assim como é encontrado na literatura [30], uma distribuição de suporte compacto $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ é uma função suave se, e somente se, sua transformada de Fourier $\widehat{u}$ decai rapidamente no infinito. Devemos entender por decaimento rápido no infinito, que para

[5] É bom notar aqui que a definição do espaço de Hilbert simplesmente como sendo composto pelos elementos da álgebra $\mathfrak{A}$, e não por elementos de uma classe de equivalência, não nos levaria a um produto escalar bem definido.

todo inteiro positivo N, existe uma constante C_N, dependente de N, de forma que

$$|\widehat{u}(k)| \leq (1+|k|)^{-N} C_N\,, \qquad \forall\, N \in \mathbb{N};\ k \in \mathbb{R}^n\,. \tag{1.4.1}$$

Por outro lado, se $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ não for suave, então as direções ao longo das quais $\widehat{u}$ não decai suficientemente rápido devem caracterizar as singularidades de u.

Para distribuições que não possuem necessariamente um suporte compacto, temos ainda que verificar se sua transformada de Fourier decai rapidamente em uma dada região V através de uma técnica de localização. Mais precisamente, se $V \subset X \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathscr{D}'(X)$, podemos restringir u à uma distribuição $u|_V$ em V estabelecendo que $u|_V(\phi) = u(\phi)$, onde ϕ é uma função suave com suporte contido em uma região V, com $\phi(x) \neq 0$, para todo $x \in V$. A distribuição $u(\phi)$ pode então ser vista como uma distribuição de suporte compacto em $\mathbb{R}^n$. Sua transformada de Fourier será definida como uma distribuição sobre $\mathbb{R}^n$, e deve satisfazer, livre de singularidades em $V \subset \mathbb{R}^n$, a propriedade (1.4.1). A partir deste ponto de vista, todo desenvolvimento é local no sentido em que somente o comportamento das distribuições em uma pequena vizinhança arbitrária do ponto singular, no espaço de configuração, é relevante. A seguir veremos alguns resultados importantes na construção da teoria.

Lema 1.4.1. *Considere $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_0^\infty(V)$. Então $\widehat{\phi u}(k) = u(\phi e^{-ikx})$. Além disso, a restrição de u em $V \subset \mathbb{R}^n$ é suave em V se, e somente se, para todo $\phi \in C_0^\infty(V)$ e para cada inteiro positivo N existe uma constante $C(\phi, N)$, dependente de N e ϕ, tal que $|\widehat{\phi u}(k)| \leq (1+|k|)^{-N} C(\phi, N)$ para todo $k \in \mathbb{R}^n$.*

Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ é singular em x e $\phi \in C_0^\infty(V)$ é não nulo, então ϕu é também singular em x e possui suporte compacto. Entretanto, em algumas direções no espaço de momentos (k-espaço) $\widehat{\phi u}$ ainda será assintoticamente limitado. Estas direções formam o conjunto das *direções regulares* de u.

Exemplo. Sejam $u = v = 1/(x - i\varepsilon)$ singulares em $x = 0$, quando ε tende para zero, e $\phi \in C_0^\infty(V)$, identicamente a 1 próximo à $x = 0$. Então, $\phi u = u$, e $\widehat{u}(k) = 2\pi i \theta(k)$, onde θ é a função degrau de Heaviside, e também:

$$\widehat{uv}(k) = (2\pi)^{2-n} \int dp\, \theta(k-p)\theta(p) = (2\pi)^{2-n} k\theta(k)\,.$$

Este exemplo mostra que apesar de u, v e uv serem singulares em $x = 0$, suas transformadas de Fourier não têm "mau" comportamento em todas as direções. Partamos então para a seguinte definição:

Definição 1.4.2. *Seja $u(x)$ uma distribuição arbitrária, não necessariamente de suporte compacto, em um conjunto aberto $X \subset \mathbb{R}^n$. Então o conjunto de pares compostos por pontos singulares x no espaço de configuração e por suas direções singulares associadas k, no espaço de Fourier,*

$$WF(u) = \{(x,k) \in X \times (\mathbb{R}^n \backslash 0) \mid k \in \Sigma_x(u)\} , \tag{1.4.2}$$

é chamado **conjunto de frente de ondas** *de u. $\Sigma_x(u)$ é definido como o complemento em $\mathbb{R}^n\backslash 0$ do conjunto formado por todo $k \in \mathbb{R}^n\backslash 0$ para o qual existe uma vizinhança cônica aberta M de k tal que $\widehat{\phi u}$ decai rapidamente em M, para $|k| \to \infty$.*

Exemplo. A distribuição $u = 1/(x - i\varepsilon) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ tem conjunto de frente de ondas

$$WF(u) = \{(0,k) \mid k \in \mathbb{R}_+\backslash 0\} .$$

consequência diretamente de sua transformada de Fourier:

$$\widehat{u}(k) = 2\pi i \theta(k) .$$

Na análise microlocal de singularidades, precisamos de um método objetivo de calcular o conjunto de frente de ondas de uma distribuição. Para isso, recorreremos a outra ferramenta importante desenvolvida por Hörmander chamada Distribuição Integral de Fourier, ou Integral Oscilatória, que está detalhada no Apêndice D, onde empregamos o estudo de operadores pseudo-diferenciais. Em geral usamos as propriedades referentes ao próprio conjunto de frente de ondas para este cálculo como as que se seguem, mas sempre podemos utilizar a metodologia acima referida. Temos então as seguintes propriedades:

1. O $WF(u)$ é cônico no sentido de que permanece invariante sob a ação das dilatações, ou seja, quando multiplicamos a segunda variável por um escalar positivo. Isto significa que se $(x,k) \in WF(u)$, então $(x, \lambda k) \in WF(u)$ para todo $\lambda > 0$.

2. Segue-se da definição de $WF(u)$ que a projeção na primeira variável $\pi_1(WF(u)) \to x$ consiste naqueles pontos que não possuem vizinhança onde u é uma função suave, e a projeção na segunda variável $\pi_2(WF(u)) \to \Sigma_x(u)$ é o cone que contém k, denotando o conjunto de direções de frequências que quando crescem são responsáveis pelo seu mau comportamento (aparecimento de singularidades).

3. Sejam u e v distribuições. Suponha que

$$WF(u) \oplus WF(v) = \{(x, k_1 + k_2) \mid (x,k_1) \in WF(u), (x,k_2) \in WF(v)\} , \tag{1.4.3}$$

não contenha qualquer elemento da forma $(x, 0)$. Então o produto uv existe. Além disso

$$WF(uv) \subset WF(u) \cup WF(v) \cup (WF(u) \oplus WF(v)) \ . \tag{1.4.4}$$

Portanto, o produto das distribuições u e v é bem definido em x se u, ou v, ou ambas distribuições são regulares em x. Se u e v são singulares em x, o produto existe se a soma da segunda componente dos conjuntos de frente de ondas de u e v em x é diferente de zero. Note como podemos ver isto no primeiro exemplo apresentado nesta seção.

4. O conjunto de frente de ondas de uma função suave é o conjunto vazio.

5. $WF(\phi u) \subset WF(u)$ para toda função suave ϕ com suporte compacto.

6. Para qualquer operador diferencial linear P, com os coeficientes sendo funções C^∞, temos que
$$WF(Pu) \subseteq WF(u) \ .$$

7. Se u e v são duas distribuições pertencentes à $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, com conjuntos de frente de ondas $WF(u)$ e $WF(v)$, respectivamente, então o conjunto de frente de ondas de $(u+v) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ está contido em $WF(u) \cup WF(v)$.

8. Se U, V são conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathscr{D}'(V)$, e $\chi : U \to V$ é um difeomorfismo tal que $\chi^* u \in \mathscr{D}'(U)$ é a distribuição "pulled back" por χ, então $WF(\chi^* u) = \chi^* WF(u)$.

Para complementar esta breve coleção de propriedades em análise microlocal, citaremos ainda o seguinte resultado:

Teorema 1.4.3 (Conjunto de frente de ondas de "pushforwards" de uma distribuição). *Seja $f : X \to Y$ um submersão, e seja $u \in \mathscr{E}'(X)$. Então*

$$WF(f_* u) \subset \{(f(x), \eta) \mid x \in X, (x, {}^t f'_x \eta) \in WF(u) \ or \ {}^t f'_x \eta = 0\} \ ,$$

onde ${}^t f'_x$ denota a matriz transposta da matriz Jacobiana f'_x de f.

1.5 Estados de Hadamard e a Condição Espectral Microlocal

Este tópico na verdade refere-se ao estudo de singularidades das funções de dois pontos que aparecem como soluções de equações clássicas de campo, as chamadas funções de Green (ou os propagadores de campo). Na busca dos propagadores, temos que resolver integrais utilizando um artifício, puramente matemático, que consiste na extensão da análise real ao corpo dos números complexos, ou mais detalhadamente, movemos os pólos contidos no eixo real, os quais são os responsáveis pelo aparecimento de infinitos, para o plano complexo via um deslocamento infinitesimal, desta forma avaliamos as integrais à luz do Teorema de Cauchy. Esta metodologia nos fornece uma certa ambiguidade no que se refere à variedade de escolha de contornos que envolvem os polos no plano complexo. Consequentemente temos uma quantidade variada de funções de Green: se contornarmos ambos os polos por cima, temos o que chamamos de Função de Green Retardada; se os contornamos ambos por baixo, temos a Função de Green Avançada; se os contornamos um por baixo e outro por cima, alcançamos o Propagador de Feymann.

Note que ao tomarmos ainda a diferença entre as funções de Green, ganhamos naturalmente soluções das equações homogêneas (devido ao caráter linear dos operadores) que correspondem a contornos fechados: contornando um dos polos temos as Funções de Wightman; contornando ambos os polos via uma linha fechada sem cruzamento, temos as Funções Comutadoras; finalmente, quando este último contorno vem associado a um cruzamento da linha fechada entre os polos, temos as Funções de Hadamard. Em seu livro, Hadamard [98] faz um trabalho com respeito à classificação das soluções de equações diferenciais e define o que vem a ser a forma de Hadamard: sem perdas de generalidades, dizemos que expressões apresentando forma similar às das soluções da última função de Green mencionada, possui a forma de Hadamard e consequentemente todo o seu espectro de singularidades é o mesmo.

A importância da forma de Hadamard aparece na física em vários problemas e contextos. Como um exemplo, Fulling [5] descreve, no ambiente da TQC, como a adoção da solução de Hadamard contribui no cálculo de um valor esperado no vácuo da energia (na ausência de radiação ou matéria) que seja diferente de zero entre os dois limites de uma certa região, nos levando assim ao conhecido efeito Casimir. Como um outro exemplo, podemos encontrar no trabalho de DeWitt e Brehme [4] a contribuição da forma de Hadamard na descrição de um "damping" da radiação em um campo gravitacional sob o formalismo bi-tensorial, onde a forma de Hadamard aparece como uma solução da equação de onda covariante e escalar para o campo gravitacional.

Do ponto de vista de teoria de campo construída em variedades arbitrárias, a condição de estado de Hadamard vem nos fornecer um maior esclarecimento de como selecionar estados fisicamente aceitáveis. A motivação de adotarmos a estrutura de Hadamard para o estado de vácuo na TQC em espaço-tempo curvo é bastante clara. Em geral, com a perda da possibilidade de se escolher uma representação adequada para o modelo devido ao fato de agora não mais existir uma estrutura invariante sobre a ação de um grupo de isometria (no caso plano, o grupo global de Poincaré), devemos procurar outra condição para a escolha. Visto que podemos descrever, em determinadas variedades, alguns aspectos geométricos observando a evolução da Superfície de Cauchy (CS) a partir do espaço plano assintótico, segue-se que um novo tipo de invariância pode ser implementada naturalmente: aquela que é gerada pela preservação de uma estrutura particular enquanto a geometria da CS está evoluindo temporalmente.

Em particular, para estados os quais os valores esperados do operador tensorial de energia-momento podem ser definidos via a prescrição da separação pontual para a renormalização, Fulling *et al.* [51] mostraram que se tais estados possuem uma estrutura de singularidade da forma de Hadamard em uma vizinhança aberta de uma SC, então eles mantêm suas formas preservadas independentemente da evolução geométrica desta superfície. Neste caso, os estados estão na forma de Hadamard sempre que possam ser expressos como:

$$\Delta_{\mathrm{Had}}(x_1, x_2) = \frac{U(x_1, x_2)}{\sigma(x_1, x_2)} + V(x_1, x_2)\,\ln|\sigma(x_1, x_2)| + W(x_1, x_2)\ ,$$

onde $\sigma(x_1, x_2)$ é a metade da distância geodésica, elevada ao quadrado, entre x_1 e x_2. Em espaço-tempo plano ou no limite $x_1 \to x_2$ em espaço-tempo curvo, $\sigma = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2$. Segue-se disso que o suporte singular de $\Delta_{\mathrm{Had}} = \{(x_1, x_2) \mid \sigma = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 = 0\}$ [6]. U, V e W são funções regulares para todas as escolhas de x_1 e x_2. As funções U e V são quantidades geométricas independentes do estado quântico, e apenas W carrega informação sobre o estado.

Os estados de Hadamard possuem um proeminente *status* em conexão com a condição espectral, sendo reconhecidos como determinantes da classe de estados físicos para a teoria quântica de campos em um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Progressos importantes no entendimento do significado dos estados de Hadamard foram conseguidos com Radzikowski (com algumas lacunas preenchidas por Köhler [10]), que caracterizou a classe destes estados em termos do conjunto de frente de ondas das funções de dois pontos de Green (ω_2) satisfazendo certas condições. Esta condição foi denominada de condição espectral do conjunto de frente de ondas (WFSSC). Foi então proposto que um estado quase livre ω do campo de Klein-Gordon sobre uma variedade globalmente hiperbólica é um estado de Hadamard se, e somente se, sua distribuição de dois pontos ω_2 possui o seguinte conjunto de frente de ondas

$$WF(\omega_2) = \left\{(x_1, k_1); (x_2, k_2) \in T^*\mathscr{M}_0^2 \setminus \{0\} \mid (x_1, k_1) \sim (x_2, -k_2) \text{ and } k_1^0 \geq 0\right\}\ , \quad (1.5.1)$$

[6] Lembre-se que o suporte singular de uma distribuição $u \in \mathscr{D}'(X)$ é o menor subconjunto fechado Y de X tal que $u|_{X\setminus Y}$ é de classe C^∞.

tal que x_1 e x_2 estão sobre uma geodésica única nula γ, $(k_1)^\mu = g^{\mu\nu}(k_1)_\nu$ é tangente a γ e direcionado para o futuro, e quando k_1 é transportado paralelamente ao longo de γ a partir de x_1 até x_2, resulta em $-k_2$. Se $x_1 = x_2$, temos $k_1^2 = 0$ e $k_1 = k_2$. Radzikowski mostrou de fato que esta condição é inteiramente similar à condição espectral da teoria quântica de campos axiomatizada [48].

Note que a equação (1.5.1) restringe o suporte singular de $\omega_2(x_1, x_2)$ para os pontos x_1 e x_2 os quais são nulamente relacionados. Então, ω_2 deve ser suave em todos os outros pontos. Isto é sabidamente verdadeiro para as teorias quânticas de campos no espaço de Minkowski para pontos espacialmente relacionados. A chave desta questão é dada pelo Teorema de Bargman-Hall-Wightman (veja a discussão sobre analiticidade no Apêndice C) o qual demonstra que podemos obter este resultado aplicando transformações de Lorentz complexas sobre o domínio de analiticidade primitivo determinado pela condição espectral. Entretanto, uma predição similar sobre a suavidade não existe para pontos temporalmente relacionados. Radzikowski sugeriu estender o lado direito da equação (1.5.1) para todos os pontos causalmente relacionados, na tentativa de incluir possíveis singularidades para o caso dos pontos temporalmente afastados.

Para finalizar, desejamos que a caracterização microlocal dos estados de Hadamard deva ser aplicada igualmente para uma função de n pontos, com $n > 2$. Esta generalização foi atingida por Brunetti *et al.* [11]. Eles sugeriram uma prescrição que retomaremos agora. Seja $\mathcal{G}_m$ denotando o conjunto de todos os grafos finitos,[7] relacionados a alguma variedade de Lorentz $\mathscr{M}_0$, cujos vértices representam os pontos do conjunto $V = \{x_1, \ldots, x_m\} \in \mathscr{M}_0$ e cujos arcos e representam as conexões entre os pares x_i, x_j via as curvas suaves (geodésicas) $\gamma(e)$ de x_i até x_j. Para cada arco e assinalamos um campo de covetores constantes e causais k_e que são direcionados para o futuro se $i < j$. Se e^{-1} denota o arco com direção oposta à de e, então a curva correspondente $\gamma(e^{-1})$ é a inversa de $\gamma(e)$, a qual carrega o momento $k_{e^{-1}} = -k_e$.

Definição 1.5.1 (μSC [11]). *Um estado ω com uma distribuição de m pontos ω_m satisfaz a Condição Espectral Microlocal se, e somente se, para qualquer m*

$$WF(\omega_m) \subseteq \Gamma_m \ ,$$

onde Γ_m é a conjunta $\{(x_1, k_1), \ldots, (x_m, k_m)\}$ para o qual existe um grafo $G \in \mathcal{G}_m$ como descrita aicma com $k_i = \sum k_e(x_i)$ onde a soma estende-se a todos os arcos que pos-

[7]Um grafo é um par de estruturas $G = (V, E)$, onde os elementos de V são os vértices, nós ou simplesmente pontos do grafo G, enquanto que a estrutura E é formada pelas arestas ou arcos. A ordem do grafo é determinada pelo número de vértices, se a ordem é finita, então o grafo também o é.

suem o ponto x_i como fonte. A configuração de momento trivial $k_1 = \cdots = k_m = 0$ é desconsiderada.

Capítulo 2

Modelos de Campos Supersimétricos sobre uma Supervariedade

2.1 Introdução

O presente capítulo se propõe a construir uma extensão de alguns aspectos estruturais que vêm sendo aplicados com sucesso no desenvolvimento de uma teoria quântica de campos propagando em uma variedade espaço-tempo geral (a chamada quantização semi-clássica) de modo a incluir modelos de supercampos em supervariedades.

2.2 Definição e Estrutura de Supervariedades

Iniciaremos a discussão apresentando alguns resultados relacionados às teorias de supervariedades. Devido ao seu desenvolvimento matemático rigoroso e com certo teor de generalidades, inicialmente seguiremos a linha abordada no trabalho de Rogers [25]. A teoria de Rogers possui uma vantagem em relação a outras (veja, por exemplo, Refs. [26]-[36]) uma vez que em sua formulação podemos escrever a supervariedade como uma variedade ordinária de Banach dotada de uma estrutura algébrica de Grassmann, onde as construções topológicas possuem os significados usuais.

Primeiramente discorreremos sobre conceitos ligados às chamadas superálgebras:

Definição 2.2.1. *Uma álgebra é dita ser uma super-álgebra supercomutativa* Λ *- ou uma algebra comutativa graduada* $\mathbb{Z}_2$*- se* Λ *é a soma direta* $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ *de dois subespaços complementares tal que* $\mathbb{I} \in \Lambda_0$ *e* $\Lambda_0\Lambda_0 \subset \Lambda_0$, $\Lambda_0\Lambda_1 \subset \Lambda_1$, $\Lambda_1\Lambda_1 \subset \Lambda_0$. *Note também que* *para todo elemento homogênea* [1] x, y *em* Λ, $xy = (-1)^{|x||y|}yx$, *onde* $|x| = 0$ *se* $x \in \Lambda_0$ *e* $|x| = 1$ *se* $x \in \Lambda_1$. *Evidentemente segue que o quadrada de um elemento ímpar se anula.*

Consideraremos que a super-álgebra Λ é um espaço de Banach, ou seja, um espaço completo e normado, cuja norma $\|\cdot\|$ satisfaz a seguinte condição:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \ , \forall x, y \in \Lambda; \quad \|\mathbb{I}\| = 1 \ .$$

Seja agora L um número inteiro, finito e positivo e seja também $\mathscr{G}$ denotando uma álgebra de Grassmann, de forma que $\mathscr{G}$ pode ser decomposto naturalmente como uma soma direta $\mathscr{G} = \mathscr{G}_0 \oplus \mathscr{G}_1$, onde $\mathscr{G}_0$ contém os elementos pares (comutantes) e $\mathscr{G}_1$ por sua vez contém os elementos ímpares (anti-comutantes) de $\mathscr{G}$, respectivamente. Denotemos M_L sendo o conjunto de sequências $\{(\mu_1, \ldots, \mu_k) \mid 1 \leq k \leq L; \mu_i \in \mathbb{N}; 1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_k \leq L\}$. Tendo a sequência vazia em M_L representada por Ω e (j) representando a sequência com apenas um elemento j, a base de $\mathscr{G}$ será dada por monômios da forma $\{\xi_\Omega, \xi^{\mu_1}\xi^{\mu_2}, \ldots, \xi^{\mu_1}\xi^{\mu_2}\ldots\xi^{\mu_k}\}$ para todo $\mu \in M_L$, tal que $\xi_\Omega = \mathbb{I}$ e $\xi^{(i)}\xi^{(j)} + \xi^{(j)}\xi^{(i)} = 0$ com $1 \leq i, j \leq L$. Observe ainda que não exitem outras relações envolvendo os geradores. Assim, temos uma álgebra de Grassmann $\mathscr{G}_L$ (com L geradores) onde os elementos pares e ímpares assumem seus valores. Com L sendo um número inteiro finito(o número de geradores L pode ser infinito) vemos que a sequência termina em $\xi^1 \ldots \xi^L$ e então existe somente 2^L elementos de base distintos. Um elemento representativo arbitrário $q \in \mathscr{G}_L$ pode se descrito como:

$$q = q_{\mathrm{b}} + \sum_{(\mu_1, \ldots, \mu_k) \in M_L} q_{\mu_1, \ldots, \mu_k} \xi^{\mu_1} \cdots \xi^{\mu_k} \ , \tag{2.2.1}$$

onde $q_{\mathrm{b}}, q_{\mu_1 \ldots \mu_k}$ são números reais. Um elemento par ou ímpar é especificado por 2^{L-1} parâmetros reais. O número q_{b} é denominado corpo de q, enquanto o restante $q - q_{\mathrm{b}}$ é dito alma de q, denotada por $s(q)$. O elemento q é inversível se, e somente se, seu corpo é não nulo. No que diz respeito a teorias de campo supersimétricas, a variável comutante x tem a seguinte forma

$$x = x_{\mathrm{b}} + x_{ij}\xi^i\xi^j + x_{ijkl}\xi^i\xi^j\xi^k\xi^l + \cdots \ , \tag{2.2.2}$$

onde $x_{\mathrm{b}}, x_{ij}, x_{ijkl}, \ldots$ são variáveis reais. De forma análoga, as variáveis anti-comutantes (na representação de Weyl) θ e $\bar{\theta} = (\theta)^*$ são escritas como

$$\theta = \theta_i\xi^i + \theta_{ijk}\xi^i\xi^j\xi^k + \cdots \ , \quad \bar{\theta} = \bar{\theta}_i\xi^i + \bar{\theta}_{ijk}\xi^i\xi^j\xi^k + \cdots \ , \tag{2.2.3}$$

[1]Elementos de Λ_0 e Λ_1 são homogêneos se possuem paridade definida, i.e., um elemento $x \in \Lambda_0$ possui paridade *par*, enquanto um elemento $x \in \Lambda_1$ possui paridade *ímpar*. Produtos de elementos homogêneos de mesma paridade são pares e de elementos de paridade diferente são ímpares.

agora aqui $\theta_i, \theta_{ijk}, \ldots$ são variáveis complexas. A somatória sob índices repetidos está sendo sempre assumida, a menos que se defina algo diferente.

Como comentado por Vladimirov-Volovich [32], do ponto de vista físico, os supercampos normalmente não são funções explícitas de $\theta_i, \theta_{ijk}, \ldots$ e de $x_{\mathbf{b}}, x_{ij}, x_{ijkl}, \ldots$, mas tão somente dependentes das variáveis θ e x, da mesma forma que no caso da análise complexa ordinária, as funções analíticas de variáveis complexas $z = x + iy$ também não configuram de forma explícita como funções arbitrárias das variáveis x e y. Veremos que do ponto vista interpretativo, para o próprio entendimento do porquê é possível uma dada transformação supersimétrica, o rigor matemático traz algumas vantagens.

A álgebra de Grassmann deve ser dotada de uma topologia. Neste sentido considere a norma completa em $\mathscr{G}_L$ definida por [42]:

$$\|q\|_p = \left(|q_{\mathbf{b}}|^p + \sum_{(\mu)=1}^{L} |q_{\mu_1 \ldots \mu_k}|^p \right)^{1/p} . \tag{2.2.4}$$

Uma topologia interessante sobre $\mathscr{G}$ é a topologia induzida pela sua norma. A norma $\|\cdot\|_1$ é chamada de norma de Rogers assim como $\mathscr{G}_L(1)$ é a álgebra de Rogers [25]. A álgebra de Grassmann $\mathscr{G}$ equipada com a norma (2.2.4) vem a ser um espaço de Banach, isto é, suas normas possuem as seguintes propriedades: $\|\mathbb{1}\| = 1$ e $\|qq'\| \leq \|q\|\|q'\|$ para todo $q, q' \in \mathscr{G}$.

Definição 2.2.2. *Uma álgebra de Grassmann-Banach é uma algebra de Grassmann dotada de uma estrutura de Banach.*

O superespaço construído a partir de uma álgebra de Grassmann-Banach $\mathscr{G}_L$ é muito mais rico (do ponto de vista de propriedades como difereneiabilidade, por exemplo) do que sua construção a partir apenas de uma álgebra de Grassmann.

Definição 2.2.3. *Seja $\mathscr{G}_L = \mathscr{G}_{L,0} \oplus \mathscr{G}_{L,1}$ uma álgebra de Grassmann-Banach. Então, o superespaço (m,n)-dimensional é o espaço topológico $\mathscr{G}_L^{m,n} = \mathscr{G}_{L,0}^m \times \mathscr{G}_{L,1}^n$, que generaliza o espaço $\mathbb{R}^m$, consistindo do produto cartesiano m cópias da parte par de $\mathscr{G}_L$ e n cópias de sua parte ímpar.*

Para um espaço (m,n)-dimensional, um elemento típico de seu conjunto usado em física é denotado por $(z) = (z_1, \ldots, z_{m+n}) = (x_1, \ldots, x_m, \theta_1, \ldots, \theta_{n/2}, \bar{\theta}_1, \ldots, \bar{\theta}_{n/2})$. A título de exemplificação, para um superespaço de Minkowski de dimensão $(4,4)$, o qual reconhecemos ser o modelo de Wess-Zumino com $N = 1$ (apenas 1 (uma) supersimetria) formulado em termos da linguagem de supercampos e modelado como $\mathscr{G}_L^{4,4} = \mathscr{G}_{L,0}^4 \times \mathscr{G}_{L,1}^4$, $(z) = (x_1, \ldots, x_4, \theta_1, \theta_2, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$. A norma em $\mathscr{G}_L^{4,4}$ é definida por $\|z\| = \sum_{i=1}^{4} \|x_i\| +$

$\sum_{j=1}^{2} \|\theta_j\| + \sum_{k=1}^{2} \|\bar{\theta}_k\|$. A topologia de $\mathscr{G}_L^{4,4}$ é a topologia induzida por sua norma, sendo uma topologia produto.

Em uma teoria quântica de campos supersimétrica, os supercampos são funções no superespaço usualmente dadas por sua expansão padrão (finita) de potências das coordenadas ímpares:

$$F(x, \theta, \bar{\theta}) = \sum_{(\gamma)=0}^{\Gamma} f_{(\gamma)}(x)(\theta)^{(\gamma)} \ , \tag{2.2.5}$$

onde $(\theta)^{(\gamma)}$ compreende todos os monômios com variáveis anti-comutantes θ e $\bar{\theta}$ de grau $|\gamma|$; $f_{(\gamma)}(x)$ é uma componente do campo, tal que suas propriedades de Lorentz são determinadas pelas propriedades de $F(x, \theta, \bar{\theta})$ e pela potência (γ) de (θ). Usamos aqui a notação seguinte, estendida para mais de uma variável θ (2.2.5): $(\theta) = (\theta_1, \bar{\theta}_1, \ldots, \theta_n, \bar{\theta}_n)$, e (γ) é um multi-índice $(\gamma_1, \bar{\gamma}_1, \ldots, \gamma_n, \bar{\gamma}_n)$ com $|\gamma| = \sum_{r=1}^{n}(\gamma_r + \bar{\gamma}_r)$ e $(\theta)^{(\gamma)} = \prod_{r=1}^{n} \theta_r^{\gamma_r} \bar{\theta}_r^{\bar{\gamma}_r}$.

Rogers [25] considerou supercampos em $\mathscr{G}_L^{m,n}$ como superfunções G^∞ (veremos mais em detalhes logo a seguir), ou seja, funções tais que seus coeficientes $f_{(\gamma)}(x)$ provindos de suas expanções são funções bem comportadas (suaves) de $\mathbb{R}^m$ em $\mathscr{G}_L$, estendidas de $\mathbb{R}^m$ para $\mathscr{G}_L^{m,0}$ via uma z-continuação [25], a qual mapeia funções de variáveis reais em funções cujas variáveis são definidas em $\mathscr{G}_L^{m,0}$.

Definição 2.2.4. *Seja U um conjunto aberto $\mathscr{G}_L^{m,0}$ e $\epsilon : \mathscr{G}_L^{m,0} \to \mathbb{R}^m$ uma projeção no corpo que associa para cada m-upla $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathscr{G}_L^{m,0}$ uma m-upla $(\epsilon(x_1), \ldots, \epsilon(x_m)) \in \mathbb{R}^m$. Com V sendo uma conjunto aberto em $\mathbb{R}^m$ de forma que $V = \epsilon(U)$, temos que a partir de uma continuação analítica grassmanniana (z-continuação) da função $f \in C^\infty(V, \mathscr{G}_L)$ uma função $z(f) \in G^\infty(U, \mathscr{G}_L)$, que admite uma expansão em potências da alma de x*

$$z(f)(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i_1=\cdots=i_m=0}^{L} \frac{1}{i_1! \cdots i_m!} \left[\partial_1^{i_1} \cdots \partial_m^{i_m}\right] f(\epsilon(x)) s(x_1)^{i_1} \cdots s(x_m)^{i_m} \ ,$$

onde $s(x_i) = (x_i - \epsilon(x_i))$ e $\epsilon(x_i) = (x_i)_b$.

Devemos observar que a continuação analítica aqui envolvida aborda apenas as variáveis pares $z : C^\infty(\epsilon(U)) \to G^\infty(U)$, note também que $z(f)(x_1, \ldots, x_m)$ é uma função supersuave de suas componentes dependentes de valores de x, desconsiderando sua alma. Assim, é justificável as manipulações formais encontradas na literatura em Física, onde os supercampos são usados como se seus argumentos pares fossem números ordinários [41]: uma função supersuave é completamente determinada quando seus componentes no corpo do superespaço são conhecidos.

De acordo com a Definição 2.2.4, o supercampo $F(x, \theta, \bar{\theta}) \in G^\infty(U, \mathscr{G}_L)$ admite a seguinte expressão

$$F(x,\theta,\bar{\theta}) = \sum_{(\gamma)=0}^{C} z(f_{(\gamma)})(x)(\theta)^{(\gamma)} \; ,$$

onde aqui $f_{(\gamma)} \in C^{\infty}(\epsilon(U);\mathscr{G}_L)$.

Consideremos agora alguns aspectos interessantes sobre supervariedades, baseados no trabalho de Rogers, substituindo o superespaço simples $\mathscr{G}_L^{m,n}$ por uma supervariedade bem mais geral. Rogers usou o conceito de superfunções G^{∞} para definir a noção de supervariedades G^{∞} (que podem ser consideradas variedades de Banach reais C^{∞} modeladas sobre $\mathscr{G}_L^{m,n}$ de dimensão $N = 2^{L-1}(m+n)$), com estrutura que comporta o conceito de vizinhança de pontos, bem como de superfunções contínuas. Uma supervariedade G^{∞} e (m,n)-dimensional generaliza a noção de uma variedade C^{∞} e m-dimensional: da mesma forma que uma variedade é um espaço topológico de Hausdorff tal que todo ponto possui uma vizinhança homeomórfica a $\mathbb{R}^m$ e também possui coordenadas locais $(x_1(p),\ldots,x_m(p))$ em $\mathbb{R}^m$, uma supervariedade por sua vez é um espaço topológico que localmente pode ser visto como $\mathscr{G}_L^{m,n}$, com suas coordenadas locais $(x_1(p),\ldots,x_m(p),\theta_1(p),\ldots,\theta_n(p))$ em $\mathscr{G}_L^{m,n}$, tal que as funções de transição satisfazem uma condição de supersuavidade.

Definição 2.2.5. *Uma supervariedade é em geral um espaço topológico Hausdorff e paracompacto $\mathscr{M}$, o qual está associado um mapa de cartos $\{(X_\alpha,k_\alpha)\mid \alpha\in I\}$, sobre uma álgebra de Grassmann-Banach $\mathscr{G}_L$, onde X_α cobre $\mathscr{M}$ e cada função de coordenada k_α é um mapa localmente homeomórfico de X_α em um subconjunto aberto $\widetilde{X}_\alpha \subset \mathscr{G}_L^{m,n}$, também do tipo Hausdorff.*

A existência de sistemas de coordenadas infinitamente diferenciáveis torna a supervariedade uma variedade diferenciável. A estrutura diferenciável deste espaço topológico é devido às estruturas G^r ($r = p$ ou $r = \infty$) de suas funções de transição $k_\beta \circ k_\alpha^{-1}$, que mapeiam os "overlapping" (intersecções) $k_\alpha(X_\alpha \cap X_\beta)$ e $k_\beta(X_\alpha \cap X_\beta)$, sendo funções supersuaves para qualquer $\alpha,\beta \in I$. As coordenadas locais são:

$$u_i = p_i \circ k_\alpha \longmapsto (i = 1,\ldots,m) \; ,$$
$$v_j = p_{j+m} \circ k_\alpha \longmapsto (j = 1,\ldots,n) \; .$$

Neste sentido, $\mathscr{G}_L^{m,n}$ é um exemplo de supervariedade G^{∞}. Note aqui a diferença com respeito à formulação de DeWitt [26], onde sua topologia grossa (do inglês "*coarse*") nos impede até mesmo de definir matematicamente uma norma.

Definição 2.2.6. *Seja $\widetilde{X}_\alpha$ um conjunto abeto em $\mathscr{G}_L^{m,n}$ e $f : \widetilde{X}_\alpha \to \mathscr{G}_L$, então:*

(a) f é chamada G^0 em $\widetilde{X}_\alpha$ se f é contínua em $\widetilde{X}_\alpha$.

(b) f é chamada G^1 em $\widetilde{X}_\alpha$ se existe $m+n$ funções $G_k f : \widetilde{X}_\alpha \to \mathscr{G}_L$, $k = 1, \ldots, m+n$ e funções $\eta : \mathscr{G}_L^{m,n} \to \mathscr{G}_L$ tal que:

$$
\begin{aligned}
f(a+h, b+k) = & f(a,b) + \sum_{i=1}^{m} h_i\{G_i f(a,b)\} + \sum_{j=1}^{n} k_j\{G_{j+m} f(a,b)\} + \\
& + \parallel h, k \parallel \eta(h,k) \ ,
\end{aligned}
$$

e $\eta(h,k) \to 0$ sempre quando $\parallel h, k \parallel \to 0$. Assim podemos fazer a associação: $G_i f \to f_i'$.

Podemos generalizar para G^p, com p sendo inteiro finito, como se segue: f é G^p em $\widetilde{X}_\alpha$ se é possível fazer uma escolha de $G_k f$ que são G^{p-1} com $f \in G^1$ em $\widetilde{X}_\alpha$. Se isto for assegurado para todo p, f é chamada G^∞. De fato, qualquer função que é absolutamente convergente (série de potência) tem que ser G^∞ em $\widetilde{X}_\alpha$. Em outras palavras:

$$
\begin{aligned}
& f(z) = \sum_{k_1 \ldots k_{m+n}=0}^{\infty} a_{k_1 \ldots k_{m+n}} z_1^{k_1} \ldots z_{m+n}^{k_{m+n}} \ ; \\
& f : \widetilde{X}_\alpha \to \mathscr{G}_L; \quad \widetilde{X}_\alpha \subset \mathscr{G}_L^{m,n} \quad \text{and} \quad a_{k_1 \ldots k_{m+n}} \in \mathscr{G}_L \ .
\end{aligned}
$$

Outra propriedade formal de estruturas C^∞ é que:

$$
[D^p f(z)][\ell^1, \ell^2, \ldots, \ell^p] \sum_{k_1 \ldots k_p = 1}^{m+n} l_{k_1}^1 \ldots l_{k_p}^p (G_{k_p} G_{k_{p-1}} \ldots G_{k_1} f)(z) \ ,
$$

para todo $z \in \widetilde{X}_\alpha$ aberto em $\mathscr{G}_L^{m,n}$ e $l_{k_1}^1 \ldots l_{k_p}^p \in (\mathscr{G}_L^{m,n})^p$, que por sua vez denota o produto espacial de p cópias de $\mathscr{G}_L^{m,n}$. Deste modo, derivadas de ordem p de $f \in \mathscr{L}[(\mathscr{G}_L^{m,n})^p, \mathscr{G}_L]$ são elementos de mapas contínuos p-lineares de $(\mathscr{G}_L^{m,n})^p$ em $\mathscr{G}_L$. Este interessante formalismo está de acordo com o que Hörmander's [30] (pg.11) aborda em seu livro, onde os elementos $f^{(p)} \in L^p(X_\alpha, X_\beta)$ são formas p-lineares contínuas de X_α para X_β.

A discussão sobre diferenciabilidade fornecida por Jadczyk-Pilch [27] é bem mais simples em comparação a abordada aqui, dada por Rogers [25]. Em particular, sabendo *a priori* que a função f é um mapa C^∞ entre espaços de Banach, é necessário apenas olhar suas primeiras derivadas para saber se f é supersuave ou não, enquanto que de acordo com Rogers uma investigação de todas as derivadas se faz necessária. De qualquer forma, o conceito de supersuavidade apresentado por Jadczyk-Pilch e o conceito de diferenciabilidade G^∞ se equivalem.

2.2.1 O Corpo de uma Supervariedade

Uma vez tendo introduzido idéias gerais acerca da estrutura de uma supervariedade, restringiremos nossa atenção a um caso de interesse fundamental: a questão de como construir o corpo de uma supervariedade da classe G^∞ que venha a fazer o papel de um espaço-tempo físico. De uma maneira geral, o corpo de uma supervariedade $\mathscr{M}$ deve ser uma variedade C^∞ (uma variedade ordinária), denotada por $\mathscr{M}_0$, obtida de $\mathscr{M}$ fixando todas as coordenadas tipo alma. Devido à sua generalidade evidente, a teoria de Roger inclui muito espaços topológicos exóticos, como por exemplo, supervariedades que não possuem utilidades físicas, admitindo por vezes topologias não triviais nos setores anti-comutantes e até mesmo classes de supervariedades que não admitem uma variedade corpo. Todavia nossa intuição sugere que somente uma supervariedade dotada de corpo pode ser fisicamente relevante. No que se segue, a escolha que faremos da supervariedade apesar de ter uma construção particular, possui a topologia prescrita por Rogers.

A questão da existência de corpo de uma supervariedade foi bastante esclarecida nos trabalhos de R. Catenacci *et al.* [38] e P. Bryant [39]. Tal abordagem é independente do atlas utilizado, e baseia-se no fato de que qualquer supervariedade $\mathscr{M}$ (G^∞) admite uma foliação $\mathfrak{F}$. Este tipo de estrutura é relacionada com a noção de espaços quocientes e subestruturas em supervariedades. Como existe inúmeras maneiras formais de se definir em matemática a noção de foliação, apresentaremos uma forma simples com apelo geométrico do que vem a ser esta construção:

Definição 2.2.7. *Seja $\mathscr{M}$ um supervariedade (m,n)-dimensional de classe G^p, com p podendo ser infinito. Uma foliação de classe G^p e de codimenção m, é uma decomposição de $\mathscr{M}$ em subconjuntos disjuntos e conexos $\{\mathfrak{L}_\alpha\}_{\alpha\in A}$, chamados de folhas da foliação, tal que cada ponto de $\mathscr{M}$ tem um vizinhança U e um sistema G^p de coordenadas $(x,\theta) : U \to \mathscr{G}^m_{L,0} \times \mathscr{G}^n_{L,1}$ de forma que para cada folha $\mathfrak{L}_\alpha$, as componentes de $U \cap \mathfrak{L}_\alpha$ são descritas por superfícies onde todas as coordenadas do corpo $\epsilon(x_1), \ldots, \epsilon(x_m)$ são mantidas constantes. Denotamos a foliação por $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{L}_\alpha\}_{\alpha\in A}$.*

As coordenadas relacionadas na Definição 2.2.7 são ditas distinguíveis pela foliação $\mathfrak{F}$. Sob certas condições de regularidade (este conceito está apresentado na demostração do corolário logo a seguir) em $\mathfrak{F}$, o espaço quociente $\mathscr{M}/\mathfrak{F}$ pode fornecer estrutura de uma variedade diferenciável $\mathscr{M}_0$ de dimensão m, que é chamado variedade corpo de $\mathscr{M}$ [38]. Uma supervariedade G^∞ que possui uma foliação $\mathfrak{F}$ regular é por sua vez regular. Para supervariedades regulares vale o seguinte teorema:

Teorema 2.2.8 (Teorema de Catenacci-Reina-Teofilatto modificado). *Seja $\mathscr{M}$ uma supervariedade G^∞. Uma condição necessária para que exista uma variedade corpo $\mathscr{M}_0$ e a mesma seja uma variedade C^∞ é que a supervariedade seja regular.*

Assim, a regularidade se comporta como uma condição apenas necessária para que uma supervariedade admita uma variedade corpo. Em seu trabalho, P. Bryant [39] vem completar esta discussão, introduzindo o seguinte teorema:

Teorema 2.2.9 (Teorema de Bryant 2.5). *Suponha que $\mathscr{M}$ é uma supervariedade. Para que $\mathscr{M}$ admita uma variedade corpo, é suficiente e necessário que as folhas da foliação tipo alma sejam fechadas em $\mathscr{M}$ e não acumulem.*

Para nossos propósitos, será suficiente considerar a classe de supervariedades C^∞ construídas por Bonora-Pasti-Tonin [28] (que chamaremos de supervariedades BPT), que possuem aplicações em física teórica importantes e satisfazem os Teoremas 2.2.8 e 2.2.9, como será mostrado. Estas supervariedades consistem em extensões grassmannianas de *qualquer* variedade espaço-temporal ordinária C^∞. Dado uma espaço-tempo físico m-dimensional, construímos primeiramente uma supervariedade $(m, 0)$-dimensional e por conseguinte uma supervariedade (m, n)-dimensional via o produto direto com $\mathscr{G}_L^{0,n}$. Esta construção é a mais próxima da abordagem intuitiva de superespaço como variedade de coordenadas anti-comutantes, sendo as variáveis ímpares de Grassmann topologicamente triviais.

Note que em qualquer modelo envolvendo férmions em um espaço tempo geral, a supervariedade deve ser construída a partir de um fibrado espinorial de uma variedade da seguinte forma: Seja $\mathscr{M}$ uma variedade corpo m-dimensional e E um fibrado vetorial n-dimensional sobre $\mathscr{M}$. Suponha que $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura de $\mathscr{M}$ por vizinhanças de coordenadas que também são trivializações de vizinhanças de E. Desta forma a supervariedade (m, n)-dimensional correspondente possui funções de transição de coordenadas

$$x_\alpha^i = \phi_{\alpha\beta}^i(x_\beta) \ ,$$

onde $\phi_{\alpha\beta}$ é a z-continuação da função de transição para $\mathscr{M}$ e

$$\theta_\alpha^i = {g_{\alpha\beta}}^i{}_j(x_\beta)\theta_\alpha^j \ ,$$

com $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Gl(n)$ sendo a função de transição para E. Note que as supervariedades BPT são exemplos desta construção quando o fribrado E é trivial.

Vamos agora recapitular a construção já mencionada de Bonora-Pasti-Tonin [28]. Seja $\{(U_\alpha, \psi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ um atlas para $\mathscr{M}_0$. Para cada $\alpha \in I$ considere o subconjunto X_α do produto cartesiano $U_\alpha \times \mathscr{G}_L^{m,0}$ definido por

$$X_\alpha = \{(x, \bar{x}) \mid x \in U_\alpha, \bar{x} \in \mathscr{G}_L^{m,0}, \text{ e } \epsilon(\bar{x}) = \psi_\alpha(x)\} \ , \tag{2.2.6}$$

e seja também $k_\alpha : X_\alpha \rightarrow \mathscr{G}_L^{m,0}$ denotado por $k_\alpha(x, \bar{x}) = \bar{x}$ para $(x, \bar{x}) \in X_\alpha$, onde k_α é um homeomorfismo e sua imagem é um subconjunto aberto de $\mathscr{G}_L^{m,0}$.

Uma propriedade importante da z-continuação é a composição de funções. Seja U um conjunto aberto em $\mathbb{R}^m$, e o mapa $f : \mathbb{R}^m \to \mathscr{G}_L^{k,0}$ sendo representado pelo conjunto de funções $\{f_i(x_1, \ldots, x_m), i = 1, \ldots, m\}$ da classe C^∞. Chamamos agora $z(f)$ como o conjunto de funções $\{z(f_i)\}$. Sendo V aberto em $\mathbb{R}^n$ e considerando os mapas $f : U \to V$ e $g : V' \to \mathscr{G}_L^{k,0}$, respectivamente, onde $V' \subseteq V$, com ambas f, g funções C^∞, temos

$$z(g \circ f) = z(g) \circ z(f) \; . \tag{2.2.7}$$

Considere agora a união disjunta $M = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$. Dois pontos de M são ditos equivalentes se, e somente se $(x, \bar{x}) \sim (x', \bar{x}')$, tal que $(x, x) \in X_\alpha$ e $(x', \bar{x}') \in X_\beta$ com $x = x'$, $\bar{x}' = z(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})(\bar{x})$. Evidentemente M é um espaço Hausdorff. Consideremos o espaço $\mathscr{M}_G$ como o espaço M módulo a relação de equivalência acima. Os k_α's dotam $\mathscr{M}_G$ com uma estrutura de diferenciabilidade G^∞, tal que $\mathscr{M}_G$ é uma supervariedade G^∞ $(m, 0)$-dimensional. Seja $\pi_G : \mathscr{M}_G \to \mathscr{M}_0$ uma projeção contínua e aberta. Localmente $\pi_G \mid_{X_\alpha} (x, \bar{x}) = x$ para $(x, \bar{x}) \in X_\alpha$. Uma vez que $\mathscr{M}_G$ é uma supervariedade *regular*, temos então que $\pi_G \circ k_\alpha^{-1} = \psi_\alpha^{-1} \circ \epsilon$ para $\bar{x} \in k_\alpha(X_\alpha)$. Isto pode ser representado pelo seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[d, "\pi_G"'] & \mathscr{G}_L^{m,0} \arrow[l, "k_\alpha^{-1}"'] \arrow[d, "\epsilon"] \\ U_\alpha & \mathbb{R}^m \arrow[l, "\psi_\alpha^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Finalmente, construímos a supervariedade (m, n)-dimensional $\mathscr{M}$ tomando o produto directo de $\mathscr{M}_G$ com $\mathscr{G}_L^{0,n}$. A projeção $\pi_S : \mathscr{M} \to \mathscr{M}_0$ é o mapa composto $\pi_G \circ \gamma$, onde $\gamma : \mathscr{M} \to \mathscr{M}_G$ é a projeção sobre o primeiro fator. O mapa γ é G^∞, diferentemente de π_G, que é apenas uma função C^∞.

Corolário 2.2.10. *Seja $\mathscr{M}$ uma supervariedade BPT. Então as folhas da foliação tipo alma são regulares, fechadas em $\mathscr{M}$ e não acumulam.*

Assumiremos que a variedade corpo de uma supervariedade BPT é definida pela foliação tipo alma $\mathscr{M}_0 \overset{\text{def}}{=} \mathscr{M}/\mathfrak{F}$, onde $\mathscr{M}_0$ denota a variedade corpo.

Prova do Corolário 2.2.10. Primeiro, note que de acordo com a construção de Bonora-Pasti-Tonin, dois pontos de uma supervariedade BPT estão em uma mesma folha se, e somente se, eles são equivalentes no sentido já estabelecido aqui no trabalho. Assim, a foliação tipo alma é definida por $\mathscr{M}/\!\sim \overset{\text{def}}{=} \mathscr{M}/\mathfrak{F}$.

Agora, afirmamos que a foliação tipo alma de uma supervariedade BPT é um espaço Hausdorff e que a sua estrutura é regular. Isto pode ser verificado através do seguinte teorema Bryant [39] (Teorema 3.2): "Suponha que $\mathscr{M}$ é uma supervariedade de dimensão

(m,n) e $\Gamma\{U_i,\phi_i\}$ é um atlas, então as condições seguintes são equivalentes: (i) $\Gamma = \{U_i,\phi_i\}$ é uma superestrutura regular em $\mathscr{M}$, (ii) quando s e t estão em U_i, $s \approx t$ implica $s \sim t$ e (iii) o mapa do corpo $\epsilon : \mathscr{M} \to \mathscr{M}/\mathfrak{F}$ é localmente modelado em $\epsilon_0 : B^{m,n} \to \mathbb{R}^m$ no sentido de que existe homeomorfismos $\bar{\phi}_i : \epsilon U_i \to \epsilon_0\phi_i U_i$ tal que $\bar{\phi}_i \circ \epsilon_{|U_i} = \epsilon_0 \circ \phi$. Quando estas condições são satisfeitas, $\mathscr{M}/\mathfrak{F}$ é Hausdorff e é uma variedade suave de dimensão m com cartas $\{\epsilon U_i, \bar{\phi}_i\}$." No caso da relação de equivalência $(s \sim t)$ de uma supervariedade BPT, observamos que ela é do tipo $\approx$ no sentido de Bryant visto que ela engloba $\sim$ (também no sentido de Bryant) e é transitiva. Então $\approx$ implica $\sim$ nas mesmas cartas. Isto significa que as condições no Teorema 3.2 de Bryant são propriedades das foliações BPT, e consequentemente a estrutura regular e tipo Hausdorff é garantida. Vejamos como o fato de as folhas de uma supervariedade BPT serem fechadas pode ser mostrado: cada ponto $(\epsilon(s))$ de $\mathscr{M}/\sim$ é fechado, uma vez que a supervariedade BPT é um espaço Hausdorff, e o teorema da aplicação inversa garante que as folhas são de fato fechadas, pois F sendo uma folha em $\mathscr{M}$, podemos escrever então $F\epsilon^{-1}\epsilon(s)$, onde ϵ^{-1} é um mapa contínuo.

Para completar a demonstração, devemos verificar que as folhas em uma supervariedade BPT não acumulam. Primeiramente, suponhamos que as folhas da foliação tipo alma acumulam[2] em um dado par de pontos, por exemplo $s_+, s_- \in \mathscr{M}$. Note que como $\mathscr{M}/\mathfrak{F}$ é Hausdorff, dados dois pontos $x \in \mathscr{M}/\mathfrak{F}$ e $y \in \mathscr{M}/\mathfrak{F}$ com $x \neq y$, podemos separar estes pontos por conjuntos abertos disjuntos. Escolha, por exemplo, $\epsilon s_+ = x$ e $\epsilon s_- = y$, onde $\epsilon : \mathscr{M} \to \mathscr{M}/\mathfrak{F}$. Então podemos também escolher $s_+ \in F' \cup \Sigma_+$ (uma subvariedade transversa) e $s_- \in F' \cup \Sigma_-$ (outra subvariedade transversa). Se isto é verdadeiro, s_+, s_- devem estar na mesma folha, indicando que $\epsilon s_+ = \epsilon s_-$ contradiz a afirmação de que a foliação é Hausdorff. Portanto, as folhas não acumulam. Para maior completeza, examinamos o caso $\epsilon s_+ \epsilon s_-$. Devido a propriedade de uma escolha arbitrária de subvariedades transversas, selecionamos $\Sigma(s)$ e $\Sigma(t)$ através de algumas vizinhanças disjuntas de s e t respectivamene, tal que não exista um U_i que intercepta $\Sigma(s)$ e $\Sigma(t)$. Mas $\epsilon s_+ = \epsilon s_-$ implica que s e t estão na mesma carta U_i, assim as folhas não acumulam visto que $\Sigma(s) \cup \Sigma(t) = \emptyset$.

A existência de uma variedade corpo configura-se como um pré-requisito importantíssimo para interpretação física de teorias de campo em supervariedades. Com objetivos de estabelecer aplicabilidade do rigor matemático em um sistema físico, precisamos impor certas restrições relacionadas à variedade corpo $\mathscr{M}_0$ associada com a supervariedade

[2]As folhas de uma foliação tipo alma acumulam se existem dois pontos s_+, s_- e uma sequência $F^{(n)}$, tal que para subvariedades transversas arbitrárias Σ_+ através de s_+ e Σ_- através de s_-, existe algum $F^{(n_o)}$, com $F^{(n_o)} \cup \Sigma_+ \neq \emptyset$ e $F^{(n_o)} \cup \Sigma_- \neq \emptyset$.

$\mathscr{M}$. Além de outros aspectos, o princípio de causalidade tem um papel crucial em nossa construção. Portanto, restringiremos nossa variedade corpo, $(\mathscr{M}_0, g_0)$, de forma que ela seja uma variedade de Lorentz globalmente hiperbólica (VLGH), consistindo de uma variedade suave 4-dimensional $\mathscr{M}_0$ (de fato, qualquer dimensão é passível de construção) que pode ser foliada suavemente por uma família de superfícies não causais [6] e de uma métrica suave g_0 com assinatura $(+,-,-,-)$. Como vimos no primeiro capítulo, isto significa que a variedade corpo tem que ser topologicamente equivalente ao produto cartesiano de $\mathbb{R}$ com uma hipersuperfície de Cauchy Σ. Além disso, assumimos que $\mathscr{M}_0$ possua uma estrutura de spin, tal que possamos considerar espinores definidos na variedade.[3]

Como foi frisado em [10], uma geometria de fundo natural que admite uma extensão supersimétrica de seu grupo de isotropia pode somente ser do tipo Anti-De-Sitte(AdS). Em outras palavras, a supersimetria global não é compatível com muitos espaços-tempo, sendo o espaço AdS uma exceção. Este requerimento apresenta-se como uma condição bastante restritiva, uma vez que espaços AdS possuem problemas que envolvem curvas tipo tempo fechadas, o que se mostra como um problema ao axioma da causalidade e para as questões relativas à quantização da teoria. Entretanto, devemos ter em mente que este resultado refere-se à teorias com supergravidade extendida com simetria de calibre interna $SO(N)$ [33], o que não é o caso do presente trabalho. Acrescentamos ainda que este resultado pode ser justificado com uma introdução de forma heurística do superespaço. Como discutido em Bruzzo [36], "... a maneira usual a qual lidamos com a teoria de campo no superespaço é bastante insatisfatória do ponto de vista matemático. O superespaço é definido formalmente, e, por exemplo, transformações gerais de coordenadas não são matematicamente bem definidas. Como consequência, existe agora um ambiente para estudar as propriedades topológicas globais do superespaço."

2.3 Superdistribuições

Nesta seção, como um passo natural ao desenvolvimento do trabalho, estenderemos a definição dos objetos matemáticos essenciais para abordagem pretendida: as distribuições. Assim, definimos superdistribuições em supervariedades sobre uma álgebra de Grassmann-Banach $\mathscr{G}_L$.

[3]Mostra-se em geral que uma VLGH 4-dimensional admite uma estrutura de spin [31]. De fato, Geroch discute como uma variedade 4-dimensional *não compacta* e *paralelizável* admite esta estrutura, que é o caso de uma VLGH.

2.3.1 Superdistribuições sobre o Superespaço Plano

Como propósito de definir superdistribuições em supervariedades, incialmente consideremos superdistribuições em um conjunto aberto $U \subset \mathscr{G}_L^{m,n}$, com $\mathscr{G}_L^{m,n}$ denotando o superespaço plano. Superdistribuições são elementos do espaço dual ao espaço de funções supersuaves em $\mathscr{G}_L^{m,0}$, com suportes compactos, tal que este espaço é equipado com uma topologia adequada, chamado de *espaço de superfunções testes*. Esta formulação pode ser realizada diretamente em analogia à noção de distribuições como o espaço dual ao espaço de funções $C_0^\infty(U)$ em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ com suporte compacto, desde de que os espaços $\mathscr{G}_L^{m,0}$ e $\mathscr{G}_L^{m,n}$ possam ser vistos como espaços vetoriais ordinários de dimensões $2^{L-1}(m)$ e $2^{L-1}(m+n)$, respectivamente, sobre os números reais.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto. Se $\Omega = \epsilon(U)$ for visto como um subconjunto de $\mathscr{G}_L^{m,0}$, ele pode ser identificado como o corpo de algum domínio no superespaço. Seja $C_0^\infty(\Omega, \mathscr{G}_L)$ o espaço de funções suaves de suporte compacto com valores em $\mathscr{G}_L$ definidas em $\mathscr{G}_L$. Toda função $f \in C_0^\infty(\Omega, \mathscr{G}_L)$ pode ser expandida em termos de elementos de base de $\mathscr{G}_L$ como

$$f(x) = \sum_{(\mu_1,\ldots,\mu_k)\in M_L^0} f_{\mu_1,\ldots,\mu_k}(x)\xi^{\mu_1}\cdots\xi^{\mu_k} \,, \tag{2.3.1}$$

onde $M_L^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mu_1,\ldots,\mu_k) \mid 0 \leq k \leq L; \mu_i \in \mathbb{N}; 1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_k \leq L\}$ e $f_{\mu_1,\ldots,\mu_k}(x)$ está no espaço $C_0^\infty(\Omega)$ de funções reais suaves em Ω de suporte compacto. Segue-se então que o espaço $C_0^\infty(\Omega, \mathscr{G}_L)$ é isomórfico ao espaço $C_0^\infty(\Omega) \otimes \mathscr{G}_L$ [34]. De acordo com a Definição 2.2.4, as funções suaves de $C_0^\infty(\Omega, \mathscr{G}_L)$ podem ser estendidas de $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ para $U \subset \mathscr{G}_L^{m,0}$ por uma expansão de Taylor.

Devemos dotar de uma estrutura topológica adequada o espaço de superfunções $G_0^\infty(U, \mathscr{G}_L)$ de suporte compacto com valores em $\mathscr{G}_L$ definidas no conjunto aberto $U \subset \mathscr{G}_L^{m,0}$. De acordo com a proposição de Rogers, toda superfunção G^∞ em um conjunto compacto $U \subset \mathscr{G}_L^{m,0}$ pode ser considerada como uma função de valor real C^∞ sobre $U \subset \mathbb{R}^N$, onde $N = 2^{L-1}(m)$, tendo $\mathscr{G}_L^{m,0}$ e $\mathscr{G}_L$ como espaços de Banach. De fato, a identificação de $\mathscr{G}_L^{m,0}$ com $\mathbb{R}^{2^{L-1}(m)}$ é perfeitamente possível [38]. Temos aqui um exemplo de functoriabilidade (do inglês "functoriality"). Assim, seja X e Y uma supervariedade G^∞ e uma variedade de Banach C^∞, respectivamente. Então para cada supervariedade X associamos a variedade de Banach Y, via uma relação functorial $\lambda : X \to Y$, e associamos também para cada mapa (G^∞) ϕ definido sobre X, um mapa (C^∞) $\lambda(\phi)$ definido sobre Y [38].

Considerando somente o subconjunto C_K^∞ de $C_0^\infty(U \subset \mathbb{R}^N)$ que consiste em funções de suporte compacto em um conjunto compacto K e desde que por construção C_K^∞ é um espaço de Banach, as funções deste espaço possuem uma topologia natural dada pela família finita de normas

$$\|\phi\|_{K,m} = \sup_{\substack{|p|\leq m \\ x\in K}} |D^p \phi(x)| \ , \qquad D^p = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_m^{p_m}} \ , \tag{2.3.2}$$

onde $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ é uma m-upla de inteiros não negativos e $|p| = p_1 + p_2 + \ldots + p_m$ define a ordem da derivada. Seja agora U uma união de conjuntos compactos K_i que geram uma família crescente $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$, tal que cada K_i está no interior de cada K_{i+1}. A existência desta família é assegurada pelo Lema 10.1 de [44]. Portanto, temos $C_0^{\infty}(U \subset \mathbb{R}^N)$ como $\bigcup_i C_{K_i}^{\infty}(U \subset \mathbb{R}^N)$. Tomamos a topologia de $C_0^{\infty}(U \subset \mathbb{R}^N)$ dada então pelo limite indutivo estrito da topologia das sequências $\{C_{K_i}^{\infty}(U \subset \mathbb{R}^N)\}$. Ou de outra forma, devemos definir uma convergência em $C_0^{\infty}(U \subset \mathbb{R}^N)$ de uma sequência de funções $\{\phi_k\}$ para garantir que para cada k, temos supp $\phi_k \subset K \subset U \subset \mathbb{R}^N$ tal que para uma função $\phi \in C_0^{\infty}(U \subset \mathbb{R}^N)$ temos $\|\phi - \phi_k\|_{K,m} \to 0$ quando $k \to \infty$. Esta noção de convergência gera a topologia que torna o espaço $C_0^{\infty}(U \subset \mathbb{R}^N)$ um espaço topológico vetorial.

Seja F e E espaços de funções suaves de suporte compacto definidas em $U \subset \mathscr{G}_L^{m,0}$ e $U \subset \mathbb{R}^N$, respectivamente. Se $\lambda : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ é um functorial que associa a cada função suave de suporte compacto em E, uma função suave de suporte compacto em F, então temos o mapa

$$\|\phi\|_{K,m} \longrightarrow \|\lambda(\phi)\|_{K,m} \ , \tag{2.3.3}$$

fornecendo à $G_0^{\infty}(U, \mathscr{G}_L)$ uma topologia limite induzida por uma famíia finita de normas.

Agora apresentamos um resultado devido à Jadczyk-Pilch [27], mais tarde refinado por Hoyos et al [29], que estabelece como domínio natural de definição para funções supersuaves um conjunto da forma $\epsilon^{-1}(\Omega)$, onde Ω é um aberto em $\mathbb{R}^m$. Seja $\epsilon^{-1}(\Omega)$ o domínio de definição para uma superfunção $f \in G_0^{\infty}(\epsilon^{-1}(\Omega), \mathscr{G}_L)$, com $\epsilon^{-1}(\Omega)$ sendo um subconjunto aberto em $\mathscr{G}_L^{m,0}$ e Ω sendo por sua vez aberto em $\mathbb{R}^m$, tendo $\widetilde{\phi} \in C_0^{\infty}(\Omega, \mathscr{G}_L)$ como a restrição de ϕ para $\Omega \subset \mathbb{R}^m \subset \mathscr{G}_L^{m,0}$, segue-se que $(\partial_1^{p_1} \cdots \partial_m^{p_m} \phi)\widetilde{\ }\partial_1^{p_1} \cdots \partial_m^{p_m} \widetilde{\phi}$, onde as derivadas sobre o lado direito incidem nas m variáveis reais. Suponha agora que $\Omega = \bigcup_i \widetilde{K}_i$ onde cada $\widetilde{K}_i$ é um aberto e possui um fecho compacto em $\widetilde{K}_{i+1}$. Portanto $C_0^{\infty}(\Omega, \mathscr{G}_L) = \bigcup_i C_{\widetilde{K}_i}^{\infty}(\Omega, \mathscr{G}_L)$. Desta forma, podemos dotar $C_0^{\infty}(\Omega, \mathscr{G}_L)$ de uma topologia limite finita induzida pela famílias de normas [34]

$$\|\widetilde{\phi}\|_{\widetilde{K},m} = \sup_{\substack{|p|\leq m \\ x\in \widetilde{K}}} |D^p \widetilde{\phi}(x)| = \sup_{\substack{|p|\leq m \\ x\in \widetilde{K}}} \left\{ \sum_{(\mu_1,\ldots,\mu_k)\in M_L^0} |D^p \widetilde{\phi}_{\mu_1,\ldots,\mu_k}(x)| \right\} \ . \tag{2.3.4}$$

Finalmente, uma estrutura topológica adequada para o espaço $G_0^{\infty}(U, \mathscr{G}_L)$ de superfunções de suporte compacto com valores em $\mathscr{G}_L$ sobre um conjunto aberto $U \subset \mathscr{G}_L^{m,n}$ é obtida via uma identificação natural de $\mathscr{G}_L^{m,n}$ com $\mathbb{R}^{2^{L-1}(m+n)}$ e por uma extensão óbvia da construção acima, que nos permite definir novamente uma topologia limite induzida para espaço $G_0^\infty(U, \mathscr{G}_L)$ pela família de normas seguintes

$$\|\lambda(\phi)\|_{K,m+n} = \sup_{\substack{|p|\leq m+n \\ z\in K}} |D^p(\lambda(\phi))(z)| \;, \qquad D^p = \frac{\partial^{|q|+|r|}}{\partial x_1^{q_1}\cdots\partial x_m^{q_m}\partial\theta_1^{r_1}\cdots\partial\theta_n^{r_n}} \;. \tag{2.3.5}$$

As derivadas $\partial^{|q|}/\partial x_1^{q_1}\cdots\partial x_m^{q_m}$ comutam, à medida que $\partial^{|r|}/\partial\theta_1^{r_1}\cdots\partial\theta_n^{r_n}$ anti-comutam, e $|p| = |q| + |r| = \sum_{i=1}^m q_i + \sum_{j=1}^n r_j$ determina a ordem total da derivada, com $r_j = 0, 1$.

Agora temos condições para definir uma superdistribuição em um subconjunto aberto U de $\mathscr{G}_L^{m,n}$. O conjunto de todas superdistribuições em U será denotado por $\mathfrak{D}'(U)$. Uma superdistribuição é um funcional linear e contínuo $u : G_0^\infty(U) \to \mathscr{G}_L$, onde $G_0^\infty(U)$ representa o espaço de superfunções testes de funções $G^\infty(U)$ com seu suporte compacto definido em $K \subset U$. A condição de continuidade de u em $G_0^\infty(U)$ é equivalente a dizer que ela é limitada em uma vizinhança da origem, ou seja, o conjunto de números $u(\phi)$ é limitado para todo $\phi \in G_0^\infty(U)$. Assim, estas considerações nos permite escrever:

Proposição 2.3.1. *Seja u um funcional em $U \in \mathscr{G}_L^{m,n}$. Então se u é um funcional linear e contínuo (ou uma superdistribuição) sobre $G_0^\infty(U)$ temos que para todo conjunto compacto $K \subset U$, existe uma constante C e $(m+n)$ tal que*

$$|u(\phi)| \leq C \sup_{\substack{|p|\leq m+n \\ z\in K}} |D^p(\phi)(z)| \;, \quad \phi \in G_0^\infty(K) \;.$$

Prova. Primeiramente, note que $\mathscr{G}_L$ pode ser identificado com $\mathbb{R}^{2^{L-1}}$ [38]. De fato, um sistema numérico assumindo valores em uma álgebra de Grassmann com L geradores é especificado por 2^{L-1} parâmetros reais. Seja F e E espaços de funções suaves com suporte compacto em $K \subset U \subset \mathscr{G}_L^{m,n}$ e $K \subset U \subset \mathbb{R}^{2^{L-1}(m+n)}$, respecivamente. Se temos uma relação functorial $\lambda : \mathsf{F} \to \mathsf{E}$ e um funcional linear $\widetilde{u} : \mathsf{E} \to \mathbb{R}^{2^{L-1}}$, podemos compor λ com $\widetilde{u}$ para obter a "pullback" de $\widetilde{u}$ por λ ou de outra, forma, $u = \lambda^*\widetilde{u} = \widetilde{u}\circ\lambda$ e então temos um funcional linear $\lambda^*\widetilde{u} : \mathsf{F} \to \mathbb{R}^{2^{L-1}}$. Assim a colocação acima se verifica se $\widetilde{u}$ é contínua em E.

2.3.2 Distribuições sobre uma Supervariedade

Nesta seção realizaremos a extensão dos resultados básicos sobre superdistribuições em espaço plano para uma supervariedade geral. Aqui seguimos uma linha de raciocínio em analogia à traçada por Hörmander [30], observe que esta analogia se baseia fortemente na propriedade de diferenciabilidade G^∞ para superdistribuições.

Definição 2.3.2. *Seja $\mathscr{M}$ uma supervariedade G^∞. Para cada sistema de coordenadas $p_i \circ k_\alpha$ em $\mathscr{M}$ temos uma distribuição $u_{k_\alpha} \in \mathfrak{D}'(\widetilde{X}_\alpha)$ onde $\widetilde{X}_\alpha$ é um aberto de $\mathscr{G}_L^{m,n}$ tal que*

$$u_{k_\beta} = \{(p_i \circ k_\alpha) \circ (k_\beta^{-1} \circ p_i^{-1})\}^* u_{k_\alpha} \ , \quad (i = 1, \ldots, m+n) \ , \tag{2.3.6}$$

em $k_\beta(X_\alpha \cap X_\beta)$, onde p_i é uma projeção em cada cópia (i) de $\mathscr{G}^{m,n}$, tal que $x_i = p_i \circ k_\alpha$ e $y_j = p_{j+m} \circ k_\alpha$, com $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$. Chamamos o sistema u_{k_α} de distribuição u em $\mathscr{M}$. O conjunto de toda distribuição em $\mathscr{M}$ será denotado por $\mathfrak{D}'(\mathscr{M})$.

Teorema 2.3.3. *Seja $\widetilde{X}_\alpha, \alpha \in I$, uma família arbitrária de conjuntos abertos em $\mathscr{G}_L^{m,n}$, e estabelecemos $\widetilde{X} \bigcup_{\alpha \in I} \widetilde{X}_\alpha$. Se $u_\alpha \in \mathfrak{D}'(\widetilde{X}_\alpha)$ e $u_\alpha = u_\beta$ em $(\widetilde{X}_\alpha \cap \widetilde{X}_\beta)$ para toda $\alpha, \beta \in I$, então existe um, e somente um $u \in \mathfrak{D}'(\widetilde{X})$ tal que u_α é a restrição de u em $\widetilde{X}_\alpha$ para todo α.*

Antes de demonstrar o teorema, citaremos o seguinte resultado:

Lema 2.3.4. *Sejam $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_k$ conjuntos abertos em $\mathscr{G}_L^{m,n}$ e $\phi \in G_0^\infty(\bigcup_1^k \widetilde{X}_\alpha)$. Podemos então encontrar $\phi_\alpha \in G_0^\infty(\widetilde{X}_\alpha), \alpha = 1, \ldots, k$, tal que $\phi = \sum_1^k \phi_\alpha$ e se $\phi \geq 0$ então podemos assumir todos $\phi_\alpha \geq 0$.*

Prova. É possível escolher conjuntos compactos $K_1, \ldots, K_k$ com $K_\alpha \subset \widetilde{X}_\alpha$, de forma que os supp $\phi \subset \bigcup_1^k K_\alpha$. Todo ponto em supp ϕ possui uma vizinhança compacta contida em algum $\widetilde{X}_\alpha$, um número finito de tais vizinhanças pode ser escolhido como uma cobertura para supp ϕ. A união daquelas que pertecem à X_α é um conjunto compacto $K_\alpha \subset \widetilde{X}_\alpha$. Se $\widetilde{X}$ é um conjunto aberto $\mathscr{G}_L^{m,n}$ e K é um subconjunto compacto, então podemos ter $\phi \in G_0^\infty(\widetilde{X})$ com $0 \leq \phi \leq 1$ tal que $\phi = 1$ em uma vizinhança de K. Assim, escolhemos $\psi_\alpha \in G_0^\infty(\widetilde{X}_\alpha)$ com $0 \leq \psi_\alpha \leq 1$ e $\psi_\alpha = 1$ em K_α, de forma que as funções:

$$\phi_1 = \phi\psi_1, \phi_2 = \phi\psi_2(1-\psi_1), \ldots, \phi_k\phi\psi_k(1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{k-1}) \ .$$

possuem a propriedade exigida, visto que

$$\sum_1^k \phi_\alpha - \phi = -\phi \prod_1^k (1-\psi_\alpha) = 0 \ ,$$

porque ϕ ou algum $1 - \psi_\alpha$ é nulo em todo qualquer ponto. ∎

Corolário 2.3.5. *Seja $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_k$ conjuntos abertos em $\mathscr{G}_L^{m,n}$ e K um subconjunto compacto $\subset \widetilde{X}_\alpha$. Temos então $\phi_\alpha \in G_0^\infty(\widetilde{X}_\alpha)$ tal que $\phi_\alpha \geq 0$ e $\sum_1^k \phi_\alpha \leq 1$ onde a igualdade vale na vizinhança de K.*

Prova do Teorema 2.3.3. Se u é uma distribuição, então:

$$u(\phi) = \sum u_\alpha(\phi_\alpha) \ , \quad \text{se} \quad \phi = \sum \phi_\alpha \quad (\text{onde } \phi_\alpha \in G_0^\infty(\widetilde{X}_\alpha)) \ ,$$

e a soma é finita. Pelo Lema 2.3.4, todo $\phi \in G_0^\infty(\widetilde{X})$ pode ser escrito como uma soma. Se $\sum \phi_\alpha = 0 \Rightarrow \sum u_\alpha(\phi_\alpha) = 0$, concluímos que $\sum u_\alpha(\phi_\alpha)$ é independente da forma que a soma é escolhida. Seja $K = \bigcup \operatorname{supp} \phi$ um conjunto compacto $K \subset \widetilde{X}$ e usando o Corolário 2.3.5, escolhemos $\psi_\beta \in G_0^\infty(\widetilde{X}_\beta)$ tal que $\sum \psi_\beta = 1$ em K e a soma é finita. Então $\psi_\beta\phi_\alpha \in G_0^\infty(\widetilde{X}_\alpha \cap \widetilde{X}_\beta)$ e $u_\alpha(\psi_\beta\phi_\alpha)u_\beta(\psi_\beta\phi_\alpha)$ e consequentemente

$$\sum u_\alpha(\phi_\alpha) = \sum\sum u_\alpha(\phi_\alpha\psi_\beta) \sum\sum u_\beta(\phi_\alpha\psi_\beta) \sum u_\beta(\psi_\beta \sum \phi_\alpha) = 0 \ .$$

Mostramos assim que se $\sum \phi_\alpha = 0 \Rightarrow \sum u_\alpha(\phi_\alpha)$ é nulo, então u é único. Para mostrar que u é uma distribuição, escolhe-se um conjunto compacto $K \subset \widetilde{X}$ e uma função $\psi_\beta \in G_0^\infty(\widetilde{X}_\beta)$ com $\sum \psi_\beta = 1$ em K com a soma finita. Se $\phi \in G_0^\infty(K)$ temos $\phi = \sum \phi\psi_\beta$ onde $\phi\psi_\beta \in G_0^\infty(\widetilde{X}_\beta)$ tal que a primeira equação nesta prova nos fornece

$$u(\phi) = \sum u_\beta(\phi\psi_\beta)$$

mas, se u_β é uma distribuição, temos:

$$|u_\beta(\phi\psi_\beta)| \leq C \sup_{\substack{|p| \leq m+n \\ z \in K}} |D^p(\phi\psi_\beta)(z)| \ , \quad \phi\psi_\beta \in G_0^\infty(\widetilde{X}_\beta)$$

onde $\sup D^p\phi$ pode ser estimado em termos de ϕ e portanto podemos concluir que

$$|u(\phi)| \leq C \sup_{\substack{|p| \leq m+n \\ z \in K}} |D^p\phi(z)| \ , \quad \phi \in G_0^\infty(K) \ .$$

Finalizamos assim a demostração.

Teorema 2.3.6. *Seja $\mathfrak{F}$ um atlas para $\mathscr{M}$. Se para todo $p_i \circ k \in \mathfrak{F}$ temos uma distribuição $u_k \in \mathfrak{D}'(\widetilde{X}_k)$ e a Definição 2.2.2 vale sempre que $p_i \circ k$ e $p_i' \circ k'$ pertencem à $\mathfrak{F}$, então existe uma, e somente uma distribuição $u \in \mathfrak{D}'(\mathscr{M})$ tal que $u \circ (k^{-1} \circ p_i^{-1}) = u_k$ para todo $p_i \circ k \in \mathfrak{F}$.*

Prova. Seja $\psi \in G^\infty$ um sistema de coordenadas em $\mathscr{M}$. O Teorema 2.3.3 estabelece que existe uma, e somente uma distribution $U_\psi \in \mathfrak{D}'(\widetilde{X}_\psi)$ de forma que para todo $p_i \circ k$, $U_\psi = ((p_i \circ k) \circ \psi^{-1})^* u_k$ em $\psi(X_\psi \cap X_k) \subset \widetilde{X}_\psi$. Se $\psi \in \mathfrak{F} \to U_\psi = u_\psi$, podemos escolher $p_i \circ k = \psi$. Agora, definimos u como uma distribuição, desde que U_ψ satisfaz (2.3.6) para ambos os sistemas de coordenadas $p_i \circ k$ e $p_i' \circ k'$.

2.4 Conjunto de Frente de Ondas de uma Superdistribuição

Um importante progresso no entendimento do significado da forma de Hadamard reporta-se ao conceito de Hörmander para conjuntos de frente de ondas e análise microlocal [8], principalmente quando aplicados em funções de dois pontos. Como vimos, uma função deste tipo satisfaz a condição de Hadamard se seu conjunto de frente de ondas contém somente frequências positivas propagando para futuro e frequências negativas propagando para o passado.

Nesta seção o foco principal será a extensão da descrição dada por Hörmander para a estrutura de singularidade (conjunto de frente de ondas) de uma distribuição com objetivos de incluir o caso supersimétrico. O resultado (que vem a ser intuitivamente lugar-comum na literatura) de que as singularidades das superdistribuições devem ser expressas de uma maneira simples através das distribuições ordinárias é apresentado via métodos de análise funcional, em particular, métodos de análise microlocal formulados na linguagem do superespaço.

Na literatura, é conhecido que a estrutura de singularidade das superfunções de Feynman (e mais precisamente, de Wightman) é inteiramente associada com o setor "bosônico" do superespaço. Muito embora se afirma que o resultado é óbvio, não é encontrado na literatura um formalismo analítico onde a demonstração matemática é apresentada de forma clara. De fato, existe uma certa lacuna na literatura entre as apresentações usuais com respeito a estrutura de singularidade das superfunções e um tratamento matemático mais refinado, completo e natural para o assunto, como no caso da análise microlocal. A proposta desta seção é de preencher esta lacuna. Estudando detalhadamente as propriedades de singularidade das superdistribuições, estabelecemos como que as características de decaimento de uma distribuição também são estendidas para o caso de uma superdistribuição, o que é evidentemente um resultado desejável.

Lema 2.4.1. *Seja $X \subset \mathscr{G}_L^{m,0}$ um conjunto aberto e u uma superdistribuição em X tomando valores em $\mathscr{G}_L$, ou seja, um funcional linear $u : G_0^\infty(X) \to \mathscr{G}_L$. Seja também ϕ uma função supersuave de suporte compacto $K \subset X$. Então ϕu é também supersuave em K, se suas componentes $(\phi u)(\epsilon(x))$ são suaves em um conjunto compacto $K' \subset \Omega$, onde Ω é o corpo do superespaço. Portanto, a estimativa seguinte é garantida:*

$$\left|\widehat{\phi u}(k)\right| \leq (1 + |k_{\mathrm{b}}|)^{-N} C(N, \phi)\ .$$

Indicação de Prova. Um esquema de prova pode ser construído em analogia à linha sugerida por DeWitt [26]: a partir da Definição 2.2.4 segue que as funções de x estão em correspondência um-para-um com as funções de $x_{\mathbf{b}}$; isto implica que quando trabalhamos sobre $\mathscr{G}_L^{m,0}$, podemos de forma geral proceder como se estivéssemos trabalhando sobre o corpo do superespaço, $\Omega = \{(x,0,0) \in X \mid \epsilon(x) \in \mathbb{R}^m\}$. Visto que $\phi u(x)$ desaparece no infinito, independente de sua alma, o contorno em $\mathscr{G}_{L,0}^m$ pode ser deslocado para coincidir com Ω, sem afetar o valor da integral. Então, a teoria das transfomadas de Fourier permanece inalterada em sua forma. Por motivos de simplicidade, tomemos o caso tal que $s(x) = (x - \epsilon(x))$ é uma função suave de valor único de $\epsilon(x) = x_{\mathbf{b}}$ e $L = 2$ é o número de geradores de $\mathscr{G}_2^{1,0}$. Temos então que

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi u}(k) &= \int dx\ e^{ikx}\phi u(x) \\
&= \int dx_{\mathbf{b}}\ e^{ik_{\mathbf{b}}x_{\mathbf{b}}}\left(\phi u(x_{\mathbf{b}}) + i\, x_{\mathbf{b}}\phi u(x_{\mathbf{b}})k_{ij}\xi^i\xi^j\right) \\
&= \widehat{\phi u}(k_{\mathbf{b}}) + (\widehat{\phi u})'(k_{\mathbf{b}})k_{ij}\xi^i\xi^j\ .
\end{aligned}$$

Podemos ver que isto é possível fazendo uso de integrais por parte repetidamente e generalizando o fato de que $-i\, k_{\mathbf{b}}{}^{-1}\left(\frac{d}{dx_{\mathbf{b}}}\, e^{ik_{\mathbf{b}}x_{\mathbf{b}}}\right) = e^{ik_{\mathbf{b}}x_{\mathbf{b}}}$

$$\widehat{\phi u}(k) = \frac{(i)^{|\beta|}}{k_{\mathbf{b}}^{\beta}}\left\{\int dx_{\mathbf{b}}\ e^{-ik_{\mathbf{b}}x_{\mathbf{b}}}\left(D_{x_{\mathbf{b}}}^{\beta}(\phi u(x_{\mathbf{b}})) + D_{x_{\mathbf{b}}}^{\beta}(x_{\mathbf{b}}\phi u(x_{\mathbf{b}}))k_{ij}\xi^i\xi^j\right)\right\}\ .$$

Tomando o valor absoluto de ambos os lados e usando as propriedades oferecidas pela álgebra de Banach de $\mathscr{G}_L$, podemos estimar:

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{\phi u}(k)\right| &\leq \left|\widehat{\phi u}(k_{\mathbf{b}})\right| + \left|(\widehat{\phi u})'(k_{\mathbf{b}})\right||k_{ij}| \\
&\leq (1+|k_{\mathbf{b}}|)^{-|\beta|}\left(\sup_{\substack{|\beta|\leq m\\ x_{\mathbf{b}}\in K'}}|D_{x_{\mathbf{b}}}^{\beta}(\phi u(x_{\mathbf{b}}))| + \sup_{\substack{|\beta|\leq m\\ x_{\mathbf{b}}\in K'}}|D_{x_{\mathbf{b}}}^{\beta}(x_{\mathbf{b}}\phi u(x_{\mathbf{b}}))|\,|k_{ij}|\right)\ . \qquad (2.4.1)
\end{aligned}$$

Portanto, para que (2.4.1) seja suave, precisamos somente que $\widehat{\phi u}(k)$ decresce rapidamente com $|k_{\mathbf{b}}| \to \infty$. A demonstração pode ser generalizada para incluir o caso onde $s(x)$ é uma função do corpo multivalorada e L é arbitrariamente finito. Finalizamos aqui observando que, com se é pretendido, a parte da alma de k possui um comportamente polinomial. ∎

Lema 2.4.2. *Substituindo $\mathscr{G}_L^{m,0}$ por $\mathscr{G}_L^{m,n}$ na Lema 2.4.1, podemas estabelecer:*

$$\left|\widehat{\phi u}(k,\theta,\bar{\theta})\right| \leq (1+|k_{\mathbf{b}}|)^{-N}C(N,\phi_{(\gamma)})\|\theta_1\|\|\bar{\theta}_1\|\cdots\|\theta_n\|\|\bar{\theta}_n\|\ .$$

Prova. Primeiramente, notamos que ambas as superfunções u e ϕ são G^∞ e que podem ser expandidas polinomialmente em coordenadas ímpares cujos coeficientes são funções definidas sobre as coordenadas pares,

$$u(x,\theta,\bar{\theta}) = \sum_{(\gamma)=0}^{\Gamma} z(u_{(\gamma)})(x)(\theta)^{(\gamma)} \quad \text{e} \quad \phi(x,\theta,\bar{\theta}) = \sum_{(\gamma)=0}^{\Gamma} z(\phi_{(\gamma)})(x)(\theta)^{(\gamma)} \ .$$

A prova se segue essencialmente por argumentos similares aos apresentados na prova do lema antecedente, levando-se em conta o comportamento polinomial das variáveis ímpares, θ e $\bar{\theta}$. De fato, $\phi u(x,\theta,\bar{\theta})$ é uma função *linear* em cada coordenada ímpar separadamente, tendo em vista que cada coordenada deste tipo é nilpotente, e consequentemente nenhuma potência de grau mais alto de uma coordenada ímpar pode aparecer, ou seja, $\phi u(x,\theta,\bar{\theta})$ é uma série absolutamente convergente com respeito à norma de Rogers $\|\cdot\|_1$.[4] Isto posto, podemos afirmar que apenas tomando a transformada de Fourier de $\phi u(x,\theta,\bar{\theta})$, sobre as variáveis pares, deve ser suficiente para inferir as propriedades de suavidade de $\phi u(x,\theta,\bar{\theta})$:

$$\begin{aligned}\widehat{\phi u}(k,\theta,\bar{\theta}) &= \sum_{(\gamma)=0}^{\Gamma} \sum_{(\mu)=0}^{L} (\widehat{\phi u})_{(\gamma),(\mu)}(k_{\mathbf{b}})(\xi)^{(\mu)}(\theta)^{(\gamma)} \\ &= \sum_{(\gamma)=0}^{\Gamma} \left[\int dx_{\mathbf{b}}\ e^{ik_{\mathbf{b}}x_{\mathbf{b}}} \left((\phi u)_{(\gamma)}(x_{\mathbf{b}}) + i\, x_{\mathbf{b}} (\phi u)_{(\gamma)}(x_{\mathbf{b}}) k_{ij} \xi^i \xi^j + \cdots \right) \right] (\theta)^{(\gamma)} \,. \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

então, tomando o valor absoluto de ambos os lados de (2.4.2), obtemos das propriedades da álgebra de Banach de $\mathscr{G}_L$ e para cada inteiro N a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\phi u}(k,\theta,\bar{\theta})\right| &= \left| \sum_{(\gamma)=0}^{\Gamma} \sum_{(\mu)=0}^{L} (\widehat{\phi u})_{(\gamma),(\mu)}(k_{\mathbf{b}})(\xi)^{(\mu)}(\theta)^{(\gamma)} \right| \\ &\leq \sum_{(\gamma)=0}^{\Gamma} \sum_{(\mu)=0}^{L} \left| (\widehat{\phi u})_{(\gamma),(\mu)}(k_{\mathbf{b}}) \right| \, \|(\theta)^{(\gamma)}\| \\ &\leq (1+|k_{\mathbf{b}}|)^{-N} C(N,\phi_{(\gamma)}) \|\theta_1\| \|\bar{\theta}_1\| \cdots \|\theta_n\| \|\bar{\theta}_n\| \ , \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

do qual se segue o lema.

Portanto, o setor ímpar do superespaço não pode produzir nenhum efeito sobre a estrutura de singularidade de u. Combinando os resultados alcançados, estabelecemos:

[4] Realmente, $\phi u(x,\theta,\bar{\theta})$ é analítica nas coordenadas ímpares.

Teorema 2.4.3. *As singularidades de uma superdistribuição u estão localizadas em valores específicos do corpo de x: as coordenadas do* **espaço tempo físico**, *independentemente das coordenadas ímpares.* ∎

Podemos de forma geral, resumir toda discurssão no que se segue:

Definição 2.4.4 (Conjunto de Frente de Ondas de uma Superdistribuição). *O conjunto de frente de onda $WF(u)$ de uma distribuição u em um superespaço $\mathscr{M}$ é o complemento do conjunto formado por todos os pontos de direção regular no fibrado cotangente $T^*\mathscr{M}_0$, onde $\mathscr{M}_0 = \epsilon(\mathscr{M})$ é o corpo do superespaço, provindo da construção referida na seção 2.1.1, excluindo o ponto trivial $k_{\mathbf{b}} = 0$.*

Existe uma versão mais precisa da Definição 2.4.4. Todas as definições e afirmações estabelecidas sobre supervariedades podem, de certa forma, serem convertidas em suas definições e afirmações correspondentes sobre variedades ordinárias, uma vez que existe uma família de variedades ordinárias, de dimensões $N = 2^{L-1}(m+n)$, associadas com uma supervariedade $\mathscr{M}$ cuja dimensão é (m, n) , $(L = 1, 2, \ldots)$. A variedade resultante é chamada de L-ésimo esqueleto de $\mathscr{M}$ e é denotada por $\mathbb{S}_L(\mathscr{M})$ [26]. Com a ajuda da família de esqueletos definimos o "pushforward" (ou imagem direta) de uma superdistribuição. Seja $X \subset \mathbb{S}_L(\mathscr{M})$ e $Y \subset \mathscr{M}_0$ conjuntos abertos e seja ϵ a projeção natural de $\mathbb{S}_L(\mathscr{M})$ (ou $\mathscr{M}$) em $\mathscr{M}_0$, o mapa de corpo. Se introduzirmos coordenadas locais $x = (x_1, \ldots, x_N)$ em X, então Y é definido por $x_{\mathbf{b}} = (x_1, \ldots, x_m)$. Existe uma relação local entre o corpo e os esqueletos dada por:

$$\mathbb{S}_L(X) \stackrel{\text{dif.}}{=} Y \times \mathbb{R}^{2^{L-1}(m+n)-m} \ .$$

Seja agora u uma superdistribuição sobre X, então o "pushforward" $\epsilon_* u$ definido por $\epsilon_* u(\varphi) = u(\epsilon^* \varphi)$, $\varphi \in C_0^\infty(Y)$, é uma superdistribuição sobre Y. Estabelecemos portanto o que se segue, fazendo uso destes conceitos:

Corolário 2.4.5. *Seja $\epsilon : X \subset \mathbb{S}_L(\mathscr{M}) \to Y \subset \mathscr{M}_0$ a projeção corpo, e seja $u \in \mathfrak{D}'(X)$. Então*

$$WF(\epsilon_* u) \subset \{(x_{\mathbf{b}}, k_{\mathbf{b}}) \in T^*\mathscr{M}_0 \backslash 0 \mid \exists\, x' = (x_{m+1}, \ldots, x_{N'}), (x_{\mathbf{b}}, x', k_{\mathbf{b}}, 0) \in WF(u)\} \ ,$$

onde $N' = 2^{L-1}(m+n) - m$.

Prova. Se $x = (x_{\mathbf{b}}, x')$, onde $x_{\mathbf{b}} \in Y$, $x' \in \mathbb{R}^{N'}$ e $\epsilon : X \to Y$ é o mapa de corpo, então a matriz Jacobiana é da forma $\epsilon'_x = (1, 0)$ e a afirmação segue-se do Teorema 1.4.3. Portanto, em qualquer superespaço $\mathscr{M}$ e corpo do superespaço $\mathscr{M}_0$, as singularidades de uma superdistribuição $\epsilon_* u$ estão localizadas de modo natural no conjunto das projeções daqueles pontos do conjunto de frente de ondas da superdistribuição u onde as direções singulares são paralelas ao eixo $x_{\mathbf{b}}$.

Exemplo. Para o modelo de Wess-Zumino, o qual consiste de um supercampo quiral Φ em uma auto-interação, os superpropagadores de Feynman, num superespaço plano, são (ver Apêndice A):

$$\begin{aligned}
&\Delta^{\mathrm{F}}_{\Phi\Phi}(x,\theta,\bar{\theta};x',\theta',\bar{\theta}') = -i\,m\delta^2(\theta-\theta')e^{i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}-\theta'\sigma^\mu\bar{\theta}')\partial_\mu}\Delta_{\mathrm{F}}(x-x') \ , \\
&\Delta^{\mathrm{F}}_{\Phi\bar{\Phi}}(x,\theta,\bar{\theta};x',\theta',\bar{\theta}')e^{i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}+\theta'\sigma^\mu\bar{\theta}'-2\theta\sigma^\mu\bar{\theta}')\partial_\mu}\Delta_{\mathrm{F}}(x-x') \ , \qquad (2.4.4) \\
&\Delta^{\mathrm{F}}_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}}(x,\theta,\bar{\theta};x',\theta',\theta')i\,m\delta^2(\bar{\theta}-\bar{\theta}')e^{-i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}-\theta'\sigma^\mu\bar{\theta}')\partial_\mu}\Delta_{\mathrm{F}}(x-x') \ ,
\end{aligned}$$

onde $\delta^2(\theta-\theta') = (\theta-\theta')^2$, com x, θ, θ tendo a forma (2.2.2) e (2.2.3), respectivamente. De acordo com a análise presente, o conjunto de frente de ondas dos superpropagadores pode ser descrito como:

$$WF(\Delta^{\mathrm{F}}_{\mathrm{susy}})\{(x_{\mathbf{b}},k_{\mathbf{b}};x'_{\mathbf{b}},-k'_{\mathbf{b}};x,0;x',0) \mid (x_{\mathbf{b}},k_{\mathbf{b}};x'_{\mathbf{b}},-k'_{\mathbf{b}}) \in WF(\Delta^{\mathrm{F}}_{\mathrm{susy}}|_{\mathscr{M}_0})\} \ ,$$

onde susy $= (\Phi\Phi; \bar{\Phi}\Phi; \bar{\Phi}\bar{\Phi})$, $x = (x_{m+1},\ldots,x_{N'})$, $x' = (x'_{m+1},\ldots,x'_{N'})$, $\Delta^{\mathrm{F}}_{\mathrm{susy}}|_{\mathscr{M}_0} \equiv \epsilon_*\Delta^{\mathrm{F}}_{\mathrm{susy}}$ é a imagem direta dos superpropagadores de Feynman no corpo do superespaço, e $WF(\Delta^{\mathrm{F}}_{\mathrm{susy}}|_{\mathscr{M}_0}) \subset O \cup D$ [8], com a região fora da diagonal dada por

$$O = \left\{(x_{\mathbf{b}},k_{\mathbf{b}};x'_{\mathbf{b}},-k'_{\mathbf{b}}) \in T^*\mathscr{M}_0^2 \mid (x_{\mathbf{b}},k_{\mathbf{b}}) \sim (x'_{\mathbf{b}},k'_{\mathbf{b}}), x_{\mathbf{b}} \neq x'_{\mathbf{b}}, k_{\mathbf{b}} \in V_+ \text{ se } x_{\mathbf{b}} \in J_\pm(x'_{\mathbf{b}})\right\},$$

onde a relação de equivalência $(x_{\mathbf{b}},k_{\mathbf{b}}) \sim (x'_{\mathbf{b}},k'_{\mathbf{b}})$ significa que existe uma geodésica tipo luz γ conectando $x_{\mathbf{b}}$ e $x'_{\mathbf{b}}$, tal que no ponto $x_{\mathbf{b}}$, o covetor $k_{\mathbf{b}}$ é tangente a γ e $k'_{\mathbf{b}}$ é o vetor transportado paralelamente ao longo da curva γ até $x'_{\mathbf{b}}$, que é por sua vez tangente a γ.

A região diagonal é dada por:

$$D - \left\{(x_{\mathbf{b}},k_{\mathbf{b}};x_{\mathbf{b}},-k_{\mathbf{b}}) \in T^*\mathscr{M}_0^2\backslash 0 \mid x_{\mathbf{b}} \in \mathscr{M}_0, k_{\mathbf{b}} \in T^*\mathscr{M}_0^2\backslash 0\right\} .$$

Por esta razão, os propagadores de Feynman são singulares somente para os pares de pontos no corpo do superespaço que podem ser conectados por uma geodésica tipo luz.

Finalizamos esta seção reforçando aqui o uso da principal lição provinda da análise microlocal para o caso abordado, ou seja, aquela pela qual podemos saber como o conjunto de frente de ondas de superdistribuições em uma supervariedade $\mathscr{M}$ pode se conseguido a partir do conjunto de frente de ondas sobre conjuntos abertos de $\mathscr{G}_L^{m,n}$. Tal extensão é alcançada em analogia ao caso ordinário. Seja $\mathscr{O}$ uma vizinhança aberta de $z \in \mathscr{M}$, que assumimos sem perdas de generalidades ser coberta por um único caminho de coordenada ("single coordinate patch"), e seja $u \in \mathfrak{D}'(\mathscr{O})$ uma supedistribuição. Então existe um difeomorfismo $\chi : \mathscr{O} \to U \subset \mathscr{G}_L^{m,n}$, tal que $\chi^* u \in \mathfrak{D}'(U)$ é uma superdistribuição "pulled back" por χ. Assim $WF(\chi^* u) = \chi^* WF(u)$. Agora, considere ϕ uma função supersuave de suporte compacto em $\mathscr{O}$ com $\phi(z) \neq 0$. Devemos sempre ter em mente que cada componente $\phi_{(\gamma)}(\epsilon(x))$ de $\phi(z)$ é uma função suave e de suporte contido em $\mathscr{O}_{\mathrm{b}}$, onde $\mathscr{O}_{\mathrm{b}}$ denota uma vizinhança aberta de $x_{\mathrm{b}} \in \mathscr{M}_0$. Portanto, a superdistribuição $u\phi$ pode ser vista como uma superdistribuição em $\mathscr{G}_L^{m,n}$ que tem suporte compacto, e dado que não existe pontos singulares pertencentes ao $WF(u)$, a transformada de Fourier $\widehat{u\phi}$ de $u\phi$ é bem definida como uma supedistribuição em $\mathscr{G}_L^{m,n}$ e satisfaz o Lema 2.4.2.

2.5 *Formalismo Algébrico sobre uma Supervariedade*

Nesta seção pretendemos discutir o formalismo algébrico de modo a incluir a supersimetria via a análise, agora, em supervariedades. Esta formulação (em supervariedades) pode ser construída sem muitos obstáculos técnicos, uma vez que a construção das álgebras de observáveis não depende *a priori*da variedade escolhida. Descreveremos uma teoria de campo em uma supervariedade geral como uma formulação estendida da teoria ordinária em espaço curvo. Uma álgebra de observável pode ser gerada a partir de $\Phi_{\mathrm{sd}}(f_{\mathrm{sf}})$, onde Φ_{sd} são superdistribuições (ou supercampos) e f_{sf} superfunções testes. Uma superálgebra completa é representada por $\mathfrak{A}_{\mathrm{sa}} = \bigcup_{\mathscr{O}} \mathfrak{A}_{\mathrm{sa}}(\mathscr{O})$, onde $\mathfrak{A}_{\mathrm{sa}}$ denota a superálgebra, com $\mathscr{O} \subset \mathscr{M}$ denotando uma região aberta limitada em uma supervariedade $\mathscr{M}$. Devemos então garantir que para toda região aberta limitada $\mathscr{O}$ em $\mathscr{M}$ as seguintes propriedades são satisfeitas:

P.1 Todas $\mathfrak{A}_{\mathrm{sa}}(\mathscr{O})$ são superálgebras $*$ contendo um elemento idemidade comum, onde a seguinte propriedade, chamada isotonia, vale:

$$\mathscr{O}_1 \subset \mathscr{O}_2 \Longrightarrow \mathfrak{A}_{\mathrm{sa}}(\mathscr{O}_1) \hookrightarrow \mathfrak{A}_{\mathrm{sa}}(\mathscr{O}_2) \ .$$

Esta condição expressa o fato de que o conjunto de observáveis "supersimétricas" aumenta com o tamanho da região de sua localização.[5]

P.2 Definimos a noção de localidade de tal forma que a restrição de uma região compacta $\mathscr{O} \in \mathscr{M}$ em uma região compacta no corpo de uma supevariedade $\mathscr{O}_{\mathrm{b}} \in \mathscr{M}_0$, é causalmente separada de uma outra região compacta $\mathscr{O}'_{\mathrm{b}} \in \mathscr{M}_0$. Isto implica na comutatividade tipo espaço $[\mathfrak{A}_{\mathrm{sa}}(\mathscr{O}), \mathfrak{A}_{\mathrm{sa}}(\mathscr{O}')] = 0$. Esta exigência é importante uma vez que somente com esta restrição podemos trabalhar sem que apareçam problemas relacionados à causalidade temporal. A noção de uma curva temporal própria adequada que intercepta uma superfície de Cauchy em um espaço-tempo globalmente

[5]Certamente o conjunto de interesse aqui é o conjunto de observáveis relacionado ao corpo da supervariedade.

hiperbólico faz sentido somente na variedade corpo. Desta forma temos a possibilidade de avaliar a evolução das superfícies de Cauchy de tal modo a conseguirmos um critério para a definição da forma de Hadamard para o estado de vácuo. Uma superdistribuição em supervariedade vista como uma função de dois pontos nos permite dizer que a causalidade está bem definida neste contexto. Temos assim que se $\mathscr{O}_b$ é causalmente dependente de $\mathscr{O}'_b$, então $\mathfrak{A}_{sa}(\mathscr{O}) \subset \mathfrak{A}_{sa}(\mathscr{O}')$.

P.3 Seguindo Dimock [47], exigimos que deva existir um $\mathfrak{A}_{sa}(\mathscr{O})$ para cada supervariedade $\mathscr{M}$ equipada com uma super-métrica g, que generaliza a métrica de Lorentz. Seja $k : \mathscr{M}_0 \to \mathscr{M}'_0$ um difeomorfismo C^∞ na variedade corpo, tal que $k^*(g'_0) = g_0$, onde g_0 é uma métrica de assinatura $(+,-,-,-)$ na variedade corpo. Então $z(k) : \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ é um superdifeomorfismo C^∞ $z(k)$ de $(\mathscr{M}, g)$ em $(\mathscr{M}', g')$ tal que $z(k)^*(g') = g$, existindo um isomorfismo $\alpha_{z(k)} : \mathfrak{A}_{sa} \to \widehat{\mathfrak{A}}_{sa}$ de forma que $\alpha_{z(k)}[\mathfrak{A}_{sa}(\mathscr{O})] = \widehat{\mathfrak{A}}_{sa}(z(k)(\mathscr{O}))$. Pode-se mostrar também que $z(\mathrm{id}_{\mathscr{M}_0}) = \mathrm{id}_{\mathscr{M}}$, onde $\mathrm{id}_{\mathscr{M}_0}(\mathrm{id}_{\mathscr{M}})$ são funções identidades em $\mathscr{M}_0(\mathscr{M})$, respectivamente. Portanto, $\alpha_{z(\mathrm{id}_{\mathscr{M}_0})} = \alpha_{(\mathrm{id}_{\mathscr{M}})}$ e, pela equação (2.2.7), temos $\alpha_{z(k_1)} \circ \alpha_{z(k_2)} = \alpha_{z(k_1 \circ k_2)}$.

De um modo particular, é interessante escolher uma álgebra $*$ adequada para a formulação da teoria quântica de campos em conexão com a abordagem de Gårding-Wightman [48].[6] Em teoria de campo, é natural trabalhar com o produto tensorial aplicado em funções testes, visto que é comum a presença de mais de um campo, assim introduzimos uma álgebra tensorial de superfunções suaves de suporte compacto sobre $\mathscr{O} \in \mathscr{M}$, onde $\mathscr{O}$ é uma região aberta de uma supervariedade. Seja f_m uma superfunção teste em $\mathfrak{D}_m(\mathscr{O})$, tal que $F = \oplus_{m\in\mathbb{N}} f_m(z_1, \ldots, z_m) \in \mathfrak{A}_{sa}(\mathscr{O})$, onde aqui $z_i = (x_i, \theta_i, \bar{\theta}_i)$ representam supercoordenadas. Da mesma forma, tomamos $\omega_m(z_1, \ldots, z_m) \in \mathfrak{D}'_m(\mathscr{O})$, onde $\mathfrak{D}'_m$ é o espaço dual de $\mathfrak{D}_m$ o qual consiste em supedistribuições de m-pontos $\omega = \{\omega_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, tal que ω_m pertence à álgebra dual denotada por $\mathfrak{A}'_{sa}(\mathscr{O})$. Desde de que estamos trabalhando com superálgebras involutivas, devemos definir uma operação de involução $(^*)$, que aqui trataremos como $f^*_m(z_1, \ldots, z_m) = f_m(z_m, \ldots, z_1)$, onde $f^*_m = f_m$ denota uma conjugação complexa.

Um superestado ω nesta classe algébrica é um funcional linear, normalizado e positivo $\omega : \mathfrak{A}_{sa}(\mathscr{O}) \to \mathscr{G}_L$, com $\omega(F^*F) \geq 0$ para todo $F \in \mathfrak{A}_{sa}(\mathscr{O})$. A normalização implica que que $\omega^0 = 1$. A rede assim formada, é dita da classe de Borchers-Uhlmann [50]. Alguma informação dinâmica (ainda não incluída aqui pois temos apenas uma álgebra) pode ser conseguida especificando um estado de vácuo para a teoria. Uma vez especificado o estado

[6] Alguns resultados ligados à teoria quântica de campos supersimétrica estão relacionados em [43, 49], onde se mostra que os axiomas padrões de Wightman podem ser modificados para incluir supersimetria.

de vácuo. que será realizado via a construção GNS, fixando um superespaço de Hilbert e um vetor de vácuo, podemos extrair algumas informações de interesse diretamente das correspondentes superfunções ordenadas temporalmente, avançadas ou retardadas.

Um superestado é dito satisfazer a propriedade essencial de *comutatividade local* se, e somente se, para todo $m \geq 2$ e todo $1 \leq i \leq m-1$ temos

$$\omega_m(f_1 \otimes \cdots \otimes f_i \otimes f_{i+1} \otimes \cdots \otimes f_m) = \omega_m(f_1 \otimes \cdots \otimes f_{i+1} \otimes f_i \otimes \cdots \otimes f_m)$$

para cada $f_i \in G_0^\infty(\mathscr{O})$, de forma que a restrição de cada f_i em regiões compactas do corpo da supervariedade implique que supp $f_i|_{\mathscr{O}_b}$ e supp $f_{i+1}|_{\mathscr{O}_b}$ possuam separacão separação espacial. Além disso, um superestado ω é "quase livre" se a superdistribuição de um ponto e todas superdistribuições de m pontos truncadas para $m \neq 2$ são nulas, ou seja, todas superdistribuições de m pontos são obtidas a partir de superdistribuições de dois pontos via a relação:

$$\omega_{2m+1}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m)0 \quad \text{for } m \geq 0 \ ,$$

$$\omega_{2m}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m) \quad \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_{2m} \\ i_k < j_k \\ i_1, \ldots, j_{2m} \text{ distintos}}} \quad \omega_2(f_{i_1} \otimes f_{j_1})\omega_2(f_{i_2} \otimes f_{j_2}) \cdots \omega_2(f_{i_{2m}} \otimes f_{j_{2m}}) \ ,$$

para $m \geq 1$.

Vimos que um modelo físico pode ser descrito pela construção GNS, que nos permite saber como o espaço de Hilbert é obtido e define quais operadores (representações da álgebra) atuam neste espaço. De acordo com a prescrição convencional, para conseguirmos o espaço de Hilbert escolhemos o espaço quociente entre a álgebra de observáveis e o ideal $\mathfrak{N}_\omega$. Nesta etapa, o problema vinculado a existência de várias representações inequivalentes persiste. Em superespaços planos, a invariância sob o grupo supersimétrico de super-Poincaré do estado de vácuo seleciona a representação correta [43]. Em supervariedades gerais o caso possui a mesma complicação existente quando estamos em espaço-tempo curvo sem supersimetria, e de forma análoga, procuraremos pelas estruturas supersimétricas correspondentes da forma de Hadamard. Assim, escolhemos um superespaço de Hilbert a partir das propriedades algébricas da teoria via a construção GNS realizando a seguinte identificação:

$$\omega_m(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(f_1) \ldots \pi_\omega(f_m)\Omega_\omega) \ ,$$

onde aqui Ω_ω é um vetor preferencial no superespaço de Hilbert e π_ω a representação dos elementos $F \in \mathfrak{A}_{\mathrm{sa}}(\mathscr{O})$ que desempenha o papel de operador linear auto-adjunto atuando no superespaço de Hilbert sobre superfunções testes. Note que a exigência física de uma condição espectral generalizada sobre a variedade corpo deve estar presente para se definir todo o conjunto de superestados adequados para a teoria. [11].

As principais características dos superespaços de Hilbert relevantes para nossos propósitos são resumidas como: (i) quando a álgebra de Grassmann $\mathscr{G}_L$ é dotada da norma de Rogers, todo superespaço de Hilbert é da forma $\mathscr{H} = \mathcal{H} \otimes \mathscr{G}_L$, onde $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilberto ordinário, (ii) o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathscr{G}_L$, com valores em $\mathscr{G}_L$ satisfaz as seguintes operações (restritas ao corpo) $\langle x_\mathrm{b}, y_\mathrm{b} \rangle = \langle x, y \rangle_\mathrm{b}$ e $\langle x, x \rangle_\mathrm{b} \geq 0$ para todo $\in \mathscr{H}$, tal que $x \in \mathscr{H}$ possui um corpo que não se anula se , e somente se, $\langle x, x \rangle_\mathrm{b} > 0$. Para a generalização de alguns resultados básicos da teoria de Espaço de Hilbert para superespaços de Hilbert é interessante verificar trabalhos recentes [42] e suas próprias referências.

2.6 *Superestados de Hadamard*

A procura pela forma de Hadamard no caso de um superespaço é simples, desde que o último, em geral, pode ser obtido pela aplicação da função $\delta^2(\bar{\theta} - \bar{\theta}')$ (ou $\delta^2(\theta - \theta')$) e de uma estrutura exponencial $e^{E(\partial_x, \theta, \theta)}$ sobre a forma ordinária de Hadamard Δ_{Had}, tal que *a região de estrutura de singularidade não é afetada*, ou seja, existe um comportamento à curta distância análogo ao comportamento à curta distância discutido no caso de variedade geral como espaço-tempo.[7] Os detalhes deste resultado está bem detalhado no Apndice A, que vem demonstrar uma proposição mais geral em seção futura (2.8.1). Uma vez que podemos lidar com supervariedades que possuem variedades corpo sendo globalmente hiperbólicas (como vimos, as suspervariedades BPT), é importante estabelecer que as superestruturas de Hadarmard apenas fazem sentido *projetivamente*. A explicação óbvia para esta afirmação está no fato de que esta estrutura deve conter uma noção de tempo global e consequentemente os argumentos de causalidade. Sabemos que sobre uma supervariedade a noção de uma curva causal não é bem definida a menos que se trabalhe projetivamente. Outra forma de se visualizar como estender a estrutura de Hadamard para o ambiente supersimétrico é simplesmente trabalhar em cima da existência e unicidade de uma continuação Grassmanniana (a z-continuação) para funções C^∞, assim podemos ter a extensão supersimétrica dos termos U, V e W que aparecem na forma ordinària de Hadamard e consequir formalmente construir a superforma de Hadamard. Após realizada uma projeção no corpo, sempre conseguimos a estrutura de Hadamard ordinária a partir da sua respectiva estrutura supersimétrica de forma que a última deve ser invariante

[7]Veja, por exemplo, o livro de Piguet e Sibold [54], onde discussões sobre renormalização de teorias supersimétricas via a "renormalização algébrica" estão presentes.

através de uma evolução da superfície de Cauchy na variedade corpo. Este resultado é produto direto da abordagem mostrada na próxima seção, através de uma caracterização da condição de Hadamard equivalente e alternativa (devida à Radzikowski [8]), ampliada de modo a envolver a noção de conjunto de frente de ondas para superdistribuições, tal que a estrutura de singularidade mantém-se intacta e condensada na parte ordinária das superfunções de Green.

2.7 Um Tipo de Condição Espectral Microlocal

Passando de uma variedade suave para uma supervariedade, também suave, é razoável exigir que um superestado satisfaça um certo tipo de condição espectral microlocal. Uma alternativa completamente análoga à Definição 1.5.1 pode ser alcançada, mais uma vez com a ajuda da formulação em que fizemos uso das famílias de esqueletos $\mathcal{S}_L(\mathscr{M})$ e da modelagem via grafos. Seja $\mathcal{G}_r$ um conjunto finito de "*supergrafos*" incluídos em algum $\mathcal{S}_L(\mathscr{M})$ cujos vértices representam pontos do conjunto $V = \{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathcal{S}_L(\mathscr{M})$. A noção de um supergrafo desenhado localmente é que seus vértices são representados por pontos do hiperplano $\mathbb{R}^{2^{L-1}(m+n)}$ e seus arcos são representados por curvas (que são "*piecewise*" lineares) entre estes pontos, sendo que curvas distintas encontram-se apenas em pontos finais comuns. Se $\epsilon_0 : \mathbb{R}^{2^{L-1}(m+n)} \to \mathbb{R}^m$ é a projeção canônica, então $\widetilde{G} = \epsilon_0 G$ é um grafo composto pela projeção daqueles pontos de um supergrafo cujos arcos e representam conexões entre pares $x_{\mathbf{b}_i}, x_{\mathbf{b}_j} \in \mathbb{R}^m$ por curvas de $x_{\mathbf{b}_i}$ para $x_{\mathbf{b}_j}$. Assim, uma imersão de um grafo $\widetilde{G}$ em uma variedade corpo $\mathscr{M}_0$ é uma correspondência dos vértices de $\widetilde{G}$ para os pontos em $\mathscr{M}_0$, e dos arcos de $\widetilde{G}$ para as curvas "*piecewise*" suaves em $\mathscr{M}_0$: $e \to \gamma(e)$ com fonte $s(\gamma(e)) = x_{\mathbf{b}}(s(e))$ e alvo $t(\gamma(e)) = x_{\mathbf{b}}(t(e))$, respectivamente, junto com um campo de covetores constantes e covariantemente causais $k_{\mathbf{b}_e}$ sobre γ tal que: (i) se e^{-1} denota o arco com direção oposta à de e, então a curva correspondente $\gamma(e^{-1})$ é a inversa de $\gamma(e)$; (ii) para cada arco e o covetor $k_{\mathbf{b}_e}$ é direcionado diretamente para o futuro se $x_{\mathbf{b}}(s(e)) < x_{\mathbf{b}}(t(e))$; (iii) $k_{\mathbf{b}_{e^{-1}}} = -k_{\mathbf{b}_e}$. Usando esta modelagem escrevemos:

Definição 2.7.1 (susyμSC). *Um superestado ω^{susy} com uma distribuição de r pontos ω_r^{susy} satisfaz uma Condição Espectral Supersimétrica Microlocal se, e somente se, para qualquer r*

$$WF(\omega_r^{\text{susy}}) = \left\{(x_{\mathbf{b}_1}, x'_1, k_{\mathbf{b}_1}, 0); \ldots; (x_{\mathbf{b}_r}, x'_r, k_{\mathbf{b}_r}, 0) \mid WF(\epsilon_* \omega_r^{\text{susy}}) \subseteq \widetilde{\Gamma}_r\right\} ,$$

onde $\widetilde{\Gamma}_r$ é o conjunto $\{(x_{\mathbf{b}_1}, k_{\mathbf{b}_1}); \ldots; (x_{\mathbf{b}_r}, k_{\mathbf{b}_r})\}$ para o qual existe um grafo $\widetilde{G}$ como descrito acima e com $k_{\mathbf{b}_i} = \sum k_{\mathbf{b}_e}(x_{\mathbf{b}_i})$ tal que a soma estende-se para todos os arcos que *possuem os pontos x_{b_i} como suas fontes. O momento de configuração trivial $k_{b_1} = \cdots = k_{b_r} = 0$ é desconsiderado.*

Notas. É interessante chamar a atenção para dois pontos importantes:

- A Definição 2.7.1 indica que para um superestado ω^{susy} a susyμSC é equivalente à exigência de que todas as componentes dos campos satisfaçam a condição espectral microlocal [11] na variedade corpo. Esta observação é significante e está de acordo com os comentários de DeWitt, afirmando que, em aplicações físicas de teorias quânticas de campo supersimétricas, a condição espectral do superespaço de Hilbert GNS está restrita em um espaço de Hilbert GNS que se situa dentro de um superespaço de Hilbert GNS.

- A Definição 2.7.1 nos fornece uma condição espectral "global" microlocal. O sentido da palavra "global" aqui mencionada é que o suporte singular de todas as componentes do campo está englobado em $WF(\epsilon_* \omega_m^{susy})$. Esta é uma característica típica de teorias supersimétricas formuladas na linguagem de superespaços. Por exemplo, para o supercampo quiral de Wess-Zumino [52], em analogia as componentes de campo escalar, a condição de Hadamard para uma componente espinorial é formulada em termos de sua distribuição de dois pontos ω_2. Esta última é obtida aplicando o adjunto do operador espinorial sobre uma estado de Hadamard auxiliar na equação quadrática espinorial. Para os índices espinoriais fixos o conjunto de frente de ondas é contido no lado direito da equação (1.5.1) e as derivadas não aumentam este conjunto.

2.8 O Modelo Livre de Wess-Zumino no Superespaço Plano

Como um exemplo de aplicação dos resultados discutidos na última seção, consideraremos o caso simples de campos quirais (e antiquirais) massivos do modelo de Wess-Zumino em um superespaço plano.

O modelo supersimétrico mais simples com $N = 1$ (uma supersimetria) em quatro dimensões é o modelo Wess-Zumino livre [52], o qual consiste de um supercampo quiral $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ e um supercampo antiquiral $\bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta})$ obedecendo aos vínculos relacionados às derivadas, os quais são $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0$ e $D_\alpha \Phi = 0$ respectivamente. A forma das derivadas covariantes supersimétricas segue como

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\,, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\,. \tag{2.8.1}$$

A notação aqui empregada é similar à usada em [54]. Os elementos de um superespaço com $N = 1$ são parametrizados por coordenadas pare e ímpares $z^M = (x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$, com $\mu = (0, \ldots, 3)$, $\alpha = (1, 2)$, $\dot{\alpha} = (\dot{1}, \dot{2})$, onde θ e seu complexo conjugado $\bar{\theta}$ são coordenadas ímpares e por construção eles anticomutam entre si. Neste caso, a variedade corpo é $\mathbb{R}^m$ e o mapa do corpo é $\epsilon : \mathscr{G}_L^{m,n} \to \mathbb{R}^m$.

O supercampo $\Phi(z)$ é uma função que mapea o superespaço na parte par da álgebra de Grassmann [25]. Com a ajuda da regra de comutação

$$\bar{D}_\alpha \, (e^{-i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu}\phi) = e^{\,i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu}(-\partial/\partial\bar{\theta}^\alpha)\phi,$$

o supercampo quiral pode ser expandido em potências das coordenadas ímpares como

$$\Phi(z) = e^{\,i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu}(\varphi(x) + \theta\psi(x) - \theta^2 F(x)) \ , \tag{2.8.2}$$

com $\varphi \overset{\text{def}}{=} 2^{-1/2}(A + iB)$ e $F \overset{\text{def}}{=} 2^{-1/2}(D - iE)$. A, B e ψ são respectivamente componentes físicas escalar, pseudoescalar e spin-1/2 de Φ, enquanto D e E são suas componentes escalares e pseudoescalares auxiliares. As últimas são necessárias para que classicamente a álgebra da supersimetria seja fechada "*off-shell*" (elas não correspondem a graus de liberdades que se propagam).

Como acima, o supercampo antiquiral $\bar{\Phi}(z)$, com a ajuda da sua respectiva relação de comutação

$$D_\alpha \, (e^{i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu}\phi) = e^{i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu}(\partial/\partial\theta^\alpha)\phi$$

pode também ser estendido em componentes como:

$$\bar{\Phi}(z) = e^{i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu}(\varphi^*(x) + \bar{\theta}\bar{\psi}(x) + \bar{\theta}^2 F^*(x)) \ . \tag{2.8.3}$$

A versão quântica do modelo de Wess-Zumino é baseada nas equações de campo clássicas

$$\frac{1}{16}\bar{D}^2\bar{\Phi} + \frac{m}{4}\Phi = 0\,, \quad \frac{1}{16}D^2\Phi + \frac{m}{4}\bar{\Phi} = 0\ . \tag{2.8.4}$$

Aplicando o operador D^2 na primeira equação (e respectivamente $\bar{D}^2$ na segunda), multiplicando a segunda equação por $4m$ (e também a primeira), e usado a relação de comutação $[D^2, \bar{D}^2] = 8iD\sigma^\mu\bar{D}\partial_\mu + 16\sqcup$, podemos então encontrar

$$(\Box_x + m^2)\Phi = 0\,, \quad (\Box_x + m^2)\bar{\Phi} = 0\ . \tag{2.8.5}$$

Para os supercampos clássicos Φ e $\bar{\Phi}$, associamos supercampos quânticos e "superdistribuições" com valores de operador, mediadas por superfunções "testes",

$$F(z) = e^{-i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu}(f(x) + \theta\chi(x) + \theta^2 h(x))$$

$$\bar{F}(z) = e^{i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu}(f^*(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \bar{\theta}^2 h^*(x)) \tag{2.8.6}$$

com $F(z), \bar{F}(z) \in G_0^\infty(U, \mathscr{G}_L)$ sendo superfunções tomando valores de $\mathscr{G}_L$ em um conjunto aberto $U \subset \mathscr{G}_L^{m,n}$ de suporte compacto.

Para todo $F(z), G(z) \in G_0^\infty(U, \mathscr{G}_L)$, definimos as seguintes relações de comutação

$$
\begin{aligned}
\left[\Phi(\bar{F}), \Phi(\bar{G})\right] &= \int d\mu(z) d\mu(z')\ \Delta^{\mathrm{PJ}}_{\Phi\Phi}(z, z') F(z) \bar{G}(z') \,, \\
\left[\Phi(F), \Phi(\bar{G})\right] &= \int d\mu(z) d\mu(z')\ \Delta^{\mathrm{PJ}}_{\bar{\Phi}\Phi}(z, z') F(z) \bar{G}(z') \,, \\
\left[\bar{\Phi}(F), \bar{\Phi}(G)\right] &= \int d\mu(z) d\mu(z')\ \Delta^{\mathrm{PJ}}_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}}(z, z') F(z) G(z') \,.
\end{aligned}
\tag{2.8.7}
$$

onde $d\mu(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} d^8 z = d^4 x d^2\theta d^2\bar{\theta}$. Chamamos $\Delta^{\mathrm{PJ}}_{\Phi\Phi}$, $\Delta^{\mathrm{PJ}}_{\Phi\Phi}$ e $\Delta^{\mathrm{PJ}}_{\Phi\Phi}$ de superdistribuições de Pauli-Jordan, que configuram como soluções fundamentais das equações homogêneas (2.8.5). De fato elas são distribuições de dois pontos e assim são também elementos de $\mathfrak{D}'(U)$.

O valor esperado no vácuo do produto $\Phi(F)\Phi(G)$ satisfaz a relação

$$
(\Omega, \Phi(F)\Phi(G)\Omega) = (w_2^{\mathrm{susy}}(z, z'),\ F(z)G(z')) \ . \tag{2.8.8}
$$

A distribuição $w_2^{\mathrm{susy}}(z, z')$ estende o formalismo de Wightman e por esta razão, $w_2^{\mathrm{susy}}(z, z')$ é dita superdistribuição de Wightman de dois pontos.

A superdistribuição de Wightman de n pontos será simbolicamente escrita pela forma [43]:

$$
w_n^{\mathrm{susy}}(z_1, , \ldots, z_n) = \left(\Omega, \Phi\left(x_1; \theta_1, \bar{\theta}_1\right) \ldots \Phi\left(x_n; \theta_n, \bar{\theta}_n\right) \Omega\right) \ , \tag{2.8.9}
$$

e

$$
w_n^{\mathrm{susy}}(F_n) = \int \prod_{i=1}^{n} d\mu_i\ w_n^{\mathrm{susy}}(z_1, \ldots, z_n) F_n(z_1, \ldots, z_n) \ . \tag{2.8.10}
$$

Nesta definição, fixamos a ordem com que escrevemos a superdistribuição e a superfunção teste.

Proposição 2.8.1. - *As superdistribuições de dois pontos de Hadamard, de Pauli-Jordan e de Wightman têm a seguinte dependência com respeito às coordenodas $x, \theta, \bar{\theta}$ (para demostração veja Apêndice A):*

$$
\begin{aligned}
&\Delta^X_{\Phi\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}; x', \theta', \bar{\theta}') = -i\, m \delta^2(\theta - \theta') e^{i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \quad \theta'\sigma^\mu\bar{\theta}')\partial_\mu} \Delta_X(x - x') \ , \\
&\Delta^X_{\bar{\Phi}\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}; x', \theta', \bar{\theta}') e^{i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta} + \theta'\sigma^\mu\bar{\theta}' - 2\theta\sigma^\mu\bar{\theta}')\partial_\mu} \Delta_X(x - x') \ , \\
&\Delta^X_{\Phi\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}; x', \theta', \bar{\theta}') i\, m \delta^2(\bar{\theta} - \bar{\theta}') e^{-i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \cdot \theta'\sigma^\mu\bar{\theta}')\partial_\mu} \Delta_X(x - x') \ ,
\end{aligned}
\tag{2.8.11}
$$

onde $X = (\mathrm{Had}, \mathrm{PJ}, \mathrm{W})$.

Proposição 2.8.2. *Seja ω^{susy} um estado para o modelo quântico de Wess-Zumino em um superespaço plano, cuja superdistribuição de r pontos ω_r^{susy} satisfaz os axiomas de Wightman.*[8] *Então ω^{susy} satisfaz a Definição 2.7.1.*

O resutado acima é uma consequência imediata do Corolário 2.4.5 apresentado aqui e do Teorema 4.6 de [11], cujo enunciado descreveremos a seguir: "Seja w um estado para um modelo teórico de teoria quântica de campos em um espaço de Minkowski, cujas distribuições de m-pontos w_m satisfaz os axiomas de Wightman. Então w satisfaz a condição espectral microlocal."

2.9 Considerações Finais

Neste capítulo podemos ver como uma formulação da TQC definida em variedades pode ser realizada de modo a incluir uma TQC supersimétrica em supervariedades. Além de generalizarmos a noção de variedade para supervariedades (específicas para o caso de uma teoria física), usamos basicamente como uma filosofia de ataque ao problema, a generalização das próprias ferramentas de trabalho que comumente são acionadas para uma construção axiomática da de uma TQC, como por exemplo, a análise sobre distribuições e a análise microlocal de singularidades. A análise desenvolvida no decorrer do capítulo aparenta dar ênfase apenas na estrutura matemática das teorias supersimétricas. Do ponto de vista operacional, evidentemente uma teoria supersimétrica (nos moldes correntes) possui grandes méritos, visto que podemos sem perdas de generalidades fazer cálculos sem referir-mos à análise topológica mais profunda. Cabe notar, porém, que a estrutura formal torna-se imprescindível para uma clara interpretação de certos resultados, assumidos como verdadeiros e que em geral não possuem maiores explicações. Citamos aqui, a título de exemplo, o motivo do porquê que no superespaço, a transformação de uma variedade anti-comutante em uma comutante (ou vice-versa) é legítima. Se levarmos em conta que todo o caráter supersimétrico de uma teoria de campos pode ser totalmente descrito em termos das transformações de simetria no superespaço (note que a responsabilidade da supersimetria sai do campo e se reporta às coordenadas no superespaço) poderíamos nos fazer a seguinte pergunta: por que é possível efetivar a transformação de uma variedade comutante em um anti-comutante, se *a priori* elas não possuem relação alguma? A resposta agora é clara: ambas pertencem à uma mesma álgebra e possuem alma (nos referindo agora aos supernúmeros). Outra lição que podemos assimilar é a seguinte:

[8] Nos trabalhos [43, 49] é discutido como generalizar os axiomas padrões de Wightman de modo a incluir supersimetria.

a investigação sobre superdistribuições, como vimos, torna-se bem mais completa com a abordagem analítica - sabemos exatamente como comportam-se as as superfunções de Green com respeito aos seus pontos singulares e suas propriedades matemáticas.

Capítulo 3

Modelos de Campos sobre Espaços Não-Comutativos

3.1 Introdução

Como já mencionado, a tentativa de se estabelecer uma teoria de campo axiomatizada de forma que seus princípios incorporem lógica e consistentemente resultados subjacentes aos dois pilares da física moderna (a Teoria da Relatividade e a Mecânica Quântica) pode ser desenvolvida a partir de um conjunto de funções de Wightman que satisfazem as propriedades constantes no primeiro capítulo. Em geral, mostra-se que uma teoria quântica de campos que satisfaz todas aquelas condições respeitam os Teoremas de CPT e de *Spin*-Estatística [48, 80].

Para uma teoria quântica dos campos não comutativa, os axiomas de Wightman devem naturalmente sofrer algumas modificações. De uma certa forma, grande parte destes axiomas apresentam-se inalterados na abordagem convencional formulada via a noção de campos temperados, porém o axioma de comutatividade local não pode de forma alguma ser escrito em termos de funções testes analíticas. Cabe observar também que no caso aqui particular a simetria de Lorentz $SO(1,3)$ é reduzida para $SO(1,1) \times SO(2)$. Tendo em vista estas considerações e acrescentando a esta lista de modificações (seguindo Brunetti *et al.* [11]) a substituição da condição espectral usual por uma condição agora aplicada sobre o conjunto de frente de ondas analítico para as correspondentes funções de Wighman de n-pontos generalizadas, chamada *condição espectral microlocal analítica* ($a\mu SC$ [77]), veremos como inserir nesta discussão as idéias propostas por Soloviev e Lucke, como visto na Apresentação nesta tese.

3.2 Funcionais Analíticos e Localizabilidade Angular

Em seus trabalhos, Soloviev [72]-[75] apresenta algumas ferramentas formais que nos permite, por vezes, trabalhar no espaço de funcionais analíticos de classe S'^0 no mesmo grau de facilidade com que tratamos distribuições temperadas. Uma vez que não é permitida a aplicação da noção de suporte distribucional aos elementos de S'^0, torna-se bastante natural a introdução de conceitos como *localizabilidade angular* de funcionais, significando que funcionais desta classe possuem a propriedade de garantir a existência de cones carregadores (veremos o conceito logo a seguir)a importância deste conceito logo em seguida) minimais de distribuições em S'^0. Com esta abordagem atinge-se uma generalização natural da comutatividade local, de modo a desviarmos da noção de suporte de distribuições.

O espaço das funções testes composto por funções analíticas totais é constituído de elementos cuja a seguinte estimativa seja garantida:

$$|f(z)| \leq C_N \,(1+|x|)^{-N}\, e^{b|y|} \;, \quad (z = x+iy) \;, \quad N = 0,1,\dots \;,$$

onde b e C_N são constantes positivas. O espaço das funções satisfazendo a desigualdade acima, com b fixo, é denotado por $S^{0,b}$. Na teoria dos campos não locais a união $\cup_{b>0} S^{0,b}$ é chamada de S^0. Juntamente com o espaço $S^0(\mathbb{R}^n)$, definimos também um espaço associado aos cones fechados $K \subset \mathbb{R}^n$. Note que K é um cone se $x \in K$ implica $\lambda x \in K$ para todo parâmetro $\lambda > 0$. Considere agora U um cone aberto em $\mathbb{R}^n$. Para cada U, associamos um espaço $S^0(U)$ composto por funções analíticas totais em $\mathbb{C}^n$, que por sua vez devem satisfazer

$$|f(z)| \leq C_N \,(1+|x|)^{-N}\, e^{b|y|+bd(x,U)} \;, \quad N = 0,1,\dots \;, \tag{3.2.1}$$

aqui $d(x,U)$ deve ser vista como a distância entre o ponto x e o cone U.[1] Podemos atribuir a este espaço uma topologia induzida pela norma, construída como o limite indutivo da família de espaços normados contáveis $S^{0,b}(U)$ com as normas definidas de acordo com a desigualdade (3.2.1):

$$\|f\|_{U,b,N} \leq \sup_z |f(z)|\,(1+|x|)^N\, e^{-b|y|-bd(x,U)}.$$

Para cada cone fechado $K \subset \mathbb{R}^n$, podemos também definir o espaço $S^0(K)$ considerando outro limite indutivo por intermédio dos cones abertos U que contém o conjunto $K \setminus \{0\}$. Como usualmente adotado, representaremos o espaço dual contínuo do espaço $S^0(K)$

[1] Assumimos que $\mathbb{R}^n$ possua norma Euclideana.

por $\mathcal{S}'^0(K)$. Um cone fechado $K \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de *carregador* de um determinado funcional $v \in \mathcal{S}'^0$ se v possui uma extensão contínua para o espaço $\mathcal{S}^0(K)$, ou de outra forma, se esta distribuição pertence a $\mathcal{S}'^0(K)$. Como a relação (3.2.1) é satisfeita, pode-se interpretar esta última propriedade como um rápido decrescimento - porém mais lento que um decrescimento exponencial de ordem 1 e do máximo tipo – de v computado sobre o complemento de K. Veja também que se v for uma distribuição temperada com suporte em K, então sua restrição $v|_{\mathcal{S}^0}$ possui K como cone carregador.

Catalogamos abaixo alguns resultados importantes que podem ser encontrados no trabalho de Soloviev, que formalizam a propriedade da localizabilidade angular:

R.1 Os espaços $\mathcal{S}^0(U)$ são do tipo Hausdorff e completos. Um conjunto $B \subset \mathcal{S}^0(U)$ é limitado se e somente se está contido em algum espaço $\mathcal{S}^{0,b}(U)$ e é limitado em cada uma de suas normas.

R.2 O espaço $\mathcal{S}^0$ é denso em $\mathcal{S}^0(U)$ e em $\mathcal{S}^0(K)$.

R.3 Se um funcional $v \in \mathcal{S}'^0$ é carregado pelos cones fechados K_1 e K_2, então a intersecção destes cones é o carregador do funcional.

R.4 Se $v \in \mathcal{S}'^0(K_1 \cap K_2)$, então $v = v_1 + v_2$, onde $v_j \in \mathcal{S}'^0(U_j)$ e U_j são cones abertos tais que $U_j \supset K_j \setminus \{0\}$, $j = 1, 2$.

3.3 Os Campos Livres

Formalmente, o estudo de QFT inicia-se com a definição matemática de objetos que venham a representar nossos campos livres. Como já mencionado anteriormente, para teorias em espaço não comutativo $\mathbb{R}^4$, os campos devem ser funções generalizadas com valor de operador sobre o espaço de funções testes analíticas totais $\mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{4n})$. Nós denotaremos como D_0 o domínio invariante comum minimal (que assumimos ser denso) de operadores de campo no espaço de estados de Hilbert $\mathscr{H}$, ou seja, o subespaço vetorial de $\mathscr{H}$ que é expandido pelo seu estado de vácuo $|\Omega_o\rangle$ e vetores da forma

$$\Phi_{\iota_1\ell_1}(f_1)\ldots\Phi_{\iota_n\ell_n}(f_n)|\Omega_o\rangle\ , \qquad (n = 1, 2, \ldots)\ ,$$

onde $f_i \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^4)$ e ℓ_i são índices de Lorentz. É bom notar que o espaço $\mathcal{S}^0$, sendo Fourier-isomórfico a $\mathscr{D}$, é *nuclear*. O valor esperado no vácuo da função de n-pontos determina unicamente as funções generalizadas de Wightman $\mathscr{W}_{\iota_1\ell_1,\ldots,\iota_n\ell_n} \in \mathcal{S}'^0(\mathbb{R}^{4n})$:

$$\mathscr{W}_{\iota_1\ell_1,\ldots,\iota_n\ell_n}(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \langle\Omega_o|\Phi_{\iota_1\ell_1}(x_1)\ldots\Phi_{\iota_n\ell_n}(x_n)|\Omega_o\rangle\ .$$

Assim a propriedade de nuclearidade nos permite construir expressões como:

$$\Phi^n(f) = \int \Phi_{\iota_1\ell_1}(x_1)\dots\Phi_{\iota_n\ell_n}(x_n)\, f(x_1,\dots,x_n)\, \mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n|\Omega_o\rangle \qquad (n=1,2,\dots), \tag{3.3.1}$$

onde $f \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{4n})$, de tal forma a verificar que qualquer operador $\Phi_{\iota\ell}(f)$ pode ser estendido ao subespaço $D_1 \supset D_0$ expandido pelos vetores (3.3.1).

3.4 Invariância Relativística

Na abordagem aqui adotada, uma modificação da invariância do grupo de Lorentz $SO(1,3)$ aparece devido ao caráter não local das relações de comutação aplicada às coordenadas: $[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$. Esta mudança está explicitamente vinculada à presença do tensor antisimétrico $\theta^{\mu\nu}$ na permutação de seus índices. Apesar disto, tais relações de comutação possuem uma invariância sob o grupo de translações rígidas $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$ com $a^\mu \in \mathbb{R}$. Mantendo o comportamento não comutativo, podemos em particular construir um tipo de tensor $\theta_{\mu\nu}$ que se apresenta da seguinte forma:

$$\theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \theta_e & 0 & 0 \\ -\theta_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_m \\ 0 & 0 & -\theta_m & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4.1}$$

com $\theta_e, \theta_m \in \mathbb{R}$. É possível ainda recuperar uma simetria remanescente observando que o maior subgrupo do grupo $O(1,3)$ que deixa as relações de comutação invariates é o $SO(1,1) \times SO(2)$, onde o primeiro fator $SO(1,1)$ atua apenas nas chamadas coordenadas elétricas $x_e = (x^0, x^1)$, e o segundo fator $SO(2)$ atua rotacionando as chamadas coordenadas magnéticas $\vec{x}_m = (x^2, x^3)$. Uma vez que estamos interessados em traçar um paralelo com a referência [64], assumiremos teorias com comportamento não comutativo tipo espaço-espaço, significando que $\theta_e = 0$. Neste caso o subgrupo invariante torna-se $O(1,1) \times SO(2)$. Levando-se em conta esta discussão denotaremos aqui $\mathfrak{P} = O(1,1) \times SO(2) \rtimes T_4$ como o grupo de simetria da teoria em questão, com T_4 representando o grupo das translações.

As representações unitárias do grupo de Poiancarè $\mathfrak{P}$ que transformam os operadores de campo $\Phi_{\iota_i\ell_i}$ do espaço de Hilbert atuam da seguinte forma:

$$\mathscr{U}(\Lambda, a)\, \Phi_{\iota_i\ell_i}(x)\, \mathscr{U}(\Lambda, a)^{-1} = U_\Lambda \Phi_{\iota_i\ell_i}(\Lambda x + a)\ ,$$

onde U_Λ é uma matriz que atua nos índices do campo $\Phi_{\iota_i\ell_i}(x)$ e ℓ_i são índices de Lorentz. O estado de vácuo da teoria $|\Omega_o\rangle$ é invariante sob $\mathscr{U}(\Lambda, a)$.

3.5 Comutatividade Assintótica

Do ponto de vista de uma formulação axiomática, pretendemos investigar como reescrever o axioma da localidade para incluir os resultados da teoria não comutativa. A característica ligada a localizabilidade dos campos físicos em uma determinada teoria de campos é alcançada, matematicamente, lançando-se mão das funções testes infinitamente diferenciáveis ($\mathscr{S}$) de suporte compacto. Em geral não existe problema algum quando os campos de Wightman são construídos nas bases do espaço $\mathscr{S}$. Mas se os campos tiverem uma construção em termos do espaço $\mathbb{S}^0$ devemos reconsiderar o casamento da localizabilidade do campo com o suporte compacto de funções testes. Neste sentido, com objetivo de adaptar o postulado da microcausalidade para TQCNC, Álvarez-Gaumé e Vázquez-Mozo [64] relaxam a condição de que os (anti)comutadores devam desaparecer fora do cone de luz, substituindo então o cone pelo "*wedge*" de luz $V_+ = \{x \in \mathbb{R}^{1,3} \mid x_e^2 = 0\}$, de forma que

$$\left[\Phi_{\iota\ell}(x), \Phi_{\iota'\ell'}(x')\right]_+ = 0 \ , \quad \text{if} \quad (x_e - x'_e)^2 = (x^0 - x'^0)^2 - (x^1 - x'^1)^2 < 0 \ . \qquad (3.5.1)$$

Seguindo Soloviev [72]-[75], relaxaremos ainda mais a condição (3.5.1), reformulando-a como:

Definição 3.5.1 (Axioma da (anti)comutatividade assintótica). *As componentes de campo $\Phi_{\iota\ell}$ e $\Phi_{\iota'\ell'}$ são ditas assintoticamente comutantes (ou anti-comutantes) para um separação tipo espaço-tempo suficientemente grande de seus argumentos se o funcional*

$$f = \left\langle \Theta, \ \left[\Phi_{\iota\ell}(x), \Phi_{\iota'\ell'}(x')\right]_+ \Psi \right\rangle \ , \qquad (3.5.2)$$

é carregado por $V_{e+} \times \mathbb{R}^4$ para qualquer vetor $\Theta, \Psi \in D_0$, onde o cone $V_{e+} = \{(x_e, x'_e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid (x_e - x'_e)^2 \geq 0\}$.

Visto que (3.5.1) é completamente satisfeita por campos como distribuições locais temperadas quando restritas ao espaço $\mathbb{S}^0(\mathbb{R}^4)$, temos que a condição acima torna-se mais fraca que a anterior e está intimamente ligada a macrocausalidade. Mostraremos adiante como esta condição, somada à condição espectral microlocal analítica, é de fato suficiente para garantir a existência de simetria CPT, bem como da conexão *Spin*-Estatística para TQCNC.

Para efeito de simplificação, no que se segue, desconsideraremos os índices ℓ_i uma vez as relações de comutação aqui presentes dependem apenas dos tipos dos campos participantes e não de seus índices.

3.6 *Condição Espectral Microlocal Analítica (aμSC)*

Procedendo à generalização da condição espectral para uma função generalizada de Wightman $\mathscr{W}_n$ de n-pontos, com vistas a aplicar a noção do conjunto de frente de ondas, torna-se imprescindível analisar com bastante cuidado as singularidades associadas. Em teorias de campos locais, é bem conhecido que a abordagem axiomática fornece informações sobre as regiões de analiticidade de $\mathscr{W}_n$: se a condição de tempereza, comutatividade local, invariância de Poincaré e a condição espectral forem satisfeitas, então as distribuições de Wightman $\mathscr{W}_n$ serão analíticas em todos os pontos tipo-espaço. Estes pontos são chamados de pontos de Jost, que na verdade são pontos reais do domínio de analiticidade estendido das funções de Wightman $\mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_n)$. O Teorema de Bargmann-Hall-Wightman (BHW) mostra que esta extensão pode ser obtida aplicando várias transformações de Lorentz complexas sobre o domínio de analiticidade primitivo determinado pela condição espectral. É bom lembrar aqui que $x \in \mathbb{R}^{4n}$ pertence ao domínio estendido se, e somente se, o cone convexo gerado em $\mathbb{R}^4$ pelos pontos $\xi_k = x_k - x_{k+1}$, $k = 1, \ldots, n-1$, contém apenas vetores tipo-espaço. Formalmente, podemos descrever os pontos de Jost pelo seguinte cone aberto:

$$\mathscr{J}_n = \Big\{ x \in \mathbb{R}^{4n} \mid \Big(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (x_k - x_{k+1}) \Big)^2 < 0 \ , \forall \lambda_k \geq 0, \text{ and } \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k = 1 \Big\}.$$

Nos reportando ao Capítulo 1, notemos que a versão analítica da condição espectral microlocal é natural em espaços-tempo analíticos, com o conjunto de frente de ondas WF substituído por sua versão analítica WF_A [77]. Como vimos, na abordagem via grafos, temos que quando M é um espaço-tempo analítico e real, as funções de n pontos são ditas satisfazer o aμSC se e somente se $WF_A(\mathscr{W}_n) \subset \Gamma_n$.

Estamos agora na posição de demonstrar que as funções generalizadas de Wightman $\mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_n) \in S'^0(\mathbb{R}^{4n})$ satisfazem a aμSC. Consideremos somente o caso mais simples, que é o do campo escalar e Hermitiano $\varphi(x)$ associado a partículas sem *spin* e massa $m > 0$, visto como uma função generalizada com valor de operador definida no espaço de funções testes $S^0(\mathbb{R}^4)$ e transformando-se de acordo com as representações de $\mathfrak{P} = [O(1,1) \times SO(2)] \rtimes T_4$. Tendo em visto que a estrutura causal da teoria é completamente determinada pela simetria do grupo $O(1,1)$, a continuação analítica das funções de Wightman será realizada apenas sobre as coordenadas "elétricas" $x_e = (x^0, x^1)$, ao passo que as coordenadas "magnéticas" $\vec{x}_m = (x^2, x^3)$ serão deixados como meros espectadores, observando o fato de que a inversão $\vec{x}_m \to -\vec{x}_m$ será implementada via uma rotação sob $SO(2)$ de 180 graus.

Seja $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ a projeção para o plano $x_e = (x^0, x^1)$. Seja ainda $\mathscr{W}_n$ uma função generalizada de Wightman em $\mathbb{R}^{4n}$, então o "pushforward" $\pi_*\mathscr{W}_n$, definido por $\pi_*\mathscr{W}_n(f) = \mathscr{W}_n(\pi^* f)$, é uma função de Wightman generalizada sobre $\mathbb{R}^{2n}$, onde $f \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n})$. Utilizando o fato de que o grupo de translações deixa a teoria não comutativa invariante, as funções de Wightman dependerão somente de $(n-1)$ diferenças de coordenadas como no caso ordinário (comutativo). Representando a diferença entre coordenadas como ξ_{e_k}, obtemos formalmente que

$$\pi_*\mathscr{W}_n(x_{e_1}, \ldots, x_{e_n})\pi_* W_n(\xi_{e_1}, \ldots, \xi_{e_{n-1}}) \ , \quad \xi_{e_k} = x_{e_k} - x_{e_{k+1}} \ , \quad k = 1, \ldots, n-1 \ .$$

E para $f \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^{2n})$,

$$\pi_*\mathscr{W}_n(f) = \int_{\mathbb{R}^2} \pi_* W_n(f_{(x_e)}) dx_e$$

onde

$$f_{(x_e)}(\xi_{e_1}, \ldots, \xi_{e_{n-1}})f(x_e, x_e - \xi_{e_1}, x_e - \xi_{e_1} - \xi_{e_2}, \ldots, x_e - \xi_{e_1} - \cdots - \xi_{e_{n-1}}) \ .$$

O resultado acima pode ser analisado à luz do Lema 4 em [74]: "Para toda função de Wightman $\mathscr{W} \in \mathcal{S}'^0_\alpha(\mathbb{R}^{4n})$ invariante por translações, existe um funcional $W \in \mathcal{S}'^0_\alpha(\mathbb{R}^{4n-4})$ tal que

$$\mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_n)W_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \ , \quad \xi_k = x_k - x_{k+1} \ , \quad k = 1, \ldots, n-1 \ ,$$

e para $f \in \mathcal{S}^0_\alpha(\mathbb{R}^{4n})$,

$$\mathscr{W}_n(f) = \int_{\mathbb{R}^4} W_n(f_{(x)}) dx$$

onde

$$f_{(x)}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})f(x, x - \xi_1, x - \xi_1 - \xi_2, \ldots, x - \xi_1 - \cdots - \xi_{n-1}) \ .$$

A condição que $W \in \mathcal{S}'^0_\alpha(U)$, com U sendo um conjunto aberto em $\mathbb{R}^{4n-4}$ equivale à condição de que $\mathscr{W} \in \mathcal{S}'^0_\alpha(\mathcal{U})$, com $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R}^{4n} \mid (x_1 - x_2, \ldots, x_{n-1} - x_n) \in U\}$."

Então, devido ao lema acima, vemos que $\pi_* W_n \in \mathcal{S}'^0(U)$, com U sendo um cone aberto em $\mathbb{R}^{2(n-1)}$, se e somente se $\pi_*\mathscr{W}_n \in \mathcal{S}'^0(\mathcal{U})$, com $\mathcal{U} = \{x_e \in \mathbb{R}^{2n} \mid (x_{e_1} - x_{e_2}, \ldots, x_{e_{n-1}} - x_{e_n}) \in U\}$. O comportamento ultravioleta de $\pi_* W_n$ pode ser controlado através de uma regularização multiplicando sua transformada de Fourier $\pi_*\widetilde{W}_n$ por uma função de corte (normalmente chamada "cutoff") da forma $\omega_\Lambda(p_e) = \omega((P \cdot P)/\Lambda^2)$, onde $P = \sum_{j=1}^n p_{e_j}$, de forma que os ξ_{e_j}'s possuam p_{e_j}'s como momentos conjugados e o produto interno é calculado como no espaço de Minkowski. Aqui $\omega_\Lambda(p_e) \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, com $\omega_\Lambda(p_e) = 1$ para $|(P \cdot P)/\Lambda^2| \leq 1$. Assim a distribuição regularizada $\pi_* W_n^{(\Lambda)}$ configura-se como uma função analítica que possui no máximo um crescimento polinomial (em outras palavras, $\pi_* W_n^{(\Lambda)}$ é uma distribuição temperada, ou mais precisamente, é a restrição $\pi_* W_n^{(\Lambda)}|_{\mathcal{S}^0}$). Agora, considere a transformada de Fourier-Laplace inversa $\pi_* \mathbf{W}_n^{(\Lambda)}$ da distribuição $\pi_* \widetilde{W}_n^{(\Lambda)}$. Da mesma forma que no caso ordinário, as funções de Wightman $\pi_* \mathbf{W}_n^{(\Lambda)}$ tornam-se funções analíticas quando as variáveis ξ_{e_j} são complexificadas para $\zeta_{e_j} = \xi_{e_j} - i\eta_{e_j}$. Portanto as funções generalizadas de Wightman $\pi_* \mathbf{W}_n^{(\Lambda)}(\zeta_{e_1}, \ldots, \zeta_{e_{n-1}})$ são funções de $2(n-1)$ variáveis complexas no tubo $\mathscr{T}_{n-1} = \mathbb{R}^{2(n-1)} - i\mathscr{V}_+^{(n-1)}$, tal que $\mathscr{V}_+$ é um subcone do cone de luz do futuro V_+:

$$\mathscr{V}_+ = \left\{ (\eta_e, \vec{\eta}_m) \in V_+ \;\middle|\; \eta_e^2 > 0, \eta^0 > 0, \vec{\eta}_m = 0 \right\} . \tag{3.6.1}$$

Usando os resultados do teorema IX.16 in [58], que rege sob a analiticidade e definine valores limites de distribuições no tubo acima referido, temos que $\pi_* \mathbf{W}_n^{(\Lambda)}(\zeta_{e_1}, \ldots, \zeta_{e_{n-1}})$ possui

$$\pi_* W_n^{(\Lambda)}(\xi_{e_1}, \ldots, \xi_{e_{n-1}}) \pi_* \mathscr{W}_n^{(\Lambda)}(x_{e_1}, \ldots, x_{e_n}) \ ,$$

como valor limite quando $\eta_{e_j} \to 0$, no sentido das distribuições. Além disto, desde que esta regularização preserva a covariância de Lorentz, as funções $\pi_* \mathbf{W}_n^{(\Lambda)}$ podem ser analiticamente continuadas para o tubo estendido $\mathscr{T}_{n-1}^{\text{ext.}}$ aplicando-se para isto o Teorema BHW, observando que as funções assim continuadas são covariantes sob o grupo complexo de Lorentz $\mathscr{L}_+(\mathbb{C})$. Note que a complexificação de $O(1,1)$ é realizada de modo análogo à do grupo $O(1,3)$. Note também que as transformações de $\mathscr{L}_+(\mathbb{C})$ deixam as coordenadas magnéticas invariantes [64]. Segue-se que $WF_A(\pi_* \mathscr{W}_n^{(\Lambda)}) \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathscr{V}_+^\circ$ (resultado que podemos encontrar em [30] - teorema 8.4.8), onde $\mathscr{V}_+^\circ$ é um cone fechado (na verdade o cone convexo dual de $\mathscr{V}_+$):

$$\mathscr{V}_+^\circ = \left\{ p_e \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; p_e \cdot \eta_e \geq 0, \forall \eta_e \in \mathscr{V}_+ \right\} .$$

Desde que $\pi_* \widetilde{W}_n^{(\Lambda)}$ coincide com $\pi_* \widetilde{W}_n$ numa vizinhança de origem que aumenta indefinidamente com $\Lambda \to \infty$, então $\pi_* \mathscr{W}_n^{(\Lambda)} \xrightarrow{\Lambda \to \infty} \pi_* \mathscr{W}_n$. Com isso, podemos concluir também que $WF_A(\pi_* \mathscr{W}_n) \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathscr{V}_+^\circ$. O cone dual $\mathscr{V}_+^\circ$ pode então ser calculado, resultando em:

$$\mathscr{V}_+^\circ = \left\{ (p_{e_1}, \ldots, p_{e_n}) \;\middle|\; p_{e_n}, p_{e_{n-1}} + p_{e_n}, \ldots, \sum_{j=2}^{n} p_{e_j} \in V_{e+}, \sum_{j=1}^{n} p_{e_j} = 0 \right\}.$$

Vale notar que o conjunto

$$\Big\{ \big((x_{e_1}, p_{e_1}), \ldots, (x_{e_n}, p_{e_n})\big) \;\Big|\; (x_{e_1}, \ldots, x_{e_n}) \text{ não é totalmente tipo espaço e } p_{e_n}, p_{e_{n-1}} + p_{e_n}, \ldots, \sum_{j=2}^{n} p_{e_j} \in V_{e+}, \sum_{j=1}^{n} p_{e_j} = 0 \Big\}$$

está contido em Γ_n. Isto é provado da mesma forma procedida no teorema 4.6 em [11] (seu enunciado encontra-se no capítulo anterior) mostrando que aμSC é compatível com a condição espectral na Ref. [64], ou de outra forma, mostrando que o operador espectral de momento está no "*edge*" de luz do futuro $\mathsf{Sp}(P) = \{(p^0)^2 - (p^1)^2 \mid p^0 \geq 0\}$. Reunindo as asserções acima, temos que os seguinte lema fica demonstrado:

Lema 3.6.1. *Se as funções generalizados de Wightman de n pontos, $\pi_*\mathscr{W}_n$, são valores limites (no sentido das distribuições) de funções analíticas no tubo $\mathscr{T}_{n-1} = \mathbb{R}^{2(n-1)} - i\mathscr{V}_1^{(n-1)}$, então cada função de n pontos $\pi_*\mathscr{W}_n \in S'^0(\mathbb{R}^{2n})$ satisfaz a $a\mu SC$.*

O ponto chave desta discussão está inserido no seguinte teorema:

Teorema 3.6.2. *As funções generalizadas de Wightman de n pontos $\mathscr{W}_n(x_1,\ldots,x_n) \in S'^0(\mathbb{R}^{4n})$ satisfaz o $a\mu SC$.*

Prova. Dado que $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ é a projeção na direção x_e, então a matriz Jacobiana tem a forma $\pi'_x = (1,0)$ e observando resultados sobre o conjunto de frente de ondas e seus "pushforwards"(Cap.1), temos que $WF_A(\pi_*\mathscr{W}_n)$ está contido em

$$\left\{ \big((x_{e_1}, p_{e_1}), \ldots, (x_{e_n}, p_{e_n})\big) \;\Big|\; \big((x_{e_1}, \vec{x}_{m_1}, p_{e_1}, 0), \ldots, (x_{e_n}, \vec{x}_{m_n}, p_{e_n}, 0)\big) \in WF_A(\mathscr{W}_n) \right\} .$$

O que nos leva a escrever que $WF_A(\mathscr{W}_n) \subset \Gamma_n$.

É importante não deixar de frisar que as singularidades das funções generalizadas de Wightman de n pontos $\pi_*\mathscr{W}_n$ estão localizadas de uma forma natural no conjunto das projeções daqueles pontos onde o conjunto de frente de ondas analítico das funções generalizadas $\mathscr{W}_n$ possui direções singulares que são perpendiculares ao plano não comutativo $\vec{x}_m = (x^2, x^3)$.

Considerando que o conjunto de frente de ondas analítico é independente do sistema de coordenadas escolhido, a aμSC pode ser vista como uma versão microlocal, no espaço de Fourier, do suporte de uma distribuição, no sentido de que a distribuição está localizada nas vizinhanças de um ponto e as propriedades de suporte de sua transformada de Fourier são então substituídas pelas propriedades de decaimento rápido (note aqui que a transformada de Fourier de uma distribuição é essencialmente uma noção dependende dos sistema de coordenadas). Esta observação indica que o conjunto de frente de ondas analítico apresenta-se como um objeto matemático relevante para uma generalização da condição espectral em TQCNC.

3.7 Prova do Teorema CPT e Spin-Estatística

No que se segue mostraremos como alguns resultados estruturais em TQCNC podem ser derivados dos argumentos até aqui apresentados. Algumas discussões acerca da existência da simetria CPT [64, 82, 83] e da conexão entre *Spin*-Estatística [82] foram implementadas. Provas destes resultados podem usualmente ser encontradas na literatura, como em [48], lembrando sempre que o caráter temperado das distribuições possui um papel relevante nas demostrações. Na abordagem apresentada aqui, as origens das dificuldades encontradas baseiam-se na substituição de funções testes de suporte compacto, uma vez que para funcionais pertencente ao espaço S'^0 a noção de suporte torna-se inadequada. Lücke [70, 71] contorna um problema parecido usando propriedades analíticas de valores esperados no vácuo sobre o espaço de momento, analisando os envelopes de holomorfia relevantes. Mais recentemente, uma elegante alternativa para a solução deste problema foi apresentatada por Soloviev [72, 73, 74], onde em seus trabalhos ele usa a noção do conjunto de frente de ondas analítico e um tipo de teorema de unicidade para distribuições. Note que o foco principal de seu trabalho não está no âmbito de teorias não comutativas. Novamente alertamos para o fato de discutiremos aqui os Teoremas CPT e *Spin*-Estatística somente para o campo escalar $\varphi(x)$. Primeiramente apresentaremos a seguinte proposição, de fundamental importância nos resultados subsequentes:

Proposição 3.7.1. $\mathscr{W}_n(x_1, \dots, x_n) - \mathscr{W}_n(-x_1, \dots, -x_n) = 0$.

Prova. Definimos, por ora, $F(\hat{x}) = \mathscr{W}_n(x_1, \dots, x_n) - \mathscr{W}_n(-x_1, \dots, -x_n)$ em $S^0(\mathbb{R}^{4n})$. (i) Temos então que o supp $\widetilde{F} \subset V_{e+} \times \cdots \times V_{e+}$, devido às propriedades da aμSC, uma vez que $F(\hat{x})$ é a diferença entre duas distribuições que possuem o conjunto de frente de ondas analítico contido em Γ_n. Afirmamos também que $WF(F(\hat{x})) \subset WF(\mathscr{W}_n) \cup WF(\mathscr{W}_n) \subset \Gamma_n$, o que pode ser comprovado pela aplicação de regras determinadas pelo conjunto de frente de ondas analítico referentes à soma de distribuições, o que consequentemente nos faz inferir que $F(\hat{x})$ satisfaz a aμSC. Desta forma a projeção sobre a segunda coordenada $\pi_2 WF(F(\hat{x}))$ está no cone $V_{e+} \times \cdots \times V_{e+}$ determinado pela condição espectral. (ii) $F(\hat{x})$ é carregado por $(\complement \mathscr{J}_{e_n}) \times \mathbb{R}^{2n}$. Podemos ver claramente este resultado tendo em mente que a propriedade de nuclearidade de $S^0(\mathbb{R}^{4n})$ implica em $\mathscr{W}_n$ ser um funcional multilinear podendo ser unicamente definido como $\mathcal{W}_n(f, g)$ em $S'^0(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n})$, com uma separação contínua sobre $f \in S^0(\mathbb{R}^{2n})$ e $g \in S^0(\mathbb{R}^{2n})$, definidas por

$$\int \prod_{i=1}^{n} d^2 x_{e_i} d^2 \vec{x}_{m_i} \, \mathscr{W}_n((x_{e_1}, \vec{x}_{m_1}), \dots, (x_{e_n}, \vec{x}_{m_n})) f(x_{e_1}, \dots, x_{e_n}) g(\vec{x}_{m_1}, \dots, \vec{x}_{m_n}) \, .$$

Obtemos então a função generalizada a seguir passando a considerar a diferença de coordenadas ξ_k

$$\mathscr{W}_n((x_{e_1}, \vec{x}_{m_1}), \dots, (x_{e_n}, \vec{x}_{m_n})) W_n((\xi_{e_1}, \vec{\xi}_{m_1}), \dots, (\xi_{e_{n-1}}, \vec{\xi}_{m_{n-1}})) \, ,$$

em $S'^0(\mathbb{R}^{2(n-1)} \times \mathbb{R}^{2(n-1)})$, dependente das variáveis $\xi_{e_i} \in \mathbb{R}^{2(n-1)}$ e $\vec{\xi}_{m_i} \in \mathbb{R}^{2(n-1)}$. Notando que a estrutura causal da teoria é determinada pela simetria $O(1,1)$, usamos os mesmos passos que na seção precedente: procedemos à continuação analítica somente com respeito às coordenadas "elétricas" $x_e = (x^0, x^1)$. Mantendo-se as coordenadas "magnéticas" fixas, regularizamos a transformada de Fourier $W_n((\xi_{e_1}, \vec{\xi}_{m_1}), \ldots, (\xi_{e_{n-1}}, \vec{\xi}_{m_{n-1}}))$ com uma função de corte invariante $\omega_\Lambda(p_e) = \omega((P \cdot P)/\Lambda^2)$. A transformada inversa de Fourier-Laplace $\mathbf{W}_n^{(\Lambda)}$ da distribuição $\widetilde{W}_n^{(\Lambda)}$ por sua vez torna-se uma função analítica quando ξ_{e_j} são complexificadas via $\zeta_{e_j}\xi_{e_j} - i\eta_{e_j}$. A função generalizada $\mathbf{W}_n^{(\Lambda)}((\zeta_{e_1}, \vec{\xi}_{m_1}), \ldots, (\zeta_{e_{n-1}}, \vec{\xi}_{m_{n-1}}))$ é então uma função analítica de $2(n-1)$ variáveis complexas contidas no tubo $\mathscr{T}_{n-1} = \mathbb{R}^{2(n-1)} - i\mathscr{V}_+^{(n-1)}$, nas direções "elétricas", onde $\mathscr{V}_+$ é o subcone (3.6.1). Supondo que a função $\mathbf{W}_n^{(\Lambda)}$ tem caráter temperado, esta pode ser analiticamente continuada no tubo estendido $\mathscr{T}_{n-1}^{\text{ext.}}$ via o Teorema BHW, e esta função agora continuada é covariante sob o grupo de Lorentz $\mathscr{L}_+(\mathbb{C}) \times SO(2)$. Além disso, $\mathbf{W}_n^{(\Lambda)}$ possui

$$W_n^{(\Lambda)}((\xi_{e_1}, \vec{\xi}_{m_1}), \ldots, (\xi_{e_{n-1}}, \vec{\xi}_{m_{n-1}})) = \mathscr{W}_n^{(\Lambda)}((x_{e_1}, \vec{x}_{m_1}), \ldots, (x_{e_n}, \vec{x}_{m_n}))$$

como valor limite quando $\eta_{e_j} \to 0$. Desta forma, a igualdade

$$\mathscr{W}_n^{(\Lambda)}(x_1, \ldots, x_n) = \mathscr{W}_n^{(\Lambda)}(-x_1, \ldots, -x_n)$$

vale no domínio de analiticidade correspondente, levando-se em conta que a inversão das quatro coordenadas espaço-temporal é o produto das transformações $I_{st} \in \mathscr{L}_+(\mathbb{C})$ (veja a Eq. 3.5 em [64]) por uma rotação de 180 graus via $SO(2)$. Como consequência, a distribuição temperada $\widetilde{F}^\Lambda = \mathscr{W}_n^{(\Lambda)}(x_1, \ldots, x_n) - \mathscr{W}_n^{(\Lambda)}(-x_1, \ldots, -x_n)$ desaparece em $\mathscr{J}_{e_n} \times \mathbb{R}^{2n}$ e sua restrição em S^0 é carregada por $(\complement\mathscr{J}_{e_n}) \times \mathbb{R}^{2n}$. Visto que o espaço $S^0(\mathbb{R}^{2n})$ é denso em $S^0(\complement\mathscr{J}_{e_n})$, então $\widetilde{F}^\Lambda$ coincide com $\widetilde{F}$ em uma vizinhança da origem que aumenta quando $\Lambda \to \infty$, com a função generalizada $F(\hat{x}) \in S'^0(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n})$ sendo estendida unicamente ao espaço $S^0((\complement\mathscr{J}_{e_n}) \times \mathbb{R}^{2n})$. *(iii)* $F(\hat{x}) = 0$. Conclusão observada como consequência da aplicação, no caso aqui particular, do teorema 4 em [73], cujo o enunciado se segue: " Seja $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição não trivial cujo suporte está contido em algum cone próprio V. Então somente $\mathbb{R}^n$ (completo) pode ser o cone carregador de $\widetilde{u}$ ". Desta forma, supp $\widetilde{F} \subset V_{e_1} \times \cdots \times V_{e_1}$ é compatível com a propriedade de $F(\hat{x})$ ser carregado por $(\complement\mathscr{J}_{e_n}) \times \mathbb{R}^{2n}$ somente quando $F(\hat{x}) = 0$, uma vez que apenas $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ pode ser o cone carregador de $F(\hat{x})$. Temos então a proposição provada.

3.7.1 Invariância de CPT

Seja $\varphi(x)$ um campo escalar Hermitiano. Em termos de funções de Wightman, sabemos que a condição necessária e suficiente para existência da simetria CPT é dada por:

$$\mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_n) = \mathscr{W}_n(-x_n, \ldots, -x_1) \ . \tag{3.7.1}$$

Se o caráter temperado da distribuição for assumido, a prova da igualdade acima dada por Jost [84] parte da condição de comutatividade local fraca (CLF), que estabelece que o valor esperado no vácuo do comutador de n campos escalares desaparece fora do cone de luz, que em termos de funções de Wightman significa o seguinte:

$$\mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_n) - \mathscr{W}_n(x_n, \ldots, x_1) = 0 \ , \quad \text{for} \quad x_k - x_{k+1} \in \mathscr{J}_n \ . \tag{3.7.2}$$

A prova de Jost de que a condição CLF é equivalente a simetria CPT resulta do fato de que o grupo próprio complexo de Lorentz contém totalmente as inversões espaço-temporais. Com isso, a igualdade $\mathscr{W}_n(x_n, \ldots, x_1) = \mathscr{W}_n(-x_n, \ldots, -x_1)$ é garantida, levando-se em conta a propriedade de simetria $\mathscr{J}_n = -\mathscr{J}_n$ em todo o domínio estendido de analiticidade, via o Teorema BHW.

Teorema 3.7.2 (Teorema CPT modificado). *Em um teoria de campo escalar não comutativa onde os axiomas de Wightman modificados são satisfeitos, a condição assintótica fraca é equivalente a invariância CPT.*

Prova. Uma vez assumindo a condição de comutatividade assintótica fraca, temos a seguinte igualdade

$$\mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_n) = \mathscr{W}_n(x_n, \ldots, x_1) \ , \tag{3.7.3}$$

para uma separação espacial suficientemente grande dos argumentos de $\mathscr{W}_n$. Subtraindo o funcional $\mathscr{W}_n(-x_n, \ldots, -x_1)$ de ambos os lados em (3.7.3) conseguimos então a seguinte expressão:

$$\Big[\mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_n) - \mathscr{W}_n(-x_n, \ldots, -x_1)\Big]\Big[\mathscr{W}_n(x_n, \ldots, x_1) - \mathscr{W}_n(-x_n, \ldots, -x_1)\Big] \ .$$

Agora, de acordo com a Proposição 3.7.1, a diferença das distribuições do lado direito desaparece, implicando invariância de CPT. A volta é diretamente provada, notando que se a invariância de CPT existe, temos que pelos mesmos argumentos a condição de comutatividade assintótica fraca é satisfeita.

3.7.2 Conexão Spin-Estatística

Estabeleceremos nesta seção o Teorema de conexão *Spin*-Estatística para o caso particular da teoria não comutativa dos campos escalar abordada neste capítulo, lembrando ainda que nos servimos sempre da simetria do subgrupo $SO(1,1) \times SO(2)$. Para uma caso mais geral, principalmente quando campos de *gauge* estão presentes, é necessário um estudo mais cuidadoso uma vez que devemos agora considerar o aparecimento de uma métrica indefinida, que invalida o teorema de conexão devido a existência de *fermions escalares* como os "*ghosts*" de Faddeev-Popov.

Teorema 3.7.3 (Teorema *Spin*-Estatística). *Suponha que φ e seu conjugado Hermitiano φ^* satisfaçam a condição de comutatividade assintótica fraca com uma conexão de Spin-Estatística tida como "errada". Além disso, assumindo também que $W_2(x_1 - x_2) = (\Omega_o, \varphi(x_1)\varphi^*(x_2)\Omega_o)$ satisfaz a aμSC, então $\varphi(x)\Omega_o = \varphi^*(x)\Omega_o = 0$.*

Prova. Tendo em mente a conexão entre *Spin*-Estatística anômala, a condição de comutatividade assintótica fraca implica que

$$W_2(\xi) + W_2^{\mathrm{tr}}(-\xi) \in S'^0(V_{e_1} \times \mathbb{R}^2) \ , \quad \text{onde} \quad \xi = x_1 - x_2 \ , \tag{3.7.4}$$

com $W_2(x_1 - x_2) = (\Omega_o, \varphi(x_1)\varphi^*(x_2)\Omega_o)$ e $W_2^{\mathrm{tr}}(x_2 - x_1) = (\Omega_o, \varphi^*(x_2)\varphi(x_1)\Omega_o)$. Usando a mesma linha de raciocínio empregada na Proposição 3.7.1, temos que para a função regularizada $W_2^{(\Lambda)}(\xi)$, a igualdade $W_2^{(\Lambda)}(\xi) = W_2^{(\Lambda)}(-\xi)$ vale, para $\xi^2 < 0$, via o Teorema BHW. Desde que a diferença não regularizada $W_2(\xi) - W_2(-\xi)$ admite uma extensão contínua para o espaço $S^0(V_{e_1} \times \mathbb{R}^2)$ quando $\Lambda \to \infty$, ganhamos a possibilidade de reescrever a condição (3.7.4) como $W_2(\xi) + W_2^{\mathrm{tr}}(\xi)$. O Teorema 3.6.2 nos permite concluir que temos sempre $W_2(\xi)$ e $W_2^{\mathrm{tr}}(\xi)$ satisfazendo a aμSC, e pelas regras que regem valores para o conjunto de frente de ondas para soma de distribuições temos também que $\mathrm{supp}(\widetilde{W}_2 + \widetilde{W}_2^{\mathrm{tr}}) \subset V_{e_1}$. Portanto, pela Proposição 3.7.1, podemos escrever $W_2(\xi) + W_2^{\mathrm{tr}}(\xi) \equiv 0$. Finalmente, após tomarmos uma média dos campos com uma função teste, obtemos $\|\phi^*(f)\Omega_o\|^2 + \|\phi(f)\Omega_o\|^2 = 0$, que resulta em $\varphi(x)\Omega_o = \varphi^*(x)\Omega_o = 0$.

3.8 Considerações Finais

Neste capítulo, aplicamos algumas idéias contidas em trabalhos de Soloviev [72]-[75] para estender a abordagem axiomática de Wightman para uma TQCNC particular. Assim, dois resultados da TQC ordinária experimentalmente testados com alto grau de precisão e que supostamente possuem validade universal, a simetria CPT e conexão *Spin*-Estatística, foram analizados. Verificamos que os mesmos continuam valendo para o caso de uma teoria não comutativa, em especial no caso tipo espaço-espaço ($\theta_e = 0$), se substituirmos a comutatividade local por uma condição mais fraca de comutatividade, isto é, que os campos comutam para uma separação espacial suficientemente grande, chamada comutatividade assintótica. A aμSC teve um papel fundamental nas provas aqui apresentadas. Embora a aμSC não restrinja o suporte das transformadas Fourier das funções de Wightman de n-pontos $\mathscr{W}_n$, ela vem a ser compatível com a condição espectral usual, revelando assintoticamente uma alta frequência remanescente da condição espectral, que impõe localmente uma restrição através do grupo de translação no suporte da transformada de Fourier.

Mais recentemente, Chaichian *et al.* [87] propuseram alternativamente novas funções de Wightman como valores esperados no vácuo de produtos de operadores de campos em um espaço-tempo não-comutativo. Usando esta forma (chamada de forma de Weyl) das funções de Wightman, via sua construção a partir do produto de operadores de campo alternativo (o produto múltiplo de Moyal - $\star$), eles derivam os Teoremas de CPT e conexão *Spin*-Estatística. Uma das vantagem desta formulação consiste no fato de se incluir explicitamente os efeitos não-comutativos da teoria, devido ao caráter não-local do produto de Moyal, o que não acontece com o formalismo aqui empregado e por Gaumé-Mozo, o qual aparenta estarmos trabalhando com teorias comutativas em D=1+1, pois o parâmetro de deformação θ indicaria apenas que a simetria de Lorentz é reduzida para uma simetria menor. Cabe notar que o formalismo de [87] pode ser implementado no trabalho aqui realizado, como procedido em [90].

Por fim, devemos tomar um cuidado especial com os resultados derivados no último capítulo, quando nos reportamos ao conceito de partícula de acordo com a bem conhecida prescrição de Wigner (a noção de partículas deve ser desenvolvida em $4D$). Vimos que a modificação do grupo de simetria de Lorentz nos redireciona a adotar uma redução dimensional do cone de luz para duas dimensões ("*edge*" de luz), de forma que a condição do espectro de energia positiva limita-se a estas dimensões, e consequente não nos leva a uma noção rigorosa de partículas em $4D$. Contudo, este problema pode ser contornado ao reformularmos nosso desenvolvimento sob à luz das funções de Wightman propostas por Chaichian, visto que o conceito de partícula (associado ao usual hiperbolóide de massa) se mantém intacto em todas as quatro dimensões.[2]

[2]Gostaríamos de agradecer ao Prof. Bert Schroer por ter-nos chamado a atenção para teste ponto.

Epílogo: Uma Rota Futura

Tendo proposto a extensão de alguns aspectos estruturais que têm sido aplicados com sucesso no desenvolvimento de uma teoria quântica de campos propagando em uma variedade espaço-tempo geral (a chamada quantização semi-clássica) de modo a incluir modelos de supercampos em supervariedades, como visto na primeira parte do trabalho, seria interessante, como um passo natural seguinte, considerar o tratamento perturbativo de modelos de campos quânticos interagentes, em particular uma formulação da teoria da renormalização em supervariedades. O principal problema está inserido no fato de como definir de forma matemática e consistente todas as potências dos "superpolinômios" de Wick e seus produtos ordenados temporalmente para a teoria sem interação, que é o ponto de partida para a construção da definição pertubativa de supercampos com interação. O esquema desenvolvido para a renormalização por Epstein-Glaser é o formalismo adequado para o tratamento pretendido, uma vez que o último é formulado (diferentemente de outros esquemas) no espaço de configuração, fato que o torna apropriado para definir cuidadosamente uma renormalização perturbativa em espaços-tempo gerais. Nesta linha, alguns trabalhos recentes, não supersimétricos, podem ser encontradas em nas Refs.[16, 59].

No que diz respeito às teorias não locais, Kostelecký e Potting [93] estudaram as propriedades de invariância da simetria CPT para cordas bosônicas abertas, bem como para supercordas abertas. De acordo com este trabalho, a análise e a prova da invariância de CPT nitidamente carece de uma abordagem mais geral, visto que foi utilizado um método bastante particular, consistindo na introdução das transformações de C, P, e T (separadamente) da teoria de campo livre para cordas e depois examinando as propriedades das interações. O problema levantado pelos autores, como alegam, reside no fato de que o formalismo axiomático não inclui mudanças de modo a englobar o aspecto não local da teoria de corda, uma vez que estas se tratam de objetos estendidos. Como uma possível aplicação da análise desenvolvida no Capítulo 3, podemos estender o formalismo de modo a realizar um estudo das propriedades da simetria CPT nas teoria de cordas de um modo mais geral, com a natural inclusão da não localidade. Cabe notar que o estudo de propriedades físicas em teoria de cordas (como a conjugação de CPT) é de grande importância: apesar de a teoria ser formulada em escala de energia bastante alta (e consequentemente não podermos prová-la experimentalmete), podemos estabelecer sua respectiva teoria de campo efetiva em baixas energias. As possíveis diferenças (em comparação a uma TQC padrão), quando verificadas, podem indicar uma manifestação indireta da teoria de cordas.

Ainda nos reportando ao estudo de cordas, citamos que uma investigação das propriedades gerais da simetria de CPT foi proposta por Pasquinucci e Roland [94]. Porém, sua análise não comporta uma geometria de fundo geral, visto que o trabalho se resume ao estudo de teorias de cordas viajando no espaço de Minkowski. Mais uma vez vemos a alegação de que a abordagem axiomatizada é insuficiente para ser aplicada: os axiomas da localidade e da simetria de Lorentz não são mais satisfeitos, comprometendo o nível de generalidade pretendido. Como foi visto nesta tese, estes problemas devem ser revisitados, para isto, devemos tomar cuidados no sentido de aplicar os axiomas de Wightman *com suas adequadas modificações.*

Apêndice A

Prova da Proposição 2.8.1

Partindo do modelo de Wess-Zumino de quatro dimensões $(4-D)$ formulado em supercampos livres quirais e anti-quirais,[1] temos a ação:

$$S_{WZ} = \int d^8z\bar{\Phi}\Phi + \frac{1}{2}m\int d^6s\Phi^2 + \frac{1}{2}m\int d^6\bar{s}\bar{\Phi}^2 \tag{A.1}$$

considere também as relações [91]:

$$\begin{aligned} d^6s &= d^4xd^2\theta \\ d^6\bar{s} &= d^4xd^2\bar{\theta} \\ d^8s &= d^4xd^4\theta = d^4xd^2\theta d^2\bar{\theta} \end{aligned} \tag{A.2}$$

De modo a alcançarmos as equações de movimento, reescrevemos o campo $\Phi(\bar{\Phi})$ introduzindo os seguintes campos sem vínculos:

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{1}{4}\bar{D}^2S \\ \bar{\Phi} &= -\frac{1}{4}D^2\bar{S} \end{aligned} \tag{A.3}$$

Assim, a ação S_{WZ} pode ser expressa como:

$$-\frac{1}{4}\int d^8z\bar{\Phi}\bar{D}^2S - \frac{1}{8}\int d^2s\Phi\bar{D}^2S + + \text{ os termos complexos conjugados}$$

e usando o resultado

$$\frac{\delta}{\delta\Phi(z)}\int d^8z'\Phi(z')F(z') = -\frac{1}{4}\bar{D}^2F(z)$$

[1]Onde, para um campo quiral (anti-quiral) $\Phi\,(\bar{\Phi})$ temos $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0$ e $D_\alpha\bar{\Phi} = 0$, com $\bar{D}_{\dot{\alpha}}, D_\alpha$ sendo as derivadas covariante da supersimetria.

vemos que variação funcional nos fornece a equação de movimento quando introduzimos os termos de fonte $(J, \bar{J})$:

$$
\frac{1}{16}\bar{D}^2\Phi + \frac{m}{4}\Phi = -J
$$
$$
\frac{1}{16}D^2\Phi + \frac{m}{4}\bar{\Phi} = -\bar{J}.
$$

ou

$$
\begin{aligned}
(\partial^2 + m^2)\Phi &= \bar{D}^2\bar{J} - 4mJ \\
(\partial^2 + m^2)\bar{\Phi} &= D^2 J - 4m\bar{J}
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

Agora podemos encontrar as expressões para os superpropagadores com respeito às últimas equações. Assim, tomamos a variação funcional em relação as fontes $(\frac{\delta}{i\delta J}, \frac{\delta}{i\delta \bar{J}})$ das expressões acima:

$$
\begin{aligned}
(\partial^2 + m^2)\Delta_{\Phi\Phi}(z, z^{'}) &= 4im\delta_s(z, z^{'}) \\
(\partial^2 + m^2)\Delta_{\Phi\bar{\Phi}}(z, z^{'}) &= -iD^2\delta_{\bar{s}}(z, z^{'}) \\
(\partial^2 + m^2)\Delta_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}}(z, z^{'}) &= 4im\delta_{\bar{s}}(z, z^{'})
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

aqui $\Delta_{\Phi\Phi}(z, z^{'})$, $\Delta_{\Phi\bar{\Phi}}(z, z^{'})$ e $\Delta_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}}(z, z^{'})$ são os chamados propagadores associados aos campos $\Phi, \bar{\Phi}$, e as seguintes formas para $\delta_s, \delta_{\bar{s}}$ são válidas [92]:

$$
\begin{aligned}
\delta_s &= -e^{i(\theta\sigma\bar{\theta}^{'} - \theta^{'}\sigma\bar{\theta})\partial}\frac{1}{4}(\theta - \theta^{'})^2\delta^4(x - x^{'}) \\
\delta_{\bar{s}} &= -e^{i(\theta\sigma\bar{\theta}^{'} - \theta^{'}\sigma\bar{\theta})\partial}\frac{1}{4}(\bar{\theta} - \bar{\theta}^{'})^2\delta^4(x - x^{'})
\end{aligned}
\tag{A.6}
$$

Lembrando que os propagadores de Feymann (no espaço-tempo convencional) são soluções da seguinte equação, temos:

$$
\begin{aligned}
(\partial^2 + m^2)\Delta_F(x) &= -i\delta^4(x) \\
\Delta_F(x) &= -i(\partial^2 + m^2)^{-1}\delta^4(x),
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

assim voltamos às equações (A.5) e escrevemos:

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\Phi\Phi}(z, z^{'}) &= m\delta^2(\theta - \theta^{'})e^{i(\theta\sigma\bar{\theta}^{'} - \theta^{'}\sigma\bar{\theta})\partial}\Delta_F(x - x^{'}) \\
\Delta_{\Phi\bar{\Phi}}(z, z^{'}) &= e^{i(\theta\sigma\bar{\theta}^{'} - \theta^{'}\sigma\bar{\theta} - (\theta - \theta^{'})\sigma(\bar{\theta} - \bar{\theta}^{'}))\partial}\Delta_F(x - x^{'}) \\
\Delta_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}}(z, z^{'}) &= m\delta^2(\bar{\theta} - \bar{\theta}^{'})e^{i(\theta\sigma\bar{\theta}^{'} - \theta^{'}\sigma\bar{\theta})\partial}\Delta_F(x - x^{'})
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$

A justificativa para a denominção "superpropagadores" feita aqui se reduz ao fato de que estamos condensando a idéia de propagadores convencionais referentes às componentes (campos ordinários) dos supercampos, ou seja, em componentes, o superpropagador se torna um propagador. Escrevamos agora o supercampos quiral (anti-quiral) pela forma geral:

$$\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = U\Psi(x,\theta) \text{ (e resp. complexo conjugado)}$$

Onde $U = e^{i(\theta\sigma\bar{\theta})\partial}$ é um operador expandido em forma exponencial. [2] A expansão do supercampo em componentes é:

$$\Psi(x,\theta) = A(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta^2 F(x)$$

aqui, $A(x)$ e $F(x)$ são campos escalares e $\psi(x)$ é um campo espinorial. Desta forma podemos expressar $\Delta_{\Phi\Phi}$ como:

$$\Delta_{\Phi\Phi} \equiv \langle 0|T(\Phi(x,\theta,\bar{\theta}),\Phi(x',\theta',\bar{\theta}'))|0\rangle =$$

$$e^{i(\theta\sigma\bar{\theta}'-\theta'\sigma\bar{\theta})\partial}\langle 0|T(A(x),A(x'))|0\rangle + \theta^2\langle 0|T(F(x),A(x'))|0\rangle +$$

$$\theta'^2\langle 0|T(A(x),F(x'))|0\rangle - 2\theta^\alpha\theta'^\beta\langle 0|T(\psi_\alpha(x),\psi_\beta(x'))|0\rangle =$$

$$e^{i(\theta\sigma\bar{\theta}'-\theta'\sigma\bar{\theta})\partial} m(\theta-\theta')^2\Delta_F(x-x')$$

Identificando os termos correspondentes nos dois lados da equação com respeito às potências das variáveis Grassmaniannas, conluímos que somente os seguintes propagadores são não nulos:

$$\begin{aligned}
\langle 0|T(A(x),F(x'))|0\rangle &= \\
\langle 0|T(F(x),A(x'))|0\rangle &= -m\Delta_F(x-x') \\
\langle 0|T(\psi_\alpha(x),\psi_\beta(x'))|0\rangle &= -m\epsilon_{\alpha\beta}\Delta_F(x-x')
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Em analogia ao resultado acima, para o caso do superpropagador $\Delta_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}}$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle 0|T(\bar{A}(x),\bar{F}(x'))|0\rangle &= \\
\langle 0|T(\bar{F}(x),\bar{A}(x'))|0\rangle &= -m\Delta_F(x-x') \\
\langle 0|T(\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(x),\bar{\psi}_{\dot{\beta}}(x'))|0\rangle &= -m\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\Delta_F(x-x').
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Devemos ter cuidado com relação ao superpropagador "cruzado" $\Delta_{\Phi\bar{\Phi}}$. O lado direito possui uma depêndencia diferente sobre as variáveis de Grassmann. Mostra-se que ele pode ser reescrito como [92]:

$$\Delta_{\Phi\bar{\Phi}} = \frac{\bar{D}^2 D^2}{16}(\Box - m^2)^{-1}\delta^8(z,z'), \tag{A.11}$$

[2]Formalmente, $U = 1 + i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu - \frac{1}{2}\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\theta^\beta\sigma^\nu_{\beta\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_\mu\partial_\nu$

ou desenvolvido da seguinte forma:

$$\Box\theta^2\bar{\theta}^{'2}\Delta_F + \Delta_F - i\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{'\dot{\beta}}\partial_{\alpha\dot{\beta}}\Delta_F. \tag{A.12}$$

Assim, os únicos termos não nulos são aqueles cujas dependências nas variáveis de Grassmann são como acima, portanto, o lado esquerdo ($\Delta_{\Phi\bar{\Phi}} \equiv \langle 0|T(\Phi(x,\theta,\bar{\theta}),\bar{\Phi}(x^{'},\theta^{'},\bar{\theta}^{'}))|0\rangle$) em componentes resulta em:

$$\begin{aligned}
\langle 0|T(\bar{A}(x),\bar{A}(x^{'}))|0\rangle &= \Delta_F(x-x^{'})\\
\langle 0|T(F(x),\bar{F}(x^{'}))|0\rangle &= \Box\Delta_F(x-x^{'})\\
\langle 0|T(\psi_\alpha(x),\bar{\psi}_{\dot{\beta}}(x^{'}))|0\rangle &= -i\partial_{\alpha\dot{\beta}}\Delta_F(x-x^{'})
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Resumindo, temos que os superpropagadores nos fornecem (A.9), (A.10) e (A.13), que possuem informações sobre os propagadores ordinários (em componentes). Existem outras duas soluções relevantes para (A.7) diferentes do propagador de Feymann, as chamadas funções de Green avançada Δ_{adv} e retardada Δ_{ret}. De forma análoga, construímos superfunções de Green $\Delta^{adv}_{\Psi^i\Psi^j}$ e $\Delta^{ret}_{\Psi^i\Psi^j}$, onde $\Psi^i\Psi^j = \Phi\Phi, \Phi\bar{\Phi}, \bar{\Phi}\bar{\Phi}$.

$$\begin{aligned}
&\Delta^{adv(ret)}_{\Phi\Phi}(z,z^{'})m\delta^2(\theta-\theta^{'})e^{i(\theta\sigma\bar{\theta}^{'}-\theta^{'}\sigma\theta)\partial}\Delta^{adv(ret)}(x-x^{'})\\
&\Delta^{adv(ret)}_{\Phi\bar{\Phi}}(z,z^{'})e^{i(\theta\sigma\bar{\theta}^{'}-\theta^{'}\sigma\bar{\theta}-(\theta-\theta^{'})\sigma(\bar{\theta}-\bar{\theta}^{'})\partial}\Delta^{adv(ret)}(x-x^{'})\\
&\Delta^{adv(ret)}_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}}(z,z^{'})m\delta^2(\bar{\theta}-\bar{\theta}^{'})e^{i(\theta\sigma\bar{\theta}^{'}-\theta^{'}\sigma\bar{\theta})\partial}\Delta^{adv(ret)}(x-x^{'})
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Voltando às soluções não supersimétricas Δ^{adv}, e Δ^{ret}, estabelecemos:

$$\begin{aligned}
(\partial^2+m^2)\Delta^{adv} &= -i\delta^4(x)\\
(\partial^2+m^2)\Delta^{ret} &= -i\delta^4(x)
\end{aligned} \tag{A.15}$$

e portanto

$$(\partial^2+m^2)[\Delta^{ret}(x)-\Delta^{adv}(x)] = 0 \tag{A.16}$$

Note que $(\Delta^{ret}(x)-\Delta^{adv}(x))$ é exatamente a expressão da função de Pauli-Jordan (comutator) visto que:

$$\begin{aligned}
\Delta^{ret}-\Delta^{adv} &= \Theta(x^0-x^{'0})\langle 0|[\Phi(x),\Phi(x^{'})]|0\rangle - \Theta(x^{'0}-x^0)\langle 0|[\Phi(x),\Phi(x^{'})]|0\rangle\\
&= \Theta(x^0-x^{'0})\langle 0|[\Phi(x),\Phi(x^{'})]|0\rangle - \langle 0|[\Phi(x^{'}),\Phi(x)]|0\rangle\\
&- \Theta(x^{'0}-x^0)\langle 0|[\Phi(x),\Phi(x^{'})]|0\rangle - \langle 0|[\Phi(x^{'}),\Phi(x)]|0\rangle\\
&= \langle 0|[\Phi(x),\Phi(x^{'})]|0\rangle \equiv \Delta^{PJ}(x,x^{'}).
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Assim escrevemos também

$$(\partial^2+m^2)\Delta^{PJ}(x,x^{'}) = 0 \tag{A.18}$$

Fazendo uso de (A.5) e (A.14), conseguimos o resultado:

$$(\partial^2 + m^2)[\Delta^{ret}_{\Psi^i\Psi^j}(z,z') - \Delta^{adv}_{\Psi^i\Psi^j}(z,z')] = 0 \tag{A.19}$$

que nos fornece soluções como (A.18):

$$\begin{aligned}
\Delta^{ret}_{\Phi\Phi}(z,z') - \Delta^{adv}_{\Phi\Phi}(z,z') &= m\delta^2(\theta-\theta')e^{i(\theta\sigma\bar\theta'-\theta'\sigma\bar\theta)\partial}(\Delta^{ret}(x,x') - \Delta^{adv}(x-x'))\\
\Delta^{ret}_{\bar\Phi\Phi}(z,z') - \Delta^{adv}_{\bar\Phi\Phi}(z,z') &= e^{i(\theta\sigma\bar\theta'-\theta'\sigma\bar\theta-(\theta-\theta')\sigma(\bar\theta-\bar\theta')\partial}(\Delta^{ret}(x,x') - \Delta^{adv}(x-x'))\\
\Delta^{ret}_{\bar\Phi\bar\Phi}(z,z') - \Delta^{adv}_{\bar\Phi\bar\Phi}(z,z') &= m\delta^2(\bar\theta-\bar\theta')e^{i(\theta\sigma\bar\theta'-\theta'\sigma\bar\theta)\partial}(\Delta^{ret}(x,x') - \Delta^{adv}(x-x'))
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\Delta^{PJ}_{\Phi\Phi}(z,z') &= m\delta^2(\theta-\theta')e^{i(\theta\sigma\bar\theta'-\theta'\sigma\bar\theta)\partial}\Delta^{PJ}(x,x')\\
\Delta^{PJ}_{\bar\Phi\Phi}(z,z') &= e^{i(\theta\sigma\bar\theta'-\theta'\sigma\bar\theta-(\theta-\theta')\sigma(\bar\theta-\bar\theta')\partial}\Delta^{PJ}(x,x')\\
\Delta^{PJ}_{\bar\Phi\bar\Phi}(z,z') &= m\delta^2(\bar\theta-\bar\theta')e^{i(\theta\sigma\bar\theta'-\theta'\sigma\bar\theta)\partial}\Delta^{PJ}(x,x')
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Como um próximo passo, estudaremos estes comutadores em componentes para que possamos verificar sua consistência. Em termos de supercampos temos:

$$\begin{aligned}
\Delta^{ret}_{\Phi\Phi}(z,z') &\equiv \Theta(x^0 - x'^0)\langle 0|[\Phi(z),\Phi(z')]|0\rangle\\
\Delta^{adv}_{\Phi\Phi}(z,z') &\equiv \Theta(x'^0 - x^0)\langle 0|[\Phi(z),\Phi(z')]|0\rangle
\end{aligned} \tag{A.21}$$

onde $x^0(x'^0)$ é uma variável temporal, não grassmanniana. Combinando as expressões acima:

$$\Delta^{ret}_{\Phi\Phi}(z,z') - \Delta^{adv}_{\Phi\Phi}(z,z') = \langle 0|[\Phi(z),\Phi(z')]|0\rangle \equiv \Delta^{PJ}_{\Phi\Phi}(z,z')$$

Usando agora os campos expandidos como citado anteriormente, temos para o comutador que:

$$\begin{aligned}
\langle 0|[A(x)+\sqrt{2}\theta\psi(x)+\theta^2F(x), A(x')+\sqrt{2}\theta'\psi(x')+\theta'^2F(x')]|0\rangle &=\\
\langle 0|[A(x),A(x')]|0\rangle + \langle 0|[A(x),\sqrt{2}\theta'\psi(x')]|0\rangle + \langle 0|[A(x),\theta'^2F(x')]|0\rangle &+\\
\langle 0|[\sqrt{2}\theta\psi(x),A(x')]|0\rangle + \langle 0|[\sqrt{2}\theta\psi(x),\sqrt{2}\theta'\psi(x')]|0\rangle + \langle 0|[\sqrt{2}\theta\psi(x),\theta'^2F(x')]|0\rangle &+\\
\langle 0|[\theta^2F(x),A(x')]|0\rangle + \langle 0|[\theta^2F(x),\sqrt{2}\theta'\psi(x')]|0\rangle + \langle 0|[\theta^2F(x),\theta'^2F(x')]|0\rangle &
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Como vimos, devido à atuação exponencial do operador U, podemos escrever:

$$\langle 0|[\Psi(x,\theta),\Psi(x',\theta')]|0\rangle = m\delta^2(\theta-\theta')\Delta^{PJ}(x-x'). \tag{A.23}$$

De acordo com o desenvolvimento de $m\delta^2(\theta-\theta')\Delta^{PJ}(x-x')$, sabemos que ele possui apenas termos em $\theta^2, \theta'^2, \theta\theta'$, então conseguimos:

$$\begin{aligned} \langle 0|[A(x), F(x')]|0\rangle &= \\ \langle 0|[F(x), A(x')]|0\rangle &= -m\Delta^{PJ}, \end{aligned} \tag{A.24}$$

e o termo $\langle 0|[\sqrt{2}\theta\psi(x), \sqrt{2}\theta'\psi(x')]|0\rangle$ pode ser reescrito como o seguinte anti-comutador uma vez que θ e θ' possuem características não comutantes:

$$\langle 0|\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')\}|0\rangle = -m\epsilon_{\alpha\beta}\Delta^{PJ}$$

Os últimos resultados são esperados, se nos baseamos na forma em componentes da Lagrangeana de Wess-Zumino. Repetindo os argumentos para o caso do $\Delta^{PJ}_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}}$, temos que:

$$\begin{aligned} \Delta^{PJ}_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} = \langle 0|[\bar{\Phi}(z), \bar{\Phi}(z')]|0\rangle &\Rightarrow \\ \langle 0|[\bar{A}(x), \bar{F}(x')]|0\rangle &= \\ \langle 0|[\bar{F}(x), \bar{A}(x')]|0\rangle &= -m\Delta^{PJ}(x-x') \\ \langle 0|\{\bar{\psi}_{\dot\alpha}(x), \bar{\psi}_{\dot\beta}(x')\}|0\rangle &= -m\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\Delta^{PJ}(x-x') \end{aligned} \tag{A.25}$$

Para o superpropagador $\Delta^{PJ}_{\Phi\bar{\Phi}}$, lembramos que o lado direito deve ser proporcional à $\Box\theta^2\bar{\theta}'^2\Delta^{PJ}(x-x') + \Delta^{PJ}(x-x') - i\theta^\alpha\bar{\theta}'^{\dot\beta}\partial_{\alpha\dot\beta}\Delta^{PJ}(x-x')$, portanto, ao realizar a expansão por componentes, somente os termos de mesma dependência nas variáveis de Grassmann permanecem:

$$\begin{aligned} \langle 0|[A(x), \bar{A}(x')]|0\rangle &= \Delta^{PJ}(x-x') \\ \langle 0|[F(x), \bar{F}(x')]|0\rangle &= \Box\Delta^{PJ}(x-x') \\ \langle 0|\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_{\dot\beta}(x')\}|0\rangle &= -i\partial_{\alpha\dot\beta}\Delta^{PJ}(x-x') \end{aligned} \tag{A.26}$$

Voltando-se, agora, à outra solução da equação homogênea:

$$(\partial^2 + m^2)G = 0, \tag{A.27}$$

e usando o fato que Δ_F, Δ^{adv} e Δ^{ret} são soluções não homogêneas, definimos

$$+2\Delta_F - \Delta^{adv} - \Delta^{ret} \equiv \Delta^{(1)} \tag{A.28}$$

que naturalmente resolve (A.27). Do ponto de vista de cálculos sobre campos, temos:

$$2\langle 0|T(\Phi(x), \Phi(x'))|0\rangle - \theta(x^0 - x'^0)\langle 0|[\Phi(x), \Phi(x')]|0\rangle -$$

$$\theta(x'^0 - x^0)\langle 0|[\Phi(x), \Phi(x')]|0\rangle = \theta(x^0 - x'^0)\langle 0|\Phi(x), \Phi(x')|0\rangle +$$

$$\theta(x^{'0} - x^0)\langle 0|\Phi(x), \Phi(x^{'})|0\rangle + \theta(x^0 - x^{'0})\langle 0|\Phi(x^{'}), \Phi(x)|0\rangle +$$

$$\theta(x^{'0} - x^0)\langle 0|\Phi(x^{'}), \Phi(x)|0\rangle = \langle 0|\{\Phi(x), \Phi(x^{'})\}|0\rangle.$$

Este resultado nos permite construir outra função de Green, que chamamos de função de Hadamard (possuidora da forma da função de dois pontos de Hadamard):

$$\Delta^{(1)} = \langle 0|\{\Phi(x), \Phi(x^{'})\}|0\rangle$$

A questão presente é saber da possibilidade de se estender o último cálculo para uma superfunção $\Delta^{(1)}_{\Psi^i\Psi^j}$. Isto acontece visto que podemos manipular $\Delta^{PJ}_{\Psi^i\Psi^j}$ de maneira similar desde que $\Delta_F(x-x^{'})$, $\Delta^{ret}(x-x^{'})$ e $\Delta^{adv}(x-x^{'})$ podem ser usados para definir as superfunções de Green $\Delta_{\Psi^i\Psi^j}(z-z^{'})$, $\Delta^{ret}_{\Psi^i\Psi^j}(z-z^{'})$ e $\Delta^{adv}_{\Psi^i\Psi^j}(z-z^{'})$. Podemos também combinar estes últimos três termos $(2\Delta_{\Psi^i\Psi^j}(z-z^{'})-\Delta^{ret}_{\Psi^i\Psi^j}(z-z^{'})-\Delta^{adv}_{\Psi^i\Psi^j}(z-z^{'}))$ para alcançarmos o anti-comutador de supercampos no superespaço. Se $\Delta_{\Psi^i\Psi^j}(z-z^{'})$, $\Delta^{ret}_{\Psi^i\Psi^j}(z-z^{'})$ e $\Delta^{adv}_{\Psi^i\Psi^j}(z-z^{'})$ resolvem a super-equação não homogênea (A.4), a combinação $+2\Delta_{\Psi^i\Psi^j}(z-z^{'})-\Delta^{ret}_{\Psi^i\Psi^j}(z-z^{'}) - \Delta^{adv}_{\Psi^i\Psi^j}(z-z^{'})$ certamente resolverá a sua respectiva homogênea:

$$(\partial^2 + m^2)(+2\Delta_{\Psi^i\Psi^j}(z-z^{'}) - \Delta^{ret}_{\Psi^i\Psi^j}(z-z^{'}) - \Delta^{adv}_{\Psi^i\Psi^j}(z-z^{'})) = 0 \quad \text{ou}$$

$$(\partial^2 - m^2)\Delta^{(1)}_{\Psi^i\Psi^j} = 0 \tag{A.29}$$

Sabendo que cada superfunção pode ser expressa em termos de $\Delta_F(x-x^{'})$, $\Delta^{ret}(x-x^{'})$ e $\Delta^{adv}(x-x^{'})$, é direto observar que:

$$+2\Delta_{\Phi\Phi}(z-z^{'}) - \Delta^{ret}_{\Phi\Phi}(z-z^{'}) - \Delta^{adv}_{\Phi\Phi}(z-z^{'}) = 2m\delta^2(\theta-\theta^{'})e^{i(\theta\sigma\bar{\theta}^{'}-\theta^{'}\sigma\bar{\theta})\partial}\Delta_F(x-x^{'}) -$$

$$m\delta^2(\theta-\theta^{'})e^{i(\theta\sigma\bar{\theta}^{'}-\theta^{'}\sigma\bar{\theta})\partial}\Delta^{adv}(x-x^{'}) - m\delta^2(\theta-\theta^{'})e^{i(\theta\sigma\bar{\theta}^{'}-\theta^{'}\sigma\bar{\theta})\partial}\Delta^{ret}(x-x^{'}) =$$

$$m\delta^2(\theta-\theta^{'})e^{i(\theta\sigma\bar{\theta}^{'}-\theta^{'}\sigma\bar{\theta})\partial}(2\Delta_F - \Delta^{adv} - \Delta^{ret}) = m\delta^2(\theta-\theta^{'})e^{i(\theta\sigma\bar{\theta}^{'}-\theta^{'}\sigma\bar{\theta})\partial}\Delta^{(1)}$$

Assim, expandindo o lado esquerdo $(\Delta^{(1)}_{\Phi\Phi})$ em componentes será suficiente para conhecermos quais anti-comutadores não se anularão, tendo em mente, é claro, a seguinte expansão:

$$+2\Delta_{\Phi\Phi}(z-z^{'}) - \Delta^{ret}_{\Phi\Phi}(z-z^{'}) - \Delta^{adv}_{\Phi\Phi}(z-z^{'}) =$$

$$
\begin{aligned}
2 & \quad (-m\Delta_F(x-x^{'}) - m\epsilon_{\alpha\beta}\Delta_F(x-x^{'}) - m\Delta_F(x-x^{'})) \\
- & \quad (-m\Delta^{ret}(x-x^{'}) - m\epsilon_{\alpha\beta}\Delta^{ret}(x-x^{'}) - m\Delta^{ret}(x-x^{'})) \\
- & \quad (-m\Delta^{adv}(x-x^{'}) - m\epsilon_{\alpha\beta}\Delta^{adv}(x-x^{'}) - m\Delta^{adv}(x-x^{'})) = \\
- & \quad m(2\Delta_F(x-x^{'}) - \Delta^{ret}(x-x^{'}) - \Delta^{adv}(x-x^{'})) \text{ (com respeito aos campos} A, F) \\
- & \quad m\epsilon_{\alpha\beta}(2\Delta_F(x-x^{'}) - \Delta^{ret}(x-x^{'}) - \Delta^{adv}(x-x^{'})) \text{ (com respeito aos campos} \Psi_\alpha, \Psi_\beta) \\
- & \quad m(2\Delta_F(x-x^{'}) - \Delta^{ret}(x-x^{'}) - \Delta^{adv}(x-x^{'})) \text{ (com respeito aos campos} F, A) = \\
- & \quad m\Delta^{(1)}(x-x^{'}) \ (\longmapsto \langle 0|\{A(x), F(x^{'})\}|0\rangle) \\
- & \quad m\Delta^{(1)}(x-x^{'}) \ (\longmapsto \langle 0|\{F(x), A(x^{'})\}|0\rangle) \\
- & \quad m\epsilon_{\alpha\beta}\Delta^{(1)}(x-x^{'}) \ (\longmapsto \langle 0|[\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta(x^{'})]|0\rangle).
\end{aligned} \tag{A.30}
$$

De modo análogo pode-se mostrar que:

$$
\Delta^{(1)}_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} = m\delta^2(\bar{\theta}-\bar{\theta}^{'})e^{i(\theta\sigma\bar{\theta}^{'}-\theta^{'}\sigma\bar{\theta})\partial}\Delta^{(1)}(x-x^{'}) \tag{A.31}
$$

com as seguintes componentes não nulas:

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\{\bar{A}(x), \bar{F}(x^{'})\}|0\rangle &= -m\Delta^{(1)}(x-x^{'}) \\
\langle 0|\{\bar{F}(x), \bar{A}(x^{'})\}|0\rangle &= -m\Delta^{(1)}(x-x^{'}) \\
\langle 0|[\bar{\Psi}_{\dot{\alpha}}(x), \bar{\Psi}_{\dot{\beta}}(x^{'})]|0\rangle &= -m\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\Delta^{(1)}(x-x^{'})
\end{aligned} \tag{A.32}
$$

e também:

$$
\Delta^{(1)}_{\bar{\Phi}\Phi} = e^{i(\theta\sigma\bar{\theta}^{'}-\theta^{'}\sigma\bar{\theta}-(\theta-\theta^{'})-(\bar{\theta}-\bar{\theta}^{'}))\partial}\Delta^{(1)}(x-x^{'}) \mapsto
$$

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\{A(x), \bar{A}(x^{'})\}|0\rangle &= \Delta^{(1)}(x-x^{'}) \\
\langle 0|\{F(x), \bar{F}(x^{'})\}|0\rangle &= \Box\Delta^{(1)}(x-x^{'}) \\
\langle 0|[\Psi_\alpha(x), \bar{\Psi}_{\dot{\beta}}(x^{'})]|0\rangle &= -i\partial_{\alpha\dot{\beta}}\Delta^{(1)}(x-x^{'})
\end{aligned} \tag{A.33}
$$

Para compleza do estudo das soluções homogêneas, acrescentemos ainda as seguintes superfunções de Green:

$$
\begin{aligned}
(\partial^2 &+ m^2)\Delta^W_{\Psi^i\Psi^j} = 0 \mapsto \\
\Delta^W_{\Phi\Phi} &= m\delta^2(\theta-\theta^{'})e^{i(\theta\sigma\bar{\theta}^{'}-\theta^{'}\sigma\bar{\theta})\partial}\Delta^W(x-x^{'}) \\
\Delta^W_{\bar{\Phi}\Phi} &= e^{i(\theta\sigma\bar{\theta}^{'}-\theta^{'}\sigma\bar{\theta}-(\theta-\theta^{'})-(\bar{\theta}-\bar{\theta}^{'}))\partial}\Delta^W(x-x^{'}) \\
\Delta^W_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} &= m\delta^2(\theta-\bar{\theta}^{'})e^{i(\theta\sigma\bar{\theta}^{'}-\theta^{'}\sigma\bar{\theta})\partial}\Delta^W(x-x^{'})
\end{aligned} \tag{A.34}
$$

onde $\Delta^W_{\Psi^i\Psi^j}$ são chamadas de superfunções de Wightman $\Delta^W(x-x^{'})$ é a função de Wightman, conhecida da teoria ordinária, definida por $\Delta^W(x-x^{'}) \equiv \langle 0|\Phi(x), \Phi(x^{'})|0\rangle$.

Uma vez que esta expressão também é baseada nas funções aqui estudadas (note que $2Re\Delta^W = \Delta^{(1)}$) é direto observar que a nossa construção no superespaço realiza-se de forma igual à que procedemos nos casos anteriores, assim temos:

$$
\begin{aligned}
\langle 0|A(x), F(x')|0\rangle &= \langle 0|F(x), A(x')|0\rangle = -m\Delta^W(x-x') \\
\langle 0|\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta(x')|0\rangle &= -m\epsilon_{\alpha\beta}\Delta^W(x-x') \\
\langle 0|\bar{A}(x), \bar{F}(x')|0\rangle &= \langle 0|\bar{F}(x), \bar{A}(x')|0\rangle = -m\Delta^W(x-x') \\
\langle 0|\bar{\Psi}_{\dot\alpha}(x), \bar{\Psi}_{\dot\beta}(x')|0\rangle &= -m\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\Delta^W(x-x') \\
\langle 0|A(x), \bar{A}(x')|0\rangle &= \Delta^W(x-x') \\
\langle 0|F(x), \bar{F}(x')|0\rangle &= \Box\Delta^W(x-x') \\
\langle 0|\Psi_\alpha(x), \bar{\Psi}_{\dot\beta}(x')|0\rangle &= -i\partial_{\alpha\dot\beta}\Delta^W(x-x')
\end{aligned}
\tag{A.35}
$$

Desta forma, colecionando todos os resultados do càlculo aqui apresentado, escrevemos:

$$
\begin{aligned}
\Delta^X_{\Phi\Phi}(z,z') &= m\delta^2(\theta-\theta')e^{i(\theta\sigma\bar\theta' - \theta'\sigma\bar\theta)\partial}\Delta^X(x-x') \\
\Delta^X_{\bar\Phi\Phi}(z,z') &= e^{i(\theta\sigma\bar\theta' - \theta'\sigma\bar\theta - (\theta-\theta')\cdot(\bar\theta-\bar\theta'))\partial}\Delta^X(x-x') \\
\Delta^X_{\bar\Phi\bar\Phi}(z,z') &= m\delta^2(\theta-\bar\theta')e^{i(\theta\sigma\bar\theta' - \theta'\sigma\theta)\partial}\Delta^X(x-x')
\end{aligned}
\tag{A.36}
$$

aqui X abrange as seguites superfunções (Pauli-Jordan, Hadamard e Wightman):

$$
\begin{aligned}
\Delta^{PJ}_{\Psi^i\Psi^j} &= \langle 0|[\Psi^i, \Psi^j]|0\rangle \\
\Delta^{(1)}_{\Psi^i\Psi^j} &= \langle 0|\Psi^i, \Psi^j|0\rangle \\
\Delta^{W}_{\Psi^i\Psi^j} &= \langle 0|\Psi^i\Psi^j|0\rangle
\end{aligned}
\tag{A.37}
$$

com i, j variando sobre todos os supercampos $\Phi, \bar\Phi$.

Apêndice B

Espaços Topológicos

A definição usual de continuidade de uma função $f : U \to W$, onde U e W são subconjuntos de $\mathbb{R}$, basea-se na noção de vizinhança – ou "proximidade" – de diferentes elementos de $\mathbb{R}$. Tal "proximidade" pode ser medida por uma função distância $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes as propriedades: (i) $d(x, y) > 0$, (ii) $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$, (iii) $d(x, y) = d(y, x)$, (iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para $x, y \in \mathbb{R}$. As duas primeiras propriedades nos diz que a distância nunca é negativa e é zero somente para pontos coincidentes. A propriedade (*iii*) afirma que a distância $d(x, y)$ é uma função simétrica das variáveis x, y, isto é, a distância independe da ordem dos pontos: x é tão distante de y como y é de x. A propriedade (*iv*) chama-se desigualdade triangular. Afirma que a distância de x a z é menor ou igual a soma das distâncias utilizando um ponto intermadiário y. Essa propriedade tem origem no fato de que, em $\mathbb{R}^2$, o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a suma dos outros dois. Uma função distância natural para a linha real que respeita as propriedades acima é a função módulo $f(x) = |x|$, e f é dita ser contínua em $x \in \mathbb{R}$ se podemos encontrar um $\delta \in \mathbb{R}$ positivo para qualquer positivo $\varepsilon \in \mathbb{R}$, tal que se $d(x, y) < \delta$ então $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Assim, sonda-se a vizinhança da imagem de f induzido pela vizinhança em torno de x no domínio de f.

A topologia generaliza a noção de vizinhaça e a noção de continuidade para aplicações entre espaços diferentes de $\mathbb{R}$, isto é, substituimos o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ por um conjunto *abstrato* Q, conjunto este cujo os elementos *priori* não são especificados. Para introduzir a noção de continuidade em situações gerais, introduzimos primeiro a seguinte definição.

Definição B.1. *Um conjunto Q é um espaço métrico se, para cada par de elementos $x, y \in Q$ a função d definida sobre $Q \times Q$ associa ao par ordenado (x, y) um número $d(x, y)$, chamado a distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas as condições de distância entre pontos acima citadas, de (i) à (iv)para quaisquer $x, y, z \in Q$:*

Muitas vezes chamamos os elementos de um espaço métrico de *pontos*. Assim, um espaço métrico é um conjunto Q munido de uma função métrica $d(\cdot,\cdot)$.

A noção de distância nos permite definir a noção de convergência:

Definição B.2. *Uma sequência de elementos* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, *com* $n \in \mathbb{N}$ *e* $x_n \in Q$, *converge para* $x \in Q$ *se, para qualquer* $\varepsilon > 0$ *dado, existir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n > n_0$ *tem-se que* $d(x_n, x) < \varepsilon$ *ou* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. *Ou seja, para* $\forall n > n_0$, $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. *Fora desse intervalo só poderão estar, no máximo, os termos* $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$. *Se* x_n *não converge para* x, *escrevemos* $\lim_{n\to\infty} x_n \neq x$.

Um critério suficiente e necessário para a convergência de uma sequência é conhecido como *Critério de Cauchy*.

Definição B.3. *Uma determinada sequência de elementos* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de um espaço métrico, é uma sequência de Cauchy se para cada* $\varepsilon > 0$ *dado, existir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $m,\ n > n_0$, *então* $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Pode-se mostrar que toda sequência convergente é de Cauchy. Se $d(x_n, x) < \varepsilon$, então, para valores grandes de n os termos se aproximam de x. Neste caso, os termos x_m e x_n devem necessariamente aproximar-se uns dos outros.

Definição B.4. *Um espaço métrico* Q *é chamado completo se toda sequência de Cauchy em* Q *for convergente.*

Um espaço métrico, Q, que não é completo pode completado ao adiciornamos todos os limites de sequências de Cauchy. Nesse caso, dizemos que o espaço original Q é denso no espaço maior $\breve{Q}$.

Definição B.5. *Seja* Q *um espaço métrico. Dizemos que um conjunto* $D \subset Q$ *é denso se todo elemento* $q \in Q$ *for limite de alguma sequência* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in D$.

Um ponto x em um conjunto $Q \subset \mathbb{R}^n$ é chamado um ponto interior de Q se, para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a bola $B = \{y \mid \|y-x\| < \varepsilon\}$ com centro em x e raio ε situa-se em Q, isto é, se todo ponto y da bola é um ponto de Q. Um conjunto $Q \subset \mathbb{R}^n$ é chamado aberto se todo ponto de Q é um ponto interior, isto é, se para todo $x \in Q$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset Q$. Em outras palavras, é possível interpor entre qualquer ponto x de Q e o próprio Q uma bola aberta, o que pode ser escrito como $\{x\} \subset B_\varepsilon(x) \subset Q$.

Exemplo. A bola B ela própria é um conjunto aberto, porque se y é qualquer ponto de B, e $\varepsilon' = \varepsilon - \|y-x\|$, então a bola $B' = \{z \mid \|z-y\| < \varepsilon'\}$ situa-se em B.

Um conjunto é chamado fechado se ele contém todos seus pontos limites. A bola fechada $B = \{y \mid \|y - x\| \leq \varepsilon\}$ é um conjunto fechado (os pontos sobre a superfície da bola foram, agora, incluídos). Um conjunto Q é fechado se seu complemento $\mathbb{R}^n - Q$ é aberto, e vice-versa. Um conjunto Q junto com todos seus pontos limites é um conjunto fechado, chamado o *fecho* de Q, e é representado por Q. Se Q é ele próprio fechado, então $Q = Q$.

Teorema B.6. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação qualquer. Então, as três condições abaixo são equivalentes:*

(a) Se Q é aberta em $\mathbb{R}^m$, então $f^{-1}(Q)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.

(b) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, e dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Isto é, qualquer bola $B_\varepsilon(f(x))$ centrada na imagem $f(x)$ de qualquer ponto x, contém a imagem de uma bola centrada em x.

(c) $x_k \to x \Rightarrow f(x_k) \to f(x)$.

Prova. $(a) \Rightarrow (b)$. Suponha (a) e sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$. Sendo que $B_\varepsilon(f(x))$ é aberto, temos por (a) que $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ é aberto, e sendo que x pertence a este conjunto, existe um $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Portanto, $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$.

$(b) \Rightarrow (c)$. Suponha (b) e seja $x_k \to x$ e $\varepsilon > 0$. Seja $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Como $x_k \to x$, existe K tal que $k \geq K \Rightarrow x_k \in B_\delta(x) \Rightarrow f(x_k) \in B_\varepsilon(f(x))$. Portanto, $f(x_k) \to f(x)$.

$(c) \Rightarrow (a)$. Suponha (c) e seja $Q \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Suponha por absurdo que $f^{-1}(Q)$ não seja aberto, então existe um $x \in f^{-1}(Q)$ tal que para todo k inteiro positivo, $B_{1/k}(x) \not\subset f^{-1}(Q)$. Escolha $x_k \in B_{1/k}(x) \setminus f^{-1}(Q)$. Logo, $x_k \to x$ e $f(x_k) \notin Q$. Sendo Q aberto e $f(x) \in Q$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(x)) \subset Q$. Assim, concluímos que $f(x_k) \notin B_\varepsilon(f(x))$ e, portanto, que $f(x_k) \not\to f(x)$, contradizendo (c).

Cada uma das três condições do Teorema B.6 é uma possível definição de uma função contínua. A condição (b) pode ser escrita na seguninte forma: para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$, o que é a forma da definição de continuidade mais conhecida.

Definição B.7. *Seja X um espaço métrico, então: (i) O conjunto $\{x|x \in X, d(x,y) < r\}$ é chamado Bola Aberta, $B(y;r)$, de raio r em torno do ponto y. (ii) Um conjunto $V \subset X$ é chamado Aberto se para toda $y \in V$, existe $r > 0$ tal que $B(y;r) \subset V$. (iii) Um conjunto $U \subset X$ é chamado uma vizinhança de y tal que para toda $x \in U$ temos $d(y,x) < r$.*

O conceito de distância entre os elementos do espaço de funções é convenientemente tratado usando-se o conceito de norma de uma função. Isso pode ser alcançado de uma forma mais geral e abstrata, introduzindo-se o conceito de *espaço linear normado*, uma das generalizações importantes do conceito de espaço vetorial de dimensão finita.

Antes de se conceituar um espaço linear normado, vamos definir uma importante propriedade do conjunto dos números reais, ou complexos, muitas vezes usadas em situações apropriadas. Seja A um conjunto de números reais. Se existe um número y tal que $x \leq y$ para todo $x \in A$, dizemos que A é limitado superiormente e chamamos y a menor cota superior de A. Da mesma forma, definimos um conjunto limitado inferiormente e sua maior cota inferior. Se A é limitado superior e inferiormente, dizemos que A é limitado.

Definição B.8. *Seja A limitado superiormente. Suponha que y tenha as seguintes propriedades:*

(a) y é uma cota superior de A,

(b) se $x < y$; então, x não é uma cota superior de A.

Nestas condições, y é chamado supremo de A (que existe quando muito um y com as propriedades acima, notadamente pela condição (b)). Usamos a abreviação "sup" para supremo. O ínfimo "inf" de qualquer conjunto A limitado inferiormente é definido analogamente. Naturalmente, esta definição estende-se para o caso do conjunto A ser formado pelos números complexos.

Exemplo. Seja A o conjunto de todos os números da forma $1/n$, para $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. A é limitado, seu "sup" é 1 e seu "inf" é 0. Se nota neste caso que o sup $\in A$, enquanto o inf $\notin A$. De modo geral, o "sup" (ou "inf") de um conjunto pode ou não pertencer ao conjunto. Agora, se A é o conjunto de todos números não negativos, então, o conjunto é limitado inferiormente, porém não o é superiormente. Seu inf é 0.

Exemplo. Se K é uma bola aberta em $\mathbb{R}^n$ com raio r e centro na origem, e $f(x) = \|x\|$, então $\inf_{x \in K} f(x) = 0$ e $\sup_{x \in K} f(x) = r$. Neste caso, o sup $\notin K$.

Exemplo. Seja f uma função tomando valores em um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, então o supremo do conjunto de todos os valores $f(x)$ correspondendo a $x \in A$ é denotado por $\sup_{x \in A} f(x)$. O ínfimo é definido do mesmo modo, isto é, $\inf_{x \in A} f(x)$.

Definição B.9. *Um espaço linear Φ é chamado um espaço normado se, existe uma função $\|\cdot\|$ definida sobre Φ que satisfaz:*

(i) $\|\varphi\| \geq 0$ para todo $\varphi \in \Phi$,

(ii) $\|\varphi\| = 0$ *se, e somente se,* $\varphi = 0$,

(iii) $\|\alpha\varphi\| = |\alpha|\,\|\varphi\|$ *para todo* $\varphi \in \Phi$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$),

(iv) $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$ *para todo* $\varphi,\ \psi \in \Phi$.

A propriedade (iv) é chamada desigualdade triangular. No caso em que $\|\cdot\|$ satisfaz as propriedades (i), (iii) e (iv), mas não a propriedade (ii), dizemos que $\|\cdot\|$ é uma *semi-norma* em Φ.

Proposição B.10. *Se* $\|\cdot\|$ *é uma norma em* Φ, *então* $d(\varphi, \psi) = \|\varphi - \psi\|$ *é uma métrica em* Φ.

Prova. Claramente, $(i)\ \|\varphi - \psi\| > 0$, $(ii)\ \|\varphi - \psi\| = 0 \Rightarrow \varphi - \psi = 0 \Rightarrow \varphi = \psi$ e $(iii)\ \|\varphi - \psi\| = \|\psi - \varphi\|$. Em (iv) substituímos φ por $\varphi - \theta$ e ψ por $\theta - \psi$ para obter $\|\varphi - \psi\| \leq \|\varphi - \theta\| + \|\theta - \psi\|$ ou $d(\varphi, \psi) \leq d(\varphi, \theta) + d(\theta, \psi)$.

De imediato, temos o conceito de convergência em Φ. Uma sequência $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Φ converge para $\varphi \in \Phi$ se, e somente se, $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$ quando $n \to \infty$.

Sejam $\|\varphi\|_1$ e $\|\varphi\|_2$ duas normas sobre o mesmo espaço Φ. A segunda norma é dita mais forte que a primeira, ou a primeira é mais fraca que a segunda, se existe uma constante C tal que $\|\varphi\|_1 \leq C\,\|\varphi\|_2$ para todo $\varphi \in \Phi$. Duas normas são ditas *comparáveis* se uma delas é mais forte que a outra. Agora, se existem C e C' tal que $\|\varphi\|_1 \leq C\,\|\varphi\|_2 \leq C'\,\|\varphi\|_1$, então, dizemos que as duas normas são *equivalentes*. Em outras palavras, cada norma é simultâneamente mais forte e mais fraca que a outra.

Se um espaço Φ é incompleto com respeito a no mínimo uma das normas, isto é, se a sequência $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Φ não converge para $\varphi \in \Phi$ quando $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_p \neq 0$, então a comparabilidade não implica a equivalência. Nesse caso, podemos considerar dois espaços completos Φ_1 e Φ_2, que são obtidos completando Φ com respeito às normas $\|\varphi\|_1$e $\|\varphi\|_2$. Se $\|\varphi\|_2$ é mais forte que $\|\varphi\|_1$, então, podemos estabelecer um mapeamento de Φ_2 em Φ_1: todo elemento $\varphi_{i_{(2)}} \in \Phi_2$ é definido por uma sequência $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Phi$; mas, esta mesma sequência, também, define um elemento $\varphi_{i_{(1)}} \in \Phi_1$. Assim, podemos determinar $\varphi_{i_{(1)}}$ a partir $\varphi_{i_{(2)}}$.

Asseguramos que esse mapeamento é um-para-um, exigindo que as normas $\|\varphi\|_1$e $\|\varphi\|_2$ sejam *compatíveis* no seguinte sentido: as normas $\|\varphi\|_1$e $\|\varphi\|_2$ são compatíveis se toda sequência $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Phi$ que converge para zero com respeito a uma delas, também converge para zero com respeito a outra.

Assim, no caso de normas compatíveis, o mapeamento de Φ_2 em Φ_1, nos permite identificar os elementos de Φ_2 com os correspondentes elementos de Φ_1. Podemos considerar Φ_2 como sendo uma parte de Φ_1. Em resumo, se duas normas compatíveis e comparáveis são definidas em um espaço Φ, então, os complementos Φ_1 e Φ_2 de Φ com respeito à estas normas podem ser considerados como satisfazendo a seguinte relação:

$$\Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \Phi .$$

Considere a sequência de normas $\{\|\varphi\|_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ sobre Φ. Se essas normas são compatíveis duas a duas, então, o espaço Φ é chamado de *espaço linear normada contável*. Podemos assumir que para um espaço linear normado contável a sequência de norma $\{\|\varphi\|_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ é tal que:

$$\|\varphi\|_1 \leq \|\varphi\|_2 \leq \cdots \leq \|\varphi\|_p \leq \cdots . \tag{B.1}$$

Além disso, uma base de vizinhanças, $U_{p,\varepsilon}(0)$, de zero é definida por:

$$U_{p,\varepsilon}(0) = \left\{\varphi \in \Phi;\ \|\varphi\|_1 < \varepsilon, \ldots, \|\varphi\|_p < \varepsilon\right\} . \tag{B.2}$$

Definição B.11. *Seja Φ um espaço linear normado contável. Um funcional linear sobre Φ é um mapeamento $f : \varphi \mapsto f(\varphi)$ se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) Para qualquer φ_1, φ_2 e números α e β, temos

$$f(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha f(\varphi_1) + \beta f(\varphi_2), \quad (linearidade) ,$$

em particular $f(0) = 0$,

(ii) Para continuidade do funcional linear, f, é necessária e suficiente que

$$\lim_{n\to\infty} f(\varphi_n) = f(\varphi)$$

se $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$.

Suponha que Φ_p seja o complemento de Φ com respeito a norma $\|\varphi\|_p$. Então,

$$\Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \ldots \supset \Phi_p \supset \ldots \Phi . \tag{B.3}$$

O seguinte teorema dá um critério para a completeza de Φ:

Teorema B.12. *O espaço Φ é completo se, e somente se, ele coincide com a interseção dos complementos Φ_p, isto é, $\Phi = \bigcap_{p=1}^{\infty} \Phi_p$.*

Prova. Suponha que $\Phi = \bigcap_{p=1}^{\infty} \Phi_p$ e que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência de Cauchy em Φ. Por definição $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em cada Φ_p; logo, $\varphi_n \to \varphi_{i_{(p)}} \in \Phi_p$. Existe um elemento φ tal que $\varphi_{i_{(p)}} = \varphi$ para cada p. Então $\varphi \in \bigcap_{p=1}^{\infty} \Phi_p = \Phi$. Para cada p, $\|\varphi_n - \varphi\|_p \to 0$ e, assim, $\varphi_n \to \varphi$ em Φ. Logo, Φ é completo.

Vimos que a bola aberta $\|\varphi\|_p < \varepsilon$ (veja a eq.(B.2)) define uma base da vizinhança de zero em um espaço linear normado contável Φ. Porém, a limitação de um funcional sobre tal vizinhança de zero é equivalente à sua limitação relativa à norma $\|\cdot\|_p$, isto é,

$$|f(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_p \ . \tag{B.4}$$

Portanto, todo funcional linear contínuo f sobre um espaço normado contável Φ é limitado por alguma norma $\|\cdot\|_p$. O menor valor de p para qual (B.4) é válido é chamado a *ordem* de f.

Considere que ao invés de uma norma, temos uma família de normas $\{\|\varphi\|_\alpha\}_{\alpha\in A}$ onde A representa um conjunto de índices. Relaxando a condição (*ii*) acima, suponha que $\|\varphi\|_\alpha = 0$ para todo $\alpha \in A$, então, $\varphi = 0$.

Definição B.13. *Uma semi-norma sobre Φ satisfaz as condições:*

(i) $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$ *para todo* $\varphi, \psi \in \Phi$,

(ii) $\|\varphi\|_\alpha = 0$ *para todo* $\alpha \in A$ *implica que* $\varphi = 0$. *Neste caso a família de semi-normas é dita como separando pontos,*

(iii) $\|\alpha\varphi\| = |\alpha| \|\varphi\|$ *para todo* $\varphi \in \Phi$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Proposição B.14. *Uma métrica pode ser definida sobre um espaço vetorial semi-normado por:*

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{2^\alpha} \frac{\|\varphi - \psi\|_\alpha}{1 + \|\varphi - \psi\|_\alpha} \ . \tag{B.5}$$

Apêndice C

Operadores de Campos, Analiticidade das Funções de Wightman e o Teorema BHW

Os principais resultados aqui estão bem estabelecidos na literatura e podem ser encontrados, entre outros trabalhos, em [48, 95, 96].

Operadores de Campos

Abordaremos aqui uma teoria de campos escalar neutra, representado por $\varphi(x)$, de massa $m > 0$, no espaço-tempo de Minkowski. Neste contexto, a ação de campo no espaço de Minkowski é dada pela expressão

$$\Sigma_{\text{livre}} = \int d^4x \, \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2 \right) \ . \tag{C.1}$$

A equação de movimento que resolve a equação de Klein-Gordon é derivável da ação livre, isto é:

$$(\partial^2 + m)\varphi(x) = 0 \ . \tag{C.2}$$

Considerando a transformada de Fourier de $\varphi(x)$ como sendo $\widetilde{\varphi}(k)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \, \widetilde{\varphi}(k) \, e^{-ikx} \ , \tag{C.3}$$

e substituindo-a em (C.2) encontramos:

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \, \left(k^2 - m^2\right) \widetilde{\varphi}(k) \, e^{-ikx} = 0 \ . \tag{C.4}$$

Da equação acima, obtemos que

$$\widetilde{\varphi}(k) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k^2 \neq m^2 \\ \neq 0 & \text{se} \quad k^2 = m^2 \end{cases} \ ,$$

ou, escrito de outra forma

$$\tilde{\varphi}(k) = 2\pi\,\delta\left(k^2 - m^2\right)\varphi(k)\ . \tag{C.5}$$

Assim,

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4k\ \delta(k^2 - m^2)\varphi(k)\,e^{-ikx}\ . \tag{C.6}$$

Pelo fato da função delta aparecer sob o sinal da integral, limitamos nosso volume de integração à dois hiperbolóides tri-dimensionais. $(k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2 = m^2 \Longrightarrow k^0 = \pm E(\mathbf{k})$, onde $E(\mathbf{k}) = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$.

Das propriedades da função delta, temos que

$$\delta\left(k^2 - m^2\right) = \frac{1}{2\,|E|}\left[\delta\left(k^0 - E\right) + \delta\left(k^0 + E\right)\right]\ .$$

Usando este fato, reescrevemos a eq.(C.6) na forma

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\int dk^0\,\frac{1}{2\,|E|}\left[\delta(k^0 - E) + \delta(k^0 + E)\right]\varphi(k)\,e^{-ikx}\ .$$

Realizando a integração em k^0, obtemos:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{2\,|E|}\ \left\{\varphi(E,\mathbf{k})\,e^{-i(E\,t-\mathbf{k}\,\mathbf{x})} + \varphi(-E,\mathbf{k})\,e^{-i(-E\,t-\mathbf{k}\,\mathbf{x})}\right\}. \tag{C.7}$$

Fazendo a troca de variável $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$ na segunda integral, então:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{2\,|E|}\ \theta\left(k^0\right)\ \left\{\varphi(E,\mathbf{k})\,e^{-i(E\,t-\mathbf{k}\,\mathbf{x})} + \varphi(-E,-\mathbf{k})\,e^{i(E\,t-\mathbf{k}\,\mathbf{x})}\right\}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k^0>0}\frac{d^3\mathbf{k}}{2\,E}\left\{\varphi(E,\mathbf{k})\,e^{-i(E\,t-\mathbf{k}\,\mathbf{x})} + \varphi(-E,-\mathbf{k})\,e^{i(E\,t-\mathbf{k}\,\mathbf{x})}\right\}\ .\end{aligned}$$

onde

$$\theta\left(k^0\right) = \begin{cases} 1 & \text{se}\quad k^0 > 0\\ 0 & \text{se}\quad k^0 < 0\end{cases}\ ,$$

é a distribuição degrau de Heaviside.

Definimos

$$\varphi^-(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{2\,E}\ a(\mathbf{k})\,e^{-ikx}\bigg|_{k^0=E}\ ,\quad \varphi^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{2\,E}\ a^+(\mathbf{k})\,e^{ikx}\bigg|_{k^0=E}\ , \tag{C.8}$$

como os operadores de criação e destruição, respectivamente. Na equação acima, $a(\mathbf{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(E,\mathbf{k})$ e $a^+(\mathbf{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(-E,-\mathbf{k})$. Logo, podemos escrever

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x)\ , \tag{C.9}$$

ou,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\;(2\pi)\theta(k^0)\delta(k^2-m^2)\left\{a^+(k)\,e^{ikx}+a(k)\,e^{-ikx}\right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E}\left\{a^+(\mathbf{k})\,e^{ikx}+a(\mathbf{k})\,e^{-ikx}\right\}\Big|_{k_0=E} \; . \qquad \text{(C.10)}
\end{aligned}$$

Tendo em vista que podemos realizar a decomposição $\Phi(f)=\Phi^+(f)+\Phi^-(f)$, vamos então calcular o seguinte comutador:

$$\left[\Phi^-(f)\,,\,\Phi^+(g)\right]=\int d^4x d^4y\;\left[\varphi^-(x)\,,\varphi^+(y)\right]f(x)\,g(y)\;.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left[\varphi^-(x)\,,\varphi^+(y)\right] &= \frac{1}{(2\pi)^6}\int\frac{d^3\mathbf{k}\,d^3\mathbf{k}'}{2\,E\,2\,E'}\left[a(\mathbf{k})\,,a^+(\mathbf{k}')\right]e^{-ikx}e^{ik'y}\Big|_{k_0=E;k_0'=E'} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\mathbf{k}\,d^3\mathbf{k}'}{2\,E\,2\,E'}\,2\,E\,\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,e^{-ikx}e^{ik'y}\Big|_{k_0=E;k_0'=E'} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{2\,E}\;e^{-ik(x-y)}\Big|_{k_0=E} \\
&= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,2\pi\delta\left(k^2-m^2\right)\theta\left(k^0\right)e^{-ik(x-y)} \\
&= \frac{1}{i}\,\Delta^+\left(x-y;m^2\right)\;,
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\Delta^+\left(x-y;m^2\right)=\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\,\delta\left(k^2-m^2\right)\theta\left(k^0\right)e^{-ik(x-y)}\;, \qquad \text{(C.11)}$$

é uma distribuição sobre o espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)\times\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$. Portanto,

$$\left[\Phi^-(f)\,,\,\Phi^+(g)\right]=\frac{1}{i}\left(f(x)\,,\Delta^+\left(x-y;m^2\right)g(y)\right)\;. \qquad \text{(C.12)}$$

Da mesma forma podemos calcular o comutador

$$\left[\Phi^+(f)\,,\,\Phi^-(g)\right]=\frac{1}{i}\left(f(x)\,,\Delta^-\left(x-y;m^2\right)g(y)\right)\;. \qquad \text{(C.13)}$$

Assim, uma vez que os operadores de criação e destruição possuem as seguinte relações de comutação

$$\left[a(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{k}')\right] = (2\pi)^3\, 2E\, \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \ ,$$

$$\left[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')\right] = \left[a^+(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{k}')\right] = 0 \ . \tag{C.14}$$

Podemos concluir que

$$\left[\Phi^+(f), \Phi^+(g)\right] = 0 \quad \text{e} \quad \left[\Phi^-(f), \Phi^-(g)\right] = 0 \tag{C.15}$$

Colecionando os resultados acima, temos então o resultado, visto na Seção 1.3 do Capítulo 1, referente a definição da função de Wightman.

Analiticidade das Funções de Wightman

Teorema C.15. *Seja $\mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_n)$ a distribuição de Wightman de n-pontos. Então, para cada $n \geq 1$, o seguinte acontece:*

(a) $\mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_n) W_n(y_1, \ldots, y_{n-1})$, onde $W_n(y_1, \ldots, y_{n-1})$ é uma distribuição que tem a seguinte dependência sobre as coordenadas relativas $y_i = x_i - x_{i+1}$, com $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

(b) $\widehat{\mathscr{W}_n}(p_1, \ldots, p_n) = (2\pi)^4 \delta(p_1 + \cdots + p_n) \widehat{W}_n(p_1, p_1 + p_2, \ldots, p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1})$. Além disso, $\widehat{W}_n(q_1, \ldots, q_{n-1}) = 0$ se $q_i \notin V_+$.

(c) $\mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_n)$ são valores limites de funções analíticas de $4n$ variáveis complexas.

Resumo esquemático de prova. Para provar a parte (a), lembramos que o váeuo é o único vetor invariante sob translações no espaço de Hilbert dos estados da teoria: $\mathscr{U}(a, \mathbf{1})\Omega = \Omega$. Devido a covariância sob translação dos campos, temos $\varphi(x)\mathscr{U}(x, \mathbf{1})\varphi(0)\mathscr{U}^{-1}(x, \mathbf{1})$. Expressando $\mathscr{U}(x, \mathbf{1}) = e^{ip_\mu x^\mu}$, podemos escrever

$$\mathscr{W}_n(x_1, \ldots, x_n) = \left(\Omega, \varphi(0)\, e^{ip_\mu (x_1 - x_2)^\mu} \varphi(0)\, e^{ip_\mu (x_2 - x_3)^\mu} \ldots e^{ip_\mu (x_{n-1} - x_n)^\mu} \varphi(0)\, \Omega\right)$$

$$= W_n(y_1, \ldots, y_{n-1}) \ ,$$

com $y_i = x_i - x_{i+1}$; $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Vamos provar a parte (b). Começamos com o caso $n = 2$. Por uma transformada de Fourier, temos:

$$\widehat{\mathscr{W}_2}(p_1, p_2) = \int \prod_{i=1}^{2} d^4x_i\ \mathscr{W}_2(x_1, x_2)\, e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2)} \ .$$

Mas,

$$\mathscr{W}_2(x_1, x_2) = \mathscr{W}_2(y_1) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q_1 \; \widehat{W}_2(q_1)\, e^{-iq_1 y_1} \; .$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathscr{W}_2}(p_1, p_2) &= \int \prod_{i=1}^{2} d^4x_i \; \left(\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q_1 \; \widehat{W}_2(q_1)\, e^{-iq_1(x_1-x_2)} \right) e^{(p_1x_1+p_2x_2)} \\
&= \int \prod_{i=1}^{2} d^4x_i \; \left(\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q_1 \; \widehat{W}_2(q_1) \right) e^{ix_1(p_1-q_1)}\, e^{ix_2(p_2+q_1)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q_1 \; (2\pi)^8 \delta(p_1 - q_1)\delta(p_2 + q_1)\widehat{W}_2(q_1) \\
&= (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2)\widehat{W}_2(p_1) \; .
\end{aligned}$$

Caso $n = 3$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathscr{W}_3}(p_1, p_2, p_3) &= \int \prod_{i=1}^{3} d^4x_i \; \left(\frac{1}{(2\pi)^8} \int \prod_{i=1}^{2} d^4q_i \; \widehat{W}_3(q_1, q_2)\, e^{i(q_1(x_1-x_2)+q_2(x_2-x_3))} \right) \times \\
&\quad \times \; e^{-i(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)} \\
&= \int \prod_{i=1}^{3} d^4x_i \; \left(\frac{1}{(2\pi)^8} \int \prod_{i=1}^{2} d^4q_i \; \widehat{W}_3(q_1, q_2) \right) \times \\
&\quad \times \; e^{ix_1(q_1-p_1)} e^{ix_2(q_2-q_1-p_2)}\, e^{ix_3(-q_2-p_3)} \\
&= (2\pi)^4 \int \prod_{i=1}^{2} d^4q_i \; \delta(q_1 - p_1)\delta(q_2 - q_1 - p_2)\delta(q_2 + p_3)\widehat{W}_3(q_1, q_2) \\
&= (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3)\widehat{W}_3(p_1, p_1 + p_2) \; .
\end{aligned}$$

Caso geral:

$$\widehat{\mathscr{W}}_n(p_1,\ldots,p_n) = \int \prod_{i=1}^{n} d^4x_i \, \left(\int \prod_{j=1}^{n-1} \frac{d^4q_j}{(2\pi)^4} \, \widehat{W}_n(q_1,\ldots,q_{n-1})\, e^{i\sum_{j=1}^{n-1} q_j(x_j - x_{j+1})} \right) \times$$

$$\times \; e^{-i(p_1x_1+\cdots+p_nx_n)}$$

$$= \int \prod_{i=1}^{n} d^4x_i \, \left(\int \prod_{j=1}^{n-1} \frac{d^4q_j}{(2\pi)^4} \, \widehat{W}_n(q_1,\ldots,q_{n-1}) \right) e^{ix_1(q_1-p_1)} \times$$

$$\times \; e^{ix_2(q_2-q_1-p_2)} e^{ix_3(q_3-q_2-p_3)} \times \cdots \times e^{ix_n(-q_{n-1}-p_n)}$$

$$= \int \prod_{j=1}^{n-1} \frac{d^4q_j}{(2\pi)^4} \, (2\pi)^{4n} \delta(q_1-p_1)\delta(q_2-q_1-p_2)\delta(q_3-q_2-p_3) \times$$

$$\times \; \delta(q_4-q_3-p_3) \times \cdots \times \delta(q_{n-1}+p_n) \widehat{W}_n(q_1,\ldots,q_{n-1})$$

$$= (2\pi)^4 \delta(\sum_{i=1}^{n} p_i) \widehat{W}_n(p_1; p_1+p_2, p_1+p_2+p_3, \ldots, \sum_{i=1}^{n-1} p_i) \; .$$

Comentário. Observe que

$$\mathrm{supp}\widehat{\mathscr{W}}_n(p_1,\ldots,p_n) \subset \Big\{ (p_1,\ldots,p_n) \in \mathbb{R}^{4n} \mid p_1 \in V_+; p_1+p_2 \in V_+; p_1+p_2+p_3 \in V_+;$$

$$p_1+p_2+p_3+p_4 \in V_+; \ldots; \sum_{i=1}^{n-1} p_i \in V_+; \sum_{i=1}^{n} p_i = 0 \Big\} \; ,$$

que corresponde à condição espectral em termos das distribuições de Wigthman, como afirmado anteriormente.

Falta provar que $\widehat{W}_n(q_1,\ldots,q_{n-1}) = 0$ se $q_i \notin V_+$. Para isto, note que

$$W_n(y_1,\ldots,y_{n-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{4n-4}} \int d^4q_1 \ldots d^4q_{n-1} \, \widehat{W}_n(q_1,\ldots,q_{n-1})\, e^{i(q_1y_1+\cdots+q_{n-1}y_{n-1})} \; . \tag{C.16}$$

Pela transformada inversa

$$\widehat{W}_n(q_1,\ldots,q_{n-1}) = \int d^4y_1 \ldots d^4y_{n-1} \, W_n(y_1,\ldots,y_{n-1})\, e^{i(q_1y_1+\cdots+q_{n-1}y_{n-1})}$$

$$= (2\pi)^{4n-4} \left(\Omega, \varphi(0)\,\delta^4(p-q_1)\,\varphi(0)\,\delta^4(p-q_2)\ldots\delta^4(p-q_{n-1})\,\varphi(0)\,\Omega \right),$$

vemos que $\widehat{W}_n$ desaparece quando qualquer um dos q_k está fora do espectro do operador energia-momentum. Portanto, seu espectro está confinado no cone do futuro V_+.

Vamos provar a parte (c). Seja $y_i = \lambda_i + i\,\eta_i$ com $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$, tal que η_i é um vetor tipo-tempo, $\eta^2 > 0$, $\eta^0 > 0$; então, o integrando da transformada de Fourier torna-se

$$\widehat{W}_n\,(q_1, \ldots, q_{n-1})\; e^{i(q_1\lambda_1+\cdots+q_{n-1}\lambda_{n-1})} e^{-(q_1\eta_1+\cdots+q_{n-1}\eta_{n-1})}\,.$$

Visto que $q_k\eta_k > 0$, a integral (C.16), bem como suas derivadas com respeito a y_i, convergirá porque $\widehat{W}_n$ é uma distribuição temperada e o fator $e^{-q_k\eta_k}$ decresce rapidamente quando seu argumento vai para o infinito. Assim, $W_n(y_1, \ldots, y_{n-1})$ é uma função analítica de todos os seus argumentos se a parte imaginária de todos os $y_i \in V_+$.

O Teorema Bargmann-Hall-Wightman

Teorema C.16 (Teorema BHW). *Se a distribuição de Wightman* $W_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ *é analítica no domínio tubo* $\mathscr{T}_{n-1} = \mathbb{R}^{4(n-1)} - iV_+^{(n-1)}$, *então* W_n *é analítica no domínio tubo estendido*

$$\mathscr{T}^{\text{est.}}_{n-1} = \Big\{(\Lambda z_1, \ldots, \Lambda z_{n-1}) \mid (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathscr{T}_{n-1}, \Lambda \in \mathscr{L}_+(\mathbb{C})\Big\}\,.$$

Apêndice D

Integrais Oscilatórias e o Conjunto de Frente de Ondas

O conteúdo deste apêndice é uma coleção de definições, lemas e teoremas que constam nos trabalhos de L. Hörmander e J.J. Duistermaat [12, 13] e suas provas podem ser vistas em detalhes, nestes trabalhos ou em [58, 96].

Se $p(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ é um operador diferencial com coeficientes dependendo de $x \in \mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned} p(x,D)u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} p(x,D) \int_{\mathbb{R}^n} d^n k \; e^{ikx} \widehat{u}(k) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d^n k \; p(x,k) e^{ikx} \widehat{u}(k) \;, \end{aligned} \tag{D.1}$$

onde $u(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{u}(k)$ é transformada de Fourier, $p(x,k) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) k^\alpha$. Substituindo $p(x,k)$ por funções apropriadas, chamadas *símbolos* obtemos um operador pseudo-diferencial.

Definição D.17. *Dado um conjunto aberto $X \subset \mathbb{R}^n$, define-se o espaço de símbolos $S^m_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^s)$, sobre $X \times \mathbb{R}^s$ de* **ordem** *m e* **tipo** *(ρ,δ), onde $m \in \mathbb{R}$, $0 < \rho \leq 1$ e $0 \leq \delta < 1$, como sendo o espaço composto por funções suaves $a(x,k)$ (funções C^∞ sobre $X \times \mathbb{R}^s$), tal que para qualquer conjunto compacto $\Omega \subset X$, sobre o qual as funções $a(x,k)$ tomam valores, e multi-índices $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\beta \in \mathbb{N}^s$, existe uma constante $C_{\alpha,\beta,\Omega}$ com*

$$\left| D_x^\alpha D_k^\beta a(x,k) \right| \leq C_{\alpha,\beta,\Omega} (1+|k|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|} \quad \forall x \in \Omega; k \in \mathbb{R}^s \;. \tag{D.2}$$

As melhores constantes $C_{\alpha,\beta,\Omega}$, possíveis, em (D.2) são semi-normas

$$\|a\|_{\alpha,\beta,\Omega} = \sup_{x\in\Omega;\, k\in\mathbb{R}^s} (1+|k|)^{\rho|\beta|-\delta|\alpha|-m} \left| D_x^\alpha D_k^\beta a(x,k) \right| \;. \tag{D.3}$$

Geralmente em aplicações de interesse prático, trataremos somente com símbolos (e operadores pseudo-diferenciais) do tipo (1,0). Um polinómio com respeito a k de grau m, com coeficientes constantes, é com certeza um símbolo $S^m_{1,0}$.

Definição D.18. *Dado um símbolo a em $S^m_{\rho,\delta}(X \times X \times \mathbb{R}^s)$, onde a variável $k \in \mathbb{R}^s$ é considerada a dual das variáveis $x_i \in X$, o operador pseudo-diferencial é um operador integral de Fourier*

$$Au(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k d^n y \; e^{ik(x-y)} a(x, y, k) u(y) \quad \forall u \in \mathscr{D}(X) \; . \tag{D.4}$$

Representamos por $L^m_{\rho,\delta}(X)$ o espaço desses operadores e dizemos que $A \in L^m_{\rho,\delta}(X)$ é de ordem $\leq m$ e do tipo (ρ, δ).

Definição D.19. *Uma integral oscilatória (ou distribuição integral de Fourier) sobre $X \times \mathbb{R}^s$ é escrita formalmente como*

$$I_\varphi(a) = \int dk \; e^{i\varphi(x,k)} a(x, k) \; , \tag{D.5}$$

onde $\varphi(x, k)$ é uma **função fase** *e $a(x, k)$ é um símbolo assintótico.*

Um exemplo importante de uma integral oscilatória é a integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} dk e^{-ikx} = \delta(x)(2\pi)^n \; ,$$

que define a distribuição δ de Dirac. Pode-se provar que a distribuição δ é dada pela a integral acima, considerando o limite da integral dubla

$$\int dk dx \; \chi(\varepsilon k) u(x) \; ,$$

com $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\chi \in C_0^\infty$ é igual a 1 na vizinhança de zero.

Definição D.20. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ aberto e Γ um cone oberto em $X \times \mathbb{R}^s \backslash 0$. Isto significa que Γ fica invariante se a componente em $\mathbb{R}^s$ é multiplicada por escalares positivas. Dizemos que a função $\varphi(x, k) \in C^\infty(\Gamma)$ é um função fase em Γ se*

1. *φ é homogênea de grau 1 em k, isto é, $\varphi(x, \lambda k) = \lambda\varphi(x, k)$ se $(x, k) \in \Gamma \quad \forall \; \lambda > 0$;*

2. *$\operatorname{Im} \varphi(x, k) \geq 0$;*

3. *$d\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=j}^s \frac{\partial\varphi}{\partial k_j} dk_j \neq 0$, isto é, φ não tem pontos críticos em Γ. Isto significa que em cada ponto em Γ, alguma das derivadas $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ ou $\frac{\partial\varphi}{\partial k_j}$ nunca desaparece.*

Definição D.21. *Se $\varphi \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^s \backslash 0)$ é uma função fase chamamos*

$$\mathscr{C}_\varphi = \{(x,k) \in X \times \mathbb{R}^s \backslash 0 \,|\, \varphi'_k(x,k) = 0\} \ ,$$

o conjunto crítica de φ. Chamamos de variedade de fase estacionária a conjunto de pantas

$$\Lambda_\varphi = \{(x, \varphi'_x(x,k)) \,|\, (x,k) \in \mathscr{C}_\varphi; k \neq 0\} \ .$$

É o comportamento de $a(x,k)$ e $\varphi(x,k)$ próximo de $\mathscr{C}_\varphi$ que determina as singularidades de $I_\varphi(a)$.

Lema D.22. *Λ_φ é um subcanjunto fechado de $(X \times \mathbb{R}^s \backslash 0)$. Além dissa, se $(x,k) \in \Lambda_\varphi$, então $(x, \lambda k) \in \Lambda_\varphi$ para toda $\lambda \in \mathbb{R}_+$.*

Teorema D.23. *Se $\varphi(x,k)$ é uma funçãa fase sobre $X \times \mathbb{R}^s \backslash 0$ e $a(x,k) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^s \backslash 0)$, com $\delta < 1$, $\rho > 0$; então $WF(I_\varphi(a)) \subset \Lambda_\varphi$.*

Com isto finalizamos o método e verifica-se que podemos direcionar a busca do conjunto de frente de ondas, nos restringindo ao cálculo de pontos críticos especificados em Λ_φ.

Referências Bibliográficas

[1] S. Carlip, "*Quantum Gravity: a Progress Report,*" gr-qc/0108040.

[2] S.W. Hawking, "*Particle Creation by Black Holes,*" **Commun. Math. Phys.** 43 (1975) 199.

[3] R.M. Wald, "*The Back Reaction Effect in Particle Creation in Curved Spacetime,*" **Commun. Math. Phys.** 54 (1977) 1.

[4] B.S. DeWitt and R.W. Brehme, "*Radiation Damping in a Gravitational Field,*" **Ann. Phys.** 9 (1960) 220.

[5] S.A. Fulling, "*Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time,*" Cambridge University Press, 1989.

[6] B.S. Kay and R.M. Wald, "*Theorems on the Uniqueness and Thermal Properties of Stationary, Nonsingular, Quasifree States on Spacetimes with Bifurcate Killing Horizon,*" **Phys. Rep.** 207 (1991) 49.

[7] R.M. Wald, "*Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics,*" The University of Chicago Press, 1994.

[8] M.J. Radzikowski, "*Micro-Local Approach to the Hadamard Condition in Quantum Field Theory on Curved Space-Time,*" **Commun. Math. Phys.** 179 (1996) 529; "*A Local-to-Global Singularity Theorem for Quantum Field Theory on Curved Space-Time,*" **Commun. Math. Phys.** 180 (1996) 1.

[9] B.S. Kay, "*Quantum Field Theory on Curved Space-Time,*" in Differential Geometrical Methods in Theoretical Physics, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, eds. K. Bleuler and M. Werner, 1988, pp. 373–393.

[10] M. Köhler, "*The Stress Energy Tensor of a Locally Supersymmetric Quantum Field on a Curved Spacetime*," Doctoral dissertation, University of Hamburg, 1995, gr-qc/9505014; "*New Examples for Wightman Fields on a Manifold*," **Class. Quantum Grav.** 12 (1995) 1413.

[11] R. Brunetti, K. Fredenhagen and M. Köhler, "*The Microlocal Spectrum Condition and Wick Polynomials of Free Fields in Curved Spacetimes*," **Commun. Math. Phys.** 180 (1996) 663.

[12] L. Hörmander, "*Fourier Integral Operators I*," **Acta Math.** 127 (1971) 79.

[13] J.J. Duistermaat and L. Hörmander, "*Fourier Integral Operators II*," **Acta Math.** 128 (1972) 183.

[14] W. Junker, "*Adiabatic Vacua and Hadamard States for Scalar Quantum Fields on Curved Spacetime*," Doctoral dissertation, University of Hamburg, 1995, hep-th/9507097.

[15] B.S. Kay, M.J. Radzikowski and R.M. Wald, "*Quantum Field Theory on Spacetimes with a Compactly Generated Cauchy-Horizon*," **Commun. Math. Phys.** 183 (1997) 533.

[16] R. Brunetti and K. Fredenhagen, "*Interacting Quantum Fields in Curved Space: Renormalizability of φ^4*," gr-qc/9701048; "*Interacting Quantum Fields on a Curved Background*," hep-th/9709011; "*Microlocal Analysis and Interacting Quantum Field Theories: Renormalization on Physical Backgrounds*," **Commun. Math. Phys.** 208 (2000) 623.

[17] S. Hollands, "*The Hadamard Condition for Dirac Fields and Adiabatic States on Robertson-Walker Spacetimes*," **Commun. Math. Phys.** 216 (2001) 635.

[18] K. Kratzert, "*Singularity structure of the Two Point Function of the Free Dirac Field on a Globally Hyperbolic Spacetime*," **Annalen Phys.** 9 (2000) 475.

[19] R. Verch, "*Wavefront Sets in Algebraic Quantum Field Theory*," **Commun. Math. Phys.** 205 (1999) 337; "*On Generalizations of the Spectrum Condition*," math-ph/0011026.

[20] H. Sahlmann and R. Verch, "*Microlocal Spectrum Condition and Hadamard Form for Vector-Valued Quantum Fields in Curved Spacetime*," **Rev. Math. Phys.** 13 (2001) 1203.

[21] E. Witten, "*Supersymmetry and Morse Theory*," **J. Diff. Geom.** 17 (1982) 661.

[22] A. Jaffe, A. Lesniewski and K. Osterwalder, "*Quantum K-Theory I: The Chern Character*," **Commun. Math. Phys.** 178 (1987) 313.

[23] N. Seiberg and E. Witten, "*Monopole Condensation, and Confinement in $N = 2$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*," **Nucl. Phys. B** 426 (1994) 19.

[24] N. Seiberg, "*Electric-Magnetic Duality in Supersymmetric Non-Abelian Gauge Theories*," **Nucl. Phys. B** 435 (1995) 129.

[25] A. Rogers, "*A Global Theory of Supermanifolds*," **J. Math. Phys.** 21 (1980) 1352.

[26] B.S. DeWitt, "*Supermanifolds*," Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Second Edition, 1992.

[27] A. Jadczyk and K. Pilch, "*Superspaces and Supersymmetries*," **Commun. Math. Phys.** 78 (1981) 373.

[28] L. Bonora, P. Pasti and M. Tonin, "*Supermanifolds and BRS Transformations*," **J. Math. Phys.** 23 (1982) 839.

[29] J. Hoyos, M. Quirós, J. Ramírez Mittelbrunn and F.J. de Urríes, "*Generalized Supermanifolds. I,II and III*" **J. Math. Phys.** 25 (1984) 833, 841 and 847.

[30] L. Hörmander, "*The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*," Springer Verlag, Second Edition, 1990.

[31] R. Geroch, "*Spinor Structure of Space-Times in General Relativity. I*," **J. Math. Phys.** 9 (1968) 1739; "*Spinor Structure of Space-Times in General Relativity. II*," **J. Math. Phys.** 11 (1970) 343.

[32] V.S. Vladimirov and I.V. Volovich, "*Superanalysis: Differential Calculus*," **Theor. Math. Phys.** 59 (1984) 317.

[33] P. Breitenlohner and D.Z. Freedman, "*Stability in Gauged Extended Supergravity*," **Ann. Phys.** 144 (1982) 249.

[34] S. Nagamachi and Y. Kobayashi, "*Superdistributions*," **Lett. Math. Phys.** 15 (1988) 17.

[35] U. Bruzzo and R. Cianci, "*On the Structure of Superfields in a Field Theory on a Supermanifold*," **Lett. Math. Phys.** 11 (1986) 21.

[36] U. Bruzzo, "*Field Theories on Supermanifolds: General Formalism, Local Supersymmetry, and the Limit of Global Supersymmetry,*" in Erice 1985, Proceedings, Topological Properties and Global Structure of Space-time, 21-29.

[37] U. Bruzzo and R. Cianci, "*Structure of Supermanifolds and Supersymmetry Transformations,*" **Commun. Math. Phys.** 95 (1984) 393.

[38] R. Catenacci, C. Reina and P. Teofilatto, "*The Body of Supermanifolds,*" **J. Math. Phys.** 26 (1985) 671.

[39] P. Bryant, "*Global Properties of Supermanifolds and Their Bodies,*" **Math. Proc. Camb. Phil. Soc.** 107 (1990) 501.

[40] J.M. Rabin and L. Crane, "*Global Properties of Supermanifolds,*" **Commun. Math. Phys.** 100 (1985) 141.

[41] J.M. Rabin, "*Supermanifolds and Super Riemann Surfaces,*" Lectures given at the NATO Advanced Research Worhshop on Super Field Theory, Vancouver, 1986.

[42] O. Rudolph, "*Super Hilbert Spaces,*" **Commun. Math. Phys.** 214 (2000) 449.

[43] K. Osterwalder, "*Supersymmetric Quantum Field Theory,*" Workshop on Constructive Results in Field Theory and Statistical Mechanics and Condensed Matter Physics, Palaiseau, France, July 1994, Springer LNP 446.

[44] F. Treves, "*Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels,*" Academic Press, 1967.

[45] R. Haag, "*Local Quantum Physics: Fields Particles, Algebras,*" Springer, 1996, Second Edition.

[46] R. Haag and D. Kastler, "*An Algebraic Approach to Quantum Field Theory,*" **J. Math. Phys.** 5 (1964) 848.

[47] J. Dimock, "*Algebras of Local Observables on a Manifold,*" **Commun. Math. Phys.** 77 (1980) 219; "*Dirac Quantum Fields on a Manifold,*" **Trans. Amer. Math. Soc.** 269 (1982) 133.

[48] R.F. Streater and A.S. Wightman, "*PCT, Spin-Statistics and All That,*" Benjamin, New York, 1964.

[49] F. Constantinescu "*Supersymmetry Positivity and Supersymmetric Hilbert Space,*" **Lett. Math. Phys.** 62 (2002) 111.

[50] H.J. Borchers, "*On the Structure of the Algebra of the Field Operators,*" **Nuovo Cimento**, 24 (1962) 214.

[51] S.A. Fulling, M. Sweeny and R.M. Wald, "*Singularity Structure of the Two-Point Function in Quantum Field Theory in Curved Spacetime,*" **Commun. Math. Phys.** 63 (1978) 257.

[52] J. Wess and J. Bagger, "*Supersymmetry and Supergravity,*" Second Edition, Princeton University Press, 1992.

[53] F. Constantinescu and G. Scharf, "*Causal Approach to Supersymmetry: Chiral Superfields,*" hep-th/0106090.

[54] O. Piguet and K. Sibold, "*Renormalized Supersymmetry: The Perturbative Theory of $N = 1$ Supersymmetry Theories in Flat Space-Time,*" Progress in Physics, vol 12, Birkhäuser, 1986.

[55] M. Sato, "*Hyperfunctions and Partial Differential Equations,*" Conf. on Funct. Anal. and Related Topics (1969) 31.

[56] D. Iagolnitzer, "*Microlocal Essential Support of a Distribution and Decomposition Theorems — An Introduction,*" in Hyperfunctions and Theoretical Physics, Springer LNM 449 (1975) 121.

[57] J. Sjöstrand, "*Singularités Analytiques Microlocales,*" Astérisque, 95 (1982).

[58] M. Reed and B. Simon, "*Fourier Analysis, Self-Adjointness,*" Academic Press, 1975.

[59] S. Hollands and R. Wald, "*Local Wick Polynomials and Time Ordered Products of Quantum Fields in Curved Spacetime,*" **Commun. Math. Phys.** 223 (2001) 289; "*Existence of Local Covariant Time Ordered Products of Quantum Fields in Curved Spacetime,*" **Commun. Math. Phys.** 231 (2002) 309.

[60] H.S. Snyder, "*Quantized space-time,*" **Phys.Rev. 71** (1947) 38.

[61] N. Seiberg and E. Witten, "*String theory and non-commutative geometry,*" **JHEP 09** (1999) 032.

[62] M.R. Douglas and N.A. Nekrasov, "*Noncommutative field theory,*" **Rev.Mod.Phys. 73** (2001) 977.

[63] R.J. Szabo, "*Quantum field theory on noncommutative spaces,*" **Phys.Rept. 378** (2003) 207.

[64] L. Álvarez-Gaumé and M.A. Vázquez-Mozo, "*General properties of non-commutative field theories,*" **Nucl.Phys. B668** (2003) 293.

[65] A.M. Jaffe, "*High-energy behavior in quantum field theory I. Strictly localizable fields,*" **Phys.Rev. 158** (1967) 1454.

[66] S. Nagamachi and N. Mugibayashi, "*Hyperfunction quantum field theory,*" **Commun.Math.Phys. 46** (1976) 119.

[67] E. Brüning and S. Nagamachi, "*Hyperfunction quantum field theory: Basic structural results,*" **J.Math.Phys. 30** (1989) 2349.

[68] A.S. Wightman, "*Looking back at quantum field theory,*" **Phys. Scripta 24** (1981) 813.

[69] W. Lücke, "*PCT, spin and statistics, and all that for nonlocal Wightman fields,*" **Commun.Math.Phys. 65** (1979) 77.

[70] W. Lücke, "*Spin-statistics theorem for fields with arbitrary high energy behavior,*" **Acta Phys.Austr. 55** (1984) 213.

[71] W. Lücke, "*PCT theorem for fields with arbitrary high-energy behavior,*" **J.Math.Phys. 27** (1985) 1901.

[72] M.A. Soloviev, "*Extension of the spin-statistics theorem to nonlocal fields,*" **JETP 67** (1998) 621.

[73] M.A. Soloviev, "*A uniqueness theorem for distributions and its application to nonlocal quantum field theory,*" **J.Math.Phys. 39** (1998) 2635.

[74] M.A. Soloviev, "*PCT, spin and statistics and analytic wave front set,*" **Theor.Math.Phys. 121** (1999) 1377.

[75] M.A. Soloviev, "*Nonlocal extension of the Borchers classes of quantum fields,*" in Multiple Facets of Quantization and Supersymmetry, Ed. M. Olshanetsky and A. Vainshtein, contribution to Marinov Memorial Volume, World Scientific, 697-717.

[76] I.M. Gelfand and G.E. Shilov, "*Generalized functions,*" Vol.2, Academic Press Inc., New York, 1968.

[77] A. Strohmaier, R. Verch and M. Wollenberg, "*Microlocal analysis of quantum fields on curved space-times: analytic wave front sets and Reeh-Schlieder theorems,*" **J.Math.Phys. 43** (2002) 5514.

[78] S. Hollands, "*A general PCT theorem for the operator product expansion in curved spacetime,*" **Commun.Math.Phys. 244** (2004) 209.

[79] D.H.T. Franco and C.M.M. Polito, "*Supersymmetric field-theoretic models on a supermanifold,*" **J.Math.Phys. 45** (2004) 1447.

[80] N.N. Bogoliubov, A.A. Logunov, A.I. Oksak, and I.T. Todorov, "*General principles of quantum field theory,*" Kluwer, Dordrecht, 1990.

[81] F. Treves, "*Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators,*" Vol.1, Plenum Press, 1980.

[82] M. Chaichian, K. Nishijima and A. Tureanu, "*Spin-statistics and CPT theorems in noncommutative field theory,*" **Phy.Lett. B568** (2003) 146.

[83] N. Mahajan, "*PCT theorem in field theory on non-commutative space,*" **Phys.Lett. B569** (2003) 85.

[84] R. Jost, "*Eine Bemerkung zum CPT,*" **Helv.Phys. Acta 30** (1957) 409.

[85] U. Moschella and F. Strocchi, "*The choice of test functions in gauge quantum field theories,*" **Lett.Math.Phys. 24** (1992) 103.

[86] F. Ruiz Ruiz, "*Gauge-fixing independence of IR divergences in noncommutative $U(1)$, perturbative tachyonic instabilities and supersymmetry*" **Phys.Lett. B502** (2001) 274.

[87] M. Chaichian, M.N. Mnatsakanova, K. Nishijima, A. Tureanu and Yu. S. Vernov "*Towards an axiomatic formulation of noncommutative quantum field theory,*" hep-th/0402212.

[88] V. Guillemin and Sternberg, "*Geometric asymptotics,*" American Mathematical Society, Revised Version, Vol.14, 1990.

[89] Yu.V. Egorov and M.A. Shubin, "*Partial differential equations IV,*" Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol.33, 1993.

[90] D.H.T.Franco,"*On the Borches Class of a Non-Commutative Field,*" hep-th/0404029.

[91] O. Piguet, "*Supersymmetry, Supercurrent, and Scale Invariance*" hep-th/9611003.

[92] Prem P. Srivastava, *Supersymmetry, Superfields and Supergravity: an Introduction*, IOP Publishing Ltd (1986)

[93] V. Kostelecký and R. Potting, "*CPT and Strings,*" **Nucl.Phys. B 359** (1991).

[94] A. Pasquinucci and K. Roland, "*CPT Invariance of String Models in a Minkowski Backgound,*" **Nucl.Phys. B 473** (1996).

[95] P. Roman, "*Introduction to Quantum Field Theory,*" John Wyley and Sons, Inc., Ney Yor, 1969.

[96] D.H.T. Franco, "*Renornormalização em TQC,*" Notas de Aula, curso ministrado no CBPF, UCP e UFES, 2001-2003.

[97] S. Hawking, "*O Universo numa Casca de Noz,*" Ed. Mandarim, 2001.

[98] J. Hadamard, "*Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differencial Equations,*" Dover Publications, New York, 1952.

“Aspectos estruturais de modelos de campos quantizados: uma abordagem axiomática”

Caio Marcello Mota Polito

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

Ricardo Machado de Amorim – UFRJ

Victor de Oliveira Rivelles – IF/USP

Francesco Toppan – UERJ

Itzhak Roditi – CBPF

Rio de Janeiro, 05 de novembro de 2004