

Tese de Doutorado

**Estudo da Resposta Eletromagnética da Teoria de
Chern-Simons-Landau-Ginzburg para o
Efeito Hall Quântico Fracionário**

Eduardo Vasquez Corrêa Silva

Orientador : Daniel Gustavo Barci

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas — CBPF

Rio de Janeiro

Agosto de 1999

A Meire Lúcia (Malu). Sua amizade, coragem e determinação têm me ensinado muito sobre a vida. :-)

A g r a d e c i m e n t o s

Gostaria de agradecer, primeiramente, ao meu orientador, Dr. Daniel Gustavo Barci, pela sua extrema paciência, bom-humor, dedicação e profundo respeito. Agradeço também aos Drs. Luis da Mota, Luiz Guilherme e James Skea, pelo apoio e amizade. Aos meus pais, que estiveram torcendo este tempo todo, prestando seu carinho e apoio incondicionais. E aos amigos em geral, companheiros do dia-a-dia, pelas conversas, pela força, pelas piadas.

Agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro a este trabalho.

R e s u m o

Neste trabalho, analisamos a resposta eletromagnética de um sistema de bósons carregados acoplados a um campo de gauge de Chern-Simons. Técnicas de integrais de caminho são utilizadas pra obtermos uma ação efetiva em termos da densidade de partículas do sistema, após integração exata das flutuações quânticas do campo de gauge. Da ação obtida, extraímos a densidade de corrente para um campo eletromagnético externo arbitrário. Para o caso particular de uma campo magnético externo homogêneo --- caso de interesse para o estudo do Efeito Hall Quântico --- e desprezando a influência da corrente sobre os campos externos, mostramos que a condutividade transversa é quantizada, na presença de uma distribuição arbitrária de impurezas. O papel dos estados de borda neste contexto é analisado. Calculamos o propagador das densidades de flutuação. Em seguida, obtemos as equações para a distribuição estática de densidade de carga mais provável na presença de flutuações quânticas do campo de gauge.

A b s t r a c t

In this work, we analyze the electromagnetic response of a system of charged bosons coupled to a Chern-Simons gauge field. Path integral techniques are employed to obtain an effective action in terms of the particle density, upon exact integration over the gauge field. From such effective action we extract the current density for an arbitrary external electromagnetic field. Particularizing for a homogeneous external magnetic field — the case of interest for the study of the Quantum Hall Effect — and neglecting the influence of the current density upon the external fields, we show that the transverse conductivity is quantized in the presence of an arbitrary impurity distribution. The role of the edge states in this context is analyzed. We calculate the propagator of the density fluctuations. Then we obtain the equations for the most probable static charge distribution in the presence of gauge field quantum fluctuations.

C o n t e ú d o

| | |
|---|------------|
| Agradecimentos | iii |
| Resumo | iv |
| Abstract | v |
| Conteúdo | 1 |
| Introdução Geral | 4 |
| 1 Introdução ao Efeito Hall | 8 |
| 1.1 O Efeito Hall Clássico | 8 |
| 1.2 O Efeito Hall Quântico | 11 |
| 1.2.1 Resistências e Resistividades | 11 |
| 1.2.2 “Plateaux” de Resistividade Transversal | 16 |
| 1.3 Modelos Teóricos para o Efeito Hall Quântico | 20 |
| 1.3.1 O Problema de Landau | 20 |
| 1.3.2 Níveis de Landau e o Efeito Hall Quântico Inteiro | 25 |
| 1.3.3 A Função de Onda de Laughlin e o Efeito Hall Quântico Fracionário . | 33 |
| 2 A Teoria de Chern-Simons-Landau-Ginzburg para o Efeito Hall Quântico | |

| | |
|--|-----------|
| Fracionário | 40 |
| 2.1 Construção de uma Teoria de Chern-Simons- | |
| Landau-Ginzburg para o EHQF | 41 |
| 2.1.1 Agregando Partículas e Fluxos. | 41 |
| 2.1.2 Segunda Quantização | 46 |
| 2.2 Solução de Campo Médio e Fenomenologia do EHQF | 48 |
| 3 Resposta Eletromagnética de um Sistema de Bósons Acoplados a um | |
| Campo de Gauge de Chern-Simons | 56 |
| 3.1 A Função Partição na Representação de Densidade | 57 |
| 3.1.1 Fixação do Funcional de Gauge G_F | 59 |
| 3.1.2 Integração em a_0 e o Vínculo de Chern-Simons | 61 |
| 3.1.3 Integração em \vec{a} e a Nova Interação de Muitos Corpos | 62 |
| 3.1.4 A Ação Efetiva na Representação de Densidade | 65 |
| 3.2 A Resposta Eletromagnética | 67 |
| 3.2.1 Resposta a um Campo Arbitrário | 67 |
| 3.2.2 O Caso do Efeito Hall | 69 |
| 3.3 Dinâmica das Flutuações de Densidade | 73 |
| 3.4 Correções Quânticas às Excitações de Vórtices | 80 |
| 4 A Densidade de Carga na Presença de Flutuações Quânticas do Campo de | |
| Chern-Simons | 84 |
| 4.1 A Ação Efetiva | 86 |
| 4.2 Condições de Extremização da Ação Efetiva | 92 |
| 4.3 Um Sistema de Equações Diferenciais Parciais para a Densidade de Carga . . | 95 |
| 4.4 Propriedades das Soluções | 98 |

| | | |
|-------|---|------------|
| 4.4.1 | Soluções com Simetria Polar | 100 |
| 4.4.2 | Tratamento Numérico Das Equações Diferenciais | 102 |
| | Conclusões | 114 |

Introdução Geral

Nos últimos anos tem havido um crescente interesse pelo estudo de sistemas de baixa dimensionalidade em Teoria Quântica de Campos, motivado pela possível aplicação a sistemas da Matéria Condensada. Tal interesse é incentivado pelas novas tecnologias de construção de nanoestruturas, capazes de confinar elétrons em duas ou até mesmo uma dimensão. Notavelmente, qualquer avanço nesta área tem importantes consequências, tanto para o conhecimento básico quanto para a aplicação tecnológica a médio prazo [1, 2]. Do ponto de vista da Teoria Quântica de Campos, uma primeira aproximação à Física da Matéria Condensada se estabeleceria com o estudo de campos a temperatura e potencial químico finitos [3, 4, 5]. O problema de férmions fortemente correlacionados ocupa, neste sentido, um papel de destaque. O modelo “padrão” para este tipo de sistemas é o modelo de Hubbard, que descreve elétrons com interação de dois corpos na rede. Um estudo sistemático detalhado deste modelo em função da temperatura pode ser encontrado nas refs. [6].

As últimas décadas têm sido marcadas pela intensa pesquisa sobre as propriedades físico-químicas dos cristais semicondutores e sua utilização tecnológica. Técnicas extremamente precisas de construção e de controle de suas propriedades eletrônicas têm sido desenvolvidas, e o resultado mais evidente disso é a dramática miniaturização e sofisticação dos circuitos eletrônicos. No entanto, mesmo o alto grau de desenvolvimento alcançado pela Física de Semicondutores ainda comportaria imprevistos, tal como o ocorrido no

início da década de 80, quando um novo e surpreendente fenômeno foi observado. Na verdade, foram duas as surpresas. Em 1980, K.von Klitzing, G. Dorda e M. Pepper [7] descobriram o hoje denominado *Efeito Hall Quântico Inteiro* (EHQI). Apenas dois anos depois, Daniel C. Tsui, Horst L. Störmer e Arthur C. Gossard [8] observaram um segundo efeito, bem semelhante ao primeiro, hoje denominado *Efeito Hall Quântico Fracionário* (EHQF). Apesar das semelhanças entre ambos — que conduziram à reunião destes sob o nome comum de *Efeito Hall Quântico* (EHQ) — estes fenômenos demandam explicações significativamente diferentes, e os esforços teóricos nesse sentido parecem traçar novos rumos em Matéria Condensada. Tendo em vista a avassaladora quantidade de informação que hoje se encontra armazenada em dispositivos semicondutores, toda nova propriedade dos materiais semicondutores torna-se digna de atenção, *a priori*. Espera-se ainda que o esclarecimento do Efeito Hall Quântico contribua para a elucidação de certas questões acerca das propriedades condutoras dos materiais, em geral.

Na realidade, o EHQ não é hoje apenas um “efeito”, mas todo um conjunto de fenômenos observados em sistemas bidimensionais de elétrons submetidos à ação de um campo magnético intenso e a baixas temperaturas. A fenomenologia principal poderia ser resumida dizendo-se que a condutividade transversal do sistema é “quantizada”, ou seja, ela é um número inteiro (no caso do EHQI) ou fracionário (no caso do EHQF) multiplicado por uma constante universal (e^2/h). Um aspecto relevante no EHQ é que ele possui propriedades universais: ele *independe* do material e da geometria das amostras.

O EHQI se encontra razoavelmente bem compreendido. Porém, não deixa de apresentar propriedades físicas não convencionais como, por exemplo, *fracionalização do número fermiônico* em interfaces unidimensionais, construídas a partir dos dispositivos que exibem o EHQI [9, 10]. Este efeito era conhecido em Teoria Quântica de Campos, mas foi observado em somente dois sistemas da Matéria Condensada (polímeros lineares, e

superfluidade no He^3).

A compreensão do EHQI, no entanto, apresenta um grau de dificuldade muito maior, pois trata-se de um problema de muitos elétrons onde a interação elétron-elétron assume importância crucial [11]. O melhor modelo atualmente aceito para descrever o EHQF é o chamado *modelo de férmions compostos* [12, 13, 14]. Este modelo contém, essencialmente, um campo fermiônico ou bosônico acoplado a um campo de gauge com dinâmica de Chern-Simons. Na aproximação de campo médio acrescido de flutuações quadráticas (aproximação RPA), este modelo descreve satisfatoriamente os principais aspectos fenomenológicos do EHQF. Porém, muitas perguntas ficam em aberto; a abordagem deste modelo deve ser, necessariamente, não perturbativa, havendo grande dificuldade para se extrair todo o seu conteúdo físico. Atualmente, *não* existe um modelo quântico (microscópico) completo e satisfatório para o Efeito Hall. Trata-se de uma efervescente linha de pesquisa: o Prêmio Nobel de Física de 1998 foi concedido a R.B Laughlin, H.L. Störmer e D.C. Tsui por seus trabalhos em Efeito Hall Quântico Fracionário. Obviamente, não é objetivo do presente trabalho tentar abordar o Efeito Hall em sua totalidade e complexidade. O que modestamente fazemos aqui reflete o nosso interesse na crescente utilização de técnicas de Teoria Quântica de Campos para a abordagem de problemas de Matéria Condensada — e o Efeito Hall Quântico tem se mostrado um fértil campo de aplicações para tais ferramentas.

Podemos resumir o espírito desta seção introdutória ressaltando que a área de pesquisa de Teoria Quântica de Campos em baixa dimensionalidade e seu emprego em sistemas de Matéria Condensada é uma área relativamente nova, cujo potencial tem atraído a atenção da comunidade científica, de um ponto de vista tanto aplicado quanto acadêmico — o desenvolvimento de novas técnicas em Teoria Quântica de Campos é um exemplo deste último aspecto.

Com esta motivação, o capítulo 1 apresenta, em linhas extremamente gerais, descrições do Efeito Hall Clássico, do EHQI e do EHQF, convergindo para a teoria de Chern-Simons-Landau-Ginzburg (CSLG), uma das modernas propostas para descrição do EHQF. Tomando esta teoria como ponto de partida, no capítulo 3 apresentamos o cálculo da resposta eletromagnética exata deste modelo, realizado a partir da dedução de uma ação efetiva para a densidade de carga, obtida após integrarmos exatamente a ação original sobre as flutuações do campo de gauge de Chern-Simons. Um dos resultados importantes desta tese é mostrar o mecanismo de quantização exata da condutividade Hall, no contexto da teoria de CSLG. Mostramos que a quantização é mantida na presença de qualquer distribuição de impurezas, e que os estados de borda do sistema desempenham importante papel neste mecanismo. No capítulo 4 abordamos o problema de minimizar a ação efetiva obtida no capítulo 3, no intuito de estudarmos a distribuição estática de carga para diferentes valores dos parâmetros da teoria. Apresentamos um sistema de equações diferenciais parciais que descreve o comportamento desta densidade de carga, e também a distribuição de correntes no sistema. À guisa de exemplo, obtemos numericamente a densidade de carga e a distribuição de correntes para um disco finito, e diferentes intensidades do campo magnético externo. Como resultado principal, mostramos como o sistema quebra espontaneamente a simetria de translação e rotação, ao se afastar das condições de quantização exata da condutividade. Finalizamos este trabalho com as conclusões por nós obtidas.

Capítulo 1

Introdução ao Efeito Hall

Neste capítulo, traçamos uma breve revisão do que vem a ser o Efeito Hall, em suas versões clássica e quântica, seus aspectos fenomenológicos e as tentativas em descrevê-lo.

1.1 O Efeito Hall Clássico

Os estudos de Edwin Hall, em 1879, acerca das propriedades da condução elétrica em metais levou-o à descoberta do hoje denominado *Efeito Hall Clássico*. A fig. 1.1 esquematiza a experiência realizada por Hall: uma placa condutora plana, contendo uma corrente contínua I , é atravessada pelo campo magnético perpendicular B . Nestas condições, observa-se uma diferença de potencial não nula no sentido “transversal” à corrente e ao campo magnético. Esta diferença de potencial é denominada *Voltagem Hall*.

Este comportamento pode ser descrito satisfatoriamente por um gás de elétrons¹ de Bloch. Cada elétron está submetido à força de Lorentz (devida ao campo eletromagnético externo) e à força de “atrito” com as impurezas da rede. Este “atrito” é parametrizado

¹Os experimentos de Hall são *anteriores* à descoberta da existência do elétron, através dos experimentos com raios catódicos realizados por J.J. Thomson, em 1897.

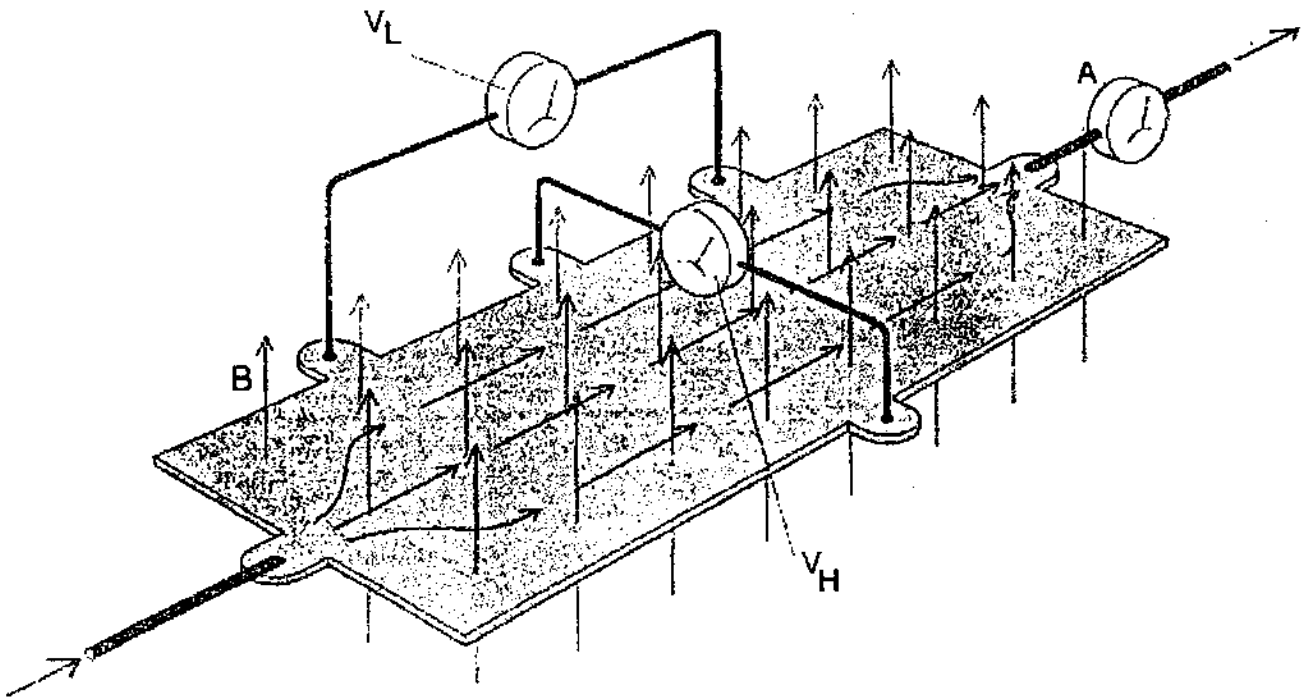


Figura 1.1: O dispositivo para medição do Efeito Hall Clássico consiste, basicamente, de um plano condutor ao qual se conectam voltímetros e amperímetros. O movimento dos portadores de carga (setas sobre o plano) constitui a corrente medida no amperímetro A. Um campo magnético B (setas atravessando o plano) é aplicado perpendicularmente à amostra. A diferença de potencial longitudinal V_L é aquela medida de uma extremidade da amostra em relação à outra — essencialmente, é a diferença de energia por unidade de carga entre os elétrons que entram na amostra e os que saem dela. A diferença de potencial transversal é medida “perpendicularmente” à corrente, sendo denominada *Voltagem Hall* V_H [15].

pelo *tempo de relaxação* τ , ou seja, uma estimativa do tempo médio entre duas colisões sucessivas de um elétron com átomos de impurezas. (O efeito das interações com o potencial periódico da rede está contido na massa efetiva m do elétron de Bloch².) Escrevemos então a equação clássica de movimento para um elétron de carga $-e$,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) - \frac{\vec{p}}{\tau}. \quad (1.1)$$

No regime estacionário (i.e., $d\vec{p}/dt = 0$), temos

$$\vec{E} = \frac{m}{ne^2\tau} \vec{j} + \frac{1}{nec} \vec{j} \times \vec{B}. \quad (1.2)$$

Fazendo o plano xy coincidir com o plano condutor, temos $\vec{B} = B \hat{z}$. A densidade de corrente elétrica é definida como $\vec{j} = -nev$. Assim sendo, as componentes da resistividade ρ_{mn} , tal que $E_m = \rho_{mn}j_n$, são da forma

$$\begin{aligned} \rho_{11} = \rho_{22} &= \frac{m}{ne^2\tau} \\ \rho_{12} = -\rho_{21} &= \frac{B}{nec}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Observa-se o aparecimento de uma componente não nula do campo elétrico, transversal à densidade de corrente \vec{j} e, conseqüentemente, uma diferença de potencial transversal não nula — a voltagem Hall clássica. A componente $\rho_H \equiv \rho_{12}$ é denominada *resistividade Hall*, sendo diretamente proporcional à *razão* B/n entre a intensidade do campo magnético e a densidade de carga (ou, de modo equivalente, entre o fluxo do campo magnético e a carga

²A massa efetiva m de um elétron num semicondutor é definida [16] como

$$\frac{1}{m} \equiv \frac{1}{\hbar^2} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{d^2\mathcal{E}(k)}{dk^2}$$

onde $\mathcal{E}(k)$ é a energia do elétron em função do momentum k .

total dos elétrons na amostra). Para $B = 0$, recupera-se o caso usual $\rho_{12} = 0$, e o campo elétrico é paralelo à densidade de corrente.

A dependência da resistividade Hall ρ_H em relação ao sinal da carga fez do Efeito Hall Clássico um importante método para a determinação do sinal do portador de carga (elétrons ou buracos) em materiais condutores e semi-condutores. Sua utilização tornou-se tão comum que, passados mais de 100 anos desde a sua descoberta, não se imaginava que poderia ainda haver surpresas. Mas havia.

1.2 O Efeito Hall Quântico

1.2.1 Resistências e Resistividades

O Efeito Hall Quântico ocorre a baixas temperaturas ($\leq 4K$) e a campos magnéticos intensos (≈ 1 a 30 T), em interfaces planas entre dois semicondutores ou entre um semicondutor e um isolante (fig. 1.2). Esta configuração possibilita a existência de um gás de elétrons bidimensional (2DEG), formado por elétrons aprisionados num poço de potencial junto à interface (fig. 1.3). O EHQ foi inicialmente detectado num MOSFET com uma interface $\text{SiO}_2\text{-Si}$; atualmente, heterojunções (em especial $\text{GaAs-Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$, tal que $0 \leq x \leq 1$ — ou, mais sucintamente, GaAs) são as mais utilizadas em experimentos [17].

O esquema do dispositivo usado para a medições do EHQ pode ser visto na fig. 1.4, e corresponde ao sistema mostrado na fig. 1.2. Aplicando-se uma diferença de potencial aos pontos S e D , geramos uma corrente I ; são medidas as voltagens longitudinal V_L e transversal V_H (ou voltagem de Hall), o que determina as resistências [15]

$$R_{xx} = V_L/I \quad (1.4)$$

$$R_{xy} = V_H/I. \quad (1.5)$$

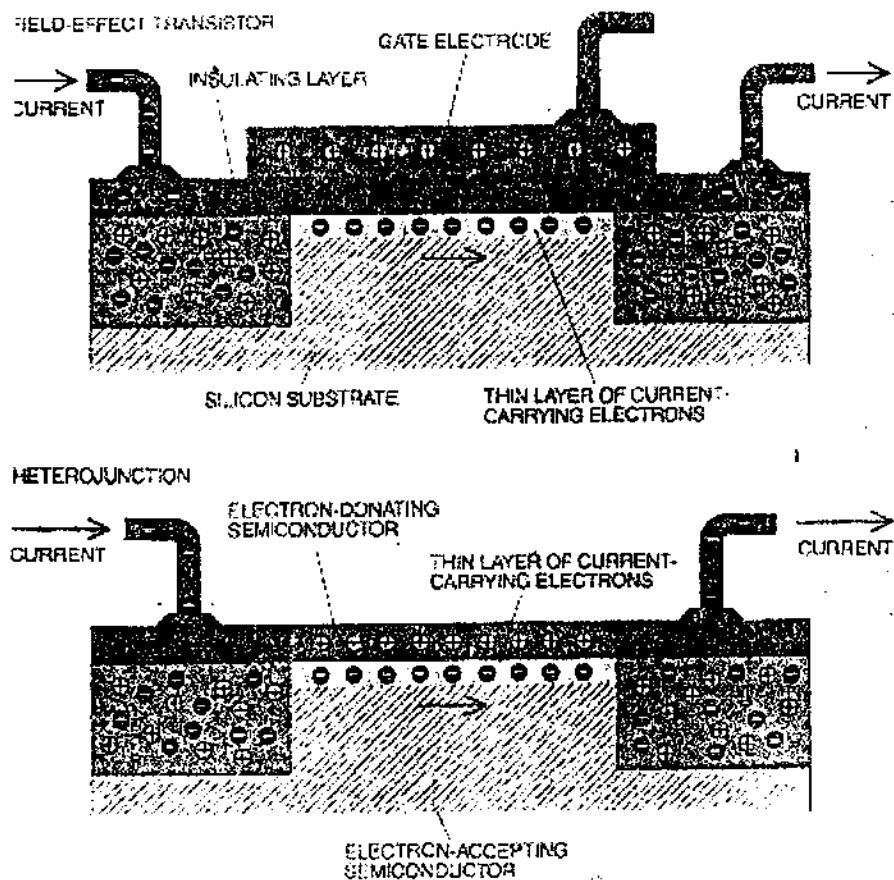


Figura 1.2: Dispositivos semicondutores nos quais o Efeito Hall Quântico é observado. Num transistor de efeito de campo (em cima), elétrons são atraídos para a superfície de um cristal de silício por um contato metálico central (*gate*) positivamente carregado. A camada isolante os mantém numa fina camada próxima à superfície do cristal. Numa heterojunção (em baixo), uma interface de semicondutores distintos, os elétrons de um semiconductor são atraídos para os estados de menor energia disponíveis no outro semiconductor, ao mesmo tempo que são atraídos pelos os íons positivos deixados para trás, aprisionando-os numa camada fina junto à interface entre os semicondutores [18].

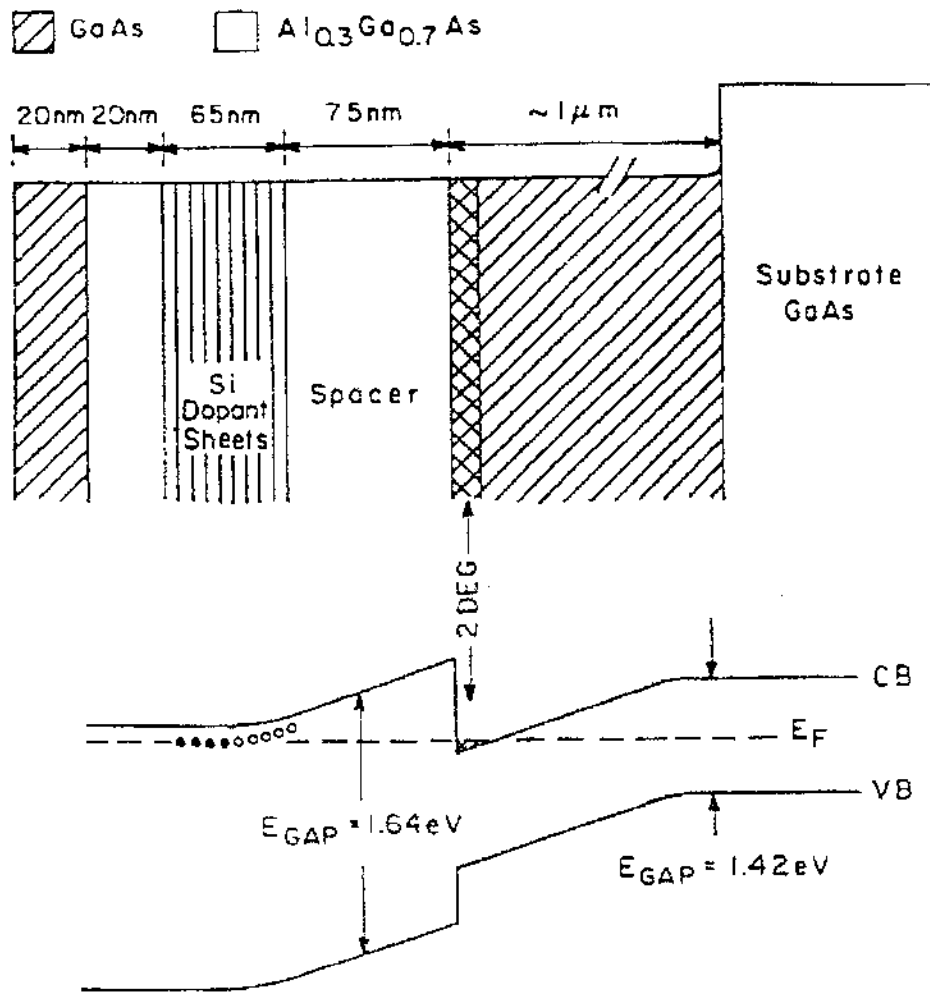


Figura 1.3: Camadas em uma heteroestrutura GaAs-AlGaAs. A parte superior do diagrama mostra a disposição espacial das camadas na amostra. A parte inferior mostra a estrutura correspondente dos níveis de energia. A região indicada por 2DEG é a do gás bidimensional de elétrons, e E_F denota a energia de Fermi [15, 19].

Observe que *não* existe uma “corrente Hall” transversal, mas uma diferença de potencial; a mesma corrente total I entra na definição de R_{xy} e R_{xx} . Para uma amostra retangular, as resistividades ρ_{xx}, ρ_{xy} estão associadas às resistências R_{xx}, R_{xy} por [15, 20]

$$R_{xx} = f\left(\frac{L}{W}; \delta\right) \frac{L}{W} \rho_{xx} \quad (1.6)$$

$$R_{xy} = g\left(\frac{L}{W}; \delta\right) \rho_{xx}, \quad (1.7)$$

onde L e W são o comprimento e a largura da amostra (vide fig. 1.4), e as funções f e g são calculáveis a partir da geometria desta. O parâmetro

$$\delta = \arctan(\rho_{xy}/\rho_{xx}) \quad (1.8)$$

é denominado *ângulo de Hall*.

Para o caso do EHQ, temos $\delta = \pi/2$, e neste caso $f = g = 1$. Ou seja, as resistências medidas são iguais às resistividades, o que é extremamente conveniente. De outro modo, seria muito difícil a medição direta da resistividade local.

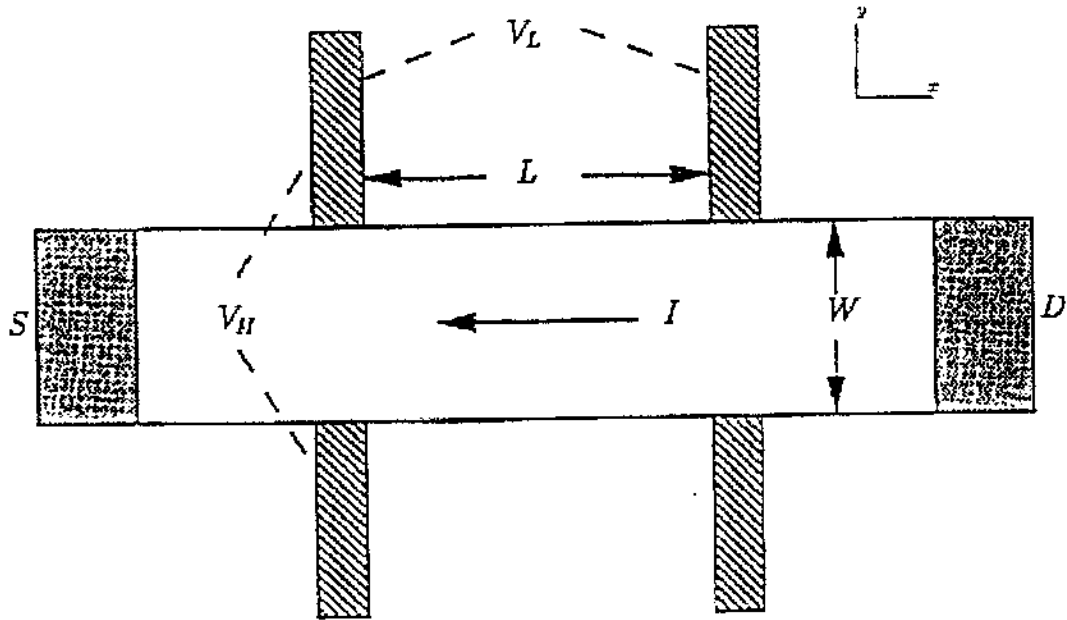


Figura 1.4: Geometria de um dispositivo para medição do Efeito Hall Quântico. A amostra propriamente dita corresponde à área retangular em branco, com largura W ; as partes hachuradas correspondem aos terminais externos. Uma diferença de potencial aplicada aos terminais S e D gera uma corrente I . Selecionando-se pares de terminais apropriados, pode-se medir a d.d.p. longitudinal V_L (ao longo de do comprimento L) e a d.d.p. transversal V_H (voltagem Hall). [15]

1.2.2 “Plateaux” de Resistividade Transversal

A Quantização da Resistividade Transversal

Submetendo-se o sistema a baixas temperaturas e a um campo magnético intenso, a dependência das resistividades em relação ao campo B já não é tão simples como no caso clássico. A fig. 1.5 representa medidas da resistividade longitudinal e transversal para uma amostra com densidade eletrônica $n = 1.93 \times 10^{11}/\text{cm}^2$, e de baixa mobilidade $\mu_e = 52,000 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, submetida a uma temperatura $T = 66 \text{ mK}$. (A mobilidade [21] é definida como sendo a razão entre a velocidade média do elétron e a intensidade do campo elétrico externo.) Para certos intervalos de B , ρ_{xy} é praticamente constante, formando os chamados *plateaux*. Fora destes intervalos, ρ_{xy} varia rapidamente entre os valores dos *plateaux* vizinhos. Concomitantemente, a resistividade longitudinal ρ_{xx} se anula sobre as regiões de *plateaux*, e apresenta picos nas regiões intermediárias. Sobre os *plateaux*, as componentes da resistividade tomam os valores

$$\rho_{xy} = \frac{1}{s} \frac{h}{e^2} \quad (1.9)$$

$$\rho_{xx} = 0 \quad (1.10)$$

onde h é a constante de Planck. Experimentalmente, os valores observados de s recaem em duas categorias: ou são números inteiros $s = 1, 2, 3, \dots$, ou então números racionais (com denominadores ímpares, em geral) $s = 1/3, 2/3, 2/5, \dots$. O aparecimento destes *plateaux*, no primeiro caso, caracteriza o *Efeito Hall Quântico Inteiro* (EHQI) [7]. O segundo caso (vide fig. 1.6) é observado em amostras com maior mobilidade eletrônica e sob efeito de campos magnéticos mais intensos, sendo denominado *Efeito Hall Quântico Fracionário* (EHQF) [8].

Os *plateaux* de resistividade Hall não podem ser explicados por nenhum modelo clássico

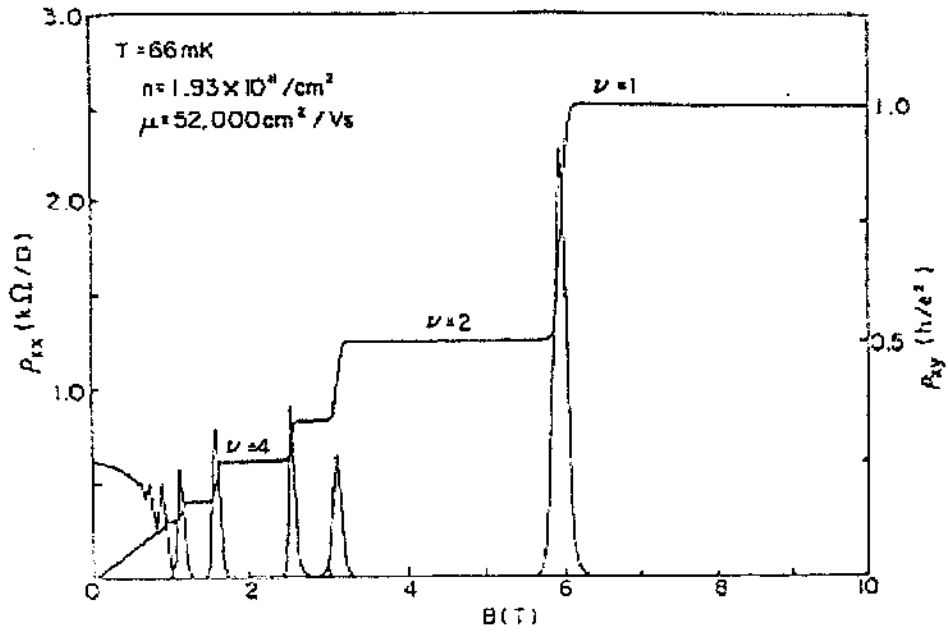


Figura 1.5: Resistividades longitudinal ρ_{xx} e transversal ρ_{xy} em função da intensidade do campo magnético B , mostrando a ocorrência dos *plateaux* de ρ_{xy} , característicos do Efeito Hall Quântico Inteiro para alguns valores do fator de preenchimento ν , numa amostra de GaAs-AlGaAs com baixa mobilidade $\mu = 5.2 \times 10^4 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, densidade eletrônica $n = 1.93 \times 10^{11}/\text{cm}^2$, e à temperatura $T = 66 \text{ mK}$. [22].

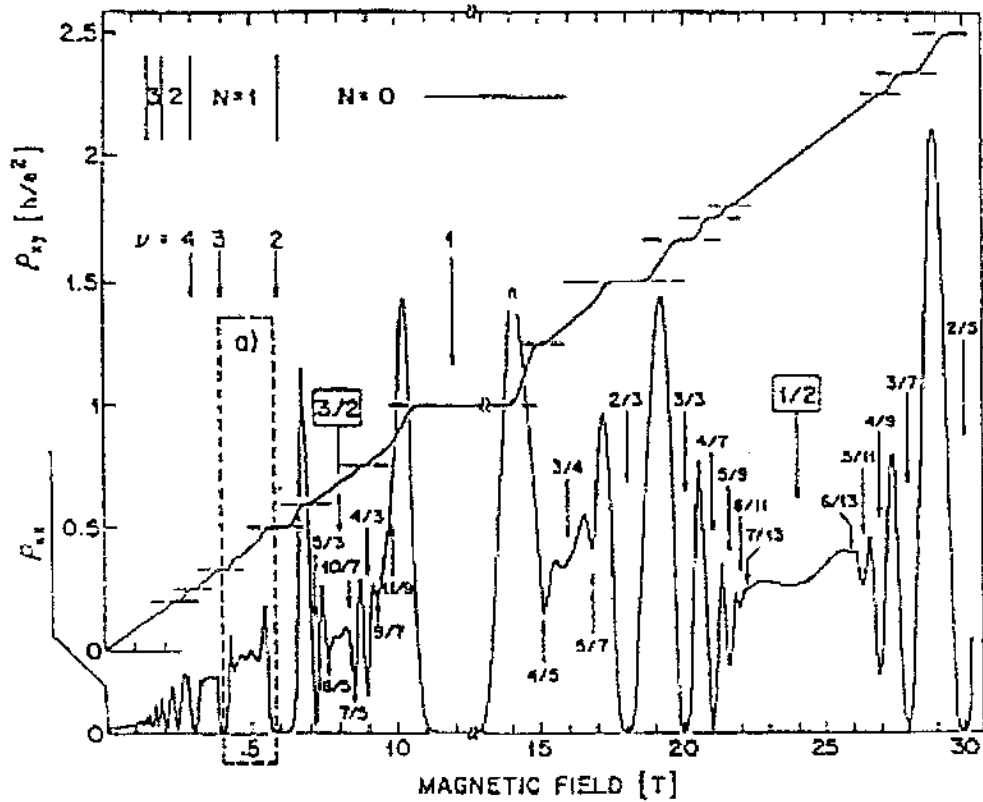


Figura 1.6: Resistividades longitudinal ρ_{xx} e transversal ρ_{xy} em função da intensidade do campo magnético B , mostrando a ocorrência dos *plateaux* de ρ_{xy} característicos dos Efeitos Hall Quântico Inteiro e Fracionário, em uma amostra de GaAs-AlGaAs com alta mobilidade eletrônica $1.3 \times 10^6 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, densidade $3 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ e temperatura $T = 85 \text{ mK}$ [22].

como aqueles utilizados na descrição do comportamento da condutividade a altas temperaturas. Quando oscilações de natureza térmica são dominantes, pode-se geralmente introduzir parâmetros que “contenham” os efeitos quânticos (e.g., o tempo de relaxação τ). Não é esse o caso para baixas temperaturas, onde as oscilações de natureza *quântica* predominam. A existência dos *plateaux* e a quantização da resistividade sugerem a existência de uma descontinuidade (*gap*) no espectro de excitações dos elétrons, que não pode ser implementado classicamente. A questão então é : como é este espectro, e como explicá-lo?

Um fato notável a respeito do EHQ é a sua universalidade e precisão . Sob condições normais, a resistividade Hall clássica (bem como a resistividade longitudinal) de uma amostra é intrinsecamente dependente de seu material, de sua geometria, da presença de impurezas, e da temperatura. Em contraste, os valores da resistividade sobre os *plateaux* do EHQ são os *mesmos* para diferentes materiais e geometrias de amostra. As medidas de resistividade Hall são comparáveis em precisão às medidas de constantes fundamentais como h, c, e ; tanto que o valor $h/e^2 = 25812.807 \Omega$ foi adotado pelo International Committee of Weights and Measures, em 1990, para a definição de uma medida padrão de resistividade.

A Quantização da Resistividade e a Relação Carga-Fluxo

Já no Efeito Hall Clássico, a resistividade R_{Hall} não depende separadamente do campo magnético B e da densidade eletrônica n : ela depende linearmente da *razão* B/n . Podemos definir a grandeza real f

$$f \equiv \frac{nhc}{eB}, \quad (1.11)$$

introduzindo-se as constantes h, c, e para que f seja adimensional. Então f pode ser en-

tendido, essencialmente, como a razão entre a densidade eletrônica e a intensidade do campo B ou, de modo equivalente, como a razão entre carga eletrônica total na amostra e o fluxo do campo magnético. As resistividades ρ_{xx} e ρ_{xy} podem então ser medidas em função de f . Chamaremos o parâmetro f de *razão carga-fluxo*, dando a este termo conotação estritamente experimental. Os *plateaux* da resistividade transversal correspondem, portanto, a valores de f tais que $f \approx s$, onde s assume valores inteiros ou racionais, como em (1.9). Isto indica a relevância, para a produção do Efeito Hall Quântico, da comensurabilidade entre o fluxo magnético e o número de elétrons presentes na amostra. Mais adiante, veremos que f é identificado com o *fator de preenchimento* (*filling fraction*) ν , que é a fração de níveis de Landau preenchidos pelos elétrons.

1.3 Modelos Teóricos para o Efeito Hall Quântico

Dada a necessidade de um tratamento quântico, vamos começar estudando o modelo mais simples possível. Primeiramente abordaremos o Problema de Landau, que consiste no problema quântico de um único elétron num plano, submetido a um campo magnético perpendicular. O Efeito Hall Quântico Inteiro é modelado como um Problema de Landau perturbado pelo potencial devido às impurezas da amostra. Veremos que este tratamento perturbativo não pode ser utilizado para o EHQF, que requer uma abordagem mais sofisticada, entre as quais figura a *função de onda de Laughlin*.

1.3.1 O Problema de Landau

Hamiltoniano, espectro de energia e autofunções

Considere um elétron não-relativístico sobre um plano e um campo magnético homogêneo perpendicular a este. Ignoramos graus de liberdade spinoriais, e portanto o

hamiltoniano é

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2, \quad (1.12)$$

onde $e > 0$. Fixando o gauge, escolhemos

$$A_0 = 0 \quad (1.13)$$

$$A_x = -By \quad (1.14)$$

$$A_y = A_z = 0 \quad (1.15)$$

satisfazendo a condição $\vec{\nabla} \times \vec{A} = B \hat{z}$. Neste gauge específico, o hamiltoniano toma a forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left[p_y^2 + \left(p_x - \frac{e}{c} By \right)^2 \right]. \quad (1.16)$$

O operador \mathcal{H} não depende explicitamente da coordenada x , e portanto a equação de Schrödinger independente do tempo,

$$\mathcal{H}\psi(x, y) = E\psi(x, y), \quad (1.17)$$

reduz-se a

$$\left[\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 (y - y_0)^2 \right] f(y) = E f(y), \quad (1.18)$$

ao escrevermos a função de onda $\psi(x, y)$ na forma

$$\psi(x, y) = C e^{ik_x x} f(y), \quad (1.19)$$

onde C é uma constante arbitrária. A equação (1.18) corresponde a um oscilador harmônico com frequência ω_0 e “ponto de equilíbrio” y_0 dados por

$$\omega_0 = \frac{eB}{mc} \quad (1.20)$$

$$y_0 = \frac{\hbar c}{eB} k_x. \quad (1.21)$$

A frequência ω_0 corresponde à frequência de ciclotron, ou seja, a frequência da trajetória circular clássica descrita por um elétron num campo magnético perpendicular ao plano.

O espectro de energia do elétron é da forma

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.22)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$, e as autofunções correspondentes são

$$f_n(y) \propto \exp\left(-\frac{m\omega_0}{2\hbar}(y-y_0)^2\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}(y-y_0)\right) \quad (1.23)$$

onde H_n é um polinômio de Hermite ³. Assim, as autofunções do hamiltoniano \mathcal{H} têm a forma

$$\psi_{k_x, n}(n) = C_{k_x, n} e^{i k_x x} \exp\left(-\frac{m\omega_0}{2\hbar}(y-y_0)^2\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}(y-y_0)\right). \quad (1.25)$$

Degenerescência dos níveis de Landau

Os níveis de energia (1.22) são degenerados; fixando-se um n , ainda é possível escolher vários estados com valores distintos para k_x . A fim de calcularmos a degenerescência dos níveis, limitamos o sistema a um quadrado de lado L sobre o plano, e impomos condições de contorno periódicas ao longo do eixo x ,

³Os polinômios de Hermite podem ser obtidos [23] a partir da função geradora

$$S(u, a) \equiv e^{u^2 - (a-u)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(u) \frac{a^n}{n!}. \quad (1.24)$$

$$\psi(0, y) = \psi(L, y) \longrightarrow 1 = e^{ik_x L}; \quad (1.26)$$

portanto, k_x assumirá os valores discretos

$$k_x = \frac{2\pi}{L}\kappa, \quad (1.27)$$

onde $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, a princípio. Porém, y_0 é uma função de k_x ; para que $0 < y_0 < L$, é necessário que

$$0 < \kappa < \frac{eB}{hc}L^2, \quad (1.28)$$

O limite superior para κ fornece a degenerescência de um nível de Landau, em função do fluxo de campo magnético $\Phi = BL^2$ através da amostra.

$$g = \frac{eB}{hc}L^2 = \frac{e}{hc}\Phi. \quad (1.29)$$

Portanto, a degenerescência g é proporcional ao fluxo magnético total, medido em unidades de hc/e . Esta grandeza, que tem dimensão de fluxo magnético e é definida em termos de constantes universais, tem um significado mais profundo; ela é denominada “quantum de fluxo magnético”. Veremos a seguir que a quantização do fluxo magnético está relacionada, essencialmente, com a invariância de gauge do sistema.

O Quantum de Fluxo Magnético

Considere um plano que contém uma região circular U de raio R , atravessada por um campo magnético de intensidade $B > 0$. O campo é nulo fora da região U , portanto o fluxo magnético total através do plano é

$$\Phi = \int_U B \, dS = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}. \quad (1.30)$$

Devido à simetria, temos $\vec{A} = A(r)\hat{r}$; além disso, temos que $B(r) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$, para $r > R$; portanto,

$$\vec{A}(r) = \vec{\nabla}\alpha(\vec{r}) \longrightarrow A(r) = \frac{\Phi}{2\pi r} , \quad (1.31)$$

onde $\alpha(\vec{r})$ é uma função *arbitrária* (ou seja, na região $r > R$, o campo \vec{A} é “puro gauge”). Em coordenadas polares (r, θ) , temos

$$\Phi = 2\pi r \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \alpha(r, \theta) . \quad (1.32)$$

Dada a arbitrariedade de $\alpha(\vec{r})$, a relação acima tem que permanecer válida para $\alpha = \alpha(\theta)$. Neste caso,

$$\alpha(\theta) = \frac{\Phi\theta}{2\pi} + cte. \quad (1.33)$$

Considere agora um elétron nesta região , descrito pelo hamiltoniano (1.12). A equação de Schrödinger (1.17) é invariante perante a transformação de gauge

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) - \vec{\nabla}\Omega(\vec{r}) \quad (1.34)$$

$$\psi'(\vec{r}) = \exp \left[-\frac{ie}{\hbar c} \Omega(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) , \quad (1.35)$$

onde $\Omega(\vec{r})$ é arbitrário. Podemos então escolher $\Omega = \alpha$, obtendo assim $\vec{A}' = 0$. No entanto, a fase

$$\zeta(\theta) = \exp \left[-\frac{ie}{\hbar c} \Phi\theta \right] , \quad (1.36)$$

adquirida pela função de onda ψ' gera uma descontinuidade espacial para esta função, visto que

$$\zeta(\theta + 2\pi) = \zeta(\theta) \exp \left[-2\pi i \frac{e}{\hbar c} \Phi \right] \neq \zeta(\theta) , \text{ em geral.} \quad (1.37)$$

Somente sob duas condições podemos garantir a continuidade de ψ' [24]:

- A função de onda é *localizada*, ou seja, apreciavelmente não nula somente nas vizinhanças de um dado ponto do plano. Assim, para qualquer valor de Φ , sempre se pode escolher um sistema de coordenadas em que esta potencial descontinuidade ocorra numa região com $\psi' = 0$.
- A função de onda é *não-localizada*. Neste caso, é preciso que Φ seja um múltiplo inteiro de um *quantum* de fluxo Φ_0 , definido como

$$\Phi_0 = \frac{hc}{e} \approx 4.1 \cdot 10^{-15} \text{ Vs} . \quad (1.38)$$

Este é um valor extremamente pequeno, da ordem de um milionésimo do fluxo do campo magnético da Terra [25].

A degenerescência dos níveis de Landau (1.29) equivale, portanto, ao número de quanta de fluxo magnético que atravessa a amostra,

$$g = \frac{\Phi}{\Phi_0} . \quad (1.39)$$

1.3.2 Níveis de Landau e o Efeito Hall Quântico Inteiro

Condutividade num Sistema Ideal

À temperatura zero, um sistema ideal (i.e., sem impurezas) é invariante por *boosts*; esta característica, por si só, determina o tensor de condutividade [26]. Suponha um gás de elétrons bidimensional (2DEG) submetido a um campo magnético perpendicular e um campo elétrico \vec{E} de pequena intensidade e paralelo ao plano. Num referencial dotado de velocidade $\vec{v} = c\vec{E} \times \vec{B}/B^2$ em relação ao referencial de laboratório, o campo elétrico é

nulo, assim como a densidade de corrente. No referencial de laboratório, a densidade de corrente é $\vec{j} = -ne\vec{v}$, onde n é a densidade eletrônica da amostra, neste referencial. As componentes da condutividade σ são definidas por $j^i = \sigma^{ij}E_j$; aqui,

$$\sigma_{xy} = \frac{nec}{B} \quad (1.40)$$

$$\sigma_{xx} = 0 \quad (1.41)$$

para *todos* os valores de n/B . Não há *plateaux*, não há Efeito Hall Quântico.

Papel das Impurezas: Estados Localizados

O Efeito Hall Quântico Inteiro é modelado sendo como um problema de perturbação ao Problema de Landau. Desprezam-se as interações entre elétrons, argumentado-se que a separação existente entre os níveis de Landau,

$$\hbar\omega_0 \approx 6.18 \cdot 10^{-32} B \quad (1.42)$$

(em Joules, supondo-se que B seja expresso em Tesla) é muito maior do que a energia coulombiana entre dois elétrons separados por uma distancia da ordem do comprimento magnético $l_0 = \sqrt{\hbar c/eB}$ (raio da órbita clássica de um elétron num campo magnético),

$$\frac{e^2}{l_0} \approx 5.76 \cdot 10^{-35} \sqrt{B} . \quad (1.43)$$

As impurezas desordenam o sistema, introduzindo um potencial V_{imp} responsável pela quebra da invariância por *boosts*. Sob este potencial, os níveis de Landau do sistema ideal transformam-se em *bandas* de Landau; qualitativamente, o perfil da densidade de estados do sistema altera-se como mostrado na fig. 1.7. Se $|V_{imp}|$ for pequeno comparado com a separação $\hbar\omega_0$ entre os níveis de Landau originais, as bandas ainda mantém-se

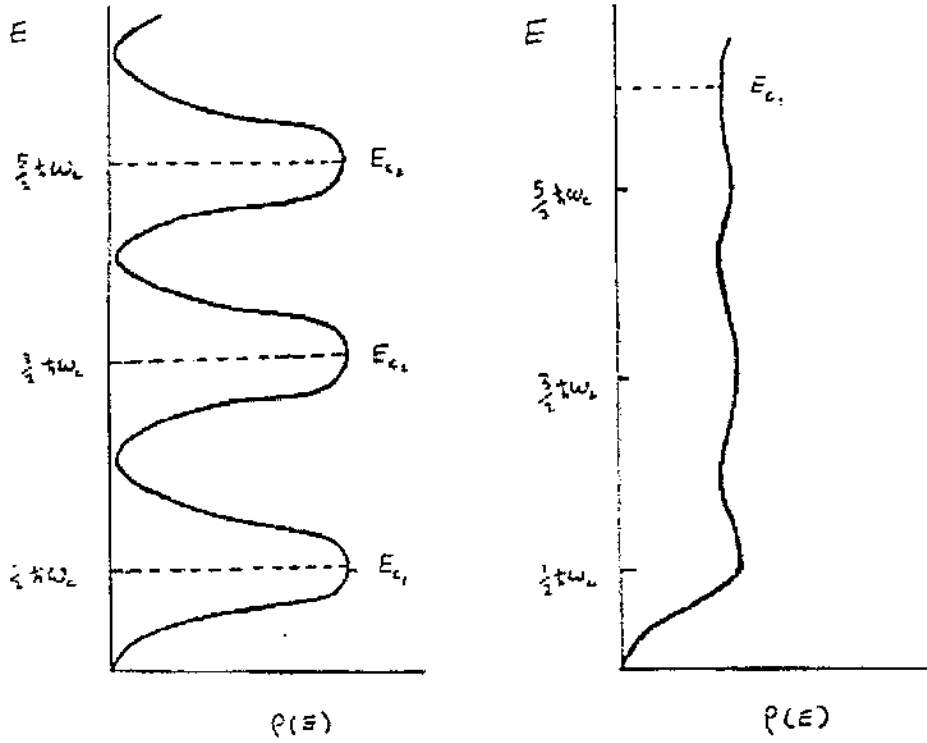


Figura 1.7: Distribuição da densidade de estados ρ de uma partícula em função da energia E , para um sistema de elétrons sem spin, com a presença de um potencial devido a impurezas. Para um potencial fraco, (diagrama à esquerda) a distribuição ainda guarda semelhança com a do problema não perturbado; para potenciais fortes, entretanto, a distribuição tende ao perfil representado à direita. As linhas tracejadas indicam os estados não-localizados. [15].

distintas. Um potencial muito forte, em contrapartida, praticamente funde os estados em um *continuum*.

A presença de impurezas cria estados localizados, i.e., estados cuja densidade de probabilidade é apreciavelmente não nula somente em uma pequena região, comparada com as dimensões da amostra. Os elétrons tendem a ser “capturados” nas vizinhanças dos átomos de impurezas; os estados localizados desempenham, por assim dizer, o papel de “reservatórios” locais de elétrons. Acredita-se que para potenciais muito intensos (ou campos magnéticos pouco intensos, i.e., $\hbar\omega_0 \ll |V_{imp}|$) *todos* os estados sejam localizados, e o sistema se torne um isolante [27]. Ao acrescentarmos um potencial V_{imp} , portanto, espera-se o surgimento de estados localizados com energias intermediárias aos níveis de Landau originais.

As propriedades elétricas de larga escala de uma amostra submetida a um campo elétrico externo dependem da possibilidade de transferência de quantidades *infinitesimais* de energia para os elétrons nela contidos. Em outras palavras, dependem da disponibilidade de estados não-localizados, a baixas temperaturas. Todos os estados puros de Landau são estados não-localizados — observe a fase $e^{ik_x x}$, em (1.25). Portanto, a ocupação dos estados localizados introduzidos pelas amostras não contribuirá para as propriedades de larga escala do sistema, como a condutividade Hall [28].

Por outro lado, é de grande importância que os estados não-localizados do sistema ideal consigam sobreviver ao potencial V_{imp} . Thouless [29] mostrou que para um sistema de elétrons não-interagentes onde $|V_{imp}| < \frac{1}{2}\hbar\omega_0$ e cuja energia de Fermi esteja entre dois níveis de Landau, σ_{xy} é independente de $|V_{imp}|$ para todas as ordens de perturbação, e seu valor é o mesmo do caso ideal, $\sigma_{xy} = Ne^2/h$ — onde N é o número de níveis de Landau preenchidos. Outras situações em que se demonstra a independência da condutividade em relação a um potencial suficientemente fraco são abordadas por Prange e

Joynt [30] e Trugman [31]. Isto significa que, para tais potenciais, ainda existirão estados *não-localizados*, responsáveis pela condutividade Hall. Além disso, espera-se que, numa banda de Landau, estes estados não-localizados correspondam a um *único* nível, ao invés de uma *banda* de estados estendidos; caso contrário, isto acarretaria o aparecimento de uma fase metálica entre regiões de *plateaux*, quando $T \rightarrow 0$, que não é observada experimentalmente: as regiões de transição entre *plateaux* tendem a desaparecer no limite $T \rightarrow 0$.

O Fator de Preenchimento e a Razão Carga-Fluxo

Seja ν um número real que indica o número de estados de Landau preenchidos. Associando a densidade n a elétrons nestes estados — não computando, portanto, os estados localizados — fazemos a associação

$$n = \frac{\nu g}{l^2} = \frac{\nu B e}{h c} . \quad (1.44)$$

visto que cada nível de Landau possui g estados. No centro de um *plateaux* correspondente ao fator de preenchimento ν , a resistividade Hall é igual à resistividade do sistema ideal,

$$\rho_{xy}^{(ideal)} = \frac{1}{f_0} \frac{h}{e^2} = \frac{B}{n e c} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2} , \quad (1.45)$$

o que sugere a identificação da razão carga-fluxo f com o fator de preenchimento ν

$$\nu = \frac{N}{g} = f = \frac{n h c}{e B} . \quad (1.46)$$

Os “Plateaux” do Efeito Hall Quântico Inteiro

A descrição do Efeito Hall Quântico Inteiro a partir do sistema ideal baseia-se na existência do *gap* (separação) entre os níveis do sistema ideal, e do preenchimento deste

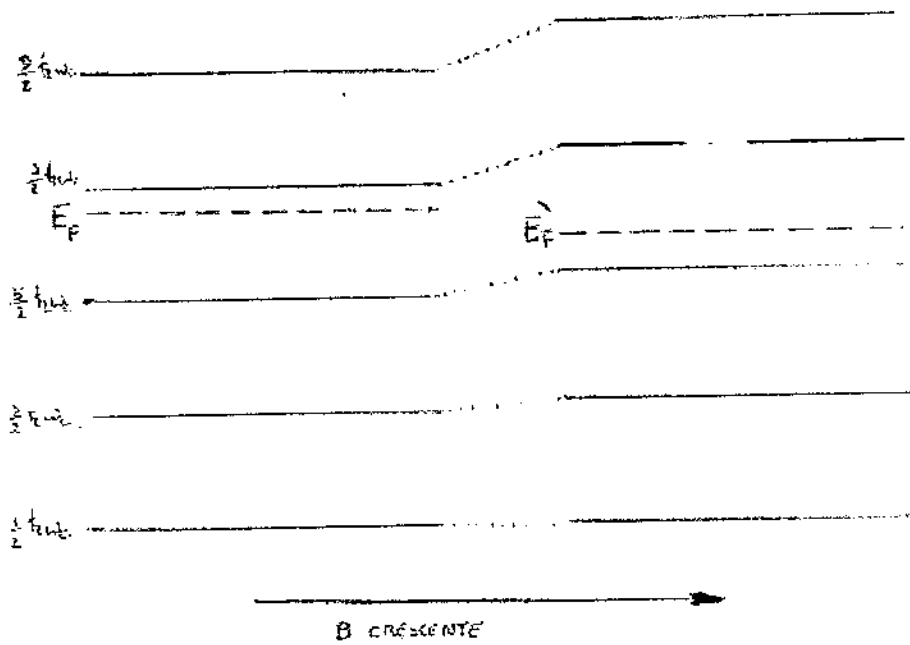


Figura 1.8: Variação da energia de Fermi, para ligeiro crescimento do campo magnético externo. Na situação aqui representada, a energia de Fermi original se encontra numa região entre níveis de Landau, bem como a energia de Fermi final. A medida em que B cresce, também cresce o *gap* entre níveis. O número de níveis totalmente preenchidos permanece constante, no entanto.

gap com estados localizados. O estado fundamental do sistema corresponde à situação em que os níveis de mais baixa energia encontram-se totalmente preenchidos, com no máximo um elétron por estado, de acordo com o Princípio de Exclusão de Pauli. O número total de elétrons determina, portanto, a energia do mais alto nível preenchido (*energia de Fermi*). Considere o sistema com impurezas, tal que a energia de Fermi se encontra na região de estados localizados (vide fig. 1.8), para um dado valor do campo B . Ao incrementarmos ligeiramente o campo B , cresce o *gap* $\hbar\omega_0$, bem como a degenerescência dos estados do sistema ideal. No sistema perturbado correspondente, cresce também o número de estados disponíveis, e os elétrons se rearrumam, redefinindo a energia de Fermi. Se esta ainda se encontrar na mesma região de estados localizados, a condutividade Hall será a mesma — pois os estados localizados não contribuem, e a condutividade será igual à do sistema ideal, para o mesmo número de níveis de Landau preenchidos. Tem-se então um argumento para a existência dos *plateaux*: estes correspondem a situações em que a energia de Fermi se encontra numa região de estados localizados. Em contrapartida, as regiões de transição entre *plateaux* vizinhos correspondem à passagem da energia de Fermi sobre uma região do espectro correspondente aos estados não-localizados.

E o Efeito Fracionário?

A interpretação geralmente aceita para se descrever o EHQI é que existe um *gap* para os estados não-localizados que coincide com os valores do *gap* do Problema de Landau. Este *gap* está preenchido com estados localizados, que não contribuem para a condutividade do sistema. Neste sentido, o número inteiro que aparece na condutividade medida experimentalmente é associado com o fator de preenchimento dos níveis de Landau.

Se quisermos manter a mesma interpretação para o EHQF, devemos identificar a quantização da condutividade com o preenchimento *parcial* de um nível de Landau. Aplicando

o mesmo raciocínio empregado no caso EHQI, é preciso que haja um *gap* no espectro de energia correspondendo exatamente a fatores de preenchimento fracionários. Aqui encontramos um problema teórico de enorme dificuldade. Como é que se produz um *gap* entre os estados degenerados dos níveis de Landau? E, no caso de existir algum tipo de *gap*, por que este se abriria para fatores de preenchimento tão especiais como $1/3$ e $2/5$, por exemplo? Por último, se o *gap* é devido essencialmente as interações, por que este não depende nem do tipo de amostra utilizada nem do grau de impureza desta?

Atualmente, estas perguntas ainda não foram respondidas de forma conclusiva, de um ponto de vista microscópico. O problema fundamental é que, dada a enorme degenerescência dos níveis de Landau, a interação elétron-elétron não pode ser tratada como uma perturbação, para preenchimentos parciais dos níveis. O problema se torna fortemente não-perturbativo, restringindo enormemente as técnicas conhecidas para sua abordagem.

A primeira tentativa de responder a todas estas perguntas foi dada por Laughlin [32]. Ele propôs uma função de onda para o estado fundamental de um sistema de elétrons no estado de EHQF com fatores de preenchimento da forma $1/(2n + 1)$. Esta função de onda representa uma nova fase da matéria, desconhecida até então : *o líquido quântico incompressível*. Esta função de onda não é degenerada, apresenta um *gap* no espectro e reproduz a fenomenologia do EHQF de forma surpreendente. Também está em excelente acordo com resultados numéricos para diferentes potenciais de interação . Na seção seguinte, explicamos os aspectos fundamentais desta abordagem.

1.3.3 A Função de Onda de Laughlin e o Efeito Hall Quântico Fracionário

Vimos que quando um nível de Landau se encontra totalmente preenchido, excitações para o nível de Landau superior envolvem um *gap* de energia que é maior do que as energia de interação coulombiana típica entre dois elétrons. Espera-se então que seja plausível, no tratamento do EHQI, considerar tais interações como perturbações ao problema original de Landau; ou seja, espera-se que para fatores de preenchimento inteiros o espectro de estados do sistema *com* interações possam ser obtidos de modo contínuo a partir do espectro não-perturbado, visto a estabilidade desse perante interações entre elétrons.

O tratamento do Efeito Hall Quântico Fracionário, a seu turno, requer uma abordagem mais sofisticada: as interações entre elétrons não podem ser tratadas perturbativamente pois, com um nível de Landau parcialmente preenchido, temos transições entre estados de (praticamente) mesma energia. Isto é indicado experimentalmente pelo fato do EHQF ocorrer somente em amostras com maior grau de pureza — em contraste com o EHQI, onde os *plateaux* são mais nítidos justamente nas amostras com menor grau de pureza.

A Função de Onda de Laughlin

Não existe atualmente solução exata para o Efeito Hall Quântico Fracionário. Trata-se de um problema de muitos corpos interagentes, e requer uma teoria de perturbação de estados degenerados. A abordagem usual, num problema desse tipo, é tentar redefinir os graus de liberdade do sistema, na tentativa de que o problema original de partículas fortemente interagentes seja mapeado num sistema de *quasipartículas* sem interação (ou com fraca interação). Espera-se que seja possível encontrar *gaps* no espectro das quasipartículas, possibilitando um tratamento semelhante ao realizado para o EHQI.

Restringindo o problema ao nível de Landau mais baixo (i.e., $\nu < 1$), para elétrons sem

spin e fatores de preenchimento da forma $\nu = 1/m$, onde m é inteiro, Laughlin [32, 33] propôs uma família de funções de onda da forma

$$\Psi(z_1 \dots z_N) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} f(z_j - z_k) \exp\left(-\sum_{l=1}^N \frac{|z_l|^2}{4l_0^2}\right) \quad (1.47)$$

como aproximação para o estado fundamental do sistema, a partir de um *insight* com simulações numéricas sobre sistemas com poucas partículas. As coordenadas complexas z_i , onde $i = 1 \dots N$, localizam as partículas do sistema sobre o plano. A função analítica $f(z)$ descreve o estado fundamental de *uma* partícula na posição z . A estatística de Fermi requer que $f(z)$ seja uma função ímpar de z ; consequentemente, $f(z) \rightarrow 0$ quando $z \rightarrow 0$. Ao impormos a condição de que Ψ_N seja autofunção do operador momentum angular L_z , podemos escolher $f(z) \propto z^m$, com m ímpar. A função de onda obtida é a célebre função de onda de Laughlin para o estado fundamental:

$$\Psi_m(z_1 \dots z_N) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (z_j - z_k)^m \exp\left(-\sum_{j=1}^N \frac{|z_j|^2}{4l_0^2}\right). \quad (1.48)$$

Laughlin comparou (1.48) com a função de onda exata calculada para $N \leq 3$, com potenciais de interação elétron-elétron dos tipos $1/r$, $-\ln r$ e $\exp(-r/2)$. Em todos os casos, encontrou uma concordância superior a 99%. Trugmann e Kivelson [34] mostraram que ela representa o ground state *exato* para o potencial específico $V(\vec{r}) = V_0 \nabla^2 \delta(\vec{r})$, e Haldane [35] obteve uma família de hamiltonianos cujos estados fundamentais correspondem a funções de onda do tipo proposto por Laughlin. Os estados de Laughlin também admitem generalizações para outros fatores de preenchimento, conhecidas como “hierarquias de funções de onda” [35, 36].

Apesar de não haver, atualmente, uma compreensão total das razões do sucesso da função de onda de Laughlin na descrição do estado fundamental do sistema, o fato é que ela “funciona”. Portanto, qualquer teoria mais geral a ser desenvolvida deve, de algum

modo, fornecer a função de onda de Laughlin como caso particular.

O Estado de Laughlin, Fator de Preenchimento e Gap do Espectro

De um modo geral, uma densidade de probabilidade quântica $|\Psi|^2$ pode ser reescrita como

$$|\Psi(\vec{r})|^2 = e^{-\beta U(\vec{r})} . \quad (1.49)$$

Deste modo, o valor esperado quântico de uma grandeza \mathcal{O} pode ser mapeado na média estatística de \mathcal{O} num sistema clássico com “energia” U e “temperatura” $1/\beta$,

$$\langle \Psi | \mathcal{O} | \Psi \rangle = \int d^2\vec{r} \mathcal{O}(\vec{r}) |\Psi(\vec{r})|^2 = \int d^2\vec{r} \mathcal{O}(\vec{r}) e^{-\beta U(\vec{r})} . \quad (1.50)$$

Portanto, a configuração mais provável para o sistema quântico corresponde à configuração que minimiza a energia U , para o sistema clássico análogo.

Qual seria então o sistema análogo àquele descrito pela função de onda de Laughlin?

Tomando a norma de $\Psi_m(z_1 \dots z_N)$ (1.48),

$$\rho_m = \int dz_1 \dots dz_N \Psi_m^*(z_1 \dots z_N) \Psi_m(z_1 \dots z_N) , \quad (1.51)$$

obtemos

$$\rho_m = \int dz_1 \dots dz_N \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{2m} \exp\left(-\frac{1}{2l_0^2} \sum_{k=1}^N |z_k|^2\right) , \quad (1.52)$$

que pode ser colocada sob a forma

$$\rho_m = \int dz_1 \dots dz_N e^{-\beta U(z)} , \quad (1.53)$$

ao definirmos

$$\beta \equiv \frac{2}{m} \quad (1.54)$$

$$U(z) \equiv -m^2 \sum_{i < j} \ln |z_i - z_j| + \frac{m}{4l_0^2} \sum_k |z_k|^2 . \quad (1.55)$$

A forma da função $U(z)$, conhecida na literatura, corresponde à energia potencial eletrostática de um plasma bidimensional clássico, composto de partículas pontuais de carga m imersas numa densidade de background constante, uniforme e de sinal oposto a m [15, 33]. Baseados nesta analogia, podemos relacionar o parâmetro m da função de onda de Laughlin e o fator de preenchimento ν . Em duas dimensões, a equação de Poisson é da forma

$$\nabla^2 W(\vec{r}) = 2\pi \rho(\vec{r}), \quad (1.56)$$

onde W é o potencial eletrostático e ρ a densidade de cargas. Em particular, a função $\ln|z|$ corresponde ao potencial gerado por uma carga pontual na origem, pois ⁴

$$\nabla^2 \ln(|z|) = 2\pi \delta^{(2)}(z) \quad (1.57)$$

Assim, o termo de (1.55) da forma

$$-m^2 \ln(|z_i - z_j|) \quad (1.58)$$

corresponde à energia potencial entre duas partículas de carga m , situadas nas posições z_i e z_j . Introduzindo-se uma pequena carga de prova $q \ll m$ na posição z , a energia potencial do sistema se torna

$$U'(z; z_1 \dots z_N) = U(z_1 \dots z_N) + q \left(-m \sum_{i=1}^N \ln |z - z_i| + \frac{1}{4l_0^2} |z|^2 \right); \quad (1.59)$$

portanto, a densidade do plasma ρ_F “vista” por esta carga de prova será

$$\rho_F(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{q} \nabla_z^2 U'(z; z_1 \dots z_N) = -m \sum_{i=1}^N \delta^{(2)}(z - z_i) + \frac{1}{2\pi l_0^2}, \quad (1.60)$$

⁴Lembramos que, nas coordenadas (z, \bar{z}) , o laplaciano é $\nabla^2 = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$.

ou seja, um conjunto de cargas pontuais e uma densidade de background, com sinais opostos. Espera-se que a densidade média $\bar{\rho}_p$ do plasma seja nula,

$$\bar{\rho}_p = \frac{1}{L^2} \int_{\Omega} d^2z \rho_p(z) = 0 ; \quad (1.61)$$

onde Ω compreende toda a amostra, de área L^2 ; conseqüentemente,

$$-m \frac{N}{L^2} + \frac{1}{2\pi l_0^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad n = \frac{1}{m} \frac{1}{2\pi l_0^2} , \quad (1.62)$$

onde $n = N/L^2$, a densidade de cargas pontuais da amostra. Utilizando a definição do comprimento magnético $l_0 = \sqrt{\hbar c/eB}$, obtemos $\frac{n}{B} = \frac{1}{m} \frac{1}{\Phi_0}$, onde Φ_0 é o quantum de fluxo magnético (1.38). Portanto, o fator de preenchimento ν e o parâmetro m da função de onda de Laughlin Ψ_m relacionam-se simplesmente por

$$\nu = \frac{1}{m} . \quad (1.63)$$

Uma consequência disto é que se pode construir uma nova função de onda

$$\Psi_{m'} \equiv \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^{\Delta} \Psi_m \quad (1.64)$$

cujo fator de preenchimento ν' é

$$\nu' = \frac{1}{\Delta + m} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{\nu'} = \frac{1}{\nu} + \Delta . \quad (1.65)$$

Desta forma, podem ser construídas *hierarquias de funções de onda* associadas a uma seqüência de fatores de preenchimento.

Para demonstrarmos a existência de um *gap* no espectro, é necessário algum conhecimento das excitações do estado fundamental. Laughlin mostrou que é possível construir excitações com *gap* a partir da inserção adiabática de fluxos elementares no estado fundamental. Desta forma, são construídos os *quasi-elétrons* e os *quasi-buracos* de Laughlin.

Excitações Elementares do Estado de Laughlin

Fazendo-se uma rotação rígida do sistema de um ângulo θ em torno da origem, cada coordenada z_j de uma partícula é multiplicada por uma fase, $z_i \rightarrow e^{i\theta} z_i$. Portanto, a função de onda total (1.48) transforma-se como

$$\Psi_m(e^{i\theta} z_1, \dots, e^{i\theta} z_N) = e^{i\frac{m}{2}N(N-1)} \Psi_m(z_1, \dots, z_N). \quad (1.66)$$

Isto significa que a componente z do momentum angular total do estado de Laughlin é igual a $M_m = \frac{m}{2}N(N-1)$.

Para descrever o estado obtido pela inserção de um pequeno solenóide na posição z_0 contendo um quantum de fluxo Φ_0 , Laughlin [32] propôs a seguinte função de onda:

$$\Psi_m^{(+)}(z_0; z_1 \dots z_N) = \prod_{j=1}^N (z_j - z_0) \Psi_m(z_1, \dots, z_N). \quad (1.67)$$

Observe que $\Psi_m^{(+)}(z_0; z_1 \dots z_N) \rightarrow 0$ quando $z_j \rightarrow z_0, \forall z_j$. Em outras palavras, este estado corresponde à presença de uma região em torno de z_0 de onde os elétrons são “expulsos”. Este estado é denominado *quasi-buraco* de Laughlin. A componente z do momentum angular deste estado é $M_m^{(+)} = M_m + N$.

Por outro lado, o *quasi-elétron* de Laughlin (também obtido pela inserção de um pequeno solenóide em z_0 , mas com um fluxo $-\Phi_0$) é descrito pelo ansatz

$$\Psi_m^{(-)} = \exp\left(-\sum_{l=1}^N \frac{|z_l|^2}{4l_0^2}\right) \prod_{j=1}^N \left(2\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{z_0}{l_0^2}\right) \prod_{1 \leq j < k \leq N} (z_j - z_k)^m. \quad (1.68)$$

Analogamente ao caso do *quasi-buraco*, a componente z do momentum angular deste estado é $M_m^{(-)} = M_m - N$. Calculando a energia de excitação destas quasipartículas, Laughlin [33] concluiu que o espectro possui um *gap* finito; ou seja, variações infinitesimais da energia *não* são capazes de produzir estas quasipartículas, a partir do estado

fundamental — este é, portanto, estável. A carga q_0 das quasipartículas, também calculadas por Laughlin, correspondem a uma fração da carga do elétron, $q_0 = \pm \frac{e}{m}$.

A Interpretação de Jain do Estado de Laughlin: Agregando Fluxos e Partículas

O processo de construção do quasi-buraco de Laughlin inspirou Jain [37] a interpretar o estado fundamental (1.48) como descrevendo um sistema de elétrons agregados a quanta de fluxo de campo magnético. Jain reescreveu a função de onda na forma fatorizada

$$\Psi_m(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j < k \leq N} (z_j - z_k)^{m-1} \Psi_1(z_1, \dots, z_N) \quad (1.69)$$

onde Ψ_1 é a função de onda para N partículas preenchendo *totalmente* o nível de Landau mais baixo. Os fatores que multiplicam Ψ_1 são interpretados como sendo solenóides inseridos no sistema “atrelados” às posições das partículas. Ou seja, cada partícula “carrega” consigo um solcnóide com $m - 1$ unidades de quantum de fluxo magnético.

Esta fatorização permite unificar a descrição do EHQI e o EHQF, sugerindo que o estado de Laughlin possa ser resultante da geração dinâmica de algum campo de gauge local (mecanismo de inserção dos solenóides), compensando parcialmente o campo magnético externo. Deste modo, a situação de preenchimento parcial do primeiro nível de Landau pelo sistema de elétrons para um dado valor do campo magnético total, pode ser mapeado numa situação de preenchimento *total* do primeiro nível de Landau do sistema de quasipartículas (elétrons agregados a parte do campo magnético), sob a ação de um campo magnético efetivo (a parte não-agregada do campo original). Este é o ponto de partida para a descrição do Efeito Hall Quântico via Teoria Quântica de Campos; o campo de gauge utilizado para tanto é o campo de Chern-Simons, como veremos no capítulo seguinte.

Capítulo 2

A Teoria de

Chern-Simons-Landau-Ginzburg para o Efeito Hall Quântico Fracionário

A função de onda de Laughlin foi a primeira formulação teórica bem-sucedida na descrição da fenomenologia do Efeito Hall Quântico Fracionário pra fatores de preenchimento da forma $\nu = 1/(2k + 1)$, (k inteiro) [32, 35, 38]. As tentativas posteriores de compreensão do EHQF, no contexto mais amplo do estudo de sistemas de elétrons fortemente correlacionados — como nos fenômenos de supercondutividade e superfluidez — conduziram à formulação de uma teoria similar a de Landau-Ginzburg para a superfluidez [33, 39, 40], onde o campo de gauge de Chern-Simons desempenha papel fundamental. Esta teoria é comumente denominada Teoria de Chern-Simons-Landau-Ginzburg (CSLG).

Neste capítulo, principiaremos com uma revisão das motivações físicas para a formulação de uma teoria de CSLG, seguida por uma derivação sistemática [41, 42] desta, a partir da hamiltoniana microscópica de elétrons interagentes sob um campo magnético. Ela resulta, basicamente, no mapeamento de um problema de elétrons interagentes com um

campo magnético externo num problema de bósons interagentes com um campo de gauge adicional.

Considerando pequenas flutuações em torno da solução de campo médio da teoria, pode-se reproduzir aspectos fenomenológicos cruciais do EHQF no caso de $\nu = 1/(2k+1)$, como a existência dos *plateaux* na resistividade Hall e o concomitante anulamento da resistividade longitudinal, e portanto mostrar a equivalência deste formalismo com o de Laughlin. Além disso, a função de onda de Laughlin pode ser obtida como o estado fundamental desta teoria, sendo também possível a construção de hierarquias de soluções para outros fatores de preenchimento. Este formalismo também permite estabelecer uma relação muito interessante entre o EHQF e a superfluidez.

2.1 Construção de uma Teoria de Chern-Simons-Landau-Ginzburg para o EHQF

2.1.1 Agregando Partículas e Fluxos.

Na interpretação de Jain para a função de onda de Laughlin, cada férmion (elétron) se associa a um número *par* ($m - 1$) de quanta de fluxo magnético (vide eq.(1.69)). Este fato serviu como inspiração para Ana Lopez e Eduardo Fradkin proporem uma teoria de campos fermiônica para o EHQF [12]. Esta teoria consiste num sistema de férmions interagentes acoplados a um campo de Chern-Simons, que tem por finalidade “agregar” fluxos magnéticos a cada partícula, e deste modo implementar, de uma forma mais geral, a observação original de Jain. Este modelo permite entender o EHQF como uma espécie de “Efeito Hall Inteiro” onde as partículas relevantes não são elétrons, mas elétrons acoplados com um número par de fluxos magnéticos. Estes agregados de férmions e fluxos deram origem ao termo “férmions compostos” (*composite fermions*), hoje muito em uso na Física

da Matéria Condensada.

A mesma linha de raciocínio pode ser aplicada a um sistema de “bósons compostos”. Podemos representar os férmions do EHQF como bósons “agregados” a um número *ímpar* de fluxos. Este ponto de vista nos conduz à formulação de uma teoria de Chern-Simons-Landau-Ginzburg para o EHQF, e à descoberta de uma estreita relação entre o EHQ e a superfluidez.

Através da introdução de um campo de gauge “fictício” \vec{a} , um férmion em 2D pode ser representado como sendo composto de um *bóson* acoplado a um número ímpar $m = 2k + 1$ de quanta de fluxo Φ_0 [43, 44, 45]. A densidade de fluxo pode ser representada através de um campo \vec{a} tal que ¹

$$\vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r}) = (2k + 1)\Phi_0 \rho(\vec{r}) . \quad (2.1)$$

O campo \vec{a} possibilita o mapeamento do problema de um sistema de férmions interagentes em um problema de *bósons* interagentes [41]. Quando se permutam dois compostos bóson-fluxo, temos uma fase de Bohm-Aharanov

$$\exp\left(i\frac{e}{\hbar c}\int_0^\pi \vec{a} \cdot d\vec{l}\right) = \exp(i(2k + 1)\pi) = -1 , \quad (2.2)$$

reproduzindo a estatística original do elétron. Tal mapeamento é denominado *transmutação estatística*, e o campo de gauge \vec{a} é chamado *campo estatístico*. Este é o ponto de partida para a construção de uma teoria de Chern-Simons-Landau-Ginzburg para o EHQF.

Mostraremos detalhadamente neste capítulo como estas idéias são implementadas e de que forma elas descrevem os principais aspectos fenomenológicos do EHQF. Para isto

¹Em duas dimensões, $\vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r})$ é um pseudo-escalar, e não um vetor.

consideremos por exemplo a hamiltoniana microscópica de um sistema bidimensional de N elétrons interagentes submetidos à ação de um campo magnético $\vec{\nabla} \times \vec{A} = B$ [13]

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \left[\vec{p}_i - \frac{e}{c} \vec{A}(x_i) \right]^2 + \sum_{i=1}^N e A_0(x_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^N V(x_i - x_j) \quad (2.3)$$

onde x_i e p_i correspondem a posição e momentum do i -ésimo elétron, respectivamente, \vec{A} e A_0 os potenciais do campo de Maxwell externo, e $V(x_i - x_j)$ o potencial de interação entre dois elétrons.

Na presença de um campo magnético muito intenso, parece razoável supor que os elétrons estejam totalmente polarizados; não consideraremos, portanto, graus de liberdade espinoriais.

O princípio de Pauli restringe o espaço de estados do sistema de N elétrons a funções de onda Ψ totalmente antissimétricas perante uma permutação de dois elétrons,

$$\Psi(x_1 \dots x_m \dots x_n \dots x_N) = -\Psi(x_1 \dots x_n \dots x_m \dots x_N), \quad (2.4)$$

o que, juntamente com a equação de Schrödinger

$$H\Psi(x_1 \dots x_N) = E\Psi(x_1 \dots x_N) \quad (2.5)$$

constitui uma possível formulação do problema de um sistema de N elétrons auto-interagentes sob um campo eletromagnético externo. No entanto, é possível reformular este problema em termos de uma função de onda total *simétrica* ϕ e um hamiltoniano H'

$$H'\phi(x_1 \dots x_N) = E'\phi(x_1 \dots x_N) \quad (2.6)$$

De fato, definindo as transformações unitárias

$$U_i(x_1 \dots x_N) = \exp \left(-i \frac{\theta}{\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^N \alpha_{ij} \right) \quad (2.7)$$

tal que α_{ij} é o ângulo compreendido entre $(x_j - x_i)$ e um vetor fixo e arbitrário u sobre o plano,

$$\cos(\alpha_{ij}) = (x_j - x_i) \cdot \frac{u}{|u|}, \quad (2.8)$$

obtemos a função de onda transformada $\tilde{\phi}$

$$\tilde{\phi}(x_1 \dots x_N) = U_i(x_1 \dots x_N) \phi(x_1 \dots x_N). \quad (2.9)$$

e a hamiltoniana $H' = U_i^{-1} H U_i$,

$$H' = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \left[\vec{p}_i - \frac{e}{c} \vec{A}(x_i) - \frac{e}{c} \vec{a}(x_i) \right]^2 + \sum_{i=1}^N e A_o(x_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^N V(x_i - x_j) \quad (2.10)$$

tal que o campo \vec{a} — o *campo estatístico* — é definido como

$$\vec{a}(x_i) \equiv \frac{\phi_0 \theta}{2\pi \pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{\nabla}_j \alpha_{ij}, \quad (2.11)$$

onde os índices i e j rotulam cada partícula e $\phi_0 = hc/e$ é a unidade de fluxo magnético.

Obtemos então a equação

$$H \tilde{\phi} = E' \tilde{\phi}. \quad (2.12)$$

Para

$$\theta = (2k + 1)\pi \quad k = \text{inteiro} \quad (2.13)$$

a transformação unitária (2.9) implica que a função de onda $\tilde{\phi}$ é *antissimétrica*, visto que ϕ é simétrica por definição e $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} + \pi$. Neste caso, a função $\tilde{\phi}$ obedece à mesma equação de Schrödinger (2.5) que a função de onda original Ψ ; o espectro E' coincide com o espectro E . Ou seja: de fato, um sistema de N elétrons pode ser descrito pela equação (2.6), em termos da função de onda *bosônica* ϕ e o hamiltoniano H' contendo o campo estatístico \vec{a} (2.10).

Neste ponto, é interessante notar que o campo estatístico \vec{a} , definido em (2.11) através da transformação unitária (2.7), efetivamente associa fluxos magnéticos às posições das partículas. Da equação (2.11) poderia se deduzir que $\vec{\nabla} \times \vec{a} = 0$, já que \vec{a} está definido através de um gradiente (ou seja, seria um gauge puro). Na verdade, não é bem assim: por um lado, o rotacional de \vec{a} é nulo fora das posições das partículas, o que implica que este campo não produz uma “força de Lorentz” adicional àquela produzida por \vec{A} ; por outro lado, ele não está definido quando a posição de duas partículas coincidem (α é uma fase, e portanto não está definida na origem). Portanto, o $\vec{\nabla} \times \vec{a} = 0$ possui um domínio multiplamente conexo. Considere então a integral de $\vec{\nabla} \times \vec{a}$ numa região D_i do plano contendo somente a partícula i

$$\begin{aligned} \int_{D_i} d^2x \vec{\nabla} \times \vec{a}(x_i) &= -\frac{\phi_0 \theta}{2\pi \pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_{D_i} d^2x \vec{\nabla}_j \times \vec{\nabla}_j \alpha_{ij} \\ &= \int_{C_i} d\vec{\ell} \cdot \vec{\nabla}_j \alpha_{ij} \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde C_i é a borda da região D_i . Na última integral, usamos o teorema de Stokes. Se o caminho de integração não envolve a partícula i , a integral se anula; mas se a partícula i se encontra envolvida pelo caminho de integração, o resultado é 2π (integral de uma fase num período completo). Portanto, podemos concluir que

$$\vec{\nabla} \times \vec{a}(x_i) = \phi_0(2k+1) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \delta(x_i - x_j) \quad (2.15)$$

Vemos então que o efeito do campo estatístico \vec{a} é o de “agregar” um número ímpar de fluxos na posição de cada partícula, como tínhamos mencionado na introdução deste capítulo.

2.1.2 Segunda Quantização

Avançando na direção de formularmos estas idéias nos termos da Teoria Quântica de Campos, vamos reescrever este conceitos na linguagem de segunda quantização. Introduzindo os *operadores* bosônicos $\phi^\dagger(x)$ e $\phi(x)$, tais que

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = \delta(x - y) \quad (2.16)$$

(i.e., o campo conjugado a ϕ é $\pi \equiv i\hbar\phi^\dagger$), reescrevemos o operador hamiltoniano como

$$H = \int d^2x \phi^\dagger(x) \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \vec{A}(x) - \frac{e}{c} \vec{a}(x) \right)^2 + eA_0(x) \right] \phi(x) + \frac{1}{2} \int d^2x d^2y (\phi^\dagger(x)\phi(x) - \bar{\rho}) V(x - y) (\phi^\dagger(y)\phi(y) - \bar{\rho}) \quad (2.17)$$

onde $\bar{\rho} > 0$ é uma densidade de fundo introduzida para que o sistema de elétrons possa atingir uma configuração estável ². O vínculo (2.15) é reescrito como

$$\nabla \times \vec{a}(\vec{r}) = (2k + 1)\Phi_0 \rho(\vec{r}) . \quad (2.18)$$

Derivando em relação ao tempo,

$$\nabla \times \dot{\vec{a}} = \frac{\theta\Phi_0}{\pi} \dot{\rho} ; \quad (2.19)$$

ao impormos a condição de continuidade

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0 \longrightarrow \dot{\rho} + \partial_i j_i = 0 , \quad (2.20)$$

obtemos

$$\partial_\alpha \left(\varepsilon_{\alpha\beta} \dot{a}_\beta + \frac{\theta\Phi_0}{\pi} j_\alpha \right) = 0. \quad (2.21)$$

Portanto, a menos de constantes aditivas,

²Sem esta densidade de fundo, as cargas se afastariam indefinidamente, devido à repulsão Coulombiana.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \dot{a}_\beta = -\frac{\theta\Phi_0}{\pi} j_\alpha . \quad (2.22)$$

As equações (2.22) determinam totalmente o campo \vec{a} em termos da densidade de corrente j_α . Tanto o vínculo (2.18) quanto a eq. (2.22) podem ser obtidas da ação de Chern-Simons [46]

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\theta\Phi_0} \varepsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho - a_\mu j^\mu , \quad (2.23)$$

onde se introduz um $a_\mu = (a_0, \vec{a})$ e escolhe-se o gauge $a_0 = 0$. O vínculo (2.18) é obtido como condição de extremização da ação de Chern-Simons para variações em a_0 , ao passo que as eqs.(2.22) são obtidas considerando as variações de \vec{a} .

Apesar da lagrangiana \mathcal{L} não ser exatamente invariante de gauge, a ação $\int d^2x dt \mathcal{L}$ o é, pois $\delta\mathcal{L}$ é uma derivada total. De fato, para $\delta a_\mu = \partial_\mu \Lambda(x)$, onde $\Lambda(x)$ é arbitrário, temos

$$\delta\mathcal{L}_{CS} = \left(\frac{\pi}{\theta\Phi_0} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu a_\rho - j^\mu \right) \partial_\mu \Lambda = \partial_\mu \left[(\varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu a_\rho - j^\mu) \Lambda \right] . \quad (2.24)$$

Deste modo, o problema do EHQF pode ser colocado em termos do formalismo de integrais de caminho. A ação para o sistema é

$$S = S_a + S_\phi = \int d^2x \mathcal{L}_a + \int d^2x \mathcal{L}_\phi \quad (2.25)$$

onde

$$\mathcal{L}_a = \frac{c\pi}{2\theta\Phi_0} \varepsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho \quad (2.26)$$

e \mathcal{L}_ϕ é obtido a partir do Hamiltoniano (2.17), $\mathcal{L}_\phi = \int d^2x \phi^\dagger(x) \dot{\phi}(x) - H$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi = & \int d^2x \phi^\dagger \left(i\hbar\partial_0 - e(A_0 + a_0) \right) \phi - \frac{1}{2m} \phi^\dagger \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c} (\vec{A} + \vec{a}) \right) \phi \\ & - \frac{1}{2} \int d^2x d^2y \delta\rho(x) V(x-y) \delta\rho(y), \end{aligned} \quad (2.27)$$

Assim, as propriedades termodinâmicas do sistema e a resposta eletromagnética estão contidas na função partição do sistema,

$$Z[A_\mu] = \int [da_\nu][d\phi] G_F(\phi, a_\nu) \exp \left(i(S_a[a_\nu] + S_\phi[A_\mu + a_\nu, \phi]) \right), \quad (2.28)$$

onde $G_F(\phi, a_\nu)$ é a função de fixação de gauge.

Este modelo é conhecido como a teoria de Chern-Simons-Landau-Ginzburg para o Efeito Hall Quântico Fracionário. O nosso próximo passo é mostrar como se extrai de $Z[A_\mu]$ a fenomenologia do EHQF, a partir de flutuações em torno da solução de campo médio.

2.2 Solução de Campo Médio e Fenomenologia do EHQF

À primeira vista, não é muito útil mapear um problema de elétrons interagentes num problema de bósons interagentes, através da introdução deliberada de um campo de gauge. No entanto, há um ganho real nesta transformação : a ação de Chern-Simons-Landau-Ginzburg pode ser tratada com as técnicas standard de aproximação de campo médio. Além disso, será possível estabelecer uma conexão clara entre a fenomenologia da superfluidez e do Efeito Hall Quântico Fracionário.

A ação de CSLG (2.25),

$$S = \int d^2x \left[\phi^\dagger \left(i\hbar\partial_0 - e(A_0 + a_0) \right) \phi - \frac{1}{2m} \phi^\dagger \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c} (\vec{A} + \vec{a}) \right) \phi \right]$$

$$-\frac{1}{2} \int d^2x d^2y \delta\rho(x)V(x-y)\delta\rho(y) + \frac{c\pi}{2\theta\Phi_0} \int d^2x \varepsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho \quad (2.29)$$

admite

$$\phi(x) = \sqrt{\bar{\rho}} \quad (2.30)$$

$$\vec{a}(x) = -\vec{A}(x), \quad (2.31)$$

como solução das suas equações clássicas de movimento, para o *gauge de Weyl*

$$a_0(x) = 0. \quad (2.32)$$

A solução (2.30, 2.31) é denominada *solução de campo médio* para este gauge. A interpretação física desta solução é a seguinte: o campo estatístico \vec{a} , na média, cancela exatamente o potencial \vec{A} , de tal forma que os bósons nesta aproximação não “sentem” nenhum campo magnético (ver eq. (2.31)). Nestas circunstâncias, o sistema bosônico pode desenvolver uma condensação de Bose-Einstein, obtendo como estado fundamental um sistema superfluido (todos os estado em $k = 0$) dado pela eq. (2.30). Porém esta solução das equações de movimento não existe para valores arbitrários dos parâmetros $\bar{\rho}$ e B . Isto se torna claro ao fazer-se a substituição da eq. (2.31) no vínculo de Chern-Simons (2.18) (que é uma das equações de movimento),

$$-\nabla \times \vec{A} = B = \frac{\theta\Phi_0}{\pi} \bar{\rho} \quad \longrightarrow \quad \Phi = \frac{\theta}{\pi} \bar{\rho}, \quad (2.33)$$

onde $\Phi = B/\Phi_0$ é o fluxo magnético, em unidades de quanta de fluxo.

Esta equação fornece uma relação específica entre os parâmetros $\bar{\rho}$ e B . Para entender o seu significado físico, devemos lembrar que o fator de preenchimento ν é dado por

$$\nu \equiv \frac{\bar{\rho}}{\Phi} = \frac{\pi}{\theta}; \quad (2.34)$$

portanto, para os valores $\theta = (2k + 1)\pi$ prescritos em (2.13), temos

$$\nu = \frac{1}{2k+1}, \quad (2.35)$$

justamente os fatores de preenchimento onde o Efeito Hall Quântico é observado. Ou seja, isto proporciona a primeira resposta a uma das perguntas originais: por que os fatores de preenchimento $\nu = \frac{1}{2k+1}$ são especiais? A resposta fornecida pela solução de campo médio é que só para estes valores específicos do fator de preenchimento é que existe uma solução homogênea para o campo ϕ que representa um estado superfluido dos “bósons compostos”, já que somente nessas circunstâncias é que ocorre o cancelamento *exato* de $\vec{a} + \vec{A}$.

A partir da solução de campo médio da teoria de CSLG para o EHQP podemos obter a resposta eletromagnética do sistema considerando pequenas perturbações dos campos em torno desta solução. Em termos gerais, devemos integrar sobre os campos ϕ e a_μ para obter uma ação efetiva $S_{eff}(A_\mu)$ apenas em função do campo eletromagnético externo A_μ , ou seja

$$Z[A] = \exp(-iS_{eff}(A)) = \int [da_\mu] \exp\left(i \int d^2x dt \mathcal{L}_a\right) \int [d\phi] \exp\left(i \int d^2x dt \mathcal{L}_\phi(A+a)\right) \quad (2.36)$$

onde \mathcal{L}_a é a Lagrangiana de Chern-Simons dada pela eq. (2.26) e \mathcal{L}_ϕ é dado pela eq. (2.27).

Na solução de campo médio temos $A_\mu + a_\mu = 0$; portanto, podemos considerar a grandeza $\delta a_\mu = A_\mu + a_\mu$ como representando uma pequena flutuação do campo eletromagnético em torno da solução de campo médio. Em função desta grandeza, a integral em ϕ da eq. (2.36) fornecerá uma ação efetiva definida como

$$\exp\left(i \int d^2x dt \mathcal{L}_{eff}[\delta a_\mu]\right) \equiv \int [d\phi] \exp\left(i \int d^2x dt \mathcal{L}_\phi[\delta a_\mu, \phi]\right). \quad (2.37)$$

Notemos que esta ação representa a resposta eletromagnética de um sistema de bósons interagentes a uma pequena perturbação δa_μ . Como esta lagrangiana é invariante de gauge, o primeiro termo em uma expansão em δa_μ pode ser escrito em termos das suas componentes de Fourier como,

$$\delta \mathcal{L}_{eff}(q, \omega) \approx \frac{1}{2} \pi_0(q, \omega) \delta a_0(-q, -\omega) \delta a_0(q, \omega) + \frac{1}{2} \pi_{\alpha\beta}(q, \omega) \delta a_\alpha(-q, -\omega) \delta a_\beta(q, \omega) \quad (2.38)$$

onde

$$\pi_{\alpha\beta} \equiv \pi_1(q, \omega) \delta_{\alpha\beta} + \pi_2(q, \omega) q_\alpha q_\beta . \quad (2.39)$$

As grandezas π_0 e π_1 e π_2 são as chamadas *funções de resposta* de um gas de bósons ou de um superfluido.

O cálculo explícito das funções resposta de um superfluido envolve uma série de cálculos perturbativos, devido às interações entre os bósons. Este cálculo já foi efetuado em diferentes aproximações, para diferentes potenciais de interação, mostrando que a forma exata destas funções depende de detalhes das interações . Porém, para o nosso propósito, não precisamos conhecer estas funções explicitamente, mas apenas o seu comportamento a grandes distâncias (ou pequenos momenta $q \rightarrow 0$). Este comportamento é bem conhecido e não depende dos detalhes das interações . Por exemplo a compressibilidade de um sistema está definida pelo comportamento a longas distâncias da função de correlação da densidade estática. No caso do superfluido que estamos estudando esta compressibilidade é *não-nula*, sendo dada por

$$\tilde{k} \equiv \lim_{q \rightarrow 0} \langle \rho(q, 0) \rho(-q, 0) \rangle = \frac{1}{e^2} \lim_{q \rightarrow 0} \pi_0(q, 0) \quad (2.40)$$

Outra grandeza não nula que caracteriza um superfluido é a chamada *densidade superfluida*, relacionada ao comportamento a longas distâncias da função de correlação de correntes, dada por [13, 47, 48]

$$\tilde{\rho} \equiv -\frac{m}{e^2} \lim_{q \rightarrow 0} \pi_1(q, 0) = \frac{m}{e^2} \lim_{q \rightarrow 0} \pi_2(q, 0) . \quad (2.41)$$

Portanto, a primeira integração (no campo ϕ) fornece a lagrangiana efetiva de um superfluido dada por $\mathcal{L}_{eff}(\delta a_\mu)$. O próximo passo é a realização da segunda integral em (2.36), com a finalidade de se obter o funcional gerador do sistema de bósons compostos

$$Z[A_\mu] \equiv \exp \left(i \int d^2x dt \mathcal{L}_A(A_\mu) \right) = \int [da_\mu] \exp \left(i \int d^2x dt [\mathcal{L}_a(a_\mu) + \mathcal{L}_{eff}(a_\mu + A_\mu)] \right) , \quad (2.42)$$

onde $\mathcal{L}_a(a_\mu)$ é a lagrangiana de Chern-Simons (2.26). O efeito da integração em a_μ é justamente o acoplamento de fluxos magnéticos sobre os bósons supercondutores dados pela lagrangiana $\mathcal{L}_{eff}(a_\mu + A_\mu)$. Este processo é realizado naturalmente pela lagrangiana de Chern-Simons $\mathcal{L}_a(a_\mu)$. Tanto \mathcal{L}_a quanto \mathcal{L}_{eff} são quadráticas em a_μ , tornando possível o cálculo exato da integral. Considerando somente o caso estático, i.e., $\omega = 0$, com o gauge $\partial_\alpha a_\alpha = \partial_\alpha A_\alpha = 0$, o resultado para a lagrangiana efetiva é [13]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A(q, 0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2\theta} \right)^2 A_0(-q) \frac{\pi_0 q^2}{\left(\frac{e^2}{2\theta} \right)^2 q^2 - \pi_0 \pi_1} A_0(q) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2\theta} \right)^2 A_\alpha(-q) \frac{\pi_1 q^2}{\left(\frac{e^2}{2\theta} \right)^2 q^2 - \pi_0 \pi_1} A_\alpha(q) \\ &- \frac{e^2}{2\theta} \varepsilon^{\alpha\beta} A_0(-q) \frac{\pi_0 \pi_1}{\left(\frac{e^2}{2\theta} \right)^2 q^2 - \pi_0 \pi_1} q_\alpha A_\beta(q) . \end{aligned} \quad (2.43)$$

Este resultado representa a lagrangiana efetiva da teoria de CSLG para o EHQP como função de flutuações do campo eletromagnético externo, na aproximação de campo médio. A partir desta lagrangiana podem ser calculadas todas as grandezas relacionadas com a resposta linear deste sistema. A grandeza mais simples a se considerar é a densidade de

corrente j^α , definida como

$$j^\alpha(q) \equiv \frac{\delta S_A}{\delta A_\alpha(q)}, \quad (2.44)$$

no espaço de momenta. Calculando explicitamente esta expressão usando a lagrangiana (2.43) obtemos

$$j_\sigma(q) = -\frac{e^2}{2\theta} \left(\frac{\pi_0\pi_1}{\left(\frac{e^2}{2\theta}\right)^2 q^2 - \pi_0\pi_1} \right) \varepsilon^{\alpha\beta} q_\beta A_\alpha(-q) + \left(\frac{e^2}{2\theta} \right)^2 \left(\frac{\pi_1 q^2}{\left(\frac{e^2}{2\theta}\right)^2 q^2 - \pi_0\pi_1} \right) A_\alpha(-q) \quad (2.45)$$

Para a definição de condutividade é usado o comportamento do sistema a longas distâncias ou pequenos momenta. Então, a quantidade de interesse é o limite da corrente quando $q \rightarrow 0$. Como já tínhamos sublinhado, as funções resposta do supercondutor π_0 , π_1 e π_2 são diferentes de zero no limite $q \rightarrow 0$, já que estas representam a compressibilidade e a densidade supercondutora, como conseqüência, o segundo termo de (2.45) é zero neste limite já que este é proporcional a q^2 . Já o primeiro termo de (2.45) é proporcional ao campo elétrico definido como $E_\alpha = i q_\alpha A_0$. Portanto a expressão da corrente no limite de longas distâncias pode ser escrita como

$$J_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta \quad (2.46)$$

com

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

e

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0 \quad (2.48)$$

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \frac{e^2}{2\theta\hbar} = \frac{1}{2k+1} \left(\frac{e^2}{\hbar} \right). \quad (2.49)$$

De fato, a aproximação de campo médio da teoria de CSLG reproduz corretamente a quantização da condutividade Hall para fatores de preenchimento $\nu = \frac{1}{2k+1}$.

Outra grandeza que pode ser calculada de forma simples é a compressibilidade k do sistema de elétrons definida em termos da função de correlação de densidade como

$$k \equiv \frac{1}{e^2} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\delta^2 S_A}{\delta A_0(-q) \delta A_0(q)} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\tilde{k} q^2}{q^2 + \left(\frac{2\pi}{\nu}\right)^2 \frac{\tilde{k} \tilde{\rho}}{m}}. \quad (2.50)$$

Uma vez que a compressibilidade e a densidade supercondutora do superfluido são diferentes de zero ($\tilde{k} \neq 0$ e $\tilde{\rho} \neq 0$ segundo eqs. (2.40) e (2.41)), temos que $k = 0$. Ou seja, a superfluidez de ϕ implica na imcompressibilidade do sistema de elétrons original. Este fato coincide com a predição da função de onda de Laughlin, que associa um líquido incompressível ao estado fundamental.

Não se deve confundir a resposta linear do superfluido com a resposta linear do sistema de férmions (depois de “agregados” aos fluxos). Neste sentido, o estado de Hall dos férmions é associado ao estado supercondutor dos graus de liberdade bosônicos da teoria. Como já foi mostrado, um estado supercondutor dos bósons ($\tilde{k} \neq 0$ e $\tilde{\rho} \neq 0$) implica um estado Hall para os férmions que surgem depois da integração do termo de Chern-Simons. Mas deve ficar claro que o sistema fermiônico no estado Hall *não é um supercondutor*. A melhor forma de entender este fato é através do cálculo da densidade supercondutora para os férmions, dada por

$$\rho \propto \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\delta S_A}{\delta A_\alpha(-q) \delta A_\alpha(q)} \quad (2.51)$$

Um cálculo direto mostra que $\rho = 0$, o que confirma o exposto anteriormente.

Resumindo, a solução de campo médio da teoria de CSLG para o EHQF descreve a mesma fenomenologia que a função de onda de Laughlin, com a vantagem de que esta última é obtida, neste contexto, como sendo uma aproximação. Ou seja, em princípio, temos uma ferramenta para melhorar de forma sistemática as predições para o estado fundamental do sistema.

Nos próximos capítulos abordaremos algumas questões que surgem naturalmente após esta análise. Primeiramente, obtivemos a quantização da condutividade Hall numa aproximação de campo médio. Então, seria de esperar que esta quantização sofresse correções ao tentarmos melhorar a aproximação. Por outro lado, dada a impressionante precisão dos experimentos de Efeito Hall, sabemos que esta quantização deveria ser exata. A pergunta então é: será possível mostrar a exatidão da quantização neste modelo? Ou, em outras palavras, será possível mostrar que as correções de ordens superiores à aproximação de campo médio não corrigem a condutividade Hall?

Outra pergunta importante está relacionada com as impurezas no sistema. Temos considerado até agora um sistema de bósons e fluxos “limpo”, ou seja, uma amostra sem impurezas. Por outro lado sabemos que a quantização da condutividade Hall não depende do grau de impurezas das amostras. Será possível mostrar que este fato já está contido na formulação da teoria de CSLG?

Nos próximos capítulos tentaremos responder a estas perguntas de forma afirmativa. O ponto principal para entender estes fatos é a invariância de calibre da teoria. Reformularemos então a teoria de CSLG apenas em função da densidade eletrônica (que é uma grandeza explicitamente invariante de gauge) para em seguida tentar responder a estas perguntas.

Capítulo 3

Resposta Eletromagnética de um Sistema de Bósons Acoplados a um Campo de Gauge de Chern-Simons

No capítulo anterior mostramos como a quantização da condutividade Hall aparece naturalmente na aproximação de campo médio na teoria de CSLG. Fica então por responder a pergunta sobre a exatidão desta quantização. Para aproximar-nos de uma resposta, analisaremos neste capítulo o problema um pouco mais geral de calcular a resposta eletromagnética de bósons não-relativísticos em interação mínima com um campo de Chern-Simons, acoplados a um campo eletromagnético externo *arbitrário*. Para realizar este cálculo, integraremos primeiro sobre o campo de gauge e sobre a fase do campo bosônico, para obter uma ação efetiva em termos da densidade de carga $\phi^*\phi$, apenas. A partir desta ação é possível calcular a resposta eletromagnética *exata* deste sistema. Em seguida, particularizaremos nossa análise para o caso de interesse do Efeito Hall Quântico, obtendo a conhecida relação entre a densidade de corrente e o campo elétrico externo, para fatores de preenchimento $\nu = \frac{\theta}{\pi}$. Discutimos o papel da densidade de corrente topológica

na quantização exata da condutividade Hall, e como as impurezas aleatoriamente distribuídas não afetam este valor. No final do capítulo, analisamos também a dinâmica das flutuações de carga em torno de um estado Hall, mostrando como aparece o *gap* no espectro e a incompressibilidade. Os principais resultados deste capítulo encontram-se resumidos no artigo correspondente à ref. [49].

3.1 A Função Partição na Representação de Densidade

Consideremos um sistema de bósons não-relativísticos interagentes, acoplados minimamente a um campo com dinâmica de Chern-Simons a_μ , e na presença de um campo eletromagnético externo arbitrário A_μ .

A função de partição grã-canônica do sistema a temperatura zero é dada por

$$Z[A_\mu] = \int [da_\nu][d\phi] G_F(a_\mu, \phi) \exp(-S_E[\phi, a_\nu, A_\mu]) , \quad (3.1)$$

onde S_E é a ação (euclidiana) dada por

$$\begin{aligned} S_E &= \int d^2x d\tau \left(\phi^* (\partial_\tau + i[A_0 + a_0] - i\mu) \phi - \frac{1}{2m} \phi^\dagger \left(-i\vec{\nabla} - (\vec{A} + \vec{a}) \right)^2 \phi \right) + \\ &- \frac{1}{2} \int d^2x d^2y d\tau \left(\phi^*(x)\phi(x) - \bar{\rho} \right) V(x-y) \left(\phi^*(y)\phi(y) - \bar{\rho} \right) + \\ &- \frac{i}{2} \left(\frac{\pi}{\theta} \right) \int d^2x d\tau \epsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho ; \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde μ é o potencial químico e $\bar{\rho}$ é uma densidade de carga de fundo positiva, escolhida para neutralizar o sistema e impedir que o potencial repulsivo $V(x-y)$ afaste as cargas umas das outras até o infinito. Escolhemos um sistema de unidades no qual $\hbar = 1$,

$e = 1$, $c = 1$, $\Phi_0 = 1$; $G_F(a_\mu, \phi)$ é o funcional de fixação de gauge, necessário para que a contribuição de cada estado físico para a integral funcional seja única.

A primeira observação a fazer é que, dada a forma da ação (3.2), podemos desacoplar o campo eletromagnético externo A_μ dos campos de matéria através de uma translação no campo de Chern-Simons

$$\begin{aligned} a_\mu &\longrightarrow a_\mu - A_\mu \\ \mathcal{D}a_\mu &\longrightarrow \mathcal{D}a_\mu \end{aligned} \quad (3.3)$$

obtendo uma nova ação

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv \int d^2x d\tau \left\{ \phi^* (\partial_\tau + ia_0 - i\mu) \phi - \frac{1}{2m} \phi^\dagger (-i\vec{\nabla} + \vec{a})^2 \phi \right\} \\ &- \frac{1}{2} \int d^2x d^2y d\tau (\phi^*(x)\phi(x) - \bar{\rho}) V(x-y) (\phi^*(y)\phi(y) - \rho) \\ &- \frac{i\pi}{2\theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{ij} a_i \partial_0 a_j - i\frac{\pi}{\theta} \int d^2x d\tau a_0 (\vec{\nabla} \times \vec{a} + B) \\ &- i\frac{\pi}{\theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{ij} a_i E_j - \frac{i\pi}{2\theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde agora o campo de matéria ϕ acopla-se somente ao campo de gauge a_μ . Aqui, \vec{E} e B representam os campos elétrico e magnético externos, respectivamente ¹. (Lembramos que, em 2-dimensões, $\vec{\nabla} \times \vec{a}$ e B são pseudo-escalares, e não vetores.)

Sempre com o intuito de obter resultados não perturbativos, reescreveremos a ação em função de quantidades explicitamente invariantes de gauge. O objeto local invariante de gauge mais simples de ser construído é a densidade de carga $\rho(x) = \phi^*(x)\phi(x)$. A *representação de densidade* é então obtida ao efetuarmos a seguinte mudança de variáveis sob os campos de matéria,

¹Convencionamos que índices gregos variam de 0 a 2, e índices latinos de 1 a 2.

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \rho^{1/2}(x) e^{i\theta(x)} \\
\phi^*(x) &= \rho^{1/2}(x) e^{-i\theta(x)}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

cujo Jacobiano é trivial, $\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^* = \mathcal{D}\rho\mathcal{D}\theta$. Substituindo (3.5) em (3.4), obtemos

$$\begin{aligned}
S_2 \equiv & \int d^2x d\tau \left\{ \frac{1}{2} \partial_\tau \rho + i\rho(\partial_\tau \theta + a_0) \right\} - \frac{1}{4m} \left\{ \frac{1}{4\rho} \vec{\nabla} \rho \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho |\vec{\nabla} \theta - \vec{a}|^2 \right\} \\
& - \frac{1}{2} \int d^2x d^2y d\tau (\rho(x) - \bar{\rho}) V(x-y) (\rho(y) - \bar{\rho}) + \mu \int d^2x d\tau \rho(x) \\
& - \frac{i\pi}{2\theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{ij} a_i \partial_0 a_j - i \frac{\pi}{\theta} \int d^2x d\tau a_0 (\vec{\nabla} \times \vec{a} + B) \\
& - i \frac{\pi}{\theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{ij} a_i E_j - \frac{1}{2} \frac{\pi}{\theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho .
\end{aligned} \tag{3.6}$$

No que segue, vamos efetuar as integrais de caminho da função partição Z_E nas componentes dos campos de gauge $a_0(x), a_i(x)$ e na fase $\theta(x)$ do campo de matéria, obtendo uma ação efetiva exata em termos de $\rho(x)$, somente.

3.1.1 Fixação do Funcional de Gauge G_F

Antes de começar com o processo de integração, é necessário fixar o gauge através do funcional G_F em (3.1). Não obstante a grande liberdade na escolha do gauge, a função partição $Z(A_0, A_i)$ deve ser invariante, i.e., não pode depender de nenhuma escolha em particular. Observe que nas “coordenadas polares” utilizadas, uma transformação de gauge tem a forma

$$\theta(x) \longrightarrow \theta(x) + \Lambda(x) \tag{3.7}$$

$$a_\mu(x) \longrightarrow a_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) . \tag{3.8}$$

Uma possível escolha é $\Lambda(x) = -\theta(x)$; isto corresponde a fazermos $\theta(x) = 0$ na ação, ou seja,

$$G_F(\theta, a_\mu) = \delta(\theta(x)) . \quad (3.9)$$

Pode-se mostrar que esta condição de fixação do gauge equivale ao gauge de Coulomb [50],

$$G_F(\theta, a_\mu) = \delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) ; \quad (3.10)$$

basta mostrar que existe uma transformação de gauge contínua que leva de (3.9) a (3.10). De fato, ao decompor o campo a_i em suas componentes transversal a_i^\perp e longitudinal a_i^L , é possível reescrevermos a medida de integração no gauge de Coulomb da seguinte forma:

$$\int \mathcal{D}a_i \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\theta \delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) \dots = \int \mathcal{D}a^\perp \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\theta \dots \quad (3.11)$$

pois o gauge de Coulomb elimina automaticamente a componente longitudinal do campo a_i^L . Uma transformação de gauge adicional

$$a_i(x) \longrightarrow a_i(x) - \partial_i \theta(x) . \quad (3.12)$$

remove a fase $\theta(x)$ da ação, mas reintroduz uma componente longitudinal $a_i^L(x) = -\partial_i \theta(x)$. Portanto, podemos substituir $\mathcal{D}\theta$ por $\mathcal{D}a^L(x)$ em (3.11) (o Jacobiano é trivial), obtendo

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}a_i \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\theta \delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) \dots &= \int \mathcal{D}a^\perp \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\theta \dots = \int \mathcal{D}a^\perp \mathcal{D}a^L(x) \mathcal{D}\rho \dots \\ &= \int \mathcal{D}a_i \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\theta \delta(\theta(x)) \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

Neste contexto, fica demonstrado que (3.9) e (3.10) são, de fato, equivalentes.

3.1.2 Integração em a_0 e o Vínculo de Chern-Simons

Tendo fixado o gauge, podemos em seguida efetuar as integrações. Os termos da ação (3.6) que contém a_0 são lineares neste campo; portanto, a integração em $a_0(x)$ pode ser efetuada trivialmente. O resultado obtido é o vínculo de Chern-Simons

$$\int \mathcal{D}a_0 \exp\left(-i \int d^2x d\tau a_0\left(\rho - \frac{\pi}{\theta}[\vec{\nabla} \times \vec{a} + B]\right)\right) = \delta\left(\rho - \frac{\pi}{\theta}[\vec{\nabla} \times \vec{a} + B]\right). \quad (3.14)$$

A quantização de modelos com este tipo de vínculo, no contexto da quantização de sistemas vinculados, já foi objeto de estudo de vários autores; em particular, a abordagem invariante de gauge feita por D. Boyanovsky descrita em [51] é muito instrutiva. O presente trabalho, no entanto, segue uma abordagem funcional, na qual se integra sobre todas as configurações de ρ e a_i que satisfaçam o vínculo

$$\rho(x) - \frac{\pi}{\theta}[\vec{\nabla} \times \vec{a} + B] = 0. \quad (3.15)$$

Convém ressaltar aqui que a vinculação entre fluxos magnéticos e a densidade de partículas $\rho(x)$ não é um efeito clássico, ou seja, não é uma mera consequência das equações clássicas de movimento (comparar com a aproximação de campo médio), mas ela é válida em todo o processo de integração sobre ρ e a_i . Uma interpretação física muito interessante deste fenômeno de “agregação” de fluxos quânticos pode ser encontrada em [52]. Empregando (3.9) e (3.14), obtemos para a função partição

$$Z(A_\mu) = \int \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\vec{a} \delta\left(\rho - \frac{\pi}{\theta}[\vec{\nabla} \times \vec{a} + B]\right) e^{-S_3}, \quad (3.16)$$

tal que

$$\begin{aligned}
S_3 &= -\frac{1}{4m} \int d^2x d\tau \left\{ \frac{1}{4\rho} \vec{\nabla}\rho \cdot \vec{\nabla}\rho + \rho |\vec{a}|^2 \right\} + \mu \int d^2x d\tau \rho(x) \\
&- \frac{1}{2} \int d^2x d^2y d\tau (\rho(x) - \bar{\rho}) V(x-y) (\rho(y) - \bar{\rho}) \\
&- \frac{i}{2} \frac{\pi}{\theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{i0j} a_i \partial_0 a_j - i \frac{\pi}{\theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{ij} a_i E_j \\
&- \frac{i}{2} \frac{\pi}{\theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho .
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Evidentemente, S_3 não é invariante de gauge, pois o gauge foi fixado para que pudéssemos efetuar a integração funcional. Após a integração sobre os graus de liberdade restantes, esta simetria terá que ser restaurada. Outra observação acerca de S_3 é que a densidade $\rho(x)$ não possui dinâmica independente: ela é adquirida mediante acoplamento com o campo de gauge. Este é um fato importante no estudo da dinâmica das flutuações de densidade [49], que estudaremos na seção 3.3.

3.1.3 Integração em \vec{a} e a Nova Interação de Muitos Corpos

O próximo passo é integrarmos nas componentes espaciais do campo de gauge. É conveniente decompô-lo suas partes longitudinal φ e transversal η ,

$$a_i = \partial_i \varphi + \epsilon_{ij} \partial_j \eta \quad . \tag{3.18}$$

Sendo uma transformação linear, o Jacobiano é trivial,

$$\mathcal{D}a_1 \mathcal{D}a_2 \longrightarrow \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\varphi \quad . \tag{3.19}$$

Esta decomposição é equivalente a descrever um campo vetorial através de seu rotacional e seu divergente, pois

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \nabla^2 \varphi \tag{3.20}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = -\nabla^2 \eta \quad (3.21)$$

Integração na Componente Longitudinal φ

Substituindo (3.18) em (3.17), obtemos a ação

$$\begin{aligned} S_4 &= -\frac{1}{4m} \int d^2x d\tau \left\{ \frac{1}{4\rho} \vec{\nabla} \rho \cdot \vec{\nabla} \rho \right\} + \mu \int d^2x d\tau \rho(x) \\ &- \frac{1}{2} \int d^2x d^2y d\tau (\rho(x) - \bar{\rho}) V(x-y) (\rho(y) - \bar{\rho}) \\ &- \frac{1}{4m} \int d^2x d\tau \rho(x) (\vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \varphi + \vec{\nabla} \eta \cdot \vec{\nabla} \eta) - i \frac{\pi}{\theta} \int d^2x d\tau \varphi \partial_0 \nabla^2 \eta \\ &+ i \frac{\pi}{\theta} \int d^2x d\tau \varphi (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \eta (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \\ &- \frac{i\pi}{2\theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho, \end{aligned} \quad (3.22)$$

que é quadrática no campo φ . Observe que o funcional δ em (3.16) depende somente de η . Portanto, podemos integrar sobre φ usando as relações

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left(- \int dx \frac{1}{2} \varphi(x) \hat{O} \varphi(x) + J(x) \varphi(x) \right) \\ = \text{Det}^{-1/2}(\hat{O}) \exp \left(\frac{1}{4} \int dx dy J(x) \hat{O}^{-1}(x-y) J(y) \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

e

$$\ln \text{Det} \hat{O} = \text{Tr} \ln \hat{O}, \quad (3.24)$$

obtendo assim a função partição

$$Z(A_\mu) = \int \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\eta \delta(\rho - \frac{\pi}{\theta} [B - \nabla^2 \eta]) \exp(-S'_F), \quad (3.25)$$

tal que

$$\begin{aligned}
S'_F &= -\frac{1}{4m} \int d^2x d\tau \left\{ \frac{1}{4\rho} \vec{\nabla} \rho \cdot \vec{\nabla} \rho \right\} + \mu \int d^2x d\tau \rho(x) - \frac{1}{4} \text{Tr} \ln(\vec{\nabla} \cdot \frac{\rho}{m} \vec{\nabla}) \\
&- \frac{1}{2} \int d^2x d^2y d\tau (\rho(x) - \bar{\rho}) V(x-y) (\rho(y) - \bar{\rho}) \\
&- \frac{1}{4m} \int d^2x d\tau \rho(x) \vec{\nabla} \eta \cdot \vec{\nabla} \eta \\
&+ \frac{m \pi^2}{2 \theta^2} \int d^2x d^2y d\tau (\partial_0 \nabla^2 \eta(x) - \vec{\nabla} \times \vec{E}(x)) \frac{1}{\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\nabla})} (\partial_0 \nabla^2 \eta(y) - \vec{\nabla} \times \vec{E}(y)) \\
&+ i \frac{\pi}{\theta} \int d^2x d\tau \eta (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \frac{i \pi}{2 \theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho .
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Integrando na Componente Transversal η

Finalmente, resta apenas integrar sobre $\eta(x)$, a componente transversal de a_i — o que é uma tarefa relativamente simples, uma vez que $\eta(x)$ está presente no argumento do funcional- δ (vide eq. (3.14)). De acordo com (3.15), o suporte desta δ consiste em todas as configurações de campo que satisfaçam

$$\nabla^2 \eta = B - \frac{\theta}{\pi} \rho. \tag{3.27}$$

Esta equação diferencial linear pode ser invertida, tomando a forma

$$\eta(x) = -\frac{\theta}{\pi} \int d^2y G(x-y) (\rho(y) - \frac{\pi}{\theta} B(y)), \tag{3.28}$$

onde $G(x-y)$ é a função de Green do operador Laplaciano,

$$\nabla^2 G(x-y) = \delta(x-y). \tag{3.29}$$

A conhecida propriedade da função de Dirac

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_i} \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}, \tag{3.30}$$

onde cada x_i denota um zero da função f , pode ser estendida à sua versão funcional, fornecendo

$$\delta\left(\rho - \frac{\pi}{\theta}(B - \nabla^2\eta)\right) = \frac{1}{|\nabla^2\delta|} \delta\left(\eta(x) + \frac{\theta}{\pi} \int d^2y G(x-y) \left\{\rho(y) - \frac{\pi}{\theta}B(y)\right\}\right). \quad (3.31)$$

Como o fator $|\nabla^2\delta|$ não depende de nenhum campo, pode ser absorvido na constante de normalização global da função partição . Usando (3.31), fica simples integrarmos no campo η , obtendo

$$Z(A_0, A_i) = \exp\left(\frac{i}{2} \frac{\pi}{\theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho\right) \int \mathcal{D}\rho \exp\left(-S_{eff}(\rho, \vec{E}, B)\right) \quad (3.32)$$

tal que

$$\begin{aligned} S_{eff} &= m \int d^3x d^3y \partial_0\rho \left\{ \frac{1}{\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\nabla})} \right\} \partial_0\rho - \frac{1}{4m} \int d^2x d\tau \left\{ \frac{1}{4\rho} \vec{\nabla}\rho \cdot \vec{\nabla}\rho \right\} \\ &- \frac{1}{2} \int d^2x d^2y d\tau (\rho(x) - \bar{\rho}) V(x-y) (\rho(y) - \bar{\rho}) - \frac{1}{4} Tr \ln(\vec{\nabla} \cdot \frac{\rho}{m} \vec{\nabla}) \\ &- \frac{1}{2} \int d^2x d^2y d\tau \left(\rho(x) - \frac{\pi}{\theta}B(x)\right) F(x-y) \left(\rho(y) - \frac{\pi}{\theta}B(y)\right) \\ &- \frac{1}{4m} \frac{\theta^2}{\pi^2} \int d^2x d^2y d^2z d\tau \vec{\nabla}G(x-y) \cdot \vec{\nabla}G(x-z) \times \\ &\quad \times \left(\rho(x) - \frac{\pi}{\theta}B(x)\right) \left(\rho(y) - \frac{\pi}{\theta}B(y)\right) \left(\rho(z) - \frac{\pi}{\theta}B(z)\right) \\ &- \int d^2x d^2y d\tau \left(\rho(x) - \frac{\pi}{\theta}B(x)\right) G(x-y) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(y) \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde definimos

$$F(x-y) = \frac{\theta}{\pi} \frac{1}{2m} \int d^2z B(z) \vec{\nabla}G(z-x) \cdot \vec{\nabla}G(z-y). \quad (3.34)$$

3.1.4 A Ação Efetiva na Representação de Densidade

As equações (3.32) e (3.33) constituem os principais resultados desta sessão . S_{eff} é a ação efetiva para os bósons de Chern-Simons na representação de densidade, interagindo

com um *campo eletromagnético arbitrário*. Embora a estrutura desta ação possa parecer muito complexa, ela tem propriedades gerais que serão muito úteis no cálculo da resposta eletromagnética exata do sistema. Podemos fazer algumas observações gerais sobre a ação (3.33). Em primeiro lugar, ela não é tão-somente invariante de gauge, mas é expressa em termos de variáveis explicitamente invariantes de gauge, pois depende somente de $\rho(x)$, \vec{E} e B . O acoplamento da densidade de carga com o campo eletromagnético é bastante peculiar. O campo magnético atua como uma densidade de fundo (*background density*), participando da ação exclusivamente através de termos da forma $(\rho(x) - \frac{\pi}{\theta}B(x))$. O campo elétrico se acopla à densidade somente através de $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$, que é obviamente proporcional à *densidade cargas externas* (e.g., impurezas). Portanto, o último termo de (3.33) é simplesmente a energia de Coulomb bidimensional entre as cargas externas e as flutuações de carga sobre o background magnético. Pode-se absorver neste termo o potencial químico, uma vez que este pode ser simulado por uma densidade de carga de background uniforme.

O acoplamento do campo de gauge com o campo bosônico de matéria tem duas consequências principais sobre a densidade de partículas do sistema. A integração sobre a componente *longitudinal* do campo de gauge produziu um termo cinético não-local para $\rho(x)$ (vide primeiro termo em (3.33)) e um termo de interação não local dado por $Tr \ln(\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{m}\rho\vec{\nabla})$. A integração sobre a componente *transversal* do campo de gauge induziu uma interação de dois corpos

$$-\frac{1}{2} \int d^2x d^2y d\tau \left(\rho(x) - \frac{\pi}{\theta}B(x) \right) F(x-y) \left(\rho(y) - \frac{\pi}{\theta}B(y) \right), \quad (3.35)$$

e também uma interação de três corpos,

$$-\frac{1}{4m} \frac{\theta^2}{\pi^2} \int d^2x d^2y d^2z d\tau \vec{\nabla}G(x-y) \cdot \vec{\nabla}G(x-z) \times \\ \times \left(\rho(x) - \frac{\pi}{\theta}B(x) \right) \left(\rho(y) - \frac{\pi}{\theta}B(y) \right) \left(\rho(z) - \frac{\pi}{\theta}B(z) \right). \quad (3.36)$$

A interação induzida de dois corpos é característica básica da flutuação dos graus de liberdade transversos do campo de Chern-Simons e, para o caso particular de um campo magnético homogêneo e uniforme,

$$F(x - y) = -\frac{\theta}{\pi} \frac{B}{2m} G(x - y) \propto \ln(x - y), \quad (3.37)$$

obtemos a familiar interação logarítmica de dois corpos, extensamente explorada na literatura. Esta interação é responsável pela criação de um “gap” no espectro de excitações sobre o ground state do sistema.

Além disso, as flutuações longitunais são não-triviais. Particularmente, o termo dinâmico não local contribuirá para o propagador das flutuações de densidade. Também podemos observar que um termo de Chern-Simons para o campo eletromagnético externo foi fatorizado da ação. Na próxima seção, estas propriedades serão utilizadas para a análise da resposta eletromagnética do sistema.

3.2 A Resposta Eletromagnética

3.2.1 Resposta a um Campo Arbitrário

O valor esperado da corrente conservada associada à simetria de gauge [49] é dada por

$$\langle J_\mu(x) \rangle = \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \ln(Z). \quad (3.38)$$

Empregando (3.32) e (3.33) e efetuando as derivadas funcionais, obtemos

$$\langle J_0(x) \rangle = i\frac{\pi}{\theta} B + \partial_i \left\langle \frac{\delta S_{eff}(\vec{E}, B)}{\delta E_i} \right\rangle \quad (3.39)$$

$$\langle J_i(x) \rangle = -i\frac{\pi}{\theta} \epsilon_{ij} E_j + \partial_0 \left\langle \frac{\delta S_{eff}(\vec{E}, B)}{\delta E_i} \right\rangle + \epsilon_{ij} \partial_j \left\langle \frac{\delta S_{eff}(\vec{E}, B)}{\delta B} \right\rangle. \quad (3.40)$$

Como a ação S_{eff} é invariante de gauge, ela depende de A_i somente através dos campos \vec{E} e B . Isto implica na existência de uma corrente topológica — o último termo de (3.40) — automaticamente conservada. Esta corrente é responsável pela quantização exata da condutividade Hall, mesmo na presença de impurezas, um fato estreitamente relacionado à invariância de gauge e excitações das bordas do sistema.

A expressão (3.39), pode ser facilmente calculada, fornecendo

$$\langle iJ_0 \rangle = \langle \rho(x, \tau) \rangle . \quad (3.41)$$

O cálculo de (3.40) também é direto, mas o resultado não é tão trivial:

$$\begin{aligned} \langle J_i \rangle &= -i \frac{\pi}{\theta} \epsilon_{ij} \left(E_j - \partial_j^{(x)} \int d^2 y G(x-y) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(y) \right) \\ &+ i \int d^2 y \partial_i^{(x)} G(x-y) \partial_0 \left\langle \rho(y) - \frac{\pi}{\theta} B(y) \right\rangle \\ &+ J_i^T(x) , \end{aligned} \quad (3.42)$$

tal que

$$J_i^T(x) = \frac{1}{2m} \frac{\theta}{\pi} \epsilon_{ij} \partial_j \Delta(x) \quad (3.43)$$

e

$$\Delta(x) = \int d^2 z d^2 y \vec{\nabla} G(x-y) \cdot \vec{\nabla}_y G(y-z) \left\langle \left(\rho(y) - \frac{\pi}{\theta} B(y) \right) \left(\rho(z) - \frac{\pi}{\theta} B(z) \right) \right\rangle . \quad (3.44)$$

A corrente (3.42) descreve a resposta do sistema a um campo eletromagnético arbitrário. Antes de prosseguirmos no cálculo, é necessário neste ponto checarmos a conservação da corrente (3.42), ou seja, verificarmos o divergente de $\langle J_i \rangle$. Há termos em (3.42) automaticamente conservados; são *termos topológicos*, ou seja, da forma $\epsilon_{ij} \partial_j f(x)$, com $f(x)$ arbitrário. Os demais termos de (3.42) merecem maior atenção. De fato,

$$\partial_i \langle J_i \rangle = -i \frac{\pi}{\theta} \epsilon_{ij} \partial_i E_j + i \int d^2 y \nabla^2 G(x-y) \partial_0 \left\langle \rho(y) - \frac{\pi}{\theta} B(y) \right\rangle . \quad (3.45)$$

Utilizando (3.29), podemos integrar o último termo, obtendo

$$\partial_i \langle J_i \rangle = i \partial_0 \langle \rho(y) \rangle - i \frac{\pi}{\theta} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_0 B \right) \quad (3.46)$$

De (3.41) (lembrando que o campo eletromagnético externo satisfaz a Lei de Faraday) obtemos a lei de conservação da corrente (no espaço euclidiano)

$$\partial_i \langle J_i \rangle + \partial_0 \langle J_0 \rangle = 0 \quad (3.47)$$

Portanto a corrente (3.42) é, de fato, uma corrente conservada.

Para um campo eletromagnético arbitrário, a expressão (3.42) pode vir a ser extremamente complicada. Entretanto, ela é útil para o estudo da estrutura da densidade de corrente para configurações específicas do campo eletromagnético.

3.2.2 O Caso do Efeito Hall

Para o caso de um campo magnético estático e uniforme, e um campo elétrico estático mas com dependência espacial arbitrária -- caso de interesse para o estudo do Efeito Hall Quântico -- a equação (3.42) se reduz a

$$\langle J_i \rangle = -i \frac{\pi}{\theta} \epsilon_{ij} \left(E_j - \partial_j \int d^2 y G(x-y) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) + J_i^T(x) . \quad (3.48)$$

O primeiro termo de (3.48) não depende de nenhum detalhe específico do sistema. Claramente, as propriedades dinâmicas do sistema (interações de dois corpos, etc.) estão todas contidas na densidade de corrente topológica $J_i^T(x)$. De (3.44), obtemos

$$\Delta(x) = \int d^2z d^2y \vec{\nabla}G(x-y) \cdot \vec{\nabla}_y G(y-z) \langle \delta\rho(y)\delta\rho(z) \rangle ; \quad (3.49)$$

aqui, o valor esperado é calculado utilizando-se a função partição (3.32), e $\delta\rho$ é a flutuação de densidade em torno da densidade de background $\frac{\pi}{\theta}B$. A ação S_{eff} depende somente de \vec{E} através de seu divergente, portanto, para uma amostra sem cargas externas (impurezas), a função $\Delta(x)$ é *independente* do campo elétrico.

Além disso, $\langle\rho\rangle$ tem que ser constante, tendo em vista a invariância de translação do sistema; estabelecemos a neutralidade média da amostra impondo $\langle\rho\rangle = \bar{\rho}$. As flutuações quânticas do campo de Chern-Simons induziram novas interações de dois e três corpos com o background neutralizador, e a fim de determinarmos consistentemente as flutuações de densidade $\delta\rho$ a partir da equação (3.49), temos que definir

$$\bar{\rho} = \frac{\pi}{\theta}B \quad (3.50)$$

o que implica em um fator de preenchimento $\nu = \frac{\pi}{\theta}$. Neste caso, a função de correlação de dois pontos $\langle\delta\rho(x)\delta\rho(y)\rangle$ depende de $|x-y|$. No caso de uma amostra com impurezas, entretanto, é preciso calcular a média das funções de correlação sobre distribuições aleatórias de impurezas, utilizando-nos de um fator de peso gaussiano, por exemplo. Após efetuarmos a média, a invariância de translação é restaurada,

$$\overline{\langle\delta\rho(x)\delta\rho(y)\rangle} = \sigma(x-y) \quad (3.51)$$

onde \bar{u} denota o valor médio de uma grandeza u sobre distribuições aleatórias de impurezas. (Para a presente discussão, a invariância por translação da função σ é a sua única propriedade relevante.) Podemos então escrever

$$\overline{\Delta(x)} = \int d^2z d^2y \vec{\nabla}G(x-y) \cdot \vec{\nabla}_y G(y-z)\sigma(y-z)$$

$$= \int d^2y \vec{\nabla} G(x-y) \cdot \vec{\nabla}_y \int d^2z G(y-z) \sigma(y-z) . \quad (3.52)$$

Tendo como domínio de integração um plano infinito, a última integral de (3.52) é constante, e portanto $\overline{\Delta(x)} = 0$, para $\nu = \pi/\theta$. Portanto, em um sistema *infinito* a densidade de corrente topológica J_i^T dada por (3.43) se anula. O mesmo não acontece para um plano finito; no entanto, mostraremos que ele não contribui para a corrente total. A corrente topológica numa região D é dada por

$$I_i^T = \int_D J_i^T dS = \frac{1}{2m} \frac{\theta}{\pi} \int_D \epsilon_{ij} \partial_j \Delta(x) dS . \quad (3.53)$$

O domínio de integração D coincide com a superfície da amostra. Definindo ∂D como sendo a fronteira da região D , podemos representar a função Δ como $\Delta(x)\Theta(D)$, onde $\Theta(D) = 1$, sobre D , e $\Theta(D) = 0$, de outro modo. Então,

$$\begin{aligned} \partial_j (\Delta(x)\Theta(D)) &= \partial_j \Delta(x)\Theta(D) + \Delta(x)\partial_j \Theta(D) \\ &= \partial_j \Delta(x)\Theta(D) - \hat{n}_j \Delta(x) \delta(\partial D) \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde $\delta(\partial D)$ é o funcional δ de Dirac com suporte em ∂D , e \hat{n}_j é a j -ésima componente do versor contido no plano, normal a ∂D e externa à região D . Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} I_i^T &= \frac{1}{2m} \frac{\theta}{\pi} \left\{ \int \epsilon_{ij} \partial_j \Delta(x)\Theta(D) dS - \int \epsilon_{ij} \hat{n}_j \Delta(x) \delta(\partial D) \right\} \\ &= \frac{1}{2m} \frac{\theta}{\pi} \left\{ \oint_{\partial D} d\vec{l} \hat{t}_i \Delta(x) - \int \epsilon_{ij} \hat{n}_j \Delta(x) \delta(\partial D) ds \right\} \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde $t_i = \epsilon_{ij} \hat{n}_j$ é um versor tangente à fronteira ∂D . Então ,

$$\int \epsilon_{ij} \hat{n}_j \Delta(x) \delta(\partial D) ds = \oint_{\partial D} d\vec{l} \hat{t}_i \Delta(x) , \quad (3.56)$$

o que implica em

$$I_i^T = 0. \quad (3.57)$$

O lado direito de (3.56) representa uma corrente de borda (*edge current*), responsável pelo cancelamento da corrente topológica total. Isto significa que, devido às correntes de borda, somente o termo $-i\frac{\pi}{\theta}\epsilon^{ij}E_j$ de (3.42) contribui para a corrente total. A relevância dos estados de borda (*edge states*) para o EHQ foi assinalada pela primeira vez em [53] e sua teoria foi desenvolvida posteriormente nas referências [54, 55, 56].

É interessante notar que, para $\nu \neq \pi/\theta$, há *dois* possíveis “backgrounds”, i.e., $\bar{\rho}$ e $\frac{\pi}{\theta}B$. Neste caso, não é possível obtermos um valor médio constante para a densidade de carga. A invariância de translação é quebrada e as flutuações de densidade não mais dependem simplesmente de $|x - y|$, passando a exibir uma dependência não trivial em x e y . Isto mostra que para $\nu \neq \pi/\theta$, a densidade de corrente topológica J_i^T contribuirá de um modo não trivial para a corrente total.

Vamos agora analisar a parte principal de (3.42), isto é,

$$\langle J_i \rangle = -i\frac{\pi}{\theta}\epsilon_{ij} \left(E_j - \partial_j \int d^2y G(x - y) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right). \quad (3.58)$$

O segundo termo desta expressão tem suporte somente nas regiões em que $\rho(x) \neq 0$ e depende do divergente do campo \vec{E} . Numa amostra sem impurezas, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ e, conseqüentemente, obtemos a familiar Corrente de Hall (voltando às unidades usuais),

$$\langle J_i \rangle = \frac{1}{2n+1} \frac{e^2}{h} \epsilon_{ij} E_j \quad (3.59)$$

Em uma amostra real, onde impurezas estão presentes, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \neq 0$. Decompondo o campo elétrico em duas componentes,

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}^{imp} \quad (3.60)$$

onde $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}' = 0$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^{imp} = \rho_e$, sendo ρ_e a densidade de cargas externas, devido às impurezas. Desta maneira, podemos reescrever (3.58) como

$$\langle J_i \rangle = -i \frac{\pi}{\theta} \epsilon_{ij} E'_j - i \frac{\pi}{\theta} \epsilon_{ij} \left(E_j^{imp} - \partial_j \int d^2 y G(x-y) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^{imp} \right). \quad (3.61)$$

É simples de se mostrar que

$$E_j^{imp} - \partial_j \int d^2 y G(x-y) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^{imp} = 0. \quad (3.62)$$

O segundo termo do lado esquerdo da equação anterior pode ser interpretado como sendo o campo elétrico bidimensional gerado por uma densidade de carga ρ_e . Portanto, de (3.61) temos (em unidades usuais)

$$\langle J_i \rangle = \frac{1}{2n+1} \frac{e^2}{h} \epsilon_{ij} E'_j \quad (3.63)$$

Podemos concluir que a quantização da condutividade Hall para $\nu = \pi/\theta$ é *exata* neste modelo, e *não* depende da distribuição das impurezas. Em outras palavras, a corrente transversa somente “vê” campos com divergência nula. A dinâmica do sistema e as distribuições aleatórias de impurezas afetam somente os estados de borda do sistema — e esta é a razão da quantização exata da condutividade Hall. Este resultado [49] generaliza, para o caso de uma distribuição genérica de impurezas, aquele obtido por Prange [57] para uma impureza pontual, no contexto da teoria de Chern-Simons-Landau-Ginzburg para o Efeito Hall Quântico Fracionário.

3.3 Dinâmica das Flutuações de Densidade

Na última seção calculamos a densidade de corrente e, a partir dessa expressão, se pôde compreender o papel desempenhado pelo termo de Chern-Simons, pelos estados de

borda (responsáveis pela quantização exata da condutividade), e o efeito das impurezas sobre o sistema. Para entendermos completamente a resposta eletromagnética, porém, é necessário calcularmos o tensor de polarização do vácuo

$$\Pi_{\mu\nu}(x, y) = \frac{\delta^2 \ln Z(A)}{\delta A^\mu(y) \delta A^\nu(x)}. \quad (3.64)$$

O cálculo das derivadas funcionais é direto, e o resultado pode ser escrito formalmente em termo de valores médios de flutuações de densidade $\langle \delta\rho(x)\delta\rho(y) \dots \rangle$. Em particular, a expressão para o Π^{00} é muito simples

$$\Pi^{00}(x, y) = \langle \delta\rho(x)\delta\rho(y) \rangle \quad (3.65)$$

onde $\delta\rho(x) = \rho(x) - \langle \rho(x) \rangle$

Para calcular explicitamente este tipo de objetos, precisamos calcular a ação efetiva para as flutuações de densidade $\delta\rho$. A ação (3.33) é o funcional apropriado para o estudo da dinâmica das flutuações de densidade em torno do estado fundamental do modelo. É claro que o estado fundamental depende da configuração específica do campo eletromagnético externo; no entanto, no que segue vamos considerar o caso particular de um campo estático e homogêneo, que é o caso relevante para o estudo do EHQ.

O estado fundamental para $\nu = \pi/\theta$ é o estado com densidade média homogênea

$$\langle \rho(x) \rangle = \bar{\rho} = \frac{\pi}{\theta} B, \quad (3.66)$$

de tal forma que $\rho(x) = \bar{\rho} + \delta\rho(x)$.

O objetivo desta sessão é obter, a partir da eq. (3.33), uma ação efetiva para $\delta\rho(x)$ e, a partir desta última, deduzir as regras de Feynman para calcular valores médios de flutuações de densidade. Precisamos então fazer uma expansão da ação (3.33) em série funcional de Taylor em torno da configuração $\rho(x) = \bar{\rho}$. Esta expansão é direta, exceto por

dois termos provenientes da integração sobre a componente longitudinal φ de a_μ . Estes termos são o termo cinético $\partial_0 \rho \left\{ \frac{1}{\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\nabla})} \right\} \partial_0 \rho$ e o determinante $Tr \ln(\vec{\nabla} \cdot \frac{\rho}{m} \vec{\nabla})$. Vamos analisar estes dois termos em detalhe; podemos escrever o termo cinético de (3.33) como

$$I_K = \int d^3 z_1 d^3 z_2 \delta \dot{\rho}(z_1) \mathcal{K}(z_1, z_2) \delta \dot{\rho}(z_2) . \quad (3.67)$$

onde

$$\vec{\nabla}_{z_1} \cdot \left(\rho(z_1) \vec{\nabla}_{z_1} \mathcal{K}(z_1, z_2) \right) = \delta(z_1 - z_2) \quad (3.68)$$

A derivada de $\delta \rho$ em relação ao tempo é denotada por $\delta \dot{\rho}$. Usamos também o fato de que o estado fundamental é estático. É interessante notar que \mathcal{K} depende de ρ através da equação implícita (3.68), somente. Então, podemos expandir o operador \mathcal{K} em potências de $\delta \rho$ da seguinte forma:

$$\mathcal{K}(z_1, z_2) = \mathcal{K}(z_1, z_2)|_{\rho=\bar{\rho}} + \int d^3 x \frac{\delta \mathcal{K}(z_1, z_2)}{\delta \rho(x)} \Big|_{\rho=\bar{\rho}} \delta \rho(x) + (\dots) . \quad (3.69)$$

De (3.68) vemos que

$$\mathcal{K}(z_1, z_2)|_{\rho=\rho} = \frac{1}{\rho} G(z_1, z_2) \quad (3.70)$$

onde $G(z_1, z_2)$ é a função de Green do laplaciano (ver eq. (3.29)).

O cálculo do segundo termo de (3.69) é um pouco mais sofisticado. Diferenciando funcionalmente a equação (3.68) em relação a ρ , encontramos

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta \rho(x)} \vec{\nabla}_{z_1} \cdot \left(\rho(z_1) \vec{\nabla}_{z_1} \mathcal{K}(z_1, z_2) \right) = \\ & = \vec{\nabla}_{z_1} \cdot \left(\delta(z_1 - x) \vec{\nabla}_{z_1} \mathcal{K}(z_1, z_2) \right) + \vec{\nabla}_{z_1} \cdot \left(\rho(z_1) \vec{\nabla}_{z_1} \frac{\delta}{\delta \rho(x)} \mathcal{K}(z_1, z_2) \right) = 0 . \end{aligned} \quad (3.71)$$

Observando que o operador $\vec{\nabla}_z \cdot (\rho(z)\vec{\nabla}_z f(z)) = \int dy \mathcal{K}^{-1}(z, y)f(y)$, com $f(z)$ arbitrário, podemos reescrever a eq. (3.71) como

$$\int dy \mathcal{K}^{-1}(z_1, y) \frac{\delta}{\delta \rho(x)} \mathcal{K}(y, z_2) = -\vec{\nabla}_{z_1} \cdot (\delta(z_1 - x) \vec{\nabla}_{z_1} \mathcal{K}(z_1, z_2)) \quad (3.72)$$

Invertendo esta equação, obtemos

$$\frac{\delta}{\delta \rho(x)} \mathcal{K}(z_1, z_2) = - \int dy \mathcal{K}(z_1, y) \left\{ \vec{\nabla}_y \delta(y - x) \cdot \vec{\nabla}_y \mathcal{K}(y, z_2) + \delta(y - x) \nabla_y^2 \mathcal{K}(y, z_2) \right\} . \quad (3.73)$$

Efetuada as integrações, obtemos uma equação diferencial funcional para \mathcal{K} ,

$$\frac{\delta}{\delta \rho(x)} \mathcal{K}(z_1, z_2) = \vec{\nabla}_x \mathcal{K}(z_1, x) \cdot \vec{\nabla}_x \mathcal{K}(x, z_2) \quad (3.74)$$

Determinar a sua solução para um valor arbitrário de $\rho(x)$ é tarefa muito difícil; no entanto, para o nosso caso é suficiente considerar configurações constantes $\rho = \bar{\rho}$. Usando então as eqs. (3.70) e (3.74) temos que

$$\left. \frac{\delta \mathcal{K}(z_1, z_2)}{\delta \rho(x)} \right|_{\rho=\bar{\rho}} = \frac{1}{\bar{\rho}^2} \vec{\nabla} G(z_1, x) \cdot \vec{\nabla} G(x, z_2) \quad (3.75)$$

Substituindo (3.70) e (3.75) em (3.67) obtemos

$$\begin{aligned} I_K &= \frac{1}{\bar{\rho}} \int d^3 z_1 d^3 z_2 \delta \dot{\rho}(z_1) G(z_1, z_2) \delta \dot{\rho}(z_2) + \\ &+ \frac{1}{\bar{\rho}^2} \int d^3 z_1 d^3 z_2 d^3 x \vec{\nabla} G(z_1, x) \cdot \vec{\nabla} G(x, z_2) \delta \dot{\rho}(z_1) \delta \dot{\rho}(z_2) \delta \rho(x) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (3.76)$$

O próximo termo interessante a se considerar na expansão em série da ação efetiva é

$$I_{det} = Tr \ln(\vec{\nabla} \cdot \frac{\rho}{m} \vec{\nabla}), \quad (3.77)$$

o qual pode ser reescrito como

$$I_{det} = Tr \ln \left(\frac{\bar{\rho}}{m} \nabla^2 + \vec{\nabla} \frac{\delta \rho}{m} \vec{\nabla} \right). \quad (3.78)$$

Observe que este termo tem sua origem na interação da densidade ρ com a componente longitudinal do campo de gauge. Este processo é dominado essencialmente por pequenos momenta, de tal forma que consideraremos desprezível o termo logarítmico com produtos de duas derivadas de primeira ordem. Obtemos

$$I_{det} \approx Tr \ln \left(\frac{\bar{\rho}}{m} \nabla^2 \right) + Tr \ln \left(1 + \frac{\delta \rho}{\bar{\rho}} \right) \quad (3.79)$$

O primeiro termo desta expressão é constante e pode ser absorvido no fator de normalização global da função partição. O outro termo pode ser expandido em potências de $\delta \rho$, fornecendo como resultado

$$I_{det} \approx -\frac{1}{2} \int d^3x \frac{\delta \rho^2}{\bar{\rho}^2} + \frac{1}{3} \int d^3x \frac{\delta \rho^3}{\bar{\rho}^3} \quad (3.80)$$

O termo linear poder ser absorvido renormalizando-se o potencial químico; o único efeito do termo quadrático é a redefinição do potencial de dois corpos no regime de pequenos momenta. No caso de potenciais locais, este termo redefine a constante de acoplamento, enquanto que para interações de longo alcance ele é irrelevante. Juntando todos os termos, obtemos a ação efetiva para as flutuações de densidade

$$\begin{aligned} S &= \frac{m}{2} \frac{1}{\bar{\rho}} \int d^3x d^3y \delta \rho(x) G(x-y) \delta \rho(y) \\ &+ \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \delta \rho(x) \left\{ \frac{1}{4m\bar{\rho}} \nabla^2 \delta(x-y) - \left(V(x-y) - \frac{\bar{\rho}}{m} \left(\frac{\theta}{\pi} \right)^2 G(x-y) \right) \right\} \delta \rho(y) \\ &+ \frac{1}{8m\bar{\rho}^2} \int d^3x \vec{\nabla} \delta \rho(x) \cdot \vec{\nabla} \delta \rho(x) \delta \rho(x) - \frac{1}{3\bar{\rho}^{3/2}} \int d^3x \delta \rho^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2m} \frac{\theta^2}{\pi^2} \int d^3x d^3y d^3z \vec{\nabla} G(x-y) \cdot \vec{\nabla} G(x-z) \delta\rho(x) \delta\rho(y) \delta\rho(z) \\
& + \frac{m}{2} \frac{1}{\bar{\rho}^2} \int d^3x d^3y d^3z \vec{\nabla} G(x-z) \cdot \vec{\nabla} G(z-y) \delta\dot{\rho}(x) \delta\dot{\rho}(y) \delta\rho(z) \\
& - \int d^2x d^2y \delta\rho(x) G(x-y) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} .
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Como as flutuações $\delta\rho$ são pequenas, podemos considerar que o termo quadrático da ação efetiva define a dinâmica das flutuações, enquanto que os termos de ordem superior podem ser considerados como perturbações. Neste sentido, podemos escrever o propagador das flutuações de densidade no espaço de momenta como

$$\langle \delta\rho(\omega, \mathbf{k}) \delta\rho(-\omega, -\mathbf{k}) \rangle = \frac{\frac{2\bar{\rho}}{m} \mathbf{k}^2}{\omega^2 - \left\{ \left(\frac{\mathbf{k}^2}{2m} \right)^2 + \frac{\rho}{m} \mathbf{k}^2 V(-\mathbf{k}^2) + \frac{\bar{\rho}^2}{m^2} \left(\frac{\theta}{\pi} \right)^2 \right\}} \tag{3.82}$$

A partir deste propagador podem ser calculadas várias grandezas interessantes. Por exemplo, a compressibilidade do sistema está definida, como vimos no capítulo anterior, por

$$\kappa = \lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} \Pi_{00}(0, \mathbf{k}) . \tag{3.83}$$

Da eq. (3.65), do propagador (3.83) e para qualquer potencial da forma

$$V(-\mathbf{k}^2) \propto \mathbf{k}^\alpha , \tag{3.84}$$

temos

$$\kappa = \lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} - \frac{\frac{2\bar{\rho}}{m} \mathbf{k}^2}{\left(\frac{\mathbf{k}^2}{2m} \right)^2 + \frac{\rho}{m} \mathbf{k}^2 V(-\mathbf{k}^2) + \frac{\bar{\rho}^2}{m^2} \left(\frac{\theta}{\pi} \right)^2} = 0 ; \tag{3.85}$$

ou seja, o sistema é incompressível. A relação entre incompressibilidade e a supercondutividade dos bósons subjacentes foi estudada no capítulo anterior, no contexto da aproximação de campo médio. No presente contexto, a incompressibilidade depende essencialmente de dois fatos. O primeiro é a existência de um *gap* no espectro de excitações. Este

gap é aberto devido as flutuações da componente transversa do campo de gauge, e seu valor $\delta\Delta = \frac{\bar{\rho}^2}{m^2}(\frac{\theta}{\pi})^2$ coincide com aqueles encontrados nas referências [13, 12, 51] através de outras técnicas de cálculo. Estas excitações com *gap* correspondem a excitações de ciclotron (*cyclotron mode excitations*), e foram identificadas como transições entre níveis de Landau. (A existência de um *gap* no espectro de excitações não é suficiente, porém, para estabelecer a incompressibilidade do estado fundamental.) O segundo fato é a existência do fator \mathbf{k}^2 no numerador do propagador. Este fator é induzido pelas flutuações da componente longitudinal do campo de gauge, afetando fortemente a dinâmica das flutuações de densidade. Neste ponto, é bom lembrar que as flutuações longitudinais do campo de gauge são essencialmente equivalentes a flutuações de fase do campo de matéria.

É instrutivo reescrever o propagador (3.82) na forma

$$\langle \delta\rho(\omega, \mathbf{k})\delta\rho(-\omega, -\mathbf{k}) \rangle = \frac{\pi}{\theta}\mathbf{k}^2 \left(\frac{1}{\omega - \omega_k} - \frac{1}{\omega + \omega_k} \right) + O(\mathbf{k}^3), \quad (3.86)$$

com

$$\omega_k = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{k}^2}{2m}\right)^2 + \frac{\bar{\rho}}{m}\mathbf{k}^2 V(-\mathbf{k}^2) + \frac{\bar{\rho}^2}{m^2}\left(\frac{\theta}{\pi}\right)}. \quad (3.87)$$

Esta expressão mostra que o nosso formalismo é consistente com o teorema de Kohon [58]. Este teorema estabelece que a função de correlação de densidade de um sistema invariante perante translações planares e submetido à ação de um campo magnético perpendicular ao plano deve ter um *gap* $\omega_c = \frac{\bar{\rho}B}{m}$, quando calculada até ordem \mathbf{k}^2 . Este é um resultado exato, independente dos detalhes microscópicos do sistema. Portanto, qualquer cálculo consistente de correções radiativas deve levar em conta este vínculo ordem a ordem da teoria de perturbações, além dos vértices que podem ser lidos da ação (3.81). Na verdade este resultado é válido para quaisquer potenciais de dois corpos que tendem a zero quando $r \rightarrow \infty$. Por exemplo, um potencial logarítmico do tipo $V(-\mathbf{k}^2) \propto 1/\mathbf{k}^2$ modifica o valor

do *gap*, como pode ser comprovado a partir da eq. (3.87).

A relação de dispersão (3.87) coincide, no limite de longas distâncias (pequenos momentos), com as calculadas nas referências [13] e [12]. Para o potencial de Coulomb $V(-\mathbf{k}^2) \propto 1/|\mathbf{k}|$, a relação de dispersão é linear, como foi sugerido primeiramente por Halperin [59]. A equação (3.87) também coincide com a relação de dispersão das quasipartículas de um superfluido de anyons [51]. Estes fatos, de certa forma, mostram a consistência do nosso método de análise das flutuações .

3.4 Correções Quânticas às Excitações de Vórtices

Nesta última seção, gostaríamos simplesmente de fazer um comentário sobre como obter, através do formalismo descrito nesta tese, correções quânticas às excitações tipo vórtice existentes neste modelo. O comportamento assintótico (i.e., quando $|x| \rightarrow \infty$) típico de um vórtice é da forma

$$\phi(x) = \rho^{1/2} e^{i\gamma(x)} \quad (3.88)$$

$$a_i(x) = \partial_i \gamma(x) = \epsilon_{ij} \frac{x_j}{|x|^2} \quad (3.89)$$

onde γ é o ângulo azimutal. Se impusermos que esta configuração de campo tenha energia finita, isto leva à quantização do fluxo

$$\oint \vec{a} \cdot d\vec{s} = 2\pi \quad (3.90)$$

e a carga do vórtice será também quantizada, tendo em vista o vínculo de Chern-Simons. Soluções explícitas das equações clássicas de movimento com estas características foram encontradas por diversos autores [51, 41, 60]. Nesta seção gostaríamos de determinar uma ação efetiva para a densidade de partículas na presença de um vórtice “vestido”

com as flutuações quânticas do campo de gauge a_μ . A ação efetiva (3.81) perdeu toda a informação topológica e não contem vórtices (apenas excitações vórtice-antivórtice), pois ao realizarmos as integrações funcionais, implicitamente fixamos condições de contorno triviais para os campos.

Para obtermos a ação efetiva na representação de densidade na presença de um vórtice, devemos fixar condições de contorno não triviais para realizar as integrações funcionais. Isto pode ser feito através da fixação do gauge. Em (3.9) fixamos o gauge impondo a condição $\delta(\theta(x))$ e mostrando que esta escolha é equivalente ao gauge de Coulomb. No entanto, esta não é a única escolha possível. Considere as transformações de gauge singulares

$$\theta(x) \longrightarrow \theta(x) + \Lambda(x) + \gamma(x) \quad (3.91)$$

$$a_\mu(x) \longrightarrow a_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) + \partial_\mu \gamma(x) \quad (3.92)$$

(γ é o ângulo azimutal) e escolhemos $\Lambda = -\theta$. Esta transformação fixa a fase do campo como $\theta = \gamma$ na ação, induzindo uma componente longitudinal do campo de gauge $a_i^L = \partial_i \theta + \partial_i \gamma$. Então, podemos mudar as variáveis de integração de θ para a_i^L . Refazendo os passos formais que levaram de (3.9) a (3.13), podemos concluir que também podemos escolher o funcional que fixa o gauge como sendo

$$G_F(\theta, a_i) = \delta(\theta - \gamma) \quad (3.93)$$

Esta escolha do gauge automaticamente estabelece condições de contorno topológicas para a fase do campo de matéria ou, de forma equivalente, para a componente longitudinal do campo de gauge a_i^L . Uma técnica similar foi usada na ref. [61], no contexto de modelos de Higgs abelianos.

Com estas condições de contorno, a ação em termos das flutuações de densidade tem a forma

$$S_V(\rho) = S_{eff}(\rho) + S_\gamma(\rho), \quad (3.94)$$

onde S_{eff} é a ação efetiva com condições de contorno triviais dada pela eq. (3.33) e

$$S_\gamma(\rho) = \frac{1}{m} \int d^3x \left(-\frac{1}{2} \rho |\vec{\nabla} \gamma|^2 + \rho \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \gamma \right). \quad (3.95)$$

Integrando sobre o campo de gauge, obtemos

$$S_\gamma(\rho) = -\frac{1}{4m} \int d^3x \rho |\vec{\nabla} \gamma|^2 + \frac{1}{m} \frac{\pi}{\theta} c_{ij} \int d^3x d^3y \partial_i \rho(x) G(x-y) \gamma(x) \partial_j \rho(y) \quad (3.96)$$

O primeiro termo do lado direito desta equação vem da integração da parte longitudinal do campo de gauge e pode ser interpretada como uma interação com uma densidade de carga externa, já que pode ser reescrita como

$$\frac{1}{4m} \int d^3x \rho |\vec{\nabla} \gamma|^2 = \frac{1}{m} \int d^3x d^3y \rho(x) G(x-y) \rho_e(y) \quad (3.97)$$

onde $\rho_e(x) = \nabla^2 |\vec{\nabla} \gamma|^2 = 1/|x|^4$. O segundo termo de (3.96) vem da integração das flutuações transversas do campo de gauge; tais flutuações induzem uma nova interação de dois corpos entre gradientes de densidade em direções ortogonais. Note que S_γ não é invariante perante translações, pois $\gamma(x)$ não está definida na origem (que é o núcleo do vórtice).

Resumindo, a equação (3.94), juntamente com (3.33) e (3.96) é a ação efetiva para a densidade de carga de bósons acoplados com um campo de gauge com dinâmica de Chern-Simons, na presença de um vórtice centrado na origem do sistema de coordenadas.

Minimizando esta ação, deveria ser possível obter o perfil do vórtice “vestido” com as flutuações quânticas do campo de gauge.

No próximo capítulo, descreveremos as técnicas para minimizar a ação na representação densidade e desta forma obter configurações de carga que minimizam a ação efetiva.

Capítulo 4

A Densidade de Carga na Presença de Flutuações Quânticas do Campo de Chern-Simons

Nos capítulos anteriores deduzimos uma ação efetiva do modelo de Chern-Simons-Landau-Ginzburg para a densidade de carga, que nos permitiu calcular a resposta eletromagnética exata do modelo, bem como estudar a dinâmica das flutuações de densidade em torno do estado fundamental.

Através desta ação, foi possível a “visualização” dos efeitos quânticos do campo de gauge de Chern-Simons como interações não-locais envolvendo a densidade de cargas. Neste capítulo, aprofundaremos um pouco mais esta visão, na tentativa de compreender o significado físico de cada termo destas novas interações. Para tanto, estudaremos as condições de extremização da ação efetiva, ou seja,

$$\frac{\delta S_{eff}(\rho)}{\delta \rho(x)} = 0 \quad (4.1)$$

onde $S_{eff}(\rho)$ é a ação (3.33). O significado físico desta equação é muito claro: sua solução

fornece a distribuição de densidade de carga mais provável, na presença de flutuações quânticas. Um importante detalhe a ser ressaltado é que esta equação *não* contém a mesma informação que as equações clássicas de movimento

$$\frac{\delta S(\phi, a_\mu)}{\delta \phi(x)} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\delta S(\phi, a_\mu)}{\delta a_\mu(x)} = 0, \quad (4.3)$$

onde $S(\phi, a_\mu)$ é dada por (3.2), já que nesta última o campo de gauge a_μ é considerado como um campo clássico, enquanto que na equação (4.1) tanto o campo de Chern-Simons quanto a fase ϕ do campo de matéria foram *integrados exatamente*, contendo portanto todas as oscilações quânticas destes campos.

Embora a ação (3.33) tenha sido muito útil para o estudo da resposta eletromagnética e do propagador das flutuações de densidade, ela não se mostra como a mais apropriada para os objetivos do presente capítulo. A equação de movimento (4.1) é extremadamente complexa quando escrita em termos da densidade ρ ; isto se deve, essencialmente, à não-linearidade dos termos com derivadas espaciais. Mais adiante, ficará claro que a variável natural para o estudo em questão é $\sqrt{\phi^* \phi}$, ao invés de $\phi^* \phi$, como foi feito no capítulo anterior. Poderíamos transformar as variáveis na equação (4.1) fazendo $\rho \rightarrow \rho^2$; no entanto, obtemos maior clareza ao mudarmos as variáveis diretamente na ação efetiva, antes de efetuar o cálculo de extremização da ação.

Então, utilizaremos neste capítulo a raiz quadrada da densidade para reescrever a ação efetiva e em seguida calcular a condição de extremização desta, para fatores de preenchimento com valores próximos a $\nu = \theta/\pi$. A condição assim obtida descreve o comportamento semi-clássico da densidade de carga, e consiste numa equação integro-diferencial não-linear que, por sua vez, pode ser reescrita como um sistema de equações diferenciais parciais — permitindo uma melhor compreensão do seu conteúdo físico e fa-

cilitando o seu tratamento numérico. Investigando este sistema de equações, podemos ter uma visão mais profunda dos mecanismos que levam à quantização exata da condutividade, ficando mais evidente como a associação de cargas e fluxos promovida pelo termo de Chern-Simons produz rotacionais de correntes que são de fundamental importância para a análise dos efeitos de borda da amostra. Finalmente estudaremos, como exemplo, a variação da distribuição de cargas e correntes, ao afastarmos o sistema do regime de quantização exata.

4.1 A Ação Efetiva

Tomamos como ponto de partida a função partição

$$Z(\Lambda_\mu) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi \mathcal{D}a_\mu G_F(\phi, a_\mu) e^{-S(\phi, \phi^*, a_\mu, A_\mu)} \quad (4.4)$$

onde S é a ação euclidiana (3.4),

$$\begin{aligned} S &= \int d^2x d\tau \left\{ \phi^* (\partial_\tau + ia_0 - i\mu) \phi - \frac{1}{2m} \left| (-i\vec{\nabla} + \vec{a}) \phi \right|^2 \right\} \\ &- \frac{1}{2} \int d^2x d^2y d\tau \left(\phi^*(x) \phi(x) - \bar{\rho}^2 \right) V(x-y) \left(\phi^*(y) \phi(y) - \bar{\rho}^2 \right) \\ &- \frac{i\pi}{2\theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{i0j} a_i \partial_0 a_j - i \frac{\pi}{\theta} \int d^2x d\tau a_0 (\vec{\nabla} \times \vec{a} + B) \\ &- i \frac{\pi}{\theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{ij} a_i E_j - \frac{i\pi}{2\theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Utilizaremos aqui a transformação

$$\phi = \rho e^{i\theta} \quad (4.6)$$

$$\phi^* = \rho e^{-i\theta} \quad (4.7)$$

ao invés da transformação (3.5) usada no capítulo anterior; obtemos assim uma ação efetiva em termos da raiz quadrada da densidade de carga. Nas novas variáveis, a densidade de carga é dada por $\phi\phi^* = \rho^2$, e a medida de integração não é trivial, devido à presença de um Jacobiano

$$\begin{aligned} D\phi D\phi^* &= \prod_x d\phi(x) d\phi^*(x) = \prod_x d\rho(x)d\theta(x)(-2i)\rho(x) \\ &\approx D\rho D\theta \prod_x \rho(x) = D\rho D\theta \det(\rho) . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Absorvendo eventuais coeficientes na constante de normalização \mathcal{N} de (4.4), obtemos

$$\begin{aligned} Z(A_\mu) &= \mathcal{N} \exp\left(-\frac{i\pi}{2\theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{\mu\nu\lambda} \Lambda_\mu \partial_\nu A_\lambda\right) \times \\ &\times \int D\rho D\theta D a_\mu G_F(\rho, \theta, a_\mu) \det(\rho) \exp(-S_1[\rho, \theta, a_\mu]) . \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde

$$\begin{aligned} S_1 &= \int d^2x d\tau \left(i \rho^2 (\partial_\tau \theta + a_0) + \mu \rho^2 + \right. \\ &- \left. \frac{1}{2m} (\nabla \rho \cdot \nabla \rho + \rho^2 (\nabla \theta + \vec{a})^2) \right) + \\ &- \frac{1}{2} \int d^2x d^2y d\tau (\rho^2(x) - \rho^2(y)) V(x-y) (\rho^2(y) - \rho^2(x)) + \\ &- \frac{i\pi}{2\theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{i0j} a_i \partial_0 a_j - \frac{i\pi}{\theta} \int d^2x d\tau a_0 (\nabla \times \vec{a} + B) + \\ &- \frac{i\pi}{\theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{ij} a_i E_j \end{aligned} \quad (4.10)$$

e $G_F(\rho, \theta, a_\mu)$ é o funcional de fixação de gauge. No cálculo de S_1 , o termo $\rho \partial_\tau \rho$ foi desprezado, por se tratar de uma derivada total -- não contribuindo, portanto, para as equações de movimento.

A partir deste ponto, realizamos as integrações sobre a_μ e θ com as mesmas técnicas que usamos para obter a ação (3.33). No presente caso, entretanto, a integração sobre a

componente longitudinal de a_μ produz um termo proporcional a $\det \rho$, que vem a cancelar o Jacobiano da transformação de variáveis (4.6)(4.7). A simplificação obtida é uma motivação técnica para empregarmos tal transformação de variáveis. No intuito de fazer este trabalho completamente autocontido e o mais didático possível, vamos novamente detalhar o cálculo das integrais.

Integração Sobre a_0

Coletando os termos em a_0 da ação (4.10), obtemos

$$i \int d^2x d\tau a_0 \left(\rho^2 - \frac{\pi}{\theta} (\vec{\nabla} \times \vec{a} + B) \right), \quad (4.11)$$

e a integração sobre a_0 em Z_1 fornece

$$\int Da_0 \exp \left(-i \int d^2x d\tau a_0 \left(\rho^2 - \frac{\pi}{\theta} (\vec{\nabla} \times \vec{a} + B) \right) \right) \approx \delta \left[\rho^2 - \frac{\pi}{\theta} (\vec{\nabla} \times \vec{a} + B) \right]. \quad (4.12)$$

A função partição se torna

$$\begin{aligned} Z = \mathcal{N} \exp \left(-\frac{i\pi}{2\theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda \right) \int D\rho D\theta D\vec{a} \det \rho \delta \left[\rho^2 - \frac{\pi}{\theta} (\vec{\nabla} \times \vec{a} + B) \right] \times \\ \times G_F(\rho, \theta, \vec{a}) \exp(-S_2[\rho, \theta, \vec{a}]), \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde

$$\begin{aligned} S_2 = \int d^2x d\tau \left(i \rho^2 \partial_\tau \theta + \mu \rho^2 + \right. \\ \left. - \frac{1}{2m} (\nabla \rho \cdot \nabla \rho + \rho^2 (\nabla \theta + \vec{a})^2) \right) + \\ - \frac{1}{2} \int d^2x d^2y d\tau (\rho^2(x) - \bar{\rho}^2) V(x-y) (\rho^2(y) - \bar{\rho}^2) + \\ - \frac{i\pi}{2\theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{i0j} a_i \partial_0 a_j - \frac{i\pi}{\theta} \int d^2x d\tau \epsilon^{ij} a_i E_j. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Integração Sobre \vec{a}

Decompondo \vec{a} em suas componentes longitudinal e transversal, como em (3.18),

$$a_i = \partial_i \varphi + \epsilon_{ij} \partial_j \eta \quad (4.15)$$

tal que

$$\mathcal{D}a_1 \mathcal{D}a_2 \longrightarrow \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\varphi \quad (4.16)$$

e usando a mesma fixação de gauge (3.9),

$$G_F = \delta(\theta(x)) , \quad (4.17)$$

obtemos

$$\begin{aligned} Z_3 = \mathcal{N} \exp \left(-\frac{i\pi}{2\theta} \int d^2 x d\tau \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda \right) \int D\rho D\varphi D\eta \det \rho \\ \delta \left[\rho^2 + \frac{\pi}{\theta} (\nabla^2 \eta - B) \right] \exp(-S_3[\rho, \varphi, \eta]), \end{aligned} \quad (4.18)$$

tal que

$$\begin{aligned} S_3 = & -\frac{1}{2m} \int d^2 x d\tau \rho^2 (\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi + \nabla\eta \cdot \nabla\eta) - \frac{i\pi}{\theta} \int d^2 x d\tau \varphi \partial_\tau \nabla^2 \eta + \\ & + \frac{i\pi}{\theta} \int d^2 x d\tau \left(\varphi (\nabla \times \vec{E}) + \eta (\nabla \cdot \vec{E}) \right) \\ & + \int d^2 x d\tau \left(\mu \rho^2 - \frac{1}{m} (\nabla\rho \cdot \nabla\rho) \right) + \\ & - \frac{1}{2} \int d^2 x d^2 y d\tau (\rho^2(x) - \bar{\rho}^2) V(x-y) (\rho^2(y) - \bar{\rho}^2). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Integrando na Componente Longitudinal φ

Selecionando os termos de S_3 que contém φ , obtemos (a menos de derivadas totais),

$$S_\varphi = \frac{1}{m} \int d^2 u d^2 v d\tau \varphi(u) \Theta(u, v) \varphi(v) + \int d^2 u d\tau \mathcal{J}(v) \varphi(u) , \quad (4.20)$$

onde

$$\Theta(u, v) \equiv \partial_i^{(v)} \left(\rho^2(v) \partial_i^{(v)} \delta(v - u) \right) \quad (4.21)$$

$$\mathcal{J}(u) \equiv -\frac{i\pi}{\theta} \left(\nabla \times \vec{E}(u) - \partial_0 \nabla^2 \eta(u) \right). \quad (4.22)$$

Por outro lado [62],

$$\int D\varphi \exp \left(-\frac{1}{2} \int \varphi \Theta \varphi + \mathcal{J} \varphi \right) = (\det \Theta)^{1/2} \exp \left(\frac{1}{4} \int \mathcal{J} \Theta^{-1} \mathcal{J} \right); \quad (4.23)$$

integrando sobre φ em Z_3 , obtemos

$$\begin{aligned} Z_4 &= \mathcal{N} \exp \left(-\frac{i\pi}{2\theta} \int d^2 x d\tau \epsilon^{\mu\nu\lambda} \Lambda_\mu \partial_\nu A_\lambda \right) \times \\ &\times \int D\rho D\eta \delta \left[\rho^2 + \frac{\pi}{\theta} (\nabla^2 \eta - B) \right] \exp(-S_4[\rho, \eta]), \end{aligned} \quad (4.24)$$

tal que

$$\begin{aligned} S_4 &= \int d^2 x d\tau \left(-\frac{\rho^2}{2m} \nabla \eta \cdot \nabla \eta + \frac{i\pi}{\theta} \eta (\nabla \cdot \vec{E}) + \mu \rho^2 - \frac{1}{2m} \nabla \rho \cdot \nabla \rho \right) + \\ &+ \frac{m}{4} \left(\frac{i\pi}{\theta} \right)^2 \int d^2 x d^2 y d\tau \left[(\nabla \times \vec{E}(x) - \partial_\tau \nabla^2 \eta(x)) \Theta^{-1}(x, y) \right. \\ &\quad \left. (\nabla \times \vec{E}(y) - \partial_0 \nabla^2 \eta(y)) \right] + \\ &- \frac{1}{2} \int d^2 x d^2 y d\tau (\rho^2(x) - \bar{\rho}^2) V(x - y) (\rho^2(y) - \bar{\rho}^2). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Observe que, ao utilizarmos (4.23), ganhamos um fator $(\det \Theta)^{-1/2}$, que se combina com o $\det \rho$ no integrando de Z_3 . Discretizando e limitando o espaço-tempo, podemos representar os operadores como matrizes discretas e finitas, obtemos

$$\frac{\det \rho}{\det(\nabla(\rho^2 \nabla))^{1/2}} \approx \frac{\det \rho}{(\det \nabla^2)^{1/2} \cdot (\det \rho^2)^{1/2}} \approx 1 \quad (4.26)$$

(a menos de um fator constante). Como é usual no formalismo de integrais funcionais, esperamos que este resultado continue a fazer sentido [50] ao tomarmos o limite de um espaço-tempo contínuo e infinito, obtendo assim (4.24). Este cancelamento do Jacobiano produz uma importante simplificação, eliminando termos como $Tr \ln(\vec{\nabla} \cdot \frac{\rho}{m} \vec{\nabla})$ da equação (3.26).

Integrando na Componente Transversal η

A integração na componente transversal torna-se muito simples, devido ao funcional δ de Dirac que implementa o vínculo de Chern-Simons. Igualando a zero o argumento deste funcional em (4.21), obtemos como solução

$$\nabla^2 \eta = B - \frac{\theta}{\pi} \rho^2 \longrightarrow \eta(x) = \int d^2 y G(x-y) \left(B(y) - \frac{\theta}{\pi} \rho^2(y) \right), \quad (4.27)$$

onde

$$\nabla_x^2 G(x-y) = \delta^{(2)}(x-y); \quad (4.28)$$

portanto,

$$\delta \left[\rho^2 - \frac{\pi}{\theta} (B - \nabla^2 \eta) \right] \approx \delta \left[\eta(x) - \frac{\theta}{\pi} \int d^2 y G(x-y) \left(B(y) - \frac{\theta}{\pi} \rho^2(y) \right) \right], \quad (4.29)$$

que pode ser usada diretamente em (4.25) e (4.24), fornecendo

$$Z(A_\mu) = \mathcal{N} \exp \left(\frac{i\pi}{2\theta} \int d^2 x d\tau \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda \right) \int D\rho \exp(-S_f[\rho]), \quad (4.30)$$

tal que

$$\begin{aligned} S_f &= -\frac{m\pi^2}{2\theta^2} \int d^2 x d^2 y d\tau \left(\frac{\theta}{\pi} \rho(x) \partial_\tau \rho(x) - \partial_\tau B(x) \right) \Theta^{-1}(x,y) \left(\frac{\theta}{\pi} \rho(y) \partial_\tau \rho(y) - \partial_\tau B(y) \right) + \\ &+ \int d^2 x d\tau \left(\rho(x) \left\{ \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right\} \rho(x) \right) \\ &- \frac{1}{2} \int d^2 x d^2 y d\tau \left(\rho^2(x) - \bar{\rho}^2 \right) V(x-y) \left(\rho^2(y) - \bar{\rho}^2 \right) \\ &- \int d^2 x d^2 y d\tau \left(\rho^2(x) - \frac{\pi}{\theta} B(x) \right) F(x,y) \left(\rho^2(y) - \frac{\pi}{\theta} B(y) \right) \\ &- \frac{\theta^2}{2m\pi^2} \int d^2 x d^2 y d^2 z d\tau \nabla_{(x)} G(x-y) \cdot \nabla_{(x)} G(x-z) \times \\ &\quad \times \left(\rho^2(x) - \frac{\pi}{\theta} B(x) \right) \left(\rho^2(y) - \frac{\pi}{\theta} B(y) \right) \left(\rho^2(z) - \frac{\pi}{\theta} B(z) \right) + \\ &- i \int d^2 x d^2 y d\tau G(x-y) \left(\nabla_{(x)} \cdot \vec{E}(x) \right) \left(\rho^2(y) - \frac{\pi}{\theta} B(y) \right), \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde

$$F(y, z) \equiv \frac{\theta}{2m\pi} \int d^2x B(x) \nabla_{(x)} G(x-y) \cdot \nabla_{(x)} G(x-z) . \quad (4.32)$$

A ação (4.31) é o resultado que estávamos procurando. O primeiro termo da ação é um termo cinético extremamente complicado; no entanto, este termo pode ser desprezado ao considerarmos somente soluções estáticas. A segunda linha de (4.31) tem a forma usual de um campo escalar em duas dimensões com interação de dois corpos representada pelo potencial $V(x)$. Sendo este um termo quadrático, leva-nos a um termo linear na equação diferencial — o que não acontece com o termo equivalente da eq. (3.33). Os termos restantes, representando interações de dois ou três corpos, são inteiramente análogos aos da ação (3.33). Outra diferença importante já mencionada é que na eq. (4.31) não existem termos altamente não-lineares como os encontrados em (3.33), e.g., $Tr \ln(\vec{\nabla} \cdot \frac{\rho}{m} \vec{\nabla})$.

4.2 Condições de Extremização da Ação Efetiva

Nesta seção estudaremos a extremização da ação S_f dada na eq. (4.31). Esta ação é bem geral, já que os campos elétrico e magnético são totalmente arbitrários. Para simplificar, vamos considerar o caso de um campo magnético uniforme e um campo elétrico sem divergência ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$) que é o caso relevante para o efeito Hall sem levar em conta a presença de impurezas. O intervalo de variação do valor de B deve ser tal que este corresponda a um fator de preenchimento aproximadamente igual $\nu = \pi/\theta$; portanto,

$$B(x) \equiv \frac{\theta}{\pi} \bar{\rho}^2 + \delta B , \quad (4.33)$$

onde δB representa um pequeno afastamento da condição de quantização .

Para a interação de dois corpos, consideraremos um potencial local do tipo

$$V(x - y) = K \delta^2(x - y) \quad (4.34)$$

onde K é uma constante.

Estamos interessados em configurações estáticas de carga, i.e., $\partial_\tau \rho(x) = 0$, pois nosso objetivo no momento é estudar situações de equilíbrio. Veremos que, embora as distribuições de carga sejam estáticas devido ao vínculo de Chern-Simons, estas induzirão distribuições de corrente não triviais.

Mediante as simplificações descritas acima, a ação efetiva (4.31) se torna

$$\begin{aligned} S_{est} = & \int d^2x d\tau \left(\rho(x) \left\{ \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right\} \rho(x) \right) - \frac{K}{2} \int d^2x d\tau \left(\rho^2(x) - \bar{\rho}^2 \right)^2 \\ & + \frac{\theta^2 \rho^2}{\pi^2 2m} \int d^2x d^2y d\tau \left(\rho^2(x) - \bar{\rho}^2 - \frac{\pi}{\theta} \delta B \right) G(x, y) \left(\rho^2(y) - \bar{\rho}^2 - \frac{\pi}{\theta} \delta B \right) \\ & - \frac{\theta^2}{2m\pi^2} \int d^2x d^2y d^2z d\tau \nabla_{(x)} G(x - y) \cdot \nabla_{(x)} G(x - z) \times \\ & \quad \times \left(\rho^2(x) - \bar{\rho}^2 - \frac{\pi}{\theta} \delta B \right) \left(\rho^2(y) - \bar{\rho}^2 - \frac{\pi}{\theta} \delta B \right) \left(\rho^2(z) - \bar{\rho}^2 - \frac{\pi}{\theta} \delta B \right) \quad (4.35) \end{aligned}$$

Para obtermos equações que extremizam esta ação é conveniente trabalharmos com quantidades adimensionais. Faremos então as seguintes transformações

$$\rho \rightarrow \bar{\rho} \rho \quad (4.36)$$

$$x \rightarrow \ell x \quad (4.37)$$

de tal forma que estaremos medindo as densidades em unidades de $\bar{\rho}$ e os comprimentos em unidades do comprimento magnético $\ell = 1/\sqrt{B}$. É bom lembrar que, nestas unidades, o fator de preenchimento é um número adimensional dado por $\nu = (\bar{\rho}\ell)^2$.

Expressando a ação (4.35) em termos de grandezas adimensionais apenas, obtemos

$$\begin{aligned}
S_{ad} = & \left(\frac{\nu}{m\ell} \right) \left\{ \int d^2x d\tau \frac{1}{2} \rho(x) \{ \nabla^2 - \mu \} \rho(x) - \frac{\lambda}{4} \int d^2x d\tau (\rho^2(x) - 1)^2 \right. \\
& + \frac{1}{2} \int d^2x d^2y d\tau (\rho^2(x) - 1 - \delta\nu) G(x, y) (\rho^2(y) - 1 - \delta\nu) \\
& - \frac{1}{2} \int d^2x d^2y d^2z d\tau \nabla_{(x)} G(x - y) \cdot \nabla_{(x)} G(x - z) \times \\
& \left. \times (\rho^2(x) - 1 - \delta\nu) (\rho^2(y) - 1 - \delta\nu) (\rho^2(z) - 1 - \delta\nu) \right\} \quad (4.38)
\end{aligned}$$

onde os parâmetros μ , λ e $\delta\nu \propto \delta B$ foram convenientemente redefinidos para torná-los adimensionais. Todas as grandezas que aparecem em (4.38) são adimensionais; μ é o potencial químico, λ a constante de acoplamento e $\delta\nu$ representa pequenos afastamentos do fator de preenchimento $\nu = \pi/\theta$.

Uma primeira observação importante em relação a (4.38) é que o fator de preenchimento entra como um fator global. Isto implica que a estrutura das equações de movimento não depende de ν , desde que este tome os valores $\nu = \pi/\theta$. Portanto, a densidade de carga não depende do valor particular de ν , quando o sistema se encontra sobre um *plateaux*. Voltaremos a este ponto no estudo das equações diferenciais.

Estamos agora em condições de escrever a equação que extremiza a ação S_{ad} ,

$$\frac{\delta S_{ad}}{\delta \rho(u)} = 0, \quad (4.39)$$

onde S_{ad} é dada por (4.38). Efetuando explicitamente as derivadas funcionais, obtemos

$$\begin{aligned}
& (\nabla^2 - \mu) \rho(x) - \lambda \rho(x) (\rho^2(x) - 1) + 2\rho(x) \int d^2y G(x, y) (\rho^2(y) - 1 - \delta\nu) - \\
& - \rho(x) \int d^2y d^2z \nabla_{(x)} G(x - y) \cdot \nabla_{(x)} G(x - z) (\rho^2(y) - 1 - \delta\nu) (\rho^2(z) - 1 - \delta\nu) \\
& - 2\rho(x) \int d^2y d^2z \nabla_{(y)} G(y - z) \cdot \nabla_{(y)} G(y - x) (\rho^2(y) - 1 - \delta\nu) (\rho^2(z) - 1 - \delta\nu) = 0
\end{aligned} \quad (4.40)$$

Esta equação é uma equação integro-diferencial não-linear para a densidade de carga. Para avançar um pouco na sua compreensão, mostraremos que ela pode ser transformada em um sistema de equações diferenciais onde cada termo possui um significado físico muito claro.

4.3 Um Sistema de Equações Diferenciais Parciais para a Densidade de Carga

É possível reescrevermos a equação integro-diferencial (4.40) na forma de um sistema de equações diferenciais parciais. O terceiro termo da equação (4.40) sugere a definição de um campo $\psi(x)$

$$\psi(x) \equiv \int d^2y G(x-y) (\rho^2(y) - 1 - \delta\nu) . \quad (4.41)$$

Ao aplicarmos a ψ o operador laplaciano

$$\nabla^2\psi(x) = \int d^2y \underbrace{\nabla^2 G(x-y)}_{\delta^{(2)}(x-y)} (\rho^2(y) - 1 - \delta\nu) , \quad (4.42)$$

obtemos a seguinte equação diferencial para ψ :

$$\nabla^2\psi(x) = (\rho^2(x) - 1 - \delta\nu) . \quad (4.43)$$

Por outro lado, o último termo da equação (4.40) pode ser reescrito como

$$-2\rho(x) \int d^2y (\rho^2(y) - 1 - \delta\nu) \nabla_{(y)} G(y-x) \cdot \nabla_{(y)} \psi(y), \quad (4.44)$$

o que sugere a definição de um campo $g(x)$

$$g(x) \equiv 2 \int d^2y \nabla_{(y)} G(y-x) \cdot \nabla_{(y)} \psi(y) (\rho^2(y) - 1 - \delta\nu) . \quad (4.45)$$

Aplicando o operador laplaciano a $g(x)$ obtemos

$$\nabla^2 g(x) \equiv -2 \int d^2 y \nabla_{(y)} \delta(y-x) \cdot \nabla_{(y)} \psi(y) (\rho^2(y) - 1 - \nu \delta B). \quad (4.46)$$

Integrando o $\nabla_{(y)} \delta(y-x)$ e usando a equação (4.43), obtemos uma equação diferencial da forma

$$\nabla^2 g(x) = 2 (\rho(x)^2 - 1 - \delta\nu)^2 + 2 \nabla \psi(x) \cdot \nabla(\rho^2(x)). \quad (4.47)$$

Deste modo, podemos reescrever a eq. integro-diferencial (4.40) junto com (4.43) e (4.47) na forma do sistema de equações diferenciais

$$(\nabla^2 - \mu) \rho(x) - \lambda \rho(x) (\rho^2(x) - 1) + \rho(x) \psi(x) - \rho(x) |\vec{\nabla} \psi(x)|^2 - \rho(x) g(x) = 0 \quad (4.48)$$

$$\nabla^2 \psi(x) = 2 (\rho^2(x) - 1 - \delta\nu) \quad (4.49)$$

$$\nabla^2 g(x) = 2 (\rho(x)^2 - 1 - \delta\nu)^2 + 2 \nabla \psi(x) \cdot \nabla(\rho^2(x)). \quad (4.50)$$

As configurações de carga que minimizam a ação (4.38) devem satisfazer este sistema. É possível agora entender melhor o efeito da integração sobre os campo de Chern-Simons sobre as equações diferenciais do sistema. Os primeiros dois termos da equação (4.48) são os termos usuais da teoria de Landau-Ginzburg para a supercondutividade bosônica. Ela representa bósons carregados com acoplamento quártico. O fato de termos integrado nos campos de gauge gerou os novos acoplamentos com os campos $\psi(x)$ e $g(x)$. O campo ϕ tem uma interpretação muito clara: ele é o potencial eletromagnético gerado pelas flutuações de carga $\delta\rho = \rho^2(x) - 1$, como pode ser comprovado pela equação (4.49). Este

potencial gera o acoplamento usual com a carga, $\rho\psi$, além de um novo acoplamento com a densidade de energia do campo elétrico $|\vec{\nabla}\psi|^2$.

O papel desempenhado pelo campo $g(x)$ é ainda mais interessante. Devido à existência de um vínculo entre a densidade de carga e fluxos de campo magnético, uma flutuação de carga deve estar associada à presença de correntes em torno desta flutuação. Para entender melhor este fenômeno, podemos reescrever o campo $g(x)$ dado pela eq. (4.45) na forma

$$g(x) = \int d^2y d^2z \nabla_{(y)} G(y-x) \cdot \nabla_{(y)} G(y-z) \left(\rho^2(y) - 1 - \nu\delta B \right) \left(\rho^2(z) - 1 - \delta\nu \right), \quad (4.51)$$

onde usamos a forma explícita de ψ dada por (4.41). A expressão (4.51) para $g(x)$ deve ser comparada com a eq. (3.44) que define a corrente topológica (3.43). Estas expressões coincidem, quando escritas nas unidades adequadas. No capítulo 3, na determinação da resposta eletromagnética, surgiu uma corrente topológica envolvendo detalhes da dinâmica do sistema (eq. (3.43)). Esta corrente topológica pode ser reescrita de forma adimensional,

$$J_i^T = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{m\ell} \right) \epsilon_{ij} \partial_j g(x), \quad (4.52)$$

e, por ser topológica, sua divergência é automaticamente nula. O seu rotacional é

$$\vec{\nabla} \times \vec{J}^T = -\frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{m\ell} \right) \nabla^2 g(x). \quad (4.53)$$

Portanto, podemos reescrever a equação (4.50) como

$$\vec{\nabla} \times \vec{J}^T = - \left(\frac{\nu}{m\ell} \right) \left\{ \left(\rho(x)^2 - 1 - \delta\nu \right)^2 + \nabla\psi(x) \cdot \nabla(\rho^2(x)) \right\} \quad (4.54)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}^T = 0 \quad (4.55)$$

Vemos então que qualquer flutuação de densidade é uma fonte para o rotacional de corrente, estando associadas a flutuações de fluxos magnéticos com correntes induzidas ao

seu redor. Este é o sentido físico do campo $g(x)$; ele se relaciona estreitamente com a dinâmica do campo de Chern-Simons, que foi integrado na função partição .

4.4 Propriedades das Soluções

As soluções do sistema de equações diferenciais (4.48,4.49,4.50) representam a estrutura de densidade de cargas e correntes estáticas que extremizam a ação efetiva (4.38) da teoria de CSLG. Este sistema é bastante complexo, contendo inúmeras soluções dependendo dos parâmetros das equações e das condições de contorno. Não é objetivo do presente trabalho apresentar um estudo completo e detalhado de todas as situações possíveis. Nos limitaremos aqui a apresentar o sistema de equações e sua interpretação física, fazer uma análise de suas soluções nos casos mais simples, deixando para o futuro uma análise mais exaustiva.

Um problema físico interessante que pode ser estudado com estas equações é a natureza das transições de fase entre *plateaux* adjacentes. Isto seria possível ao estudarmos o comportamento da densidade de carga como função de $\delta\nu$. Este estudo é extremamente complicado, já que para $\delta\nu \neq 0$ não existem soluções homogêneas. Isto significa que na transição entre *plateaux*, a invariância do sistema perante translações é espontaneamente quebrada. Fica então a pergunta: qual o estado fundamental do sistema, nesta situação? Têm havido diferentes propostas para a estrutura deste estado como, por exemplo, cristais de Wigner, ondas de densidade de carga, etc. Este problema ainda se encontra em aberto, atualmente. Em nosso contexto, a dificuldade técnica consiste em resolver o sistema de equações proposto sem supor alguma simetria para a solução. No caso das transições entre *plateaux*, não dispomos ainda de uma visão física clara o suficiente para propormos uma simetria; então , quaisquer tentativas estariam baseadas num espaço de possíveis soluções demasiadamente extenso. A partir do sistema de equações obtido aqui, no en-

tanto, podemos fazer algumas observações gerais e não-triviais. A primeira observação é que o sistema de equações possui apenas *três* parâmetros: o potencial químico μ , a constante de acoplamento λ e o parâmetro $\delta\nu$. A rigor, no entanto, temos somente *dois* parâmetros, já que μ e $\delta\nu$ são mutuamente dependentes (ambos são usados para fixar a densidade de carga). De qualquer forma, será útil para a nossa análise escrevê-los como dois parâmetros distintos, sempre levando em conta esta observação. Para deduzir as equações diferenciais, estabelecemos valores para o fator de preenchimento da forma

$$\nu = \frac{1}{2k+1} + \delta\nu \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.56)$$

No entanto, como já havíamos adiantado, as soluções das equações diferenciais *não* dependem explicitamente do valor de k . Isto significa que todas as propriedades estáticas da densidade de cargas e correntes não dependem de qual *plateau* em particular estejamos considerando. Existe, portanto, uma universalidade [63] no comportamento das transições entre *plateaux*. Conjectura-se que ela poderia estar relacionada às propriedades de transformação da teoria frente ao grupo modular [64]. Tais observações são bastante recentes e ainda têm o caráter de conjecturas. Qualquer avanço na compreensão das soluções do nosso sistema de equações neste regime poderia constituir um esclarecimento sobre esta universalidade.

Um regime mais simples de ser analisado é o caso de $\mu = 0$ e $\delta\nu = 0$, ou seja, quando o fator de preenchimento é exatamente $\nu = \frac{1}{2k+1}$. Neste caso, tanto a interação de Coulomb quanto as interações induzidas pelo campo de Chern-Simons são neutralizadas pela mesma densidade de carga de fundo, implicando na existência de soluções homogêneas. Analisando as equações (4.48,4.49,4.50), fica evidente que a única solução homogênea possível é $\rho(x) = 1$. Esta densidade homogênea representa o já conhecido líquido incompressível de Laughlin, que havíamos obtido também nas soluções das equações de campo médio. Aque,

porém, obtivemos um ganho na compreensão do modelo, pois fica clara a estabilidade desta solução na presença de flutuações quânticas (representadas, neste formalismo, pelos campos $\psi(x)$ e $g(x)$). A estabilidade desta solução depende, essencialmente, do valor do potencial químico, responsável pela geração de uma densidade finita de carga de fundo — impedindo que as cargas se afastem infinitamente uma das outras devido à repulsão de Coulomb. Para um análise mais detalhada da estabilidade, vamos introduzir ainda algumas simplificações .

4.4.1 Soluções com Simetria Polar

É de se esperar que as soluções de mais baixa energia possuam o máximo grau de simetria possível. Portanto, para simplificar a nossa análise, vamos propor um conjunto de soluções com simetria polar, i.e.,

$$\rho(x) \equiv \rho(r) \quad , \quad \psi(x) \equiv \psi(r) \quad , \quad g(x) \equiv g(r). \quad (4.57)$$

Com esta proposta, o sistema de equações diferenciais parciais (4.48,4.49,4.50) se transforma no sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\left(\frac{d^2 \rho(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\rho(r)}{dr} \right) - \mu\rho(r) - \lambda\rho(r) (\rho^2(r) - 1) + \rho(r)\psi(r) - \rho(r)\left(\frac{d\psi(r)}{dr}\right)^2 - \rho(r)g(r) = 0 \quad (4.58)$$

$$\left(\frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi(r)}{dr} \right) = 2 (\rho^2(r) - 1 - \delta\nu) \quad (4.59)$$

$$\left(\frac{d^2 g(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg(r)}{dr} \right) g(x) = 2 (\rho(x)^2 - 1 - \delta\nu)^2 + 2\nabla\psi(r) \cdot \nabla(\rho^2(r)). \quad (4.60)$$

Analisemos primeiramente as soluções homogêneas deste sistema. É simples observar que para que os campos $\psi(r)$ e $g(r)$ tenham soluções finitas, é necessário que

$$\rho^2(r) = 1 + \delta\nu \quad (4.61)$$

Com este valor para ρ e exigindo que os campos $\psi(r)$ e $g(r)$ se anulem em $r \rightarrow \infty$, o sistema de equações diferenciais fica reduzido a um *vínculo* entre os parâmetros da teoria. De (4.58) temos que

$$\mu (1 + \delta\nu)^{1/2} + \lambda (1 + \delta\nu)^{1/2} \delta\nu = 0 , \quad (4.62)$$

o que implica em

$$\mu = -\lambda\delta\nu . \quad (4.63)$$

Como já tínhamos adiantado, μ e $\delta\nu$ *não* são parâmetros independentes. Note que ajustando $\delta\nu$ somente, podemos ajustar a densidade de carga para $\rho = 1 + \delta\nu$, desde que escolhamos apropriadamente o potencial químico. Em particular, para $\delta\nu = -1$ e $\mu = \lambda$, a densidade é $\rho = 0$ - ou seja, não há cargas no sistema. Embora esta solução possa parecer trivial, ela é muito útil para definir uma “borda” para o sistema, e conseguir trabalhar com sistemas quânticos finitos.

Gostaríamos de exemplificar o comportamento de nosso sistema de equações diferenciais para o caso de uma amostra finita. Aproveitando a simplificação oferecida pela simetria polar, vamos escolher uma geometria circular de raio R para nossa amostra. Temos então o problema de estabelecer condições de contorno sobre os campos em $r = R$. Estas condições não são óbvias, já que o sistema de equações em questão foi obtido após uma série de integrações nos campos submetidos a condições assintóticas ($r \rightarrow \infty$); neste processo, perdemos todas as informações sobre quaisquer versões finitas do sistema. No

entanto, existe uma forma simples (e até mais razoável do ponto de vista físico), de implementar esta “borda”. A idéia física é que fora de certa região do espaço a densidade de carga é nula. Em outras palavras, existe uma “barreira de potencial” que confina as cargas a uma região finita do espaço (do plano, no caso). Esta barreira de potencial pode ser implementada através de um potencial químico dependente de r , $\mu(r)$. No interior (*bulk*) da amostra podemos supor que $\mu = 0$ e $\delta\nu = 0$, o que estabelece uma solução homogênea com $\rho(r) = 1$ para esta região. A partir de certo valor do raio $r = R$ propomos funções crescentes e suaves $\mu(r)$ e $\delta\nu(r) = -\mu(r)/\lambda$, de tal forma que se estabeleça uma sucessão de soluções “homogêneas” e “adiabaticamente decrescentes”, dentro de um certo intervalo de r . Quando o potencial químico atinge o valor $\mu = \lambda$ e $\delta\nu = -1$, a única solução homogênea possível é $\rho(r) = 0$. No caso que $\mu(r) > \lambda$, o vínculo usado entre μ e $\delta\nu$ já não é satisfeito, fixando o valor de $\delta\nu = -1$; isto evita que a densidade de fundo troque de sinal e desestabilize o sistema. Como exemplo, consideraremos as funções

$$\mu(r) = \alpha(r - R)^2 \Theta(r - R) \quad (4.64)$$

$$\delta\nu(r) = -\frac{\mu(r)}{\lambda} \Theta(\lambda - \mu) - 1 \times \Theta(\mu - \lambda) \quad (4.65)$$

onde α é uma constante, e Θ é a função de Heaviside. Com estas funções podemos trabalhar com o sistema de equações no espaço infinito, exigindo apenas que os campos sejam nulos em $r \rightarrow \infty$.

4.4.2 Tratamento Numérico Das Equações Diferenciais

Todas as idéias expostas neste capítulo foram implementadas através de abordagem numérica ao sistema de equações ordinárias (4.58,4.59,4.60) com o potencial químico μ e $\delta\nu$ dados pelas eqs. (4.64) e (4.65). As condições de contorno são tais que todos os campos se anulam quando $r \rightarrow \infty$, e a derivada radial $\frac{d\rho}{dr}$ é nula em $r = 0$ — estamos

procurando soluções “suaves” no plano. Com a introdução de três campos auxiliares, o sistema é facilmente reduzido a um sistema de seis equações não-lineares acopladas e de primeira ordem. Este último foi tratado através do método de Runge-Kutta de quarta ordem, e os resultados para $\rho(r)$ e para o rotacional da corrente topológica (4.53) são mostrados nas figuras (4.1),(4.2),(4.3), (4.4),(4.5), (4.6),(4.7),(4.8) para diferentes valores dos parâmetros.

Na figura (4.1) mostramos a densidade de carga no caso em que o fator de preenchimento é exatamente $\nu = \pi/\theta$; i.e., ($\mu = 0$ e $\delta\nu = 0$ no interior da amostra). Como já esperávamos, a solução representa uma densidade constante no interior da amostra e decresce continuamente, tendendo a zero a partir do ponto em que principia a barreira de potencial. A partir deste cálculo, podem ser estudadas algumas das propriedades dos estados de borda, já discutidos no capítulo anterior. Para isto, construímos o gráfico do rotacional da corrente induzida pelas flutuações, dado pela eq. (4.53). O resultado é o da figura (4.2). Vemos que o rotacional da corrente está concentrado, precisamente, na borda da amostra. É muito interessante compreender a estrutura destas correntes. O rotacional está associado a um movimento circular de cargas, e o seu sinal está relacionado ao sentido deste movimento. Portanto, a figura (4.2) representa anéis concêntricos de corrente com sentidos de circulação contrários, na região vizinha à borda da amostra circular. As partes positiva e negativa do rotacional se compensam, tal que a corrente total é nula — fato já discutido ao calcularmos a resposta eletromagnética exata da teoria. As equações (3.55), (3.56) e (3.57) representam, efetivamente, o cancelamento de correntes do *bulk* e da borda da amostra, sendo este o fato determinante para a quantização exata da condutividade. Com este cálculo numérico, observamos novamente o mesmo fenômeno que tínhamos descoberto de forma analítica; mais ainda, descobrimos que o mecanismo de cancelamento das correntes tem estrutura bem mais complexa do que as dadas pelas eqs.

(3.55) , (3.56) e (3.57).

Nas figuras (4.3) e (4.5) calculamos a densidade de carga quando os valores da densidade c do campo magnético são tais que promovem um ligeiro afastamento da condição de quantização $\nu = \pi/\theta$. Para fazer este cálculo, introduzimos um pequeno desvio $\delta\tilde{\nu}$ em relação à equação (4.65), tomando

$$\delta\nu(r) = \left(-\frac{\mu(r)}{\lambda} + \delta\tilde{\nu} \right) \Theta(\lambda - \mu) - 1 \times \Theta(\mu - \lambda) \quad (4.66)$$

utilizando para $\mu(r)$ o valor dado pela equação (4.64).

Os resultados para $\delta\tilde{\nu} = 0.20$ e $\delta\tilde{\nu} = 0.38$ são mostrados nas figuras (4.3) e (4.5). A primeira observação é que o sistema tenta estabilizar-se em torno de uma solução $\rho < 1$, a saber, $\rho = 1 - \delta\tilde{\nu}$, à medida que nos aproximamos da borda da amostra. Isto acontece porque as interações de longo alcance (introduzidas pelo campo de gauge de Chern-Simons) geram uma densidade de fundo precisamente neste valor $\bar{\rho} = -1$. Por outro lado, nas regiões vizinhas a $r = 0$, a interação dominante é a dada pelo termo local quártico das equações de movimento, já que estas contém um potencial (vide eq.(4.34)) do tipo $V(x - y) \propto \delta(x - y)$. Em outras palavras, perto da origem o sistema “puxa” a densidade de carga para $\rho = 1$. Nestas condições, não existe uma solução homogênea no interior da amostra; o que se obtém é o acúmulo de carga perto da origem. Isto dá lugar ao aparecimento de correntes não nulas no sistema, como pode ser comprovado a partir das figuras (4.4) e (4.6), que mostram o rotacional da corrente para os dois casos mencionados. Podemos observar que na borda o comportamento é semelhante ao caso em que o fator de preenchimento é exatamente $\nu = \pi/\theta$; perto da origem, porém, existem correntes circulares concêntricas já que *não* se cancelam, dando lugar a uma corrente efetiva não-nula no sistema. Observe também que a simetria de translação foi quebrada dentro da amostra, devido à não-homogeneidade. Para $\delta\tilde{\nu} > 0.38$, não achamos nenhuma

solução estável, o que indica uma quebra espontânea da simetria polar, invalidando o *ansatz* utilizado para determinar as soluções do sistema (4.48, 4.49, 4.50). Finalmente, as figuras (4.7) e (4.8) mostram o mesmo tipo de comportamento para $\delta\tilde{\nu} = -0.20$. A única diferença é que, neste caso, o sistema tende a estabilizar-se em torno de uma densidade $\rho > 1$ mostrando que seu comportamento é simétrico para variações positivas e negativas do fator de preenchimento.

Analisando os resultados numéricos, podemos concluir que o estado fundamental do sistema para o regime $\nu = \pi/\theta$ é, de fato, homogêneo — inclusive para amostras finitas e na presença de flutuações quânticas do campos de gauge. Em relação aos efeitos de borda, confirmamos o fato de que, neste regime, as correntes induzidas na borda são canceladas por aquelas do interior do sistema. O mecanismo de cancelamento, porém, não é trivial, produzindo uma estrutura de correntes concêntricas de circulação positiva e negativa, alternadamente. Para pequenos afastamentos da condição de quantização, observamos que as soluções não são mais homogêneas, quebrando-se espontaneamente a simetria de translação. Neste regime, existem correntes circulares em torno do centro da amostra que não se compensam, produzindo uma corrente efetiva permanente no sistema. Para afastamentos ainda maiores do fator de preenchimento, o sistema também quebra a simetria perante rotações, sendo necessário analisar o sistema completo de equações diferenciais parciais.

Obviamente, a presente análise não visa esgotar todas as possibilidades deste sistema de equações. Por outro lado, é altamente não-trivial o estudo do sistema completo, sem um *ansatz* para sua solução. No futuro avançaremos no estudo deste tipo de problema, utilizando diferentes técnicas de cálculo (analítico e numérico) para tentarmos compreender melhor a estrutura das configurações de campo de teorias envolvendo o vínculo de Chern-Simons. Os resultados desta seção serão submetidos à publicação em breve.

Figura 4.1: Densidade de carga no interior de uma amostra circular nas condições $\mu = 0$ $\delta\nu = 0$. Os outros parâmetros utilizados são $\lambda = 3$ e $R = 140$.

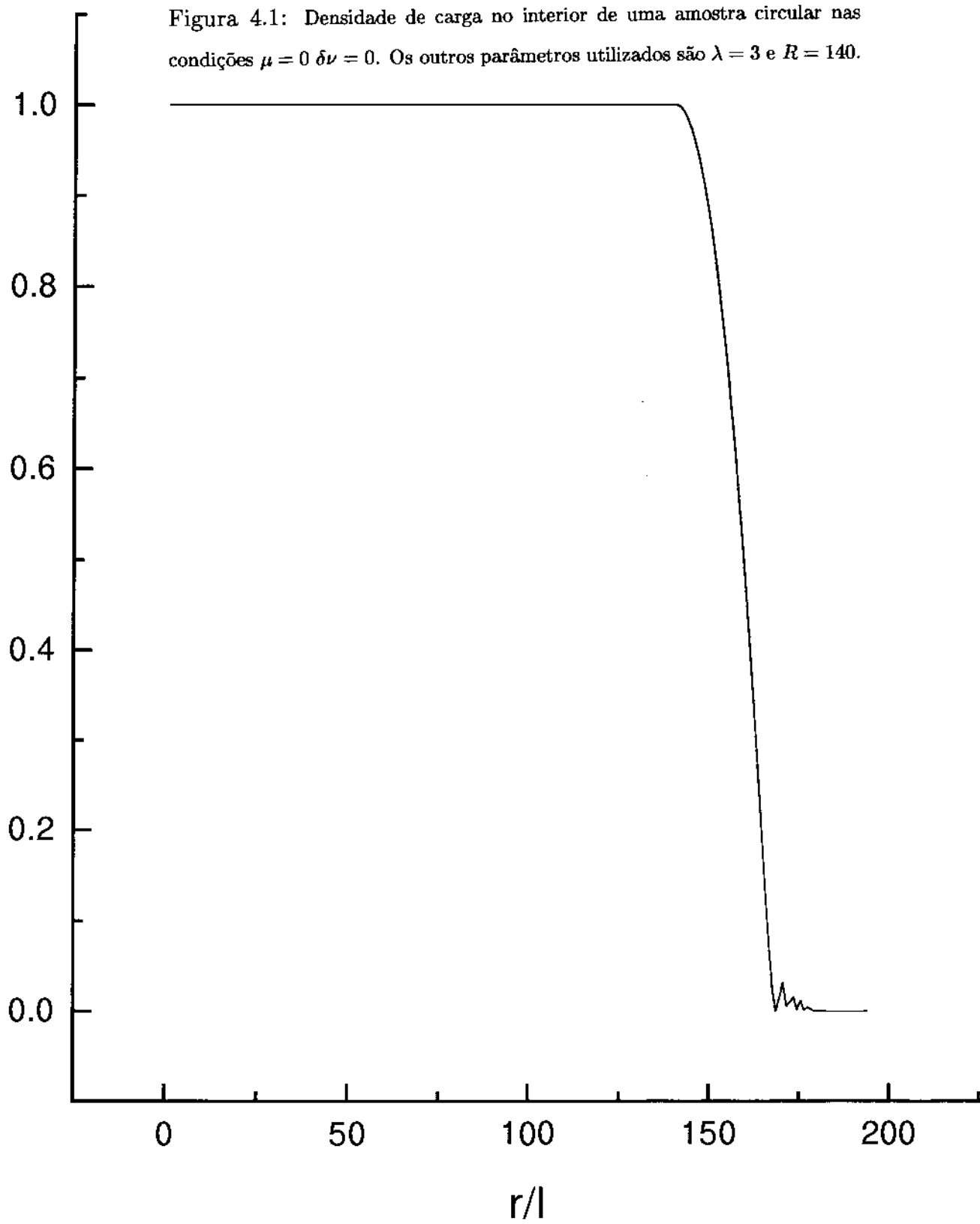
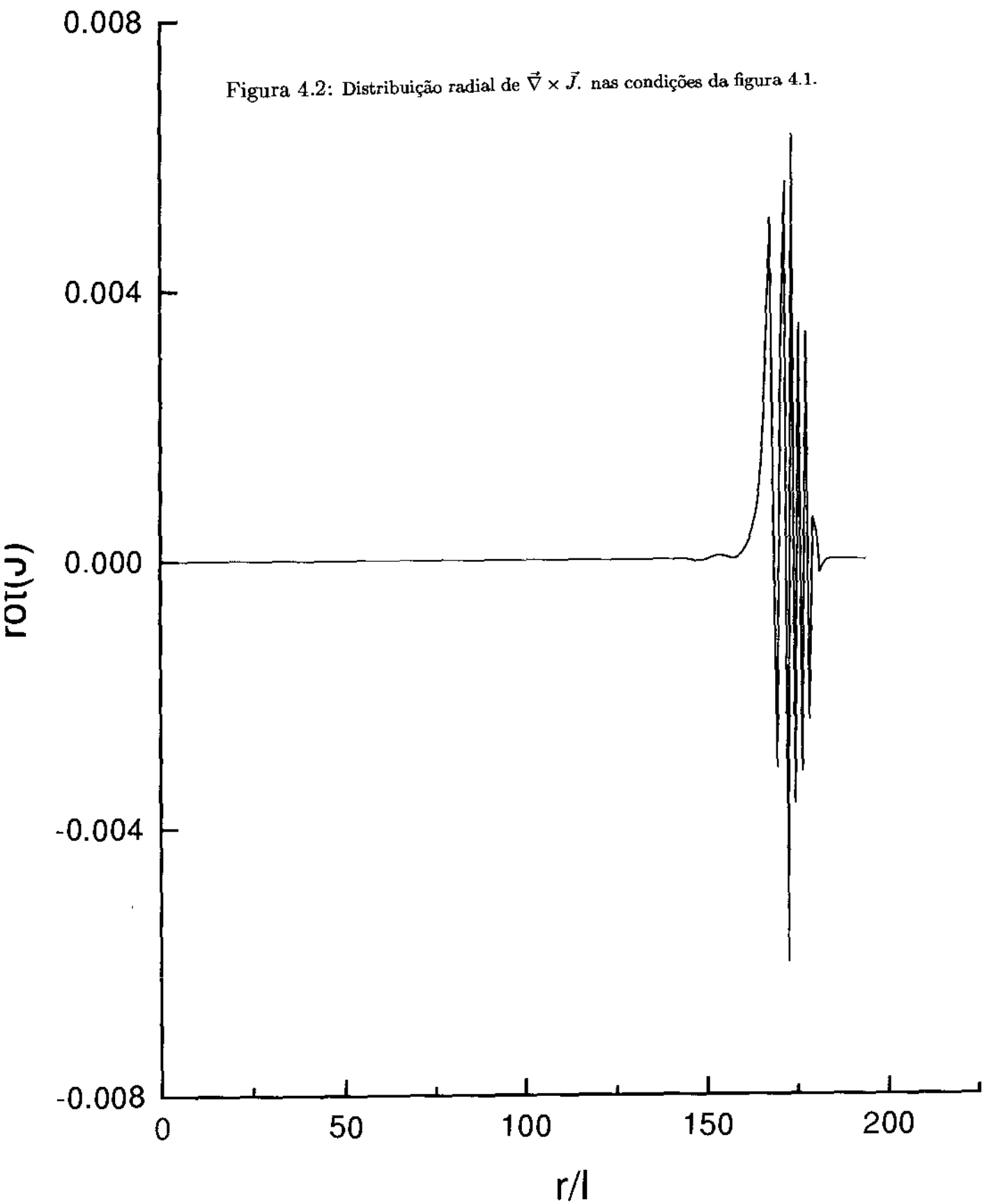


Figura 4.2: Distribuição radial de $\vec{\nabla} \times \vec{J}$. nas condições da figura 4.1.



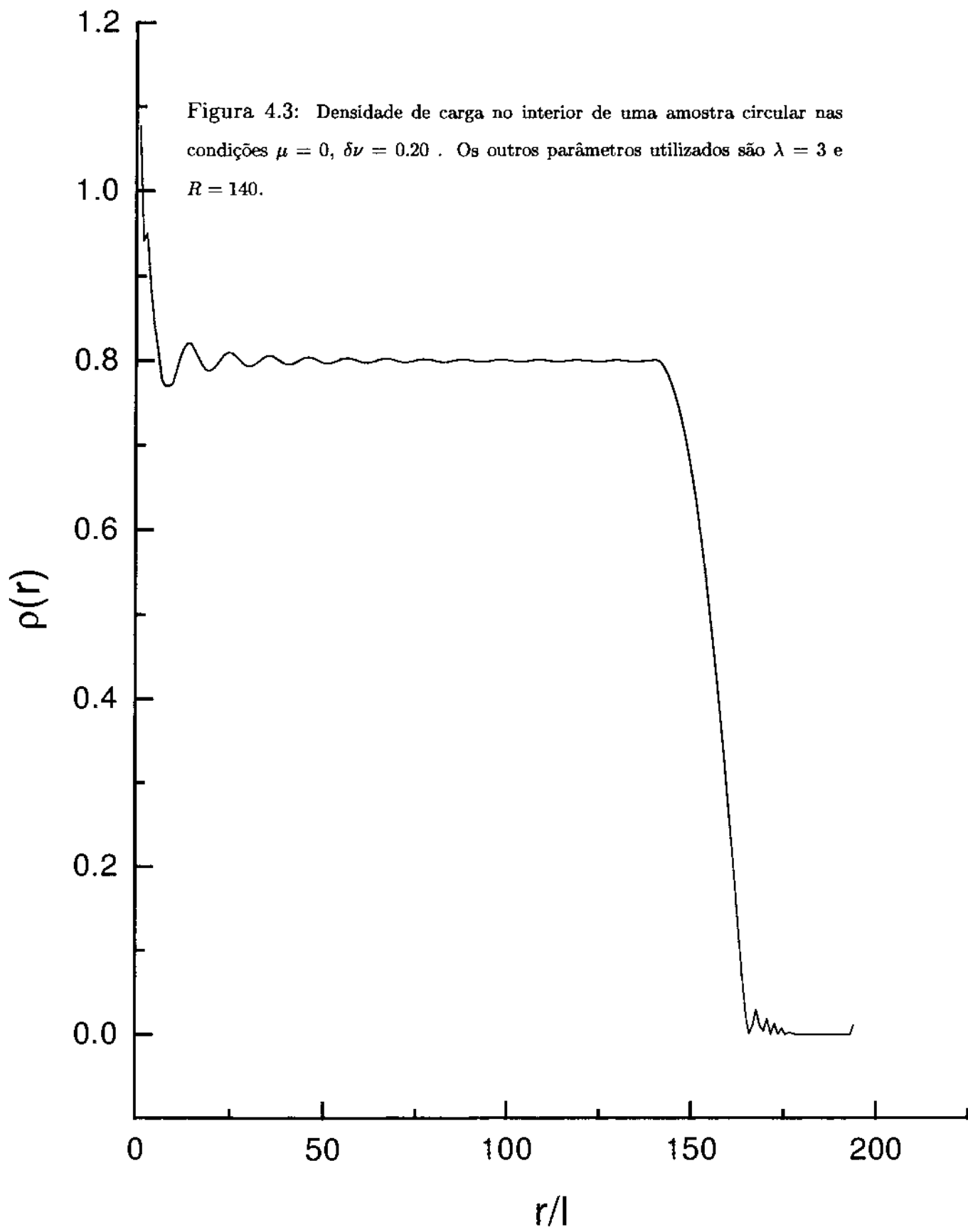


Figura 4.4: Distribuição radial de $\vec{\nabla} \times \vec{J}$, nas condições da figura 4.3.

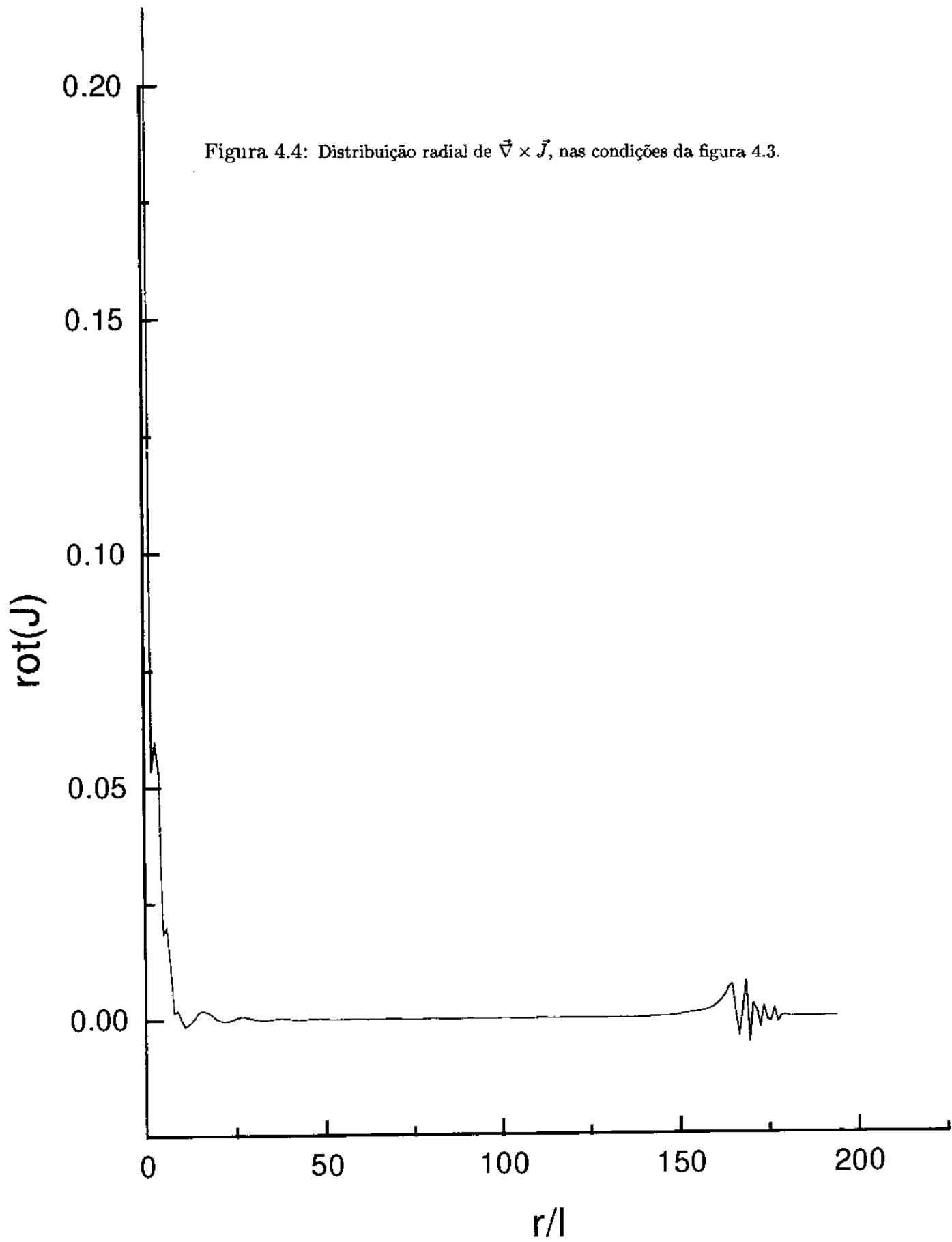


Figura 4.5: Densidade de carga no interior de uma amostra circular nas condições $\mu = 0$, $\delta\nu = 0.38$. Os outros parâmetros utilizados são $\lambda = 3$ e

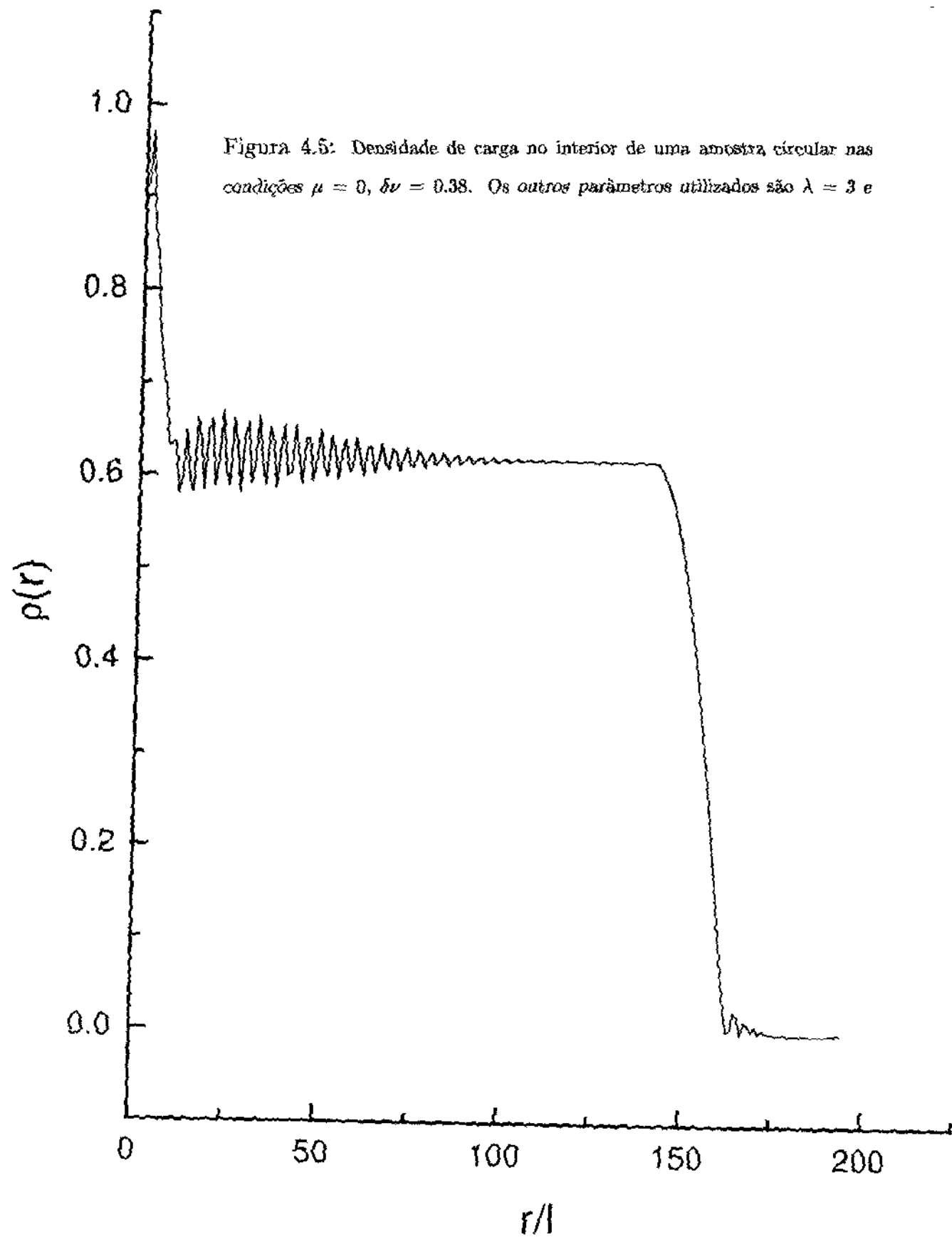


Figura 4.6: Distribuição radial de $\vec{\nabla} \times \vec{J}$, nas condições da figura 4.5.

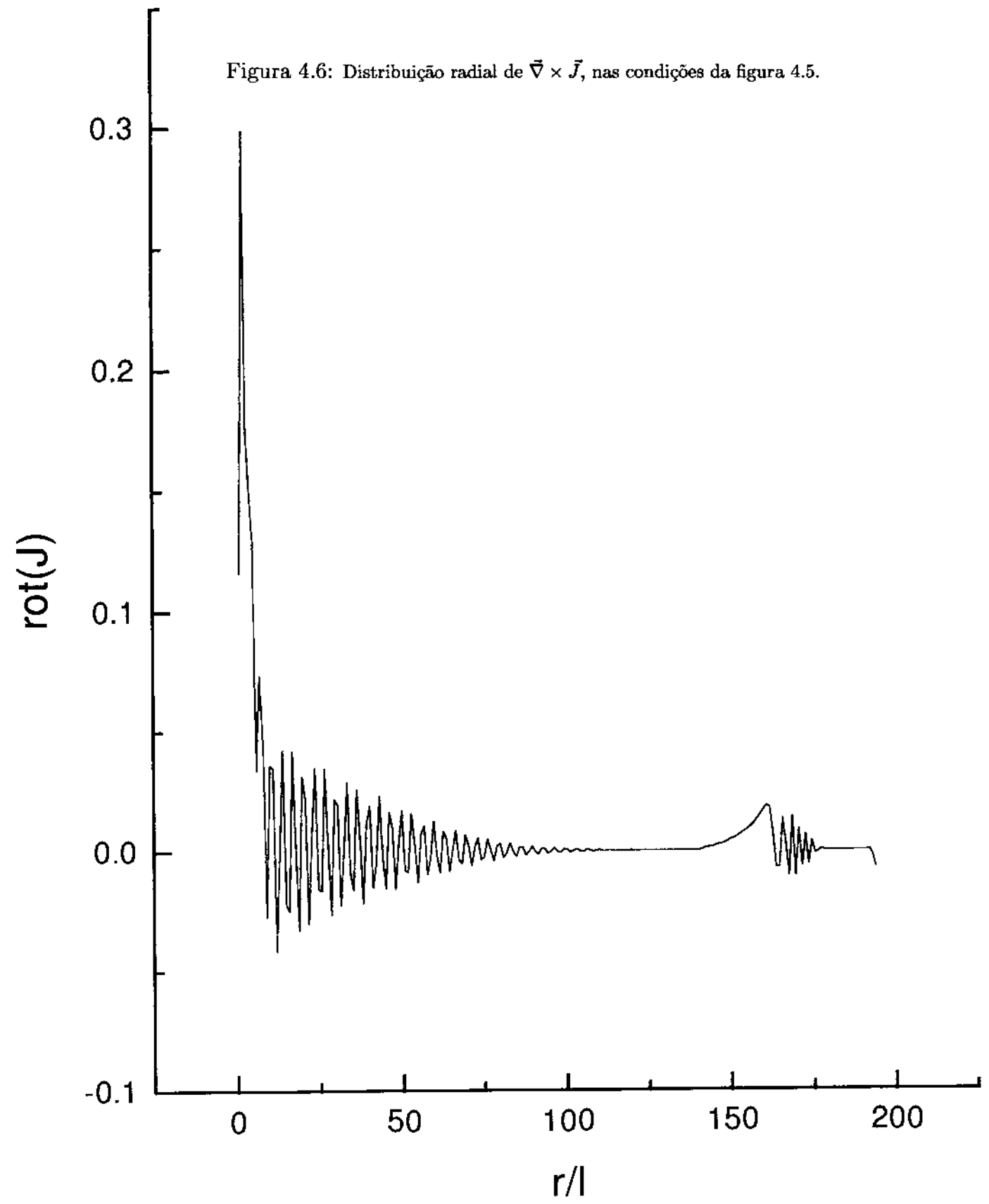


Figura 4.7: Densidade de carga no interior de uma amostra circular nas condições $\mu = 0$, $\delta\nu = -0.20$. Os outros parâmetros utilizados são $\lambda = 3$ e $R = 140$.

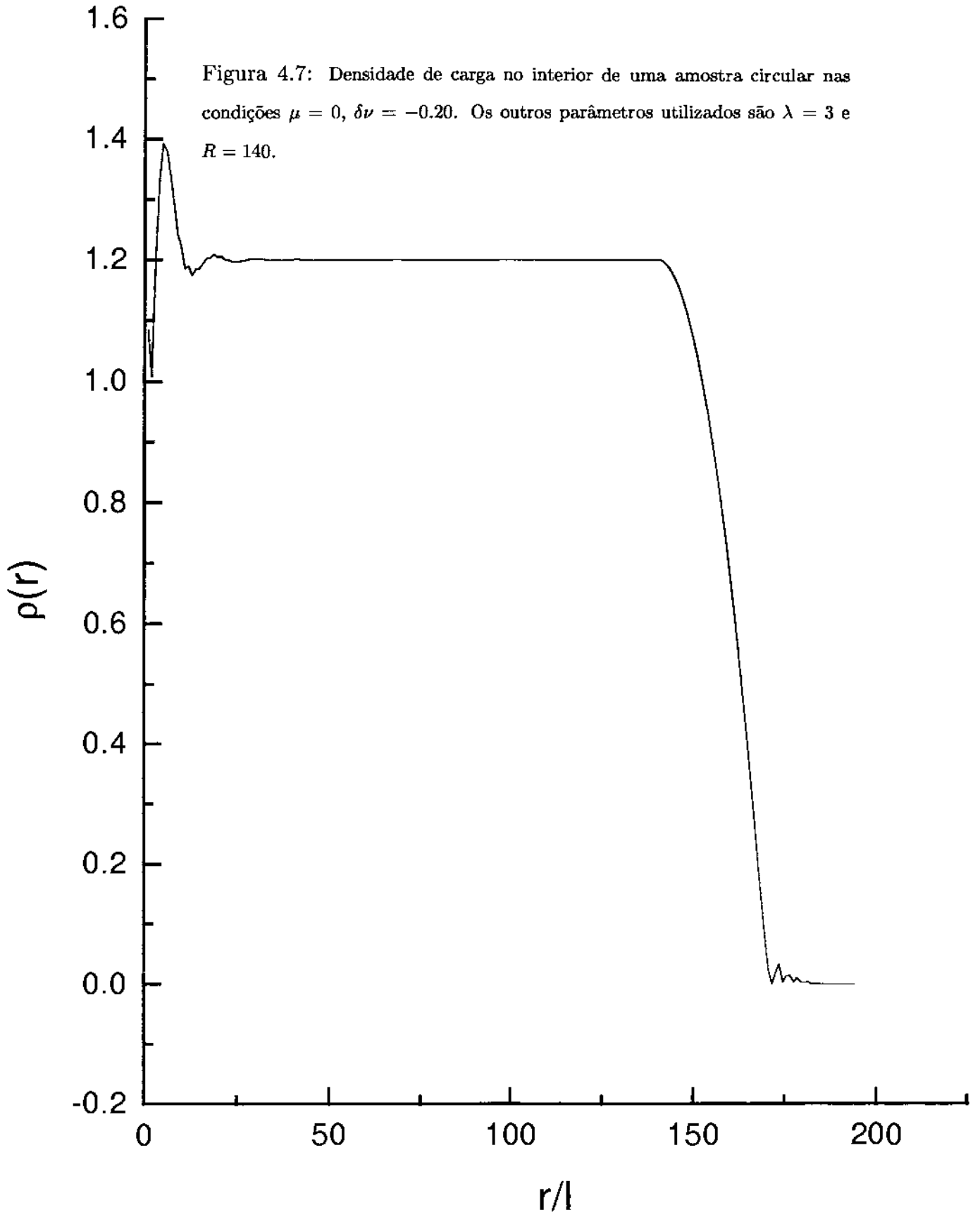
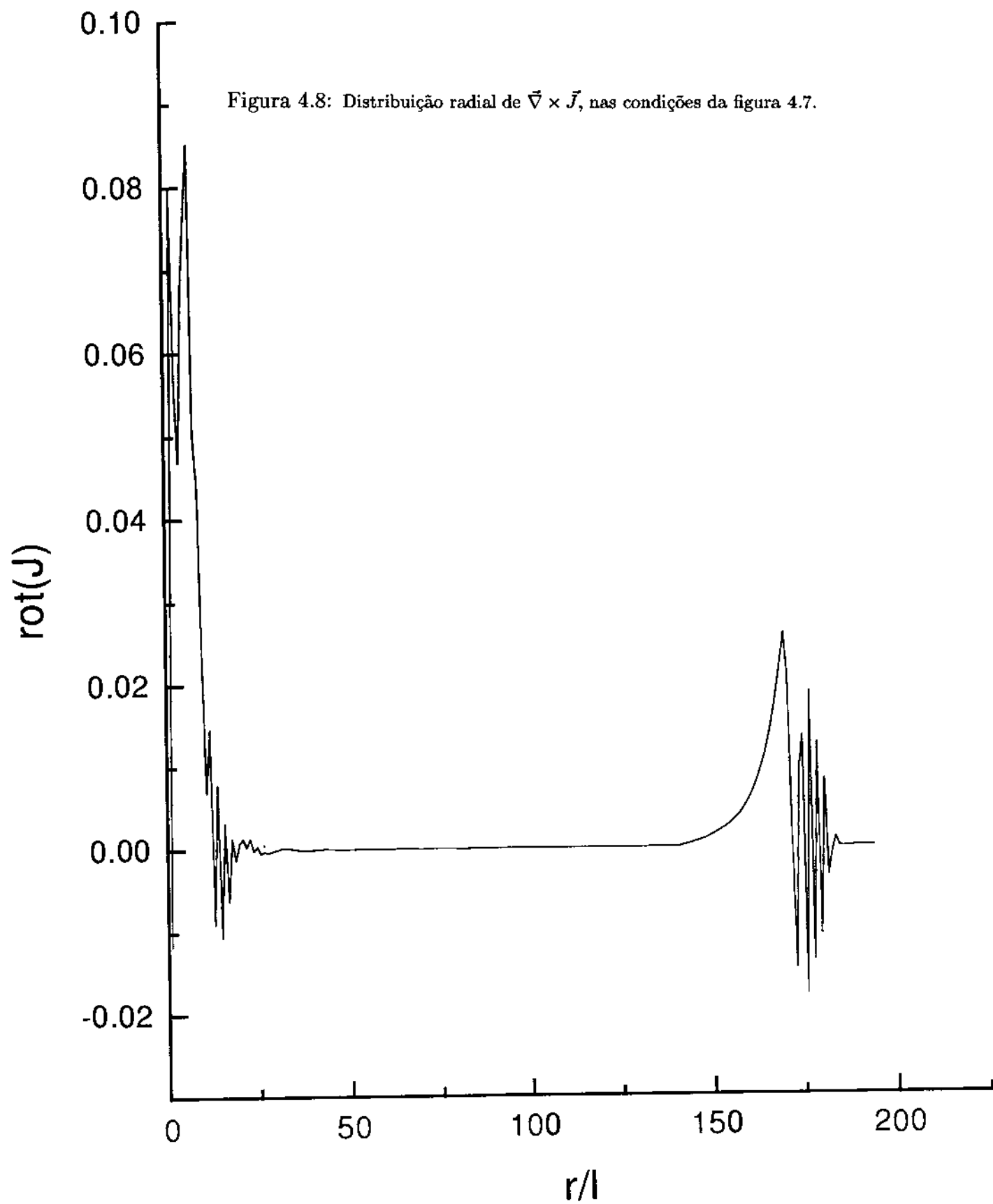


Figura 4.8: Distribuição radial de $\vec{\nabla} \times \vec{J}$, nas condições da figura 4.7.



C o n c l u s õ e s

O estudo do Efeito Hall Quântico é uma área de pesquisa em Física que envolve conhecimentos tanto da Matéria Condensada quanto da Teoria Quântica de Campos. Na presente tese, diversos aspectos relativos a sistemas que apresentam o EHQ foram abordados. Princípios por delinear, no capítulo 1, uma descrição sucinta do Efeito Hall Quântico, seus aspectos fenomenológicos e as tentativas teóricas para descrevê-lo. Em seguida, no capítulo 2, apresentamos a teoria de Chern-Simons-Landau-Ginzburg (CSLG), uma das modernas teorias propostas para descrição do Efeito Hall Quântico Fracionário. Neste mesmo capítulo, mostramos como os resultados da aproximação de campo médio para esta teoria reproduzem satisfatoriamente a fenomenologia essencial do EHQF. Dentro deste contexto é que surgem as questões às quais esta tese tenta responder, questões que dizem respeito à quantização exata da condutividade Hall (inclusive na presença de impurezas), e à estrutura do estado fundamental do sistema, quando este se afasta da condição de quantização exata. A primeira destas perguntas é respondida no capítulo 3, que contém os primeiros resultados originais apresentados nesta tese, publicados em [49].

No capítulo 3 apresentamos um estudo da resposta eletromagnética de um sistema de bósons não-relativísticos acoplados a um campo de gauge com dinâmica de Chern-Simons e a um campo eletromagnético arbitrário externo. Este modelo é muito geral e contém a teoria de Chern-Simons-Landau-Ginzburg como caso particular. A primeira parte do trabalho apresenta a dedução de uma ação efetiva para a densidade de carga

do sistema, levando em conta exatamente as flutuações quânticas do campo de gauge de Chern-Simons. Esta ação efetiva apresenta novas interações não-locais de dois e três corpos, induzidas pelas flutuações quânticas. O acoplamento com o campo eletromagnético externo merece destaque especial nesta análise. Em primeiro lugar, um termo de Chern-Simons puro para o campo externo é completamente fatorizado no funcional gerador. Isto dará lugar a densidades de corrente transversais no sistema. O campo magnético externo toma o papel de uma densidade de fundo (*background density*), já que ele só entra na ação efetiva através da combinação $\rho - \frac{\pi}{\theta}B$. Já o campo elétrico figura na ação efetiva apenas através de sua divergência; em outras palavras, a densidade de carga no *bulk* só “enxerga” as cargas externas, de tal forma a produzir campos elétricos de divergência não-nula. Este fato é utilizado, essencialmente, para modelar a presença de impurezas no sistema.

A ação efetiva na representação de densidade leva-nos naturalmente ao estudo da resposta eletromagnética do sistema. Neste sentido, conseguimos calcular o valor médio da corrente de forma exata (e não apenas na aproximação de campo médio), que revela um comportamento extremamente interessante. Particularizando a análise da corrente para um campo magnético constante (que é o caso do efeito Hall), concluímos que toda a dinâmica do sistema está contida na função de correlação de densidade e esta, por sua vez, entra nas equações através de uma corrente topológica. Esta corrente topológica é a responsável pelos estados de borda (no caso de sistemas finitos). Mostramos como este efeito leva à quantização exata da condutividade Hall, *inclusive na presença de impurezas*. É oportuno lembrar que esta é a primeira vez que um resultado deste tipo é *deduzido mediante cálculo direto*, já que o tratamento de impurezas na presença de um termo de Chern-Simons é um assunto muito complexo, existindo até o momento apenas conjecturas sobre seu comportamento.

Outro resultado interessante que obtivemos a partir da nossa ação efetiva é o propa-

gador das flutuações de densidade em torno do estado fundamental, para fatores de preenchimento $\nu = 1/(2k + 1)$. A partir desta função de correlação, mostramos que o sistema é incompressível. Esta incompressibilidade é interpretada, na aproximação de campo médio, como sendo devido à supercondutividade dos graus de liberdade bosônicos subjacentes na teoria. No presente contexto, a incompressibilidade depende essencialmente de dois fatos. O primeiro é a existência de um “gap” no espectro de excitações, originário das flutuações da componente transversa do campo de gauge; seu valor $\delta\Delta = \frac{\bar{p}^2}{m^2} \left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2$ coincide com aqueles encontrados nas referências [13], [12] e [51], através de outras técnicas de cálculo. Estas excitações com gap correspondem a excitações de cíclotron (*cyclotron mode excitations*), e foram identificadas como sendo transições entre níveis de Landau. Porém, o fato de existir um gap no espectro de excitações não é suficiente para estabelecermos a incompressibilidade do estado fundamental. O segundo fato é a existência do fator \mathbf{k}^2 no numerador do propagador. Este fator é induzido pelas flutuações da componente longitudinal do campo de gauge, que afeta fortemente a dinâmica das flutuações de densidade. Neste ponto, é bom lembrar que as flutuações longitudinais do campo de gauge são essencialmente equivalentes a flutuações de fase do campo de matéria. A relação de dispersão deste modo de cíclotron obtida aqui (3.87) coincide, no limite de longas distâncias (pequenos momenta), com as calculadas nas referências [13] e [12]. Para o potencial de Coulomb $V(-\mathbf{k}^2) \propto 1/|\mathbf{k}|$, a relação de dispersão é linear, como foi sugerido primeiramente por Halperin [59]. Além disso, a equação (3.87) coincide com a relação de dispersão das quasipartículas de um superfluido de anyons [51]. Estes fatos, de alguma forma, mostram a consistência do nosso método de análise das flutuações.

Finalizando o capítulo 3, mostramos como generalizar nosso formalismo para levar em conta a presença de excitações topológicas do tipo vórtice, que o modelo certamente contém. É mostrado como podem ser implementadas condições de contorno não triviais

na integral funcional, através da fixação de um *gauge singular*. Concluímos que a ação efetiva para a densidade de carga na presença de um vórtice tem, essencialmente, dois termos a mais do que a ação no setor trivial. O primeiro termo é devido a flutuações da parte longitudinal do campo de gauge, podendo ser interpretado como uma interação com densidades de carga externas. O segundo termo (vide eq. (3.96)) vem da integração das flutuações transversas do campo de gauge, que induzem uma nova interação de dois corpos entre componentes ortogonais do gradiente da densidade.

O capítulo 4 está dedicado ao estudo das possíveis configurações estáticas de carga do sistema estudado. Isto se obtém ao extremizarmos a ação efetiva deduzida no capítulo 3, obtendo-se como resultado uma complicada equação íntegro-diferencial não-linear. Introduzindo campos auxiliares, conseguimos recrescever esta equação na forma de um sistema de equações diferenciais parciais. Estes campos auxiliares possuem um significado físico muito claro: o campo $\psi(x)$ representa o potencial elétrico gerado pelas flutuações de carga; já o campo $g(x)$ está relacionado a rotacionais de correntes induzidas pelo vínculo de Chern-Simons. Este sistema de equações é muito geral, e contém uma gama de soluções muito ampla, dependendo dos parâmetros da teoria — essencialmente, o potencial químico, do fator de preenchimento e a constante de acoplamento. Como exemplo do conteúdo destas equações, resolvemos numericamente o sistema de equações para uma amostra finita com simetria de rotações no plano. Para definir o sistema físico finito, foi necessário construir um *modelo de borda*, introduzindo um potencial químico simétrico perante rotações no plano (ou seja, $\mu(r)$). Este potencial químico implementa uma barreira de potencial que confina os elétrons em uma região circular de raio finito. Neste sistema estudamos tanto a densidade de carga quanto os rotacionais de corrente induzidos pelo vínculo de Chern-Simons. No caso de $\nu = 1/(2k + 1)$, obtivemos uma densidade uniforme no interior da amostra, tendendo assintoticamente a zero fora desta.

Este resultado era esperado, já que coincide com o estado fundamental de Laughlin. A estrutura dos rotacionais de corrente neste estado fundamental é muito interessante. Obtivemos um conjunto de correntes concêntricas com circulações positivas e negativas se alternando na região próxima à borda da amostra. A integral sobre estas correntes se anula exatamente, e portanto a sua contribuição para a corrente total é nula. Este resultado coincide com o calculado de forma analítica no capítulo 3 o que reforça a consistência da técnica de cálculo proposta nesta tese. Um dos problemas interessantes que pode ser abordado resolvendo este sistema de equações é o da análise do estado fundamental do sistema quando a condutividade não está quantizada, i.e., isto quando $\nu \neq 1/(2k+1)$. Isto permitiria esclarecer a natureza das transições de fase entre *plateaux*; atualmente, este é um assunto de grande interesse experimental e teórico. A fim de avançar um pouco mais neste assunto, resolvemos nosso sistema de equações para fatores de preenchimento da forma $\nu = 1/(2k+1) + \delta\nu$; aqui, $\delta\nu$ representa um pequeno afastamento da condição de quantização. Os resultados mostram uma quebra espontânea da simetria de translação, produzindo uma densidade de carga não-homogênea. Como consequência, aparecem correntes concêntricas e de circulações positiva e negativa em toda a amostra, concentradas principalmente na borda e no centro desta. A diferença em relação ao caso $\nu = 1/(2k+1)$ é que estas correntes *não* se compensam, resultando assim em um estado fundamental com correntes permanentes. Para valores maiores de $\delta\nu$, no entanto, as soluções tornam-se instáveis, mostrando que também existe uma quebra da simetria de *rotações* — e portanto a nossa análise deixa de ser válida. Estes resultados serão submetidos à publicação em breve.

Resumindo, esta tese apresenta um esquema de cálculo não-perturbativo original, visando a compreensão da teoria de Chern-Simons-Landau-Ginzburg para descrever o Efeito Hall Quântico Fracionário. A riqueza desta teoria, obviamente, deixa muitas per-

guntas ainda em aberto. Uma questão interessante que pode ser abordada com o formalismo aqui apresentado é a da estrutura das transições de fase entre *plateaux*. No nosso contexto, isto implica em resolver nosso sistema de equações diferenciais para fatores de preenchimento $\nu \neq 1/(2k + 1)$. Como *não* existe um ansatz de simetria para este regime, seu tratamento apresenta enorme dificuldade matemática. Correntemente, estes estudos se encontram em andamento, e esperamos que num futuro próximo possamos avançar sobre esta importante questão.

B i b l i o g r a f i a

- [1] J. H. Davis, A. R. Long, editors. *Physics of Nanostructures*. Proceedings of the Thirty-Eighth Scottish Universities Summer School in Physics. St Andrews, July 1991.
- [2] J.Voit. *Reports on Progress in Physics* **95**(1995)977.
- [3] J. I. Kapusta, *Finite-temperature field theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1993.
- [4] A. Das. *Finite Temperature Field Theory*. World Scientific, 1997.
- [5] L. Dolan, R.Jackiw. *Phys. Rev.* **D9**(1974)3320.
- [6] I.C. Charret, E.V. Corrêa Silva, S.M. de Souza, M.T. Thomaz. *Journal of Mathematical Physics* **36** (1995) 4100–4105. — I.C. Charret, E.V. Corrêa Silva, S.M. de Souza, O. Rojas Santos and M.T. Thomaz. *Unidimensional Generalized Hubbard Model in the High Temperature Limit* (Aceito para publicação no *Physica A*).
- [7] K. von Klitzing, G. Dorda , M.Pepper. *Phys. Rev. Lett.* **45**(1980)494.
- [8] D.C. Tsui, H.L. Störmer, A.C. Gossard. *Phys. Rev. Lett.* **48**(1982)1559.
- [9] D. G. Barci, L. Moriconi. *Phys. Rev.* **B49**(1994)14740
- [10] D. G. Barci, L. Moriconi. *Nucl. Phys.* **B438**(1995)552.

- [11] D. G. Barci , C. A. A. de Carvalho, L. Moriconi. *Phys. Rev* **B50**(7)(1994)4648.
- [12] A. Lopez and E. Fradkin, *Phys. Rev.* **B44**, 5246, (1991); *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2126, (1992).
- [13] S.C. Zhang. *Int. J. Mod. Phys.* B6 (1992) 25-58, In *Kathmandu 1991, Proceedings, Current topics in condensed matter and particle physics* 118-176, In *Trieste 1992, Proceedings, Low-dimensional quantum field theories for condensed matter physicists* 191-22.
- [14] J. K. Jain, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 199 (1989); *Phys. Rev. B* **41**, 7653 (1990); *Adv. Phys.* **41**, 105 (1992).
- [15] A. Karlhede, S.A. Kivelson, S.L. Sondhi. *The Quantum Hall Effect*. Lectures presented at Jerusalem Winter School on Theoretical Physics, January 1992.
- [16] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. 5th edition, Wiley, 1976.
- [17] L.N. Pfeiffer, K.W. West, H.L. Störmer, and K.W. Baldwin. *Appl. Phys. Lett* **55**(1989)1888.
- [18] B.I. Halperin. *Scientific American* **254**;(4) 52, Apr 1986.
- [19] R.L. Willet, PhD Thesis, MIT (1988).
- [20] R.W. Rendell, S.M. Girvin. *Phys. Rev.* **B23**(1981)6610.
- [21] O. Madelung. *Introduction to Solid-State Theory*. Springer, New York, 1996.
- [22] D.C. Tsui, *Physica B* **164**(1990)59.
- [23] W. Greiner. *Quantum Mechanics*. Springer-Verlag, 3rd ed.
- [24] K.Huang. *Statistical Mechanics*. John Wiley & Sons, New York, 1987.

- [25] *Additional background material on the Nobel Prize in Physics 1998*, disponível no site da Royal Swedish Academy of Sciences, <http://www.nobel.se> .
- [26] B.I. Halperin. *Helv. Phys. Acta* **56**(1983)75.
- [27] E. Abrahams, P.W. Anderson, D.C. Licciardello, T.V. Ramakrishnan. *Phys. Rev. Lett.* **42**(1979)673.
- [28] D.C. Tsui, S.J. Allen. *Phys.Rev. B* **24**(1981)4082.
- [29] D.J. Thouless. *J. Phys C* **14**(1981)3475.
- [30] R.E.Prange, R. Joynt, *Phys. Rev. B* **25**(1982)2943.
- [31] S.A. Trugman, *Phys. Rev. B* **27**(1983)7539.
- [32] R.B. Laughlin. *Phys.Rev.Lett.* **50**(1983)1395.
- [33] R. Prange and S.Girvin, editors. *The Quantum Hall Effect*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [34] S.Trugman and S.Kivelson. *Phys.Rev B* **31**(1985)5280.
- [35] F.D.M. Haldane. *Phys. Rev. Lett* **51** (1983)605.
- [36] B.I. Halperin. *Phys. Rev. Lett* **52**(1984)1583.
- [37] J.Jain. *Phys. Rev. B***40**(1989)8079.
- [38] S.Trugman and S.Kivelson. *Phys.Rev B* **26**(1985)3682.
- [39] S.Kivelson, C.Kallin,D.Arovas. *Phys.Rev.Lett.* **56**(1986)873.
- [40] S.Girvin, A. MacDonald. *Phys.Rev.Lett* **58**(1987)1252.

- [41] S. C. Zhang, T. Hansson and S. Kivelson. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 82 (1989).
- [42] D.H.Lee, S.C. Zhang. *Phys.Rev.Lett* **66**(1991)1220.
- [43] J.M. Leinaas. J. Myrheim, *Il Nuovo Cimento* **37B** (1977)1.
- [44] F. Wilczek. *Phys.Rev.Lett* **49**(1982)957.
- [45] D.Arovas, J.R. Schrieffer, F. Wilczek, A.Zee. *Nucl.Phys* **251**(1985)117.
- [46] S.Deser, R. Jackiw , S. Templeton. *Ann. Phys* **140**(1982)372.
- [47] D.Pines, P.Nozieres. *The Theory of Quantum Liquids*. Addison-Wesley, 1988.
- [48] J.R.Schrieffer. *Theory of Superconductivity*. Addison-Wesley, 1988.
- [49] D.G.Barci, E.V.Corrêa Silva, J.F. de Medeiros-Neto. *Phys. Rev.* **B58**(1998)10921-10932.
- [50] H. Kleinert. *Gauge Fields in Condensed Matter*. World Scientific Publishing Co., 1989.
- [51] D. Boyanovsky. *Int. J. Mod. Phys.* **A7**(1992)5917.
- [52] D. G. Barci, L. Oxman. *Phys. Rev.* **D52**(1995)1169.
- [53] B. I. Halperin. *Phys. Rev.* **B 25**, 2185,(1982).
- [54] M. Stone. *Ann. Phys.* (NY) 207, 38, (1991).
- [55] X. G. Wen. *Phys. Rev. B* 43, 11025, (1991).
- [56] X. G. Wen. *Int. J. Mod. Phys.* **B 6**, 1711, (1992).
- [57] R. Prange. *Phys. Rev.* **B23**, 4802, (1981).
- [58] W. Kohon, *Phys. Rev.* **123**, 1242, (1961).
- [59] C. Kalling, B. Halperin. *Phys. Rev.* **B30**, 5655, (1984).

- [60] Z. F. Ezawa, M. Hotta, A. Iwazaki. *Phys. Rev. D* **44**, 452 (1991); Z. F. Ezawa, A. Iwasaki. *Phys. Rev. B* **43**, 2637 (1991).
- [61] A. Sugamoto, *Phys. Rev. D* 19,6, 1820, (1979).
- [62] C. Itzykson, J.B. Zuber. *Quantum Field Theory*. Mc-Graw-Hill, Singapore, 1985.
- [63] D. Sahar, D. C. Tsui, M. Shayegan, E. Shimshoni and S. Sondhi. *Princeton University preprint*, 1995. (cond-mat/9510103).
- [64] E. Fradkin, S. Kivelson. *Nucl. Phys. B*474[FS](1996)543.

**“ESTUDO DA RESPOSTA ELECTROMAGNÉTICA DA TEORIA DE
CHERU-SIMONS-LANDAU-GUIZBURG PARA O EFEITO HALL
QUÂNTICO FRACIONÁRIO”**

EDUARDO VASQUEZ CORRÊA SILVA

Tese apresentada no Centro Brasileiro de
Pesquisas Física, fazendo parte da Banca
examinadora os seguintes Professores:

Daniel Gustavo Barci/UERJ

Sebastiao Alves Dias/CBPF

Maria Teresa Clímaco dos Santos Thomás/UFF

Nami Fux Svaiter/CBPF

Hugo Cristianden/CBPF