

TESE DE  
DOUTORADO

# Representação de Weyl no Toro e Aplicações

Alejandro Mariano Fidel Rivas

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF

RIO DE JANEIRO, MARÇO DE 1999

*Os pensadores em cujo espírito todas as  
estrelas se movem em órbitas cíclicas não  
são os mais profundos; aquele que vê  
no fundo dele como num universo imenso e leva  
nele vias lácteas sabe a desordem dos seus  
caminhos; estes levam até o caos,  
o labirinto da existência.*

F. Nietzsche (1882)

## Agradecimentos

Em primeiro lugar é com grande prazer que agradeço a Alfredo Ozorio de Almeida, pela orientação, dedicação e estímulo imprescindíveis neste trabalho. Também o agradeço pelas mudanças de rumo nos momentos adequados, assim como, por cutucar nos pontos fracos e assim permitir a melhora do trabalho. Sou também grato a Marcos Saraceno tanto pelas discussões que tivemos em Buenos Aires, Paris e Rio quanto por ter me ensinado a trabalhar só. É um prazer agradecer o amigo Raul Vallejos por várias conversas frutíferas, a André Voros pelos comentários e a Jonathan Keating tanto por ter ouvido minha exposição quanto por ter me enviado o "preprint" de Greenman; ao amigo Enrique Pujals que me comunico o resultado de Mañe.

Agradeço também Ao pessoal do CBPF sempre bem dispostos a ajuda, e a solidariedade e especialmente a Wanda, Almerio, Lucia, que resolvem qualquer problema, a Regina sempre bem humorada; Graça e Fátima do CLAF, sempre atenciosas, ao CLAF e CNPq, pela bolsa que me permitiu esta estada no Rio, a Antonio Luiz de Almeida (Luizão) pela dedicação na leitura da tese a Gino que me ajudou com as figuras, a Vivi pela grande ajuda nas Xerox, o apoio e tantas outras coisas... a Javier, que não comprou a PIZZA! ao chão do Instituto Henri Poincaré que várias noites me acolheu, a Julio e Pedro companheiros de estrada desde o inicio do caminho Carioca, aos amigos, tanto os novos quanto os mais antigos, a minha família...

## Resumo

Construímos operadores de reflexão e translação no espaço de Hilbert correspondente a um toro, projetando estes a partir dos operadores definidos no plano. Podemos mostrar que estes operadores tem as mesmas propriedades de grupo que seus análogos no plano. A decomposição de operadores na base das reflexões corresponde à representação de Weyl ou de centros, conjugada à representação de cordas que se baseia nas translações quânticas. Assim, o símbolo de todo operador no toro é obtido como a projeção do símbolo no plano. As propriedades de grupo permitem-nos obter a lei do produto para operadores numa forma simples. A analogia entre as representações de centros e cordas no toro e as mesmas representações no plano é aproveitada para tratar dos sistemas Hamiltonianos definidos no toro e para formular uma representação em termos de integrais de trajetórias para o operador evolução. Derivamos então a sua aproximação semiclássica.

A seguir, estudamos mapas do gato com vários graus de liberdade. O comportamento loxodrômico aparece como uma nova característica com respeito ao caso de um grau de liberdade. A parametrização de Cayley das matrizes simpléticas por matrizes simétricas nos permite classificar os diferentes tipos de comportamento para dois graus de liberdade. Os mapas são quantizados utilizando a representação de Weyl no toro aqui desenvolvida, achando-se o conjunto de parâmetros de Floquet para os quais os diferentes mapas são quantizáveis. Verificamos que a teoria semiclássica do propagador é exata, independentemente da dimensão do espaço de fases, ou da natureza dos pontos fixos. Podemos também observar que as características de ergodicidade clássicas e quânticas estão em perfeito acordo.

## Abstract

We construct reflection and translation operators on the Hilbert space corresponding to the torus by projecting them from the plane. These operators are shown to have the same group properties as their analogue on the plane. The decomposition of operators in the basis of reflections corresponds to the Weyl or center representation, conjugate to the chord representation which is based on quantized translations. Thus, the symbol of any operator on the torus is derived as the projection of the symbol on the plane. The group properties allow us to derive the product law for operators in a simple form. The analogy between the center and the chord representations on the torus to those on the plane is then exploited to treat Hamiltonian systems defined on the torus and to formulate a path integral representation of the evolution operator. We derive its semiclassical approximation.

Then, we study cat maps with various degrees of freedom. Loxodromic behavior appears as a new feature with respect to the one degree of freedom case. The Cayley parametrization of symplectic matrices by symmetric matrices allows us to classify the different types of behavior for two degrees of freedom. We quantize the maps based on the developed Weyl representation on the torus, finding the set of Floquet parameters for which the different maps are quantizable. We verify that the semiclassical theory for the propagator is exact, independently of the dimension of the phase space, or the nature of the fixed points. We also find that the characteristics of ergodicity at classical and quantal level are in perfect agreement.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Sumário</b>	<b>v</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Mecânica Clássica e funções geratrizes de centros</b>	<b>11</b>
1.1 Sistemas Hamiltonianos e Transformações Simpléticas. . . . .	11
1.2 Funções geratrizes de centros e cordas . . . . .	15
1.3 Princípio Variacional de Centros . . . . .	21
<b>2 Mecânica Quântica e Representação de Weyl no plano:</b>	<b>26</b>
2.1 Cinemática e Dinâmica Quântica . . . . .	26
2.2 Translações e Reflexões Quânticas . . . . .	29
2.3 Representações de Weyl e de Cordas . . . . .	31
2.4 Produtos de Operadores e Integral de Caminhos . . . . .	34
<b>3 Representações de Centros e Cordas no Toro</b>	<b>40</b>
3.1 Pré-quantização . . . . .	40
3.2 Restrição das translações e reflexões ao toro . . . . .	47
3.3 Operadores e seus símbolos . . . . .	56
3.4 Símbolos do Produto de Operadores . . . . .	61
3.5 Representação de Weyl no EFQ: . . . . .	65
3.6 Relação entre os símbolos . . . . .	66
3.7 Invariança simplética . . . . .	68
<b>4 Hamiltonianos no Toro e integrais de caminho.</b>	<b>70</b>
<b>5 Os mapas do gato clássicos</b>	<b>74</b>
5.1 Introdução e motivação . . . . .	74

5.2	Funções geratrizes invariantes felinas . . . . .	77
5.3	Classificação de mapas do gato clássicos . . . . .	86
5.3.1	Classificação da Dinâmica . . . . .	89
5.4	Exemplos . . . . .	92
5.4.1	O mapa de Hannay e Berry . . . . .	92
5.4.2	O caso duplamente hiperbólico: . . . . .	93
5.4.3	O caso misto . . . . .	93
5.4.4	O caso loxodrômico . . . . .	95
5.4.5	O caso duplamente elíptico . . . . .	95
<b>6</b>	<b>Gatos quânticos simples</b>	<b>97</b>
6.1	Forma simples do propagador . . . . .	97
6.2	Periodicidade do propagador . . . . .	100
6.3	A formula do traço . . . . .	101
6.4	Exemplos : . . . . .	103
6.4.1	O Gato de Hannay e Berry . . . . .	104
6.4.2	O Caso Duplamente Hiperbólico . . . . .	105
6.4.3	O Caso Misto . . . . .	106
6.4.4	O caso loxodrômico . . . . .	107
<b>7</b>	<b>O Grupo Felino Quântico</b>	<b>109</b>
7.1	Automorfismos no espaço de Hilbert do Toro . . . . .	109
7.2	As Representações de Centros e Cordas dos Gatos Quânticos . . . . .	112
7.3	Periodicidade da Soma de Órbitas . . . . .	114
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>117</b>
	<b>Referências</b>	<b>119</b>

## Introdução

É tarefa do físico a modelagem e caracterização da dinâmica, ou movimento, dos diferentes objetos por meio da observação de magnitudes susceptíveis de serem medidas. Sejam estes movimentos de grandes objetos como galáxias, estrelas e planetas ou em escalas muito menores como elétrons em metais. Os movimentos também podem envolver sistemas contínuos, como por exemplo as batidas de uma corda, ou da rede no momento de um gol; estes sistemas contínuos também apresentam-se em escalas muito dissímiles tais como por exemplo os fluidos em céus, mares e montanhas, ou escalas sub-microscópicas como na estrutura de mesons e quarks no interior dos prótons. Porém, todos estes movimentos são estudados em forma bem diferenciada por meio de diferentes teorias físicas. Neste sentido é sempre muito importante isolar nosso sistema de estudo para podermos atacá-lo com as armas adequadas; "é inútil usar um canhão para matar um mosquito". Assim como também é muito importante para toda teoria física conhecer seus limites de aplicabilidade ou de validade. Porém, haverá escalas de fronteira nas quais encontraremos seqüelas de uma ou outra teoria; este é o caso por exemplo da mecânica semiclássica.

Importantes mudanças no que diz respeito a várias disciplinas da física ocorreram neste século. Por um lado, foram feitos avanços conceituais importantes na mecânica clássica, assim como nasceram teorias novas como a mecânica quântica e as relatividades restrita e geral. Desta forma expandiu-se enormemente os tipos de sistemas a serem estudados.

Do ponto de vista da mecânica clássica aceitava-se que todo sistema dinâmico tivesse tantas constantes de movimento quanto graus de liberdade. As idéias de Poincaré [1] resultaram importantíssimas para falsificar essa visão. Na linguagem moderna diríamos que um sistema que tem tantas constantes de movimento quanto graus de liberdade é chamado de *integrável*. Nesses casos as órbitas do sistema estão restritas a uma variedade topologicamente equivalente a um toro, inteiramente determinado pela especificação das constantes de movimento. Dessa forma o espaço de fases está, na linguagem matemática, folheado por toros. Outra característica

fundamental dos sistemas integráveis é que órbitas que começam com condições iniciais próximas divergem em forma linear. Porém, os sistemas integráveis formam um conjunto muito pequeno; são a exceção e não a regra dos sistemas dinâmicos e uma pequena perturbação pode gerar o desaparecimento de alguma das constantes do movimento. As órbitas, então, podem percorrer regiões maiores do espaço de fases. Assim em forma crescente com a perturbação, alguns dos toros são destruídos e a sua distribuição no espaço de fases forma uma estrutura fractal. No outro extremo quando nenhum dos toros sobrevive, se encontram os sistemas ergódicos; nesses casos uma órbita qualquer acaba percorrendo densamente o espaço de fases. Órbitas próximas agora divergem em forma exponencial com o expoente de Lyapunov. Tal divergência exponencial causa a falta de predictibilidade do sistema, fenômeno conhecido com o nome de *Caos*. Dentro da dinâmica caótica existe uma classificação mais detalhada entre os quais teremos os sistemas K, os fluxos de Bernoulli...

O estudo das órbitas periódicas e de sua estabilidade, são características fundamentais para a classificação dos sistemas dinâmicos. Esta é uma área atual de pesquisa, que envolve a resolução de vários problemas de matemática pura, tais como topologia, teoria de números mapas etc... Mais uma ferramenta imprescindível, o cálculo numérico mediante computador, deu importantíssimos resultados nesta área, às vezes antes mesmo da resolução formal do problema. Para a pesquisa das propriedades universais dos diferentes tipos de sistemas dinâmicos utilizam-se os modelos mais simples possíveis com as características típicas do comportamento a ser estudado, de forma que as propriedades do modelo resultam genéricas de alguma classe de sistemas. Estes sistemas simples nem sempre representam a modelagem de um problema físico, e são assim chamados de "modelos de brinquedo"; entre eles se encontram os bilhares, o mapa do padeiro e o mapa do gato do qual estudaremos uma generalização nesta tese.

Estas idéias de caos vieram a se desenvolver em outras áreas do pensamento humano, tendo grande impacto na biologia, meteorologia, economia e até nas artes plásticas. Mesmo dentro da física a sua influência ultrapassa a mecânica clássica. Rapidamente surgiu o problema de como quantizar sistemas cujo limite clássico é

caótico.

A antiga teoria quântica se baseia na condição de quantização de Bohr-Sommerfeld, segundo a qual o sistema clássico é quantizado através das variáveis de ação associadas aos toros invariantes [2]. Por outro lado, foi reconhecido por Einstein[3], que este método só pode ser usado em sistemas cujas trajetórias se encontram sobre os tóros invariantes. Este método não podia conectar os sistemas classicamente caóticos com o seu análogo quântico. Os métodos semiclássicos usados para tratar os sistemas quânticos são associados ao método WKB, ou à sua generalização para vários graus de liberdade, Van Vleck 1928 [4], para obter aproximações do espectro e das autofunções de sistemas quânticos. Estes métodos só são aplicáveis para sistemas integráveis, mas não para sistemas caóticos.

Em 1982 Gutzwiller [5] demonstrou que a aproximação semiclássica para a integral de caminhos de Feynman [6] podia ser usada para computar valores aproximados da energia dos autovalores de um sistema quântico (Problema de Kepler Anisotrópico ) cujo análogo clássico é caótico. Uma longa série de artigos realizados por Gutzwiller[7, 8, 9, 10, 11, 12, 5] e por Balian e Block [13, 14] relacionou as órbitas periódicas de um sistema clássico ao o espectro do correspondente sistema quântico. A chamada *Fórmula de Traços Semiclássica*, apresenta a dificuldade matemática de ser uma série divergente. Consideráveis esforços tem sido feitos para resolver esta dificuldade: mediante o método de ressonâncias baseado em princípios matemáticos [15],[16],[17],[18] ou sobre idéias físicas.

Assim o propagador de Gutzwiller só poderá ser utilizado para obter propriedades estatísticas do espectro mas não para se achar níveis individuais de energia. Nesta mesma linha, as propriedades estatísticas do espectro são o objeto de estudo da hipótese de Bohigas Giannoni e Schmit que postula que os sistemas cujo limite clássico é integrável apresentam uma estatística da flutuação dos níveis de energia do tipo Poisson, enquanto que os sistemas caóticos apresentam uma estatística modelada por ensembles de matrizes aleatórias que diferem segundo as simetrias do sistema. Esta hipótese implica em uma universalidade importante e prevê comportamentos bem diferentes para os casos integráveis e caóticos, de fato, os sistemas

caóticos apresentam a chamada repulsão de níveis. Esta hipótese de universalidade está baseada em fortes evidências experimentais e recentemente o uso de técnicas supersimétricas [19] mostrou-se grande utilidade para a verificação analítica em muitos casos.

É importante mencionar que além desta linha de pesquisa ser muito interessante "per se" ela está fortemente motivada pelos sistemas ditos *mesoscópicos*, ou seja, cujas dimensões físicas se encontram no limite entre as duas visões clássicas e quânticas. Estes sistemas tem tido, recentemente, uma grande importância devido à possibilidade de serem realizados experimentalmente tais dispositivos. A física envolvida é muito rica, assim como suas possíveis futuras aplicações tecnológicas, entre as quais já se fala em eletrônica quântica e computação quântica.

Uma ferramenta muito utilizada para o estudo do limite semiclássico de problemas caóticos é a função de Wigner, originalmente construída com o propósito de reconciliar a mecânica estatística quântica com uma visão no espaço de fases clássico [20, 21, 22]. A função de Wigner, ou representação de Weyl do operador densidade, pode ser negativa, impedindo sua correspondência direta com a densidade de probabilidades clássica de Liouville. Porém, suas projeções correspondem a probabilidades em posições e momentos, e um suavizado gaussiano, conhecido como função de Husimi [23, 24], também é definida positiva.

O estudo do limite semiclássico de um estado quântico puro tem também uma relação direta com a função de Wigner [25, 26]. O ponto importante é que as características que distinguem os movimentos entre integráveis e caóticos ao nível clássico manifestam-se em forma mais clara numa visão que inclui todo o espaço de fases. Assim, espera-se que sua emergência no limite semiclássico seja otimamente clara mediante a representação de Weyl. De fato, Berry [26] mostrou que os picos na amplitude da função de Wigner para um estado puro de um sistema autônomo com um grau de liberdade encontram-se perto da camada de energia e Ozorio de Almeida e Hannay [27] generalizam esta visão para o toro invariante de sistemas clássicos integráveis.

Para um ponto  $x$  dentro do toro, Berry obteve, mediante a *construção de*

*cordas*, que a função de Wigner é oscilatoria, sendo uma fase proporcional à área simplética (ou ação) aprisionada pelo toro e a corda centrada em  $x$ . Mais tarde, Marinov [28] encontrou que uma construção de cordas semelhante determina o limite semiclássico do propagador de Weyl, ou seja a transformada de Weyl do operador evolução. A diferença é que neste caso os extremos da corda centrada em  $x$  devem se encontrar sobre a mesma órbita clássica. Marinov [29] mostrou que a fase do propagador de Weyl satisfaz uma nova versão da equação clássica de Hamilton-Jacobi, levando assim a construção de cordas à própria mecânica clássica.

A derivação da integral de caminhos para o propagador de Weyl introduz a construção de cordas dentro da estrutura da mecânica quântica. Ozorio de Almeida [30] obteve uma fórmula que é análoga ao princípio variacional clássico para a função geratriz de centros [31] e, recentemente [32], mostrou que a representação de Weyl  $A(x)$  de um operador  $\hat{A}$  corresponde a decomposição de tal operador numa base de operadores  $\hat{R}_x$ , reflexões quânticas de centro  $x$  no espaço de fases. Analogamente à representação de Weyl, existe uma representação de cordas, decomposição em termos de operadores de translação  $\hat{T}_\xi$  de corda  $\xi$ . Centros  $x$  e cordas  $\xi$  são variáveis canonicamente conjugadas na mecânica clássica.

Por outro lado, os espaços de fase compactos são cruciais para o estudo dos sistemas caóticos, pois modelos importantes de tal comportamento tem essa propriedade. Este é o caso de, por exemplo, bilhares (cuja borda é estudada numa energia fixa), mapas no toro e inclusive o método recentemente introduzido por Bogomolny [33] da superfície de Poincaré quântica que implica a transformação de um fluxo Hamiltoniano a um mapa num espaço de fases compacto. A vantagem de trabalhar com um espaço de fases compacto é aumentada com a quantização já que o correspondente espaço de Hilbert tem então dimensão finita. A topologia mais simples é aquela do toro, que é localmente plano. Ao nível quântico, coordenadas e momentos são restritas a uma rede de pontos de  $N \times N$  que tem o nome de *Espaço de Fases Quântico* (EFQ) [34]. A restrição de que  $N = \frac{2\pi}{\hbar}$ , implica no limite semiclássico corresponder a  $N \rightarrow \infty$ .

Dado que é muito vantajoso investigar numericamente a propagação de ve-

tores finitos ou matrizes definidas no EFQ, é algo desconcertante que as diferenças existentes entre o movimento clássico e quântico sejam mais profundas no toro do que no plano. A literatura existente [34]-[37] é fundamentalmente baseada em procedimentos formais, de forma que a obtenção do limite clássico quando  $N \rightarrow \infty$  pode não implicar na emergência de estruturas clássicas, inclusive para  $\hbar$  finito, como tem sido encontrado no caso plano.

Claramente uma forma de evitar tal dificuldade é considerar o toro clássico como o espaço de fases de um plano periódico, quantizar este último para aí projetar no EFQ. Generalizamos assim o procedimento de Hannay e Berry [38], permitindo ângulos de "Floquet" ou "Bloch" arbitrários para cada circuito no toro. É então possível projetar no toro operadores de translação e reflexão definidos no plano. Portanto, definimos a representação de Weyl (ou de centros) e a representação de cordas conjugada, mantendo as características geométricas fundamentais do plano.

Aplicamos a ferramenta desenvolvida a dos tipos de sistemas; em primeiro lugar os sistemas Hamiltonianos definidos no toro, para os quais podemos obter uma expressão do propagador em forma de integrais de caminho, que nos permite obter o limite semiclássico. Dada a invariância simplética da formulação, a representação de Weyl resulta de suma importância para estudar mapas simpléticos no toro de  $2L$  dimensões (onde  $L$  é o número de graus de liberdade) ou *mapas multi-dimensionais do gato*.

Para o caso de um grau de liberdade estes mapas foram vastamente explorados na bibliografia e consistem nos sistemas mais estudados para modelar sistemas caóticos simples. Neste caso ( $L = 1$ ) os pontos fixos podem ser elípticos (autovalores no círculo unidade), o que gera um mapa regular, ou bem, hiperbólicos, (autovalores reais) o que gera uma estrutura caótica com comportamento ergódico e mixing. Estes mapas foram quantizados por Hannay e Berry [38]. Tais gatos quânticos apresentam degenerescências no espectro já que o número de sítios aonde os autovalores podem se encontrar cresce em forma mais lenta do que  $N$ , o número total de tais autovalores [39]. Assim, o espectro não apresenta a repulsão de níveis característica dos sistemas caóticos. Por outro lado Ford et al. [40] baseados na complexidade al-

gorítmica argumentaram que o mapa do gato é um sistema patológico onde o princípio de correspondência não se cumpre.

Recentemente dois tipos de trabalhos mostraram que a afirmação de Ford et al. não é válida. Em primeiro lugar, Matos e Ozorio de Almeida [41] mostraram que uma perturbação estruturalmente estável do mapa do gato leva a uma estatística de níveis do tipo COE que é a esperada neste caso segundo a conjectura de Bohigas Giannoni e Schmit [42]. Assim, o espectro do gato não perturbado é singular devido a propriedades decorrentes da teoria de números, peculiar aos seus pontos periódicos. Por outro lado Degli-Esposti et al. [43] mostraram que as autofunções do mapa do gato apresentam uma estrutura ergódica e mixing no limite semiclássico. Deste modo recupera-se o princípio de correspondência.

Veremos aqui que para um número maior de graus de liberdade, os pontos periódicos ganham uma estrutura mais rica, podendo ser elípticos (autovalores no círculo unidade) , hiperbólicos (autovalores reais) ; mas também aparece o comportamento loxodrômico [44] (os autovalores do mapa são complexos). Neste último caso as órbita vizinhas ao ponto fixo espiralan enquanto se afastam ou aproximam do ponto fixo. Utilizaremos o formalismo das funções geratrizes de centros e cordas para classificar a dinâmica destes sistemas e para encontrara exemplos dos vários tipos de dinâmica.

A quantização será realizada mediante a representação de Weyl desenvolvida para o toro. Obteremos formas simples para o propagador tanto na representação de centro quanto na de cordas, assim como a exactidão da aproximação semiclássica para a fórmula de traços. Os mapas do gato de diferente tipo apresentam características quânticas diferentes segundo o tipo de sistemas dinâmicos que representem.

O trabalho apresentado nesta tese consta basicamente de três partes, na primeira parte, os dois primeiros capítulos, baseados na referência [32], lembraremos os principais resultados da representação de Weyl no plano assim como a sua relação com a mecânica clássica.

No primeiro capítulo, faremos uma resenha dos principais resultados decorrentes do uso das funções geratrizes de centros e cordas na mecânica clássica. Começaremos

com as equações de Hamilton e a sua relação com as transformações simpléticas. Logo definiremos centros e cordas e suas respectivas funções geratrizes, assim como a relação destas com as reflexões e translações clássicas. A seguir estudaremos a lei de composição de funções geratrizes de centros deduzindo então o princípio variacional de centros.

No capítulo 2 lembraremos a representação de Weyl no plano, assim como a representação de cordas no mencionado espaço. Construiremos os operadores de translação e reflexão quânticos a partir dos quais definiremos respectivamente as representações de cordas e centros. Estudaremos a lei do produto de tais representações. Terminaremos o capítulo estudando a representação de centros do propagador como uma integral de trajetórias, e veremos a sua relação com a função geratriz de cordas definida no primeiro capítulo.

A segunda parte, os capítulos 3 e 4, consta da apresentação da representação de Weyl no toro e sua aplicação para sistemas Hamiltonianos. Estes capítulos constituem o núcleo central da referência [45]. O conjunto formado pelas duas primeiras partes será também publicado [46].

A representação de Weyl no toro, é apresentada no terceiro capítulo. Começamos apresentando o espaço de Hilbert de dimensão finita no qual vamos trabalhar, veremos que os valores discretos de coordenadas e momentos formam uma rede que chamamos de espaço de fases quântico (EFQ). Em seguida veremos como o espaço de Hilbert do toro pode ser visto como uma mera projeção do espaço de Hilbert do plano num sub-espaço menor. Logo projetamos os operadores de translação e reflexão, originalmente definidos no plano, para o espaço de Hilbert do toro, obtendo-se as mesmas lei de grupo. Centros e cordas agora realizam translações e reflexões no EFQ e são assim definidas numa rede. Construímos então as representações de cordas e centros no toro, estudamos a sua relação com a representação de coordenadas ou momentos e derivamos a lei do produto de operadores. Vemos que para o caso  $N$  ímpar os centros das reflexões podem ser definidos no EFQ, fato que simplifica consideravelmente as leis do produto, tornando estas similares às obtidas no plano. Na última seção deste capítulo vemos como os símbolos de operadores no toro podem ser obtidos a partir

dos símbolos no plano.

O quarto capítulo é dedicado à aplicação da representação de Weyl no toro para sistemas Hamiltonianos no mesmo espaço. A relação com a formulação no plano nos permite obter o propagador como uma integral de trajetórias e sua aproximação semiclássica.

A terceira parte, que inclui os capítulos 5, 6 e 7, é dedicada ao estudo dos mapas do gato multidimensionais, este trabalho foi realizado em colaboração com o Professor Marcos Saraceno de Buenos Aires, e faz parte da referência [47].

O capítulo 5 visa o estudo clássico de tais sistemas. Estudamos os diferentes tipos genéricos de dinâmica e argumentamos a vantagem de utilizar as funções geratrizes de centros e cordas que nos permitem classificar estes mapas. Em seguida daremos exemplos de mapas do gato com as diferentes dinâmicas possíveis.

No capítulo 6 estudaremos mapas quânticos do gato, cujo propagador admite uma forma simples, similar ao caso plano. Veremos que estes propagadores são periódicos e as consequências de tal fato para o espectro de quase-energias. Também veremos que para estes mapas a fórmula do traço de Gutzwiller é exata, permitindo-nos obter muitas propriedades a partir do conhecimento da periodicidade do propagador. Em seguida quantizamos os sistemas estudados no capítulo 4. O estudo da periodicidade do propagador nos permite verificar o acordo entre a ergodicidade clássica e quântica destes sistemas.

O sétimo capítulo é dedicado à construção dos mapas do gato quânticos, os casos simples já foram estudados no capítulo anterior. Aqui colocamos a discussão geral com respeito a estes sistemas. Num primeiro passo obtemos as condições para estes mapas serem quantizáveis e aí mostramos que o conjunto de mapas quantizáveis forma um grupo. A seguir, baseados na representação de centros e cordas definidas no capítulo 3, obtemos tais representações do propagador para mapas do gato. Logo deduzimos as condições para que estes propagadores admitam a forma simples do capítulo 6.

O último capítulo será dedicado a conclusões considerações finais e perspectivas.

Neste trabalho notaremos os operadores no plano por letras em itálica  $\hat{A}$ , enquanto que operadores no toro são escritos em negrito  $\hat{A}$ .

# 1 Mecânica Clássica e funções geratrizes de centros

Neste capítulo estudaremos fundamentalmente o papel das funções geratrizes de centros na mecânica clássica. Como veremos nos capítulos seguintes, estas tem uma relação fundamental com a representação de Weyl. O capítulo revê resultados fundamentais obtidos na referência [32]. Começamos então estudando a mecânica clássica para vermos como estas funções geratrizes aparecem.

## 1.1 Sistemas Hamiltonianos e Transformações Simpléticas.

A classificação e estudo dos distintos tipos de dinâmica é, como já mencionamos, um ponto essencial para a modelagem de sistemas físicos. Para tal propósito é importante introduzir alguns conceitos e definições úteis.

Um sistema dinâmico clássico é definido pela terna  $(\mathbb{T}, \mathcal{M}, \mu)$  onde  $\mathcal{M}$  é um automorfismo do espaço de medida  $\mathbb{T}$  que deixa invariante a medida  $\mu$ . Dois propriedades importantes destes sistemas dinâmicos são ergodicidade e mixing.

**Definição :** o sistema dinâmico  $(\mathbb{T}, \mathcal{M}, \mu)$  é ergódico se é somente se para toda função  $f$  definida em  $\mathbb{T}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(\mathcal{M}^k x) = \int_{\mathbb{T}} d\mu f(x). \quad (1.1)$$

Isto significa que a média espacial coincide com a média temporal. Também definimos o "mixing"

**Definição :** o sistema dinâmico  $(\mathbb{T}, \mathcal{M}, \mu)$  é "mixing" se é somente se para todo par de conjuntos  $A$  e  $B$  em  $\mathbb{T}$ , de medida respectiva  $\mu(A)$  e  $\mu(B)$ ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(\mathcal{M}^m A \cap B) = \mu(A)\mu(B). \quad (1.2)$$

Os sistemas dinâmicos obtidos como o limite clássico de sistemas quânticos são caracterizados pela função Hamiltoniana  $H(x, t)$ , onde  $x$  é um ponto no espaço das fases que tem dimensão par. Usualmente as coordenadas deste espaço de  $(2L)$  dimensões são separadas em  $L$  momentos e  $L$  posições, assim  $x = (p_1, \dots, p_L, q_1, \dots, q_L)$ .

Em muitos casos, o teorema de Darboux [65] garante que a tal procedimento é possível. O sistema dinâmico é definido pelas *equações de Hamilton*,

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (1.3)$$

que podem ser compactadas na forma

$$\dot{x} = \mathfrak{J} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (1.4)$$

com a definição da matriz  $\mathfrak{J}$  de  $(2L \times 2L)$  dimensões

$$\mathfrak{J} = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right]. \quad (1.5)$$

É importante notar que a matriz transposta  $\mathfrak{J}^t = \mathfrak{J}^{-1} = -\mathfrak{J}$ . Esta matriz  $\mathfrak{J}$  é em geral obtida pelos colchetes de Poisson entre as coordenadas,

$$\mathfrak{J}_{ij} = \{x_i, x_j\} \quad (1.6)$$

Já que as equações de movimento são de ordem um, existe exatamente uma órbita que passa através de cada ponto no espaço de fase. Escolhamos a origem na órbita que desejamos estudar; obtemos então as órbitas vizinhas para tempos curtos expandindo o Hamiltoniano em série de Taylor:

$$H(x) = H(0) + \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_0 \cdot x + \frac{1}{2} x \mathcal{H}_0 x + \dots, \quad (1.7)$$

onde  $\mathcal{H}_0$  é a *matriz Hessiana*  $\partial^2 H / \partial x^2$  avaliada na origem.

A velocidade perto da origem é, para  $t = 0$ ,

$$\dot{x}(x) = \mathfrak{J} \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_0 + \mathfrak{J} \mathcal{H}_0 x + \dots, \quad (1.8)$$

de forma que

$$\delta \dot{x} = \dot{x}(x) - \dot{x}(0) = \mathfrak{J} \mathcal{H}_0 x = \mathfrak{J} \mathcal{H}_0 \delta x \quad (1.9)$$

até a primeira ordem em  $\delta x$ . Portanto, o movimento para tempos curtos entorno de uma órbita escolhida é determinado por um sistema dinâmico linear.

Após um tempo infinitesimal  $\delta t$ , podemos transladar a origem para  $x = \delta t \dot{x}(0)$  e obter uma nova expansão. Iterando este procedimento, encontramos que o fluxo  $x(0) \rightarrow x(t)$  na vizinhança de uma dada órbita  $x(0, 0) \rightarrow x(t, 0)$  pode ser aproximado por um fluxo linear  $\delta x(0) \rightarrow \delta x(t)$  resultando de um sistema Hamiltoniano linear dependente do tempo

$$\delta \dot{x} = \mathfrak{J}\mathcal{H}(x(t), t)\delta x. \quad (1.10)$$

Já que o produto de transformações lineares (infinitesimais) é necessariamente linear, podemos definir a matriz  $\mathcal{M}_t$  tal que

$$\delta x_t = \mathcal{M}_t \delta x_0. \quad (1.11)$$

Devemos notar que para os pontos críticos do Hamiltoniano, onde  $\partial H/\partial x = 0$ , a órbita de  $x_0$  se reduz a um ponto de equilíbrio, que satisfaz a teoria a seguir.

O estudo das possíveis matrizes  $\mathcal{M}_t$ , ou mapas lineares, que podem ocorrer nos sistemas Hamiltonianos é de fundamental importância. A propriedade mais importante é que preservam a *área simplética* (ou *ação*) de qualquer circuito fechado  $\gamma$  no espaço de fases:

$$S = \sum_{\ell=1}^L S_{\ell} = \sum_{\ell=1}^L \oint_{\gamma_{\ell}} p_{\ell} \cdot dq_{\ell} = \oint_{\gamma} p \cdot dq, \quad (1.12)$$

onde  $\gamma_{\ell}$  são as projeções de  $\gamma$  nos  $L$  planos conjugados  $(p_{\ell}, q_{\ell})$  como se mostra na figura 1.1

Esta propriedade resulta da conservação de área simplética do paralelogramo formado por todo par de vetores  $\xi$  e  $\eta$ :

$$\sum_{\ell=1}^L (\xi_{p_{\ell}} \eta_{q_{\ell}} - \xi_{q_{\ell}} \eta_{p_{\ell}}) = (\mathfrak{J}\xi) \cdot \eta \equiv \xi \wedge \eta, \quad (1.13)$$

onde esta última identidade define o *produto simplético* de  $\xi$  e  $\eta$ . Notemos que as projeções nos  $L$  planos conjugados também são paralelogramos, como se mostra na figura 1.2 Já que

$$\frac{d}{dt}(\xi \wedge \eta) = (\mathfrak{J}\dot{\xi}) \cdot \eta + (\mathfrak{J}\xi) \cdot \dot{\eta} = (\mathfrak{J}\mathfrak{J}\mathcal{H}\xi) \cdot \eta + (\mathfrak{J}\xi) \cdot \mathfrak{J}\mathcal{H}\eta = -(\mathcal{H}\xi) \cdot \eta + \xi \cdot (\mathcal{H}\eta) = 0, \quad (1.14)$$

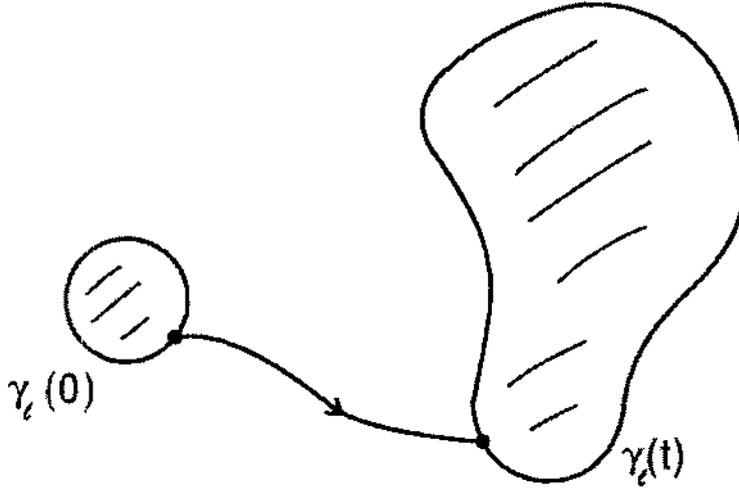


Figura 1.1: Uma curva fechada  $\gamma$  no espaço de fases se projeta em  $L$  curvas fechadas  $\gamma_t$  nos  $L$  planos conjugados. Em geral a área dentro de cada circuito evolue, deixando invariante a área simplética total (1.12).

a mudança total desta área simplética é nula. Usando que  $\xi_t = \mathcal{M}_t \xi$  e  $\eta_t = \mathcal{M}_t \eta$ , devemos então impor que

$$(\mathfrak{J} \mathcal{M}_t \xi) \cdot (\mathcal{M}_t \eta) = \mathfrak{J} \xi \cdot \eta, \quad (1.15)$$

que se reduz a

$$\mathcal{M}_t' \mathfrak{J} \mathcal{M}_t = \mathfrak{J}, \quad (1.16)$$

a definição de uma *matriz simplética*. Assim, o fluxo linearizado na vizinhança de toda órbita num sistema Hamiltoniano é determinado por uma matriz simplética.

Uma consequência imediata da propriedade simplética é que

$$\det \mathcal{M}_t = 1. \quad (1.17)$$

Tomando o determinante do produto em (1.16), obtemos o módulo unidade. Então a continuidade, com o fato de que  $\mathcal{M}_0 = \mathbf{1}$ , a matriz unidade, determina o sinal. Portanto o fluxo linear preserva o volume no espaço de fases.

É fácil ver que o produto de matrizes simpléticas é também simplético. Isto é, as matrizes simpléticas formam um grupo. Segue que transformações de semelhança

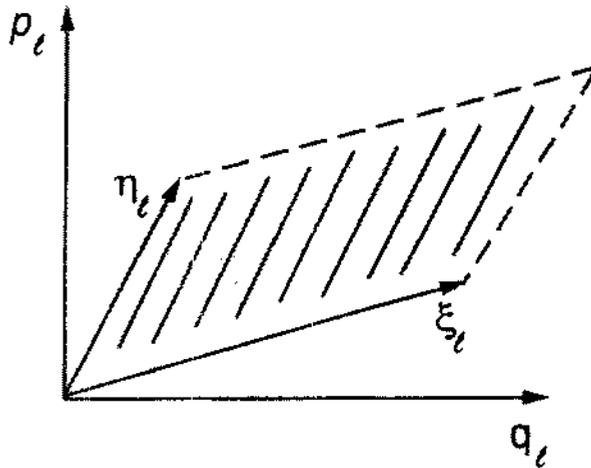


Figura 1.2: O paralelogramo formado pelos vetores  $\xi$  e  $\eta$  no espaço de fases é projetado em paralelogramos em cada um dos planos conjugados.

entre matrizes simpléticas são simpléticas. Pode-se mostrar que matrizes simpléticas diagonalizadas ou levadas à sua forma normal de Jordan também são simpléticas, portanto isto também é uma propriedade das matrizes que as reduzem, que assim podem ser complexas. Uma característica fundamental é que se  $\gamma$  é um autovalor de  $\mathcal{M}$ ,  $\gamma^{-1}$  também é. Um estudo mais detalhado das matrizes simpléticas será realizado no Capítulo 5.

As propriedades que recordamos aqui para os sistemas lineares podem ser estendidas para fluxos não lineares. Todo circuito pode ser dividido num número arbitrário de paralelogramos para os quais a área simplética é preservada no limite, de forma que a área simplética total é invariante. Da mesma forma, todo volume no espaço de fases pode ser infinitamente subdividido em hipercubos para os quais vale a conservação do volume.

## 1.2 Funções geratrizes de centros e cordas

Uma vez integradas as equações do movimento o fluxo pode ser obtido a partir das funções geratrizes; neste contexto a função geratriz de centros  $S_t(x)$  tem um papel privilegiado em tudo o que segue; para uma exposição mais detalhada ver referência

[32]. Suponha que o ponto  $x_-$  se move até o ponto  $x_+$ , num dado tempo  $t$ . Teremos então;

$$x_{\pm} = x \pm \frac{\xi}{2} \quad (1.18)$$

onde a corda  $\xi$  é obtida a partir do centro  $x$  diferenciando a função geratriz de centros  $S_t(x)$ , que abreviaremos em função de centros,

$$\xi = -\mathfrak{J} \frac{\partial S_t(x)}{\partial x}. \quad (1.19)$$

Para um tempo curto  $t = \varepsilon$ , identificamos

$$S_{\varepsilon}(x) = -\varepsilon H(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (1.20)$$

já que o fluxo é simplesmente

$$x_+ = x_- + \xi = x_- + \varepsilon \mathfrak{J} \frac{\partial H}{\partial x} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (1.21)$$

Inclusive para tempos finitos, a corda  $\xi$  será tangente à camada  $S(x) = \text{constante}$ , como se mostra na figura 1.3, pois  $\dot{x}$  é tangente a  $H(x) = E$ . Em particular, os pontos críticos de  $S(x)$  correspondem aos pontos fixos da transformação canônica. Estes coincidem com os pontos de equilíbrio de  $H(x)$  no caso de fluxos Hamiltonianos.

Os movimentos mais simples que podemos considerar são aqueles gerados por uma Hamiltoniana linear  $H(x) = -a \wedge x$ . As equações de Hamilton são então  $\dot{x} = a$ . Assim, após integração imediata o fluxo a tempo  $t$  é  $x_+ = ta + x_-$ . Em resumo, a transformação canônica que representa o fluxo é meramente a *translação* uniforme do espaço das fases  $x_+ = T_{\alpha}(x_-)$ , onde  $\alpha = ta$ . Encontraremos que as translações tem um papel fundamental na teoria a seguir. Evidentemente, a composição de translações,  $T_{\alpha_2} \circ T_{\alpha_1}(x_-) = T_{\alpha_1 + \alpha_2}(x_-)$  forma um grupo contínuo. A função de centros para  $T_{\alpha}$  é simplesmente a função linear  $S(x) = \alpha \wedge x$ , de forma que a corda  $\xi = \alpha$ , uma constante. Este é o único caso onde a relação para tempos curtos (1.20) entre  $H(x)$  e  $S(x)$  pode ser extrapolada para todo tempo.

Funções geratrizes de centros não estão livres de cáusticas, mas esse problema é resolvido definindo complementarmente a *função geratriz de cordas*  $S(\xi)$  para a

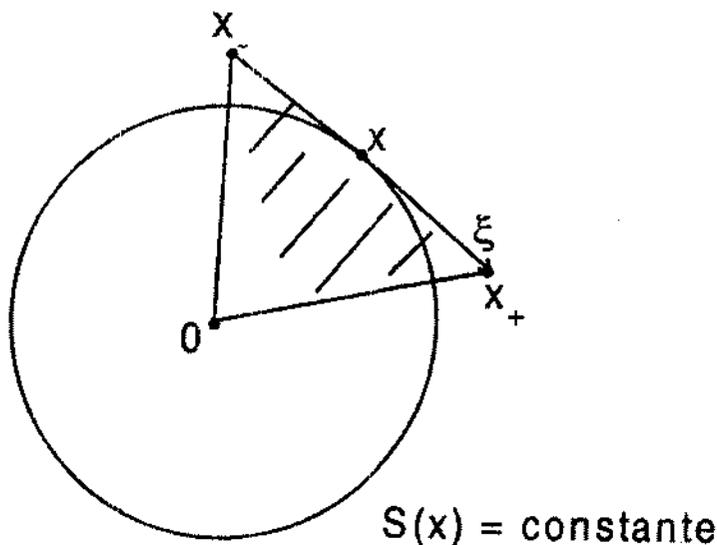


Figura 1.3: A corda  $\xi$  é sempre tangente à camada  $S(x) = \text{constante}$ . Se  $S(x)$  é quadrática, a função de centros é igual, em cada ponto, à área simplética do triângulo que  $\xi(x)$  sustenta com a origem.

transformação  $x_- \rightarrow x_+$ , ou abreviando, *função de cordas*. Ainda usamos (1.18), mas agora obtemos o centro como

$$x = \mathfrak{J} \frac{\partial S}{\partial \xi}. \quad (1.22)$$

O exemplo mais simples de uma função de cordas é:  $S(\xi) = \xi \wedge a$  que é linear. Obtemos então que  $a$  é o centro para todas as cordas  $\xi$ . Em resumo, isto é a função geratriz para a reflexão  $R_a$ . Assim, se uma representação em termo de centros é complementar a outra representação em termo de cordas, num sentido similar, translações  $T_\xi$  são complementares das reflexões num ponto:  $R_x$ .

O papel geral de reflexões e translações na definição das funções geratrizes de centros e cordas é revelado quando inquirimos sobre a existência de uma corda para um dado centro, ou vice versa. Quando uma transformação canônica  $C : x_- \rightarrow x_+$  é descrita pela função de centros  $S(x)$ , a existência de uma corda  $\xi(x)$  equivale à existência de um ponto  $x_-(x)$ , tal que  $C(x_-) = R_x(x_-)$ . Como  $R_x \circ R_x = 1$ , a transformação identidade, obtém-se que o ponto  $x_-$  é determinado como o ponto fixo da composição de  $R_x$  com  $C$  :

$$x_- = R_x \circ C(x_-), \quad (1.23)$$

como mostra a figura 1.4.

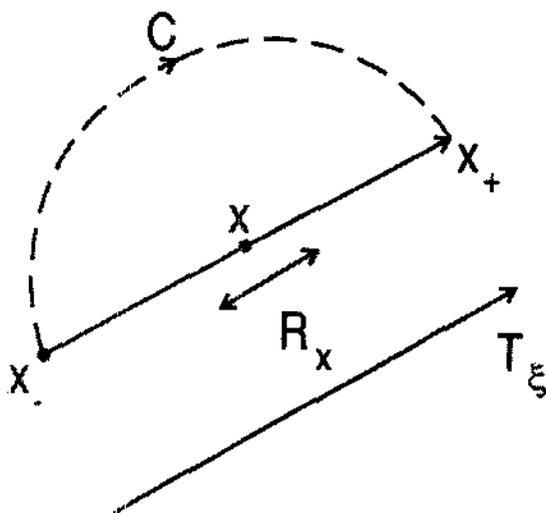


Figura 1.4: A representação de centros descreve a transformação canônica  $C : x_- \rightarrow x_+$  como uma reflexão de  $R_x$  cujo centro  $x$  é tal que  $x_-$  é o ponto fixo do mapa composto  $R_x \circ C$ . A função de cordas representa a mesma transformação canônica como uma translação  $T_\xi$  de vetor  $\xi$ , tal que  $x_-$  é o ponto fixo do mapa  $T_{-\xi} \circ C$ .

Inversamente, se descrevermos a transformação  $C$  pela função de cordas  $S(\xi)$ , o centro da dada corda  $x(\xi)$  fica definido quando pudermos achar um ponto  $x_-(\xi)$ , para o qual  $C(x_-) = T_\xi(x_-)$ , como mostra a figura 1.4. Nesse caso o ponto  $x_-$  é definido como o ponto fixo da composição de  $C$  com  $T_{-\xi}$ :

$$x_- = T_{-\xi} \circ C(x_-). \quad (1.24)$$

Assim, a descrição pela função geratriz de centros é como se “víssemos a transformação” como uma reflexão, enquanto a função de cordas é como se “a víssemos” como uma translação. A possibilidade de usar uma ou outra descrição depende da existência do ponto fixo para a composição de transformações apropriada. Vimos que  $S(x) = \alpha \wedge x$  gera a translação,  $T_\alpha$ , enquanto  $S(\xi) = \xi \wedge a$  gera a reflexão,  $R_a$ . Assim, a existência do ponto fixo requisitado depende do produto de translações e reflexões.

Sabemos que o conjunto de todas as translações forma um grupo,

$$T_{\xi_2} \circ T_{\xi_1} = T_{\xi_1 + \xi_2}. \quad (1.25)$$

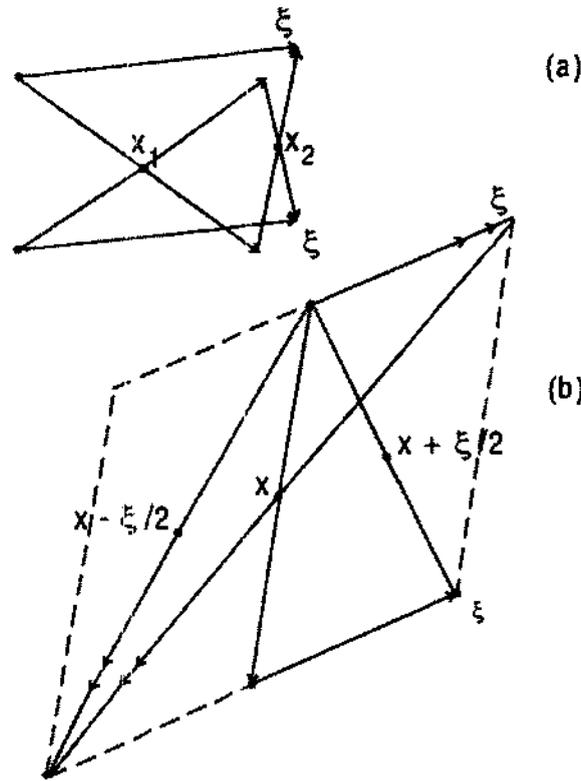


Figura 1.5: (a) A composição de duas reflexões  $R_{x_2} \circ R_{x_1}$  é uma translação uniforme  $T_\xi$ , onde  $\xi = 2(x_2 - x_1)$ . (b) a composição de uma reflexão  $R_x$  com uma translação  $T_\xi$  é uma reflexão no centro  $x \pm \xi/2$  (dependendo da ordem das transformações).

ao passo que no caso das reflexões isto é falso. De fato, podemos facilmente verificar com referência à figura 1.5(a) que o produto de duas reflexões é sempre uma translação uniforme:

$$R_{x_2} \circ R_{x_1} = T_{2(x_2 - x_1)}. \quad (1.26)$$

Porém, como o produto de uma reflexão com uma translação é uma reflexão, podemos escrever, com base na figura 1.5(b), que

$$T_\xi \circ R_x = R_{x + \xi/2}, \quad (1.27)$$

$$R_x \circ T_\xi = R_{x - \xi/2}, \quad (1.28)$$

de modo que, juntos, os conjuntos das reflexões e das translações formam um grupo.

As funções de corda e centro estão reciprocamente relacionadas por transformações de Legendre. De fato, segundo (1.19) podemos escrever a diferencial de

com  $x_1$  e  $x_2$  obtidos pela condição [32]

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0. \quad (1.46)$$

O ponto importante que temos de considerar para generalizar a regra de composição (1.45) é que, segundo (1.43), as derivadas da área simplética do triângulo  $\Delta_3$  estão especificadas pelos lados correspondentes. O lado  $\eta$  não depende do centro  $x$ , já que ele deve ser considerado como a translação resultante das reflexões nos pontos  $x_1$  e  $x_2$ . Toda composição destas duas reflexões gera a mesma translação de corda  $\eta = 2(x_2 - x_1)$  segundo (1.26), assim podemos colocar o centro  $x$  em qualquer lugar sem mudar  $\eta$ .

Se agora adicionarmos mais duas reflexões em pontos arbitrários  $x_3$  e  $x_4$ , de novo obtemos uma translação uniforme de corda  $2(x_3 - x_4)$ . Como esta tem também um centro livre, sempre podemos as juntar e obter a corda  $\eta = 2(x_4 - x_3) + 2(x_2 - x_1)$  como mostra a figura 1.7. Evidentemente, podemos repetir este processo para

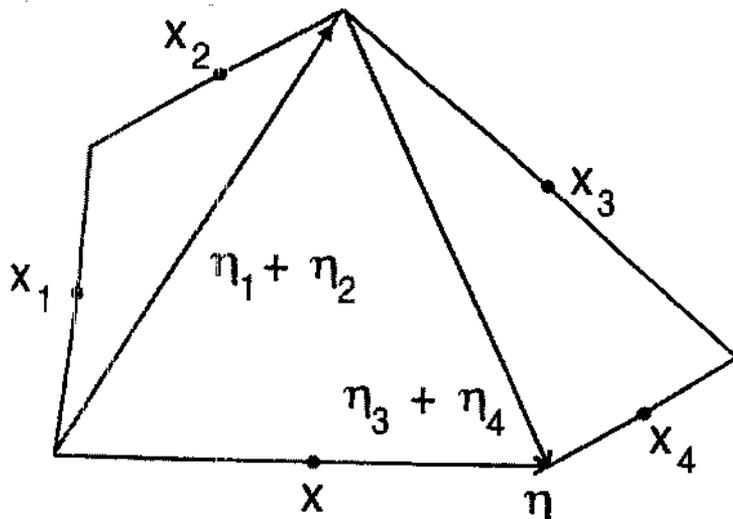


Figura 1.7: A composição de quatro transformações canônicas define um pentágono com pontos médios em  $x_1, x_2, x_3$  e  $x$ . O triângulo  $\Delta_3'$  formado por  $\eta_1 + \eta_2, \eta_3 + \eta_4$  e  $\eta$  depende da posição de  $x_1 \cdots x_4$  mas não de  $x$ .

quaisquer número par de reflexões e assim obter o lado remanecente do polígono

$$\eta = 2 \sum_{j=1}^{2n} (-1)^j x_j. \quad (1.47)$$

$S(x)$  como

$$dS = \xi(x) \wedge dx. \quad (1.29)$$

Assim, se definimos

$$F(x, \xi) = \xi \wedge x - S(x) \quad (1.30)$$

e

$$S(\xi) = F(x(\xi), \xi), \quad (1.31)$$

com  $x(\xi)$  dado pela prescrição  $\partial F/\partial x = 0$ , obtemos precisamente a equação (1.22).

Se considerarmos  $x$  e  $\xi$  como coordenadas alternativas para o *espaço de fases duplo* (tem  $4L$  dimensões) definido pelas posições iniciais  $x_-$  e finais  $x_+$ , existe um superfície de  $(2L)$ -dimensões na qual

$$\oint \xi \wedge dx = 0, \quad (1.32)$$

devido ao fato de (1.29) ser uma diferencial exata. As coordenadas canônicas do espaço de fases duplo são  $(x, \mathfrak{J}\xi)$  ou  $(-\mathfrak{J}x, \xi)$  [32].

Fazendo outros intercâmbios de variáveis chegamos às funções geratrizes tradicionais da mecânica clássica [32]. De fato, lembrando que  $q = (q_- + q_+)/2$ , definimos

$$F\left(\frac{q_+ + q_-}{2}, p\right) = S\left(\frac{q_+ + q_-}{2}\right) + p(q_+ - q_-) \quad (1.33)$$

e verificamos que a função

$$S(q_+, q_-) = F\left(\frac{q_+ + q_-}{2}, p(q_+ - q_-)\right), \quad (1.34)$$

com  $p(q_+ - q_-)$  dado a partir de  $\partial F/\partial p = 0$ , é a função geratriz de posições. Esta gera a transformação canônica determinada implicitamente através das equações familiares

$$p_+ = \frac{\partial S}{\partial q_+}, \quad p_- = -\frac{\partial S}{\partial q_-}. \quad (1.35)$$

Uma característica importantíssima das funções geratrizes de cordas e centros é a invariância destas perante transformações simpléticas. Seja uma transformação simplética de coordenadas:

$$x \rightarrow x' = \mathcal{N}x \quad (1.36)$$

$$\xi \rightarrow \xi' = \mathcal{N}\xi \quad (1.37)$$

onde  $\mathcal{N}$  é uma matriz simplética. Para tal transformação, a conservação da área simplética (1.29) implica em  $S(x) = S(x')$  e analogamente  $S(\xi) = S(\xi')$ .

Como já discutimos, o grupo simplético tem um papel preponderante na mecânica clássica. Uma transformação simplética inhomogênea corresponde a uma função de centro na forma

$$S(x) = xBx + \alpha \wedge x, \quad (1.38)$$

onde a matriz simétrica  $B$  é a *parametrização de Cayley* [48] da matriz simplética  $\mathcal{M}$

$$\mathfrak{J}B = \frac{(1 - \mathcal{M})}{(1 + \mathcal{M})}. \quad (1.39)$$

Já a função geratriz de cordas terá a forma:

$$S(\xi) = \frac{1}{4}\xi\beta\xi + a \wedge \xi \quad (1.40)$$

onde agora

$$\mathfrak{J}\beta = \frac{(\mathcal{M} + 1)}{(\mathcal{M} - 1)}. \quad (1.41)$$

### 1.3 Princípio Variacional de Centros

Vamos ver agora como obter a função de centros para a composição de duas transformações canônicas,  $S_1(x)$  e  $S_2(x)$  respectivamente. A prescrição é que a corda  $\eta_1$  em  $x_1$  na primeira transformação se una com a corda  $\eta_2$  em  $x_2$ , para formar a corda a través de um ponto  $x$ , centro da composição. Referimo-nos ao triângulo resultante formado por  $\eta_1, \eta_2$  e  $\eta$  como o *triângulo circunscrito* aos pontos médios  $x_1, x_2$ , e  $x$ , em oposição ao *triângulo inscrito* com cantos nesses pontos [32].

Esta geometria simples é mostrada na figura 1.6. É importante notar que um polígono circunscrito no espaço de fases completo se projeta em  $L$  polígonos nos planos conjugados que são circunscritos às projeções dos pontos médios. Assim a

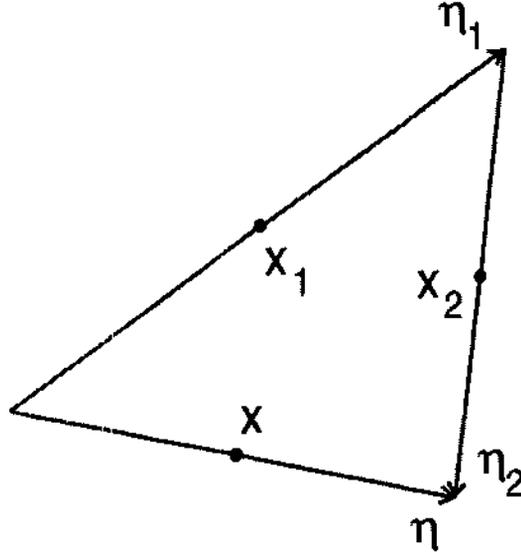


Figura 1.6: A composição de duas transformações canônicas requer que a corda resultante  $\eta$  feche o triângulo cujos lados são centrados nos três pontos  $x_1, x_2$  e  $x$ .

geometria simplética é reduzida à geometria plana. A área simplética do triângulo circunscrito é a soma das áreas das projeções:

$$\Delta_3(x, x_1, x_2) = 2(x_1 - x) \wedge (x_2 - x) = 2[x_1 \wedge x_2 + x_2 \wedge x + x \wedge x_1] , \quad (1.42)$$

de onde obtemos

$$\frac{\partial \Delta_3}{\partial x_1} = -2\mathfrak{J}(x_2 - x) = -\mathfrak{J}\eta_1 \quad , \quad \frac{\partial \Delta_3}{\partial x_2} = 2\mathfrak{J}(x_1 - x) = -\mathfrak{J}\eta_2 , \quad (1.43)$$

onde  $\eta_j$  é o  $j$ 'ésimo lado de  $\Delta_3$ , na direção horária.

A composição desejada das duas transformações canônicas é

$$\xi_1 \equiv -\mathfrak{J} \frac{\partial S_1}{\partial x_1} = \eta_1 \quad \text{e} \quad \xi_2 \equiv -\mathfrak{J} \frac{\partial S_2}{\partial x_2} = \eta_2 , \quad (1.44)$$

o que é equivalente a impor derivadas nulas para

$$S(x, x_1, x_2) = S_1(x_1) + S_2(x_2) + \Delta_3(x, x_1, x_2) , \quad (1.45)$$

sempre independente de  $x$ , assim como para o caso do triângulo.

A generalização desta regra de composição para um número par de transformações é [32]

$$S(x) = S_1(x_1) + \cdots + S_2(x_{2n}) + \Delta_{2n+1}(x, x_1, \cdots, x_{2n}) \quad (1.48)$$

com  $\frac{\partial S}{\partial x_j} = 0$ . Aqui  $\Delta_{2n+1}(x, x_1, \cdots, x_{2n})$  é o único polígono com lados centrados em  $x, x_1, \cdots, x_{2n}$ .

Compondo um número par  $m$  de fluxos num tempo  $\varepsilon = t/m$ , obtemos segundo [32] a função de centros

$$\begin{aligned} S_t(x) &= \sum_{n=1}^m S_{t/m}(x_n) + \Delta_{m+1}(x, x_1, \cdots, x_m) \\ &= -\frac{t}{m} \sum_{n=1}^m H(x_n) + \Delta_{m+1}(x, x_1, \cdots, x_m) + O\left(\frac{t^3}{m^2}\right). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Aumentando o número de subdivisões do intervalo até infinito, obtemos

$$S_t(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{t}{m} \sum_{n=1}^m H(x_n) + \Delta_{m+1}(x, x_1, \cdots, x_m) \right\}. \quad (1.50)$$

O polígono  $\Delta_{m+1}$  tem um lado grande  $\xi$  que passa pelo centro  $x$  e  $m$  cordas menores

$$\eta_j = \xi_j \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{t}{m} \mathfrak{J} \frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad (1.51)$$

ou seja, são tangentes à órbita quando  $m \rightarrow \infty$ . Através do processo limite, garantimos  $\partial S_t / \partial x_j = 0$ , e assim chegamos ao *princípio variacional de centros* [32]: A ação de centros

$$S_t(x) = \oint_x p \cdot dq - \int H(x(t)) dt \quad (1.52)$$

é estacionária ao longo da trajetória clássica. Os caminhos a serem comparados tem pontos extremos centrados no ponto  $x$ . A segunda integral é avaliada ao longo do caminho, enquanto a área simplética definida pela primeira integral é fechada pela corda em  $x$ , assim como se vê na figura 1.8. Pode-se mostrar que  $S_t(x)$  é necessariamente uma função ímpar de  $t$ .

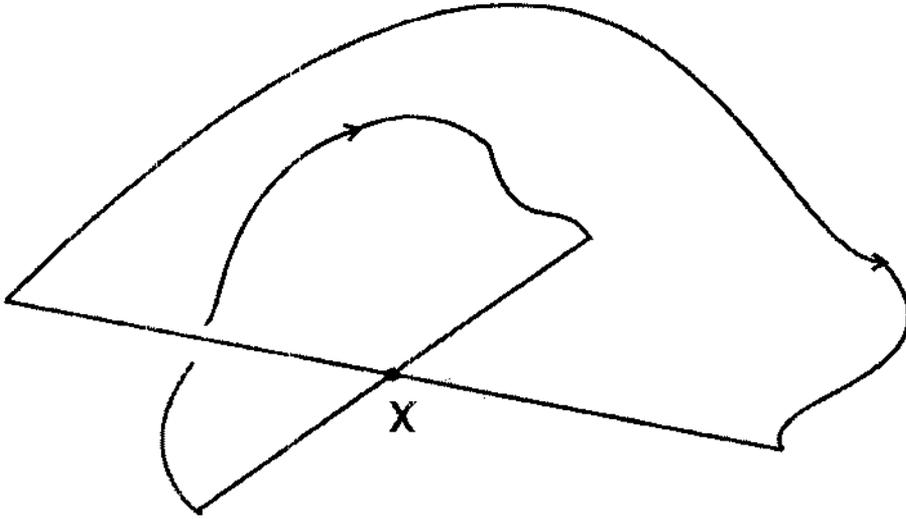


Figura 1.8: Dois caminhos possíveis, cujas ações são comparadas pelo princípio variacional de centros.

## 2 Mecânica Quântica e Representação de Weyl no plano:

Como o capítulo anterior, este baseia-se nos resultados obtidos na referência [32], aqui o principal objetivo é mostrar os resultados mais importantes decorrentes do uso da representação de Weyl no plano. Veremos o papel de centros e cordas dentro da própria mecânica quântica. Para tal propósito passemos ao estudo da dinâmica quântica.

### 2.1 Cinemática e Dinâmica Quântica

O estado de um sistema dinâmico é representado por um vetor  $|\psi\rangle$  no espaço de Hilbert (ou espaço de Banach) de acordo com a mecânica quântica, em oposição a um ponto no espaço de fases clássico. Este espaço de Hilbert é determinado pelo espaço vetorial dos estados  $|\psi\rangle$  junto com um produto Hermitiano  $\langle\psi'|\psi\rangle$ .

A evolução dos estados para um tempo finito, em analogia às transformações canônicas que temos estudado, resulta da ação de um *operador linear unitário*  $\hat{U}_t$ :

$$|\psi_t\rangle = \hat{U}_t |\psi_0\rangle, \quad (2.1)$$

com a propriedade de que o seu adjunto  $\hat{U}_t^\dagger$  é igual ao inverso  $\hat{U}_t^{-1}$ . A família a um parâmetro de operadores de evolução  $\hat{U}_t$  são as soluções da *equação de Schrödinger*:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_t = \hat{H} \hat{U}_t, \quad (2.2)$$

onde o *operador Hamiltoniano*  $\hat{H}$  é *Hermitiano*, ou *auto-adjunto*:  $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$ .

Se o Hamiltoniano for independente do tempo (autônomo), podemos integrar (2.2) obtendo imediatamente

$$\hat{U}_t = \exp(-i\hbar^{-1}t\hat{H}), \quad (2.3)$$

onde definimos a exponencial pela sua série de Taylor.

Sendo que os autovalores de operadores Hermitianos são reais, podemos em muitos casos identificá-los com os resultados de medições idealizadas. Estes equivalentes quânticos de variáveis clássicas são chamados de *observáveis*. Para um estado

arbitrário qualquer  $|\psi\rangle$ , o valor médio predito para a medição da observável  $\hat{A}$  é

$$\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle. \quad (2.4)$$

Consideremos agora a “evolução” de uma variável clássica  $A(x)$  no fluxo Hamiltoniano  $H(x)$ . Para qualquer posição inicial  $x_0$ , obtemos  $A_t(x_0) = A(x(x_0, t))$ . Assim  $A_t$  resulta de considerar os estados clássicos (ou seja, pontos no espaço de fases) fixos e atribuir as modificações sofridas, devido ao movimento do estado, ao próprio  $A$ . Se agora assumirmos o mesmo ponto de vista para a evolução quântica (“a visão” de Heisenberg) vemos que, atribuindo as mudanças de  $\langle A \rangle_t$  a  $\hat{A}$  é não a  $|\psi\rangle$  em (2.4) implica em

$$\hat{A}_t = \hat{U}_t^\dagger \hat{A} \hat{U}_t, \quad (2.5)$$

de onde obtemos as *equações de Heisenberg*

$$\frac{d}{dt} \hat{A} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{A}, \hat{H}]. \quad (2.6)$$

É bem sabido que (2.6) corresponde precisamente à equação clássica  $\dot{A} = \{A, H\}$ , definida em termo dos colchetes de Poisson [49, 50]. Particularmente, se  $A$  for simplesmente uma componente da posição ou do momento, obtemos assim uma das equações de Hamilton.

Assim, analogamente ao caso clássico define-se um sistema dinâmico quântico pela terna  $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \hat{U})$ , onde  $\mathcal{H}$  é um espaço de Hilbert separável,  $\mathcal{A}$  é a álgebra dos observáveis em  $\mathcal{H}$  e,  $\hat{U} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é uma bijeção unitária, ou seja, o operador evolução do sistema quântico. A ergodicidade quântica é definida segundo Von Neumann [51] como:

**Definição:** o sistema dinâmico quântico a tempo discreto  $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \hat{U})$  é ergódico se e somente se, para toda observável  $\hat{A} \in \mathcal{A}$ :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \langle \psi | \hat{U}^k \hat{A} \hat{U}^{-k} | \psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \langle e_n | \hat{A} | e_n \rangle \quad (2.7)$$

onde  $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |e_n\rangle$  é um estado qualquer no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  decomposto na base  $|e_n\rangle$  de autoestados de  $\hat{U}$ .

Denotando  $\hat{A}(k) = \hat{U}^k \hat{A} \hat{U}^{-k}$ , a conseqüente definição de mixing quântico é:

**Definição :** o sistema dinâmico quântico  $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \hat{U})$  é mixing se e somente se, para todo par de observáveis  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  :

$$\begin{aligned} & \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \langle \psi | \hat{U}^l \hat{A}(k) \hat{U}^{-l} \hat{B}(k) | \psi \rangle \\ &= \left( \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \langle \psi | \hat{A}(k) | \psi \rangle \right) \left( \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \langle \psi | \hat{B}(k) | \psi \rangle \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

A discussão acima é geral em qualquer espaço de Hilbert onde a mecânica quântica é construída em forma independente do seu limite clássico. Mas este espaço de Hilbert está caracterizado pela geometria do espaço de fases correspondente; ou seja tanto a variedade quanto a sua estrutura simplética (1.6). Assim a especificação do espaço de Hilbert tem um papel fundamental na determinação das propriedades físicas do sistema.

Nesta seção estudaremos o espaço de Hilbert (espaço de Banach neste caso)  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ . Este tem como espaço de fases clássico associado um plano, e está composto pelas funções de quadrado integrável definidas nos reais, mas pode ser estendido para incluir distribuições delta de Dirac assim como ondas planas [50]. Duas bases de  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$  aparecem em analogia com as variáveis canônicas clássica; em primeiro lugar estamos interessados na posição do sistema  $q_0$ , que descrevemos como o autovalor do operador  $\hat{q}$  para o autoestado  $|q_0\rangle$ :

$$\hat{q}|q_0\rangle = q_0|q_0\rangle, \quad (2.9)$$

e da mesma forma o momento do sistema:

$$\hat{p}|p_0\rangle = p_0|p_0\rangle. \quad (2.10)$$

O postulado fundamental é que as relações entre os colchetes de Poisson das coordenadas (1.6) são mantidas a nível quântico para os comutadores dos operadores  $\hat{q}_k$  e  $\hat{p}_j$

$$[\hat{q}_k, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{kj} \hat{1}, \quad (2.11)$$

onde  $\hbar$  é a constante de Planck. O fato dos comutadores (2.11) serem múltiplos do operador identidade (e com a dimensão da ação) tem riquíssimas conseqüências.

Uma vez definida a base, todo estado de  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$  pode ser univocamente escrito como

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(q)|q\rangle dq. \quad (2.12)$$

onde  $\psi(q)$  é uma função de quadrado integrável. Para completar a estrutura do espaço de Hilbert precisa-se de um produto Hermitiano

$$\langle q|q'\rangle \equiv \delta(q - q'), \quad (2.13)$$

assim,

$$\langle \psi|\psi'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(q)\psi'(q) dq. \quad (2.14)$$

Esta estrutura Hermitiana nos permite definir o traço de um operador  $\hat{A}$

$$Tr(\hat{A}) \equiv \int \langle q|\hat{A}|q\rangle dq. \quad (2.15)$$

## 2.2 Translações e Reflexões Quânticas

Construímos agora a família de operadores unitários

$$\hat{T}_q = \exp(-i\hbar^{-1}q \cdot \hat{p}), \quad \text{e} \quad \hat{T}_p = \exp(i\hbar^{-1}p \cdot \hat{q}). \quad (2.16)$$

Seguindo [32] definimos os operadores que correspondem a uma translação de corda  $\xi = (\xi_p, \xi_q)$  no espaço de fases

$$\begin{aligned} \hat{T}_\xi &\equiv \exp\left(\frac{i}{\hbar}\xi \wedge \hat{x}\right) \equiv \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\xi_p \cdot \hat{q} - \xi_q \cdot \hat{p})\right] \\ &= \hat{T}_p \hat{T}_q \exp\left[-\frac{i}{2\hbar}\xi_p \cdot \xi_q\right] = \hat{T}_q \hat{T}_p \exp\left[\frac{i}{2\hbar}\xi_p \cdot \xi_q\right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde naturalmente  $\hat{x} = (\hat{p}, \hat{q})$ . Em outras palavras, a ordem de  $\hat{T}_p$  e  $\hat{T}_q$  só afeta o produto numa fase global. Isso nos permite definir as translações como fizemos acima já que, segundo (2.5), operadores unitários atuam em pares conjugados para

transformar outros operadores. Porém, veremos que a forma detalhada deste fator de fase tem um papel importante na teoria a seguir. O operador  $\hat{T}_\xi$  é também conhecido como o *operador de Heisenberg*. Com  $\hat{T}_\xi$  atuando no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_R$ , temos:

$$\hat{T}_\xi |q_a\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\xi p(q_a + \frac{\xi q}{2})} |q_a + \xi_q\rangle \quad (2.18)$$

e

$$\hat{T}_\xi |p_a\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\xi q(p_a + \frac{\xi p}{2})} |p_a + \xi_p\rangle. \quad (2.19)$$

Vemos assim claramente a interpretação de  $\hat{T}_\xi$  como operadores de translação no espaço de fases.

Comparando com as translações clássicas, as propriedades de grupo são mantidas a menos de um fator de fase:

$$\hat{T}_{\xi_2} \hat{T}_{\xi_1} = \hat{T}_{\xi_1 + \xi_2} \exp\left[\frac{-i}{2\hbar}\xi_1 \wedge \xi_2\right] = \hat{T}_{\xi_1 + \xi_2} \exp\left[\frac{-i}{\hbar}D_3(\xi_1, \xi_2)\right], \quad (2.20)$$

onde  $D_3$  é a área simplética do triângulo determinado por dois dos seus lados. Evidentemente, a inversa do operador unitário  $\hat{T}_\xi^{-1} = \hat{T}_\xi^\dagger = \hat{T}_{-\xi}$ . Podemos generalizar (2.20) e escrever

$$\hat{T}_{\xi_1} \dots \hat{T}_{\xi_j} = \hat{T}_{\xi_1 + \dots + \xi_j} e^{\frac{i}{\hbar}D_{j+1}(\xi_1, \dots, \xi_j)} \quad (2.21)$$

onde  $D_{j+1}(\xi_1, \dots, \xi_j)$  denota a área simplética do polígono com  $j + 1$  lados formados pelas cordas,  $(\xi_1, \dots, \xi_j)$  ligadas na ordem  $1, 2, \dots, j$ .

O operador que corresponde a uma reflexão no ponto  $x = (p, q)$  no espaço de fases é [32]

$$\hat{R}_x \equiv (4\pi\hbar)^{-L} \int d\xi \quad e^{\frac{i}{\hbar}x \wedge \xi} \hat{T}_\xi. \quad (2.22)$$

Este operador tem as seguintes propriedades [32]

$$\hat{T}_\xi = (\pi\hbar)^{-L} \int dx \quad e^{-\frac{i}{\hbar}x \wedge \xi} \hat{R}_x, \quad (2.23)$$

$$\hat{R}_x \hat{T}_\xi = \hat{R}_{x - \xi/2} e^{-\frac{i}{\hbar}x \wedge \xi}, \quad (2.24)$$

$$\hat{T}_\xi \hat{R}_x = \hat{R}_{x+\xi/2} e^{-\frac{i}{\hbar} x \wedge \xi}, \quad (2.25)$$

e

$$\hat{R}_{x_1} \hat{R}_{x_2} = \hat{T}_{2(x_2-x_1)} e^{\frac{i}{\hbar} 2x_1 \wedge x_2}. \quad (2.26)$$

Verificamos assim que  $\hat{T}_\xi$  e  $\hat{R}_x$  formam um grupo análogo às translações e reflexões clássicas no espaço de fases. De (2.26) vemos que

$$\hat{R}_x \hat{R}_x = 1. \quad (2.27)$$

Obviamente  $\hat{R}_x^\dagger = \hat{R}_x$ , assim  $\hat{R}_x$  foi definido como um operador unitário.

Examinemos os traços dos operadores unitários de translação e reflexão. Começando com as translações,

$$\begin{aligned} Tr \hat{T}_\xi &= \int \langle q | T_\xi | q \rangle dq = (2\pi\hbar)^L \delta(\xi_p) \delta(\xi_q) \\ &= (2\pi\hbar)^L \delta(\xi), \end{aligned} \quad (2.28)$$

e tomando a transformada de Fourier,

$$Tr \hat{R}_x = Tr 2^L \hat{R}_x = (2\pi\hbar)^{-L} \int d\xi \exp \left[ \frac{i}{\hbar} x \wedge \xi \right] Tr \hat{T}_\xi = 1, \quad (2.29)$$

onde, agora é conveniente definir a transformada de Fourier exata  $\hat{R}_x$  de  $\hat{T}_\xi$ . Lembremos que a transformação clássica  $R_x$  tem um único ponto fixo (o próprio  $x$ ), enquanto  $T_\xi$  tem pontos fixos se e somente se  $\xi = 0$ , quando então todos os pontos serão fixos. Estes resultados estão em acordo com a nossa intuição da correspondência clássica dos traços de operadores unitários, ou seja, os traços estão relacionados com pontos fixos clássicos.

## 2.3 Representações de Weyl e de Cordas

As propriedades acima permitem expressar qualquer operador  $\hat{A}$  como uma superposição linear de operadores de translação

$$\hat{A} = \int \frac{d\xi}{(2\pi\hbar)^L} A(\xi) \hat{T}_\xi. \quad (2.30)$$

A confirmação resulta de

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{T}_{-\xi}\hat{A}) &= \text{Tr} \int \frac{d\xi'}{(2\pi\hbar)^L} A(\xi')\hat{T}_{-\xi}\hat{T}_{\xi'} \\ &= \int \frac{d\xi'}{(2\pi\hbar)^L} A(\xi') \exp \left[ \frac{i}{2\hbar} \xi' \wedge \xi \right] \text{Tr}\hat{T}_{\xi'-\xi} = A(\xi) , \end{aligned} \quad (2.31)$$

A analogia com as funções geratrizes de cordas é discutida em [32]. Da mesma forma podemos representar o operador  $\hat{A}$  como uma superposição de reflexões:

$$\hat{A} = \int \frac{dx}{(2\pi\hbar)^L} A(x)\hat{R}_x = \int \frac{dx}{(\pi\hbar)^L} A(x)\hat{R}_x . \quad (2.32)$$

Novamente obtemos os coeficientes da expansão calculando

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{R}_x\hat{A}) &= \text{Tr} \int \frac{dx'}{(2\pi\hbar)^L} A(x')\hat{R}_x\hat{R}_{x'} = \int \frac{dx'}{(2\pi\hbar)^L} A(x')2^{2L} \exp \left[ \frac{i2}{\hbar} x' \wedge x \right] \text{Tr}\hat{T}_{2(x-x')} \\ &= \int \frac{dx'}{(2\pi\hbar)^L} A(x')2^{2L} \exp \left[ \frac{i2}{\hbar} x' \wedge x \right] (2\pi\hbar)^L \frac{\delta(x-x')}{2^{2L}} = A(x) . \end{aligned} \quad (2.33)$$

Notemos que a comparação de (2.30) e (2.32) com (2.22) e (2.23) nos leva a

$$R_x(\xi) = 2^{-L} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} x \wedge \xi \right] \quad \text{e} \quad T_\xi(x) = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} x \wedge \xi \right] . \quad (2.34)$$

Em analogia com os resultados acima, nos referimos a  $A(x)$  como a *representação de centros* do operador  $\hat{A}$ , mas o termo histórico é a *representação de Weyl*. Evidentemente, a origem da analogia entre (1.23) e (1.24) com (2.33) e (2.31) resulta do fato de que o grupo fundamental de translações e reflexões encontra-se definido tanto na mecânica clássica quanto na quântica.

O fato de poder intercambiar funções geratrizes de cordas e centros mediante transformadas de Legendre na mecânica clássica é exatamente similar ao intercâmbio entre representações de cordas e centros mediante transformadas de Fourier:

$$A(\xi) = (2\pi\hbar)^{-L} \int dx A(x) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} x \wedge \xi \right] \quad (2.35)$$

e inversamente

$$A(x) = (2\pi\hbar)^{-L} \int d\xi A(\xi) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} x \wedge \xi \right] \quad (2.36)$$

Similarmente obtém-se a representação de Weyl de  $\hat{A}$  como a transformada de  $\langle q_+ | \hat{A} | q_- \rangle$ , isto é

$$A(x) = \int d\xi_q \langle q + \frac{\xi_q}{2} | \hat{A} | q - \frac{\xi_q}{2} \rangle \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} p \cdot \xi_q \right]. \quad (2.37)$$

Inversamente

$$\langle q_+ | \hat{A} | q_- \rangle = \int \frac{dp}{(2\pi\hbar)^L} A(p, \frac{q_+ + q_-}{2}) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p \cdot (q_+ - q_-) \right]. \quad (2.38)$$

Comparando estas últimas equação com as equações (1.29) até (1.34) vemos que as transformadas de Legendre da mecânica clássica entre as funções geratrizes são isomorfas às correspondentes transformações de Fourier na mecânica quântica.

É importante notarmos que

$$Tr \hat{A} = A(\xi = 0) = \int \frac{dx}{(2\pi\hbar)^L} A(x), \quad (2.39)$$

enquanto

$$1(\xi) = (2\pi\hbar)^L \delta(\xi) \quad \text{e} \quad 1(x) = 1. \quad (2.40)$$

Como a representação de um operador adjunto,  $\hat{H}^\dagger$ , é

$$H^\dagger(\xi) = [H(-\xi)]^* \quad \text{e} \quad H^\dagger(x) = [H(x)]^*, \quad (2.41)$$

vemos assim que a representação de centros de um operador Hermitiano é sempre uma função real, porém na representação de cordas tal propriedade não é satisfeita.

Encontramos imediatamente a partir de (2.37) que toda função  $f(\hat{q})$  tem  $f(q)$  como transformada de Weyl, enquanto que a transformada de Fourier de (2.37),

$$A(x) = \int d\xi_p \langle p + \frac{\xi_p}{2} | \hat{A} | p - \frac{\xi_p}{2} \rangle \exp \left[ \frac{i}{\hbar} q \cdot \xi_p \right], \quad (2.42)$$

mostra que a representação de centros de uma função  $f(\hat{p})$  é  $f(p)$ . A linearidade da transformada de Weyl implica então que a representação de Weyl da importante classe de Hamiltonianos

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + V(\hat{q}) \xrightarrow{\text{Weyl}} H(x) = \frac{1}{2m} p^2 + V(q), \quad (2.43)$$

ou seja, a representação de Weyl é igual a Hamiltoniana clássica  $H_c(x)$ . Isto não é verdade para operadores Hamiltonianos ou Hermitianos gerais, mas a representação de Weyl será uma função real suave perto da Hamiltoniana clássica e que se aproxima a esta no limite  $\hbar \rightarrow 0$ . A representação de cordas destes operadores Hermitianos estará então perto da transformada de Fourier das correspondentes funções clássicas.

## 2.4 Produtos de Operadores e Integral de Caminhos

Estudaremos agora as leis de composição dos símbolos de operadores. Começando com a representação de cordas, temos para o produto  $\hat{A}_n \hat{A}_{n-1} \cdots \hat{A}_1$ ,

$$A_n \cdot A_{n-1} \cdots A_1(\xi) = \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{L(n-1)} \int d\xi_n \cdots d\xi_1 A_n(\xi_n) \cdots A_1(\xi_1) \delta(\xi_1 + \cdots + \xi_n - \xi) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} D_{n+1}(\xi_1, \cdots, \xi_n) \right], \quad (2.44)$$

onde notamos que a distribuição  $\delta$  de Dirac reduz o polígono de  $(n+2)$  lados com área simplética  $D_{n+2}$  em um polígono de  $(n+1)$  lados, com  $n$  lados livres. Evidentemente, podemos agora usar as distribuições  $\delta$  para integrar uma das variáveis, mas (2.44) está na sua forma mais simétrica.

Precisamos também de formulas integrais para o produto de operadores na representação de centros. Este resultado depende em forma crucial da paridade do número de operadores [32]. Começamos então com o caso mais simples onde  $n = 2$ . A partir da definição (2.32), obtemos

$$A_2 \cdot A_1(x) = \left( \frac{1}{\pi\hbar} \right)^{2L} \int dx_2 dx_1 A_2(x_2) A_1(x_1) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \Delta_3(x, x_1, x_2) \right]. \quad (2.45)$$

A extensão para  $(2n)$  operadores é [32]

$$A_{2n} \cdots A_1(x) = \left( \frac{1}{\pi\hbar} \right)^{2nL} \int dx_{2n} \cdots dx_1 A_{2n}(x_{2n}) \cdots A_1(x_1) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \Delta_{2n+1}(x, x_1, \cdots, x_{2n}) \right\}. \quad (2.46)$$

Aqui a área simplética  $\Delta_{2n+1}$  corresponde ao polígono de  $(2n+1)$  lados circunscrito nos centros  $(x, x_1, \cdots, x_{2n})$ .

É importante obter agora operadores unitários correspondentes às transformações canônicas gerais. Já construímos estes operadores para as transformações correspondente a translações e reflexões. O passo seguinte é a quantização do grupo de transformações simpléticas, canônicas e lineares, estudadas no capítulo 1. Na referência [32] mostra-se que a quantização de tal grupo de transformações é obtida mediante à exponenciação das funções geratrizes. Assim, existe uma correspondência, um a um, entre o grupo de transformações canônicas geradas pela função geratriz  $S(x)$ , definida em (1.38), e o subgrupo de operadores unitários, cuja representação de Weyl é

$$U_{\mathcal{M}}(x) = 2^L |\det(1 + \mathcal{M})|^{-\frac{1}{2}} \exp[-i\hbar^{-1}(\alpha \wedge x + xBx) + i\theta] \\ = |\det[1 \pm \mathfrak{J}\partial^2 S/\partial x^2]|^{\frac{1}{2}} \exp[i\hbar^{-1}S(x)]. \quad (2.47)$$

Tomando a transformada de Fourier desta expressão, obtemos a correspondente representação de cordas

$$U_{\mathcal{M}}(\xi) = 2^L |\det(1 - \mathcal{M})|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(a \wedge \xi + \frac{1}{4}\xi\beta\xi) + i\theta'\right], \quad (2.48)$$

onde agora a matriz simplética  $\beta$  é obtida a partir de  $\mathcal{M}$  usando (1.41). A representação de posições correspondente, resultado da transformação de Fourier simetrizada (2.38), é

$$\langle q' | \widehat{U}_{\mathcal{M}} | q \rangle = (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} |\det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial q'}|^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}S(q', q)\right], \quad (2.49)$$

onde  $S(q', q)$ , também quadrática, é a transformada de Legendre simetrizada (1.34) de  $S(x)$ . Nestas representações, a fase indeterminada  $\theta$ , pode ser interpretada como uma constante aditiva arbitrária na definição da função geratriz correspondente, estas fases não tem importancia para a ação destes operadores unitários sobre outros operadores, já que esta é cancelada em (2.5). Os operadores unitários que discutimos formam o *grupo metaplético inhomogeneo* [52, 53]. É importante notarmos que estes propagadores tem a forma esperada pelo esquema de quantização de Van Vleck [4], mas são exatos neste caso.

A principal vantagem das representações de cordas e centros, reside na invariança simplética. É bem conhecido que transformações canônicas clássicas  $x' = \mathcal{M}x$

correspondem a transformações unitárias em  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$

$$\widehat{A}' = \widehat{U}_{\mathcal{M}} \widehat{A} \widehat{U}_{\mathcal{M}}^{-1}. \quad (2.50)$$

O efeito de tal transformação unitária nas representações de cordas e centros é, segundo a referência [32], meramente

$$A'(\xi) = A(\mathcal{M}\xi) \quad \text{e} \quad , A'(x) = A(\mathcal{M}x) \quad (2.51)$$

de modo que tal efeito é puramente clássico. Este fato é consequência de que

$$\widehat{T}_{\mathcal{M}\xi} = \widehat{U}_{\mathcal{M}} \widehat{T}_{\xi} \widehat{U}_{\mathcal{M}}^{-1} \quad \text{e} \quad \widehat{R}_{\mathcal{M}x} = \widehat{U}_{\mathcal{M}} \widehat{R}_x \widehat{U}_{\mathcal{M}}^{-1} \quad (2.52)$$

para todo operador de translação  $\widehat{T}_{\xi}$  e reflexão  $\widehat{R}_x$ .

Entretanto, não temos formas fechadas simples para as transformações unitárias gerais geradas pelas Hamiltonianas não lineares. Como no caso da mecânica clássica, é importante desenvolver aproximações que sejam validas para intervalos curtos de tempo. Expandido a exponencial (2.3), obtemos a transformada de Weyl termo a termo:

$$U_t(x) = 1 - i \frac{t}{\hbar} H(x) - \frac{1}{2} \left( \frac{t}{\hbar} \right)^2 H^2(x) + \dots + \frac{1}{n!} \left( -i \frac{t}{\hbar} \right)^n H^n(x) + \dots \quad (2.53)$$

Visto que  $H(x)$  estará na ordem  $O(\hbar)$  da Hamiltoniana clássica  $H_c(x)$ , pode-se mostrar [32] que a representação de centros de  $\widehat{H}^n$  é  $O(\hbar^2)$  de  $[H(x)]^n$  e em particular

$$H^2(x) = [H(x)]^2 + \frac{\hbar^2}{8} \text{Tr}(\mathcal{J}\mathcal{H}), \quad (2.54)$$

onde  $\mathcal{H}$  é a Hessiana de  $H(x)$  avaliada no ponto  $x$ . Assim, a série acima converge uniformemente, e nos permite arrumar os termos na forma

$$U_t(x) = \exp\left[-i \frac{t}{\hbar} H(x)\right] + O\left(\left(\frac{t}{\hbar}\right)^2\right). \quad (2.55)$$

Para tempos curtos o suficiente, podemos então usar a exponencial de  $H(x)$  como uma aproximação ao propagador de Weyl. Em analogia com a teoria descrita no §1, onde vimos que a função de centros tem como limite  $-tH_c(x)$ . Porém, a

aproximação clássica é válida na ordem  $O(t^3)$ , enquanto que o intervalo de validade de (2.55) é extremamente curto no limite semiclássico. Por isso, contrariamente à teoria clássica, onde  $-tH_c(x)$  pode sempre ser utilizado para gerar uma transformação que podemos garantir ser canônica, não podemos ter certeza de que (2.55) representa um operador unitário.

Para melhorar a aproximação, podemos incluir a correção (2.54) em (2.55) de forma que, como em [32],

$$U_t(x) = |\det[1 - (\mathfrak{J}\frac{t}{2}\mathcal{H})^2]|^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{it}{\hbar}H(x)\right] + O(t^2\hbar^2) + O\left(\left(\frac{t}{\hbar}\right)^3\right). \quad (2.56)$$

Podemos agora estender o propagador de Weyl para tempos finitos compondo os operadores unitários correspondentes a intervalos de tempo curtos:

$$U_t(x) = \int \frac{dx_1 \cdots dx_m}{(\pi\hbar)^{mL}} \prod_{n=1}^m U_{\frac{t}{m}}(x_n) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[\Delta_{m+1}(x, x_1, \dots, x_m)]\right\}. \quad (2.57)$$

Esta formula é exata, mas só podemos inserir (2.56) para  $U_{\frac{t}{m}}(x)$  no limite em que  $m \rightarrow \infty$ . Podemos agora ignorar a amplitude, já que o Hessiano  $\mathcal{H}_m$  permanece limitado para cada centro  $x_m$ . Assim obtemos a *integral de caminhos*

$$U_t(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int \frac{dx_1 \cdots dx_m}{(\pi\hbar)^{mL}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[\Delta_{m+1}(x, x_1, \dots, x_m)] - \frac{t}{m} \sum_{n=1}^m H(x_n)\right\}. \quad (2.58)$$

Reconhecemos imediatamente que a fase desta integral coincide com a ação do princípio variacional (1.52) para o caminho poligonal com pontos extremos centrados em  $x$  e cujo  $k$ -ésimo lado está centrado em  $x_k$ . Como no caso do princípio variacional, não precisamos nos preocupar com a definição do “espaço de caminhos” já que (2.58) é uma integral múltipla ordinária. O único custo é que haverá caminhos poligonais muito complicados (veja figura 2.1) tanto quanto caminhos suaves, como a trajetória clássica que resolve o problema variacional.

A forma mais simples de se obter a aproximação semiclássica para o propagador de Weyl é voltando a (2.57) com os propagadores individuais para tempos

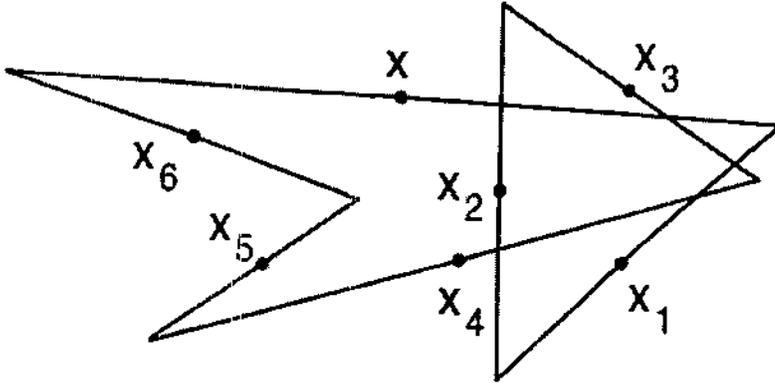


Figura 2.1: Uma linha poligonal típica com cruzamentos para  $M = 6$ .

curtos especificados pela expressão (2.56). Estes últimos já se encontram na forma semiclássica, no limite de tempos curtos. O limite semiclássico para o propagador completo envolve agora avaliar a integral múltipla (2.57) pelo método de fase estacionária. O resultado explícito desta composição de infinitas transformações canônicas é finalmente obtido [32] como

$$U_t(x)_{SC} = 2^L |(1 + \mathcal{M})|^{-\frac{1}{2}} \exp[i/\hbar S_t(x)], \quad (2.59)$$

onde  $\mathcal{M}$  é a matriz simplética da transformação linearizada na vizinhança dos pontos extremos da corda  $\xi(x)$  gerada pela função de centros  $S_t(x)$ .

Este resultado só é válido para tempos curtos o suficiente para que o problema variacional tenha uma única solução. Evidentemente haverá bifurcações que produzirão mais cordas cujo número cresce com o tempo. Assim, em forma geral teremos

$$U_t(x)_{SC} \sim \sum_j 2^L |\det(1 + \mathcal{M}_j)|^{-\frac{1}{2}} \exp\{i\hbar^{-1} S_{tj}(x) + i\gamma_j\}, \quad (2.60)$$

onde o índice  $j$  percorre todas as órbitas clássicas que contribuem. No caso de uma única órbita, corresponde o índice de Morse  $\gamma_j = 0$ . O movimento linearizado em torno de cada órbita pode também ser utilizado para aproximar a propagação de pacotes de onda como foi desenvolvido por Heller [54, 55].

O fato de  $S_t(x)$  ser sempre uma função ímpar de  $t$  garante que  $U_{-t}(x) = [U_t(x)]^*$  em (2.60). Isto é uma condição necessária, porém não suficiente para que  $U_t(x)$  represente um operador unitário. Ainda encontramos que existe uma correspondência entre as transformações canônicas clássicas geradas por Hamiltonianas e o propagador de Weyl semiclássico (2.60) que são unitários dentro da aproximação de fase estacionária. Esta equivalência não é específica da representação de Weyl, tendo sido discutida sistematicamente por Miller [56].

### 3 Representações de Centros e Cordas no Toro

A já mencionada importância do toro para o estudo dos sistemas classicamente caóticos assim como a relevância da representação de Weyl para estudar a mecânica quântica no espaço de fases, torna imperante a generalização de tal representação para o toro. No presente capítulo estenderemos as representações de centros e cordas definidas no plano no capítulo anterior para o caso onde o espaço de fases é um toro. Para tal propósito, resulta imprescindível iniciarmos por um estudo mais detalhado do espaço de Hilbert do toro.

#### 3.1 Pré-quantização

Espaços de fases clássicos de  $(2L)$  dimensões podem ser considerados periódicos, de tal forma que atribuiremos a ele a topologia de um toro de  $(2L)$  dimensões. Evidentemente, devemos usar a invariância, com respeito às transformações simpléticas, para igualar os períodos  $\Delta q = \Delta p = \nu$  das posições e dos momentos. A eleição usual é  $\nu = 1$ , mas deixaremos isto como um parâmetro livre, de forma a estudar toros embutidos uns nos outros, isto é, o caso onde a quantização é imposta numa região (periódica) maior do que a cela unitária. Assim, o número de celas unitárias será  $\nu^{2L}$ . As condições de contorno periódicas são as únicas consequências clássicas provenientes do fato do espaço de fases ser um toro. Isto é, as relações (1.6) que envolvem os colchetes de Poisson são inalteradas, assim como todo o formalismo clássico desenvolvido no primeiro capítulo é também válido para o toro. Porém ao nível quântico, haverá mudanças importantes devidas ao fato de que o toro é uma variedade compacta. Esta mudança topológica terá uma importância crucial na hora de definir o espaço de Hilbert.

Um primeiro passo importante é especificar o espaço de Hilbert dos estados quânticos, ou *pré-quantização*, em forma independente da dinâmica do sistema. Isto é, tratamos a cinemática quântica, que corresponde à descrição geométrica do espaço de fases ao nível clássico. As considerações a seguir aplicam-se para cada um dos  $L$  grau de liberdade. Uma descrição completa para a pré-quantização deve incluir as

condições de borda. No caso, estas são que as funções de onda satisfaçam as condições de Bloch,

$$\Psi(q + \nu) = e^{2\pi i \chi_p} \Psi(q), \quad (3.1)$$

$$\tilde{\Psi}(p + \nu) = e^{-2\pi i \chi_q} \tilde{\Psi}(p), \quad (3.2)$$

onde

$$\tilde{\Psi}(p) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int e^{-ipq/\hbar} \Psi(q) dq \quad (3.3)$$

e  $2\pi i \chi_p$  e  $2\pi i \chi_q$  são ângulos de Floquet arbitrários, isto é, a pré-quantização depende do vetor  $\chi = (\chi_p, \chi_q)$  cujas coordenadas estão no intervalo  $[0, 1[$ .

Uma condição cinemática bem conhecida para a quantização de toros [57] é que há

$$\nu^2 N = \nu^2 (2\pi\hbar)^{-1} \quad (3.4)$$

estados para cada grau de liberdade, assim  $N = (2\pi\hbar)^{-1}$  é o número de estados correspondente à cela unitária. Isto é um ponto crucial: o fato do espaço de fases ser compacto implica no espaço de Hilbert ter dimensão finita.

Lembrando os operadores de translação  $\hat{T}_p = \exp\left(\frac{i\alpha}{\hbar}\hat{q}\right)$  e  $\hat{T}_q = \exp\left(-\frac{i\beta}{\hbar}\hat{p}\right)$  que transladam respectivamente momentos em  $\alpha$  e posições em  $\beta$  no plano, definimos as translações mínimas no toro  $\hat{\mathbf{T}}_{p,\nu^2 N}$  e  $\hat{\mathbf{T}}_{q,\nu^2 N}$  cujos autoestados discretos  $|\mathbf{q}_n, \nu^2 N\rangle$  e  $|\mathbf{p}_m, \nu^2 N\rangle$  são tais que

$$\hat{\mathbf{T}}_{p,\nu^2 N} |\mathbf{q}_n, \nu^2 N\rangle = e^{i\frac{2\pi\chi_p}{\nu^2 N}(n+\chi_q)} |\mathbf{q}_n, \nu^2 N\rangle \quad \hat{\mathbf{T}}_{p,\nu^2 N} |\mathbf{p}_m, \nu^2 N\rangle = |\mathbf{p}_{m+1}, \nu^2 N\rangle \quad (3.5)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{q,\nu^2 N} |\mathbf{q}_n, \nu^2 N\rangle = |\mathbf{q}_{n+1}, \nu^2 N\rangle \quad \hat{\mathbf{T}}_{q,\nu^2 N} |\mathbf{p}_m, \nu^2 N\rangle = e^{i\frac{-2\pi\chi_q}{\nu^2 N}(m+\chi_p)} |\mathbf{p}_m, \nu^2 N\rangle \quad (3.6)$$

O produto de  $\nu^2 N$  translações nos estados da base  $|\mathbf{q}_n, \nu^2 N\rangle$  ou  $|\mathbf{p}_m, \nu^2 N\rangle$  devem trazer devolta o mesmo estado, ou seja, estes operadores de Schwinger [58] satisfazem

$$\left(\hat{\mathbf{T}}_{p,\nu^2 N}\right)^{\nu^2 N} = e^{2\pi i \chi_q} \hat{\mathbf{1}}_{\nu^2 N}^{\chi} \quad (3.7)$$

e

$$\left(\widehat{T}_{q,\nu^2 N}\right)^{\nu^2 N} = e^{-2\pi i \chi_p} \widehat{\mathbf{1}}_{\nu^2 N}^{\chi}, \quad (3.8)$$

onde  $\widehat{\mathbf{1}}_{\nu^2 N}^{\chi}$  é o operador unidade no toro.

Para definir o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_{\nu^2 N}^{\chi}$ , devemos incluir a estrutura Hermitica

$$\langle \mathbf{q}_n, \nu^2 N | \mathbf{q}_{n'}, \nu^2 N \rangle = \delta_{n,n'}^{(\nu^2 N)} e^{\frac{2\pi i}{\nu^2 N} (n-n') \chi_p}, \quad (3.9)$$

e

$$\langle \mathbf{p}_m, \nu^2 N | \mathbf{p}_{m'}, \nu^2 N \rangle = \delta_{m,m'}^{(\nu^2 N)} e^{-\frac{2\pi i}{\nu^2 N} (m-m') \chi_q}. \quad (3.10)$$

Aqui definimos a *delta de Kronecker N-periódica*

$$\delta_{m,n}^{(N)} \equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta_{m,n+jN}. \quad (3.11)$$

As bases são intercambiadas com o núcleo

$$\langle \mathbf{p}_m, \nu^2 N | \mathbf{q}_n, \nu^2 N \rangle = \frac{1}{\nu^2 N^{1/2}} e^{2\pi i \frac{1}{\nu^2 N} (m+\chi_p)(n+\chi_q)} \equiv F_{m,n}, \quad (3.12)$$

formando uma matriz unitária ( transformada de Fourier finita).

Claramente, esta última expressão permite-nos interpretar a posição  $\mathbf{q}_n$  como correspondendo a  $q = \frac{1}{\nu^2 N} (n + \chi_q)$ , enquanto  $\mathbf{p}_m$  corresponde a  $p = \frac{1}{\nu^2 N} (m + \chi_p)$ , de forma que

$$\langle \mathbf{p}_m, \nu^2 N | \mathbf{q}_n, \nu^2 N \rangle = (2\pi \hbar)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_m q_n\right). \quad (3.13)$$

Da mesma forma que o operador  $\widehat{T}_q$ , corresponde a uma translação no plano em  $\Delta q = \frac{1}{\nu^2 N}$ , a mudança de fase  $\exp[-2\pi i \chi_p]$  resulta de uma translação em  $\Delta q = \nu$  ao redor do toro. Apesar dos índices  $n$  e  $m$  poderem percorrer todos os inteiros, só  $\nu^2 N$  valores sucessivos formam uma base do espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_{\nu^2 N}^{\chi}$  do toro. Devemos ficar no intervalo fundamental  $[0, \nu^2 N - 1]$ , que corresponde ao quadrado de lado  $\nu$ , ou estender o plano periódico, tendo em conta as fases  $\chi$ . Estas considerações se aplicam para cada um dos  $L$  graus de liberdade, de forma que no caso geral o domínio fundamental é um  $(2L)$ -hipercubo. Vimos que posições e momentos formam uma

rede discreta no toro, como se mostra na figura 3.1, que chamaremos de espaço de fases quântico (EFQ), seguindo a referência [35]:

$$x = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} m + \chi_p \\ n + \chi_q \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

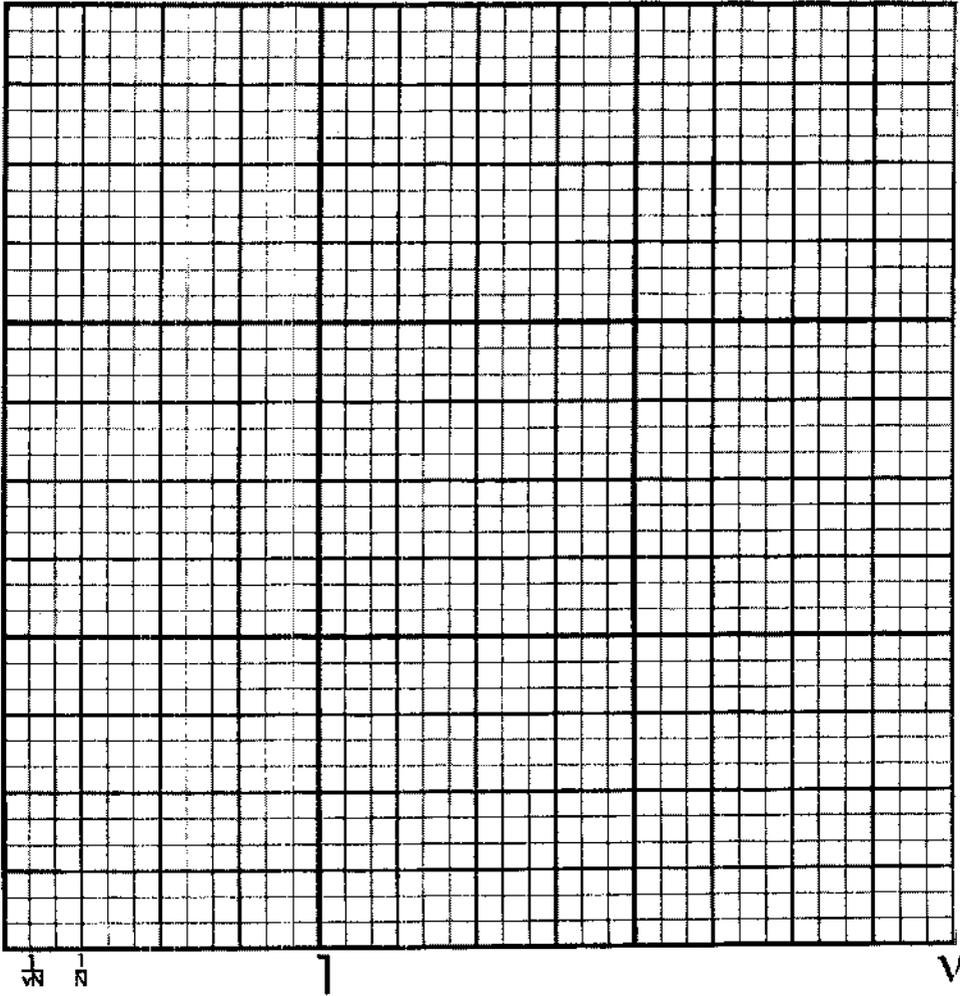


Figura 3.1: O espaço de fases quântico para  $N = 4$ . A intercessão das linhas, em negrito, no quadrado unidade determinam o EFQ para  $\nu = 1$ , enquanto que a figura completa corresponde eleição  $\nu = 3$ .

Consideramos agora a relação entre os espaços de Hilbert de dois toros embutidos  $\mathcal{H}_N^x$  e  $\mathcal{H}_{\nu^2 N}^{x'}$  com  $\nu > 1$ . A condição para que o EFQ correspondente a  $\mathcal{H}_N^x$

seja uma sub-rede do EFQ de  $\mathcal{H}_{\nu^2 N}^{\chi'}$  é que

$$\chi' = \nu\chi - k, \quad (3.15)$$

onde  $k = (k_p, k_q)$  é um vetor de coordenadas inteiras que denota o número de voltas ao redor do toro realizadas por  $\chi$  quando multiplicado por  $\nu$ . Assim  $\chi'$  é univocamente determinado por  $\chi$ . Os índices para o espaço de Hilbert maior  $\mathcal{H}_{\nu^2 N}^{\chi'}$  para pontos no domínio fundamental do EFQ menor são

$$m' = \nu m + k_p \quad (3.16)$$

$$n' = \nu n + k_q. \quad (3.17)$$

Podemos agora definir o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_N^{\chi}$  como uma projeção do espaço maior  $\mathcal{H}_{\nu^2 N}^{\chi'}$ . De fato, é fácil verificar que se  $|\mathbf{q}_n, \nu^2 N \rangle$  são autoestados de posição, ortogonais para  $\mathcal{H}_{\nu^2 N}^{\chi'}$ , então

$$|\mathbf{q}_n, N \rangle_{\chi} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sum_{r=0}^{\nu-1} e^{i2\pi\chi_p r} |\mathbf{q}_{\nu n+k+r}, \nu^2 N \rangle_{\chi'} \quad (3.18)$$

formam uma base ortonormal apropriada para  $\mathcal{H}_N^{\chi}$ . Assim, definindo o operador de projeção

$$\hat{\mathbf{1}}_N^{\chi} = \sum_{n=0}^{N-1} |\mathbf{q}_n, N \rangle \langle \mathbf{q}_n, N|, \quad (3.19)$$

verificamos que este é Hermitiano em  $\mathcal{H}_{\nu^2 N}^{\chi'}$ , e que

$$\hat{\mathbf{1}}_N^{\chi} \hat{\mathbf{1}}_N^{\chi} = \hat{\mathbf{1}}_N^{\chi}. \quad (3.20)$$

Os estados são então obtidos como

$$|\Psi, N \rangle = \hat{\mathbf{1}}_N^{\chi} |\Psi, \nu^2 N \rangle. \quad (3.21)$$

Para todo operador  $\hat{\mathbf{A}}_{\nu^2 N}$  que atua em  $\mathcal{H}_{\nu^2 N}^{\chi'}$ , temos um operador projetado que atua em  $\mathcal{H}_N^{\chi}$ :

$$\hat{\mathbf{A}}_N = \hat{\mathbf{1}}_N^{\chi} \hat{\mathbf{A}}_{\nu^2 N} \hat{\mathbf{1}}_N^{\chi}. \quad (3.22)$$

Se  $\widehat{\mathbf{A}}_{\nu^2 N}$  deixar  $\mathcal{H}_N^X$  invariante, ou seja, se

$$[\widehat{\mathbf{1}}_N^X, \widehat{\mathbf{A}}_{\nu^2 N}] = 0, \quad (3.23)$$

então

$$\widehat{\mathbf{A}}_N = \widehat{\mathbf{A}}_{\nu^2 N} \widehat{\mathbf{1}}_N^X. \quad (3.24)$$

Verificamos também que, para qualquer par de operadores que satisfazem (3.23), encontramos a relação:

$$\widehat{\mathbf{A}}_N \widehat{\mathbf{B}}_N = \widehat{\mathbf{A}}_{\nu^2 N} \widehat{\mathbf{B}}_{\nu^2 N} \widehat{\mathbf{1}}_N^X. \quad (3.25)$$

Em particular, obtemos os operadores de translação de Schwinger de  $\mathcal{H}_N^X$  como as projeções destes em  $\mathcal{H}_{\nu^2 N}^X$

$$\widehat{\mathbf{T}}_{q,N} = \widehat{\mathbf{T}}_{q,\nu^2 N} \widehat{\mathbf{1}}_N^X \quad ; \quad \widehat{\mathbf{T}}_{p,N} = \widehat{\mathbf{T}}_{p,\nu^2 N} \widehat{\mathbf{1}}_N^X. \quad (3.26)$$

Tomemos agora o limite  $\nu \rightarrow \infty$ . Claramente, a variável  $q_n$  se torna continua neste limite assim como o volume do toro  $\nu^{2L} \rightarrow \infty$ . Através do limite, a relação (3.15) define um  $\chi'$  ( $\chi$ ) apropriado. O passo fundamental para recuperar o espaço de Banach  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$  do espaço de fases plano é redefinir a normalização, de forma que

$$\langle q|q' \rangle = \delta(q - q'). \quad (3.27)$$

Introduzindo a distribuição delta de Dirac à direita, e a integral de Fourier continua para a mudança de base

$$\langle p|\psi \rangle = (2\pi\hbar)^{-L/2} \int dq \exp\left(\frac{ipq}{\hbar}\right) \langle q|\psi \rangle. \quad (3.28)$$

Em todos os outros aspectos, a cinemática do plano coincide com a do toro. Porém, a condição de normalização (3.27) implica em uma mudança na forma em que expressamos os estados em  $\mathcal{H}_N^X$  em termos dos de  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ . Para tal propósito, devemos lembrar que

$$\sum_{r=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}(m-n)r} = N\delta_{m,n}^{(N)}, \quad (3.29)$$

e assim estendemos a definição da função delta de Kroeneker  $N$  periódica para todo  $x$  e  $y$  reais:

$$\delta_{x,y}^{(N)} \equiv \left\langle e^{i\frac{2\pi}{N}(x-y)k} \right\rangle_k \quad (3.30)$$

onde  $(\dots)_k$  é a média em  $k$

$$(\dots)_k = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum_{k=-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}}. \quad (3.31)$$

A partir de (3.30) vemos que  $\delta_{x,y}^{(N)}$  depende somente da diferença  $x - y$ . Tomemos então o caso em que  $y = 0$ . Para  $x = r$  inteiro, o argumento em (3.30) tem período  $N$ . Então, a média é simplesmente (3.29) dividido por  $N$ . Assim, a definição (3.30) é consistente com (3.11) para argumentos inteiros. Suponhamos agora que  $x = \frac{r}{d}$  seja um número racional. O argumento em (3.30) terá então período  $Nd$ , de forma que

$$\delta_{x,0}^{(N)} = \frac{1}{Nd} \sum_{k=0}^{Nd-1} e^{i\frac{2\pi}{N} \frac{r}{d} k} = \frac{1}{Nd} \frac{1 - e^{i2\pi r}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{Nd} r}} = \begin{cases} 1 & \text{se } r = 0 \pmod{Nd} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (3.32)$$

Assim, mais uma vez, a função delta de Kroeneker  $N$ -periódica é diferente de zero para  $x$  igual a zero, módulo  $N$ . Permitindo  $d \rightarrow \infty$  em (3.32), estendemos a definição de  $\delta_{x,y}^{(N)}$  para números irracionais, de forma que

$$\delta_{x,y}^{(N)} = \begin{cases} 1 & \text{se } (x - y) = 0 \pmod{N} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (3.33)$$

A definição (3.30) é uma interpolação de (3.11), que nos permite realizar, não somente somas, mas também integrais com a função delta de Kroeneker  $N$ -periódica. De fato, podemos mostrar a equivalência formal:

$$\delta_{x,y}^{(N)} = \left\langle \delta\left(\frac{x-y}{N} - k\right) \right\rangle_k. \quad (3.34)$$

Isto é uma consequência da definição (3.30) e da formula de Poisson,

$$\sum_{t \in \mathbb{Z}} \delta(x - t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi kx}. \quad (3.35)$$

De fato, a partir da definição (3.30) temos que

$$\frac{1}{\nu} \sum_{k=-\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu}{2}} e^{i\frac{2\pi}{N}(x-y)k} = \frac{1}{\nu} \sum_{k=-\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu}{2}} \delta\left(\frac{x-y}{N} - k\right) + \frac{1}{\nu} R_\nu(x-y), \quad (3.36)$$

com

$$R_\nu(x-y) = \sum_{k=-\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu}{2}} e^{i\frac{2\pi}{N}(x-y)k} - \sum_{k=-\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu}{2}} \delta\left(\frac{x-y}{N} - k\right). \quad (3.37)$$

Com a fórmula de Poisson(3.35), temos que  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} R_\nu(x-y) = 0$ , fazendo um ordenamento apropriado dos limites  $\nu \rightarrow \infty$  e as larguras das funções delta  $\rightarrow 0$ .

Uma consequência de (3.34) é que, para toda função  $f(t)$ ,

$$\left\langle \delta\left(\frac{x-y}{N} - t\right) f(t) \right\rangle_t = \delta_{x,y}^{(N)} f\left(\frac{x-y}{N}\right). \quad (3.38)$$

Mudando a origem, de tal forma que o toro unitário fique no centro do toro maior, (3.18) deve ser substituída por

$$|\mathbf{q}_n, N \rangle = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu} \sum_{r=-\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu}{2}} \left| \frac{n + \chi_q}{N} + r \right\rangle e^{2\pi i r \chi_p}. \quad (3.39)$$

Um cálculo direto utilizando (3.38) mostra que as condições de ortonormalidade (3.9) são obtidas para os estados definidos em (3.39) com a normalização (3.27). Assim, consideramos que os estados e os operadores no toro unitário são obtidos a partir do plano mediante projeções. Lembrando a definição (3.31) da média, (3.39) pode ser escrita como

$$|\mathbf{q}_n, N \rangle = \left\langle \left| \frac{n + \chi_q}{N} + r \right\rangle e^{2\pi i r \chi_p} \right\rangle_r \quad (3.40)$$

e o operador de projeção  $\hat{\mathbf{I}}_N^\chi$  é definido em (3.19). No caso  $\chi = 0$  obtemos a definição de Hannay e Berry [38] para  $\mathcal{H}_N^0$  como a média sobre um arranjo periódico de distribuições delta de Dirac. Vamos agora definir a representação de Weyl no toro projetando as propriedades que foram bem estabelecidas para o plano no capítulo 2.

### 3.2 Restrição das translações e reflexões ao toro

As projeções descritas acima serão agora usadas para projetar os operadores  $\hat{T}_\xi$  e  $\hat{R}_x$ , definidos no capítulo 2, no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_N^\chi$ . Estudaremos explicitamente

o caso de um grau de liberdade, já que a generalização é óbvia. Para tal propósito investigaremos em primeiro lugar a ação dos operadores de translação  $\widehat{T}_\xi$  sobre a base de estados  $|\mathbf{q}_n, N\rangle$  definidos em (3.40). O efeito dos operadores de translação (2.18) num estado do plano implica em que

$$\widehat{T}_\xi |\mathbf{q}_n, N\rangle = \left\langle \left| \frac{n + \chi_q}{N} + k + \xi_q \right\rangle e^{2\pi i k \chi_p} e^{\frac{i}{\hbar} \xi_p \left( \frac{n + \chi_q}{N} + k + \frac{1}{2} \xi_q \right)} \right\rangle_k, \quad (3.41)$$

usando a relação (3.4) entre  $N$  e  $\hbar$ . Este estado somente pertencerá a  $\mathcal{H}_N^\chi$  se ele tiver a forma (3.40), ou seja, se pudermos escrever  $\xi_q = \frac{s}{N}$ , sendo  $s$  um inteiro.

Em forma similar na representação  $|\mathbf{p}_m, N\rangle$ , temos que

$$\widehat{T}_\xi |\mathbf{p}_m, N\rangle = \left\langle \left| \frac{m + \chi_p}{N} + k + \xi_p \right\rangle e^{-2\pi i k \chi_q} e^{-\frac{i}{\hbar} \xi_q \left( \frac{m + \chi_p}{N} + k + \frac{\xi_p}{2} \right)} \right\rangle_k, \quad (3.42)$$

o que não pertence a  $\mathcal{H}_N^\chi$ , salvo que possamos escrever  $\xi_p = \frac{r}{N}$  com  $r$  inteiro. Assim, como já foi mencionado em [57], as únicas translações que deixam  $\mathcal{H}_N^\chi$  invariante são aquelas cujas cordas são da forma  $\xi = \left( \frac{r}{N}, \frac{s}{N} \right)$  com  $r$  e  $s$  inteiros. Nesses casos temos

$$\begin{aligned} \widehat{T}_\xi |\mathbf{q}_n, N\rangle &= \left\langle \left| \frac{n + \chi_q}{N} + k + \frac{s}{N} \right\rangle e^{2\pi i k \chi_p} e^{i 2\pi N \frac{r}{N} \left( \frac{n + \chi_q}{N} + k + \frac{s}{2N} \right)} \right\rangle_k \\ &= e^{\frac{i 2\pi}{N} r \left( n + \frac{s}{2} + \chi_q \right)} \left\langle \left| \frac{n + s + \chi_q}{N} + k \right\rangle e^{2\pi i k (\chi_p + r)} \right\rangle_k \\ &= e^{\frac{i 2\pi}{N} r \left( n + \frac{s}{2} + \chi_q \right)} |\mathbf{q}_{n+s}, N\rangle. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Em resumo, obtemos os operadores de translações no toro  $\widehat{\mathbf{T}}_\xi^\chi$  em termo dos operadores no plano  $\widehat{T}_\xi$  como sendo,

$$\widehat{\mathbf{T}}_\xi^\chi \widehat{T}_\xi \widehat{\mathbf{T}}_\xi^\chi = \begin{cases} \widehat{\mathbf{T}}_\xi^\chi & \text{se } \xi = \left( \frac{r}{N}, \frac{s}{N} \right), \text{ onde } r \text{ e } s \text{ são inteiros} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.44)$$

$$= \widehat{\mathbf{T}}_\xi^\chi \left\langle \delta \left( \xi - \frac{1}{N} (r, s) \right) \right\rangle_{(r,s)} = \widehat{T}_\xi \widehat{\mathbf{T}}_\xi^\chi, \quad (3.45)$$

onde os operadores de translações no toro  $\widehat{\mathbf{T}}_\xi^\chi \equiv \widehat{\mathbf{T}}_{r,s}^\chi$  são definidos a partir de

$$\widehat{\mathbf{T}}_{r,s}^\chi |\mathbf{q}_n, N\rangle = e^{i \frac{2\pi}{N} r \left( n + \chi_q + s/2 \right)} |\mathbf{q}_{n+s}, N\rangle \quad (3.46)$$

e

$$\widehat{\mathbf{T}}_{r,s}^\chi |\mathbf{p}_m, N\rangle = e^{-i \frac{2\pi}{N} s \left( m + \chi_p + r/2 \right)} |\mathbf{p}_{m+r}, N\rangle. \quad (3.47)$$

A última equação em (3.45) é válida devido ao fato de que  $\widehat{T}_\xi$  e  $\widehat{\mathbf{T}}_N^\chi$  comutam para  $\xi = (\frac{r}{N}, \frac{s}{N})$ . Vemos então que os únicos operadores de translações que não se anulam quando são projetados no toro são aqueles que deixam  $\mathcal{H}_N^\chi$  invariante. Estes correspondem precisamente às transformações clássicas que deixam invariante a rede formada pelo EFQ. Para simplificar a notação, assumiremos implicitamente a dependência em  $\chi$ .

Estudemos agora algumas propriedades dos operadores de translação no toro. Para o caso onde as cordas correspondem às translações mínimas em alguma das direções  $q$  ou  $p$ , reobtemos os operadores de Shwinger [58] de forma que,

$$\widehat{\mathbf{T}}_{0,1}|\mathbf{q}_n, N \rangle \equiv \widehat{\mathbf{T}}_q|\mathbf{q}_n, N \rangle = |\mathbf{q}_{n+1}, N \rangle \quad (3.48)$$

e,

$$\widehat{\mathbf{T}}_{1,0}|\mathbf{p}_m, N \rangle \equiv \widehat{\mathbf{T}}_p|\mathbf{p}_m, N \rangle = |\mathbf{p}_{m+1}, N \rangle. \quad (3.49)$$

O núcleo (3.12) implica que,

$$\widehat{\mathbf{T}}_p\widehat{\mathbf{T}}_q = e^{-\frac{2\pi i}{N}}\widehat{\mathbf{T}}_q\widehat{\mathbf{T}}_p. \quad (3.50)$$

Assim todo operador de translação em  $\mathcal{H}_N^\chi$  é definido como

$$\widehat{\mathbf{T}}_\xi \equiv \widehat{\mathbf{T}}_{r,s} = e^{-\frac{i\pi rs}{N}}\widehat{\mathbf{T}}_p^r\widehat{\mathbf{T}}_q^s, \quad (3.51)$$

com cordas  $\xi = (\frac{r}{N}, \frac{s}{N})$ . Podemos expressar os elementos de matriz dos operadores de translação na base de estados  $|\mathbf{q}_n \rangle$ ,

$$\langle \mathbf{q}_m, N | \widehat{\mathbf{T}}_{r,s} | \mathbf{q}_n, N \rangle = e^{-i\frac{2\pi}{N}\tau(\frac{m+n}{2} + \chi_q)} \delta_{m,n+s}^{(N)} e^{i\frac{2\pi}{N}(\frac{r}{2} + \chi_p)(m-n-s)}, \quad (3.52)$$

usando as relações de ortonormalidade dos estados (3.9).

Como vimos na seção 3.1, percorrendo uma volta no circuito dos momentos obtemos

$$\widehat{\mathbf{T}}_p^N = e^{2\pi i \chi_q} \widehat{\mathbf{T}}_N^\chi \quad (3.53)$$

e percorrendo uma volta nas posições

$$\widehat{\mathbf{T}}_q^N = e^{-2\pi i \chi_p} \widehat{\mathbf{1}}_N^\chi. \quad (3.54)$$

Se agora percorrermos  $\mathbf{k} = (k_p, k_q)$  voltas no toro, (3.50) implica em que obteremos de novo o operador identidade, só que a menos de um fator de fase:

$$\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{k}} = (-1)^{k_p k_q N} e^{i2\pi(k_p \chi_q - k_q \chi_p)} \widehat{\mathbf{1}}_N^\chi = e^{-i2\pi(\chi \wedge \mathbf{k} + \frac{N}{4} \mathbf{k} \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{k})} \widehat{\mathbf{1}}_N^\chi. \quad (3.55)$$

onde,

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Uma propriedade importante dos operadores de translação, que pode ser deduzida de (3.50) é

$$\widehat{\mathbf{T}}_{\xi_2} \widehat{\mathbf{T}}_{\xi_1} = \widehat{\mathbf{T}}_{\xi_1 + \xi_2} e^{i\pi N \xi_1 \wedge \xi_2}, \quad (3.57)$$

o que se generaliza em

$$\widehat{\mathbf{T}}_{\xi_1} \dots \widehat{\mathbf{T}}_{\xi_j} = \widehat{\mathbf{T}}_{\xi_1 + \dots + \xi_j} e^{i\pi N D_{j+1}(\xi_1, \dots, \xi_j)}, \quad (3.58)$$

onde  $D_{j+1}(\xi_1, \dots, \xi_j)$  denota a área do polígono de  $j + 1$  lados formado pelas cordas,  $(\xi_1, \dots, \xi_j)$ , exatamente como em (2.21) no caso plano. Esta similaridade é devida ao fato das translações  $\widehat{\mathbf{T}}_\xi$  e  $\widehat{\mathbf{1}}_N^\chi$  comutarem para  $\xi = (\frac{r}{N}, \frac{s}{N})$ , assim, usando a propriedade (3.25), e projetadando (2.21) ao toro obtemos (3.58).

O fato do espaço de Hilbert ter dimensão finita implica em que os operadores lineares que nele atuam estarão representados por matrizes de  $N \times N$ . Então  $N^2$  matrizes linearmente independentes formam uma base para os operadores em  $\mathcal{H}_N^\chi$ . Isto fica claro a partir das relações de simetria dos operadores de translação; usando a relação de grupo (3.57) e (3.55) vemos que

$$\widehat{\mathbf{T}}_{\xi + \mathbf{k}} = (-1)^{s k_p - r k_q + i k_p k_q N} e^{i2\pi(k_p \chi_q - k_q \chi_p)} \widehat{\mathbf{T}}_\xi = e^{-i2\pi N[(\frac{\xi}{2} + \frac{\mathbf{x}}{N}) \wedge \mathbf{k} + \frac{1}{4} \mathbf{k} \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{k}]} \widehat{\mathbf{T}}_\xi, \quad (3.59)$$

onde  $\mathbf{k} = (k_p, k_q)$  é um vetor de componentes inteiras que representa cordas que percorrem respectivamente  $k_p$  e  $k_q$  voltas ao redor dos circuitos irredutíveis do toro.

Assim, para ter um base de operadores é necessário somente índices  $r$  e  $s$  no intervalo  $[0, N-1]$ , isto é, só precisamos de translações que percorram até uma volta no toro.

O segundo fator de fase em (3.59) vem das condições de contorno de Bloch, mas o fator  $(-1)^{sk_p - r k_q + k_p k_q N}$  mostra que precisamos de duas voltas ao redor do toro para recuperar o mesmo operador, duplicando assim a periodicidade esperada. Estes fatores de fase são a priori sem importância, já que poderíamos escolhe-los iguais a um, mas terão uma importância crucial, pois tanto a construção dos operadores de reflexão quanto a relação entre os símbolos do toro e o plano envolvem a interferência destes fatores de fase.

A partir de (3.57) e da unitariedade de  $\widehat{\mathbf{T}}_\xi$  podemos ver que

$$\widehat{\mathbf{T}}_\xi^\dagger = \widehat{\mathbf{T}}_\xi^{-1} = \widehat{\mathbf{T}}_{-\xi}. \quad (3.60)$$

Para os operadores de reflexão, usamos a definição (2.22) destes em termo de translações no plano e aí (3.45) projeta essas translações no toro, de forma que,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{R}}_x^\chi &= \widehat{\mathbf{1}}_N^\chi \widehat{\mathbf{R}}_x \widehat{\mathbf{1}}_N^\chi = (4\pi\hbar)^{-L} \int d\xi \ e^{\frac{i}{\hbar} x \wedge \xi} \widehat{\mathbf{T}}_\xi \left\langle \delta \left( \xi - \frac{(r, s)}{N} \right) \right\rangle_{r,s} \\ &= (4\pi\hbar)^{-L} \left\langle e^{i2\pi x \wedge \xi_{r,s}} \widehat{\mathbf{T}}_{r,s} \right\rangle_{r,s}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Para realizarmos a média, usamos a periodicidade das translações no toro (3.59), porém damos duas voltas ao redor do toro, assim

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{R}}_x^\chi &= (4\pi\hbar)^{-L} \left( \frac{1}{2N} \right)^{2 \cdot 2N-1} \sum_{r=0}^{2N-1} \sum_{s=0}^{2N-1} \left\langle e^{-i2\pi N [(\frac{1}{2}\xi_{r,s} + \frac{\chi}{N}) \wedge 2\mathbf{k} + \mathbf{k} \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{k}] e^{i2\pi N x \wedge (\xi_{r,s} + 2\mathbf{k})} \widehat{\mathbf{T}}_{\frac{\chi}{N}} \right\rangle_{\mathbf{k}} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{r=0}^{2N-1} \sum_{s=0}^{2N-1} e^{-i2\pi N x \wedge \xi_{r,s}} \widehat{\mathbf{T}}_{r,s} \left\langle e^{-i2\pi [(\chi - xN) \wedge 2\mathbf{k}] \right\rangle_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

A média em  $\mathbf{k}$  é diferente de zero se e somente se o ponto  $x$  for tal que  $x = x_{a,b} =$

$$\frac{1}{N} \begin{pmatrix} a + \chi_p \\ b + \chi_q \end{pmatrix}, \text{ com } a \text{ e } b \text{ semi-inteiros.}$$

Em resumo,

$$\widehat{\mathbf{1}}_N^x \widehat{R}_x \widehat{\mathbf{1}}_N^x = \begin{cases} \widehat{R}_{x_{a,b}}^x & \text{se } x = \left( \frac{a+\chi_p}{N}, \frac{b+\chi_q}{N} \right) \text{ onde } a \text{ e } b \text{ são semi-inteiros} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.63)$$

$$= \widehat{R}_{x_{a,b}}^x \left\langle \delta \left( x - \frac{\mathbf{k}}{2N} + \frac{\chi}{N} \right) \right\rangle_{\mathbf{k}} = \widehat{R}_x \widehat{\mathbf{1}}_N^x, \quad (3.64)$$

onde

$$\widehat{R}_{x_{a,b}}^x = \frac{1}{2N} \sum_{r=0}^{2N-1} \sum_{s=0}^{2N-1} e^{i2\pi N x \wedge \xi} \widehat{\mathbf{T}}_{\xi}^x \quad (3.65)$$

é a reflexão no toro de centro  $x_{a,b}$ . A última igualdade em (3.64) é válida dado que  $\widehat{R}_{x_{a,b}}^x$  comuta com  $\widehat{\mathbf{1}}_N^x$ . Mais uma vez, omitiremos a dependência explícita em  $\chi$ .

A construção dos operadores de reflexão no toro substitui a transformada de Fourier (2.22) por uma soma de Fourier sobre os operadores de translação no toro. As somas devem ser realizadas sobre operadores num período completo; as propriedades de simetria (3.59) mostram que tal período é obtido com cordas que realizam duas voltas ao redor do toro, ou seja, o período é o dobro do esperado. Assim, apesar de formarmos uma base de operadores com cordas que realizam até uma volta ao redor do toro, na soma de Fourier devemos somar sobre cordas que realizam até duas voltas. Então, os operadores da base são somados duas vezes, mas com fases de Fourier diferentes.

Doravante os sub-índices  $(a, b)$  para os centros discretos e  $(r, s)$  para a rede de cordas, ficarão implícitos e serão explicitamente escritos só para prevenir alguma possível confusão. Usando (3.29), podemos obter as seguintes relações úteis

$$\sum_{a=0}^{N-1/2} \sum_{b=0}^{N-1/2} e^{i2\pi N x \wedge \xi} = (2N)^2 \delta_{r,0}^{(2N)} \delta_{s,0}^{(2N)}, \quad (3.66)$$

onde todas as somas em  $a$  e  $b$  são feitas sobre os semi-inteiros, e

$$\sum_{r=0}^{2N-1} \sum_{s=0}^{2N-1} e^{i2\pi N x \wedge \xi} = (2N)^2 \delta_{b,0}^{(N)} \delta_{a,0}^{(N)}. \quad (3.67)$$

Aqui  $\delta_{b,0}^{(2N)}$  é a função delta de Kronecker  $2N$  periódica. Inserindo (3.46) em (3.65) vemos a ação dos operadores de reflexão no espaço de Hilbert:

$$\widehat{R}_x |q_n, N\rangle = e^{i\frac{2\pi}{N} 2(b-n)(a+\chi_p)} |q_{2b-n}, N\rangle \quad (3.68)$$

e

$$\widehat{\mathbf{R}}_x |p_m, N\rangle = e^{i\frac{2\pi}{N}2(a-m)(b+x_q)} |p_{2a-m}, N\rangle. \quad (3.69)$$

A unitariedade de  $\widehat{\mathbf{R}}_x$  é assegurada pelas relações (3.68) e (3.69).

Vemos então que  $\widehat{\mathbf{R}}_x$  reflete a rede de pontos do (EFQ) no ponto  $x = (\frac{a+x_p}{N}, \frac{b+x_q}{N})$ . Precisamos incluir valores semi-inteiros de  $a$  e  $b$  de modo que dado um estado  $|q_n, N\rangle$  possamos obter todo o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_N^x$  aplicando os diferentes  $\widehat{\mathbf{R}}_x$ . Isto está em completo acordo com o fato de que as reflexões clássicas que deixam invariante a rede formada pelo EFQ devem incluir valores semi-inteiros de  $a$  e  $b$ . Desta forma os valores semi-inteiros adquirem um significado geométrico claro. Assim os centros das reflexões formam uma rede cujo espaçamento é a metade daquela do EFQ, como se vê na figura 3.2. Mais uma vez, os únicos operadores que não se anulam quando projetados no toro são aqueles que deixam  $\mathcal{H}_N^x$  invariante. Estes correspondem classicamente às transformações que deixam invariante a rede formada pelo EFQ.

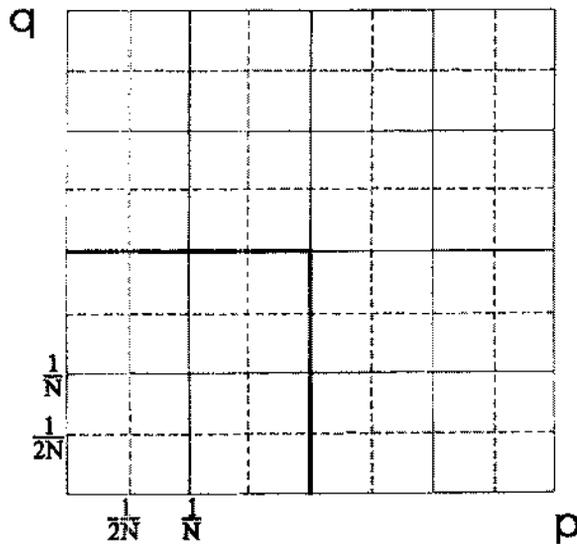


Figura 3.2: O espaço de fases quântico EFQ para  $N = 4$  (linha cheia). O espaço de fases de Weyl EFW (linha pontilhada) é a rede de pontos  $x$ , centros dos operadores de reflexão no EFQ. A região no quadrado em negrito é o quarto de toro ao qual pertencem os centros  $x$ , que definem uma base de operadores  $\mathbf{R}_x$ .

Os elementos de matriz dos operadores de reflexão na base de estados  $|\mathbf{q}_n\rangle$  são

$$\langle \mathbf{q}_m, N | \widehat{\mathbf{R}}_x | \mathbf{q}_n, N \rangle = e^{i\frac{2\pi}{N}(m-n)(a+\chi_q)} \delta_{m,2b-n}^{(N)} e^{i\frac{2\pi}{N}a(2b-n-m)}. \quad (3.70)$$

A partir de (3.68) podemos ver as propriedades de simetria destes operadores,

$$\widehat{\mathbf{R}}_{x+\frac{\mathbf{k}}{2}} = (-1)^{bk_p+ak_q+k_pk_qN} \widehat{\mathbf{R}}_x, \quad (3.71)$$

onde  $\mathbf{k} = (k_p, k_q)$  é um vetor de componentes inteiras. É importante notar que sendo as variáveis  $a$  e  $b$  inteiras e semi-inteiras, no quadrado unitário teremos  $(2N)^2$  operadores de reflexão diferentes. Mas as propriedades de simetria (3.71) mostram que somente  $N^2$  destes são independentes. Assim, tomamos os valores de  $a$  e  $b$  que pertencem a  $[0, \frac{N-1}{2}]$ ; isto forma um conjunto completo de operadores independentes, ou seja, precisa-se somente de um quarto do toro para definir um conjunto completo de operadores de reflexão. Nem todos os valores de  $x = (\frac{a+\chi_p}{N}, \frac{b+\chi_q}{N})$  gerados por estes valores de  $a$  e  $b$  pertencem ao EFQ; de fato, definimos aqui outro espaço, o *espaço de fases de Weyl*, EFW, formado pelo suporte de  $x$ , mostrado pela área em negrito na figura 3.2. No caso de  $N$  ímpar, veremos que o EFW pode ser definido de forma a coincidir com o EFQ.

Usando (3.66) podemos ver que,

$$\widehat{\mathbf{T}}_\xi = \frac{1}{2N} \sum_{a=0}^{N-1/2} \sum_{b=0}^{N-1/2} e^{-i2\pi N x \wedge \xi} \widehat{\mathbf{R}}_x, \quad (3.72)$$

onde nesta última equação também estamos somando sobre os índices num intervalo duplo daquele necessário para definir uma base de operadores. Este fato é devido a que (3.71) implica em que as reflexões classicamente equivalentes, em pontos diametralmente opostos em qualquer um dos circuitos irredutíveis do toro, diferem quanticamente por uma fase.

Pesquisaremos agora as propriedades de grupo ou cociclo dos operadores de translação e reflexão definidos nesta seção. É importante notar que as transformações aqui tratadas são tais que deixam invariante a rede formada pelo EFQ ao nível clássico,

tanto quanto o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_N^\chi$ . Com a ajuda de (3.72) e (3.57), obtemos as seguintes propriedades para os operadores,

$$\widehat{\mathbf{R}}_x \widehat{\mathbf{T}}_\xi = \widehat{\mathbf{R}}_{x-\xi/2} e^{-i2\pi N x \wedge \xi}, \quad (3.73)$$

$$\widehat{\mathbf{T}}_\xi \widehat{\mathbf{R}}_x = \widehat{\mathbf{R}}_{x+\xi/2} e^{-i2\pi N x \wedge \xi}, \quad (3.74)$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_{x_1} \widehat{\mathbf{R}}_{x_2} = \widehat{\mathbf{T}}_{2(x_2-x_1)} e^{i2\pi N(2x_1 \wedge x_2)}. \quad (3.75)$$

Temos então as mesmas propriedades de grupo que no caso do plano (2.20)-(2.26). Isto é uma consequência da comutação do produto de operadores com as projeções (3.25) e terá uma importância crucial para as representações de centros e cordas no toro. Notemos que a caracterização de cordas  $\xi$  por inteiros e de centros  $x$  por semi-inteiros é respeitada pelo grupo de operações acima.

Outra propriedade que resulta da última relação de cociclo (3.75) é

$$\widehat{\mathbf{R}}_x \widehat{\mathbf{R}}_x = 1, \quad (3.76)$$

em acordo com as reflexões clássicas. Isto significa que

$$\widehat{\mathbf{R}}_x^{-1} = \widehat{\mathbf{R}}_x^\dagger = \widehat{\mathbf{R}}_x, \quad (3.77)$$

ou seja, os operadores de reflexão no toro são unitários e Hermitianos.

É importante, neste ponto, examinarmos os traços destes operadores. Utilizando (3.52) e (3.29), temos:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\widehat{\mathbf{T}}_\xi) &= N e^{i\frac{2\pi}{N}(\frac{r_s}{2} + r\chi_p - s\chi_p)} \delta_{r,0}^{(N)} \delta_{s,0}^{(N)} \equiv N e^{i\frac{2\pi}{N}(\frac{r_s}{2} + r\chi_p - s\chi_p)} \delta_\xi^{(N)} \\ &= N e^{-i2\pi N(\frac{\chi}{N} \wedge \xi + \frac{1}{2} \xi_\nu \wedge \xi_\sigma)} \delta_\xi^{(N)}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

No caso dos operadores de reflexão, lembrando (3.70), obtemos

$$\langle \mathbf{q}_n, N | \widehat{\mathbf{R}}_x | \mathbf{q}_n, N \rangle = \delta_{n,2b-n}^{(N)} e^{i\frac{2\pi}{N} a(2b-2n)}, \quad (3.79)$$

que é diferente de zero se e somente se

$$n = b \pmod{\left(\frac{N}{2}\right)}. \quad (3.80)$$

Porém, se por exemplo  $b$  for semi-inteiro e  $N$  for par, não haveria nenhum  $n$  tal que (3.80) se satisfaça. Em geral podemos ter até 2 soluções de (3.80) para  $n \in [0, N - 1]$ , mas estas podem ter contribuições com fase diferentes em (3.79). Uma análise cuidadosa leva-nos a:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\widehat{\mathbf{R}}_x) &= f_N(x) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{2a} + (-1)^{2b} + (-1)^{2a+2b+N}) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } N \text{ é par e } a \text{ ou } b \text{ semi-inteiros} \\ 2 & \text{se } N \text{ é par e } a \text{ e } b \text{ inteiros} \\ 1 & \text{se } N \text{ é ímpar e } a \text{ ou } b \text{ inteiros} \\ -1 & \text{se } N \text{ é ímpar e } a \text{ e } b \text{ semi-inteiros} \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

A importância deste resultado para a teoria a seguir exige uma explicação intuitiva em termos de reflexões da rede discreta periodizada. Como no caso do plano, podemos relacionar  $\text{Tr}(\widehat{\mathbf{R}}_x)$  com o número de pontos fixos do mapa clássico correspondente. De fato, para  $N$  ímpar sempre há um único ponto fixo, em acordo com o módulo de (3.81). Se  $N$  for par, só haverá pontos fixos se  $x$  for caracterizado por números inteiros  $(a, b)$ , em cujo caso haverão dois pontos fixos.

### 3.3 Operadores e seus símbolos

Uma vez definidas as bases de operadores de reflexão e translação, podemos decompor todo operador como uma combinação linear destes. O tratamento apresentado aqui se baseia no trabalho de Balazs e Jennings [59] e na teoria para o caso plano [32].

Dada uma família de operadores  $\widehat{B}(a, b)$  de dois parâmetros que forma uma base completa dos operadores no espaço de Hilbert, todo operador  $\widehat{\Omega}$  pode ser escrito na forma

$$\widehat{\Omega} = \sum_{a,b} \widetilde{\Omega}_B(a, b) \widehat{B}(a, b), \quad (3.82)$$

onde  $\tilde{\Omega}_B(a, b)$  é uma função no espaço dos parâmetros  $a$  e  $b$  que chamamos o símbolo  $B$  do operador  $\hat{\Omega}$ . Para inverter esta expressão, precisamos ter um conjunto de operadores inversos  $\hat{B}^-(a, b)$  tal que

$$\text{Tr} \left( \hat{B}^-(a', b) \hat{B}(a, b) \right) = \delta(a - a') \delta(b - b'). \quad (3.83)$$

Desta forma temos dois símbolos bem definidos:

o covariante

$$\tilde{\Omega}_{B-}(a, b) = \text{Tr} \left( \hat{B}(a, b) \hat{\Omega} \right) \quad (3.84)$$

e o contravariante

$$\tilde{\Omega}_B(a, b) = \text{Tr} \left( \hat{B}^-(a, b) \hat{\Omega} \right). \quad (3.85)$$

No nosso caso, estamos interessados em representações nas quais os conjuntos de operadores  $\hat{B}(a, b)$  são as translações e as reflexões definidas na seção anterior. Construímos em primeiro lugar a representação de cordas ou de translações de um operador. Para termos uma base completa, precisamos somente de  $N^2$  operadores, de forma que os índices  $r$  e  $s$  percorrem o intervalo  $[0, N - 1]$ . Diremos que as cordas  $\xi = (\frac{r}{N}, \frac{s}{N})$  que tem esta propriedade pertencem ao domínio fundamental. Os outros operadores de translação são obtidos a partir destes através das propriedades de simetria, ou seja, as translações fundamentais são aquelas cujas cordas são menores do que uma volta completa em qualquer dos circuitos irredutíveis do toro numa direção dada. A partir de (3.57) e de (3.78) podemos ver que  $\hat{\mathbf{T}}_{\xi}^- = \hat{\mathbf{T}}_{-\xi}$ . Assim definimos a representação de cordas de um operador como:

$$\mathbf{A}(\xi) = \text{Tr} \left( \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{T}}_{-\xi} \right). \quad (3.86)$$

A partir do símbolo, recupera-se o operador

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{N} \sum_{r,s=0}^{N-1} \mathbf{A}(\xi) \hat{\mathbf{T}}_{\xi} \equiv \frac{1}{N} \sum_{\xi} \mathbf{A}(\xi) \hat{\mathbf{T}}_{\xi}. \quad (3.87)$$

Apesar de que, para recuperar o operador precisemos somente de símbolos definidos no domínio fundamental (ou seja  $r, s$  em  $[0, N - 1]$ ), podemos utilizar (3.86)

para estender a definição do símbolo para  $r$  e  $s$  números inteiros quaisquer. É claro que estes não serão independentes dos símbolos no domínio fundamental e, a partir das propriedades de simetria de  $\widehat{\mathbf{T}}(\xi)$  (3.59), vemos que  $\mathbf{A}(\xi)$  satisfaz

$$\mathbf{A}(\xi + \mathbf{k}) = (-1)^{sk_p + rk_q + k_p k_q N} e^{i2\pi(k_p \chi_q - k_q \chi_p)} \mathbf{A}(\xi) = e^{-i2\pi N \left[ \left( \frac{k}{2} + \frac{\tilde{\mathbf{k}}}{N} \right) \wedge \mathbf{k} + \frac{1}{4} \mathbf{k} \tilde{\mathbf{k}} \right]} \mathbf{A}(\xi), \quad (3.88)$$

onde  $\mathbf{k} = (k_p, k_q)$  é um vetor de componentes inteiras que denota cordas que percorrem respectivamente  $k_p$  e  $k_q$  voltas entorno dos circuitos irredutíveis do toro. Isto é uma conseqüência importante do fato das propriedades de simetria dos símbolos serem as mesmas do que aquelas dos operadores usados para gerar estes símbolos.

Tratemos agora o caso no qual expandimos os operadores em termos de reflexões, isto é, a representação de centros, ou de Weyl. É importante lembrar que devemos tomar valores de  $a$  e  $b$  pertencentes a  $[0, \frac{N-1}{2}]$ , ou seja, somente um quarto de toro é necessário para definir uma base completa de operadores de reflexão. Os valores de  $x = (\frac{a+\chi_p}{N}, \frac{b+\chi_q}{N})$  gerados por estes valores de  $a$  e  $b$  definem o Espaço de Fases de Weyl, EFW, mostrado pela área em negrita na figura 3.2.

Das propriedades de cociclo (3.75) e (3.78), vemos que  $\widehat{\mathbf{R}}_x^- = \widehat{\mathbf{R}}_x$ , assim definimos o símbolo de centros de um operador  $\widehat{\mathbf{A}}$  tal que,

$$\mathbf{A}(x) = \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{R}}_x \right). \quad (3.89)$$

Recuperamos o operador a partir do símbolo mediante

$$\widehat{\mathbf{A}} = \frac{1}{N} \sum_{a,b=0}^{\frac{N-1}{2}} \widehat{\mathbf{R}}_x \mathbf{A}(x) \equiv \frac{1}{N} \sum_x \widehat{\mathbf{R}}_x \mathbf{A}(x). \quad (3.90)$$

As propriedades de simetria de  $\widehat{\mathbf{R}}_x$  (3.71) implicam em

$$\mathbf{A}\left(x + \frac{\mathbf{k}}{2}\right) = (-1)^{bk_p + ak_q + k_p k_q N} \mathbf{A}(x), \quad (3.91)$$

para todo vetor  $\mathbf{k} = (k_p, k_q)$  de coordenadas inteiras. Este resultado já foi obtido por Hannay e Berry [38] no caso da função de Wigner, e vemos aqui que é uma propriedade geral dos símbolos de Weyl no toro.

Como no caso plano, apresentamos agora algumas propriedades importantes dos símbolos de cordas e centros. Notemos primeiro que:

$$\mathbf{R}_x(\xi) = \text{Tr}(\widehat{\mathbf{R}}_x \widehat{\mathbf{T}}_{-\xi}) = \text{Tr}(\widehat{\mathbf{R}}_{x+\xi/2}) e^{i2\pi N x \wedge \xi} = f_N(x + \xi/2) e^{i2\pi N x \wedge \xi} \quad (3.92)$$

e

$$\mathbf{T}_\xi(x) = \text{Tr}(\widehat{\mathbf{T}}_\xi \widehat{\mathbf{R}}_x) = \text{Tr}(\widehat{\mathbf{R}}_{x+\xi/2}) e^{-i2\pi N x \wedge \xi} = f_N(x + \xi/2) e^{-i2\pi N x \wedge \xi}. \quad (3.93)$$

Obtemos o traço como

$$\text{Tr}(\widehat{\mathbf{A}}) = \mathbf{A}(\xi = 0) \quad (3.94)$$

$$= \sum_x \mathbf{A}(x) f_N(x) = \frac{1}{2} \sum_{a,b=0}^{N-\frac{1}{2}} \mathbf{A}(x). \quad (3.95)$$

Para deduzir a última igualdade, usamos o fato de que os símbolos de Weyl no toro completo são obtidos a partir de um quarto de toro mediante as relações de simetria (3.91) e a definição de  $f_N(x)$  (3.81).

A representação do operador identidade no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_N^\chi$  do toro tem a forma:

$$\mathbf{1}_N^\chi(x) = f_N(x) \quad \text{e} \quad \mathbf{1}_N^\chi(\xi) = N \delta_\xi^{(N)}. \quad (3.96)$$

Operadores Hermitianos são associados a observáveis do sistema e, em particular, ao Hamiltoniano que gera a dinâmica. Definidos como  $\widehat{\mathbf{H}} = \widehat{\mathbf{H}}^\dagger$ , obtemos

$$\mathbf{H}^\dagger(\xi) = [\mathbf{H}(-\xi)]^* \quad \text{e} \quad \mathbf{H}^\dagger(x) = [\mathbf{H}(x)]^*, \quad (3.97)$$

como no caso plano (2.41).

O papel da transformada de Fourier, no caso plano, será aqui desempenhado pela transformada de Fourier finita, nesse sentido vai nos permitir substituir cordas por centros, tanto quanto passar das representações de cordas ou centros para as

de posições. Entretanto, teremos algumas modificações devidas aos fatores  $f_N(x)$  peculiares ao toro. Assim, intercambiando centros e cordas temos,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\xi) &= \text{Tr} \left( \frac{1}{N} \sum_x \widehat{\mathbf{R}}_x \mathbf{A}(x) \widehat{\mathbf{T}}_{-\xi} \right) = \frac{1}{N} \sum_x \mathbf{A}(x) \text{Tr}(\widehat{\mathbf{R}}_{x+\xi/2}) e^{i2\pi N x \wedge \xi} \\ &= \frac{1}{N} \sum_x \mathbf{A}(x) f_N(x + \xi/2) e^{i2\pi N x \wedge \xi}, \end{aligned} \quad (3.98)$$

enquanto

$$\mathbf{A}(x) = \frac{1}{N} \sum_{\xi} \mathbf{A}(\xi) f_N(x + \xi/2) e^{-i2\pi N x \wedge \xi}. \quad (3.99)$$

Usando (3.52) e (3.88) obtemos a representação de coordenadas do operador

$\widehat{\mathbf{A}}$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_m, N | \widehat{\mathbf{A}} | \mathbf{q}_n, N \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{\xi} \mathbf{A}(\xi) \langle \mathbf{q}_m, N | \widehat{\mathbf{T}}_{\xi} | \mathbf{q}_n, N \rangle \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r,s=0}^{N-1} \mathbf{A}(\xi_{r,s}) e^{-i\frac{2\pi}{N} r(\frac{m+n}{2} + \chi_q)} \delta_{m,n+s}^{(N)} e^{i\frac{2\pi}{N} (\frac{r}{2} + \chi_p)(m-n-s)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \mathbf{A}(\xi_{r,m-n}) e^{-i\frac{2\pi}{N} r(\frac{m+n}{2} + \chi_q)}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Notemos que nesta última expressão estamos utilizando cordas que não pertencem ao domínio fundamental, isto é,  $m - n$  pode não pertencer a  $[0, N - 1]$ . Porém, o símbolo para estas cordas encontra-se definido em (3.86). Se restringirmos as cordas ao domínio fundamental, teremos um fator de fase  $e^{i\frac{2\pi}{N} (\frac{r}{2} + \chi_p)(m-n)}$  suplementar na última somatória. Este tipo de dificuldades aparece no resto do trabalho, mas, permitindo que os índices percorram todos os inteiros, as formulas tomam uma forma mais simples, como no caso de (3.100).

Usando a representação de posições

$$\widehat{\mathbf{A}} = \sum_{m,n=0}^{N-1} | \mathbf{q}_m, N \rangle \langle \mathbf{q}_m, N | \widehat{\mathbf{A}} | \mathbf{q}_n, N \rangle \langle \mathbf{q}_n, N |, \quad (3.101)$$

recuperamos o símbolo de cordas

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\xi) &= \text{Tr} \left( \sum_{m,n=0}^{N-1} \langle \mathbf{q}_m, N | \widehat{\mathbf{A}} | \mathbf{q}_n, N \rangle | \mathbf{q}_m, N \rangle \langle \mathbf{q}_n, N | \widehat{\mathbf{T}}_{-\xi} \right) \\
&= \sum_{m,n=0}^{N-1} \langle \mathbf{q}_m, N | \widehat{\mathbf{A}} | \mathbf{q}_n, N \rangle e^{-i \frac{2\pi}{N} r (\frac{m+n}{2} + \chi_q)} \delta_{m,n+s}^{(N)} e^{i \frac{2\pi}{N} (\frac{r}{2} + \chi_q)(m-n-s)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \langle \mathbf{q}_{n+s}, N | \widehat{\mathbf{A}} | \mathbf{q}_n, N \rangle e^{-i \frac{2\pi}{N} r (n + \frac{s}{2} + \chi_q)}. \tag{3.102}
\end{aligned}$$

Usando (3.70) e (3.91) intercambiamos as representações de coordenadas e de centros:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}_m, N | \widehat{\mathbf{A}} | \mathbf{q}_n, N \rangle &= \frac{1}{N} \sum_x \mathbf{A}(x) \langle \mathbf{q}_m, N | \widehat{\mathbf{R}}_x | \mathbf{q}_n, N \rangle \\
&= \frac{1}{N} \sum_{a,b=0}^{\frac{N-1}{2}} \mathbf{A}(x_{a,b}) e^{i \frac{2\pi}{N} 2(b-n)(a+\chi_p)} \delta_{m,2b-n}^{(N)} e^{i \frac{2\pi}{N} 2\chi_p(m-2b+n)} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{a=0}^{\frac{N-1}{2}} \mathbf{A}(x_{a, \frac{m+n}{2}}) e^{i \frac{2\pi}{N} (m-n)(a+\chi_p)}. \tag{3.103}
\end{aligned}$$

Notemos que nesta última fórmula tomamos centros  $x$  que não pertencem ao domínio fundamental (ou seja  $\frac{m+n}{2}$  pode não pertencer a  $[0, \frac{N-1}{2}]$ ). Recuperamos o símbolo de centros mediante

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(x) &= \text{Tr} \left( \sum_{m,n=0}^{N-1} \langle \mathbf{q}_m, N | \widehat{\mathbf{A}} | \mathbf{q}_n, N \rangle | \mathbf{q}_m, N \rangle \langle \mathbf{q}_n, N | \widehat{\mathbf{R}}_x \right) \\
&= \sum_{m,n=0}^{N-1} \langle \mathbf{q}_m, N | \widehat{\mathbf{A}} | \mathbf{q}_n, N \rangle e^{i \frac{2\pi}{N} (m-n)(a+\chi_p)} \delta_{m,2b-n}^{(N)} e^{i \frac{2\pi}{N} a(2b-n-m)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \langle \mathbf{q}_{2b-n}, N | \widehat{\mathbf{A}} | \mathbf{q}_n, N \rangle e^{i \frac{2\pi}{N} 2(b-n)(a+\chi_p)}. \tag{3.104}
\end{aligned}$$

Teria sido possível definir as representações de cordas e de Weyl pelas equações (3.102) e (3.104) respectivamente. Porém, a estrutura geométrica, o papel das translações e reflexões e a relação com a teoria no plano seriam relegadas a meras curiosidades.

### 3.4 Símbolos do Produto de Operadores

Derivaremos agora a lei do produto para os símbolos de operadores nas representações aqui estudadas. Começemos com a representação de cordas (3.87). Para este propósito

usaremos as relações (3.57) e (3.78), para obtermos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{AB}(\xi) &= \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{B}} \widehat{\mathbf{T}}_{-\xi} \right) = \left( \frac{1}{N} \right)^2 \sum_{\xi_1, \xi_2} \mathbf{A}(\xi_1) \mathbf{B}(\xi_2) \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{T}}_{\xi_1} \widehat{\mathbf{T}}_{\xi_2} \widehat{\mathbf{T}}_{-\xi} \right) \\
 &= \left( \frac{1}{N} \right)^2 \sum_{\xi_1, \xi_2} \mathbf{A}(\xi_1) \mathbf{B}(\xi_2) N e^{i2\pi N D_4(\xi_1, \xi_2, -\xi)} \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{T}}_{\xi_1 + \xi_2 - \xi} \right) \\
 &= \left( \frac{1}{N} \right) \sum_{\xi_1} \mathbf{A}(\xi_1) \mathbf{B}(\xi - \xi_1) e^{i2\pi N D_3(\xi_1, -\xi)}, \tag{3.105}
 \end{aligned}$$

onde permitimos que cordas  $\xi_2 = \xi - \xi_1$  não pertençam ao domínio fundamental. Tomemos agora o traço do produto; inserindo (3.94) em (3.105), nos leva a

$$\text{Tr} (\mathbf{AB}) = \left( \frac{1}{N} \right) \sum_{\xi_1} \mathbf{A}(\xi_1) \mathbf{B}(-\xi_1). \tag{3.106}$$

A generalização de (3.105) para o produto de um número arbitrário de operadores é

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_n \dots \mathbf{A}_1(\xi) &= \left( \frac{1}{N} \right)^{n-1} \sum_{\xi_1 \dots \xi_{n-1}} \mathbf{A}_1(\xi_1) \dots \\
 &\quad \mathbf{A}_{n-1}(\xi_{n-1}) \mathbf{A}_n \left( \xi - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \right) \exp \left[ -i2\pi N D_{n+1}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, -\xi) \right].
 \end{aligned}$$

Assim, a regra do produto na representação de cordas é obtida a partir da regra no plano simplesmente substituindo a integral em (2.44) pela soma correspondente.

Para o símbolo de centros, (3.89), o traço do produto é obtido a partir de (3.75) e (3.78):

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} (\mathbf{AB}) &= \left( \frac{1}{N} \right)^2 \sum_{x_1, x_2} \mathbf{A}(x_2) \mathbf{B}(x_1) \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{R}}_{x_2} \widehat{\mathbf{R}}_{x_1} \right) \\
 &= \left( \frac{1}{N} \right)^2 \sum_{x_1, x_2} \mathbf{A}(x_2) \mathbf{B}(x_1) e^{i2\pi N (2x_1 \wedge x_2)} \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{T}}_{2(x_2 - x_1)} \right) \\
 &= \left( \frac{1}{N} \right) \sum_{x_1} \mathbf{A}(x_1) \mathbf{B}(x_1). \tag{3.108}
 \end{aligned}$$

Derivaremos agora em forma completa as propriedades do produto na representação

de centros (3.90); com a ajuda das propriedades de grupo (3.75), (3.73) e (3.81) temos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{AB}(x) &= \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{B}} \widehat{\mathbf{R}}_x \right) = \left( \frac{1}{N} \right)^2 \sum_{x_1, x_2} \mathbf{A}(x_2) \mathbf{B}(x_1) \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{R}}_{x_2} \widehat{\mathbf{R}}_{x_1} \widehat{\mathbf{R}}_x \right) \\
 &= \left( \frac{1}{N} \right)^2 \sum_{x_1, x_2} \mathbf{A}(x_2) \mathbf{B}(x_1) e^{i2\pi N^2(x_1 \wedge x_2 + x_2 \wedge x + x \wedge x_1)} \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{R}}_{x+x_2-x_1} \right) \\
 &= \left( \frac{1}{N} \right)^2 \sum_{x_1, x_2} \mathbf{A}(x_2) \mathbf{B}(x_1) e^{i2\pi N \Delta_3(x, x_1, x_2)} f_N(x + x_2 - x_1), \quad (3.109)
 \end{aligned}$$

onde a área simplética do triângulo  $\Delta_3(x, x_1, x_2)$  foi definida em (1.42). Notemos que os lados deste triângulo devem ser vetores inteiros neste caso já que simetria de cada um dos lados com respeito ao seu centro implica que todos os vértices vão ser do mesmo tipo independentemente dos valores de  $a$  ou  $b$  serem inteiros ou semi-inteiros. O argumento da função  $f_N$  definida em (3.81) pode então ser qualquer um dos vértices do triângulo, como se vê na figura 3.3(a). Vemos então que as propriedades das reflexões no EFQ levam a regras do produto mais complexas que no caso plano (2.45).

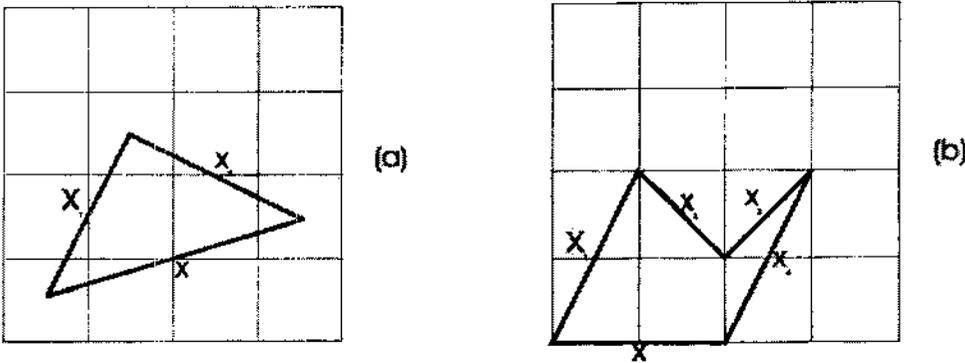


Figura 3.3: Dois exemplos de polígonos que mostram a natureza uniforme dos vértice do polígono. (a) todos os vértice caem nos semi-inteiros:  $f_N = 0$  ou  $-1$  para  $N$  par ou ímpar respectivamente (b) os vértice caem nos inteiros:  $f_N = 2$  ou  $1$  para  $N$  par ou ímpar respectivamente.

A generalização para o produto de  $2n$  operadores é

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{2n} \dots \mathbf{A}_1(x) &= \left( \frac{1}{N} \right)^{2n} \sum_{x_1 \dots x_{2n}} \mathbf{A}_{2n}(x_{2n}) \\
 \dots \mathbf{A}_1(x_1) &e^{i2\pi N \Delta_{2n+1}(x, x_{2n}, \dots, x_1)} f_N \left( x + \sum_{j=1}^{2n} (-1)^j x_j \right), \quad (3.110)
 \end{aligned}$$

onde novamente o argumento de  $f_N$  é qualquer um dos cantos do polígono cujos lados tem centros nos pontos  $x, x_{2n}, \dots, x_1$  (veja um exemplo na figura 3.3(b)). Para um número ímpar de operadores é só escolher  $\widehat{\mathbf{A}}_1 = \widehat{\mathbf{1}}_N^x$ , isto é,  $\mathbf{A}_1(x_1) = f_N(x_1)$  em (3.110).

As leis do produto são o resultado principal desta seção. Em contraste com representação a do tipo Weyl obtida por Galleti e de Toledo Pisa [35], precisamos aqui a metade das somas. Kaperskovitz e Peev [37] também construíram uma representação do tipo Weyl, mas somente para o caso onde  $N$  é par. Eles construíram produtos de 2 operadores e a lei de produto que eles obtém é muito similar à nossa, apesar de ter um significado geométrico bem diferente, já que eles não incluem os índices semi-inteiros.

A partir dos resultados obtidos para as leis do produto, podemos agora dar as condições sobre os símbolos de um operador para que este represente um operador  $\widehat{\mathbf{U}}$  unitário, ou seja,  $\widehat{\mathbf{U}}\widehat{\mathbf{U}}^\dagger = \widehat{\mathbf{1}}_N^x$ . Usando então a relação (3.97) para o símbolo do conjugado Hermitiano no toro, a lei do produto (3.105) e a representação da unidade (3.96), vemos que, para o símbolo  $\mathbf{U}(\xi)$  representar um operador unitário, deve satisfazer

$$\left(\frac{1}{N}\right) \sum_{\xi_1} \mathbf{U}(\xi_1) \mathbf{U}^*(\xi_1 - \xi) e^{-i2\pi N \xi_1 \wedge \xi} = \mathbf{1}(\xi) = N \delta_\xi^{(N)}, \quad (3.111)$$

enquanto que na representação de centros, operadores unitários são descritos por símbolos  $\mathbf{U}(x)$ , tais que

$$\left(\frac{1}{N}\right)^2 \sum_{x_1, x_2} \mathbf{U}(x_1) \mathbf{U}^*(x_2) e^{i4\pi N(x-x_1) \wedge (x-x_1)} = \mathbf{1}(x) = f_N(x) \quad (3.112)$$

### 3.5 Representação de Weyl no EFQ:

Se  $N$  for ímpar, podemos definir o EFW de tal forma que ele coincida com o EFQ.

Para este propósito definimos  $X = (\frac{\alpha+\chi_p}{N}, \frac{\beta+\chi_q}{N})$  de modo que,

$$\alpha = a + j\frac{N}{2} \quad \text{onde } j = \begin{cases} 0 & \text{se } a \text{ é inteiro} \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.113)$$

$$\beta = b + k\frac{N}{2} \quad \text{onde } k = \begin{cases} 0 & \text{se } b \text{ é inteiro} \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.114)$$

Temos então que  $\alpha$  e  $\beta$  resultam ser números inteiros para o caso  $N$  ímpar. Em outras palavras, para cada  $x$  existe um ponto  $X$ , tal que

$$X = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \frac{\chi}{N} = x + \frac{1}{2}\mathbf{n}, \quad (3.115)$$

onde  $\mathbf{n}$  é um vetor inteiro. Se  $N$  for par,  $\alpha$  e  $\beta$  acima serão do mesmo tipo (inteiro ou semi-inteiro) que  $a$  e  $b$  e então não podemos recuperar o EFQ. Assim, doravante nesta seção nos restringiremos ao caso em que  $N$  é ímpar. As relações de simetria (3.71) mostram que

$$\widehat{\mathbf{R}}_X = (-1)^{(2jb+2ja+jk)} \widehat{\mathbf{R}}_x, \quad (3.116)$$

e, com a ajuda de (3.81), temos que

$$\text{Tr}(\widehat{\mathbf{R}}_X) = 1. \quad (3.117)$$

Vemos agora que, deixando  $a$  e  $b$  percorrerem os semi-inteiros em  $[0, \frac{N-1}{2}]$ , temos que  $\alpha$  e  $\beta$  pertencem aos inteiros em  $[0, N-1]$  e dessa forma recupera-se o EFQ. Para este espaço temos uma nova representação de Weyl

$$\mathbf{A}(X) = \text{Tr}(\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{R}}_X), \quad (3.118)$$

a partir da qual recuperamos o operador:

$$\widehat{\mathbf{A}} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha, \beta=0}^{N-1} \widehat{\mathbf{R}}_X \mathbf{A}(X_{\alpha, \beta}) \equiv \frac{1}{N} \sum_X \widehat{\mathbf{R}}_X \mathbf{A}(X). \quad (3.119)$$

Vamos agora examinar as propriedades do produto nesta representação:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{AB}(X) &= \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{B}} \widehat{\mathbf{R}}_{X_{\alpha, \beta}} \right) = \left( \frac{1}{N} \right)^2 \sum_{X_1, X_2} \mathbf{A}(X_2) \mathbf{B}(X_1) \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{R}}_{X_2} \widehat{\mathbf{R}}_{X_1} \widehat{\mathbf{R}}_X \right) \\
 &= \left( \frac{1}{N} \right)^2 \sum_{X_1, X_2} \mathbf{A}(X_2) \mathbf{B}(X_1) e^{i2\pi N 2(X_1 \wedge X_2 - X_2 \wedge X + X \wedge X_1)} \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{R}}_{X+X_2-X_1} \right) \\
 &= \left( \frac{1}{N} \right)^2 \sum_{X_1, X_2} \mathbf{A}(X_2) \mathbf{B}(X_1) e^{i2\pi N \Delta_3(X, X_1, X_2)}, \tag{3.120}
 \end{aligned}$$

Esta última expressão é muito similar à obtida na seção anterior para o caso geral, mas está simplificada pela ausência do termo  $f_N$ , em analogia com o formalismo no plano. Para o produto de  $2n$  operadores a generalização é

$$\mathbf{A}_{2n} \dots \mathbf{A}_1(X) = \left( \frac{1}{N} \right)^{2n} \sum_{X_1 \dots X_{2n}} \mathbf{A}_{2n}(X_{2n}) \dots \mathbf{A}_1(X_1) e^{i2\pi N \Delta_{2n+1}(X, X_{2n}, \dots, X_1)}. \tag{3.121}$$

A ausência do fator  $f_N$  nesta fórmula simplificada deve ser entendida pelo fato dos polígonos cujos lados tem centros numa rede de pontos inteiros terem cantos na mesma rede. Ora,  $f_N$  é sempre igual a um para todos os vértices, se  $N$  for ímpar.

Da mesma forma, para  $N$  ímpar, podemos realizar uma transformação similar a (3.115), para um conjunto de cordas  $\Xi$  que são múltiplos pares de  $\frac{1}{N}$ . Este conjunto de cordas será uma base completa, se permitirmos que elas realizem duas voltas ao redor do toro. Este esquema pode ser generalizado de forma a realizar a quantização em centros ou cordas que são múltiplos de  $\frac{\phi}{N}$ , sempre que  $2\phi$  e  $N$  forem coprimos. Assim, as cordas (ou centros) terão como suporte uma rede de espaçamento  $\frac{\phi}{N}$  e de lado  $\phi$ . Estas transformações resultarão de grande importância para os mapas do gato e serão estudadas mais detalhadamente nos capítulos 6 e 7.

### 3.6 Relação entre os símbolos

Existem várias formas de se representar um dado operador  $\widehat{\mathbf{A}}$  que atua no espaço de Banach do plano  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ . Dentre elas, as representações de cordas e centros são as de especial interesse para este trabalho. Projetando o operador  $\widehat{\mathbf{A}}$  no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_N^X$  mediante  $\widehat{\mathbf{A}} = \widehat{\mathbf{1}}_N^X \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{1}}_N^X$ , ele pode ser representado em termos de operadores de

translação e reflexão no toro. Mostraremos agora como os símbolos do operador no toro podem ser obtidos a partir dos seus análogos no plano.

Começando com a representação de cordas, calculamos o símbolo no toro nas cordas  $\xi = (\frac{r}{N}, \frac{s}{N})$ . Usando que  $\widehat{\mathbf{T}}_{-\xi}$  e  $\widehat{\mathbf{I}}_N^x$  comutam, temos

$$\mathbf{A}(\xi) = \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{I}}_N^x \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{I}}_N^x \widehat{\mathbf{T}}_{-\xi} \right) = \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{I}}_N^x \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{T}}_{-\xi} \widehat{\mathbf{I}}_N^x \right) = \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{T}}_{-\xi} \widehat{\mathbf{I}}_N^x \right). \quad (3.122)$$

Logo, expressamos o operador  $\widehat{\mathbf{A}}$  em termos de translações (2.31) e usamos as relações de grupo dos operadores de translação (2.20) para obtermos

$$\mathbf{A}(\xi) = \int \frac{d\xi_1}{(2\pi\hbar)} A(\xi_1) e^{\frac{i}{2\hbar} \xi_1 \wedge \xi} \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{T}}_{\xi_1 - \xi} \widehat{\mathbf{I}}_N^x \right). \quad (3.123)$$

Usamos agora a propriedade das projeções no toro dos operadores de translação (3.45), de forma que

$$\mathbf{A}(\xi) = \int \frac{d\xi_1}{(2\pi\hbar)} A(\xi_1) e^{\frac{i}{2\hbar} \xi_1 \wedge \xi} \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{T}}_{\xi_1 - \xi} \right) \left\langle \delta \left( \xi_1 - \xi - \frac{\mathbf{k}}{N} \right) \right\rangle_{\mathbf{k}}. \quad (3.124)$$

Realizando a integração e usando a propriedade dos traços (3.78), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\xi) &= \left\langle (-1)^{sk_p + r\tilde{k}_q + k_p k_q N} e^{i2\pi(k_p \chi_q - k_q \chi_p)} A \left( \frac{r}{N} + k_p, \frac{s}{N} + k_q \right) \right\rangle_{\mathbf{k}} \\ &= \left\langle e^{i2\pi N \left[ \left( \frac{\xi}{2} - \frac{\tilde{\xi}}{N} \right) \wedge \mathbf{k} + \frac{1}{4} \mathbf{k} \tilde{\mathbf{k}} \right]} A(\xi + \mathbf{k}) \right\rangle_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (3.125)$$

onde o vetor  $\mathbf{k}$  de  $2L$  dimensões tem coordenadas inteiras. Notemos que devemos realizar uma media ponderada por uma fase sobre pontos equivalentes para obtermos o símbolo no toro. Isto é semelhante à forma em que Hannay e Berry quantizaram os mapas do gato [38] na representação de posições.

Procedemos em forma semelhante para derivar os símbolos na representação de centros nos pontos  $x = (\frac{a+\chi_p}{N}, \frac{b+\chi_q}{N})$ . Usando a comutação de  $\widehat{\mathbf{R}}_x$  com  $\widehat{\mathbf{I}}_N^x$  e (2.31), temos

$$\mathbf{A}(x) = \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{I}}_N^x \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{R}}_x \right) = \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{I}}_N^x \int \frac{dy}{(\pi\hbar)} A(y) \widehat{\mathbf{R}}_y \widehat{\mathbf{R}}_x \widehat{\mathbf{I}}_N^x \right), \quad (3.126)$$

que combinado com as propriedades de cociclo (2.26), torna-se

$$A(x) = \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{I}}_N^\chi \int \frac{dy}{(\pi\hbar)} A(y) e^{\frac{i}{\hbar} 2y \wedge x} \widehat{\mathbf{T}}_{2(x-y)} \widehat{\mathbf{I}}_N^\chi \right). \quad (3.127)$$

Projetando as translações no toro (3.45), temos

$$A(x) = \int \frac{dy}{(\pi\hbar)} A(y) e^{\frac{i}{\hbar} 2y \wedge x} \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{T}}_{2(x-y)} \right) \left\langle \delta \left( 2(x-y) - \frac{\mathbf{k}}{N} \right) \right\rangle_{\mathbf{k}}, \quad (3.128)$$

de forma que realizando a integração obtemos,

$$A(x) = \left\langle e^{i2\pi(a k_q - b k_p + \frac{N}{2} k_q k_p)} A \left( \frac{a + \chi_p}{N} + \frac{k_p}{2}, \frac{b + \chi_q}{N} + \frac{k_q}{2} \right) \right\rangle_{\mathbf{k}} = \left\langle e^{i2\pi N \left( (x - \frac{\mathbf{k}}{N}) \wedge \mathbf{k} + \frac{1}{4} \mathbf{k} \tilde{\mathbf{k}} \right)} A \left( x + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) \right\rangle_{\mathbf{k}}, \quad (3.129)$$

Novamente temos uma média ponderada por uma fase sobre pontos equivalentes. Isto é uma propriedade geral das representações de operadores obtidas mediante projeções; somente a fase depende da representação específica que estejamos usando. Uma característica importante da representação de centros é que as fases são independentes dos parâmetros  $\chi$  da quantização; isto se vê melhor na primeira linha de (3.129). Notemos também, comparando (3.125) e (3.129) com (3.88) e (3.91) respectivamente, que as fases são uma consequência das condições de periodicidade dos símbolos. É importante notarmos que se  $\widehat{A}$  e  $\widehat{\mathbf{I}}_N^\chi$  comutarem,  $\widehat{\mathbf{A}}$  é a restrição de  $\widehat{A}$  no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_N^\chi$  e denota um automorfismo. De fato, a comutação de  $\widehat{A}$  e  $\widehat{\mathbf{I}}_N^\chi$  implica que os símbolos  $A(x)$  e  $A(\xi)$  são funções periódicas. Caso contrário, as médias definidas em (3.125) e (3.129) podem não existir, ou pode também acontecer que o operador projetado  $\widehat{\mathbf{A}} = \widehat{\mathbf{I}}_N^\chi \widehat{A} \widehat{\mathbf{I}}_N^\chi$  seja igual a zero.

### 3.7 Invariança simplética

Já mencionamos no capítulo 2 que as representações de centros e cordas no plano são invariantes perante os equivalentes quânticos das transformações canônicas lineares, ou transformações simpléticas  $x' = \mathcal{M}x$ . As transformações para as quais a matriz simplética  $\mathcal{M}$  é constituída de coeficientes inteiros são conhecidas coloquialmente

como *mapas do gato*. Estes tem a propriedade de deixar invariante a cela unitária do toro. Devido à comutação do produto de operadores com a projeção do plano (3.25), o efeito de uma transformação de semelhança  $\hat{A} \rightarrow \hat{U}_M \hat{A} \hat{U}_M^{-1}$  realizada por um mapa do gato quantizado sobre qualquer operador definido no toro será puramente clássico nas representações de centros e cordas:

$$\mathbf{A}(x) \rightarrow \mathbf{A}(\mathcal{M}x) \quad \text{e} \quad \mathbf{A}(\xi) \rightarrow \mathbf{A}(\mathcal{M}\xi). \quad (3.130)$$

Evidentemente, a matriz  $\mathcal{M} = 1$  é um mapa do gato; o produto de mapas do gato também é um mapa do gato, assim como a inversa de um mapa do gato. Por tanto, o conjunto dos mapas do gato forma um subgrupo das transformações simpléticas, ao qual nos referiremos como o *grupo felino*. Desta forma, as relações (3.130) indicam a invariança felina das representações de cordas e centros. Este fato será explorado em maior detalhes nos capítulos 5, 6 e 7, onde discutiremos o fato de que nem todo mapa do gato pode ser quantizado. Portanto, o grupo felino quântico é um subgrupo do grupo felino clássico.

## 4 Hamiltonianos no Toro e integrais de caminho.

Uma vez desenvolvidas as representações de cordas e centros no toro, é importante desenvolvermos potencialidades. Para tal propósito, aplicaremos a ferramenta desenvolvida para dois tipos de sistemas. Neste capítulo trataremos de sistemas Hamiltonianos no toro.

Lembremos primeiro que os colchetes de Poisson, (1.6), que definem a estrutura simplética do espaço de fases, são os mesmos, tanto para o toro, quanto para o plano; assim as funções geratrizes das transformações canônicas clássicas são governadas pelas mesmas leis de composição que as definidas no capítulo 2 para o caso plano. A única diferença é que no toro haverá mais cordas, para um mesmo centro, devido às condições de periodicidade na borda.

Estudaremos então sistemas dinâmicos com  $L$  graus de liberdade para os quais existe uma função Hamiltoniana que gera a dinâmica através das equações de Hamilton (1.4) e que é periódica em todas as suas  $2L$  variáveis. No caso  $L = 1$ , este tipo de sistema tem aplicações na área de física dos sólidos; tem sido usado como modelagem para um sistema de elétrons num sólido unidimensional com uma modulação incomensurável da estrutura [60] e em modelos de elétrons de Bloch em campos magnéticos [61]. Tem sido demonstrado [62] que estes modelos apresentam um comportamento crítico que leva a uma estrutura hierárquica das soluções através do espectro do tipo conhecido como *Borboleta de Hofstadter* [63] e a transições de localização e deslocalização dos estados.

O teorema de Fourier assegura que uma Hamiltoniana clássica periódica no plano pode ser escrita como

$$H(p, q) = \sum_{r,s=-\infty}^{+\infty} H_{r,s} e^{i2\pi(rp-sq)}. \quad (4.1)$$

Há diferentes formas de se quantizar esta Hamiltoniana envolvendo diferentes ordenamentos. Escolhemos o ordenamento de Weyl, tal que

$$\hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) = \sum_{r,s=-\infty}^{+\infty} H_{r,s} e^{i2\pi(rp-sq)}. \quad (4.2)$$

Lembrando a definição dos operadores de translação no plano (2.17), vemos que esta última expressão é equivalente a

$$\widehat{H}(\hat{p}, \hat{q}) = \sum_{r,s=-\infty}^{+\infty} H_{r,s} \widehat{T}_{\xi_{r,s}}, \quad (4.3)$$

onde  $\xi_{r,s} = (2\pi\hbar r, 2\pi\hbar s) = (\frac{r}{N}, \frac{s}{N})$ . O Hamiltoniano é assim uma combinação linear de translações que deixam  $\mathcal{H}_N^\chi$  invariante. Se um outro ordenamento fosse escolhido, haveria correções da ordem  $\frac{1}{N}$  em (4.3).

A evolução quântica do sistema está determinada pelo propagador:

$$\widehat{U}_t = e^{\frac{i}{\hbar}t\widehat{H}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar}t\widehat{H}\right)^n. \quad (4.4)$$

Esta última relação implica em que o propagador seja uma combinação de produtos de translações no toro dadas pela expansão (4.3). Estas, como vimos, formam um cociclo; assim podemos escrever:

$$\widehat{U}_t = \sum_{r,s=-\infty}^{+\infty} U_{r,s} \widehat{T}_{\xi_{r,s}}, \quad (4.5)$$

isto é, o operador evolução também deixa  $\mathcal{H}_N^\chi$  invariante. Escrito desta forma, podemos ver que o operador de evolução e o Hamiltoniano no plano periódico tem representações de cordas escritas unicamente em termos das translações do toro

$$U_t(\xi) = \sum_{r,s=-\infty}^{+\infty} U_{r,s} \delta(\xi_{r,s} - \xi). \quad (4.6)$$

Projetemos agora este operador em  $\mathcal{H}_N^\chi$ . Devemos primeiro notar que (3.25) e (4.3) nos permitem escrever,

$$\begin{aligned} \widehat{U}_t &= \widehat{U}_t \widehat{\mathbf{1}}_N^\chi = \sum_{r,s=-\infty}^{+\infty} U_{r,s} \widehat{T}_{\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar}t\widehat{H}\right)^n \widehat{\mathbf{1}}_N^\chi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar}t\widehat{H}\widehat{\mathbf{1}}_N^\chi\right)^n = e^{\frac{i}{\hbar}t\widehat{H}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde  $\widehat{H} = \widehat{\mathbf{1}}_N^\chi \widehat{H} \widehat{\mathbf{1}}_N^\chi = \widehat{H} \widehat{\mathbf{1}}_N^\chi$  é o Hamiltoniano que atua no espaço de Hilbert do toro  $\mathcal{H}_N^\chi$ .

Os operadores de evolução, unitários, formam um grupo, de modo que

$$\widehat{U}_t = (\widehat{U}_{\frac{t}{m}})^m. \quad (4.8)$$

Projetando no toro e usando (3.25) obtemos

$$\widehat{U}_t = \widehat{\Gamma}_N^x \widehat{U}_t \widehat{\Gamma}_N^x = \widehat{\Gamma}_N^x (\widehat{U}_{\frac{t}{m}})^m \widehat{\Gamma}_N^x \quad (4.9)$$

$$= (\widehat{U}_{\frac{t}{m}})^m. \quad (4.10)$$

Este último resultado é muito importante; a evolução e a projeção no toro comutam.

Temos duas alternativas para obter a representação de centros para (4.10), ou seja, trabalhar a partir das relações do plano ou trabalhar diretamente no toro.

Em primeiro lugar notemos que (4.7) implica em

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{U}_t(x) = e^{\frac{i}{\hbar} t \mathbf{H}(x)} + 0(t^2). \quad (4.11)$$

O uso de (4.10) e (3.110) resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \right)^{2Lm} \sum_{x_i=0}^{N-1} f_N(x + \sum_{j=1}^{2m} (-1)^j x_j) \\ &\quad \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ \Delta_{2m+1}(x, x_1, \dots, x_{2m}) - \frac{t}{2m} \sum_{i=1}^{2m} \mathbf{H}(x_i) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para o caso onde  $N$  é ímpar, obtemos a representação nos pontos  $X$  no EFQ

$$\mathbf{U}_t(X) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \right)^{2Lm} \sum_{X_i=0}^{N-1} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \Delta_{2m+1}(X, X_1, \dots, X_{2m}) - \frac{t}{2m} \sum_{i=1}^{2m} \mathbf{H}(X_i) \right]}. \quad (4.13)$$

Aqui vemos que para  $N$  ímpar o propagador (4.13) é similar a (2.58) substituindo a integral pelas somas apropriadas.

Para projetar, usando (4.9), podemos usar o conhecido resultado (2.58) para a integral de caminhos do propagador no plano na representação de centros.

Projetando o símbolo no toro mediante (3.129), temos então

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t(x) &= \left\langle e^{i2\pi N \left( \left[ \left( x - \frac{x}{N} \right) \wedge k + \frac{1}{2} k_p \wedge k_q \right] \right)} \lim_{m \rightarrow \infty} \int \frac{dx_1 \cdots dx_{2m}}{(\pi \hbar)^{2mL}} \right. \\ &\quad \left. \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ \Delta_{2m+1} \left( x + \frac{k}{2}, x_1, \dots, x_{2m} \right) - \frac{t}{2m} \sum_{n=1}^{2m} H(x_n) \right] \right\} \right\rangle_{\mathbf{k}} \\ &= \left\langle e^{i2\pi N \left( \left[ \left( x - \frac{x}{N} \right) \wedge k + \frac{1}{4} k \tilde{k} \right] \right)} \int_{\gamma} d\gamma e^{\frac{i}{\hbar} S_{\gamma} \left( x + \frac{k}{2} \right)} \right\rangle_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Se bem que não seja imediatamente evidente, (4.12) e (4.14) são o mesmo objeto; em (4.12), primeiro fizemos a projeção no toro e depois realizamos a evolução, enquanto que em (4.14) evoluímos primeiro no plano e a projeção no toro foi realizada posteriormente. Como a projeção (4.10) e a evolução são operações que comutam, (4.12) e (4.14) coincidem. Se tivéssemos definido a transformada de Weyl intrinsecamente no toro, sem ter projetado a partir do plano, poderíamos ainda obter uma fórmula equivalente a (4.14) com a ajuda da transformada de Poisson aplicada a (4.12).

Para tomarmos o limite semiclássico, (4.14) é a expressão adequada. De fato, para aplicar este limite devemos avaliar as integrais em (2.58) mediante o método da aproximação de fase estacionária. Isto não pode ser realizado em (4.12) devido ao fato que as variáveis ali são discretas, o que impede realizar tais variações. Mas, como já vimos no plano, o propagador semiclássico é dado por (2.60). Assim, projetando no toro teremos

$$U_t(x)_{SC} \sim \left\langle e^{i2\pi N((x - \frac{x}{N}) \wedge \mathbf{k} + \frac{1}{2} k_p \wedge k_q)} \sum_j 2^L |\det(1 + \mathcal{M}_j)|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ i\hbar^{-1} S_{tj}(x + \frac{\mathbf{k}}{2}) + i\gamma_j \right\} \right\rangle_{\mathbf{k}}. \quad (4.15)$$

A média em  $\mathbf{k}$  é uma média sobre centros equivalentes no toro devido às condições de contorno, mas esses pontos são diferentes no plano. Para obtermos a periodicidade correta, a contribuição de cada termo deve ser promediada com fases diferentes. Mas, há varias órbitas clássicas centradas em cada ponto e a contribuição de cada uma destas órbitas é obtida pela soma em  $j$ . Assim no propagador semiclássico no toro, temos uma proliferação de cordas para cada centro, devido às condições de contorno.

## 5 Os mapas do gato clássicos

### 5.1 Introdução e motivação

Como já vimos no primeiro capítulo, a linearização de um sistema dinâmico perto de uma órbita periódica é um dos mais frutíferos pontos de partida para a análise do movimento clássico. Por sua vez, no capítulo 2 vimos que o grupo simplético dos sistemas Hamiltonianos lineares no plano é facilmente quantizado para formar o grupo metaplético correspondente. Essencialmente, a função geratriz do grupo de transformações canônicas é simplesmente exponenciado para obtermos uma representação das transformações unitárias quânticas.

Se a órbita escolhida for um ponto de equilíbrio, o sistema linear correspondente pertence ao grupo simplético homogêneo, caracterizado por um ponto de equilíbrio simples, usualmente tomado como a origem. Da mesma forma, o mapa de Poincaré na vizinhança de uma órbita periódica é linearizado num mapa simplético homogêneo com tempo discreto (de período um). As características essenciais do movimento são classificadas segundo os autovalores da matriz simplética  $\mathcal{M}$ , que determina a evolução do ponto  $x$  no espaço de fases:

$$x' = \mathcal{M}x. \quad (5.1)$$

Estes podem ser

- (a) pares de autovalores reais  $(\lambda, \lambda^{-1})$ . A dinâmica de tais mapas perto de um ponto fixo é mostrada na figura 5.1(a).
- (b) pares de autovalores no círculo unitário  $(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ . Cuja dinâmica perto de um ponto fixo é mostrada na figura 5.1(b).
- (c) quartetos de autovalores complexos gerais  $\lambda^{\pm 1} e^{\pm i\theta}$ . Nestes casos a dinâmica perto de um ponto fixo é mostrada na figura 5.2.

Variando parâmetros, é possível obter autovalores iguais a um, ou a colisão de autovalores, mas a classificação realizada acima é genérica para todo sistema simplético [65].

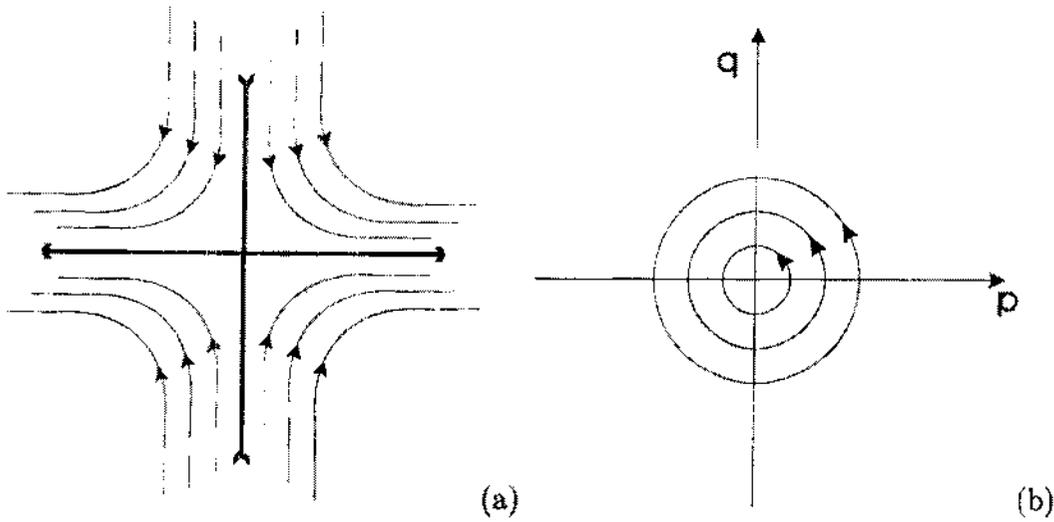


Figura 5.1: (a) A dinâmica perto de um ponto fixo hiperbólico (pares de autovalores reais  $(\lambda, \lambda^{-1})$ ). Esta contém uma variedade estável e uma variedade instável. (b) A dinâmica perto de um ponto fixo elíptico (pares de autovalores no círculo unitário  $(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ ).

É sempre possível decompor tal sistema linear genérico em sub-sistemas dentro de subespaços invariantes de duas dimensões, correspondentes aos casos (a) e (b) acima, ou de quatro dimensões no caso (c). O caso (b) é o *mapa elíptico*, que é trivialmente integrável, enquanto o caso (a) define um *movimento hiperbólico*. Este é também muito simples no caso linear, mas pode-se tornar uma fonte de mixing caótico agregando uma perturbação não-linear. Alternativamente, este efeito é conseguido tornando o espaço plano num toro.

O resultante symplectomorfismo no toro é conhecido coloquialmente sob o nome de *mapa do gato*, caracterizado por uma matriz simplética com elementos inteiros. Um mapa do gato hiperbólico é estruturalmente estável, ou seja, a estrutura das órbitas é invariante perante pequenas perturbações não-lineares devido ao teorema de Anosov [65]. O mesmo é válido para um mapa do gato *loxodrômico* de quatro dimensões de autovalores complexos gerais no caso (c). Estes mapas estruturalmente estáveis são chamados de sistemas *Anosov* e tem a propriedade de serem *ergódicos* e *mixing*.

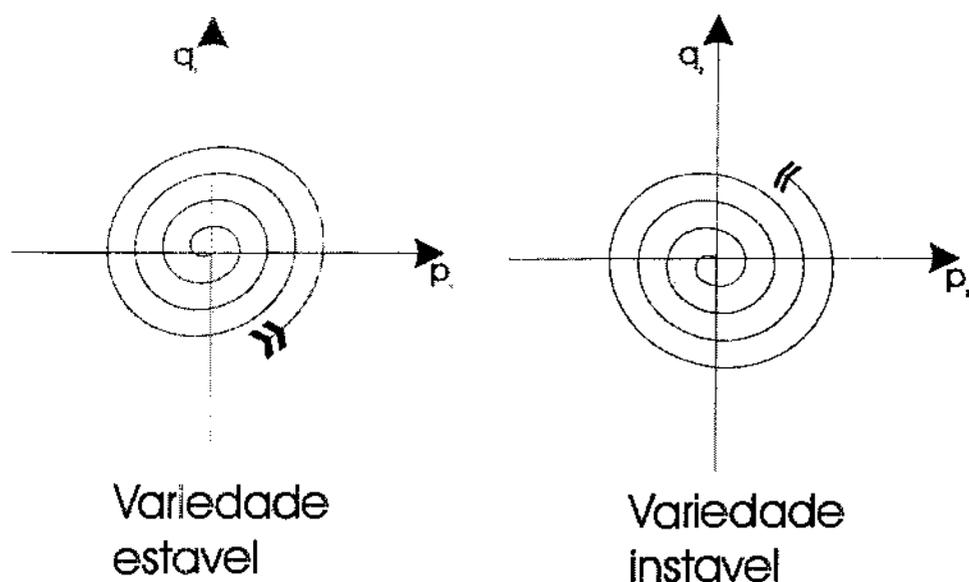


Figura 5.2: A dinâmica perto de um ponto fixo loxodrômico (quartetos de autovalores complexos gerais  $\lambda^{\pm 1} e^{\pm i\theta}$ ). Vemos aqui a dinâmica na variedade estável, e na variedade instável.

Portanto, quatro dimensões é o limite inferior no qual podemos estudar pontos periódicos loxodrômicos [65], caracterizados por variedades estáveis e instáveis nas quais as órbitas espiralam para dentro e para fora respectivamente, e o seu efeito no espectro quântico de energias. Esta é a razão da ausência destes em todos os estudos prévios de quantização de mapas do gato, porém Greenman [67] recentemente analisou a estrutura periódica dos mapas do gato clássicos. Dimensão quatro é também a mínima dimensão para a análise da decomposição da vizinhança de órbitas nas componentes elípticas e hiperbólicas.

Em alguns casos esta decomposição é somente local, devido a que a transformação canônica que a realiza não é um mapa do gato. Então o espectro quântico de quase-energias não será decomponível nos correspondentes espectros de menor dimensão. De qualquer forma, todos os mapas do gato derivados uns dos outros como o resultado de transformações de semelhança que envolvem outros mapas do gato são equivalentes: tem os mesmos autovalores (clássicos e quânticos) e o mesmo número de pontos fixos. (notemos que, no toro, um mapa linear homogêneo pode ter vários

pontos fixos).

Por esta causa, discutiremos na próxima seção o subgrupo das transformações simpléticas inteiras, ao qual damos o apelido de *grupo felino*. Para um número de dimensões maior do que dois, encontramos o problema da identificação a priori de um mapa do gato. Uma abordagem alternativa envolve as funções geratrizes, das quais temos várias escolhas. Porém, é altamente vantajoso o uso de funções geratrizes invariantes perante transformações felinas.

## 5.2 Funções geratrizes invariantes felinas

Consideremos agora um symplectomorfismo no  $2L$ -toro gerado pela matriz  $\mathcal{M}$  de  $2L \times 2L$  dimensões, que leva o ponto  $x_- = \begin{pmatrix} p_- \\ q_- \end{pmatrix}$  ao ponto  $x_+ = \begin{pmatrix} p_+ \\ q_+ \end{pmatrix}$

$$x_+ = \mathcal{M}x_- \pmod{1} \quad (5.2)$$

Em outras palavras, existe um vetor  $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_p \\ m_q \end{pmatrix}$  de  $2L$  dimensões inteiras tal que

$$x_+ = \mathcal{M}x_- - \mathbf{m}. \quad (5.3)$$

As componentes de  $\mathbf{m}$  denotam o número de voltas percorridas pelo pontos  $x_-$  ao redor dos respectivos circuitos irredutíveis do  $2L$ -toro após a aplicação do mapa  $\mathcal{M}$ . O toro divide-se em regiões indicadas pelos respectivos vetores  $\mathbf{m}$ .

Como vimos no Capítulo 1, para que o mapa descreva uma transformação canônica é preciso que a matriz  $\mathcal{M}$  seja simplética, ou seja,

$$\mathcal{M}^t \mathfrak{J} \mathcal{M} = \mathfrak{J}, \quad (5.4)$$

onde  $\mathcal{M}^t$  é a transposta de  $\mathcal{M}$ . Além disso, a matriz  $\mathcal{M}$  deve ter elementos inteiros de forma a transformar o  $2L$ -toro nele mesmo (condição de automorfismo).

Para um grau de liberdade ( $L = 1$ ) estes sistemas são conhecidos pelo nome de *mapas do gato de Arnold* [65]. Se  $|\text{tr}(\mathcal{M})| > 2$  o mapa tem dois autovalores reais

distintos e prova-se que ele é ergódico, mixing e puramente hiperbólico [65]. Para o caso  $|tr(\mathcal{M})| < 2$  não há autovalores reais e o mapa é então elíptico. Para  $|tr(\mathcal{M})| = 2$  somente existe um autovalor real degenerado (igual a 1), e assim o mapa é parabólico. Para um maior número de graus de liberdade chamaremos estes symplectomorfismos do  $(2L)$ -toro de *gatos multidimensionais* cuja dinâmica oferecerá uma estrutura mais rica, como será aqui discutido.

O conjunto de matrizes  $\mathcal{M}$  que satisfazem (5.4) forma, como vimos no capítulo 1, o grupo simplético, de forma que a matriz  $\mathcal{M}'$ , obtida de  $\mathcal{M}$  por uma transformação de semelhança

$$\mathcal{N}^t \mathcal{M} \mathcal{N} = \mathcal{M}', \quad (5.5)$$

é também simplética se a matriz  $\mathcal{N}$  for simplética. De fato, devemos considerar as transformações simpléticas correspondentes a  $\mathcal{M}'$  e  $\mathcal{M}$ , como a mesma transformação vista em sistemas de coordenadas simpléticas diferentes.

Consideremos agora um produto de mapas do gato; este deve ser simplético e todos os elementos de matriz serão inteiros. Já que o inverso de um mapa do gato é também uma matriz simplética de elementos inteiros e que a matriz unidade também é, o conjunto dos mapas do gato é um sub-grupo do grupo simplético ao qual vamos dar o apelido de *grupo felino*. Novamente, podemos considerar as transformações de simetria na forma (5.5) entre os mapas do gato  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{M}'$  como definindo essencialmente mapas vistos em coordenadas simpléticas alternativas no toro.

A importância de definir classes de equivalência de mapas do gato similares cresce com a dimensão do toro. É simples definir matrizes inteiras e a condição (5.4) a posteriori, meramente restringe a dimensão do determinante a ser um, no caso  $L = 1$ . Porém, para  $L = 2$ , a propriedade simplética implica em dez condições independentes para serem satisfeitas pelos dezesseis elementos de matriz inteiros. Um procedimento alternativo é trabalhar com funções geratrizes, que garantem a definição (implícita) de uma transformação simplética. A dificuldade é então assegurar que os elementos de matriz sejam inteiros. Resulta que esta última abordagem tem se mostrado mais frutífera, especialmente devido à quantização dos mapas do gato nos capítulos 6 e 7

se realizar utilizando explicitamente as funções geratrizes.

Como discutimos no capítulo 4, as funções geratrizes no toro tem o mesmo papel e leis de composição que suas análogas no plano, porém existe no toro um maior número de órbitas devido às condições de borda. A função geratriz na representação de posições para mapas do gato com um grau de liberdade é, segundo Keating [64],

$$S_1(q_-, q_+, \mathbf{m}) = \frac{1}{2\mathcal{M}_{21}} [\mathcal{M}_{22}q_-^2 - 2q_-(q_+ + m_q) + \mathcal{M}_{11}(q_+ + m_q)^2 - 2\mathcal{M}_{21}m_pq_+]. \quad (5.6)$$

Esta gera a dinâmica do mapa em função do número de voltas  $\mathbf{m}$  através de

$$p_+ = \frac{\partial S_1(q_-, q_+, \mathbf{m})}{\partial q_+} \quad (5.7)$$

$$p_- = -\frac{\partial S_1(q_-, q_+, \mathbf{m})}{\partial q_-}. \quad (5.8)$$

Assim a parte quadrática da função geratriz é comum para todo o toro, enquanto que a parte linear depende do vetor  $\mathbf{m}$ , o número de enrolamento, que muda de forma descontínua na borda de cada subregião do toro.

A fraqueza da função geratriz de posições é que transforma-se numa forma complicada perante transformações de semelhança felinas. Somente no caso especial de transformações de ponto, que não misturam momentos e posições, a função geratriz permanecerá invariante. Porém, as funções geratrizes de centros e cordas, são simplecticamente invariantes [32]. Adaptadas ao toro, mostraremos que estas também são invariantes perante transformações felinas.

O ponto de partida é, como no caso plano, definir centros  $x$  e cordas  $\xi$  mediante (1.18), de forma que o centro é

$$x \equiv \frac{x_+ + x_-}{2} \quad (5.9)$$

e a corda é

$$\xi \equiv x_+ - x_-. \quad (5.10)$$

Dado um ponto inicial  $x_-$ , o mapa do gato (5.3) define centros e cordas

$$x = \frac{1}{2}(\mathcal{M} + 1)x_- - \frac{\mathbf{m}}{2} \quad (5.11)$$

$$\xi = (\mathcal{M} - 1)x_- - \mathbf{m}. \quad (5.12)$$

Eliminando  $x_-$ , estabelece-se a relação direta entre centros e cordas:

$$x = \frac{1}{2} \frac{(\mathcal{M} + 1)}{(\mathcal{M} - 1)} \xi + (\mathcal{M} - 1)^{-1} \mathbf{m} \quad (5.13)$$

$$\xi = 2 \frac{(\mathcal{M} - 1)}{(\mathcal{M} + 1)} x - 2 (\mathcal{M} + 1)^{-1} \mathbf{m}. \quad (5.14)$$

Do capítulo 1, sabemos que as funções geratrizes de centros e cordas, designadas aqui por  $S(x, \mathbf{m})$  e  $S(\xi, \mathbf{m})$  respectivamente, geram a dinâmica a partir de

$$x = \mathfrak{J} \frac{\partial S(\xi, \mathbf{m})}{\partial \xi} \quad (5.15)$$

$$\xi = -\mathfrak{J} \frac{\partial S(x, \mathbf{m})}{\partial x}. \quad (5.16)$$

Igualando (5.13) a (5.15) e (5.14) a (5.16), obtemos as funções geratrizes quadráticas

$$S(x, \mathbf{m}) = xBx + x(B - \mathfrak{J})\mathbf{m} + f(\mathbf{m}) \quad (5.17)$$

$$S(\xi, \mathbf{m}) = \frac{1}{4} \xi \beta \xi + \frac{1}{2} \xi (\beta + \mathfrak{J})\mathbf{m} + g(\mathbf{m}) \quad (5.18)$$

lembramos que  $B$  e  $\beta$ , definidas no capítulo 1, são matrizes simétricas, a *parametrização de Cayley* da matriz simplética  $\mathcal{M}$ :

$$\mathfrak{J}B = \frac{(1 - \mathcal{M})}{(1 + \mathcal{M})}, \quad (5.19)$$

$$\mathfrak{J}\beta = \frac{(\mathcal{M} + 1)}{(\mathcal{M} - 1)}. \quad (5.20)$$

Assim, a transformação (5.3) fica inteiramente definida, tanto pela matriz simplética  $\mathcal{M}$  quanto por uma das matrizes simétricas,  $B$ , ou  $\beta$ . Se  $\mathcal{M}$  tiver um autovalor igual a 1, então a matriz  $\beta$  será singular. Isto corresponde a uma cáustica na função geratriz de centros. Por outro lado, se  $\mathcal{M}$  tiver um autovalor igual a  $-1$ , então  $B$  será uma matriz singular, o que corresponde a uma cáustica da função geratriz de cordas [32]. Algumas relações úteis obtidas a partir de (5.19) e (5.20) são

$$(B - \mathfrak{J}) = -2\mathfrak{J}(1 + \mathcal{M})^{-1}, \quad (5.21)$$

$$(\beta + \mathfrak{J}) = -2\mathfrak{J}(\mathcal{M} - 1)^{-1}, \quad (5.22)$$

$$\mathfrak{J}B = -\frac{1}{\mathfrak{J}\beta}, \quad (5.23)$$

e

$$\mathcal{M} = \frac{(1 - \Im B)}{(1 + \Im B)} = \frac{(\Im \beta + 1)}{(\Im \beta - 1)}. \quad (5.24)$$

As funções  $f(\mathbf{m})$  e  $g(\mathbf{m})$  são arbitrárias, já que elas dependem somente dos números de enrolamento  $\mathbf{m}$ , e de fato elas geram a mesma transformação (5.13) ou (5.14). Porém, a função geratriz de cordas para os mapas do gato pode também ser obtida diretamente a partir do mapa (5.3). Este é a composição do mapa simplético  $\mathcal{M}$  no plano, cuja função geratriz é  $S_1(x) = xBx$ , com a translação uniforme  $T_{-\mathbf{m}}$  de vetor  $-\mathbf{m}$  que traz o ponto final de volta à cela unidade  $\square$ . A função geratriz dessa translação é  $S_2(x) = -\mathbf{m} \wedge x$ , também simplecticamente invariante. Assim, usando a lei de composição para funções geratrizes de centros, (1.45) com a prescrição (1.46), obtemos a função geratriz (5.17) com o termo

$$f(\mathbf{m}) = \frac{1}{4} \mathbf{m} B \mathbf{m}. \quad (5.25)$$

Como já vimos para caso plano no Capítulo 1, as funções geratrizes se relacionam entre elas através de transformações de Legendre. Desta forma,  $S(x, \mathbf{m})$  é obtida a partir da função geratriz de posições  $S(q_-, q_+, \mathbf{m})$  como

$$S(x, \mathbf{m}) = S(q_-, q_+, \mathbf{m}) + \frac{1}{2} (p_- + p_+) (q_+ - q_-), \quad (5.26)$$

enquanto que a relação entre as funções geratrizes de cordas e centros é

$$S(\xi, \mathbf{m}) = \xi \wedge x - S(x, \mathbf{m}). \quad (5.27)$$

Em cada caso, a variável ausente no lado esquerdo é eliminada requerendo que o lado direito seja estacionário com relação a essa variável. Em seguida, usando (5.27), para a função de centros com o termo (5.25), obtemos a função geratriz de cordas (5.18) onde

$$g(\mathbf{m}) = \frac{1}{4} \mathbf{m} \beta \mathbf{m}. \quad (5.28)$$

Chamaremos de  $x_l$ , os pontos periódicos de período  $l$ . Assim, os pontos fixos  $x_l$  são tais que a corda  $\xi = 0$  ou o centro  $x = x_l = (\mathcal{M} - 1)^{-1} \mathbf{m}$ , que, inserido em (5.27) conduz a

$$S(\xi = 0, \mathbf{m}) = -S(x_l, \mathbf{m}). \quad (5.29)$$

Segue assim, que os termos em  $S(\xi, \mathbf{m})$  e  $S(x, \mathbf{m})$  que dependem unicamente de  $\mathbf{m}$  satisfazem

$$f(\mathbf{m}) + g(\mathbf{m}) = \frac{1}{4}\mathbf{m}(\beta + B)\mathbf{m}. \quad (5.30)$$

A escolha (5.25) e (5.28) obviamente satisfaz tal criterio, mas outra possibilidade é

$$f(\mathbf{m}) = \frac{1}{4}\mathbf{m}(B + \tilde{\mathfrak{J}})\mathbf{m} \quad \text{e} \quad g(\mathbf{m}) = \frac{1}{4}\mathbf{m}(\beta - \tilde{\mathfrak{J}})\mathbf{m}, \quad (5.31)$$

Usando (5.31), obtemos, para o caso  $L = 1$ , o valor da ação para um ponto fixo previamente proposto por Keating [64], na representação de posições

$$S(q_- = q_f, q_+ = q_f, \mathbf{m}) = S(x_1, \mathbf{m}). \quad (5.32)$$

Em conclusão, as funções geratrizes de centros e cordas para os mapas do gato multidimensionais são

$$S(x, \mathbf{m}) = xBx + x(B - \mathfrak{J})\mathbf{m} + \frac{1}{4}\mathbf{m}(B + \tilde{\mathfrak{J}})\mathbf{m} \quad (5.33)$$

$$S(\xi, \mathbf{m}) = \frac{1}{4}\xi\beta\xi + \frac{1}{2}\xi(\beta + \mathfrak{J})\mathbf{m} + \frac{1}{4}\mathbf{m}(\beta - \tilde{\mathfrak{J}})\mathbf{m}. \quad (5.34)$$

As funções geratrizes correspondentes a transformação  $x_+ = \mathcal{M}x_-$  no plano são simplesmente  $S(x, 0)$  e  $S(\xi, 0)$ . É importante notarmos que todas as reflexões no toro podem ser obtidas a partir de centros cujas coordenadas pertencem ao intervalo  $[0, \frac{1}{2}]$ . Seria então possível definir centros  $x'$  tais que

$$x' \equiv \frac{x_+ + x_-}{2} \pmod{\left(\frac{1}{2}\right)}. \quad (5.35)$$

Esta escolha não nos leva à relação explícita (5.11) com o numero de enrolamento da transformação, mas sim a

$$x' = \frac{1}{2}(\mathcal{M} + 1)x_- - \frac{\mathbf{m}'}{2}, \quad (5.36)$$

onde  $\mathbf{m}'$  tem coordenadas  $\mathbf{m}'_i = (\mathbf{m}_i \text{ ou } \mathbf{m}_i + 1)$ , de tal forma que todas as coordenadas de  $x'$  estariam em  $[0, \frac{1}{2}]$ . Em conseqüência, permitimos que os pontos centrais  $x$  definidos em (5.9) tenham coordenadas no intervalo  $[0, 1]$ , mantendo assim a relação

explícita com o número de enrolamento da transformação. Como conseqüência, as cordas definidas em (5.10) tem coordenadas no intervalo estendido  $[-1, 1]$ . Assim, pontos centrais, que diferem por um numero inteiro de voltas, são equivalentes. Também o são cordas que diferem por um número par de voltas:

$$x \equiv x + \mathbf{k} \quad (5.37)$$

$$\xi \equiv \xi + 2\mathbf{k}. \quad (5.38)$$

Como conseqüência dessas equivalências o número de enrolamento  $\mathbf{m}$  em (5.13) e (5.14) é equivalente a:

$$\mathbf{m} \equiv \mathbf{m}' = \mathbf{m} + (\mathcal{M} - 1)\mathbf{k} \quad (5.39)$$

em (5.13) e

$$\mathbf{m} \equiv \mathbf{m}'' = \mathbf{m} - (\mathcal{M} + 1)\mathbf{k} \quad (5.40)$$

em (5.14), isto é, substituindo  $\mathbf{m}$  por  $\mathbf{m}'$  na função geratriz  $S(\xi, \mathbf{m})$ , obtemos centros equivalentes segundo (5.37). Já para obter cordas equivalentes relacionadas por (5.38), é preciso substituir  $\mathbf{m}$  por  $\mathbf{m}''$  na função geratriz de centros  $S(x, \mathbf{m})$ . Realizando as mencionadas substituições, obtemos

$$S(\xi, \mathbf{m}') = S(\xi, \mathbf{m}) + \xi \wedge \mathbf{k} - \frac{1}{2}\mathbf{m}\Gamma_1\mathbf{k} - \frac{1}{4}\mathbf{k}\Delta_1\mathbf{k} \quad (5.41)$$

$$S(x, \mathbf{m}'') = S(x, \mathbf{m}) - 2x \wedge \mathbf{k} - \frac{1}{2}\mathbf{m}\Gamma_2\mathbf{k} - \frac{1}{4}\mathbf{k}\Delta_2\mathbf{k}, \quad (5.42)$$

onde

$$\Gamma_1 = [(\mathfrak{J} - \tilde{\mathfrak{J}})\mathcal{M} + (\mathfrak{J} + \tilde{\mathfrak{J}})] \quad (5.43)$$

$$\Delta_1 = [(\mathcal{M}'\tilde{\mathfrak{J}}\mathcal{M} + \tilde{\mathfrak{J}}) - \mathcal{M}'(\mathfrak{J} + \tilde{\mathfrak{J}}) - (\mathfrak{J} - \tilde{\mathfrak{J}})\mathcal{M}] \quad (5.44)$$

$$\Gamma_2 = [(\mathfrak{J} + \tilde{\mathfrak{J}})\mathcal{M} + (\tilde{\mathfrak{J}} - \mathfrak{J})] \quad (5.45)$$

$$\Delta_2 = [(\mathcal{M}'\tilde{\mathfrak{J}}\mathcal{M} + \tilde{\mathfrak{J}}) + \mathcal{M}'(\tilde{\mathfrak{J}} - \mathfrak{J}) + (\mathfrak{J} + \tilde{\mathfrak{J}})\mathcal{M}]. \quad (5.46)$$

Desta forma podemos restringir  $\mathbf{m}$  a vetores de componentes inteiras em um dos paralelepípedos fundamentais

$$\diamond_{\xi} = (\mathcal{M} - 1)\square \quad \text{para } S(\xi, \mathbf{m}) \quad (5.47)$$

$$\diamond_x = (\mathcal{M} + 1)\square \quad \text{para } S(x, \mathbf{m}) \quad (5.48)$$

onde  $\square$  é o hipercubo unitário que designa o  $2L$ -toro. Assim, as diferentes órbitas com uma dada corda  $\xi$  são obtidas pelos vetores inteiros  $\mathbf{m}$  definidos em  $\diamond_\xi$ . O número  $\tau_\xi$ , de tais órbitas é dado pela área de  $\diamond_\xi$ , ou seja,

$$\tau(\mathcal{M}) = |\det(\mathcal{M} - 1)| = \frac{2^{2L}}{|\det(\mathfrak{J}\beta - 1)|} \equiv \tau_\xi, \quad (5.49)$$

que é independente de  $\xi$ . Tomando  $\xi = 0$ , igualamos  $\tau_\xi$  ao número de pontos fixos (órbitas periódicas de período um),

As diferentes órbitas que tem o ponto  $x$  como centro são designadas pelos vetores inteiros  $\mathbf{m}$  definidos agora em  $\diamond_x$ . De novo, o número de órbitas e dado pelo volume de  $\diamond_x$ , que é

$$\tau(-\mathcal{M}) = |\det(\mathcal{M} + 1)| = \frac{2^{2L}}{|\det(\mathfrak{J}B + 1)|} \equiv \tau_x. \quad (5.50)$$

Notemos que o número de órbitas periódicas de período dois é  $\tau_\xi \tau_x$ .

Como já mencionamos, para que a matriz  $\mathcal{M}$  represente um mapa do gato, deve ser simplética para que possa representar uma transformação canônica, e  $\mathcal{M}$  deve ter elementos inteiros. Vamos agora traduzir ambas condições para as matrizes simétricas  $B$  e  $\beta$ . A primeira condição implica em que  $B$  e  $\beta$  sejam matrizes simétricas, e toda matriz simétrica pode ser associada a uma matriz simplética através de (5.24). A segunda condição restringe as matrizes  $B$  e  $\beta$  a terem elementos racionais. De fato, segundo (5.19) e (5.20) teremos

$$B = \frac{\overline{B}}{\det(\mathcal{M} + 1)} \equiv \pm \frac{\overline{B}}{\tau_x} \quad (5.51)$$

$$\beta = \frac{\overline{\beta}}{\det(\mathcal{M} - 1)} = \pm \frac{\overline{\beta}}{\tau_\xi}, \quad (5.52)$$

onde  $\overline{B}$  e  $\overline{\beta}$  são matrizes simétricas com elementos inteiros e os denominadores estão definidos por (5.49) e (5.50). Pode acontecer que todos os elementos da matriz  $\overline{B}$  ( ou  $\overline{\beta}$  ) possuam um mesmo fator em comum e este não coprimo de  $\tau_x$  ( respectivamente  $\tau_\xi$  ). Nesse caso reduzimos a fração em (5.51) ( ou em (5.52) ) de forma que

$$B = \pm \frac{\overline{B}'}{\tau_x'} \quad (5.53)$$

$$\beta = \pm \frac{\overline{\beta}'}{\tau_\xi'}. \quad (5.54)$$

Porém, nem toda matriz simétrica  $B$  ou  $\beta$  de elementos racionais garante que a matriz simplética associada tenha elementos inteiros. Devemos então determinar as condições sobre  $B$  e  $\beta$  para que isto ocorra.

A caracterização das matrizes  $B$  ou  $\beta$  requer que o mapa correspondente no plano transforme entre si os pontos de uma rede inteira. Examinaremos o caso  $L = 1$ , pois a extensão para vários graus de liberdade segue de forma simples. Há duas cordas fundamentais correspondentes aos pontos fixos no toro:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.55)$$

que levam aos pontos fixos:

$$x_j = \frac{1}{2}(\mathfrak{J}\beta \pm 1)\xi_j \quad , \quad \text{onde } j = 1, 2. \quad (5.56)$$

Claramente, existe também a corda  $\xi_0 = 0$ , mas este ponto fixo do plano não faz restrição nenhuma ao mapa no toro. Para que a transformação seja um gato, todos os vértices do paralelogramo fundamental  $\square$  devem ser pontos fixos, assim, para todo par de inteiros  $r$  e  $s$ , existem inteiros  $m_1$  e  $m_2$  tais que:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathfrak{J}\beta \pm 1) \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}. \quad (5.57)$$

Isto é verdadeiro se e somente se  $2(\mathfrak{J}\beta \pm 1)^{-1}$  tem coeficientes inteiros. Mas, se a matriz  $\mathcal{M}$  descrever um mapa do gato,  $-\mathcal{M}$  também descreve um mapa do gato, cuja matriz simétrica, na representação de cordas, é  $-B$ . Portanto, também é uma condição necessária e suficiente para que a função geratriz de centros descreva um mapa do gato que a matriz de centros  $B$  associada tenha a propriedade de que  $2(\mathfrak{J}B \pm 1)^{-1}$  seja um matriz inteira.

A pesar de que as condições para que as matrizes simétricas  $B$  ou  $\beta$  descrevam um mapa do gato não sejam tão simples quanto as condições sobre a matriz simplética  $\mathcal{M}$ , é mais simples achar matrizes simétricas racionais que satisfaçam as condições sobre  $B$  e  $\beta$ , do que buscar matrizes simpléticas inteiras. O fato de que  $B$  ou  $\beta$  sejam simétricas, na forma (5.51), nos permite variar  $[(L) \times (2L + 1) + 1]$

números inteiros. De outra forma, para satisfazer a condição (5.4), precisa-se dos  $(2L)^2$  elementos inteiros da matriz  $\mathcal{M}$ .

Para concluirmos esta seção, verificamos as propriedades da invariança felina das funções geratrizes de cordas e centros. Em primeiro lugar, lembremos que a invariança felina no plano implica em que, perante uma transformação simplética de coordenadas  $x \rightarrow x' = \mathcal{N}x$ ,  $S(x, 0) = S(x', 0)$  e  $S(\xi, 0) = S(\xi', 0)$ , onde  $\xi' = \mathcal{N}\xi$ . Mas, também é evidente que o número de enrolamento  $\mathbf{m}$  transforma-se na mesma forma:  $\mathbf{m}' = \mathcal{N}\mathbf{m}$ . A partir dos termos dependentes de  $x$  em  $S(x, \mathbf{m})$ , vemos então que o efeito de uma transformação felina é meramente substituir  $B \rightarrow \mathcal{N}^t B \mathcal{N}$ , e similarmente a mudança em  $S(\xi, \mathbf{m})$  é obtida a partir de  $\beta \rightarrow \mathcal{N}^t \beta \mathcal{N}$ . Os termos constantes  $f(\mathbf{m})$  e  $g(\mathbf{m})$  em (5.17) e (5.18) não são invariantes perante transformações felinas na forma (5.31) que temos escolhido para coincidir com a referência [64], assim é preferível usar (5.25) e (5.28) quando quisermos lidar com classes de equivalência de mapas do gato.

### 5.3 Classificação de mapas do gato clássicos

As órbitas periódicas dos mapas do gato foram estudadas em detalhe por Percival e Vivaldi [68] e também por Keating [64] para um grau de liberdade; mas os resultados foram recentemente estendidos para um número arbitrário de graus de liberdade [67]. Mostra-se que um ponto no  $2L$ -toro é periódico se e somente se todas suas coordenadas forem racionais, e toda rede de pontos cujas coordenadas forem racionais é invariante perante a ação do mapa. A partir de (5.3) podemos ver que os pontos periódicos  $x_l$  de período inteiro  $l$  são obtidos a partir do número de enrolamento  $\mathbf{m}$  de forma que

$$x_l = \begin{pmatrix} p_l \\ q_l \end{pmatrix} = (\mathcal{M}^l - 1)^{-1} \mathbf{m} = (\mathfrak{J}\beta^{(l)} - 1) \frac{\mathbf{m}}{2}, \quad (5.58)$$

onde  $\beta^{(l)}$  descreve a matriz simétrica associada a  $\mathcal{M}^l$  através de (5.20). Para acharmos  $x_l$  no hipercubo unidade  $\square$ ,  $\mathbf{m}$  deve pertencer ao paralelepípedo formado pela ação da matriz  $(\mathcal{M}^l - 1)$  sobre  $\square$ . Assim, o número de pontos inteiros  $\mathbf{m}$  é dado pelo hiper-volume desse paralelepípedo. Logo, o número de pontos periódicos de período

$l$  é

$$\tau(\mathcal{M}^l) = |\det(\mathcal{M}^l - 1)| = \left| \frac{2^{2L}}{\det(\mathfrak{J}\beta^{(l)} - 1)} \right|. \quad (5.59)$$

Segundo (5.58) os pontos periódicos de período  $l$  formam uma rede de coordenadas racionais no espaço de fases.

O movimento de um ponto  $x_- = x_1 + \delta_-$  perto de um ponto fixo  $x_1$  será

$$\mathcal{M}x_- = \mathcal{M}(x_1 + \delta_-) = x_1 + \mathcal{M}\delta_- = x_1 + \delta_+ = x_+. \quad (5.60)$$

Para determinar o caráter de tal movimento temos que estudar os autovalores da matriz  $\mathcal{M}$ :

$$\lambda_{\mathcal{M}}^k = |\lambda_{\mathcal{M}}^k| e^{i\theta_k} \quad (5.61)$$

O modulo  $|\lambda_{\mathcal{M}}^k|$  indica alongamento (ou contração) enquanto que o argumento  $e^{i\theta_k}$  indica rotação entorno do ponto fixo  $x_1$ . Para matrizes simpléticas  $\mathcal{M}$ , se  $\lambda_{\mathcal{M}}$  é um autovalor de  $\mathcal{M}$  então  $\lambda_{\mathcal{M}}^*$ ,  $\frac{1}{\lambda_{\mathcal{M}}}$  e  $\frac{1}{\lambda_{\mathcal{M}}^*}$  também são autovalores de  $\mathcal{M}$ .

A classificação dos autovalores poder ser realizado com quaisquer das matrizes  $\mathcal{M}$ ,  $B$ , ou  $\beta$ . Usando (5.24) obtemos a relação com os autovalores de  $\mathfrak{J}B$  e  $\mathfrak{J}\beta$  notados  $\lambda_{\mathfrak{J}B}$  e  $\lambda_{\mathfrak{J}\beta}$  respectivamente

$$\lambda_{\mathcal{M}} = \frac{(1 - \lambda_{\mathfrak{J}B})}{(1 + \lambda_{\mathfrak{J}B})} = \frac{(\lambda_{\mathfrak{J}\beta} + 1)}{(\lambda_{\mathfrak{J}\beta} - 1)} \quad (5.62)$$

e inversamente

$$\lambda_{\mathfrak{J}B} = \frac{(1 - \lambda_{\mathcal{M}})}{(1 + \lambda_{\mathcal{M}})} \quad (5.63)$$

$$\lambda_{\mathfrak{J}\beta} = \frac{(\lambda_{\mathcal{M}} + 1)}{(\lambda_{\mathcal{M}} - 1)} = -\frac{1}{\lambda_{\mathfrak{J}B}}. \quad (5.64)$$

Desta forma, se  $\lambda_{\mathfrak{J}B}$  é um autovalor de  $\mathfrak{J}B$  então  $\lambda_{\mathfrak{J}B}^*$ ,  $-\lambda_{\mathfrak{J}B}$  e  $-\lambda_{\mathfrak{J}B}^*$  também são autovalores. Seguindo, se  $\lambda_{\mathfrak{J}\beta}$  é um autovalor de  $\mathfrak{J}\beta$  então  $\lambda_{\mathfrak{J}\beta}^*$ ,  $-\lambda_{\mathfrak{J}\beta}$  e  $-\lambda_{\mathfrak{J}\beta}^*$  também são autovalores.

Para mapas do gato com  $L = 2$  as matrizes  $\mathcal{M}$ ,  $B$ , e  $\beta$  são de  $4 \times 4$  e temos então os casos genéricos seguintes para os autovetores

1. Elíptico: tem um par conjugado de autovalores  $\lambda_{\mathcal{M}}$  ambos no círculo unitário ou pares conjugados de autovalores puramente imaginários  $\lambda_{\mathcal{J}B}$  e  $\lambda_{\mathcal{J}\beta}$ .
2. hiperbólico: tem um par  $(\lambda_{\mathcal{M}}, \frac{1}{\lambda_{\mathcal{M}}})$  no eixo real ou pares  $(\lambda_{\mathcal{J}B}, -\lambda_{\mathcal{J}B})$  e  $(\lambda_{\mathcal{J}\beta}, -\lambda_{\mathcal{J}\beta})$  no eixo real.
3. Parabólico: tem autovalores degenerados  $\lambda_{\mathcal{M}} = \pm 1$ . Para  $\lambda_{\mathcal{M}} = 1$ ; o  $\beta$  é singular e  $\lambda_{\mathcal{J}B} = 0$ , nessa variedade o mapa é a identidade. Para  $\lambda_{\mathcal{M}} = -1$ ;  $B$  é singular e  $\lambda_{\mathcal{J}\beta} = 0$ , nessa variedade o mapa representa a inversão com respeito à origem.
4. Misto: cada par pertence a uma categoria diferente das descritas acima.
5. Loxodrômico: os autovalores das matrizes  $\mathcal{M}$ ,  $B$ , ou  $\beta$  formam quartetos de autovalores complexos na forma  $(\lambda_{\mathcal{M}}, \frac{1}{\lambda_{\mathcal{M}}}, \lambda_{\mathcal{M}}^*, \frac{1}{\lambda_{\mathcal{M}}^*})$  para a matriz  $\mathcal{M}$  e  $(\lambda_{\mathcal{J}S}, -\lambda_{\mathcal{J}S}, \lambda_{\mathcal{J}S}^*, -\lambda_{\mathcal{J}S}^*)$  para a matriz  $S$  podendo ser uma ou outra das matrizes simétricas  $B$  ou  $\beta$ .

Os três primeiros casos também acontecem para sistemas de um grau de liberdade. O caso  $L = 2$  é o menor número de graus de liberdade onde, não só aparecem pontos fixos elípticos, parabólicos e hiperbólicos, como também loxodrômicos. Para um número maior de graus de liberdade não apareceram casos novos, somente haverá uma maior variedade de casos mistos. Casos não genéricos aparecem em qualquer dimensão para famílias contínuas de sistemas [65]. Não sabemos se existem mapas do gato correspondentes.

No caso geral, o movimento é a composição de alongamento e rotação, mas se os ângulos da rotação tiverem a forma  $\theta_k = \frac{j}{2}\pi$ , depois de  $j$  aplicações do mapa, a matriz  $\mathcal{M}^j$  terá somente pares de autovalores reais  $|\lambda_{\mathcal{M}}^k|^j$  e  $|\lambda_{\mathcal{M}}^k|^{-j}$ . A dinâmica tem assim uma coordenada ignorável; os ângulos são constantes do movimento para  $\mathcal{M}^j$ . Para sistemas de um grau de liberdade, onde há somente dois autovalores,  $\lambda_{\mathcal{M}}$  e  $\lambda_{\mathcal{M}}^*$ , a condição

$$\text{Tr}(\mathcal{M}) = \lambda_{\mathcal{M}} + \lambda_{\mathcal{M}}^* = \text{inteiro} \quad (5.65)$$

implica em que somente ângulos do tipo  $\theta_k = \frac{j}{2}\pi$  com  $j = 2$  ou  $3$  são permitidos no caso elíptico. Isto é um exemplo de restrições racionais em  $\theta_k$ , ou seja  $\mathcal{M}^j$  será

o mapa identidade no toro. Este resultado está em acordo com o teorema de Mañé [69] de que symplectomorfismos em duas dimensões são, ou Anosov ou, tem entropia topológica nula. Nosso resultado no 2-toro é mais forte; aqui todo symplectomorfismo é ou Anosov, ou uma raiz da unidade. Porém, rotações irracionais existem nos casos loxodrômico e misto para  $L > 1$ .

### 5.3.1 Classificação da Dinâmica

Nesta seção trataremos o caso de dois graus de liberdade. O objetivo principal é classificar os diferentes tipos de dinâmica; isto é, achar as condições nas quais obteremos os distintos comportamentos descritos previamente.

O polinômio característico para toda matriz  $A$  de  $k \times k$  é

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda) = \sum_{n=1}^k \alpha_n \lambda^{k-n}, \quad (5.66)$$

onde os elementos  $\alpha_n$  são obtidos mediante a relação de recorrência:

$$\alpha_0 = 1 \quad (5.67)$$

$$\alpha_n = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_{n-i} a_i \quad \text{onde } a_i = \text{Tr}(A^i). \quad (5.68)$$

Obtemos que para toda matriz simétrica  $B$  (ou seja  $B$  ou  $\beta$ )

$$P_{\mathfrak{J}B}(\lambda) = P_{\mathfrak{J}B}(-\lambda), \quad (5.69)$$

dessa forma

$$P_{\mathfrak{J}B}(\lambda) = \lambda^4 - \frac{1}{2} b_2 \lambda + \det B \quad (5.70)$$

onde  $b_2 = \text{Tr}[(\mathfrak{J}B)^2]$ . Segue uma expressão similar para  $P_{\mathfrak{J}\beta}(\lambda)$ , necessária quando a representação de centros é singular,

$$P_{\mathfrak{J}\beta}(\lambda) = \lambda^4 - \frac{1}{2} \beta_2 \lambda + \det \beta. \quad (5.71)$$

onde  $\beta_2 = \text{Tr}[(\mathfrak{J}\beta)^2]$ . No caso simplético, obtemos

$$P_{\mathcal{M}}(\lambda) = \lambda^4 - \text{Tr}(\mathcal{M})\lambda + \frac{1}{2} [\text{Tr}(\mathcal{M}^2) - \text{Tr}(\mathcal{M})^2] \lambda^2 - \text{Tr}(\mathcal{M})\lambda^3 + 1 \quad (5.72)$$

que é mais difícil de se analisar, logo realizaremos a classificação dos diferentes comportamentos usando  $\mathfrak{J}B$  ou  $\mathfrak{J}\beta$ . Resolvendo a equação  $P_{\mathfrak{J}B}(\lambda) = 0$  e usando (5.70) podemos escrever

$$\lambda_{\mathfrak{J}B} = \pm \sqrt{\frac{b_2}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{b_2}{4}\right)^2 - \det B}}, \quad (5.73)$$

enquanto que

$$\lambda_{\mathfrak{J}\beta} = \pm \sqrt{\frac{\beta_2}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_2}{4}\right)^2 - \det \beta}}. \quad (5.74)$$

Podemos agora classificar os comportamentos segundo os invariantes das matrizes  $B$  ou  $\beta$ . Em seguida, os autovalores da matriz  $\mathcal{M}$  são obtidos com a ajuda de (5.62). O comportamento loxodrômico que corresponde a quatro autovalores complexos aparece quando o termo  $\left[\left(\frac{b_2}{4}\right)^2 - \det B\right]$  dentro da raiz quadrada é negativo. Isto é, o comportamento loxodrômico aparece somente se

$$\det B > \left(\frac{b_2}{4}\right)^2 \quad \text{ou equivalentemente} \quad \det \beta > \left(\frac{\beta_2}{4}\right)^2. \quad (5.75)$$

Na figura 5.3 vemos uma classificação completa dos diferentes tipos de comportamento segundo os invariantes de  $\beta$ , uma figura similar existe para os invariantes de  $B$ . Os invariantes das matrizes  $\beta$  (ou  $B$ ) também nos permitem achar  $\tau_\xi$ , o número de órbitas dada uma corda  $\xi$

$$\tau_\xi = \left| \frac{2^4}{P_{\mathfrak{J}\beta}(1)} \right| = \left| \frac{2^4 \det B}{P_{\mathfrak{J}B}(1)} \right|, \quad (5.76)$$

ou  $\tau_x$ , o número de órbitas centradas em  $x$  como

$$\tau_x = \left| \frac{2^4}{P_{\mathfrak{J}B}(1)} \right| = \left| \frac{2^4 \det \beta}{P_{\mathfrak{J}\beta}(1)} \right|. \quad (5.77)$$

Assim, obtemos as características da dinâmica usando unicamente os invariantes da matriz simétrica  $\beta$  ou  $B$ .

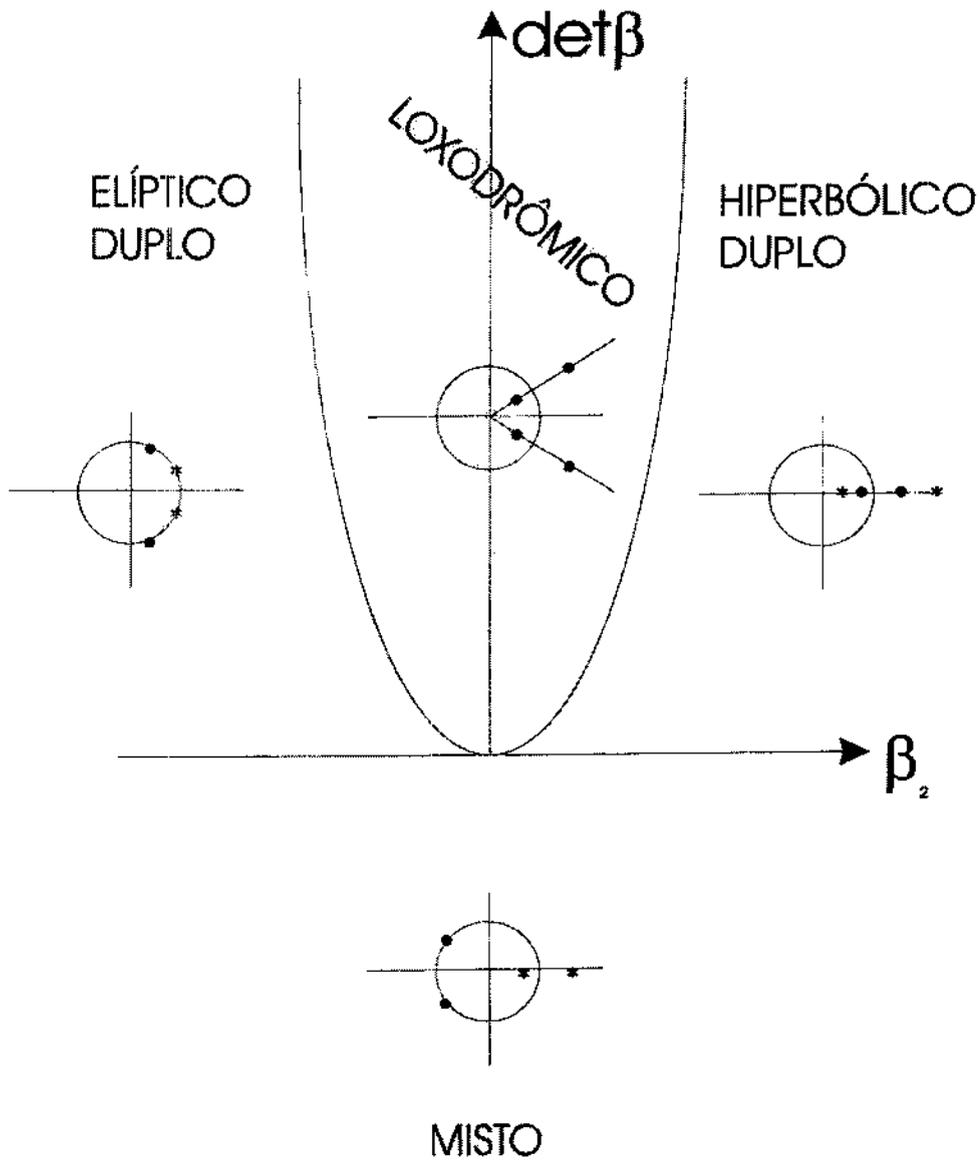


Figura 5.3: Uma classificação dos diferentes mapas do gato para dois graus de liberdade segundo os invariantes da matriz  $\beta$ . Uma figura similar existe para a matriz  $B$ .

## 5.4 Exemplos

Mostramos a seguir alguns exemplos de mapas do gato com diferentes tipos de dinâmica. Os exemplos escolhidos são tais que a matriz  $\beta$ , que caracteriza a representação de cordas do mapa, tem elementos inteiros.

### 5.4.1 O mapa de Hannay e Berry

É importante ver que o primeiro mapa do gato a ser quantizado (o mapa de Hannay e Berry) pode ser perfeitamente estudado mediante o formalismo aqui descrito. Para matrizes de  $2 \times 2$ , o polinômio característico é

$$P_{\mathfrak{J}\beta}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{2}\beta_2. \quad (5.78)$$

sendo a matriz simplética

$$\mathcal{M}_{hb} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \text{ com a matrix simétrica associada } \beta_{hb} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (5.79)$$

assim,

$$\beta_2 = \text{Tr} [(\mathfrak{J}\beta_{hb})^2] = 6$$

e o número de pontos fixos é

$$\tau_{\xi}^{hb} = \left| \frac{2^2}{P_{\mathfrak{J}\beta}(\lambda)} \right| = 2.$$

Os autovalores de  $\mathcal{M}_{hb}$  são

$$\begin{aligned} \lambda_1^{hb} &= 2 + \sqrt{3}, \\ \lambda_2^{hb} &= 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

O mapa é então hiperbólico.

A seguir, mostramos exemplos de dois graus de liberdade; estes foram achados em forma numérica. Geramos numericamente todas as matrizes  $\beta$  simétricas cujos elementos podem tomar valores de 0 até 2. Para cada matriz  $\beta$  gerada verificamos se esta satisfazia a condição felina. Para aquelas que a satisfazem, classificamos tais gatos segundo os invariantes  $\det \beta$  e  $\beta_2$ .

### 5.4.2 O caso duplamente hiperbólico:

Estudemos agora mapas que possuem dois pares de autovalores ambos reais. Estes são mapas que pertencem ao primeiro quadrante na figura 5.3; a matriz  $\beta_{hh}$  a seguir descreve tal caso, e a matrix simplética associada é  $\mathcal{M}_{hh}$ ,

$$\beta_{hh} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ a matrix simplética é } \mathcal{M}_{hh} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.80)$$

Os invariantes são

$$\det \beta_{hh} = 17 \quad \text{e} \quad \beta_2 = Tr [(\mathfrak{J}\beta_{hh})^2] = 20.$$

Dessa forma o número de pontos fixos resulta  $\tau_{\xi}^{hh} = 2$ , e os autovalores da matrix simplética  $\mathcal{M}_{hh}$  são

$$\lambda_1^{hh} = 2.112388$$

$$\lambda_2^{hh} = 0.4739$$

$$\lambda_3^{hh} = 5.22$$

$$\lambda_4^{hh} = 0.1914.$$

### 5.4.3 O caso misto

Consideramos agora o caso em que os autovalores do mapa são do tipo misto, ou seja há um par de autovalores reais e um par de autovalores conjugados de módulo um. Este caso corresponde a matrizes  $\beta$  que pertencem ao terceiro e quarto quadrante na figura 5.3.

A matriz  $\beta_{eh1}$  é deste tipo, e a matrix simplética associada é  $\mathcal{M}_{eh1}$ ,

$$\beta_{eh1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ a matrix simplética é } \mathcal{M}_{eh1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (5.81)$$

Os invariantes são

$$\det \beta_{eh1} = -15 \quad \text{e} \quad \beta_2 = \text{Tr} [(\mathfrak{J}\beta_{eh1})^2] = 4.$$

O número de pontos fixos  $\tau_{\xi}^{eh1} = 1$ , e os autovalores da matriz simplética  $\mathcal{M}_{eh1}$  são

$$\begin{aligned} \lambda_1^{eh1} &= 2.6180 \\ \lambda_2^{eh1} &= 0.381966 \\ \lambda_3^{eh1} &= \exp\left(i\frac{2\pi}{6}\right) \\ \lambda_4^{eh1} &= \exp\left(-i\frac{2\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

O exemplo acima mostra ângulos de rotação que são uma fração de  $\pi$ . A dinâmica decorrente será então equivalente à de um sistema hiperbólico com um grau de liberdade. Logo, outro exemplo de sistema misto é obtido pela matriz  $\beta_{eh2}$  é deste tipo, a matriz simplética associada é  $\mathcal{M}_{eh2}$ ,

$$\beta_{eh2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ a matriz simplética é } \mathcal{M}_{eh2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \quad (5.82)$$

Os invariantes são

$$\det \beta_{eh2} = -7 \quad \text{e} \quad \beta_2 = \text{Tr} [(\mathfrak{J}\beta_{eh2})^2] = 4.$$

O número de pontos fixos é  $\tau_{\xi}^{eh2} = 2$ , e os autovalores da matriz simplética são

$$\begin{aligned} \lambda_1^{eh2} &= 3.0906578 \\ \lambda_2^{eh2} &= 0.32355571 \\ \lambda_3^{eh2} &= \exp(i\pi 1.27354496) \\ \lambda_4^{eh2} &= \exp(-i\pi 1.27354496) \end{aligned}$$

Agora, o mapa obtido não tem rotações racionais, a dinâmica será então ergódica e mixing no espaço de fases completo.

#### 5.4.4 O caso loxodrômico

Escolhemos agora a matriz  $\beta_{lox}$  pertencendo a região loxodrômica da figura 5.3. Por exemplo, matriz  $\beta_{lox}$ , cuja matrix simplética associada é  $\mathcal{M}_{lox}$ ,

$$\beta_{lox} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ a matrix simplética é } \mathcal{M}_{lox} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.83)$$

Os invariantes são

$$\det \beta_{lox} = 5 \quad \text{e} \quad \beta_2 = Tr [(\mathfrak{J}\beta_{lox})^2] = -4.$$

O número de pontos fixos é  $\tau_{\xi}^{lox} = 2$ , e os autovalores da matriz simplética são agora

$$\begin{aligned} \lambda_1^{lox} &= 1.7000157 \exp(i1.1185178\pi) \\ \lambda_2^{lox} &= 1.7000157 \exp(-i1.1185178\pi) \\ \lambda_3^{lox} &= 0.5882298 \exp(i1.1185178\pi) \\ \lambda_4^{lox} &= 0.5882298 \exp(-i1.1185178\pi). \end{aligned}$$

como é de esperar, estes são complexos e de módulo diferente de um. A dinâmica deste mapa será ergódica e mixing pois as rotações não são racionais.

#### 5.4.5 O caso duplamente elíptico

Neste caso os autovalores são dois pares de complexos conjugados de módulo um. Cada par caracteriza-se então por um ângulo de rotação. Um fato interessante é que para que  $Tr(\mathcal{M})$ ,  $Tr(\mathcal{M}^2)$ , e o número de pontos fixos sejam inteiros, os únicos ângulos permitidos são, como no caso de um grau de liberdade,  $\theta_k = \frac{j}{j}\pi$  com  $j = 2$  ou 3. Não existem então casos de mapas cujos ângulos sejam múltiplos irracionais de  $\pi$ , ou seja, estes sistemas são raízes da unidade.

Assim, todo symplectomorfismo no 4-toro pertence a algum dos casos a seguir:

1. Ergódico no espaço de fases completo (uma superfície de 2 graus de liberdade). Para os casos duplamente hiperbólico, mistos ou loxodrômico cujos ângulos de rotação são múltiplos irracionais de  $\pi$ .
2. Ergódico em famílias de variedades de dimensão 2. Temos uma constante de movimento, e então a ergodicidade se produz numa variedade de dimensão menor ( uma superfície com  $L = 1$ ). Para os casos mistos, ou loxodrômico, cujos ângulos de rotação são múltiplos racionais de  $\pi$ .
3. Uma raiz da unidade; isto corresponde a ter duas constantes de movimento. Todas as órbitas são periódicas e tem o mesmo período nestes casos duplamente elípticos.

## 6 Gatos quânticos simples

Como já temos mencionado, a dinâmica quântica se caracteriza por um operador unitário de evolução, ou propagador. É possível obter o propagador que caracteriza os mapas do gato a partir do propagador do mapa no plano, assim como fizemos para os sistemas Hamiltonianos. Esta é a forma na qual obteremos os gatos quânticos, porém a discussão geral será realizada no próximo capítulo. Em alguns casos o propagador quântico que descreve os mapas do gato adquire uma expressão simples. Nesta seção estudaremos estes casos especiais.

### 6.1 Forma simples do propagador

Primeiro, devemos restringir a atenção aos mapas que podem ser quantizados nos parâmetros de Floquet  $\chi = (0, 0)$ . Como veremos no próximo capítulo, isto implica em que a matriz  $\mathcal{M}$  satisfaz

$$\sum_{j=1}^L \mathcal{M}_{i,j} \mathcal{M}_{i,j+L} = \text{par} \quad (6.1)$$

Como mostraremos no capítulo 7, se  $2\tau'_\xi$  e  $N$  são números coprimos, uma base completa para a representação de cordas é obtida com uma rede de cordas  $\Xi$  tais que

$$\Xi = \xi + \mathbf{n} = \frac{2\tau'_\xi}{N} \bar{\Xi} \quad (6.2)$$

onde as componentes de  $\bar{\Xi}$  são números inteiros até  $N$ . Assim para cada corda  $\xi$  existe uma corda equivalente  $\bar{\Xi}$  (isto é análogo a forma na qual realizamos a representação de centros no EFQ para  $N$  ímpar).

Assim, para os valores permitidos de  $N$ , o propagador do mapa do gato na representação de cordas é

$$U_{\mathcal{M}}(\Xi) = 2^L (\tau'_\xi)^{-\frac{3}{2}} e^{-i2\pi N [\frac{1}{4} \Xi \beta \Xi]} \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{O}_\xi} e^{-i2\pi N \frac{1}{4} \mathbf{m} (\beta - \bar{\mathbf{J}}) \mathbf{m}}. \quad (6.3)$$

Para as matrizes  $\beta$  que satisfazem as condições felinas, o símbolo  $U_{\mathcal{M}}(\Xi)$  deve representar um operador unitário. Neste caso (3.111) mostra que tal símbolo deve ter a

forma

$$U_{\mathcal{M}}(\Xi) = \frac{e^{i\varphi_N(\mathcal{M})}}{\sqrt{N^L}} e^{-i2\pi N[\frac{1}{4}\Xi\beta\Xi]}, \quad (6.4)$$

o que restringe,

$$\frac{e^{i\varphi_N(\mathcal{M})}}{\sqrt{N^L}} = 2^L (\tau_\xi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{O}_\xi} e^{-i2\pi N \frac{1}{4} \mathbf{m}(\beta - \tilde{\mathbf{J}}) \mathbf{m}}. \quad (6.5)$$

A primeira vista, a fase  $\varphi_N(\mathcal{M})$  é um fator de fase global que parece sem importância, porém, como veremos, a interferência dos diferentes  $\varphi_N(\mathcal{M}^l)$  para as distintas potências  $l$  do mapa terão uma importância crucial para a densidade de estados.

Como  $\xi$  e  $\Xi$  são cordas equivalentes, o símbolo  $U_{\mathcal{M}}(\xi)$  é obtido a partir de  $U_{\mathcal{M}}(\Xi)$  mediante a relação de simetria (3.88), assim

$$U_{\mathcal{M}}(\xi) = \frac{e^{i\varphi_N(\mathcal{M})}}{\sqrt{N^L}} e^{-i2\pi N[S(\xi, \mathbf{n})]}, \quad (6.6)$$

onde  $S(\xi, \mathbf{n})$ , definida em (5.34), é a ação da órbita clássica de corda  $\xi$  e que percorre  $\mathbf{n}$  voltas ao redor do toro.

Se, para a função geratriz de cordas (5.34), em vez de (5.31) tivéssemos realizado a escolha (5.28), simpléticamente invariante, teríamos em (6.6) um fator de fase adicional  $e^{-i\pi \frac{N}{2} \mathbf{m} \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{m}} = e^{i\gamma_{\mathbf{n}}}$ , onde  $\gamma_{\mathbf{n}}$  seria o índice de "Maslov" da órbita. Esta observação é válida para o resto da teoria quântica a seguir.

No caso da representação de centros, para  $N$  e  $2\tau'_x$  coprimos, uma base completa para tal representação é obtida mediante uma rede de centros  $X$ , múltiplos inteiros de  $\frac{\tau'_x}{N}$ ,

$$X = x + \frac{1}{2} \mathbf{j} = \frac{\tau'_x}{N} \bar{X}, \quad (6.7)$$

onde as componentes de  $\bar{X}$  são números inteiros até  $N$ . Nestes centros o propagador do mapa do gato é

$$U_{\mathcal{M}}(X) = 2^L \tau_x^{-\frac{3}{2}} e^{i2\pi N[XBX]} \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{O}_x} e^{i2\pi N \frac{1}{4} \mathbf{m}(B + \tilde{\mathbf{J}}) \mathbf{m}} \quad (6.8)$$

$$= e^{i\varphi'_N(\mathcal{M})} e^{i2\pi N[XBX]}, \quad (6.9)$$

onde a última expressão é obtida impondo a unitariedade de  $\hat{U}_{\mathcal{M}}^0$  e usando (3.112), agora,

$$e^{i\varphi'_N(\mathcal{M})} = 2^L \tau_x^{-\frac{2\pi i}{\hbar}} \sum_{\mathbf{m} \in \hat{\mathcal{Q}}_x} e^{i2\pi N \frac{1}{4} \mathbf{m} \cdot (\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{j}}) \mathbf{m}}. \quad (6.10)$$

A partir das relações de simetria (3.91) obtemos o símbolo na rede original de centros  $x$

$$U_{\mathcal{M}}(x) = e^{i\varphi'_{\mathcal{M}}(\mathcal{M})} e^{i2\pi N [S(x, \mathbf{j})]}, \quad (6.11)$$

onde aqui  $S(x, \mathbf{j})$ , definida em (5.33), é a função geratriz de centros, no ponto  $x$  para uma órbita que realiza  $\mathbf{j}$  voltas.

É importante mencionarmos que os propagadores (6.6) e (6.11) respectivamente na representação de cordas e centros, respondem exatamente ao esquema de quantização semiclássica de Van Vleck ([4]). Porém estes propagadores são exatos e não uma mera aproximação semiclássica. Os casos que temos descrito são casos especiais nos quais o propagador no toro tem a mesma forma que o seu equivalente no plano; são então ideais para a comparação das dinâmicas clássicas e quânticas.

Para obtermos a representação de posições do propagador a partir da representação de cordas, usamos (3.100),

$$U_{\mathcal{M}}(\mathbf{q}_m, \mathbf{q}_n) = \frac{e^{i\varphi'_N(\mathcal{M})}}{(N)^{\frac{3L}{2}}} \sum_{\xi_p=0}^{N-1} \exp \left\{ -i2\pi N \left[ S(\xi_p, m-n, \mathbf{n}) + \frac{q_m + q_n}{2} \xi_p \right] \right\}. \quad (6.12)$$

Enquanto que (3.103) nos permite obter a representação de posições a partir do símbolo de centros

$$U_{\mathcal{M}}(\mathbf{q}_m, \mathbf{q}_n) = \frac{e^{i\varphi'_N(\mathcal{M})}}{N^L} \sum_{x_p=0}^{\frac{N-1}{2}} \exp \left\{ i2\pi N \left[ S(x_p, \frac{m+n}{2}, \mathbf{j}) + (q_m - q_n) x_p \right] \right\}. \quad (6.13)$$

Para o caso de um grau de liberdade obtemos assim o propagador de Hannay e Berry [38].

Como veremos na capítulo 7, para as diferentes potências do mapa a condição (6.1) é preservada, assim se o mapa é quantizável nos parâmetros de Floquet  $\chi =$

$(0, 0)$ , todas as suas potências também o são. Desta maneira, o propagador de  $\mathcal{M}^l$  na representação de cordas adquire a forma

$$\mathbf{U}_{\mathcal{M}}(\Xi) = \frac{e^{i\varphi_N(\mathcal{M}^l)}}{\sqrt{N}^L} e^{-i2\pi N[\frac{1}{4}\Xi\beta^{(l)}\Xi]}, \quad (6.14)$$

onde  $\beta^{(l)}$  descreve a matriz simétrica associada a  $\mathcal{M}^l$  através de (5.20) e  $\Xi$  são pontos numa rede na forma

$$\Xi = \frac{\tau(\mathcal{M}^l)}{N} \Xi. \quad (6.15)$$

## 6.2 Periodicidade do propagador

Como temos discutido no capítulo anterior, redes de pontos racionais são invariantes perante os mapas de gato clássicos. Assim, para cada rede descrita pelo denominador  $g$ , existe um período mínimo  $l_g$  para o qual todos os pontos da rede são pontos fixos de  $\mathcal{M}^{l_g}$ , ou seja, o mapa  $\mathcal{M}^{l_g}$  restringido à mencionada rede é a identidade. Chamaremos  $l_g$  a função periodicidade clássica da rede  $g$ . Sendo que a quantização é realizada sobre uma rede de pontos de denominador  $N$ , esperamos então que o propagador quântico também seja periódico.

É possível dar condições à matriz  $\mathcal{M}$  e ao número  $N$  para que  $\hat{\mathbf{U}}_{\mathcal{M}}$  seja o operador identidade, ou seja

$$\hat{\mathbf{U}}_{\mathcal{M}} = \hat{\mathbf{1}}_N e^{i\phi}. \quad (6.16)$$

Isto pode ser visto em forma mais clara, na representação de centros, pois (3.96) implica em

$$\mathbf{U}_{\mathcal{M}}(x) = \mathbf{1}_N(x) e^{i\phi} = e^{i\phi} f_N(x). \quad (6.17)$$

Para o caso em que  $N$  é ímpar, como já vimos, podemos realizar a quantização nos pontos  $X$  múltiplos inteiros de  $\frac{\tau'_z}{N}$ . Vemos então que, se a matriz  $B$  tem todos os coeficientes múltiplos de  $\frac{N}{\tau'_z}$ , o propagador (6.8) adquire a forma (6.17), para  $f_N(X) = 1$  e  $\phi = \varphi'_N(\mathcal{M})$ . Assim, a matriz  $B$  descreve a identidade se todos os seus coeficientes

são múltiplos de  $\frac{N}{\tau_x}$ . Isto implica, através de (5.24), em que a matriz  $\mathcal{M}$  deve ter a forma

$$\mathcal{M} = \mathbf{1} \text{ mod}(N), \quad (6.18)$$

onde  $\mathbf{1}$  é a matriz identidade de  $(2L) \times (2L)$ . Podemos ver que este resultado está em acordo com a referência [38] para o caso  $L = 1$ .

Para toda matriz  $\mathcal{M}$  e para um dado  $N$  ímpar, existe o menor inteiro  $k(N)$  tal que

$$\mathcal{M}^{k(N)} = \mathbf{1} \text{ mod}(N) \quad (6.19)$$

desta forma

$$\left[ \widehat{\mathbf{U}}_{\mathcal{M}} \right]^{k(N)} = \mathbf{1} e^{i\phi(N)}. \quad (6.20)$$

Neste sentido, diremos que o propagador quântico é periódico cujo período é igual a  $k(N)$  que chamaremos de *função periodicidade quântica (FPQ)*, porém esta fica completamente determinada em (6.19) pelo mapa clássico. Notemos que, como esperávamos  $k(N) = l_N$ ; a função periodicidade quântica coincide com a periodicidade clássica para a rede  $N$ .

Agora, torna-se simples ver que os  $(N)^L$  autovalores  $\theta_m$  do propagador unitário  $\widehat{\mathbf{U}}_{\mathcal{M}}$  que devem pertencer ao círculo unidade no plano complexo, são restritos aos  $k(N)$  possíveis valores

$$\left\{ \alpha_j = \left[ \frac{2j\pi + \phi(N)}{k(N)} \right] \right\}, 1 \leq j \leq k(N) \quad (6.21)$$

### 6.3 A formula do traço

O espectro de autovalores de  $\widehat{\mathbf{U}}_{\mathcal{M}}$  relaciona-se com o traço do propagador

$$\text{Tr} \left[ \left( \widehat{\mathbf{U}}_{\mathcal{M}} \right)^l \right] = \sum_{m=1}^{N^L} e^{il\theta_m} \quad (6.22)$$

$$= \sum_{j=1}^{k(N)} d_j e^{il\alpha_j}, \quad (6.23)$$

onde  $d_j$  é a degenerescência do sitio  $j$  definido por (6.21). A densidade de estados,

$$\rho(\theta) = \sum_{i=1}^{N^L} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \theta_i + 2\pi l), \quad (6.24)$$

é claramente invariante perante  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ . O uso da formula de Poisson, nos leva a formula do traço, obtida por Tabor [70],

$$\rho(\theta) = \frac{N^L}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \text{Re} \sum_{l=1}^{\infty} \text{Tr} \left[ \left( \widehat{U}_{\mathcal{M}} \right)^l \right] e^{-il\theta}, \quad (6.25)$$

que vale para todo mapa no  $2L$ -toro. Para os mapas do gato, a periodicidade  $k(N)$  do propagador implica em que a densidade de estados possa ser escrita na forma

$$\rho(\theta) = \sum_{l=1}^{k(N)} \text{Tr} \left[ \left( \widehat{U}_{\mathcal{M}} \right)^l \right] e^{-il\theta} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(\phi(N) + 2\pi j - k(N)\theta). \quad (6.26)$$

Isto é, os ângulos estão restritos aos sítios  $\alpha_j$  em (6.21), cuja degenerescência é

$$d_j = \frac{1}{k(N)} \sum_{l=1}^{k(N)} \text{Tr} \left[ \left( \widehat{U}_{\mathcal{M}} \right)^l \right] e^{-il\alpha_j}. \quad (6.27)$$

Isto leva então a expressões simples para varias propriedades importantes da distribuição de autoestados do propagador; por exemplo

$$\sum_{j=1}^{k(N)} d_j^2 = \frac{1}{k(N)} \sum_{l=1}^{k(N)} \left| \text{Tr} \left[ \left( \widehat{U}_{\mathcal{M}} \right)^l \right] \right|^2. \quad (6.28)$$

É importante notarmos que as funções- $\delta$  aparecem explicitamente em (6.26), devido ao fato do propagador ser periódico. As diferentes potências do mapa quântico em (6.26) contribuem somente na degenerescência, mas não para a forma de função- $\delta$  da densidade de estados. Além disso, para todo  $N$ , ímpar finito, precisamos somente de um número finito destas potências para determinar a degenerescência em cada sitio, e desta forma obter o espectro completo. Porém,  $k(N) \rightarrow \infty$  quando  $N \rightarrow \infty$ , requerendo mais termos para determinar o espectro ao aproximarem-se do limite semiclássico.

Tomando agora o traço de (6.3) usando (3.94) e (6.14), obtemos

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[ \left( \widehat{U}_{\mathcal{M}} \right)^l \right] &= \text{U}_{\mathcal{M}}(\xi = 0) \\ &= 2^L (\tau(\mathcal{M}^l))^{-\frac{3}{2}} \sum_{m \in \mathcal{O}_L^i} e^{[-i2\pi N^{\frac{1}{4}} m(\beta^{(l)} - \tilde{\mathfrak{J}})m]} = \frac{e^{i\varphi_N(\mathcal{M}^l)}}{\sqrt{N^L}}, \end{aligned} \quad (6.29)$$

onde reconhecemos a ação das órbitas periódicas no expoente dos termos da somatória.

Assim

$$\text{Tr} \left[ \left( \hat{U}_{\mathcal{M}} \right)^l \right] = 2^L |\det(\mathcal{M}^l - 1)|^{-\frac{3}{2}} \sum_{\mathbf{m} \in \diamond_{\xi}^l} e^{-i2\pi N [S_f^l(\mathbf{m})]} \quad (6.30)$$

$$= \frac{e^{i\varphi_N(\mathcal{M}^l)}}{\sqrt{N^L}}. \quad (6.31)$$

Notemos que o fato de  $\mathbf{m} \in \diamond_{\xi}^l$  implica em que somamos sobre as órbitas periódicas de período  $l$ . A equação (6.30) é meramente a *fórmula do traço de Gutzwiller* para os mapas do gato. Porém, devemos notar que esta é exata neste caso em vez de ser uma aproximação semiclássica. Notemos também que a densidade de estados (6.26) implica na interferência dos diferentes fatores de fase  $e^{i\varphi_N(\mathcal{M}^l)}$  para as diferentes potências  $l$  do mapa.

## 6.4 Exemplos :

Os exemplos que apresentamos aqui são os mesmos que já estudamos classicamente no capítulo 5. Todos eles cumprem com a condição (6.1) e a matriz simétrica  $\beta$  tem a característica de ser inteira. Desta forma a quantização poder ser realizada para todo  $N$  ímpar. Para todos estes exemplos o propagador na representação de cordas tem a forma

$$\mathbf{U}_{\mathcal{M}}(\Xi) = \sqrt{\frac{1}{N^L}} e^{-i2\pi N [\frac{1}{6} \Xi \beta \Xi]}, \quad (6.32)$$

onde as cordas  $\Xi$  definidas em (7.33) formam, nestes casos, uma rede de espaçamento  $\frac{2}{N}$ .

Exceptuando o primeiro exemplo, tomamos mapas do gato de dois graus de liberdade já estudados classicamente no capítulo 5. Estes incluem todos os tipos possíveis de comportamento clássico e estudaremos seus efeitos na função periodicidade quântica (FPQ) definida em (6.19).

### 6.4.1 O Gato de Hannay e Berry

Para podermos comparar os diferentes tipos de comportamento que ocorrem no caso de dois graus de liberdade, é importante apresentar um estudo da já conhecida FPQ para o mapa de Hannay e Berry cuja matriz simplética é  $\mathcal{M}_{hb}$ , definida em (5.79). Tal estudo é mostrado na figura 6.1. Podemos ver que, apesar de ter um comportamento altamente irregular no seu conjunto, a FPQ apresenta muitos pontos localizados em famílias de retas cuja inclinação admite um máximo. De fato, isto indica que existe uma sucessão  $\Gamma(p)$  de primos  $p$  para os quais  $\frac{p}{k(p)} < C$  para algum  $C$  independente de  $N$ . Isto, segundo o teorema de Degli Esposti e colaboradores [43], indica que o mapa quântico é ergódico e mixing no limite semiclássico, no sentido que apresentamos no início do capítulo 2.

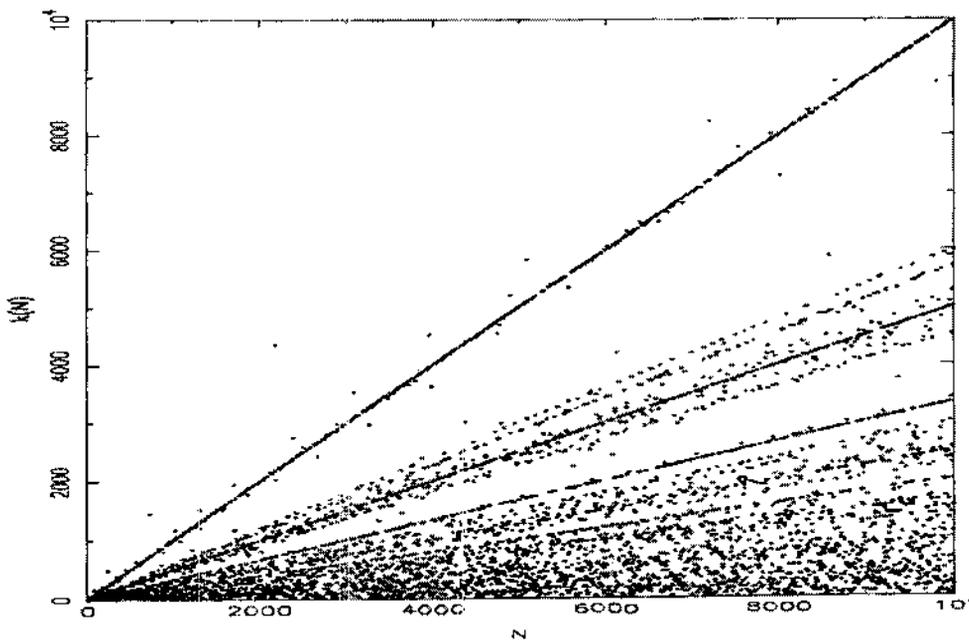


Figura 6.1: A FPQ para o mapa de Hannay e Berry, caótico com um grau de liberdade, cuja matriz simplética é  $\mathcal{M}_{hb}$ , definida em (5.79).

### 6.4.2 O Caso Duplamente Hiperbólico

Neste caso escolhemos a matriz simétrica  $\beta_{hh}$ , dada em (5.80), cuja matriz simplética associada é  $\mathcal{M}_{hh}$ , definida em (5.80). A FPQ deste mapa se mostra na figura 6.2. Podemos ver um comportamento bem diferente daquele obtido para o mapa do gato de Hannay e Berry. Neste caso temos que muitos pontos se encontram sobre famílias de parábolas, pois o papel de  $N$  na figura 6.1 é agora desempenhado por  $N^2$ , devido a que temos um sistema de  $N^2$  estados. Conjecturamos que tal comportamento indica a ergodicidade e mixing quântico do sistema de dois graus de liberdade no limite semiclassico. Um estudo mais detalhado deste tema será realizado futuramente.

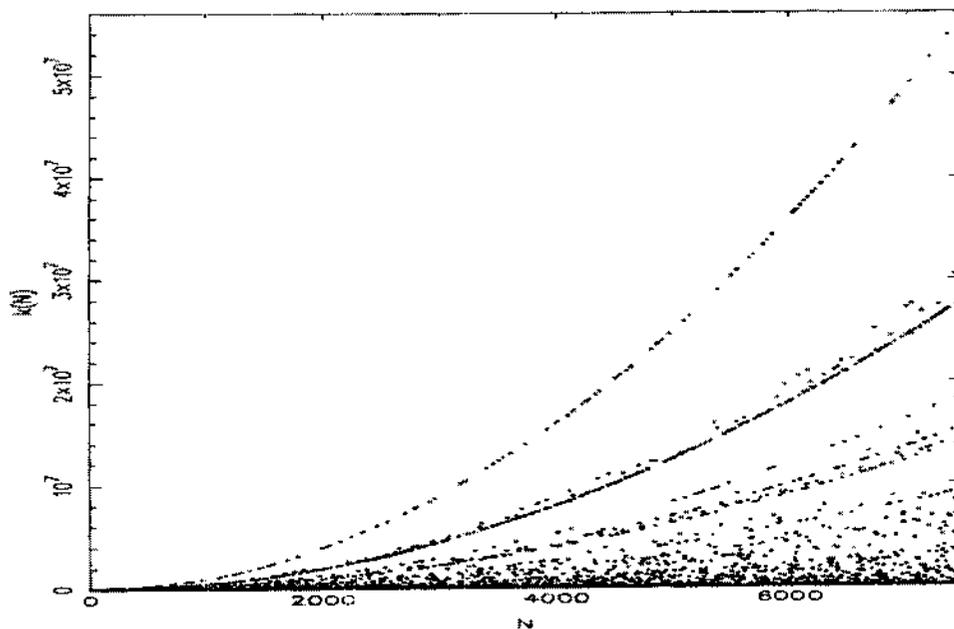


Figura 6.2: A FPQ para o mapa duplamente hiperbólico de dois graus de liberdade, cuja matriz simplética associada é  $\mathcal{M}_{hh}$ , definida em (5.80).

### 6.4.3 O Caso Misto

Estudamos primeiro o mapa cuja matriz simétrica é  $\beta_{eh1}$ , definida em (5.81), cuja FPQ é mostrado na figura 6.3. Esta é comparada com a  $\beta_{eh2}$ , definida em (5.82), caracterizada por ângulos de rotação irracionais, cuja FPQ é mostrada na figura 6.4. Existe uma diferença importante entre as figuras 6.3 e 6.4. Enquanto o comportamento da primeira é parecido a aquele obtido na figura 6.1 para um sistema caótico de um grau de liberdade, a figura 6.4 é semelhante a figura 6.2 para um sistema caótico de dois graus de liberdade. Esta diferença, como foi explicado na seção 3, é devida a que os autovalores do mapa  $\lambda_3^{eh1}$  e  $\lambda_4^{eh1}$  descrevem rotações cujos ângulos são uma fração de  $\pi$  para  $\beta_{eh1}$ . Assim o comportamento é equivalente a um sistema hiperbólico de um grau de liberdade, ergódico clássica e quânticamente somente num subespaço. Por outro lado,  $\lambda_3^{eh2}$  e  $\lambda_4^{eh2}$  descrevem rotações cujos ângulos são múltiplos irracionais de  $\pi$ ; desta forma o comportamento é ergódico clássica e quânticamente no espaço de fases completo.

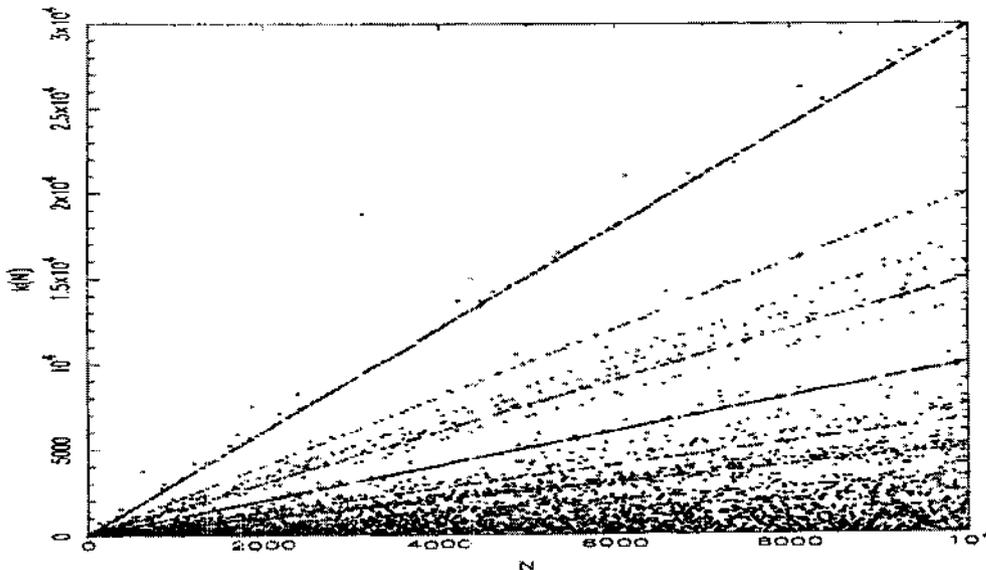


Figura 6.3: A FPQ para o mapa misto de dois graus de liberdade com ângulos de rotação que são frações de  $\pi$ , cuja matriz simplética é  $\mathcal{M}_{eh1}$ , definida em (5.81)

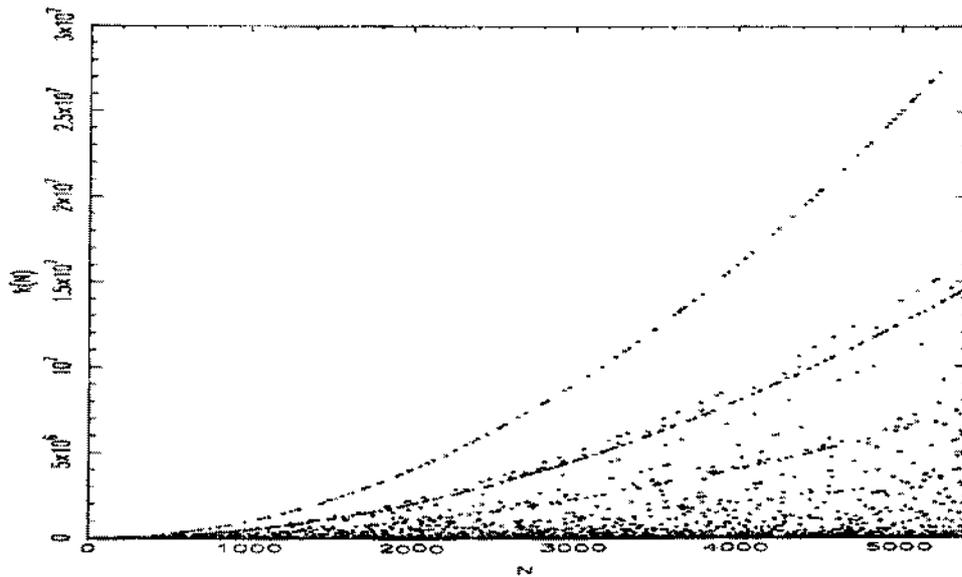


Figura 6.4: A FPQ para o mapa misto de dois graus de liberdade com ângulos de rotação que são múltiplos irracionais de  $\pi$ , cuja matriz simplética é  $\mathcal{M}_{eh2}$ , definida em (5.82)

#### 6.4.4 O caso loxodrômico

Estudamos agora o mapa cuja matriz é  $\beta_{lox}$ , definida em (5.83), a FPQ se mostra na figura 6.5. Vemos que o comportamento de tal função é similar ao caso da figura 6.2 para um sistema ergódico de dois graus de liberdade. Este mapa apresenta então a característica de ser ergódico e mixing no espaço de fases completo. Similarmente, ao exemplo anterior, existem mapas loxodrômicos cujos ângulos de rotação são frações de  $\pi$ , nesses casos o comportamento da FPQ será similar ao apresentado pelos mapas hiperbólicos de um grau de liberdade.

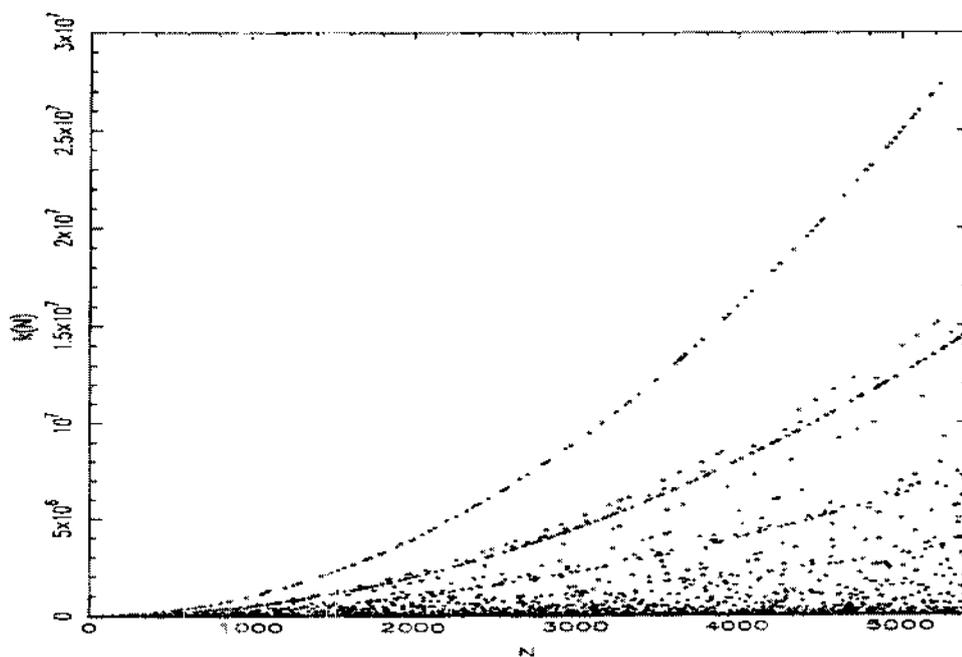


Figura 6.5: A FPQ para o mapa loxodrômico de dois graus de liberdade com ângulos de rotação que são múltiplos irracionais de  $\pi$ , cuja matriz simplética é  $\mathcal{M}_{loz}$ , definida em (5.83)

## 7 O Grupo Felino Quântico

Neste capítulo apresentaremos a construção geral dos mapas do gato quântico. Num primeiro passo estabeleceremos as condições nas quais tais mapas quânticos podem ser construídos e em seguida descreveremos a construção das representações de cordas e centros destes mapas.

### 7.1 Automorfismos no espaço de Hilbert do Toro

Como vimos no capítulo 2 a linearidade do automorfismo clássico gerado por  $\mathcal{M}$  no espaço de fases plano implica em que a quantização no espaço de Banach  $[\mathcal{H}_{\mathbb{R}}]^L$  tem a propriedade,

$$\widehat{U}_{\mathcal{M}}^\dagger \widehat{T}_\xi \widehat{U}_{\mathcal{M}} = \widehat{T}_{\mathcal{M}\xi} \quad (7.1)$$

para todo operador de translação  $\widehat{T}_\xi$ . Assim, o efeito de transformações de semelhança nas representações de cordas e centros é puramente clássico. Veremos agora como associar um operador unitário no espaço de Hilbert  $[\mathcal{H}_N^X]^L$  do  $2L$ -toro a todo  $\widehat{U}_{\mathcal{M}}$ . Para tal propósito estudemos a restrição de  $\widehat{U}_{\mathcal{M}}$  em  $[\mathcal{H}_N^X]^L$ . Obtemos então o seguinte propriedade

**Propriedade**

$$\widehat{U}_{\mathcal{M}} [\mathcal{H}_N^X]^L \subset [\mathcal{H}_N^{X'}]^L \quad (7.2)$$

onde

$$X' = \mathcal{M}X + \frac{N}{4} \mathfrak{J} \mathcal{M}^t \otimes \tilde{\mathfrak{J}} \mathcal{M} \pmod{1} \quad (7.3)$$

onde o produto vetorial de duas matrizes é definido pelo vetor cujas componentes são

$$(A \otimes B)_i = \sum_{j=1}^{2L} A_{i,j} B_{j,i} \quad (7.4)$$

**Prova:** A equação (7.1) implica que

$$\widehat{T}_\xi \widehat{U}_{\mathcal{M}} = \widehat{U}_{\mathcal{M}} \widehat{T}_{\mathcal{M}\xi}. \quad (7.5)$$

Tomemos agora cordas que realizam números inteiros de voltas entorno do toro,  $\xi = \mathbf{m}$ , onde  $\mathbf{m}$  é um vetor inteiro de  $2L$ -componentes. Aplicando então (7.5) num estado de  $[\mathcal{H}_N^X]^L$  e usando (3.55) obtemos,

$$e^{[i2\pi N(\frac{1}{4}\mathbf{m}\tilde{\mathfrak{J}}\mathbf{m} + \mathbf{m}\wedge\frac{\chi}{N})]} \widehat{U}_{\mathcal{M}} |\Psi\rangle = e^{[i2\pi N(\frac{1}{4}\mathbf{m}(\mathcal{M}^t\tilde{\mathfrak{J}}\mathcal{M})\mathbf{m} + \mathcal{M}\mathbf{m}\wedge\frac{\chi}{N})]} \widehat{U}_{\mathcal{M}} |\Psi\rangle, \quad (7.6)$$

assim, para todo vetor  $\mathbf{m}$  inteiro teremos

$$\mathbf{m} \wedge \chi' = \mathcal{M}\mathbf{m} \wedge \chi + \frac{N}{4}\mathbf{m} (\mathcal{M}^t\tilde{\mathfrak{J}}\mathcal{M} + \tilde{\mathfrak{J}}) \mathbf{m} \quad \text{mod}(1). \quad (7.7)$$

Especificamos agora  $2L$  vetores inteiros independentes  $\mathbf{m} = e_j$  ( $j = 1, \dots, 2L$ ) tais que cada um deles percorre uma volta ao redor de cada um dos  $j$  circuitos irredutíveis no toro. Neste caso  $e_j\tilde{\mathfrak{J}}e_j = 0$ , e assim teremos

$$e_j \wedge \chi' = \mathcal{M}e_j \wedge \chi + \frac{N}{4}e_j (\mathcal{M}^t)\tilde{\mathfrak{J}}(\mathcal{M}e_j) \text{mod}(1) \quad (7.8)$$

desta forma obtém-se (7.3).  $\square$

Notemos que

$$\frac{N}{4} (\mathcal{M}^t \otimes \tilde{\mathfrak{J}}\mathcal{M})_i = \frac{N}{2} \sum_{j=1}^L \mathcal{M}_{i,j} \mathcal{M}_{i,j+L}, \quad (7.9)$$

desta forma no caso  $L = 1$  a equação (7.3) se reduz ao resultado obtido nas referências [43]-[57]

$$\chi' = \mathcal{M}\chi + \frac{N}{2}\mathfrak{J} \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11}\mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21}\mathcal{M}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mod}(1). \quad (7.10)$$

Enquanto que para dois graus de liberdade ( $L = 2$ ), obtemos

$$\chi' = \mathcal{M}\chi + \frac{N}{2}\mathfrak{J} \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11}\mathcal{M}_{13} + \mathcal{M}_{12}\mathcal{M}_{14} \\ \mathcal{M}_{21}\mathcal{M}_{23} + \mathcal{M}_{11}\mathcal{M}_{24} \\ \mathcal{M}_{31}\mathcal{M}_{33} + \mathcal{M}_{32}\mathcal{M}_{34} \\ \mathcal{M}_{41}\mathcal{M}_{43} + \mathcal{M}_{42}\mathcal{M}_{44} \end{pmatrix} \quad \text{mod}(1) \quad (7.11)$$

Dado  $\mathcal{M}$ , existe para cada  $N$  um conjunto de soluções de (7.3) tais que  $\chi' = \chi$ . Este conjunto de parâmetros de Floquet é dado por

$$\chi = \frac{N}{4} (1 - \mathcal{M})^{-1} \mathbf{i}_{\mathcal{M}} + (1 - \mathcal{M})^{-1} \mathbf{m} \quad (7.12)$$

onde  $\mathbf{i}_{\mathcal{M}} = \mathfrak{J}\mathcal{M}^t \otimes \tilde{\mathfrak{J}}\mathcal{M} \bmod(4)$  é um vetor de componentes inteiras. Para tais parâmetros o propagador  $\hat{U}_{\mathcal{M}}$  satisfaz

$$[\hat{U}_{\mathcal{M}}, \hat{\mathbf{I}}_N^{\chi}] = 0. \quad (7.13)$$

Chamaremos, tal conjunto de parâmetros de Floquet  $\chi$ , o *conjunto de quantizabilidade do mapa*. Para tal conjunto podemos projetar os operadores  $\hat{U}_{\mathcal{M}}$  no espaço de Hilbert do  $2L$ -toro  $[\mathcal{H}_N^{\chi}]^L$ , obtendo assim

$$\hat{U}_{\mathcal{M}}^{\chi} = \hat{\mathbf{I}}_N^{\chi} \hat{U}_{\mathcal{M}} \hat{\mathbf{I}}_N^{\chi} = \hat{U}_{\mathcal{M}} \hat{\mathbf{I}}_N^{\chi}. \quad (7.14)$$

Os operadores definidos em (7.14) são chamados *mapas do gato quânticos* e herdam a unitariedade de  $\hat{U}_{\mathcal{M}}$ , pois

$$\hat{U}_{\mathcal{M}}^{\chi} [\hat{U}_{\mathcal{M}}^{\chi}]^{\dagger} = \hat{\mathbf{I}}_N^{\chi} \hat{U}_{\mathcal{M}} \hat{U}_{\mathcal{M}}^{\dagger} \hat{\mathbf{I}}_N^{\chi} = \hat{\mathbf{I}}_N^{\chi}$$

O fato dos mapas simpléticos comutarem com as projeções no toro, (7.13), nos permite utilizar a propriedade, (3.25), da projeção do produto de operadores. Dessa forma obtemos que

$$\hat{U}_{\mathcal{M}^t}^{\chi} = [\hat{U}_{\mathcal{M}}^{\chi}]^t. \quad (7.15)$$

A unitariedade de  $\hat{U}_{\mathcal{M}}^{\chi}$  junto com (7.15) implica em que

$$\hat{U}_{\mathcal{M}^{-1}}^{\chi} = [\hat{U}_{\mathcal{M}}^{\chi}]^{-1} = [\hat{U}_{\mathcal{M}}^{\chi}]^{\dagger}. \quad (7.16)$$

Dados dois mapas  $\mathcal{M}_A$  e  $\mathcal{M}_B$  quantizados para o mesmo parâmetro de Floquet  $\chi$ , a propriedade (3.25) implica em

$$\hat{U}_{\mathcal{M}_A}^{\chi} \hat{U}_{\mathcal{M}_B}^{\chi} = \hat{U}_{\mathcal{M}_A \mathcal{M}_B}^{\chi}. \quad (7.17)$$

Isto é, a quantização da composição de diferentes mapas do gato é equivalente a composição das quantizações de cada mapa. Isto mostra então que os gatos quânticos

formam um grupo, o propagador quântico preserva a lei de composição clássica. Esse grupo felino quântico é ao mesmo tempo a projeção no toro do grupo metaplético, quanto um subgrupo do grupo felino clássico.

O conjunto de quantizabilidade do mapa pode ser escolhido em forma independente de  $N$ , se o termo inhomogeneo de (7.3) se anular. Isto é, se a matriz  $\mathcal{M}$  for tal que, para todo vetor inteiro  $\mathbf{m}$

$$\mathbf{m} \left( \mathcal{M}^L \tilde{\mathcal{J}} \mathcal{M} \right) \mathbf{m} = 0 \pmod{4}, \quad (7.18)$$

ou, equivalentemente, se

$$\sum_{j=1}^L \mathcal{M}_{i,j} \mathcal{M}_{i,j+L} = \text{par}. \quad (7.19)$$

Assim os parâmetros de Floquet permitidos são

$$\chi = (\mathcal{M} - 1)^{-1} \mathbf{m}, \quad (7.20)$$

ou seja, estes parâmetros são descritos pelos pontos fixos do mapa (5.58). A origem do EFQ pode ser qualquer um destes pontos fixos; sem perder generalidade podemos escolher  $\chi = 0$ . Para todo  $l$  o mapa  $\mathcal{M}^l$  é quantizável no mesmo conjunto de parâmetros de Floquet do mapa  $\mathcal{M}$  original, assim como nos parâmetros relacionados aos pontos fixos identificados com pontos periódicos de  $\mathcal{M}$  de período  $l$ . Para o caso  $L = 1$ , a condição (7.19) implica em que a matriz  $\mathcal{M}$  deve ter alguma das seguintes formas

$$\begin{pmatrix} \text{par} & \text{ímpar} \\ \text{ímpar} & \text{par} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \text{ímpar} & \text{par} \\ \text{par} & \text{ímpar} \end{pmatrix}$$

chamadas de quantizáveis por Hannay e Berry [38].

## 7.2 As Representações de Centros e Cordas dos Gatos Quânticos

Em continuação, faremos uma construção explícita dos gatos quânticos baseada nas representações de cordas e centros de operadores. Começemos com a quantização do automorfismo linear  $\mathcal{M}$  no espaço de Hilbert  $[\mathcal{H}_{\mathbb{R}}]^L$  associado ao espaço de fases

plano. Segundo vimos no capítulo 2, a linearidade do mapa  $\mathcal{M}$  implica na exatidão da construção de Van Vleck do propagador [4]. Como vimos em (2.48), este propagador na representação de cordas é

$$U_{\mathcal{M}}(\xi) = \left| \det \left[ 1 \pm \mathfrak{J} \frac{\partial^2 S(\xi)}{\partial \xi^2} \right] \right|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i}{\hbar} S(\xi)}, \quad (7.21)$$

onde  $S(\xi) \equiv S(\xi, 0)$  é a função geratriz de cordas do automorfismo no plano. Já o propagador de Van Vleck na representação de centros é (2.47)

$$U_{\mathcal{M}}(x) = \left| \det \left[ 1 \pm \mathfrak{J} \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2} \right] \right|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} S(x)}, \quad (7.22)$$

onde  $S(x) \equiv S(x, 0)$  é a função geratriz de centros da transformação no plano.

Dadas as respectivas funções geratrizes (5.34) e (5.33), obtemos [32]

$$U_{\mathcal{M}}(x) = |\det(1 \pm \mathfrak{J}B)|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} x B x} \quad (7.23)$$

e

$$U_{\mathcal{M}}(\xi) = |\det(1 \pm \mathfrak{J}\beta)|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{1}{4} \xi \beta \xi}. \quad (7.24)$$

Vamos agora projetar estas representações do propagador no  $2L$ -toro. Para tal efeito, devemos trabalhar unicamente nos parâmetros de Floquet  $\chi$  pertencentes ao conjunto de quantizabilidade do mapa definidos em (7.12). A projeção dos símbolos no toro se realiza substituindo os propagadores no plano em suas representações de cordas (7.24), ou centros (7.23), respectivamente em (3.125), ou (3.129). Obtemos assim para a representação de cordas dos gatos quânticos

$$U_{\mathcal{M}}^{\chi}(\xi) = |\det(1 \pm \mathfrak{J}\beta)|^{-\frac{1}{2}} \left\langle e^{-i2\pi N \left[ \frac{1}{4} \xi \beta \xi + \frac{1}{2} \xi (\beta + \mathfrak{J}) \mathbf{m} + \frac{1}{4} \mathbf{m} (\beta - \mathfrak{J}) \mathbf{m} + \frac{\chi}{N} \wedge \mathbf{m} \right]} \right\rangle_{\mathbf{m}}. \quad (7.25)$$

Temos vários objetos clássicos presentes nesta fórmula. Lembrando o capítulo 5, vemos  $S(\xi, \mathbf{m})$ , a função geratriz de cordas do mapa do gato clássico, definida em (5.34), aparecendo no expoente de (7.25). Na amplitude reconhecemos  $\tau_{\xi}$ , o número de pontos fixos do mapa definidos em (5.49). Desta maneira,

$$U_{\mathcal{M}}^{\chi}(\xi) = 2^L \frac{1}{\sqrt{\tau_{\xi}}} \left\langle e^{-i2\pi N [S(\xi, \mathbf{m}) + \frac{\chi}{N} \wedge \mathbf{m}]} \right\rangle_{\mathbf{m}}. \quad (7.26)$$

Similarmente, para a representação de centros dos gatos quânticos, obtemos

$$U_{\mathcal{M}}^{\chi}(x) = |\det(1 \pm \mathfrak{J}B)|^{-\frac{1}{2}} \left\langle e^{i2\pi N[xBx + x(B-\mathfrak{J})m + \frac{1}{4}m(B+\mathfrak{J})m - \frac{\chi}{N} \wedge m]} \right\rangle_{\mathbf{m}} \quad (7.27)$$

onde reconhecemos  $S(x, \mathbf{m})$ , a função geratriz de centros do mapa do gato clássico, definida em (5.33), e  $\tau_x$  o número de órbitas centradas em  $x$ , definido em (5.50), de tal forma que

$$U_{\mathcal{M}}^{\chi}(x) = 2^L \frac{1}{\sqrt{\tau_x}} \left\langle e^{i2\pi N[S(x, \mathbf{m}) - \frac{\chi}{N} \wedge \mathbf{m}]} \right\rangle_{\mathbf{m}}. \quad (7.28)$$

Ambas expressões (7.26) e (7.28) são representações dos mapas do gato quânticos para um número arbitrário de graus de liberdade, mostrando que o propagador quântico é inteiramente definido em termo de magnitudes clássicas excetuando o termo  $\frac{\chi}{N} \wedge \mathbf{m}$  no expoente que descreve as propriedades quânticas das condições de borda. Porém, devemos realizar a somatória em  $\mathbf{m}$  para ter uma representação explícita. Dado que o conjunto de quantizabilidade (7.12) admite somente valores racionais de  $\chi$ , as somatórias em (7.26) e (7.28) são então somas Gaussianas. A condição de quantizabilidade do mapa  $\mathcal{M}$ , (7.18), é equivalente à condição de que a média Gaussiana não se anule para  $L = 1$ . Não conhecemos semelhante verificação para  $L > 1$ .

### 7.3 Periodicidade da Soma de Órbitas

A seguir, restringimos nossa análise aos mapas tais que cumpram a condição (7.18). Desta forma, o termo inhomogeneo de (7.3) se anula, e assim, como já discutimos, podemos realizar, sem perda de generalidade, a quantização para  $\chi = 0$ , notaremos  $\hat{U}_{\mathcal{M}}^0$  estes mapas quânticos. Todos os exemplos do capítulo 6 são deste tipo, porém o índice  $\chi = 0$  foi omitido na notação do mencionado capítulo.

Usamos agora a periodicidade da função geratriz  $S(\xi, \mathbf{m})$  (5.41) e vemos que a função exponencial em (7.26) é periódica. De fato, para  $\mathbf{m}'$  definida em (5.39), e a função geratriz  $S(\xi, \mathbf{m}')$  definida em (5.41) temos que

$$e^{-i2\pi N[S(\xi, \mathbf{m}')] } = e^{-i2\pi N[S(\xi, \mathbf{m})]} e^{-i2\pi N[\xi \wedge \mathbf{k} - \frac{1}{2} \mathbf{m} \Gamma_1 \mathbf{k} - \frac{1}{4} \mathbf{k} \Delta_1 \mathbf{k}]}, \quad (7.29)$$

onde  $\Gamma_1$  e  $\Delta_1$  foram definidas em (5.43) e (5.44) respectivamente. Para todo vetor inteiro  $\mathbf{k}$ ,  $e^{-i2\pi N[\xi \wedge \mathbf{k}]} = 1$ , como o mapa obedece a condição (7.18), teremos que  $e^{-i2\pi N[-\frac{1}{2}\mathbf{m}\Gamma_1\mathbf{k} - \frac{1}{4}\mathbf{k}\Delta_1\mathbf{k}]} = 1$ , portanto

$$\exp[-i2\pi NS(\xi, \mathbf{m} + (\mathcal{M} - 1)\mathbf{k})] = \exp[-i2\pi NS(\xi, \mathbf{m})]. \quad (7.30)$$

A média em (7.26) é então periódica. Para realizar tal média devemos então somar sobre um período e dividir pelo número de pontos em tal período. Desta forma, devemos restringir  $\mathbf{m}$  à região de periodicidade, ou seja, ao paralelogramo fundamental  $\diamond_\xi$ , definido em (5.47), onde há exatamente  $\tau_\xi$  vetores  $\mathbf{m}$  de coordenadas inteiras. Assim

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{M}}^0(\xi) &= 2^L (\tau_\xi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\mathbf{m} \in \diamond_\xi} e^{-i2\pi N[S(\xi, \mathbf{m})]} \\ &= 2^L (\tau_\xi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{\mathbf{m} \in \diamond_\xi} e^{-i2\pi N[\frac{1}{4}\xi\beta\xi + \frac{1}{2}\xi(\beta+3)\mathbf{m} + \frac{1}{4}\mathbf{m}(\beta+3)\mathbf{m}]}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Já que  $\mathbf{m}$  deve pertencer a  $\diamond_\xi$ , a somatória em (7.31) é meramente a soma sobre as diferentes órbitas clássicas cuja corda é  $\xi$ .

De forma similar, para a representação de centros podemos ver que a região de periodicidade é o paralelogramo fundamental  $\diamond_x$ , definido em (5.48), que contém exatamente  $\tau_x$  vetores inteiros  $\mathbf{m}$ . Portanto

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{M}}^0(x) &= 2^L \tau_x^{-\frac{3}{2}} \sum_{\mathbf{m} \in \diamond_x} e^{i2\pi N[S(x, \mathbf{m})]} \\ &= 2^L \tau_x^{-\frac{3}{2}} \sum_{\mathbf{m} \in \diamond_x} e^{i2\pi N[xBx + x(B+3)\mathbf{m} + \frac{1}{4}\mathbf{m}(B+3)\mathbf{m}]}, \end{aligned} \quad (7.32)$$

onde desta vez realizamos a soma sobre todas as diferentes órbitas clássicas cujo centro é o ponto  $x$ .

As expressões do propagador (7.31) e (7.32) tem exatamente a forma esperada para o propagador semiclássico nas representações de cordas e centros respectivamente (2.60), porém estas expressões são exatas para os gatos em vez de ser uma mera aproximação.

Para mapas do gato genéricos (7.31) e (7.32) são somas Gaussianas, mas veremos que estas admitem uma forma simples mediante uma escolha adequada da rede de pontos onde realizamos a quantização.

Começando com a representação de cordas, já vimos que a matriz  $\beta$  tem a forma  $\beta = \frac{\overline{\beta}'}{\tau'_\xi}$ , o caso mais simples é quando a matriz  $\beta$  tem elementos inteiros. Lembrando que  $\xi = \frac{1}{N}\overline{\xi}$ , realizamos a transformação para um conjunto de cordas  $\Xi$  tais que

$$\Xi = \xi + \mathbf{n} = \frac{2\tau'_\xi}{N}\overline{\Xi}, \quad (7.33)$$

onde as componentes de  $\overline{\Xi}$  são inteiras até  $N$  e  $\mathbf{n}$  tem componentes inteiras até  $2\tau'_\xi - 1$ . A equação (7.33) admite soluções para toda corda  $\xi$ , se e somente se  $N$  e  $2\tau'_\xi$  forem coprimos. Nesse caso as cordas  $\Xi$  formam uma rede de espaçamento  $\frac{2\tau'_\xi}{N}$ . Um hipercubo de longitude  $2\tau'_\xi$  admite então  $N^L \times N^L$  cordas sucessivas  $\Xi$  que constituem uma base para os operadores de translação no toro  $\widehat{\mathbf{T}}_\Xi$ . Para o caso em que a matriz  $\beta$  tem coeficientes inteiros, as cordas  $\Xi$  formam uma rede de longitude 2 e espaçamento  $\frac{2}{N}$ .

Podemos ver que na expressão (7.31) para o propagador na representação de cordas, avaliado nas cordas  $\Xi$ , o termo  $e^{-i2\pi N[\frac{1}{2}\Xi(\beta+\mathbb{J})\mathbf{m}]} = 1$ . Portanto a dependência em  $\Xi$  sai da somatória e obtemos a expressão (6.3) estudada na capítulo 6.

Da mesma forma, para a representação de centros, a matriz  $B$  tem a forma  $B = \frac{\overline{B}'}{\tau'_x}$ . Realizamos então a transformação para centros  $X$  cujas componentes são múltiplos inteiros de  $\frac{\tau'_x}{N}$  mediante

$$X = x + \frac{1}{2}\mathbf{j} = \frac{\tau'_x}{N}\overline{X}, \quad (7.34)$$

onde as componentes de  $\overline{X}$  são inteiras até  $N$  e  $\mathbf{j}$  tem componentes inteiras até  $2\tau'_x - 1$ . Mais uma vez, (7.34) admite soluções para todo  $x$  se e somente se  $N$  e  $2\tau'_x$  são coprimos. Nessas condições, reflexões  $\widehat{\mathbf{R}}_X$  para pontos  $X$  numa rede de espaçamento  $\frac{\tau'_x}{N}$  num hipercubo de lado  $\tau_x$  formam uma base do espaço de Hilbert do toro. Especificando agora o propagador (7.32) para centros  $X$ , o termo  $e^{i2\pi N[X(B-\mathbb{J})\mathbf{m}]} = 1$ . Obtemos então a expressão (6.8) para o propagador na representação de centros.

Os casos aqui descritos se caracterizam pela simplicidade da expressão do propagador que adquire uma forma similar ao caso plano (7.21) (7.22); foram então escolhidos para um estudo mais específico no capítulo 6.

## 8 Conclusões

Nesta tese apresentamos uma nova construção da representação de Weyl no toro. O nosso método gera naturalmente a representação de cordas conjugada. Esta parece ser mais útil no toro do que no plano onde também está presente. A vantagem da nossa derivação da representação de Weyl reside na clara interpretação geométrica dos operadores de base em termos de translações e reflexões no espaço de fases quântico. Assim, a lei para o símbolo do produto de operadores adquire uma forma simples. Determinamos que a paridade do número de estados  $N$  tem um papel importante, pois a lei do produto para  $N$  ímpar se relaciona com o caso plano, meramente substituindo as integrais pelas somas apropriadas. Apesar da interpretação geométrica ser válida para geometrias torais, a construção pode ser aplicada para qualquer sistema cujo espaço de Hilbert tenha dimensão finita, qualquer que seja a estrutura geométrica do espaço de fases subjacente, enquanto compacto. De fato, esta base de operadores e símbolos pode ser aplicada, por exemplo, para sistemas de spin ou sistemas fermiônicos de muitos corpos [66]. Porém, tal generalização destrói a interpretação intuitiva do limite semiclássico. Definindo os operadores no toro como as projeções dos seus análogos no plano, algumas propriedades importantes do plano podem ser usadas no toro. Exploramos esse fato para sistemas Hamiltonianos periódicos onde projetamos o problema contínuo num problema de dimensão finita. A formulação de integrais de caminho dos sistemas Hamiltonianos no plano permite-nos obter tal formulação no toro, e assim esclarecer o limite semiclássico.

A invariância simplética da representação de Weyl no plano traduz-se no toro pela invariância felina; este fato é usado para estudarmos mapas do gato de dimensão geral. Primeiro, realizamos um estudo clássico; para tal propósito representações de cordas e centros resultaram de especial interesse. Isto permitiu realizar uma classificação de todos os tipos de dinâmica que podem ocorrer. Dois graus de liberdade resultam suficientes para obter todos os tipos de dinâmica. Nesse caso, aparece o comportamento loxodrômico como um novo tipo de dinâmica ausente no caso de um grau de liberdade. A classificação realizada permite-nos também obter exemplos de

mapas com todas as possíveis dinâmicas.

Em seguida, a quantização dos mapas do gato foi realizada utilizando as representações de centros e cordas aqui desenvolvidas. As propriedades quânticas do mapa mostram a exatidão do limite semiclássico independentemente do número de graus de liberdade ou da característica da dinâmica. As propriedades espectrais mostram o mesmo tipo de "patologias" observadas para sistemas de um grau de liberdade. Através da função periodicidade quântica temos indícios da ergodicidade e mixing quântico nos sistemas que apresentam classicamente tal propriedade, mas um estudo mais formal deve ser realizado futuramente.

Devemos notar que este é um dos primeiros sistemas loxodrômicos a ser quantizado [71], assim abrem-se muitas perspectivas de estudo através dos exemplos aqui apresentados. Por exemplo, esperamos poder realizar um estudo que mostre as características da dinâmica nas funções de onda. Outro tipo de estudo que também surge é o estudo dos mapas do gato multidimensionais perturbados, e a curiosidade de ver se os diferentes tipos de dinâmica se manifestam no espectro de quase-energias de tais sistemas.

Outra linha em aberto para futuros trabalhos, é a construção da função de Wigner espectral para mapas e utilizar os mapas do gato para estudar as propriedades de tal função. Esperamos então obter as cicatrizes das órbitas clássicas de forma mais clara do que no caso contínuo, assim como, talvez, visualizar as variedades estáveis e instáveis dos pontos periódicos. A função de Wigner espectral originalmente introduzida por Berry [72] para sistemas contínuos é a transformada de Fourier do propagador quântico na representação de Weyl, uma função que contém toda a informação quântica do sistema. Apresenta picos na camada de energia, assim como cicatrizes das órbitas periódicas vizinhas a tal camada [32]. A representação de Weyl no toro permitirá a construção da função de Wigner para o caso de mapas, isto é, para sistemas cuja evolução temporal é discreta. Os mapas do gato constituem o meio ideal para este tipo de estudo, devido à exatidão da aproximação semiclássica.

## Referências

- [1] H. Poincaré, *Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Céleste* (Gautier-Villard, Paris) (1892).
- [2] M. Born , *The Mechanics of the Atom* (Frederick Ungar Pub. Co.,New York 1960).
- [3] A. Einstein, *Verh Dtsch Phys Ges* **19** (1917), 82.
- [4] J.P. Van Vleck, *Proc Natl Acad Sci ( USA)* **14** (1928), 178.
- [5] M. C. Gutzwiller, *Pysica* **5D** (1980), 185.
- [6] R. P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integral* (McGraw-Hill Book Co.,New York 1965).
- [7] M.C. Gutzwiller, *J Math Phys* **8** (1967), 1979.
- [8] M.C. Gutzwiller, *J Math Phys* **11** (1970), 1791.
- [9] M.C. Gutzwiller, *J Math Phys* **12** (1971), 343.
- [10] M.C. Gutzwiller, *J Math Phys* **14** (1973), 139.
- [11] M.C. Gutzwiller, *J Math Phys* **18** (1977), 806.
- [12] M.C. Gutzwiller, *Phys Rev Lett* **45** (1980), 150.
- [13] R. Balian and C. Block, *Ann Phys* **69** (1972), 76.
- [14] R. Balian and C. Block, *Ann Phys* **85** (1974), 514.
- [15] M. Sieber and F. Steiner, *J Phys A: Math Gen* **144** (1990), 159.
- [16] R. Aurich , C. Matthies, M. Sieber and F. Steiner, *Phys Rev Lett* **68** (1992), 1629.
- [17] P. Cvitanovic and B. Eckhardt, *J phys A : Math Gen* **24** (1991), L237 .

- [18] M. V. Berry and J.P. Keating, *J Phys A: math Gen* **23** (1990), 4839.
- [19] A.V. Andreev, O. Agam, B.D. Simons and B.L. Altshuler, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996), 3947.
- [20] E.P. Wigner , *Phys. Rev.* **40** (1932), 749. H. Weyl (1927) *Z. Phys.* **46** , 1.
- [21] S.R. De Groot and L.G. Suttorp, *Foundations of Electrodynamics* (1972) (North-Holland, Amsterdam).
- [22] R.P. Feynman , *Statistical Mechanics* (1972) (Benjamm, Reading, Mass.)
- [23] K. Husimi, *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.* **22** (1940), 264.
- [24] K. Takashi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **55** (1986), 762.
- [25] F.A. Berezin and M.A. Shubin, in: *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyiai* (1972)(North-Holland, Amsterdam) 21.
- [26] M.V. Berry, *Phil. Trans. R. Soc.* **287** (1977), 237.
- [27] A.M. Ozorio de Almeida and J.H. Hannay, *Ann. Phys. N.Y.* **138** (1982), 115.
- [28] M.S. Marinov, *Phys. Rep.* **60** (1980), 1.
- [29] M.S. Marinov, *J. Phys. A* **12** (1979), 31.
- [30] A.M. Ozorio de Almeida, *Proc. R. Soc. Lond. A* **439** (1992), 139.
- [31] A.M. Ozorio de Almeida, *Proc. R. Soc. Lond. A* **431** (1990), 403.
- [32] A.M. Ozorio de Almeida, *Physics Report* **295** (1998), 266.
- [33] E. Bogomolny, *Nonlinearity* **5** (1992), 1055..
- [34] W.K. Wothers, *Annals of Physics* **176** (1987), 1.
- [35] D. Galetti and A.F.R. de Toledo Piza, *Physica A* **149** (1988), 267.
- [36] D. Galetti and A.F.R. de Toledo Piza, *Physica A* **186** (1992), 513.

- [37] W.K. Kaperskovitz and M. Peev, *Annals of Physics* **230** (1994), 21.
- [38] J.H. Hannay and M.V. Berry (1980) *Physica* **1D** 267-230
- [39] J. P. Keating, *Nonlinearity* **4** (1991), 309.
- [40] J. Ford, G.Mantica and G.H. Ristow, *Physica D* **25** (1991), 105.
- [41] M. Matos and A.M. Ozorio de Almeida, *Annals of Physic* **237** (1995), 46.
- [42] O. Bohigas, M.-J. Giannoni and C. Smith, *J. Phys. Lett* **45** (1984), L-1015.
- [43] M. Degli Esposti, S.Graff and S. Isola, *Commun. Math. Phys* **167** (1995), 471
- [44] M. Gutzwiller, *Chaos and quantum mechanics* (1990) Springer Verlag.
- [45] A.M.F. Rivas and A.M. Ozorio de Almeida, *The Weyl representation on the torus*, Submitted to *Annals of Physics*.
- [46] A.M.F. Rivas and A.M. Ozorio de Almeida, *The Weyl quantization on the torus and path integrals*, in *Lectures of the Semester Borel on Chaos and Quantization*, Ed. A.Voros and E. Bogomolny. Springer Verlag (1999) a aparecer.
- [47] A.M.F. Rivas, A.M. Ozorio de Almeida and M. Saraceno, *Quantization of Multidimensional Cat Maps* Preprint.
- [48] V.I. Arnold and A.B. Givental in *Dynamical Systems IV, Encyclopedia of Mathematical Sciences IV*, eds. V.I. Arnold and S.P. Novikov (1990) Springer, Berlin.
- [49] A. Messiah, *Quantum Mechanics* , Vol 1 (1972) North-Holland, Amsterdam.
- [50] C. Cohen Tannoudji. B. Diu and F. Laloe, *Quantum Mechanics*(1977) Wiley, New York.
- [51] J. Von Neumann, *Beweis des Ergodenstatzes und des H-Theorems in Neuen Mechanik*. *Z. Physik* **57** (1929), 30-70
- [52] A. Voros, *Ann. Inst. H. Poincaré* **24A** (1976), 31.

- [53] R.G. Littlejohn, Phys. Reports **138** (1986), 193.
- [54] E.J. Heller, J. Chem. Phys. **65** (1976), 1289.
- [55] R.G. Littlejohn, Phys. Reports **138** (1986), 193.
- [56] W.H. Miller, Adv. Chem. Phys. **25** (1974), 69.
- [57] A. Bouzouina and S. De Bièvre, Commun. Math. Phys. **178** (1996), 83.
- [58] J. Shwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. **46** (1960), 570, 893, 1401.
- [59] N.L. Balazs and B.K. Jennings, Physics Reports **104** (1984), 347.
- [60] S. Aubry and G. André, Ann. Israel Phys. Soc. **3** (1979), 133-164
- [61] P.G. Harper, Proc. Phys. Soc. **A68** (1955), 874-892.
- [62] M. Wilkinson, Proc. R. Soc. London **A 391** (1984), 305.
- [63] D. R. Hofstadter, Phys. Rev. **B 14** (1976), 2239-2249.
- [64] J. P. Keating, Nonlinearity **4** (1991), 277.
- [65] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (1978) Springer, New York.
- [66] D. Galetti and A.F.R. de Toledo Piza, Physica **A 214** (1995), 207.
- [67] C.D. Greenman, Preprint (1997)
- [68] I. Percival and F. Vivaldi, Physica **D 25**, (1987) 105.
- [69] R. Mañé, *The Lyapunov exponents of generic area preserving diffeomorphisms.*, International Conf. on Dyn. Syst. (Montevideo 1995) Pitman Research Notes in Math, ser. 362, pp. 110 – 119. (Editors: F. Ledrappier, J. Lewowicz, S. Newhouse).
- [70] M. Tabor, Physica **6D** (1986) 195-210

- [71] P. Santoro and A.M. Ozorio de Almeida, **The Loxodromic Baker map in preparation.**
- [72] M.V. Berry, Proc. R. Soc. Lond. A **423** (1989), 219.

# **“REPRESENTAÇÃO DE WEYL NO TORO E APLICAÇÕES ”**

**ALEJANDRO MARIANO FIDEL RIVAS**

Tese apresentada no Centro Brasileiro de  
Pesquisas Física, fazendo parte da Banca  
examinadora os seguintes Professores:

Alfredo Miguel Osório de Almeida/CBPF

Antonio Fernando Ribeiro de Tolledo Pizza/USP

Maria Carolina Nemes/UFMG

Ívano Damião Soares/CBPF

Nelson Pinto Neto

Rio de Janeiro, 31 de março de 1999