TESE DE

MESTRADO

Rediscutindo a Trialidade de Cartan

MOISÉS PORFIRIO ROJAS LEYVA

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF

RIO DE JANEIRO, MAIO DE 2000

Dedicatória

Aos meus pais:

Neyra e Porfirio (In Memoriam)

Agradecimentos

• A José A. Helayël-Neto, pelo trabalho de orientação da tese e pelo muito que me ensinou.

• A Marco Antônio de Andrade meu coorientador e amigo, com quem aprendi os fundamentos iniciais para o desarrolo desta tese.

• A Francesco Toppan, amigo e colaborador desta tese, pelas inúmeras discussões ao longo do ultimo ano.

• Aos amigos e colegas do DCP pelo ambiente agradavél nestes anos.

• Aos meus amigos: German (chapa) Gomero, Marco (huachano) Flores, Guillermo (pelusa) Cuba, Rodolfo (rex) Casana, Gabriel (gabi) Flores, Luis Peche, José L. Boldo, Claudio Sasaki.

• A minha maẽ Neyra , meu pai Porfirio (In Memoriam), assim como aos meus irmãos.

• Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) pelo espaço concedido para que se desenvolvesse meu trabalho.

• A Capes, pela bolsa de mestrado.

Resumo

A teoria dos espinores é reconsiderada para o caso de espaços-tempo com assinaturas arbitrárias, tratando-se com especial atenção as representações do tipo-Majorana-Weyl.

Em particular, consideramos o caso de 8 dimensões, onde a trialidade de tipo-Cartan desempenha papel de grande importância. O propósito central desta tese é rediscutir a trialidade, formulando-a em uma espécie de " superespaço", onde se adota a representação de Majorana-Weyl, o que introduz significativa simplificação no tratamento da questão..

Abstract

Spinors are discured in space-times with arbitrary signatures and a great deal of attention is drawn to the so-called Majorana-Weyl representation. In particular, we contemplate the case of 8 dimensions, where Cartan's triality plays a central rôle. Our main purpose is to reassess triality by adopting a sort of " superspace" formulation where a Majorana-Weyl representation is adopted and greatly simplifies the treatment.

Conteúdo

Introdução

Nos últimos anos, teorias físicas em espaços-tempo com assinatura diferente da usual vêm sendo tratadas com grande interesse. Uma das razões é a conjectura da teoria-F [14], que supostamente vive em (2t+10s)dimensões [15]. A física com 2 tempos está sendo explorada por Bars e seus colaboradores [16], e já foi considerada há alguns anos por Sakharov [17]. De outro ponto de vista, lembremos que uma teoria fundamental deve explicar não só a dimensionalidade espaço-tempo, mas também sua assinatura [18].

Recentemente, Hull and Hull-Khuri [19] ressaltaram a existência de uma dualidade que relaciona diferentes compatificações de teorias formuladas em diferentes assinaturas. Tais resultados fornecem novos avanços na explicação da assinatura do espaço-tempo.

Espaços-tempo de Majorana-Weyl (isto é, que suportam espinores de Majorana-Weyl) são a base para teorias de supercordas, super-Yang-Mills e supergravidade, em D=10 dimensões.

Uma pregunta que podemos nos colocar é se estes espaços-tempo de Majorana-Weyl são afetados pela dualidade espaço-tempo: a resposta é positiva. De fato, todos os espaços-tempo que estão presentes em alguma dada dimensão são relacionados uns aos outros por uma transformação de dualidade, que é induzida pela Trialidade: o automorfismo externo do grupo Spin(8), que é o grupo S_3, isto é, um grupo de permutações de 3 elementos.

A dimensão mais baixa onde a trialidade não é trivial é 8, os espaços-tempo (8t+0s)-(4t+4s)-(0t+8s) são inter-relacionados.

Estas são as coordenadas transversas de espaços-tempo (9t+1s)-(5t+5s)-(1t+9s) respectivamente; a trialidade também pode relacionar espaços-tempo de Majorana-Weyl em D=12 dimensões (10t+2s)-(6t+6s)-(2t+10s). Isto é interessante para a teoria-F.

Uma importante conseqüência da trialidade é que teorias supersimétricas formuladas com espinores de Majorana-Weyl em alguma dimensão, porém com diferentes assinaturas, são todas mapeadas dualmente umas nas outras.

As manifestações da trialidade podem ser observadas em diferentes contextos:

Uma delas é dada por E. Cartan [5] para D=8 dimensões, com uma métrica não-diagonal. Formulada em um espaço-tempo de Majorana-Weyl de assinatura (4t+4s), temos a *Trialidade Tipo-Cartan* (V-C-A), através de qual o vetor, o espinor quiral e o espinor antiquiral são perfeitamente equivalentes. Aqui, consideramos que os espinores são comutantes.

Também, pode-se mostrar que os 3 espaços-tempo de Majorana-Weyl de assinatura (4t+4s),(8t+0s) e (0t+8s) são relacionados via o grupo de permutações S_3. Esta propriedade é a *Trialidade Tipo- Espaço-Tempo*; neste nível, a trialidade é independente da estatística.

Esta tese está organizada da seguinte forma: no Capítulo 1, são apresentadas algumas convenções e definiremos algumos objetos de utilidade. Entre eles, apresentamos os diferentes tipos de espinores para espaços de dimensão arbitrária; também, proporemos as diferentes representações das matrizes-Γ, uma em especial: a representação tipo-Majorana (MTR) e construímos uma tabela com as MTR, até D=18 dimensões.

No Capítulo 2, é desenvolvida a trialidade tipo-Cartan (V-C-A) no espaço D=(4t+4s); estudamos as propriedades da representação de Majorana-Weyl neste espaço, além do grupo de Lorentz e de seus geradores.

Em seguida, faz-se um estudo dos espinores puros [5] [6]. Depois disto, construímos a trialidade tipo-Cartan (V-C-A) no espaço-tempo D=4t+4s, que é uma simetria descrita por 6 elementos do automorfismo externo do grupo SO(4,4). Construímos dois geradores deste grupo, S_3. $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}$ são suficientes para construir o grupo S_3.

No Capítulo 3, constrói-se outro tipo de trialidade: a *Trialidade Tipo-Espaço-Tempo.* Então, apresentamos primeramente as representações de Majorana-Weyl para os 3 casos (D=4t+4s, D=8t+0s, D=0t+8s) nos dois tipos de estatística ($\eta = \pm 1$); construímos, também, as "matrizes-bridge" que relacionam as 3 métricas. Com esta informação, conseguimos construir a trialidade tipo-espaço-tempo, que também será uma simetria descrita por 6 elementos de um grupo de permutações S_3, cujos geradores são explicitamente obtidos.

Finalmente, apresentamos a trialidade tipo-Cartan (V-C-A) em D=8t+0s e D=0t+8s, construída como um mapeamento da trialidade tipo-Cartan (V-C-A) em D=4t+4s. Em cada caso, fornecemos os geradores do grupo S_3.

As conclusões gerais são apresentados e seguidas pelos Apêndices A, B, C e D, onde são coletadas formas explícitas de matrizes e representações úteis ao longo da tese.

Capítulo 1

Espinores em Dimensões Arbitrárias

1.1 Introdução

O propósito deste capítulo é estabelecer notações e convenções: apresentar a métrica de nosso espaço, estabelecer algumas convenções e definir alguns objetos que iremos utilizar no decorrer desta tese.

Serão definidos os diferentes tipos de espinores: Weyl, Majorana e Majorana-Weyl para espaços-tempo de dimensões arbitrárias, assim como também proporemos diferentes representações das matrizes-Γ que realizam a Álgebra de Clifford de um espaço-tempo considerado.

Enfatizaremos uma em especial, a representação tipo Majorana (MTR), e construiremos uma tabela com todas as representações MTR até D=18, usando um algoritmo especial [1] [4].

1.2 Aspectos Essenciais das Matrizes-Γ para um Espaço-tempo arbitrário

1.2.1 Notação e resultados preliminares

Nesta seção, vão ser introduzidos os ingredientes e convenções necessários ao desenvolvimento desta tese. Seja $g_{\mu\nu}$ a métrica generalizada de Minkowski:

$$g_{\mu\nu} = \text{diagonal}(\underbrace{+ + \ldots +}_{t-vezes}, \underbrace{- - \ldots -}_{s-vezes}),\ \mu, \nu = (1, \ldots, D)$$

do espaço-tempo de dimensão D=t+s. Em nossas convençoẽs, direções tipo-tempo são associadas a +1 e direções tipo-espaço são associadas a -1; vamos nos referir a este espaço como $M^{s,t}$. Os índices de Lorentz (μ, ν) tomam D=t+s diferentes valores que correspondem às D direções ortogonais do espaço-tempo: "s" direções tipo-espaço e "t" tipo-tempo.

As matrizes-Γ para espaços-tempo de dimensão D=t+s (par) e D=t+s+1 podem ser representadas por matrizes complexas-$2^{D/2} \times 2^{D/2}$ que satisfazem à álgebra de Clifford.

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2(g^{-1})^{\mu\nu}\mathbf{1}; \tag{1.1}$$

$\mathbf{1}$ é a identidade do espaço de matrizes-$2^{D/2} \times 2^{D/2}$. Sem perda de generalidade, as matrizes-Γ que satisfazem a ($\Gamma^{\mu 2}$=$\mathbf{1}$) e a ($\Gamma^{\mu 2}$=-$\mathbf{1}$) serão, respectivamente, associadas às direções tipo-tempo e tipo-espaço.

As matrizes-Γ para qualquer espaço-tempo podem ser escritas como produtos tensoriais da identidade-2×2 e pelas matrizes de Pauli que são unitárias; portanto, as matrizes-Γ também vão ser unitárias.

As matrizes $\Gamma^{\mu\dagger}$, $\Gamma^{\mu *}$ e $\Gamma^{\mu T}$, a menos de fatores +1 ou -1, também satisfazem à eq (1.1), logo

$$\Gamma^{\mu\dagger} \ = \ -(-1)^t \mathcal{A}\Gamma^\mu \mathcal{A}^{-1}, \tag{1.2}$$

$$\Gamma^{\mu *} = \eta \mathcal{B} \Gamma^{\mu} \mathcal{B}^{-1}, \tag{1.3}$$

$$\Gamma^{\mu T} = -\eta(-1)^{-t} \mathcal{C} \Gamma^{\mu} \mathcal{C}^{-1}, \tag{1.4}$$

onde ($\eta = \pm 1$).

A matriz $\mathcal{A}$ é dada pelo produto de todas as matrizes Γ^{μ} que satisfazem a $(\Gamma^{\mu})^2 = \mathbf{1}$. Estas são, na nossa convenção, as matrizes-Γ tipo-tempo. A ordem do produto não é importante, já que $\mathcal{A}$ pode ser sempre definida a menos de uma fase. Agora, as matrizes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são unitárias , pois elas também podem ser escritas como produtos tensoriais da identidade-2×2 e pelas matrizes de Pauli.

Além de unitárias, terão as seguintes propriedades[2]:

$$\mathcal{C} = \mathcal{B}^T \mathcal{A} \tag{1.5}$$

$$\mathcal{A}^{-1} = (-1)^{t(t+1)/2} \mathcal{A} \tag{1.6}$$

$$\mathcal{B}^T = \varepsilon \mathcal{B} \qquad (\varepsilon = \pm 1) \tag{1.7}$$

$$\mathcal{C}^T = \varepsilon \eta^t (-1)^{t(t+1)/2} \mathcal{C} \tag{1.8}$$

$$\mathcal{A}^* = \eta^t \mathcal{B} \mathcal{A} \mathcal{B}^{-1} \tag{1.9}$$

$$\mathcal{A}^T = \eta^t \mathcal{C} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{C}^{-1} \tag{1.10}$$

$$\mathcal{B}^* = \eta^t \mathcal{C}^* \mathcal{B} \mathcal{C}^{-1}. \tag{1.11}$$

Os diferentes valores de ε determinam as maneiras diferentes de se impor a condição de realidade sobre os espinores; ao valor $+1$ de ε, temos associado o espinor de Majorana usual, que será tratado aqui; ao valor -1, temos associado o espinor de SU(2)-Majorana[2].

O valor de ε para os espaços $M^{s,t}$,$M^{s+1,t}$ e $M^{s,t+1}$, onde s+t=par, é dado por[3]

$$\varepsilon = \cos \frac{\pi}{4}(s-t) - \eta \sin \frac{\pi}{4}(s-t). \tag{1.12}$$

Uma transformação unitária, U, aplicada sobre espinores atua em Γ^{μ}, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ conforme segue [4]:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{m} &\longrightarrow U\Gamma^{m}U^{\dagger} && (1.13)\\
\mathcal{A} &\longrightarrow U\mathcal{A}U^{\dagger} && (1.14)\\
\mathcal{B} &\longrightarrow U^{*}\mathcal{B}U^{\dagger} && (1.15)\\
\mathcal{C} &\longrightarrow U^{*}\mathcal{C}U^{\dagger}. && (1.16)
\end{aligned}
$$

1.2.2 Operador de Quiralidade Γ_{D+1}

Sabemos que a base de Clifford das matrizes-Γ com 2^{D} elementos (D par) contém (D+1) matrizes que anticomutam entre si. Então, se temos o conjunto de matrizes Γ: $\mathbf{\Gamma}^{1}$, $\mathbf{\Gamma}^{2}$,...,Γ^{D}, pode-se construir, a partir destas, a matriz $\mathbf{\Gamma}_{\mathrm{D+1}}$:

$$\Gamma_{D+1} = (-1)^{(s-t)/4}\Gamma^{1}\ldots\Gamma^{D}. \qquad (1.17)$$

Algumas propriedades de $\mathbf{\Gamma}_{D-1}$ e a utilidade das mesmas serão vistas nas seções seguintes:

$$
\begin{aligned}
\{\Gamma_{D+1}, \Gamma^{\nu}\} &= 0 && (1.18)\\
(\mathbf{\Gamma}_{D+1})^{2} &= 1. && (1.19)
\end{aligned}
$$

1.3 Espinores

Espinores são objetos que, sob a atuação do grupo SO(s,t), transformam-se como

$$\Psi \longrightarrow \Psi^{'} = e^{\Omega}\Psi, \qquad (1.20)$$

onde

$$\Omega = \frac{1}{2}\,\omega_{k\lambda}\Sigma^{k\lambda}, \qquad (1.21)$$

$$\Sigma^{k\lambda} = \frac{1}{4}\,[\Gamma^k, \Gamma^\lambda]. \tag{1.22}$$

Uma importante relação de transformação das matrizes-Γ[3]

$$e^{-\Omega}\Gamma^\mu e^\Omega = (e^\omega)^\mu{}_\nu \Gamma^\nu. \tag{1.23}$$

Portanto, em princípio, a mais simples representação para o espinor é aquela em que este possui $2^{D/2}$ componentes complexas. O espinor adjunto, $\overline{\Psi}$, é definido tendo a sua transformação sob SO(s,t) inversa à transformação de Ψ

$$\overline{\Psi}^{'} = \overline{\Psi} e^{-\Omega}\,, \quad \overline{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \mathcal{A}. \tag{1.24}$$

Para obter um escalar sob SO(s,t), basta tomar o produto $\overline{\Psi}\Psi$

Para obter um vetor sob SO(s,t), é suficiente formar o bilinear espinorial com as matrizes-Γ^μ que se transformam segundo (1.23); usando $\overline{\Psi}$ e Ψ, obtemos:

$$\overline{\Psi} e^{-\Omega}\Gamma^\mu e^\Omega \Psi = (e^\omega)^\mu{}_\nu \overline{\Psi}\Gamma^\nu\Psi \tag{1.25}$$

ou

$$\overline{\Psi}^{'} \Gamma^\mu \Psi^{'} = \Lambda^\mu{}_\nu \overline{\Psi}\Gamma^\nu\Psi. \tag{1.26}$$

Portanto, temos que $\overline{\Psi}\Gamma^\mu\Psi$ é um vetor que se transforma sob SO(s,t).

Podemos, então, associar a cada direção do espaço-tempo uma matriz Γ^μ e, deste modo, encontrar uma relação entre as representações vetorial e espinorial.

1.3.1 Espinores de Weyl

Para D par, tal representação é ainda redutível pois, neste caso, pode-se definir operadores de projeção, P_L e P_R, que dividem Ψ em duas partes, com transformações uma independente da outra.

As propriedades dos projetores $P_{L,R}$ (${P_{L,R}}^2 = P_{L,R}$):

$$P_L + P_R = 1 \tag{1.27}$$

A segunda propriedade básica é a ortogonalidade:

$$P_L P_R = P_R P_L = 0. \tag{1.28}$$

A terceira é exclusiva do espaço espinorial:

$$[P_{L,R}, \Omega] = 0. \tag{1.29}$$

Usando eq(1.27), podemos reescrever a eq(1.20) como:

$$\Psi_L^{'} + \Psi_R^{'} = e^{\Omega_L + \Omega_R}(\Psi_L + \Psi_R),$$

onde $\Psi_{L,R} \equiv P_{L,R}\Psi$ e $\Omega_{L,R} \equiv P_{L,R}\Omega$; as eq(1.28) e (1.29) implicam que $\Omega_L \Omega_R = \Omega_R \Omega_L = 0$, de modo que

$$\Psi_L^{'} + \Psi_R^{'} = e^{\Omega_L + \Omega_R}(\Psi_L + \Psi_R) = e^{\Omega_L}(\Psi_L + e^{\Omega_R}\Psi_R) = e^{\Omega_L}\Psi_L + e^{\Omega_R}\Psi_R. \tag{1.30}$$

Operando novamente os projetores P_L e P_R no último resultado, dividimos Ψ em duas partes, com transformações independentes. Estas partes são conhecidas como espinores quirais ou de Weyl (left-handed ou right-handed):

$$\Psi_L^{'} = e^{\Omega_L}\Psi_L \quad \text{e} \quad \Psi_R^{'} = e^{\Omega_R}\Psi_R. \tag{1.31}$$

Para espaços-tempo de dimensão D par, mostra-se que:

$$P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \pm \Gamma_{D+1}). \tag{1.32}$$

Então, se temos um espinor Ψ sem qualquer vínculo, o espinor de Weyl-L é obtido a partir Ψ através da projeção:

$$\Psi_L = \frac{1}{2}(1 + \Gamma_{D+1})\Psi. \tag{1.33}$$

O espinor de Weyl-R é obtido através da projeção P_L:

$$\Psi_R = \frac{1}{2}(1 - \Gamma_{D+1})\Psi. \tag{1.34}$$

Logo,

$$\Gamma_{D+1}\Psi_L = \frac{1}{2}(\Gamma_{D+1} + 1)\Psi = \Psi_L$$
$$\Gamma_{D+1}\Psi_R = \frac{1}{2}(\Gamma_{D+1} - 1)\Psi = -\Psi_R.$$

Então, podemos escrever os vínculos de Weyl L e R como Ψ_L e Ψ_R que são auto-vetores de Γ_{D+1} com auto-valores, respectivamente, dados por +1 e -1.

1.3.2 Espinores de Majorana

Da eq(1.20), obtém-se que

$$\mathcal{B}^{-1}\Psi'^{*} = e^{\mathcal{B}^{-1}\Omega^{*}\mathcal{B}}(\mathcal{B}^{-1}\Psi^{*});$$

e, das eq(1.3) e (1.20), vê-se que

$$\mathcal{B}^{-1}\Omega^{*}\mathcal{B} = \Omega. \tag{1.35}$$

Vamos definir o espinor conjugado-de-carga, $\Psi^c \equiv \mathcal{B}^{-1}\Psi^{*}$, para o qual vale:

$$\Psi'^{c} = e^{\Omega}\Psi^c. \tag{1.36}$$

Assim, conclui-se que Ψ^c transforma-se sob SO(s,t) como o próprio Ψ. Portanto, uma vez imposta a condição de Majorana (MC), $\Psi^c = \Psi$, esta vai ser sempre preservada sob as transformações de SO(s,t). Os espinores que satisfazem a esta última condição são denominados espinores de Majorana.

A condição de Majorana pode ser escrita como:

$$\Psi = \mathcal{B}^{-1}\Psi^{*} = \mathcal{C}^{*}\overline{\Psi}^{T}. \tag{1.37}$$

Convém observar que, na representação de Majorana, onde $\mathcal{B} = 1$ [3], o espinor de Majorana tem todas as suas componentes reais. Da condição de Majorana, segue que ($\mathcal{B}^*\mathcal{B} = 1$). Logo, da eq (1.7), conclui-se que os espinores de Majorana [1] só podem ser definidos para espaços-tempo (t,s) onde $\varepsilon = 1$

1.3.3 Espinores de Majorana-Weyl

Quando se pode impor a condição de Majorana sobre os espinores de Weyl L e R, obtemos então, os chamados espinores de Majorana-Weyl, e isto acontece em espaços-tempos tais que:

$$s - t = 0 \; mod 8. \tag{1.38}$$

Isto pode ser visto da eq(1.12).

1.4 Estudo das Representações

Aqui, fazemos um estudo formal das representações para as matrizes-Γ.

Assim, temos:

- Representação de Weyl (WR),
- Representação (Dual) de Weyl (DWR),
- Representação de Majorana (MR),
- Representação (Pseudo-) Majorana (PMR),
- Representação Tipo Majorana (MTR).

[1] No caso $\varepsilon = -1$, podemos impor, por exemplo, a conhecida condição de realidade-SU(2), e definir os espinores SU(2)-Majorana[2].

1.4.1 Representação de Weyl (WR)

Sabemos que a matriz Γ_{D+1} tem autovalores ± 1; então, pode-se encontrar uma representação onde Γ_{D+1} possui a forma:

$$\Gamma_{D+1} = \begin{pmatrix} 1_{D-2} & 0 \\ 0 & -1_{D-2} \end{pmatrix}. \tag{1.39}$$

Esta é a chamada representação de Weyl. Uma vez que

$$\Gamma^{\mu}\Gamma_{D+1} \ + \ \Gamma_{D+1}\Gamma^{\mu} \ = \ 0, \tag{1.40}$$

as eq(1.39) e (1.40) asseguram a seguinte forma para as matrizes-Γ^{μ}:

$$\Gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \tilde{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.41}$$

onde σ^{μ} e $\tilde{\sigma}^{\mu}$ são matrizes de ordem $2^{\frac{D}{2}-1} \times 2^{\frac{D}{2}-1}$.

A forma de Ω é

$$\Omega = \frac{1}{8}\,\omega_{\mu\nu}(\Gamma^{\mu}\Gamma^{\nu} - \Gamma^{\nu}\Gamma^{\mu}) = \begin{pmatrix} \omega_L & 0 \\ 0 & \omega_R \end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

Portanto, podemos escrever que

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix}, \tag{1.43}$$

onde $\Psi_{R,L}$ são os espinores de Weyl e possuem, cada um, $2^{(\frac{D}{2}-1)}$ componentes complexas. As matrizes-Γ na representação de Weyl (exceto Γ_{D+1} mostrada na eq(1.39)) são constituídas por blocos na posição anti-diagonal.

1.4.2 Representação (Dual) de Weyl (DWR)

Uma representação (Dual) de Weyl (DWR) é obtida de uma representação de Weyl (WR) fazendo uma troca de Γ_{D+1} por uma das matrizes Γ.

1.4.3 Representação de Majorana (MR)

Pode-se mostrar que, para $\varepsilon = 1$, podemos sempre construir a matriz $\mathcal{B}$ igual à identidade; isto acontece na base de Majorana.

Assim, levando em conta que $\mathcal{B} = 1$, a condição de Majorana, eq(1.37), implica que Ψ é real; e também satisfaz a $\mathcal{A} = \mathcal{C}$.

Então, as matrizes-Γ ou são todas reais, ou todas imaginárias puras; conseqüentemente, a matriz-Ω será sempre real, e qualquer transformação de SO(s,t) vai manter Ψ real.

A condição a ser satisfeita é dupla:

$$s - t = 2 \; mod 8, \quad \text{para} \quad \eta = -1 \tag{1.44}$$

ou

$$s - t = 6 \; mod 8, \quad \text{para} \quad \eta = 1. \tag{1.45}$$

1.4.4 Representação de Majorana-Weyl (MWR)

Quando a representação é do tipo Majorana-Weyl (MWR), então a condição sobre o espaço-tempo é tal que:

$$s - t = 0 \; mod 8 \;\; \text{para ambos os valores} \;\; \eta = \pm 1. \tag{1.46}$$

1.4.5 Representação (Pseudo-) Majorana (PMR)

Nesta representação, (Pseudo-) Majorana, temos que $\mathcal{B}$ é construída como abaixo:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}. \tag{1.47}$$

De maneira que obtemos espinores (quiral/anti-quiral) com uma parte real e outra imaginária respectivamente.

1.4.6 Representação Tipo Majorana (MTR)

A representação Tipo Majorana (MTR) para as matrizes-Γ é uma representação em que todas as matrizes-Γ têm uma simetria definida: são simétricas ou antisimétricas.

Em D dimensões, uma MTR com "p" matrizes-Γ simétricas e "q" matrizes-Γ anti-simétricas (D=p+q) será denotada doravante por $(\mathrm{p_S} + \mathrm{q_A})$.

Para esta representação, a matriz de conjugação-de-carga, $\mathcal{C}$, é dada pelo produto de todas as matrizes-Γ simétricas ($\mathcal{C}_S$) ou todas as matrizes-Γ antisimétricas ($\mathcal{C}_A$):

$$\mathcal{C}_S = \Pi_{i=1,\ldots,p}\Gamma^i{}_S, \tag{1.48}$$

$$\mathcal{C}_A = \Pi_{i=1,\ldots,q}\Gamma^i{}_A. \tag{1.49}$$

Notar que o índice S,A não se refere às propriedades de (anti)-simetria das matrizes $\mathcal{C}_{S,A}$.

Em dimensões pares, $\mathcal{C}_S$ e $\mathcal{C}_A$ correspondem a valores opostos de η, enquanto que em dimensões ímpares, a menos de um fator de fase , as duas definições para a matriz de conjugação-de-carga tornam-se equivalentes.

Agora, uma representação de Majorana (MR) para as matrizes-Γ de Clifford em uma assinatura de espaço-tempo dado implica que os matrizes-Γ pertencem à MTR.

Verifica-se, também, que dada uma MTR, é possível achar uma assinatura do espaço-tempo para o qual a representação é Majorana.

A condição necessária e suficiente para se ter uma MTR com p_S matrizes simétricas e q_A matrizes antisimétricas ($D = p_S + q_A$) é que ($D-2p_S$) mod8 devem estar nas tabelas de Majorana dada pelas eqs(1.44), (1.45) e (1.46). A construção é feita de modo que $\mathcal{C}$ corresponde a um valor de η dente as eqs(1.44), (1.45) e (1.46).

A lista de todas as possíveis MTR em uma certa dimensão é facilmente computada. Por exemplo, podemos mostrar que em D=6 existe uma MTR (que não é de Weyl) com 6 matrizes-Γ antisimétricas além da Γ^7 também antisimétrica $(0_S + 6_A, \Gamma^7_A)$. Com esta escolha temos uma base de Majorana para um espaço 6-dimensional Euclideano. Construímos as matrizes-Γ para esta representação, o que se mostra no Apêndice A.

A seguir, construímos a tabela que mostra todas as MTR até a dimensão D=18.

Assim, temos:

D	W · R		NW · R
$2+1$	$(1_S + 1_A + \Gamma^3{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(2_S + 0_A + \Gamma^3{}_A)$
$4+1$	$(2_S + 2_A + \Gamma^5{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(3_S + 1_A + \Gamma^5{}_A)$
$6+1$	$(3_S + 3_A + \Gamma^7{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(4_S + 2_A + \Gamma^7{}_A)$
$6+1$			$(0_S + 6_A + \Gamma^7{}_A)$
$8+1$	$(8_S + 0_A + \Gamma^9{}_S)$		
$8+1$	$(4_S + 4_A + \Gamma^9{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(5_S + 3_A + \Gamma^9{}_A)$
$8+1$	$(0_S + 8_A + \Gamma^9{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(1_S + 7_A + \Gamma^9{}_A)$
$10+1$	$(9_S + 1_A + \Gamma^{11}{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(10_S + 0_A + \Gamma^{11}{}_A)$
$10+1$	$(5_S + 5_A + \Gamma^{11}{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(6_S + 4_A + \Gamma^{11}{}_A)$
$10+1$	$(1_S + 9_A + \Gamma^{11}{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(2_S + 8_A + \Gamma^{11}{}_A)$
$12+1$	$(10_S + 2_A + \Gamma^{13}{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(11_S + 1_A + \Gamma^{13}{}_A)$
$12+1$	$(6_S + 6_A + \Gamma^{13}{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(7_S + 5_A + \Gamma^{13}{}_A)$
$12+1$	$(2_S + 10_A + \Gamma^{13}{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(3_S + 9_A + \Gamma^{13}{}_A)$
$14+1$	$(11_S + 3_A + \Gamma^{15}{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(12_S + 2_A + \Gamma^{15}{}_A)$
$14+1$	$(7_S + 7_A + \Gamma^{15}{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(8_S + 6_A + \Gamma^{15}{}_A)$
$14+1$	$(3_S + 11_A + \Gamma^{15}{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(4_S + 10_A + \Gamma^{15}{}_A)$
$14+1$			$(0_S + 14_A + \Gamma^{15}{}_A)$
$16+1$	$(16_S + 0_A + \Gamma^{17}{}_S)$		
$16+1$	$(12_S + 4_A + \Gamma^{17}{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(13_S + 3_A + \Gamma^{17}{}_A)$
$16+1$	$(8_S + 8_A + \Gamma^{17}{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(9_S + 7_A + \Gamma^{17}{}_A)$
$16+1$	$(4_S + 12_A + \Gamma^{17}{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(5_S + 11_A + \Gamma^{17}{}_A)$
$16+1$	$(0_S + 16_A + \Gamma^{17}{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(1_S + 15_A + \Gamma^{17}{}_A)$

D	$\mathbf{W \cdot R}$		$\mathbf{NW \cdot R}$
$18+1$	$(17_S + 1_A + \Gamma^{19}{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(18_S + 0_A + \Gamma^{19}{}_A)$
$18+1$	$(13_S + 5_A + \Gamma^{19}{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(14_S + 4_A + \Gamma^{19}{}_A)$
$18+1$	$(9_S + 9_A + \Gamma^{19}{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(10_S + 8_A + \Gamma^{19}{}_A)$
$18+1$	$(5_S + 13_A + \Gamma^{19}{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(6_S + 12_A + \Gamma^{19}{}_A)$
$18+1$	$(1_S + 17_A + \Gamma^{19}{}_S)$	$\leftrightarrow$	$(2_S + 16_A + \Gamma^{19}{}_A)$

Na segunda coluna, listamos todas as MTR do tipo Weyl; na última coluna, todas as representações que são Não-Weyl.

A flecha conecta as duas representações, Weyl e Não-Weyl. Esta última é construída trocando a "Γ^5 generalizada" por alguma das matrizes-Γ de simetria oposta.

Até D=18, as únicas representações Não Majorana-Weyl, e que não têm contrapartida de Weyl, são as mostradas em 6-dimensões ($0_S + 6_A$) e em 14-dimensões ($0_S + 14_A$), de acordo com a tabela.

Diferentes MTR pertencem a classes diferentes sob transformação de similaridade das representações matrizes-Γ.

Assim, temos que para o espaço Euclideano (++...+), o índice [4]

$$I = tr(\Gamma^m \cdot \Gamma_m{}^T) = (p_S - q_A) \cdot tr\mathbf{1} \tag{1.50}$$

toma diferentes valores para diferentes MTR, e isto, por construção, é invariante sob a transformação $\Gamma \mapsto O\Gamma O^T$ realizada pela matriz ortogonal O.

Até D=8 (excluído), existe uma única classe de similaridade de MTR de tipo Weyl, de modo que espinores Majorana-Weyl podem ser definidos só em espaços-tempo (n+n). Uma nova característica vai surgir para D $\geq$ 8; as representações de Majorana-Weyl são compatíveis para diferentes classes de similaridade. Em D=8, três soluções são achadas $(8_S + 0_A)$, $(4_S + 4_A)$ e $(0_S + 8_A)$, que são associadas ao espaço-tempo de Majorana-Weyl.

Uma eficiente ferramenta para produzir e analisar as representações de Weyl em dimensões mais altas é fornecida pelo algoritmo que se encontra em [1].

Isto nos oferece um procedimento recursivo para construir uma representação de Weyl em D-dimensões a partir de "s" e "r", representações das matrizes-Γ em baixas dimensões, sendo que D , "s" e "r" satisfazem à condição:

$$\mathrm{D} = \mathrm{s} + \mathrm{r} + 2 \tag{1.51}$$

Além disto, se as representações s,r-dimensionais são do tipo-Majorana, a representação D-dimensional será Majorana-Weyl.

O algoritmo pode ser expresso por meio da matriz:

$$\Gamma_D^M = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_{\mathrm{r}} \otimes \gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{m}}; -\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{r}}^{\overline{\mathrm{m}}} \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{s}} \\ \mathbf{1}_{\mathrm{r}} \otimes \gamma_{\mathrm{s}}^{\mathrm{m}}; \mathrm{i}\gamma_{\mathrm{r}}^{\overline{\mathrm{m}}} \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{s}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{1.52}$$

onde

$$\mathrm{M} = 1, 2, \ldots, \mathrm{D}$$

$$\mathrm{m} = 1, 2, \ldots, \mathrm{s} + 1$$

$$\overline{\mathrm{m}} = 1, 2, \ldots, \mathrm{r} + 1,$$

$\mathbf{1}_{\mathrm{n}}$ denota a matriz identidade $2^{n/2} \times 2^{n/2}$

$$\mathrm{M} = (\mathrm{m}, \mathrm{s} + 1 + \overline{\mathrm{m}}).$$

Na eq(1.52), os valores s,r =0 são permitidos.

O valor de Γ_0^1 é exatamente $\mathbf{1}$.

Aplicando iterativamente o algoritmo que começa com D=2 (s, r = 0), obtemos as matrizes de Pauli; logo, para caso D=4 (s=2, r=0), temos uma representação de MW.

Em D=6, uma representação MW ($3_S + 3_A$) pode ser obtida de s=4, r=0 ou s=2, r=2. A representação Não-Weyl ($0_S + 6_A$) é construída com um método que será exposto no Apêndice A.

As representações MW em dimensões elevadas também podem ser obtidas com este algoritmo. Uma forma explícita de construí-lo é dada na tabela que segue.

$s=0$	(1)	$r=6$	(0_S+6_A)	$\mapsto$	(8_S+0_A)
$s=0$	(1)	$r=6$	(3_S+3_A)	$\mapsto$	(4_S+4_A)
$s=0$	(0_S+6_A)	$r=0$	(1)	$\mapsto$	(0_S+8_A)
$s=8$	(8_S+0_A)	$r=0$	(1)	$\mapsto$	(9_S+1_A)
$s=0$	(1)	$r=8$	(4_S+4_A)	$\mapsto$	(5_S+5_A)
$s=0$	(1)	$r=8$	(8_S+0_A)	$\mapsto$	(1_S+9_A)
$s=10$	(9_S+1_A)	$r=0$	(1)	$\mapsto$	(10_S+2_A)
$s=10$	(5_S+5_A)	$r=0$	(1)	$\mapsto$	(6_S+6_A)
$s=10$	(1_S+9_A)	$r=0$	(1)	$\mapsto$	(2_S+10_A)
$s=12$	(10_S+2_A)	$r=0$	(1)	$\mapsto$	(11_S+3_A)
$s=12$	(6_S+6_A)	$r=0$	(1)	$\mapsto$	(7_S+7_A)
$s=12$	(2_S+10_A)	$r=0$	(1)	$\mapsto$	(3_S+11_A)
$s=8$	(8_S+0_A)	$r=6$	(0_S+6_A)	$\mapsto$	(16_S+0_A)
$s=14$	(11_S+3_A)	$r=0$	(1)	$\mapsto$	(12_S+4_A)
$s=14$	(7_S+7_A)	$r=0$	(1)	$\mapsto$	(8_S+8_A)
$s=14$	(3_S+11_A)	$r=0$	(1)	$\mapsto$	(4_S+12_A)
$s=6$	(0_S+6_A)	$r=8$	(8_S+0_A)	$\mapsto$	(0_S+16_A)
$s=16$	(16_S+0_A)	$r=0$	(1)	$\mapsto$	(17_S+1_A)
$s=16$	(12_S+4_A)	$r=0$	(1)	$\mapsto$	(13_S+5_A)
$s=16$	(8_S+8_A)	$r=0$	(1)	$\mapsto$	(9_S+9_A)
$s=16$	(4_S+12_A)	$r=0$	(1)	$\mapsto$	(5_S+13_A)
$s=16$	(0_S+16_A)	$r=0$	(1)	$\mapsto$	(1_S+17_A)

Notar que, para fazer uma construção explícita de todas as MWR até D=18 com ajuda da eq(1.52), o único conhecimento extra é a MTR Não Weyl (0_S+6_A).

Daqui por diante, referimo-nos como " Trialidade tipo-espaço-tempo" aquela propriedade em 8-dimensões , na qual a condição de Majorana-Weyl é satisfeita em 3 diferentes assinaturas, e mostraremos logo sua conexão com a propiedade usual de " Trialidade tipo Cartan (V-C-A)" em 8-dimensões, assim como o grupo de permutação S_3.

Pode-se, também, construir em 3 assinaturas diferentes MWR para os casos D=10, D=12 e D=14 .

Semelhante solução é conseqüência direta da imersão da álgebra de Lorentz 8-dimensional em dimensões mais elevadas. No caso $D \geq 16$, obtemos MWR em mais de 3 assinaturas diferentes.

Um exemplo é o caso D=18, que pode ser construído com a eq(1.52) para os valores s=r=8. Portanto, as 5 diferentes MWR em D=18 podem ser obtidas a partir de 2 representações de Majorana-Weyl em 8-dimensões.

Concluindo este capítulo, a base física para achar as MTR em dimensões superiores deve-se ao fato de que as teorias fundamentais mais recentes propostas para o programa de unificação são formuladas em 10, 11 e 12 dimensões onde espinores de Majorana e de Majorana-Weyl têm relevante papel, em vista da necessidade de introduzir supersimetria.

Enfatizamos, uma vez mais, que todos os dados necessários para definir teorias em semelhantes dimensões podem ser construídas usando o algoritmo da eq(1.52), com os dados de D=8. Em particular, todas as " Trialidades tipo-espaço-tempo" em $D > 8$ são construídas a partir da " Trialidade tipo-espaço-tempo" em D=8. Por esta razão, no próximo capítulo vamos nos concentrar no caso D=8.

Capítulo 2

Trialidade Tipo-Cartan (V-C-A)

2.1 O Espaço de Dimensão D=4t+4s

Nesta seção, apresentamos os dados necessários para construir a Trialidade Tipo-Cartan (V-C-A) em um espaço-tempo de Majorana-Weyl D=4t+4s (um MWS suportará espinores Majorana-Weyl). Apresentamos, no Capítulo 1, uma tabela com as representações tipo Majorana (MTR) nos diferentes espaços-tempo; um destes espaços, em especial, é de nosso interesse: o caso $D=4_A+4_S$. Escolhemos a representação tipo Majorana-Weyl em um espaço-tempo de Majorana-Weyl(MWS).

Neste caso, temos duas situações bem-definidas:

a) $\eta = 1 \Longrightarrow$ as Γ's são $4_S+ 4_A$, que correspondem a D=4t+4s, isto é, as Γ's tipo-tempo são todas simétricas, e também satisfazem a $\mathcal{A} = \mathcal{C}_S = \Pi_i \Gamma^i{}_S$, sempre que $\eta = 1$ corresponder a espinores fermiônicos (anticomutantes).

b) $\eta = -1 \Longrightarrow$ as Γ's são $4_A+ 4_S$, que correspondem a D=4t+4s, isto é, as Γ's tipo-tempo são todas anti-simétricas, e satisfazem a $\mathcal{A} = \mathcal{C}_A = \Pi_i \Gamma^i{}_A$, sempre que $\eta = -1$ corresponde a espinores de caráter comutante.

Agora, apresentamos um conjunto de dados na representação de Majorana-Weyl.

i) O campo vetorial, V_m, especificado por um índice vetorial "m".

ii) Os campos espinoriais, ϕ_a, $\chi_{\dot{a}}$, especificados por indices quiral e antiquiral: a, ȧ respectivamente.

iii) A métrica (pseudo-)ortogonal do espaço-tempo, $(g^{-1})^{mn}$, g_{mn}, que se adota plana.

iv) A matrix-$\mathcal{A}$ já foi introduzida no Capítulo 1, que coincide com a matriz-Γ^0 no caso Minkowskiano; em uma MWR, tem a forma $\mathcal{A} = \mathrm{A} \oplus \tilde{\mathrm{A}}$, com estruturas de indices $(\mathrm{A})_a{}^{\dot{b}}$ e $(\tilde{\mathrm{A}})_{\dot{a}}{}^{b}$, respectivamente.

v) A matriz de conjugação de carga, $\mathcal{C}$, em uma MWR tem a forma $\mathcal{C} = \mathrm{C}^{-1} \oplus \tilde{\mathrm{C}}^{-1}$ e pode ser promovida a uma métrica no espaço de espinores quirais (e, respetivamente, antiquirais). Usamo-la para elevar e abaixar os índices espinoriais. De fato, como estruturas de índices, temos $(\mathrm{C}^{-1})^{ab}$, $(\mathrm{C})_{ab}$ e $(\tilde{\mathrm{C}}^{-1})^{\dot{a}\dot{b}}$, $(\tilde{\mathrm{C}})_{\dot{a}\dot{b}}$.

vi) As matrizes-Γ^m na MWR têm a forma:

$$\Gamma^m = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^m \\ \tilde{\sigma}^m & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

onde as estruturas de índices são: $(\sigma^m)_a{}^{\dot{b}}$ e $(\tilde{\sigma}^m)_{\dot{a}}{}^{b}$

vii) Os sinais $\eta = \pm 1$ especificam duas escolhas inequivalentes de $\mathcal{C}$. Pela definição de uma MWR, a matriz-$\mathcal{B}$ resulta ser automaticamente a identidade ($\mathcal{B} = \mathbf{1}$).

2.1.1 O Grupo de Lorentz no Espaço D=4t+4s

As transfomações lineares homogêneas consistindo de todas as matrizes reais Λ, 8×8, satisfazendo à condição:

$$\Lambda g \Lambda^T = g, \tag{2.2}$$

onde Λ^T é a transposta de Λ, formam um grupo a que iremos denominar grupo de

Lorentz, O(4,4). As matrizes-Λ deixam invariante a quantidade $(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 - V_5^2 - V_6^2 - V_7^2 - V_8^2)$.

Se $L^{\mathrm{m}}{}_{\mathrm{n}}$ são os elementos da matriz Λ^T, onde "m" e "n" são índices da linha e coluna respectivamente, a equação acima pode ser escrita como:

$$g_{\mathrm{mn}} L^{\mathrm{m}}{}_{\mathrm{k}} L^{\mathrm{n}}{}_{\mathrm{l}} \; = \; g_{\mathrm{kl}}. \tag{2.3}$$

Esta expressão impõe 36 condições sobre os 64 elementos das matrizes-Λ 8×8; por esta razão, a matriz de transformação de Lorentz contém 28 parâmetros independentes.

Como o determinante de Λ^T é o mesmo de Λ, a condição da eq(2.2) leva-nos ao resultado:

$$\det(\Lambda) \; = \; \pm 1. \tag{2.4}$$

O subgrupo de Lorentz, com as Λ's tais que $\det(\Lambda) \; = \; 1$, será designado por SO(4,4).

2.1.2 Os geradores de SO(4,4)

Para obtermos os geradores de SO(4,4), vamos considerar uma transfomação infinitesimal, $\Lambda \; = \; \mathbf{1} + \omega$, onde os elementos de ω são muito menores que 1 ($\omega^{\mathrm{m}}{}_{\mathrm{n}} \ll 1$).

Tal transfomação deve satisfazer à relação (2.2). Desprezando os termos de ordem igual ou superior a 2, e usando a propriedade (2.3) de abaixamento e levantamento de índices, obtemos:

$$\omega^{\mathrm{mn}} \; = \; -\omega^{\mathrm{nm}}; \tag{2.5}$$

existem 28 matrizes-8×8 linearmente independentes; este número é também o de parâmetros independentes de Λ. Sendo assim, a matriz ω pode ser escrita como:

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{\mathrm{mn}}\Sigma^{\mathrm{mn}}, \tag{2.6}$$

onde $\Sigma^{\mathrm{mn}} = -\Sigma^{\mathrm{nm}}$.

Os elementos de tais matrizes para o caso das coordenadas do espaço-tempo, V_{m}, são obtidas da seguinte relação :

$$(\Sigma_V^{\mathrm{mn}})_{\mathrm{k}}{}^{\mathrm{l}} = \delta_{\mathrm{k}}^{\mathrm{m}}(g^{-1})^{\mathrm{nl}} - (g^{-1})^{\mathrm{ml}}\delta_{\mathrm{k}}^{\mathrm{n}}. \tag{2.7}$$

As matrizes-Λ_V de SO(4,4) podem ser exponenciadas como segue:

$$\Lambda_V = \exp[\frac{1}{2}(\omega_{\mathrm{mn}}\Sigma_V^{\mathrm{mn}})]. \tag{2.8}$$

As matrizes-Σ_V^{mn} designam os geradores das transformações de Lorentz no espaço das coordenadas (representação vetorial).

Agora, construímos os geradores para os espinores quiral (ϕ) e antiquiral (χ). Como trabalhamos na representação tipo Majorana-Weyl, então as matrizes-Γ^{m} têm a forma genérica dada pela eq(2.1).

Neste caso, a matriz-Λ de SO(4,4) para espinores pode ser exponenciada como abaixo:

$$\Lambda = \exp[\frac{1}{8}(\omega_{\mathrm{mn}}\Sigma^{\mathrm{mn}})], \tag{2.9}$$

onde:

$$\Sigma^{\mathrm{mn}} = \frac{1}{4}[\Gamma^{\mathrm{m}}, \Gamma^{\mathrm{n}}]. \tag{2.10}$$

As matrizes que realizam transformações de Lorentz sobre espinores quirais (ϕ) são expresos como:

$$\Lambda_C = \exp[\frac{1}{8}(\omega_{\mathrm{mn}}\Sigma_C^{\mathrm{mn}})], \tag{2.11}$$

onde os geradores lêem-se:

$$\Sigma_C^{\mathrm{mn}} = [\sigma^{\mathrm{m}}, \tilde{\sigma}^{\mathrm{n}}]. \qquad (2.12)$$

Estas são 28 matrizes linearmente independentes.

As matrizes de SO(4,4) no espaço de espinores anti-quirais (χ) são dadas por:

$$\Lambda_A = \exp[\frac{1}{8}(\omega_{\mathrm{mn}}\Sigma_A^{\mathrm{mn}})], \qquad (2.13)$$

onde os geradores assumem a forma:

$$\Sigma_A^{\mathrm{mn}} = [\tilde{\sigma}^{\mathrm{m}}, \sigma^{\mathrm{n}}]. \qquad (2.14)$$

Estas também são 28 matrizes linearmente independentes.

2.2 Estudo dos Espinores Simples (Puros) de Cartan

2.2.1 Espinores Simples (Puros) de Cartan

E. Cartan concebeu os espinores em 1932 [5], ao estudar novas representações de grupos de rotação; baseou sua concepção de espinores na equivalência com vetores isotrópicos ou nulos(um vetor é nulo se a forma fundamental: $x^A\ g_{AB}\ x^B{=}0$).

Estudamos, então, os espinores puros associados a um espaço, V, de dimensão D, com produto escalar g ($\mathrm{g}(y,y) = y^A\ g_{AB}\ y^B$). Seja Cl(g) a representação da álgebra de Clifford associada a V; então, o espinor é definido como um vetor $2^{[\frac{D}{2}]}$-dimensional do espaço espinorial complexo (S), onde Cl(g) admite uma representação irredutível.

Se Π_1, Π_2, ..., Π_D representa uma base ortogonal de V, seus elementos Π_A (A=1,2,...,D) podem ser considerados como os geradores de Cl(g), com a propriedade

$$\{\Pi_A, \Pi_B\} = 2g_{AB}\mathbf{1}. \tag{2.15}$$

Seja $\xi \in$ S um espinor complexo $2^{[\frac{D}{2}]}$-dimensional e seja $y \in$ V um vetor (que pode ser expresso na forma $y = y^A\Pi_A$), que satisfaz à equação:

$$y\xi = y^A\Pi_A\xi = 0. \tag{2.16}$$

Então, para $\xi \neq 0$, a forma quadrática fundamental de V é $g(y, y) = 0$.

Portanto, pode-se definir $M(\xi)$:

$$M(\xi) = \{y \in V/y^A\Pi_A\xi = 0\} \tag{2.17}$$

como um sub-espaço de V associado a ξ. É facil ver que $M(\xi)$ é totalmente nulo, já que de $y, z \in M(\xi)$ resulta $g(y, z) = 0$.

Assim, temos:

Definição : Um espinor ξ é puro (simples) se $M(\xi)$ é um sub-espaço de V maximal e totalmente nulo.

Como exemplo [6], consideremos o caso D=3 (em geral D = 2ν+1), onde $\nu = 1$. Então, sejam x_1, x_2, x_3 as coordenadas ortonormais de um vetor $x \in C^3$, sujeitas ao vínculo:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \tag{2.18}$$

Isto porque o vetor é isotrópico (ou nulo ou tipo-luz); x_1, x_2, x_3 podem ser expressos em termos de dois números complexos linearmente independentes, ξ_0, ξ_1:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}(\xi_1^2 - \xi_0^2), \\ x_2 &= -\tfrac{i}{2}(\xi_1^2 + \xi_0^2), \\ x_3 &= \xi_1\xi_0; \end{aligned} \tag{2.19}$$

e, vice-versa, ξ_0, ξ_1 podem ser expressos em termos de x_1, x_2, x_3:

$$\xi_0 = \pm\sqrt{-x_1 + ix_2}\ , \quad \xi_1 = \pm\sqrt{x_1 + ix_2}. \tag{2.20}$$

A ambigüidade no sinal é essencial, já que uma rotação de 2π em $x \in C^3$, deixá-lo-á invariante, e determinará uma mudança no sinal de (ξ_0, ξ_1). Por definição, ξ_0, ξ_1 são as componentes do espinor ξ:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

2.2.2 Semi-espinores

Adotaremos a designação de semi-espinores em espaços de dimensão par, D $= 2\nu$, para um sistema de 2^ν componentes, ξ_α (exemplo: $\nu = 2$, então temos $2^4 = 4$ componentes, $\xi_\alpha = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_{12}\}$), onde todas as componentes com número par (ímpar) de índices são nulas.

Assim, temos dois tipos de semi-espinores:

Semi-espinores de 1° tipo (que denotaremos por φ), com um número par de índices; semi-espinores de 2° tipo (que denotaremos por η), com um número ímpar de índices.

Exemplo: se D=6 $\Longrightarrow$ $\nu = 3$, assim os semi-espinores, neste caso, lêem-se:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_{12} \\ \xi_{13} \\ \xi_{23} \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_{123} \end{pmatrix}$$

Outro exemplo que sera útil logo a seguir: o caso onde D=8 $\implies$ $\nu = 4$ (o índice superior ou inferior "c" indica que é tipo Cartan)

$$
\varphi^c = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_{12} \\ \xi_{13} \\ \xi_{14} \\ \xi_{23} \\ \xi_{24} \\ \xi_{34} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_{1234} \end{pmatrix} \quad , \quad \eta^c = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_{123} \\ \xi_{124} \\ \xi_{134} \\ \xi_{234} \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Se adotamos, por comodidade,

$$\xi_0 \rightarrow \varphi_1$$

$$\xi_{12} \rightarrow \varphi_2$$

$$\xi_{13} \rightarrow \varphi_3$$

$$\xi_{14} \rightarrow \varphi_4$$

$$\xi_{23} \rightarrow \varphi_5$$

$$\xi_{24} \rightarrow \varphi_6$$

$$\xi_{34} \rightarrow \varphi_7$$

$$\xi_{1234} \rightarrow \varphi_8$$

e

$$\xi_0 \rightarrow \eta_1$$

$$\xi_{12} \rightarrow \eta_2$$

$$\xi_{13} \rightarrow \eta_3$$

$$\xi_{14} \rightarrow \eta_4$$

$$\xi_{23} \rightarrow \eta_5$$

$$\xi_{24} \rightarrow \eta_6$$

$$\xi_{34} \rightarrow \eta_7$$

$$\xi_{1234} \rightarrow \eta_8$$

então, podemos escrever:

$$\varphi^c = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_8 \end{pmatrix} , \quad \eta^c = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \eta_5 \\ \eta_6 \\ \eta_7 \\ \eta_8 \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{2.22}$$

que pode ser escrito, também, como segue:

$$\xi^c = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \eta_5 \\ \eta_6 \\ \eta_7 \\ \eta_8 \\ \varphi_8 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

2.3 Trialidade Tipo-Cartan (V-C-A)

Nesta seção, fazemos um estudo da trialidade tipo-Cartan (V-C-A), que envolverá vetores e espinores (quirais e antiquirais) de SO(4,4).

A razão fundamental para estudarmos a trialidade é a peculiar propriedade da álgebra de Lie D_4: só esta admitirá um grupo de simetrias não-trivial para o correspondente diagrama de Dynkin. Este grupo de simetrias é um grupo de permutações de 6 elementos não-Abelianos, S_3, que, como é bem conhecido, corresponde a um automorfismo externo de D_4 [7] [8].

Os espaços-tempo do tipo D=8 apresentam uma característica única e não compartilhada com os outros casos: o fato consiste em que os vetores, espinores quirais e antiquirais (V-C-A) possuem a mesma dimensionalidade , sendo todas de 8 componentes.

Até agora, não falamos do caráter de espinor comutante (bosônico) ou anticomutante (fermiônico). De qualquer modo, a trialidade pode ser interpretada como uma propriedade de invariância que permite introduzir o grupo de trialidade, $\mathcal{G}_{Tr}$, de simetria (que logo definiremos). Para semelhante interpretação, é necessário especificar se o espinor é comutante ou anticomutante.

Voltando a Cartan, discutiremos agora o caso de espinores comutantes, no estudo da trialidade tipo-Cartan (V-C-A).

Nosso objetivo agora é tentar construir a trialidade tipo-Cartan (V-C-A) em um espaço-tempo D=4t+4s na representação de Majorana-Weyl; para conseguir isto, usamos os resultados apresentados por E.Cartan [5]. Nosso objetivo poderá ser alcançado em 3 fases:

Na primera fase (I), apresentamos todos os objetos necessários para construir um termo bilinear e trilinear, assim como como os geradores do grupo que deixam invariantes estes dois termos. Toda esta informação pode ser encontrada no livro de E.Cartan [5].

Na fase (II), fazemos uma transformação em um dos objetos apresentados na fase (I), no semi-espinor de 1° tipo e no semi-espinor de 2° tipo. A transformação que fazemos deixará estes objetos como espinor quiral e espinor antiquiral. Esta transformação também afetará a matriz de conjugação de carga, assim como tambem as matrizes-Γ. Além disto, os geradores também mudam e verifica-se que deixam invariantes o bilinear e trilinear.

Na ultima fase(III), faz-se um conjunto de transformações, de modo que conseguimos construir uma representação de Majorana-Weyl. Nesta representação se constróem-se o termo bilinear e trilinear, assim como os geradores que deixam estes objctos invariantes.

I) Em seguida, revisaremos alguns resultados apresentados por E.Cartan [5] para a trialidade no caso de espinores comutantes. No estudo da trialidade tipo-Cartan (V-C-A), pode-se introduzir invariantes bilineares

$$B_V^c = X^{cT} X^c = X^{cT}_{m} (g_c{}^{-1})^{mn} X^c{}_{n}, \tag{2.24}$$

$$B_C^c = \varphi^{cT} \mathcal{C}_c \varphi^c, \tag{2.25}$$

$$B_A^c = \eta^{cT} \mathcal{C}_c \eta^c, \tag{2.26}$$

onde temos:

$$X^c = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Estas formas bilineares são invariantes com respeito ao grupo de rotação SO(4,4).

Agora, apresentamos os objetos necessários para construir o bilinear e trilinear dados por Cartan [5]. Daqui em diante os índices superior ou inferior "c" denotam Cartan.

Assim, temos a matriz de conjugação de carga: $\mathcal{C}_c$.

As matrizes-gamma de Cartan: Γ_c^m.

Também, temos a métrica de Cartan:

$$g_c = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}; \tag{2.28}$$

esta é uma matriz de dimensão-8 $\times$ 8.

Assim, no livro do Cartan, encontramos as seguintes formas bilineares:

$$B^c_V = X_1X_5 + X_2X_6 + X_3X_7 + X_4X_8, \tag{2.29}$$

$$B^c_C = \varphi_1\varphi_8 - \varphi_2\varphi_7 + \varphi_3\varphi_6 - \varphi_4, \varphi_5, \tag{2.30}$$

$$B^c_A = -\eta_1\eta_8 + \eta_2\eta_7 - \eta_3\eta_6 + \eta_4\eta_5. \tag{2.31}$$

Além disto, temos o termo trilinear (T) de Cartan:

$$T^c = \xi^{cT}\mathcal{C}_c\Gamma^m_c X^c_m \xi^c. \tag{2.32}$$

O grupo de invariâncias, $\mathcal{G}$, é introduzido como o grupo de transformações lineares que, atuando no vetor, semi-espinor de 1º tipo e 2º tipo, deixam invariante separadamente B^c_V, B^c_C, B^c_A e T^c.

Também, o grupo $\mathcal{G}$ pode ser completado com outras 5 transformações lineares que deixam invariante o bilinear total, B^c, e o trilinear, T^c:

$$B^c = B^c_V + B^c_C + B^c_A. \tag{2.33}$$

As novas transformações são obtidas dos geradores $\mathcal{P}^c$ e $\mathcal{R}^c$ [5], cuja ação simbolicamente é:

$$\mathcal{P}^c : \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{X}^c & \longrightarrow & \mathrm{X}^{c'} \\ \varphi^c & \longrightarrow & \eta^{c'} \\ \eta^c & \longrightarrow & \varphi^{c'} \end{array} \tag{2.34}$$

$$\mathcal{R}^c : \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{X}^c & \longrightarrow & \varphi^{c'} \\ \varphi^c & \longrightarrow & \mathrm{X}^{c'} \\ \eta^c & \longrightarrow & \eta^{c'}. \end{array} \tag{2.35}$$

No primeiro gerador, $\mathcal{P}^c$, observe-se que o vetor transforma-se em vetor e o semi-espinor de 1º tipo em semi-espinor de 2º tipo, e vice-versa.

No gerador $\mathcal{R}^c$, acontece algo mais interessante: o vetor trasforma-se em semi-espinor de 1º tipo e vice-versa, e o semi-espinor de 2º tipo transforma-se em semi-espinor de 2º tipo; note-se que se pode intercambiar de identidade um vetor e um semi-espinor, já que, neste caso o semi-espinor é comutante (bosônico) e a matriz de transformação é numérica. Isto não acontece no caso de semi-espinores anticomutantes (fermiônicos); para este caso, é preciso usar conceitos da supersimetria. Os outros geradores são construidos usando $\mathcal{P}^c$ e $\mathcal{R}^c$.

Assim formulamos o *Princípio da Trialidade* com 3 objetos (vetor, semi-espinor de 1º tipo e o semi-espinor de 2º tipo) que desempenham exatamente o mesmo papel. Os geradores formam um grupo que corresponde a permutações destas 3 classes de objetos e que deixam invariantes o bilinear ($B^c = B^c_{\mathrm{V}} + B^c_{\mathrm{C}} + B^c_{\mathrm{A}}$) e o trilinear ($T^c$).

II) Agora, construímos todos os objetos para Cartan Modificado (índice superior ou inferior "cm"); assim, nesta segunda etapa, fazemos uma transformação apenas sobre os semi-espinores de 1º tipo e 2º tipo, de modo que o semi-espinor de 1º tipo agora seja o espinor quiral e o semi-espinor de 2º tipo agora fique como espinor antiquiral; a transformação que executa esta tarefa é designada por D, é ortogonal, e encontra-se abaixo:

$$
\mathrm{D} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}. \tag{2.36}
$$

Esta matriz de transformação atuará nos objetos de Cartan como segue:

$$
\begin{aligned}
\xi^{\mathrm{c}} &\xrightarrow{\mathrm{D}} \xi^{\mathrm{cm}} = \mathrm{D}\xi^{\mathrm{c}}, \\
\mathcal{C}_{\mathrm{c}} &\xrightarrow{\mathrm{D}} \mathcal{C}_{\mathrm{cm}} = \mathrm{D}\mathcal{C}_{\mathrm{c}}\mathrm{D}^T, \\
\mathrm{X}^{\mathrm{c}} &\longrightarrow \mathrm{X}^{\mathrm{cm}} = \mathrm{X}^{\mathrm{c}}, \\
g_{\mathrm{c}} &\longrightarrow g_{\mathrm{cm}} = g_{\mathrm{c}}, \\
\Gamma^{\mu}_{\mathrm{c}} &\xrightarrow{\mathrm{D}} \Gamma^{\mu}_{\mathrm{cm}} = \mathrm{D}\Gamma^{\mu}_{\mathrm{c}}\mathrm{D}^T.
\end{aligned} \tag{2.37}
$$

$$
\varphi^{\mathrm{cm}} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \eta^{\mathrm{cm}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \\ \eta_5 \\ \eta_6 \\ \eta_7 \\ \eta_8 \end{pmatrix} , \quad \xi^{\mathrm{cm}} = \begin{pmatrix} \varphi^{\mathrm{cm}} \\ \eta^{\mathrm{cm}} \end{pmatrix} . \tag{2.38}
$$

A matriz de conjugação de carga, $\mathcal{C}_{\mathrm{cm}}$, agora é dada como: $\mathcal{C}_{\mathrm{cm}} = \mathrm{C}_{\mathrm{cm}}^{-1} \oplus \tilde{\mathrm{C}}_{\mathrm{cm}}^{-1}$, onde : $\tilde{\mathrm{C}}_{\mathrm{cm}}^{-1} = -\mathrm{C}_{\mathrm{cm}}^{-1}$

$$\mathrm{C}_{\mathrm{cm}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.39}$$

Logo, construímos o bilinear, B^{cm}, e o trilinear de Cartan modificado, T^{cm}, e se verifica que não muda frente à transformação D:

$$B^{\mathrm{cm}} \;=\; X_{\mathrm{m}}^{\mathrm{cm}T}(g_{\mathrm{cm}}{}^{-1})^{\mathrm{mn}}X_{\mathrm{n}}^{\mathrm{cm}} \;+\; \xi^{\mathrm{cm}T}\mathcal{C}_{\mathrm{cm}}\xi^{\mathrm{cm}}, \tag{2.40}$$

$$T^{\mathrm{cm}} \;=\; \xi^{\mathrm{cm}T}\mathcal{C}_{\mathrm{cm}}\Gamma_{\mathrm{cm}}^{\mathrm{m}}X_{\mathrm{m}}^{\mathrm{cm}}\xi^{\mathrm{cm}}. \tag{2.41}$$

O importante da transformação D é que esta deixa o espinor original de Cartan, ξ^{c}, em forma quiral e antiquiral; tudo isto ainda na métrica de Cartan, g_{c}.

Agora, fazemos a transformação de $\mathcal{P}^{\mathrm{c}}$ e $\mathcal{R}^{\mathrm{c}}$ em $\mathcal{P}^{\mathrm{cm}}$ e $\mathcal{R}^{\mathrm{cm}}$ (Cartan modificado). Para conseguirmos este efeito, precisamos de uma transformação, J, dada na forma seguinte:

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 \end{pmatrix} , \tag{2.42}$$

$$
\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \tag{2.43}
$$

$$
\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \tag{2.44}
$$

$$
\mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \tag{2.45}
$$

$$\mathbf{J}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.46}$$

Assim, obtemos:

$$\mathcal{P}^{\mathrm{cm}} = \mathrm{J}\mathcal{P}^{\mathrm{c}}\mathrm{J}^{-1} \tag{2.47}$$

$$\mathcal{R}^{\mathrm{cm}} = \mathrm{J}\mathcal{R}^{\mathrm{c}}\mathrm{J}^{-1}; \tag{2.48}$$

observe-se que $\mathcal{P}^{\mathrm{cm}}$ e $\mathcal{R}^{\mathrm{cm}}$ têm as formas:

$$\mathcal{P}^{\mathrm{cm}} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1^{\mathrm{cm}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{P}_2^{\mathrm{cm}} \\ \mathbf{0} & \mathcal{P}_3^{\mathrm{cm}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{2.49}$$

$$\mathcal{R}^{\mathrm{cm}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{R}_1^{\mathrm{cm}} & \mathbf{0} \\ \mathcal{R}_2^{\mathrm{cm}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{R}_3^{\mathrm{cm}} \end{pmatrix}. \tag{2.50}$$

É interessante observar que, agora, $\mathcal{P}^{\mathrm{cm}}$ e $\mathcal{R}^{\mathrm{cm}}$ podem ser descompostas em matrizes-blocos de 8 dimensões.

Logo, aplicamos as transformações (2.49) e (2.50) aos objetos (vetor, espinor quiral e vetor antiquiral) e se verifica que os termos B^{cm} e T^{cm} ficam invariantes.

III) Nesta ultima etapa, tentamos transformar os resultados anteriores que estão na métrica de Cartan, g_c, em nossa métrica espaço-temporal:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.51}$$

Para conseguir isto, vamos precisar fazer a transformação G, que também atuará no vetor:

$$g = \mathrm{G} g^{\mathrm{cm}} \mathrm{G}^T, \tag{2.52}$$

$$V^{\circ} = \mathrm{G} X^{\mathrm{cm}}, \tag{2.53}$$

onde a transformação G é dada da seguinte forma:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.54)$$

Outra matriz de transformação será H, que atua nos espinores quiral, antiquiral, conjugação de carga $\mathcal{C}_{\mathrm{cm}}$ e nas $\Gamma^{\mathrm{m}}_{\mathrm{cm}}$.

Definimos:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}. \qquad (2.55)$$

Então:

$$\Psi = \mathrm{H}\xi_{\mathrm{cm}}, \qquad (2.56)$$

$$\mathcal{C} = \mathrm{H}\mathcal{C}_{\mathrm{cm}}\mathrm{H}^{T}, \qquad (2.57)$$

$$\Gamma^{\mathrm{m}}_{\mathrm{o}} = \mathrm{H}\Gamma^{\mathrm{m}}_{\mathrm{cm}}\mathrm{H}^{T}, \qquad (2.58)$$

onde:

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} \mathrm{G}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{G}_2 \end{pmatrix}, \qquad (2.59)$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.60}$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.61}$$

e G_1 e G_2 satisfazem às condições seguintes:

$$\begin{aligned} C^{-1} &= G_1 C_{cm}^{-1} G_1^T &= g \\ \tilde{C}^{-1}, &= G_2 \tilde{C}_{cm}^{-1} G_2^T &= g. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Assim sendo, a matriz de conjugação de carga, $\mathcal{C}$, em nosso espaço de trabalho, D=4t+4s, fica:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & g \end{pmatrix}. \tag{2.63}$$

Por conseguinte, obtemos que as matrizes-$\Gamma_\circ^m$ satisfazem:

$$\begin{aligned} {\Gamma_\circ^i}^2 &= 1 \;\; \text{e simetricas}, \quad \forall i = 1,2,3,4; \\ {\Gamma_\circ^i}^2 &= -1 \;\; \text{e anti}-\text{simetricas}, \quad \forall i = 5,6,7,8. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Com estes objetos, podemos, então, construir os termos bilinear e trilinear:

$$B_\circ = V^{\circ T} g V^\circ + \Psi^T C \Psi, \tag{2.65}$$

$$T_\circ = \Psi^T C \Gamma_\circ{}^\mu V_\mu{}^\circ \Psi. \tag{2.66}$$

Para que as matrizes-$\Gamma_\circ^m$ estejam de acordo com a nossa métrica de trabalho, g,l é preciso que as Γ^m tipo-tempo (${\Gamma^i}^2 = \mathbf{1}$) sejam anti-simétricas e as Γ^m tipo- espaço (${\Gamma^i}^2 = -\mathbf{1}$) sejam simétricas; isto devido ao fato de que em nosso trabalho os espinores são comutantes, isto é, $\eta = -1$ [9]; e, como trabalhamos na representação tipo Majorana-Weyl, temos $\mathcal{A} = \mathcal{C}_{\mathrm{A}} = \Pi_i \Gamma^i$, onde i=1,2,3,4 (tipo tempo).

Então, o único modo de fazer com que os resultados para $\Gamma_\circ^m$ (2.64) sejam como desejamos, é necessário fazer o seguinte: multiplicamos todas as $\Gamma_\circ^m$ pela unidade imaginária "i", assim temos: i$\Gamma_\circ^m$, $\forall$m = 1,2,...,8

Logo, redefinimos:

$$\Gamma^1 = i\Gamma_\circ^5, \; \Gamma^2 = i\Gamma_\circ^6, \; \Gamma^3 = i\Gamma_\circ^7, \; \Gamma^4 = i\Gamma_\circ^8, \; \Gamma^5 = i\Gamma_\circ^1, \; \Gamma^6 = i\Gamma_\circ^2, \; \Gamma^7 = i\Gamma_\circ^3, \; \Gamma^8 = i\Gamma_\circ^4. \tag{2.67}$$

Verifica-se, então:

$$\begin{aligned} {\Gamma^i}^2 &= \mathbf{1}, \quad \text{anti}-\text{simetricas}, \quad \forall i = 1,2,3,4; \\ {\Gamma^i}^2 &= -\mathbf{1}, \quad \text{simetricas}, \quad \forall i = 5,6,7,8. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Já que as matrizes Γ^{m}_{o} foram modificadas, então os termos bilinear e trilinear também devem ser modificados; para conseguir isto, fazemos uso de uma matriz de transformação, S, que atua só na parte vetorial:

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.69}$$

Assim, temos:

$$V^{\circ} \longrightarrow V = \mathrm{S}V^{\circ}. \tag{2.70}$$

Finalmente, temos o termo bilinear (B), que assume a forma:

$$B = -V^{T}gV + \Psi^{T}\mathcal{C}\Psi. \tag{2.71}$$

Conseguimos, também, o termo trilinear em nosso espaço de trabalho, D=4t+4s:

$$T = \Psi^{T}\mathcal{C}\Gamma^{\mathrm{m}}V_{\mathrm{m}}\Psi = 2\phi^{T}\mathrm{C}^{-1}\sigma^{\mathrm{m}}\mathrm{V}_{\mathrm{m}}\chi. \tag{2.72}$$

Apresentamos, agora, os geradores $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}$ que deixam invariante o termo bilinear (B) eq(2.71) e o termo trilinear (T) eq(2.72).

Já temos $\mathcal{P}^{\mathrm{cm}}$ e $\mathcal{R}^{\mathrm{cm}}$, eq(2.49) e eq(2.50) respectivamente; para conseguir $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}$, fazemos o seguinte:

lembremos que G atua sobre vetores e G_1 e G_2 sobre espinores quirais e antiquirais. Então, construímos K:

$$K = \begin{pmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & 0 \\ 0 & 0 & G_2 \end{pmatrix}. \tag{2.73}$$

Assim, temos:

$$\mathcal{P}_0 \;=\; K\mathcal{P}^{cm}K^{-1} \tag{2.74}$$

$$\mathcal{R}_0 \;=\; K\mathcal{R}^{cm}K^{-1}; \tag{2.75}$$

porém, os geradores ainda não satisfazem às condições para que fechem o grupo S_3; é preciso que seu quadrado seja igual à identidade; então, usando W_1 e W_1 para normalizar

$$W_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.76}$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.77}$$

obtemos:

$$\mathcal{P}_{00} \;=\; W_1\mathcal{P}_0, \tag{2.78}$$

$$\mathcal{R}_{00} \;=\; W_2\mathcal{R}_0. \tag{2.79}$$

Assim, a forma dos geradores $\mathcal{P}_{00}$ e $\mathcal{R}_{00}$ é:

$$\mathcal{P}_{00} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{001} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{P}_{002} \\ \mathbf{0} & \mathcal{P}_{003} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{2.80}$$

$$\mathcal{R}_{00} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{R}_{001} & \mathbf{0} \\ \mathcal{R}_{002} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{R}_{003} \end{pmatrix}, \tag{2.81}$$

onde agora:

$$\mathcal{P}_{00}^2 = \mathbf{1}, \tag{2.82}$$

$$\mathcal{R}_{00}^2 = \mathbf{1}. \tag{2.83}$$

Entretanto, estes geradores, $\mathcal{P}_{00}$ e $\mathcal{R}_{00}$, não deixam invariante o bilinear (B) e o trilinear (T) eq(2.71) e eq(2.72), respectivamente; isto acontece porque fizemos um reordenamento das matrizes Γ_0^m; então, para que o bilinear e trilinear fiquem invariantes, fazemos uso da matriz S, eq(2.69). Temos os casos:

Para $\mathcal{P}$, construímos,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \mathrm{S}\mathcal{P}_{001}\mathrm{S}^{-1}, \\ \mathcal{P}_2 &= \mathcal{P}_{002}, \\ \mathcal{P}_3 &= \mathcal{P}_{003}. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Assim, finalmente, obtemos o gerador $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P}_2 \\ 0 & \mathcal{P}_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.85}$$

onde $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_3$ são apresentados explicitamente no Apêndice B.

Se deixarmos que $\mathcal{P}$ atue sobre o vetor (V), espinor quiral (ϕ) e espinor antiquiral (χ), obtemos:

$$\mathcal{P}: \quad \begin{aligned} V' &= \mathcal{P}_1 V \\ \phi' &= \mathcal{P}_2 \chi \\ \chi' &= \mathcal{P}_3 \phi. \end{aligned} \tag{2.86}$$

Verifica-se que os termos bilinear (B) e trilinear (T) ficam invariantes sob a atuação do gerador $\mathcal{P}$, em nosso espaço de trabalho, D=4t+4s, na representação tipo Majorana-Weyl [9].

Para $\mathcal{R}$, construímos:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \mathrm{S}\mathcal{R}_{001}, \\ \mathcal{R}_2 &= \mathcal{R}_{002}\mathrm{S}, \\ \mathcal{R}_3 &= \mathcal{R}_{003}. \end{aligned} \tag{2.87}$$

Assim, finalmente obtemos o gerador $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{R}_1 & 0 \\ \mathcal{R}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_3 \end{pmatrix}, \tag{2.88}$$

onde $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}_3$ são apresentados explicitamente no Apêndice B.

Neste caso, também deixaremos que $\mathcal{R}$ atue sobre o vetor (V), espinor quiral (ϕ) e espinor antiquiral (χ); assim, obtemos:

$$\mathcal{R}: \quad \begin{aligned} V' &= \mathcal{R}_1\phi, \\ \phi' &= \mathcal{R}_2 V, \\ \chi' &= \mathcal{R}_3\chi. \end{aligned} \tag{2.89}$$

Verifica-se também, neste caso, que os termos bilinear (B) e trilinear (T) ficam invariantes sob a atuação do gerador $\mathcal{R}$, em nosso espaço de trabalho, D=4t+4s, e na representação tipo Majorana-Weyl [9].

Nossa construção de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}$ satisfazem às relações:

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{R}^2 = \mathbf{1}, \quad (\mathcal{P}\mathcal{R})^3 = \mathbf{1}, \tag{2.90}$$

mostrando, assim, sua natureza de gerador de S_3.

Desta forma, finalmente, os elementos de S_3 são: $\mathbf{1}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{P}\mathcal{R}\mathcal{P}$, $\mathcal{R}\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}\mathcal{R}$.

Finalmente reformulamos o *Princípio da Trialidade Tipo-Cartan* (V-C-A) em nosso espaço de trabalho D=4t+4s.

Assim, temos que os objetos: vetor, espinor quiral e o espinor antiquiral desempenham exatamente o mesmo papel. Achamos 6 elementos que deixam os termos bilinear (B) e trilinear (T) invariantes frente a permutações dos objetos, estos 6 elementos formam o grupo S_3 [9], que como é conhecido é um automorfismo externo do grupo D_4. Este é o grupo Spin(8) simplesmente conexo que é, por sua vez, o grupo de recubrimento do grupo de rotação SO(8) ou SO(4,4), quer dizer a algebra de Lie SO(4,4)= D_4 e esta possui uma simetría conhecida como trialidade, descrita pelos 6 elementos de seu automorfismo externo.

Observe-se que o princípio da trialidade é aplicado aos aspetos geométricos e algébricos da simetría S_3 que SO(8) e SO(4,4) apresenta [7].

Pode-se, agora, construir o grupo de trialidade $\mathcal{G}_{\mathrm{Tr}}$. Lembremos que o grupo de invariâncias, $\mathcal{G}$, é um grupo de transformações lineares e homogêneas que atua nos objetos (vetor, espinor quiral e antiquiral) e que deixa invariante separadamente B_V, B_C, B_A e T. Então, podemos definir o grupo $\mathcal{G}_{\mathrm{Tr}}$ como o produto semi direto de $\mathcal{G}$ pelo grupo finito S_3:

$$\mathcal{G}_{Tr} = \mathcal{G} \otimes_S S_3. \tag{2.91}$$

Há uma arbitrariedade na escolha de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}$, já que qualquer gerador transformado $\hat{\mathcal{P}} = \mathrm{h}\mathcal{P}\mathrm{h}^{-1}$, $\hat{\mathcal{R}} = \mathrm{h}\mathcal{R}\mathrm{h}^{-1}$ com $\mathrm{h} \in \mathcal{G}_{\mathrm{Tr}}$, satisfaz ás mesmas propriedades, e podem igualmente ser considerados geradores de S_3. É interesante mostrar que sob uma transformação de Lorentz efetuada por $e^{\omega\Sigma}$, os geradores $\mathcal{P}$ ($\mathcal{R}$) são mapeados em $\mathcal{P}' = e^{\omega\Sigma}\mathcal{P}e^{\omega\Sigma^{-1}}$ (e respetivamente $\mathcal{R}' = e^{\omega\Sigma}\mathcal{R}e^{\omega\Sigma^{-1}}$).

Concluindo, neste capítulo foram apresentados os dados necessários para construir a Trialidade Tipo-Cartan (V-C-A) em um espaço-tempo de Majorana-Weyl, D=4t+4s, em uma representação Majorana-Weyl onde as matrizes-Γ são $4_S + 4_A$; usando os dados de E. Cartan conseguimos construir os termos bilinear (B) e trilinear (T) em nosso espaço de trabalho. Conseguimos, também, construir um conjunto de elementos que deixam estes termos invariantes. Estes elementos formam um grupo denominado S_3, que é um grupo de permutações de 3 elementos , que são vetor, espinor quiral e o espinor antiquiral. Convém observar que os espinores em nosso trabalho são considerados bosônicos (comutantes); é fácil, então, neste caso, transformar vetores em espinores e vice-versa, já que são todos objetos bosônicos.

Pode-se construir a trialidade tipo-Cartan (V-C-A) considerando-se apenas os termos bilineares [10]. Neste caso, por exemplo, um grupo de rotação pode deixar invariante cada um dos termos bilineares; esta é uma versão mais restrita, já que não contém o termo trilinear.

No contexto de espinores fermiônicos (anticomutantes), o conceito de trialidade tipo-

Cartan (V-C-A) pode ser usado em teorias de supercordas [11] para encontrar uma relação entre o formalismo de Neveu-Schwarz-Ramond (NSR) e o formalismo de Green-Schwarz (GS). Isto é possível graças à propriedade de trialidade de SO(8) e ao método de bosonização de Witten [12]. Este é um metodo alternativo àquele desenvolvido por Green-Schwarz [8].

Capítulo 3

Trialidade Tipo-Espaço-Tempo

Neste capítulo, discutiremos a "Trialidade Tipo-Espaço-Tempo" na representação de Majorana-Weyl. A trialidade havia sido estudada no Capítulo 2, no contexto de Cartan, a que denominamos Trialidade Tipo-Cartan (V-C-A); agora, as propriedades de trialidade podem ser associadas a outras estruturas; com o propósito de clarificar, apresentamos todos os possiveles espaços-tempo de Majorana-Weyl (MWS) em D=8. Da eq(1.46) com $\eta = \pm 1$, apresentam-se 3 casos: D=4t+4s, D=8t+0s e D=0t+8s; estes são os únicos espaços-tempo de Majorana-Weyl em D=8 dimensões.

3.1 Representações de Majorana-Weyl em D=8t+0s e D=0t+8s

A seguir, construiremos todas as representações de Weyl do tipo-Majorana. Usando a eq(1.46) e a tabela apresentada no Capítulo 1, temos duas situações bem-definidas:

$\underline{\eta = 1}$

• Para D=4t+4s, as matrizes-Γ são:

$4_S + 4_A$, $\mathcal{A} = \mathcal{C}_S = \Pi_i \Gamma^i_S$, onde as matrizes-$\Gamma$ tipo-tempo são todas simétricas.

• Para D=8t+0s, as matrizes-Γ são:

$8_S + 0_A$, $\mathcal{A} = \mathcal{C}_S = \Gamma^9$, onde as matrizes-$\Gamma$ tipo-tempo são todas simétricas.

sendo: $\Gamma^9 = \Gamma^1\Gamma^2 ... \Gamma^8$

• Para D=0t+8s, as matrizes-Γ são:

$0_S + 8_A$, $\mathcal{A} = \mathcal{C}_S = \mathbf{1}$, onde as matrizes-$\Gamma$ tipo-tempo são simétricas.

$\underline{\eta = -1}$

• Para D=4t+4s, as matrizes-Γ são:

$4_A + 4_S$, $\mathcal{A} = \mathcal{C}_A = \Pi_i \Gamma^i_A$, onde as matrizes-$\Gamma$ tipo-tempo são todas anti-simétricas.

• Para D=8t+0s, as matrizes-Γ são:

$8_A + 0_S$, $\mathcal{A} = \mathcal{C}_A = \Gamma^9$, onde as matrizes-$\Gamma$ tipo-tempo são todas anti-simétricas.

• Para D=0t+8s, as matrizes-Γ são:

$0_A + 8_S$, $\mathcal{A} = \mathcal{C}_A = \mathbf{1}$, onde as matrizes-$\Gamma$ tipo-tempo são anti-simétricas.

Agora, os 3 tipos de espaços-tempo de Majorana-Weyl podem-se relacionar independente da estatistica ($\eta = \pm 1$); as métricas destes espaços são:

Para o espaço-tempo: D=4t+4s

$$g_{44} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Para o espaço-tempo: D=8t+0s

$$
g_{80} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{3.2}
$$

Para espaço-tempo: D=0t+8s

$$
g_{08} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{3.3}
$$

Temos em mente construir as "matrizes-bridge" que fazem uma ligação entre estes espaços.

Assim, temos as "matrizes-bridge":

- $\mathrm{K_{V1}}$

$$
g_{44} \xrightarrow{\mathrm{K_{V1}}} g_{80} \implies g_{80} = \mathrm{K_{V1}}\, g_{44}\, \mathrm{K_{V1}^{T}} \tag{3.4}
$$

$$\mathrm{K_{V1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_y \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

onde σ_y é uma matriz de Pauli.

• $\mathrm{K_{V2}}$

$$g_{44} \xrightarrow{\mathrm{K_{V2}}} g_{08} \implies g_{08} = \mathrm{K_{V2}}\ g_{44}\ \mathrm{K_{V2}^{T}} \tag{3.6}$$

$$\mathrm{K_{V2}} = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

• $\mathrm{K_{V3}}$

$$g_{08} \xrightarrow{\mathrm{K_{V3}}} g_{80} \implies g_{80} = \mathrm{K_{V3}}\ g_{08}\ \mathrm{K_{V3}^{T}} \tag{3.8}$$

$$\mathrm{K_{V3}} = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_y \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Desta forma, conseguimos ter uma relação entre os 3 tipos de espaços-tempo permitidos em D=8 (D=4t+4s, D=8t+0s e D=0t+8s).

3.2 Trialidade Tipo-Espaço-Tempo

Fazendo uso dos resultados obtidos para D=4t+4s, construímos os diversos objetos (matrizes-Γ, $\mathcal{C}$, V, ϕ, χ) nos espaços-tempo D=8t+0s e D=0t+8s.

Os objetos em D=4t+4s são assim definidos:

Γ^{μ}_{44}, $\mathcal{C}_{44}$, V_{44}, ϕ_{44}, χ_{44}

Em D=8t+0s, temos:

Γ^{μ}_{80}, $\mathcal{C}_{80}$, V_{80}, ϕ_{80}, χ_{80}

Em D=0t+8s, temos:

Γ^{μ}_{08}, $\mathcal{C}_{08}$, V_{08}, ϕ_{08}, χ_{08}

- 1°Caso:

$$\begin{array}{ccc} D = 4t+4s & & D = 8t+0s \\ V_{44} & \xrightarrow{\mathrm{K_{V1}}} & V_{80} = (\mathrm{K}^T_{\mathrm{V1}})^{-1} V_{44} \\ \phi_{44} & \xrightarrow{\mathrm{K_{C1}}} & \phi_{80} = (\mathrm{K}^T_{\mathrm{C1}})^{-1} \phi_{44}, \\ \chi_{44} & \xrightarrow{\mathrm{K_{A1}}} & \chi_{80} = (\mathrm{K}^T_{\mathrm{A1}})^{-1} \chi_{44}. \\ \mathcal{C}_{44} & \xrightarrow{\mathrm{H_1}} & \mathcal{C}_{80} = \mathrm{H_1} \mathcal{C}_{44} \mathrm{H}^T_1, \\ \Gamma^{\mu}_{44} & \xrightarrow{\mathrm{H_1},\ \mathrm{K_{V1}}} & \Gamma^{\mu}_{80} = (\mathrm{H}^T_1)^{-1} \Gamma^{\nu}_{44} \mathrm{H}^T_1 (\mathrm{K}^T_{\mathrm{V1}})_{\nu}{}^{\mu} \end{array} \tag{3.10}$$

onde:

$$\mathrm{H_1} = \begin{pmatrix} \mathrm{K_{C1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{K_{A1}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_{80} = \begin{pmatrix} \mathrm{C}^{-1}_{80} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathrm{C}}^{-1}_{80} \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

No Apêndice C, são apresentadas as expresões para $\mathrm{K_{V1}}$, $\mathrm{K_{C1}}$, $\mathrm{K_{A1}}$, $\mathcal{C}_{80}$ e Γ^{μ}_{80}

Então, verifica-se que os termos bilinear e trilinear em D=8t+0s assumem a forma:

$$\mathrm{B}_{80} = -V^T_{80} g_{80} V_{80} + \phi^T_{80} \mathrm{C}^{-1}_{80} \phi_{80} + \chi^T_{80} \tilde{\mathrm{C}}^{-1}_{80} \chi_{80} \tag{3.12}$$

$$\mathrm{T}_{80} = \Psi_{80}^T \mathcal{C}_{80} \Gamma_{80}^\mu (V_{80})_\mu \Psi_{80} \tag{3.13}$$

• 2ºCaso:

$$\begin{array}{lcl}
D = 4t + 4s & & D = 0t + 8s \\
V_{44} & \xrightarrow{\mathrm{K_{V2}}} & V_{08} = (\mathrm{K}_{\mathrm{V2}}^T)^{-1} V_{44} \\
\phi_{44} & \xrightarrow{\mathrm{K_{C2}}} & \phi_{08} = (\mathrm{K}_{\mathrm{C2}}^T)^{-1} \phi_{44}, \\
\chi_{44} & \xrightarrow{\mathrm{K_{A2}}} & \chi_{08} = (\mathrm{K}_{\mathrm{A2}}^T)^{-1} \chi_{44}. \\
\mathcal{C}_{44} & \xrightarrow{\mathrm{H_2}} & \mathcal{C}_{08} = \mathrm{H}_2 \mathcal{C}_{44} \mathrm{H}_2^T, \\
\Gamma_{44}^\mu & \xrightarrow{\mathrm{H_2,\, K_{V1}}} & \Gamma_{08}^\mu = (\mathrm{H}_2^T)^{-1} \Gamma_{44}^\nu \mathrm{H}_2^T (\mathrm{K}_{\mathrm{V2}}^T)_\nu{}^\mu
\end{array} \tag{3.14}$$

onde:

$$\mathrm{H}_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{K_{C2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{K_{A2}} \end{pmatrix}, \ \mathcal{C}_{08} = \begin{pmatrix} \mathrm{C}_{08}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathrm{C}}_{08}^{-1} \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

No Apêndice D são fornecidas as matrizes $\mathrm{K_{V2}}$, $\mathrm{K_{C2}}$, $\mathrm{K_{A2}}$, $\mathcal{C}_{08}$ e Γ_{08}^μ.

Com isto, verifica-se que os termos bilinear e trilinear em D=0t+8s tomam a forma:

$$\mathrm{B}_{08} = -V_{08}^T g_{08} V_{08} + \phi_{08}^T \mathrm{C}_{08}^{-1} \phi_{08} + \chi_{08}^T \tilde{\mathrm{C}}_{08}^{-1} \chi_{08}, \tag{3.16}$$

$$\mathrm{T}_{08} = \Psi_{08}^T \mathcal{C}_{08} \Gamma_{08}^\mu (V_{08})_\mu \Psi_{08}. \tag{3.17}$$

Da mesma maneira pode-se construir uma transformação de D=8t+0s $\longrightarrow$ D=0t+8s.

Agora, o importante destes resultados é que conseguimos interrelacionar todos os elementos necessários para construir uma teoria nas três únicas métricas que se apresentam no caso D=8 dimensões na representação de Majorana-Weyl; ou seja, só é preciso construir uma teoria em uma das três métricas e as teorias nas outras métricas podem automaticamente ser construídas isto em D=8 dimensões.

Temos 3 métricas diferentes para o espaço D=8 dimensões e já construímos as transformações que relacionam os objetos nestes 3 casos; agora, construímos um novo gerador a que denominamos $\mathcal{P}_{\mathrm{et}}$.

Seja o gerador $\mathcal{P}_{\mathrm{et}}$:

$$\mathcal{P}_{\mathrm{et}}: \quad \begin{array}{rcl} 4t+4s & \longmapsto & 4t+4s \\ 8t+0s & \longmapsto & 0t+8s \\ 0t+8s & \longmapsto & 8t+0s \end{array} \tag{3.18}$$

• As matrizes-bridge que fazem o passagem: $4t+4s \longmapsto 4t+4s$ são: $\mathrm{K_V} = \mathrm{K_C} = \mathrm{K_A} = \mathbf{1}$

• As matrizes-bridge que fazem o passagem: $8t+0s \longmapsto 0t+8s$ são: $\mathrm{K_{V3}}, \mathrm{K_{C3}}, \mathrm{K_{A3}}$ onde:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{K_{V3}} & = & \sigma_{\mathrm{y}} \oplus \sigma_{\mathrm{y}} \oplus \sigma_{\mathrm{y}} \oplus \sigma_{\mathrm{y}} \\ \mathrm{K_{C3}} & = & \mathbf{1}_8 \\ \mathrm{K_{A3}} & = & \sigma_{\mathrm{y}} \oplus \sigma_{\mathrm{y}} \oplus \sigma_{\mathrm{y}} \oplus \sigma_{\mathrm{y}} \end{array} \tag{3.19}$$

• No caso, das matrizes que faz o passagem: $0t+8s \longmapsto 8t+0s$ são os mesmos dados acima, $\mathrm{K_{V3}}$, $\mathrm{K_{C3}}$ e $\mathrm{K_{A3}}$

Verifica-se que $\mathcal{P}_{\mathrm{et}}^2 = \mathbf{1}$

Agora construímos o gerador $\mathcal{R}_{\mathrm{et}}$:

$$\mathcal{R}_{\mathrm{et}}: \quad \begin{array}{rcl} 4t+4s & \longmapsto & 8t+0s \\ 8t+0s & \longmapsto & 4t+4s \\ 0t+8s & \longmapsto & 0t+8s \end{array} \tag{3.20}$$

• As matrizes-bridge que fazem a passagem: $4t+4s \longmapsto 8t+0s$ (ver Apêndice C) são: $\mathrm{K_{V1}}$, $\mathrm{K_{C1}}$ e $\mathrm{K_{A1}}$

• As matrizes-bridge que fazem a passagem: $8t + 0s \longmapsto 4t + 4s$ são também : $\mathrm{K_{V1}}$, $\mathrm{K_{C1}}$ e $\mathrm{K_{A1}}$

Finalmente as matrizes que fazem o passagem: $0t + 8s \longmapsto 0t + 8s$ $\mathrm{K_V} = \mathrm{K_C} = \mathrm{K_A} = \mathbf{1}$

Neste caso: $\mathcal{R}_{\mathrm{et}}^2 = \mathbf{1}$

Logo verifica-se [13] que: $(\mathcal{P}_{\mathrm{et}}\mathcal{R}_{\mathrm{et}})^3 = \mathbf{1}$

Então, pode-se construir um grupo de permutações S_3 com os geradores $\mathcal{P}_{\mathrm{et}}$ e $\mathcal{R}_{\mathrm{et}}$.

A esta propriedade denominamos "*Trialidade Tipo-Espaço-Tempo*", que está em um contexto diferente da trialidade tipo-Cartan (V-C-A); esta nova trialidade permuta via o grupo S_3 as 3 distintas assinaturas (4t+4s), (8t+0s) e (0t+8s) no espaço de Majorana-Weyl.

Um resultado importante é que as relações entre os elementos das 3 métricas podem ser construídas sem levar em conta se os espinores são fermiônicos ou bosônicos; por esta razão estes resultados são mais gerais que a trialidade tipo-Cartan (V-C-A), que envolve espinores bosônicos em nosso trabalho.

3.2.1 Trialidade Tipo-Cartan (V-C-A) em D=8t+0s e D=0t+8s

Lembremos que, no Capítulo 2, construímos a trialidade tipo-Cartan (V-C-A) em D=4t+4s e, agora, como temos um modo de relacionar as 3 métricas e os objetos que vivem nestes espaços, é lógico que também podemos construir a trialidade-tipo-Cartan (V-C-A) em D=8t+0s e D=0t+8s.

Tentemos, então, construir os geradores $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}$ nos espaços D=8t+0s e D=0t+8s; com esta finalidade consideremos o indice "y" para D=4t+4s e "z" para um dos casos D=8t+0s ou D=0t+8s.

Consideremos 2 casos:

1) y: D=4t+4s

z: D=8t+0s

Agora, desejamos achar os geradores $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}$ em D=8t+0s, usando os geradores achados em D=4t+4s

Então considerando as eqs(2.85) e (2.88),

$$\mathcal{P}_{\rm y} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{\rm y1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P}_{\rm y2} \\ 0 & \mathcal{P}_{\rm y3} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

$$\mathcal{R}_{\rm y} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{R}_{\rm y1} & 0 \\ \mathcal{R}_{\rm y2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_{\rm y3}, \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

Então, para $\mathcal{P}$ em "y" e "z", temos:

$$\begin{array}{lllll} V_{\rm y} \longrightarrow V_{\rm y}' = \mathcal{P}_{\rm y1} V_{\rm y} & & V_{\rm z} \longrightarrow V_{\rm z}' = \mathcal{P}_{\rm z1} V_{\rm z} \\ \phi_{\rm y} \longrightarrow \phi_{\rm y}' = \mathcal{P}_{\rm y2} \chi_{\rm y} & , & \phi_{\rm z} \longrightarrow \phi_{\rm z}' = \mathcal{P}_{\rm z2} \chi_{\rm z} \\ \chi_{\rm y} \longrightarrow \chi_{\rm y}' = \mathcal{P}_{\rm y3} \phi_{\rm y}. & & \chi_{\rm z} \longrightarrow \chi_{\rm z}' = \mathcal{P}_{\rm z3} \phi_{\rm z}. \end{array} \tag{3.23}$$

<u>Para o vetor (V)</u>: Construímos a relação que existe entre $\mathcal{P}_{\rm y1}$ e $\mathcal{P}_{\rm z1}$:

$$\underbrace{(\mathrm{K}_{\rm V1}^T)^{-1} V_{\rm y}}_{V_{\rm z}} \longrightarrow \underbrace{(\mathrm{K}_{\rm V1}^T)^{-1} V_{\rm y}'}_{V_{\rm z}'} = \underbrace{(\mathrm{K}_{\rm V1}^T)^{-1} \mathcal{P}_{\rm y1} (\mathrm{K}_{\rm V1}^T)}_{\mathcal{P}_{\rm z1}} \underbrace{(\mathrm{K}_{\rm V1}^T)^{-1} V_{\rm y}}_{V_{\rm z}} \tag{3.24}$$

Assim, obtemos:

$$\mathcal{P}_{\rm z1} = (\mathrm{K}_{\rm V1}^T)^{-1} \mathcal{P}_{\rm y1} (\mathrm{K}_{\rm V1}^T) \tag{3.25}$$

<u>Para o espinor quiral (ϕ)</u>: Também construímos a relação que existe entre $\mathcal{P}_{\rm y2}$ e $\mathcal{P}_{\rm z2}$

$$\begin{array}{ccccc} \underbrace{(\mathrm{K}_{\mathrm{C1}}^{T})^{-1}\phi_{\mathrm{y}}} & \longrightarrow & \underbrace{(\mathrm{K}_{\mathrm{C1}}^{T})^{-1}\phi_{\mathrm{y}}^{'}} & = & \underbrace{(\mathrm{K}_{\mathrm{C1}}^{T})^{-1}\mathcal{P}_{\mathrm{y2}}(\mathrm{K}_{\mathrm{A1}}^{T})}\underbrace{(\mathrm{K}_{\mathrm{A1}}^{T})^{-1}\chi_{\mathrm{y}}} \\ \phi_{\mathrm{z}} & \longrightarrow & \phi_{\mathrm{z}}^{'} & = & \mathcal{P}_{\mathrm{z2}}\chi_{\mathrm{z}} \end{array} \tag{3.26}$$

Assim, obtemos:

$$\mathcal{P}_{\mathrm{z2}} = (\mathrm{K}_{\mathrm{C1}}^{T})^{-1}\mathcal{P}_{\mathrm{y2}}(\mathrm{K}_{\mathrm{A1}}^{T}) \tag{3.27}$$

Para o espinor antiquiral (χ): Achamos a relação que existe entre $\mathcal{P}_{\mathrm{y3}}$ e $\mathcal{P}_{\mathrm{z3}}$

$$\begin{array}{ccccc} \underbrace{(\mathrm{K}_{\mathrm{A1}}^{T})^{-1}\chi_{\mathrm{y}}} & \longrightarrow & \underbrace{(\mathrm{K}_{\mathrm{A1}}^{T})^{-1}\chi_{\mathrm{y}}^{'}} & = & \underbrace{(\mathrm{K}_{\mathrm{A1}}^{T})^{-1}\mathcal{P}_{\mathrm{y3}}(\mathrm{K}_{\mathrm{C1}}^{T})}\underbrace{(\mathrm{K}_{\mathrm{C1}}^{T})^{-1}\phi_{\mathrm{y}}} \\ \chi_{\mathrm{z}} & \longrightarrow & \chi_{\mathrm{z}}^{'} & = & \mathcal{P}_{\mathrm{z3}}\phi_{\mathrm{z}} \end{array} \tag{3.28}$$

Assim, obtemos:

$$\mathcal{P}_{\mathrm{z3}} = (\mathrm{K}_{\mathrm{A1}}^{T})^{-1}\mathcal{P}_{\mathrm{y3}}(\mathrm{K}_{\mathrm{C1}}^{T}). \tag{3.29}$$

Destes resultados constrói-se $\mathcal{P}_{\mathrm{z}}$:

como z: D=8t+0s

$$\mathcal{P}_{80} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{801} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{P}_{802} \\ \mathbf{0} & \mathcal{P}_{803} & \mathbf{0} \end{pmatrix}; \tag{3.30}$$

este resultado é mostrado no Apêndice C. Verifica-se que, ao fazermos uma transformação no vetor, no espinor quiral e no espinor antiquiral de forma semelhante à eq(2.86), os termos bilinear (B_{80}) e trilinear (T_{80}) ficam invariantes sob a atuação do gerador $\mathcal{P}_{80}$ em nosso novo espaço de trabalho, D=8t+0s, na representação de Majorana-Weyl.

Para $\mathcal{R}$ em "y" e "z", temos:

$$
\begin{array}{llllllll}
V_{\mathrm{y}} & \longrightarrow & V_{\mathrm{y}}' & = & \mathcal{R}_{\mathrm{y}1}\phi_{\mathrm{y}}, & V_{\mathrm{z}} & \longrightarrow & V_{\mathrm{z}}' = \mathcal{R}_{\mathrm{z}1}\phi_{\mathrm{z}}, \\
\phi_{\mathrm{y}} & \longrightarrow & \phi_{\mathrm{y}}' & = & \mathcal{R}_{\mathrm{y}2}V_{\mathrm{y}}, & \phi_{\mathrm{z}} & \longrightarrow & \phi_{\mathrm{z}}' = \mathcal{R}_{\mathrm{z}2}V_{\mathrm{z}}, \\
\chi_{\mathrm{y}} & \longrightarrow & \chi_{\mathrm{y}}' & = & \mathcal{R}_{\mathrm{y}3}\chi_{\mathrm{y}}. & \chi_{\mathrm{z}} & \longrightarrow & \chi_{\mathrm{z}}' = \mathcal{R}_{\mathrm{z}3}\chi_{\mathrm{z}}.
\end{array}
\tag{3.31}
$$

Para o vetor (V): construímos a relação que existe entre $\mathcal{R}_{\mathrm{y}1}$ e $\mathcal{R}_{\mathrm{z}1}$:

$$
\underbrace{(\mathrm{K}_{\mathrm{V}1}^{T})^{-1}V_{\mathrm{y}}}_{V_{\mathrm{z}}} \longrightarrow \underbrace{(\mathrm{K}_{\mathrm{V}1}^{T})^{-1}V_{\mathrm{y}}'}_{V_{\mathrm{z}}'} = \underbrace{\underbrace{(\mathrm{K}_{\mathrm{V}1}^{T})^{-1}\mathcal{R}_{\mathrm{y}1}(\mathrm{K}_{\mathrm{C}1}^{T})}\underbrace{(\mathrm{K}_{\mathrm{C}1}^{T})^{-1}\phi_{\mathrm{y}}}}_{\mathcal{P}_{\mathrm{z}1}V_{\mathrm{z}}}
\tag{3.32}
$$

Assim, obtemos:

$$
\mathcal{R}_{\mathrm{z}1} = (\mathrm{K}_{\mathrm{V}1}^{T})^{-1}\mathcal{R}_{\mathrm{y}1}(\mathrm{K}_{\mathrm{C}1}^{T}). \tag{3.33}
$$

Para o espinor quiral (ϕ): também, construímos a relação que existe entre $\mathcal{R}_{\mathrm{y}2}$ e $\mathcal{R}_{\mathrm{z}2}$

$$
\underbrace{(\mathrm{K}_{\mathrm{C}1}^{T})^{-1}\phi_{\mathrm{y}}}_{\phi_{\mathrm{z}}} \longrightarrow \underbrace{(\mathrm{K}_{\mathrm{C}1}^{T})^{-1}\phi_{\mathrm{y}}'}_{\phi_{\mathrm{z}}'} = \underbrace{\underbrace{(\mathrm{K}_{\mathrm{C}1}^{T})^{-1}\mathcal{R}_{\mathrm{y}2}(\mathrm{K}_{\mathrm{V}1}^{T})}\underbrace{(\mathrm{K}_{\mathrm{V}1}^{T})^{-1}V_{\mathrm{y}}}}_{\mathcal{R}_{\mathrm{z}2}V_{\mathrm{z}}}
\tag{3.34}
$$

Assim, obtemos:

$$
\mathcal{R}_{\mathrm{z}2} = (\mathrm{K}_{\mathrm{C}1}^{T})^{-1}\mathcal{R}_{\mathrm{y}2}(\mathrm{K}_{\mathrm{V}1}^{T}). \tag{3.35}
$$

Para o espinor antiquiral (χ): também, construímos a relação que existe entre $\mathcal{R}_{\mathrm{y}3}$ e $\mathcal{R}_{\mathrm{z}3}$

$$
\underbrace{(\mathrm{K}_{\mathrm{A}1}^{T})^{-1}\chi_{\mathrm{y}}}_{\chi_{\mathrm{z}}} \longrightarrow \underbrace{(\mathrm{K}_{\mathrm{A}1}^{T})^{-1}\chi_{\mathrm{y}}'}_{\chi_{\mathrm{z}}'} = \underbrace{\underbrace{(\mathrm{K}_{\mathrm{A}1}^{T})^{-1}\mathcal{R}_{\mathrm{y}3}(\mathrm{K}_{\mathrm{A}1}^{T})}\underbrace{(\mathrm{K}_{\mathrm{A}1}^{T})^{-1}\phi_{\mathrm{y}}}}_{\mathcal{R}_{\mathrm{z}3}\phi_{\mathrm{z}}}
\tag{3.36}
$$

Assim, obtemos:

$$
\mathcal{R}_{\mathrm{z}3} = (\mathrm{K}_{\mathrm{A}1}^{T})^{-1}\mathcal{R}_{\mathrm{y}3}(\mathrm{K}_{\mathrm{A}1}^{T}). \tag{3.37}
$$

Destes resultados pode-se construir $\mathcal{R}_z$.

Para z : D=8t+0s

$$\mathcal{R}_{80} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{R}_{801} & 0 \\ \mathcal{R}_{802} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_{803}, \end{pmatrix}. \tag{3.38}$$

Isto é apresentado no Apêndice C.

Neste caso, também se verifica a invariância dos termos bilinear (B_{80}) e trilinear (T_{80}) sob a atuação do gerador $\mathcal{R}_{80}$ em nosso espaço de trabalho, D=8t+0s, na representação de Majorana-Weyl.

Em nossa construção, $\mathcal{P}_{80}$ e $\mathcal{R}_{80}$ satisfazem às relações

$$\mathcal{P}_{80}^2 \;=\; \mathcal{R}_{80}^2 \;=\; 1 \;,\; (\mathcal{P}_{80}\mathcal{R}_{80})^3 \;=\; 1. \tag{3.39}$$

mostrando, assim, sua natureza de gerador do grupo S_3.

2) y: D=4t+4s,

z: D=0t+8s.

Visto que os resultados obtidos nas eqs. (3.25), (3.27) e (3.29) são gerais , então obtemos:

$$\mathcal{P}_{08} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{081} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P}_{082} \\ 0 & \mathcal{P}_{083} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.40}$$

e usando as eqs (3.33), (3.35) e (3.37) chegamos a:

$$\mathcal{R}_{08} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{R}_{801} & 0 \\ \mathcal{R}_{082} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_{083}, \end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

o que se encontra no Apêndice D.

Verifica-se, então, que, ao fazer uma transformação no vetor, no espinor quiral e no espinor anti-quiral de forma semelhante à eq(2.89), os termos bilinear (B_{08}) e trilinear (T_{08}) ficam também invariantes sob a atuação do gerador $\mathcal{R}_{08}$ em nosso novo espaço de trabalho, D=0t+8s, na representação tipo Majorana-Weyl.

Assim, concluímos que, em cada uma das 3 métricas permitidas no espaço D=8 dimensões, é possível construir termos bilineares e trilineares que são invariantes frente ao grupo S_3.

Voltando à trialidade tipo-espaço-tempo em D=8 dimensões, esta pode ter uma ligação com teorias de supercordas em D=10 [8], sendo bem-conhecido que os espinores nestas dimensões são do tipo Majorana-Weyl, que têm neste caso 16 componentes reais. Usando uma nova simetria: a chamada simetria Kappa (κ) pode-se reduzir a 8 componentes reais, isto no gauge de cone-de-luz. Estas são conhecidas como coordenadas transversas; assim, nesta teoria de supecordas no gauge de cone-de-luz, os campos vetoriais e espinoriais (quiral e anti-quiral) têm o mesmo número de componentes (8). Agora segundo nossa tabela do Capítulo 1, em D=10 tem-se apenas 3 reepresentações de Majorana-Weyl, com as métricas:

$$g_1 = \text{diagonal}(+---------), \tag{3.42}$$

$$g_2 = \text{diagonal}(+++++-----), \tag{3.43}$$

$$g_3 = \text{diagonal}(+ + + + + + + + +-). \tag{3.44}$$

Mostramos finalmente um esquema de como se pode relacionar os espaços D=10 e D=8.

Assim, uma teoria de supercordas construída em D=1t+9s, pode-se relacionar com uma teoria de supercordas em D=5t+5s e D=9t+1s, isto devido a que as coordenadas transversas estão relacionadas via trialidade tipo-espaço-tempo, conforme o esquema apresentado abaixo.

$$\begin{pmatrix} & (5+5) & \\ / & & \backslash \\ (9+1) & - & (1+9) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} & (4+4) & \\ / & & \backslash \\ (8+0) & - & (0+8) \end{pmatrix}$$

Conclusões

Considerando a construção da trialidade proposta por E. Cartan [5] em D=8 dimensões, e levando em conta a representação tipo-Majorana [4], propusemonos, nesta tese, construir a Trialidade Tipo-Cartan (V-C-A), na representação de Majorana-Weyl em um espaço-tempo D=4t+4s. Obtivemos que a trialidade é um automorfismo externo do grupo SO(4,4), que é, na verdade, o grupo S_3: um grupo de permutação de 3 elementos (vetor, espinor quiral e o espinor antiquiral). Conseguimos construir os 3 geradores deste grupo e vimos que esta simetria de trialidade deixa invariante os termos bilinear e trilinear.

Além disto, obtivemos outro tipo de trialidade: Trialidade Tipo-Espaço-Tempo. Ao considerar a representação tipo Majorana, verifica-se que em D=8 só existem 3 assinaturas onde vivem espinores de Majorana-Weyl; estas são: D=4t+4s, D=8t+0s e D=0t+8s. Então, conseguimos construir as "matrizes de bridge", que relacionan todos os objetos nestas 3 assinaturas; assim, fomos capazes de construir os geradores $\mathcal{P}_{et}$ e $\mathcal{R}_{et}$ do grupo de permutação S_3 da simetria trialidade tipo-espaço-tempo. Neste nível, a trialidade é independente da estatística.

Finalmente, apresentamos a trialidade tipo-Cartan (V-C-A) em D=8t+0s e D=0t+8s, fazendo um mapeamento desta mesma trialidade (V-C-A) em D=4t+4s.

O resultado mais importante desta tese é que, em termos da trialidade tipo-espaço-tempo, conseguimos relacionar as 3 assinaturas possíveis (D=8), que são consideradas as coordenadas transversas da teoria de supercordas no gauge de cone-de-luz em D=10.

Desta forma, podemos relacionar as 3 possíveis teorias em D=10 nas assinaturas D=1t+9s, D=5t+5s e D=9t+1s.

Uma possível perspectiva de proseguimento é construir a trialidade tipo-Cartan misturando vetor, o espinor quiral e o espinor antiquiral, com o vetor em D=4t+4s, o espinor quiral em D=8t+0s e o espinor antiquiral em D=0t+8s.

Com estos objetos, pode-se construir os termos bilinear e trilinear, assim como os geradores $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}$ do grupo S_3 que deixam invariantes tais termos.

Apêndice A

A Representação (0_S+6_A) para as Matrizes-Γ em D=6

Para apresentar a construção das matrizes-Γ de Clifford em D=6 dimensões construímos aqui o caso onde as matrizes-Γ são todas anti-simétricas.

A representação que mostramos é correcta para representar um espaço Euclideano 6-dimensional na base de Majorana, isto é, coerente para: t=6 e s=0 (D=6t+0s), quando η=-1, como também para: t=0 e s=6 (D=0t+6s), quando η=1.

Assim, para construir a representação (0_S+6_A), utilizaremos a representação (3_S+3_A), que é facilmente obtida por meio do algoritmo apresentado no Capítulo 1, eq(1.52), e neste caso particular, consideremos que o espaço seja Euclideano (0t + 6s); agora, segundo a eq(1.45) temos s-t=6, que será de Majorana para η=1.

Agora, na MTR $(3_S + 3_A)$, o valor de η_A=1 corresponde a:

$$\mathcal{C}_A = \Pi\Gamma_A; \tag{A.1}$$

e, como fixamos D=0t+6s, então $\mathcal{A} = 1$. Portanto,

$$\mathcal{B} = \mathcal{C}_{\mathrm{A}}. \tag{A.2}$$

Agora, tentamos achar uma transformação U que mapeie $\mathcal{B} \longrightarrow U^{*}\mathcal{B}U^{\dagger} = \mathbf{1}$, eq(1.15); como conseqüência, obtemos $\Gamma^{i}_{(0S+6A)} = \mathrm{U}\Gamma^{i}_{(3S+3A)}\mathrm{U}^{\dagger}$, de acordo com eq(1.13). A matriz extra Γ^{7} também é antisimétrica.

O resultado final é apresentado aqui, onde todas as matrizes-Γ são reais ($\mathbf{\Gamma}^{i^2} = -\mathbf{1}$) (tipo-espaço):

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \qquad \Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix} \qquad \Gamma^4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Gamma^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

Apêndice B

A Representação (4_A+4_S) para as Matrizes-Γ em D=8

Neste apêndice, apresentamos em forma explícita as matrizes-Γ na representação de Majorana-Weyl; além disto, em cada caso, apresentamos também em forma explíta os geradores $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}$ do grupo de permutações S_3, que deixam invariantes os termos bilinear e trilinear para o caso $\eta = -1$ (espinores comutantes).

Nas 3 representações de Majorana -Weyl, admite-se a matriz-Γ^9 da forma:

$$\Gamma^9 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_8 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_8 \end{pmatrix}; \tag{B.1}$$

e Γ^i i = 1,2,...,8, tem a forma:

$$\Gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ \tilde{\sigma}^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{B.2}$$

Então, apresentamos os resultados para a representação-($4_A + 4_S$) das matrizes- Γ em o espaço-tempo t=4, s=4, onde todas são imaginárias.

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^5 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \qquad \sigma^6 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\tilde{\sigma}^{\mathrm{i}} = -\sigma^{\mathrm{i}^T}$, para i=1,2,3,4 e $\tilde{\sigma}^{\mathrm{i}} = \sigma^{\mathrm{i}^T}$, para i=5,6,7,8 isto é, as quatro primeiras matrizes-Γ (tipo-tempo) são anti-simétricas e as quatro últimas (tipo-espaço) são simétricas.

A matriz de conjugação de carga ($\mathcal{C}$) é dada assim:

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \mathbf{1_4} \oplus -\mathbf{1_4} \\ \tilde{C}^{-1} &= C^{-1}. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Agora, apresentamos os geradores: $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}$.

- Para $\mathcal{P}$, os elementos da eq(2.85) são:

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.4}$$

• Para $\mathcal{R}$, os elementos da eq(2.88) são:

$$\mathcal{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{B.5}$$

Apêndice C

A Representação (8_A+0_S) para as Matrizes-Γ em D=8

Apresentamos os dados necessários para construir o bilinear e o trilinear para t=8, s=0, onde $\eta = -1$.

As "matrizes-bridge" neste caso são:

$$
K_{V1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad K_{C1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathrm{K}_{\mathrm{A1}} = \begin{pmatrix}
0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

As matrizes-Γ neste caso são todas antisimétricas e imaginárias.

Então, temos:

$$
\sigma^1 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\qquad
\sigma^2 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\
0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\
0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^5 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \qquad \sigma^6 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde: $\tilde{\sigma}^{\mathrm{i}} = -\sigma^{\mathrm{i}T}$, para i=1,2,...,8

A matriz de conjugação de carga ($\mathcal{C}$) é dada como segue:

$$
\begin{aligned}
C^{-1} &= \mathbf{1}_8 \\
\tilde{C}^{-1} &= -\mathbf{1}_8.
\end{aligned}
\tag{C.1}
$$

- Para $\mathcal{P}_{80}$, os elementos da eq(3.30) são:

$$
\mathcal{P}_{801} = \begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}
$$

$$
\mathcal{P}_{802} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$\mathcal{P}_{803} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.2}$$

- Para $\mathcal{R}_{80}$, os elementos da eq(3.38) são:

$$\mathcal{R}_{801} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\mathcal{R}_{802} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\mathcal{R}_{803} = \begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix} \tag{C.3}
$$

Apêndice D

A Representação $(0_A + 8_S)$ para as Matrizes-Γ em D=8

Apresentamos os dados necessários para construir o bilinear e o trilinear para t=0, s=8, onde $\eta = -1$.

As "matrizes-bridge" neste caso são:

$$
K_{V2} = \begin{pmatrix}
0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\qquad
K_{C2} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\mathrm{K}_{\mathrm{A2}} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0
\end{pmatrix}
$$

As matrizes-Γ neste caso são todas simétricas e imaginárias.

Assim, temos:

$$
\sigma^1 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\qquad
\sigma^2 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\
0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\
0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^5 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \sigma^6 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde: $\tilde{\sigma}^{\mathrm{i}} = \sigma^{\mathrm{i}T}$, para i=1,2,...,8

A matriz de conjugação de carga ($\mathcal{C}$) é dada como segue:

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \mathbf{1}_8 \\ \tilde{C}^{-1} &= \mathbf{1}_8. \end{aligned} \tag{D.1}$$

- Para $\mathcal{P}_{08}$, os elementos da eq(3.40) são:

$$\mathcal{P}_{081} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_{082} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_{083} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{D.2}$$

- Para $\mathcal{R}_{08}$, os elementos da eq(3.41) são:

$$\mathcal{R}_{081} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}_{082} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}_{083} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{D.3}$$

Bibliografia

[1] L.P Colatto, M.A. de Andrade and F.Toppan, *"Matrix-Spacetimes and a 2D Lorentz-Covariant Calculus in Any Dimension"* Preprint CBPF-NF-063/98

[2] T. Kugo and P. Townsend, *Nucl.Phys* **B221** (1983) 357.

[3] M.A de Andrade, *"Espinores e álgebras de Clifford em qualquer espaço-tempo"* Preprint CBPF-MO-002/99

[4] M.A. de Andrade and F. Toppan, *"Real Structures in Clifford Algebras and Majorana Conditions in Any Space-Time."* Preprint CBPF-NF-013/99, hep-th/9904134, Mod. Phys. Lett **A14** (1999), 1797

[5] E. Cartan, *" The Theory of Spinors"*, Dover, New York, reedition 1981

[6] P. Budinich, *Phys.Rep* No **1** (1986) 35;
P. Budinich, *Commun. Math.Phys* **107** (1986), 455;
Liu Yufen, Ma ZhongQi and Hou BoYuan, *Commun.Theor.Phys* **31** (1999) 481,hep-th/9907009

[7] J.F. Adams, *"Spin(8), Triality,* F_4 *and all that"*, Proceedings of the Nuffield Workshop, Cambridge (1980), Ed S.W. Hawking and M. Rocek, Cambridge University Press.

[8] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, *" Superstring Theory" Vol I*, Cambridge University Press, First paperback edition 1988

[9] M.A de Andrade, M. Rojas and F. Toppan, *" Triality of Majorana-Weyl Spacetimes with Different Signatures"* Preprint CBPF-NF-039/99, hep-th/9907148

[10] A. Gambá, *J.Math.Phys*, **Vol 8** (1967) 775

[11] Rafael. I. Nepomechie, *Phys.Lett*, **B178** (1986) 207

[12] E. Witten, *Commun. Math.Phys*, **92** (1984) 455

[13] M.A de Andrade, M. Rojas and F. Toppan, *"The Signature Triality of Majorana-Weyl Spacetimes"* Preprint CBPF-NF-009/00, hep-th/0005035, submetido para publicação: JHEP

[14] C. Vafa, *Nucl.Phys* **B221** (1996) 403

[15] H. Nishino, *Nucl.Phys* **B542** (1999) 265

[16] I. Bars, C. Deliduman and O. Andreev, *Phys.Rev* **D58** (1998) 066004;
I. Bars, *Phys.Rev* **D58** (1998) 066006;
I. Bars, C. Deliduman and D. Minic, *Phys.Lett* **B457** (1999) 275

[17] A.D. Sakharov, *Sov.Phys. JETP* **60** (1984) 214

[18] M.P. Blencowe and M.J. Duff, *Nucl.Phys* **B310** (1988) 387;
M.J. Duff, *Supermembranes*, TASI Lecture Note (1996), hep-th/9611203 ;
M.J. Duff, *Int. Jour. Mod. Phys* **A14** (1999) 815

[19] C. M. Hull, *JHEP* **9811** (1999) 017;
C. M. Hull and R. R. Khuri, *Nucl.Phys* **B536** (1998) 219

"REDISCUTINDO A TRIALIDADE DE CARTAN"

Moisés Porfírio Rojas Leyva

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

J. A. Helayël - Neto.

José Abdalla Helayel Neto - Presidente

Marco Antônio de Andrade

Marco Antônio de Andrade – Co-orientador

Ion Vancea

Ion Vasile Vancea

Francesco Toppan

Francesco Toppan

Sebastião Alves Dias

Sebastião Alves Dias - Suplente

Rio de Janeiro, 19 de maio de 2000